UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

CLÁUDIA ROBERTA TRUZI

# O TEOREMA DE PITÁGORAS VIVENCIADO EM LABORATÓRIOS SOB A PERSPECTIVA LÚDICA

TRÊS LAGOAS
2024

CLÁUDIA ROBERTA TRUZI

# O TEOREMA DE PITÁGORAS VIVENCIADO EM LABORATÓRIOS SOB A PERSPECTIVA LÚDICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul Campus De Três Lagoas como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

____________________________________

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza

____________________________________

Prof. Dr. José Antonio Menoni

____________________________________

Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes da Silva

TRÊS LAGOAS

2024

Dedico este trabalho à minha mãe, que, do jeito simples dela me orientar e a qual foi impedida de estudar, sempre me disse: “Estuda”. Ao meu pai, que nunca deixou de apoiar meus estudos. E ao meu tio, Professor de Matemática, Vanderlei Truzzi (in memoriam).

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me guiar, proteger-me e iluminar-me em minha determinação.

Aos meus irmãos que sempre torceram por mim.

A todos os meus Professores desde a minha alfabetização, aos meus professores do mestrado pela humildade e seriedade para com o conhecimento e em especial ao meu orientador Prof. Fernando Pereira de Souza.

Também ao programa Profmat por me dar a oportunidade de realizar um sonho. Aos meus colegas de viagem durante meu primeiro ano, Professora Suzette e Professor Igor, fundamentais para que eu não desistisse do meu objetivo e aos meus colegas da turma 2022 do Profmat.

Por fim, aos meus amigos Professores João Evangelista Brito da Silva e Samira Eliza Pinto Máximo pelas contribuições.

*“Enquanto os seres humanos continuarem a destruir sem piedade os seres vivos dos reinos inferiores, não conhecerão nem a santidade nem a paz. Enquanto eles massacrarem os animais, haverão de se matar entre si. Com efeito, quem semeia morticínio e dor não pode colher alegria e amor.” (Pitágoras)*

# RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo o estudo sobre um importante Teorema que é introduzido nos anos finais do Ensino Fundamental e que pode ser aprofundado no Ensino Médio, sendo este o famoso e fascinante Teorema de Pitágoras, sobre o qual é pouco sabido na educação básica que há mais de 400 demonstrações dele. Assim, aqui se encontram algumas dessas demonstrações escolhidas por afinidades. O trabalho aborda algumas demonstrações algébricas, geométricas e possui um enfoque em atividades laboratoriais, as quais foram desenvolvidas em sala de aula. Logo espera-se que este estudo seja um importante aliado dos Professores, com o objetivo de diminuir a distância entre os estudantes e a Matemática, colaborando assim para uma aprendizagem significativa.

**Palavras-chave**: Pitágoras, Quebra Cabeça, Desafios, Lúdico.

**ABSTRACT**

This dissertation explores an important theorem introduced in the later years of Elementary Education and further examined in Secondary Education: the famous and fascinating Pythagorean Theorem. It is not widely known in basic education that there are over 400 proofs of this theorem. This work presents a selection of these proofs based on their affinities. The study includes both algebraic and geometric proofs and emphasizes laboratory activities developed in the classroom. It is anticipated that this study will be a valuable resource for teachers, helping to bridge the gap between students and mathematics and thereby contributing to meaningful learning.

**Keywords:** Pythagoras, Puzzle, Challenges, Educational Games.

**SUMÁRIO**

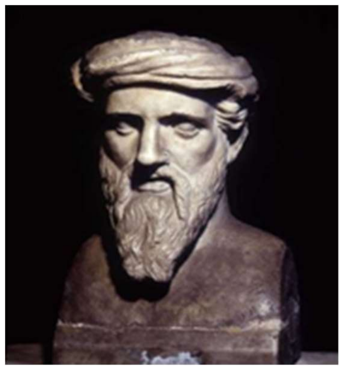
## Sumário

# INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de laboratórios através de quebra-cabeças, na experimentação dos alunos para a complementação do aprendizado sobre o Teorema de Pitágoras de uma forma lúdica.

Mas quem foi Pitágoras de Samos?

Busto de Pitágoras (século VI), Musei Capitolini, Roma



Fonte: Site “https://www.meisterdrucke.pt/”

Em se tratando de Pitágoras, descreve Pereira (2002, p.2), “há uma enorme dificuldade em se reconstituir pormenores de sua vida e obra, pois o conhecimento a seu respeito e sua história constitui-se de descrições parciais de relatos feitos muito tempo após sua morte”.

Pitágoras, citado por muitos estudiosos dentre eles, Platão e Aristóteles (https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/pitagoras-1.htm), nasceu na Ilha de Samos, Grécia, onde hoje é a Turquia, por volta de 570 a.C. e morreu por volta de 500 a.C (humanidades.com/br/pitagoras/). Adulto, em busca de novos conhecimentos, viajou para Síria, Arábia, Caldeia, Pérsia, Índia, Egito e Babilônia. Recebeu ensinamentos de estudiosos, matemáticos e filósofos como Ferécides, Thales e Anaximandro https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4406341/mod_resource/content/1/vida_pitagoras.pdf).

Ávido pela busca do conhecimento, propôs o número como princípio físico do universo e a relação de seus estudos com a música trouxe a invenção das proporções numéricas também conhecidas como intervalos musicais. Segundo Pitágoras, os números são a base da vida na Terra (https://www.todamateria.com.br/pitagoras/).

Não se sabe o ano ao certo, mas foi em Crotona, Sul da Itália, que Pitágoras fundou a primeira escola pitagórica, onde, juntamente com seus discípulos, discutia matemática, religião, política e filosofia (https://www.ebiografia.com/pitagoras/). Segundo Gomes (2010), a Escola era caracterizada por ser uma sociedade secreta, que tinha um código de conduta rigoroso, no qual os seus membros faziam um juramento de não revelar suas descobertas, que eram dedicadas ao seu fundador. Logo, não havia relatos em escrito.

Enquanto Tales é muitas vezes conhecido como o primeiro filósofo na história, Pitágoras é usualmente considerado o primeiro matemático (Marques, p. 102), pois como naquela época não havia preocupação quanto às demonstrações matemáticas, conjectura-se que o Teorema é atribuído a Pitágoras por ser ele, com seus discípulos, quem o demonstrou pela primeira vez (Wagner, p. 2).

No tocante pedagógico, a BNCC relata que:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (Brasil, p.266).

Isso nos indica que devemos associar o ensino aprendizagem da matemática a teorias que preconizam o raciocínio lógico aliado ao lúdico como apresentado nesta dissertação.

Ainda na BNCC do 9º Ano, no ramo da Geometria, um dos objetos de conhecimento é o Teorema de Pitágoras, o qual envolve as verificações experimentais e demonstração (Brasil, p.318), cujas habilidades são:

> (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras,

> utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos (Brasil, 2018, p.319).
>
> (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes (Brasil, 2018, p.319).

À medida que o educando salta do Ensino Fundamental (E.F.) para o Ensino Médio (E.M.), é muito importante que sejam trabalhadas outras demonstrações do Teorema de Pitágoras, a fim de lhes dar um melhor embasamento e desenvolvimento de seu raciocínio, por meio de uma aprendizagem sólida como enunciada em "Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias Para o Ensino Médio

> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BNCC, 2018, p.531).

Assim sendo, esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

No capítulo 1 procuramos dar conhecimentos algumas das muitas demonstrações do Teorema de Pitágoras, sendo a maior parte delas algébricas.

No capítulo 2 são apresentadas algumas de suas extensões não quadradas de polígonos regulares como por exemplo o triângulo e o hexágono, de semicírculos, cujos diâmetros são os lados do triângulo retângulo e a generalização de George Polya sobre figuras semelhantes.

Já no capítulo 3 apresentamos alguns exemplos de atividades para construção em sala de aula, o que resultou um material concreto para uma aprendizagem significativa, envolvendo áreas, inclusive como sugestão para utilização do software Geogebra, de recursos extraordinários.

Por fim, no capítulo 4, é a “mão na massa” onde foram realizadas as atividades de laboratórios, utilizando na prática, alguns quebra-cabeças quadrados e hexagonais. Destaca-se aqui o laboratório 3, por comparação de áreas, atribuído a Pitágoras de Samos e no laboratório 5, a demonstração por Bhaskara.

# CAPÍTULO 1: ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

No livro de Elisha Scott Loomis (1852-1940), “The Pythagorean Proposition”, há na segunda edição publicada em 1940, 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras (Loomis, 1968).

Elisha Scott Loomis foi professor de Matemática em Cleveland, Ohio (EUA), era um apaixonado por tal Teorema e, durante 20 anos, de 1907 a 1927, foi coletando demonstrações do mesmo, as quais classificou em dois grupos: as provas algébricas e as geométricas. As algébricas são baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos e as geométricas são baseadas em comparações de áreas.

Neste capítulo abordaremos algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, o qual, atualmente, possui mais de 400 (Silva, p. 21).

Há que se tomar um certo cuidado em relação ao desenvolvimento com alunos, pois é através da prova algébrica que caracteriza-se a veracidade das proposições.

Portanto, neste capítulo, teremos algumas provas interessantes escolhida pela autora por afinidade, ora de matemáticos brilhantes como Pitágoras, Euclides, Bháskara, John Wallis, Pólya, ora de matemáticos amadores e admiradores das ciências como o ex presidente americano James A. Garfield e Henry Perigal.

## 1.1. ENUNCIADO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

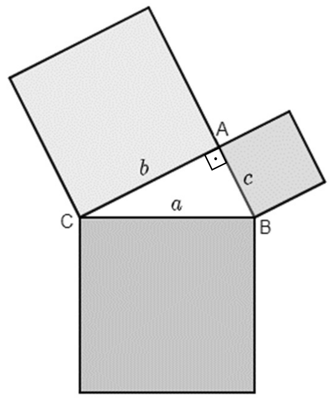
Atualmente o Teorema de Pitágoras não é mais enunciado como foi em “Os Elementos”, de Euclides: **“Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contém o ângulo reto”**

Os livros didáticos trazem o teorema da seguinte forma: **“A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos”**

No entanto, para facilitar esta elucidação, alguns livros ainda trazem**: “O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados de seus catetos”.**

***Definição*** $\mathbf{1.1}$***:*** *Triângulos retângulos são triângulos que possuem um ângulo reto* $(90°)$ *e o lado que se opõe ao ângulo reto é denominado hipotenusa e os outros dois lados são denominados catetos.*

Figura 1.1: Triângulo Retângulo de hipotenusa $a$ e catetos $b$ $e$ $c$ com os quadrados construídos sobre os seus lados




Fonte: A autora

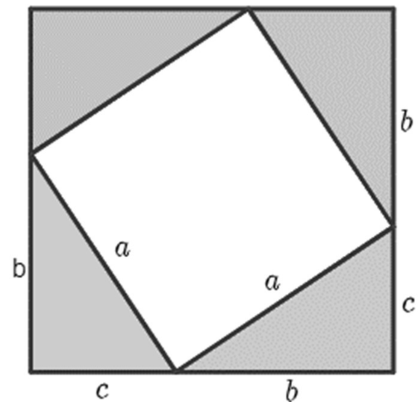
## 1.2. A NOTÁVEL DEMONSTRAÇÃO

Esta é considerada a "Demonstração Clássica" do teorema de Pitágoras, a qual pode ter sido a demonstração feita por Pitágoras, com sutis alterações (Eves, p. 103).

***Proposição*** $\mathbf{1.1}$: *A área do quadrado de lado* $a$ *na Figura* 1.1 *é equivalente à soma das áreas dos quadrados de lados* $b$ *e* $c$.

**Demonstração Geométrica:** Considere um quadrado de lados $(b + c)$ como mostrado na Figura 1.2. Considere também, a Figura 1.2, como sendo um quebra-cabeças que possui 4 peças congruentes triangulares retangulares cujos catetos medem $b$ e $c$ e um espaço "ao meio" que forma um quadrado de lado $a$ (hipotenusa $a$ dos triângulos retângulos).

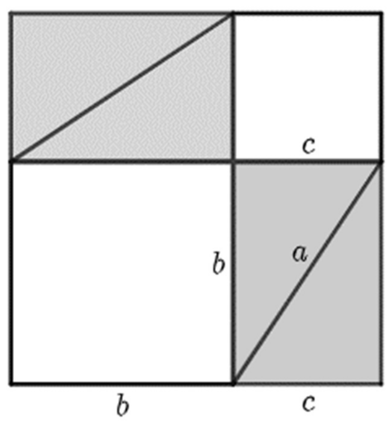
Figura 1.2: Quadrado de lado $b + c$




Fonte: A autora

Arrastando estes mesmos 4 triângulos da Figura 1.2 e dispondo-os como na Figura 1.3 de mesmo lado $(b + c)$, temos agora formados dois quadrados de lados $b$ e $c$ mais os mesmos 4 triângulos retângulos congruentes:

Figura 1.3: Reconstrução do quadrado de lado $b + c$




Fonte: A autora

Em ambas as Figuras 1.2 e 1.3 temos as mesmas áreas $(b + c)^2$ e os mesmos quatro triângulos retângulos congruentes. Então concluímos que a área do quadrado de lado $a$ da Figura 1.2 é igual à soma das áreas dos quadrados de lados $b$ e $c$ da Figura 1.3. Disto concluímos que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

**Demonstração Algébrica:** Na Figura 1.2 temos que a área do quadrado de lado $(b + c)$ pode ser escrita como:

$$4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2. \qquad (1.1)$$

Na Figura 1.3 temos o mesmo quadrado de lado $(b + c)$ e que agora podemos decompor a área por:

$$4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + b^2 + c^2. \qquad (1.2)$$

De (1.1) e (1.2), obtemos:

$$4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2 = 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

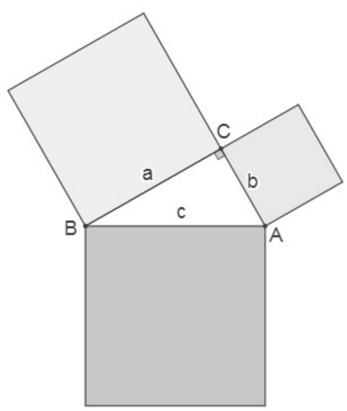
demonstrando assim o Teorema de Pitágoras.

## 1.3. A DEMONSTRAÇÃO QUE ESTÁ NO LIVRO DE EUCLIDES "OS ELEMENTOS", ESCRITO POR VOLTA DE 300 A.C

***Proposição 1.2: Teorema de Pitágoras. (Proposição I-47 de Os Elementos)***

*Nos triângulos retângulos, a área do quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual a soma das áreas dos quadrados sobre os lados que contém o ângulo reto.*

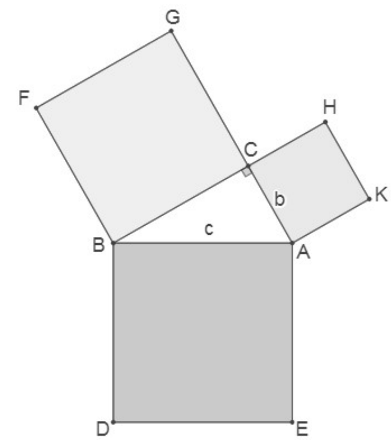
Figura 1.4: Ilustração da demonstração de Euclides




Fonte: A autora

**Demonstração:** Especificamente nesta demonstração utilizaremos a hipotenusa de medida $c$ e os catetos de medidas $a$ e $b$. Considere os quadrados $ABDE$, $CAKH$ e $BCGF$, construídos sobre os lados do triângulo $ABC$, reto em $C$, conforme mostra a Figura 1.5:

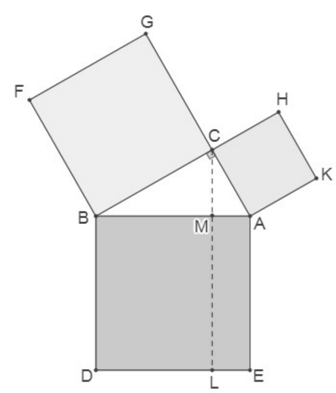
Figura 1.5: Triângulo Retângulo $ABC$ com os quadrados $ABDE$, $CAKH$ e $BCGF$, construídos sobre os seus lados




Fonte: A autora

Prolongando a altura do triângulo $ABC$ sobre a base $AB$ obtemos o ponto $L$ no lado $DE$. Logo, $BD$ é paralelo a $CL$. Seja $M$ o ponto de encontro de $CL$ com $AB$.

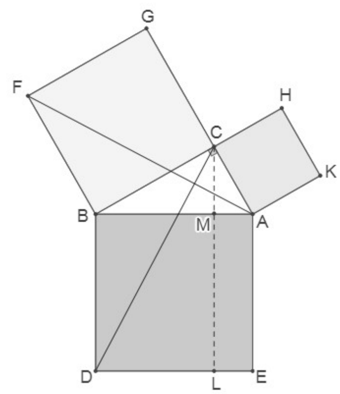
Figura 1.6: Construção do segmento $CL$




Fonte: A autora

Traçando os segmentos $CD$ e $AF$ obtemos a Figura 1.7:

Figura 1.7: Construção dos triângulos $ABF$ e $BCD$




Fonte: A autora

Como $CB \equiv BF, AB \equiv BD$ e $A\hat{B}F = 90^{\circ} + C\hat{B}A = C\hat{B}D$ então os triângulos $ABF$ e $CBD$ são congruentes pelo caso $LAL$. Logo a área dos triângulos $ABF$ e $BCD$ são iguais $\left(A_{(ABF)} = A_{(BCD)}\right)$.

Temos também que:

$$A_{(BCD)} = \frac{1}{2} A_{(BDLM)}, \tag{1.3}$$

pois ambos possuem a mesma base $BD$ e altura $BM$.

Ainda temos que:

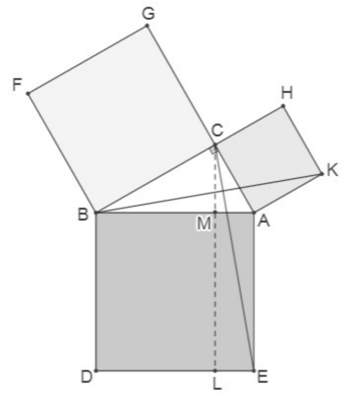
$$A_{(ABF)} = \frac{BF \cdot FG}{2} = \frac{1}{2} A_{(BCGF)}. \tag{1.4}$$

Como os triângulos $BCD$ e $ABF$ são congruentes, concluímos de (1.3) e (1.4) que:

$$A_{BDLM} = A_{BCGF.}$$

De forma análoga, traçando os segmentos $CE$ e $BK$, como na Figura 1.8:

Figura 1.8: Construção dos triângulos $ACE$ e $ABK$




Fonte: A autora

Note que $AK \equiv AC$ e $AB \equiv AE$ e $B\hat{A}K = 90^{\circ} + B\hat{A}C = C\hat{A}E$, então os triângulos $ACE$ e $ABK$ são congruentes pelo caso $LAL$. Logo as áreas dos triângulos $ACE$ e $ABK$ são iguais ($A_{(ACE)} = A_{(ABK)}$). Note que a área do triângulo $ACE$ é dada por:

$$A_{(ACE)} = \frac{AE \cdot AM}{2} = \frac{1}{2} A_{(AMLE)}, \tag{1.5}$$

observe que a área do triângulo $ABK$ é dada por:

$$A_{(ABK)} = \frac{AK \cdot HK}{2} = \frac{1}{2} A_{(ACHK)}. \tag{1.6}$$

Como os triângulos $ACE$ e $ABK$ são congruentes, concluímos por (1.5) e (1.6) que:

$$A_{(AMLE)} = A_{(ACHK)}.$$

Oras, como $A_{(ABDE)} = A_{(BDLM)} + A_{(AELM)}$, então, obtemos:

$$A_{(ABDE)} = A_{(BCGF)} + A_{(ACHK)},$$

o que demonstra o Teorema de Pitágoras.

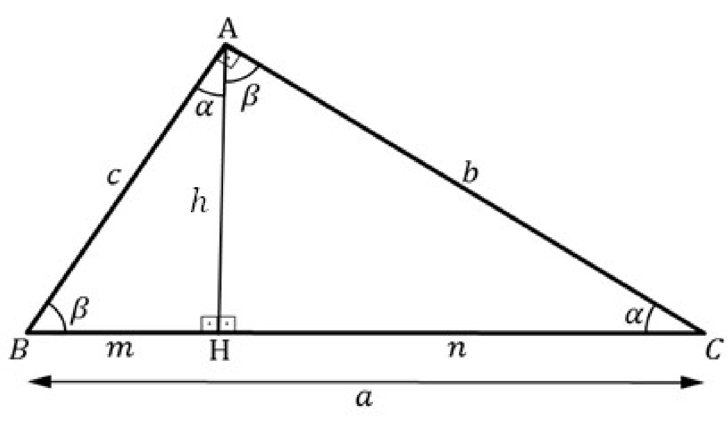
## 1.4. DEMONSTRAÇÃO POR SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Esta é uma demonstração bastante utilizada nas escolas, pelo fato de abranger semelhança de triângulos e, por consequência, as relações métricas nos triângulos retângulos. É conhecida como a prova tradicional do Teorema de Pitágoras. É atribuída a John Wallis $(1616 - 1703)$, um matemático britânico o qual foi o primeiro a usar o símbolo para o infinito que é utilizado hoje e que, a partir do seu livro Arithmetica Infinitorum, foi de grande importância para Issac Newton dar continuidade às suas pesquisas, obtendo, como um de seus primeiros êxitos, a resolução da quadratura do círculo na forma de uma série infinita (http://ecalculo.if.usp.br/historia/wallis.htm). Seus trabalhos também contribuíram para a origem do cálculo.

***Definição*** $\mathbf{1.2}$***:*** *Dois triângulos são ditos semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca, que associa os vértices de um triângulo aos vértices de outro triângulo, onde ângulos com vértices correspondentes são congruentes e lados opostos a vértices correspondentes têm medidas proporcionais.*

Na Figura 1.9 temos um triângulo $ABC$, com ângulo reto em $A$, a altura relativa ao lado $BC$ divide o triângulo $ABC$ em dois triângulos $ABH$ e $CAH$ que são semelhantes pelo caso $AA$ pois $H\hat{A}B \equiv H\hat{C}A$, $A\hat{B}H \equiv C\hat{A}H$, e assim temos $\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$.

Figura 1.9: Triângulo Retângulo em $A$




Fonte: A autora

***Proposição 1.3:*** *Seja $ABC$ um triângulo retângulo em $A$ com hipotenusa de medida $a$ e catetos de medidas $b$ e $c$. Temos que $a^2 = b^2 + c^2$.*

**Demonstração:** Os triângulos $CBA$, $ABH$ e $ACH$são todos semelhantes entre si. De fato:

$CBA \approx ABH$ pois possuem um ângulo comum $A\hat{B}H = C\hat{B}A$, tem um ângulo reto e pelo caso $AA$ , os triângulos são semelhantes.

$CBA \approx ACH$ pois possuem um ângulo comum $A\hat{C}H = A\hat{C}B$, tem um ângulo reto e pelo caso $AA$ , os triângulos são semelhantes.

Da semelhança entre os triângulos $CBA$ e $ABH$, obtemos:

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot m. \qquad (1.7)$$

Agora, pela semelhança entre triângulos $CBA$ e $ACH$, temos que:

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot n. \qquad (1.8)$$

Somando (1.7) e (1.8) temos:

$$a \cdot n + a \cdot m = b^2 + c^2$$

$$a(n + m) = b^2 + c^2,$$

como $n + m = a$, segue que $a^2 = b^2 + c^2$.

## 1.5. DEMONSTRAÇÃO POR BHASKARA

Bhaskara Acharya nasceu, viveu e morreu na Ìndia entre 1114 a 1185 (Chaquiam, p. 53). Seus livros mais importantes são *Siddahanta-siromani* (Astronomia) e *Bijaganita* (Álgebra), inclusive, este último trouxe grande relevância para as equações indeterminadas do 2º grau contribuindo muito com a invenção do método interativo do chakravala e a modificação do clássico método kuttaka (http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/bhaka.html).

O Teorema de Bhaskara, conhecido pela fórmula resolutiva da equação do 2º grau, foi erroneamente, no Brasil, atribuído a ele. Em relação à sua demonstração do Teorema de Pitágoras, não há quase relatos. Apenas disse “Veja” ou “Contemple” que, apesar de parecer simplório, é quem tem a desenvoltura para com o intelecto.

***Definição* 1. 3**: *Segmentos congruentes têm medidas iguais e, reciprocamente, segmentos que têm medidas iguais são congruentes.*

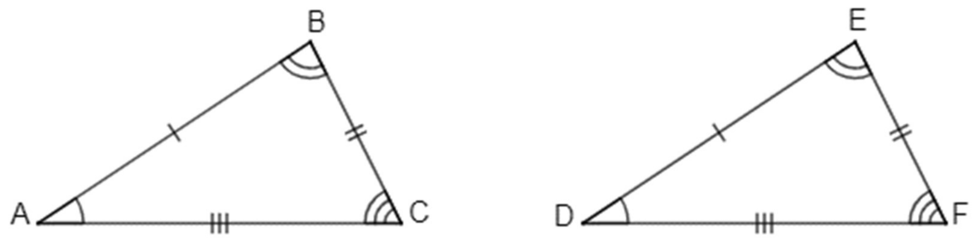
***Definição* 1. 4**: *Um triângulo é congruente (símbolo ≡) a outro se, e somente se é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que*

*. seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e*

*. seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.*

*Três são os casos de congruência: Lado, Ângulo, Lado (LAL), Ângulo, Lado, Ângulo (ALA) e Lado, Lado, Lado (LLL).*

*Figura 1.10: Triângulos Congruentes*

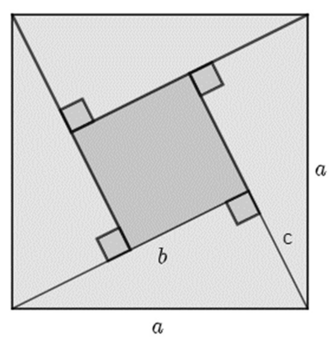



*Fonte: A autora*

$$\Delta ABC \equiv \Delta DEF \leftrightarrow \left( \begin{matrix} AB \equiv DE \\ AC \equiv DF \\ BC \equiv EF \end{matrix} \quad e \quad \hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}, \ \ \hat{C} \equiv \hat{F} \right)$$

**Proposição 1.4:** Sobre os lados de um quadrado de lado $a$, são construídos quatro triângulos retângulos com catetos de medidas $b$ e $c$, conforme a construção de Bhaskara exibido na Figura 1.11. Então $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 1.11: Construção de Bhaskara




Fonte: A autora

**Demonstração:** A área de todo o quadrado é igual a $a^2$. Juntando as partes que estão dentro do quadrado de lado $a$, temos quatro triângulos retângulos congruentes de catetos $b$ e $c$ e um quadrado, no centro, de lado $(b - c)$. Desta forma, temos que:

$$a^2 = 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + (b - c)^2,$$

$$a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

o que demonstra o Teorema de Pitágoras.

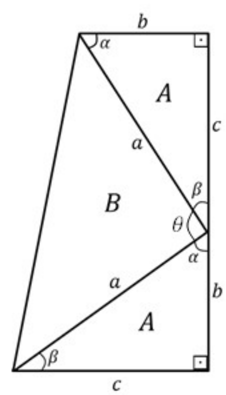
## 1.6. DEMONSTRAÇÃO POR JAMES A. GARFIELD

James Abrahan Garfield$(1831 - 1881)$ foi um general, advogado, professor, orador habilidoso e político norte-americano. Foi o $20^{\underline{o}}$ presidente dos Estados Unidos, porém num curto período de tempo (aproximadamente $7$ meses). Tinha uma firme oposição à escravidão. Foi baleado por um advogado com instabilidades mentais e veio a falecer $2$ meses após, devido às consequências do ocorrido (https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96613/Fernando.pdf?sequence=1%3E).

James A. Garfield era um grande estudioso da matemática e, em um dos seus momentos de distração, rabiscou num papel uma demonstração interessante do Teorema de Pitágoras (Silva, p. 35).

Primeiramente Garfield construiu um triângulo retângulo de catetos $b$ e $c$ e hipotenusa $a$ do triângulo $(A)$. Depois desenhou o mesmo triângulo retângulo, em outra posição, ligados pelo mesmo vértice, colocando em alinhamento o cateto $c$ do triângulo $(A)$ com o cateto $b$ do segundo triângulo como nos mostra a Figura $1.12$:

Figura 1.12: Construção por Garfield




Fonte: A autora

Observe que na Figura $1.12$ temos também um trapézio, retângulo formado por três triângulos retângulos, os quais dois são congruentes.

Por quê o triângulo $(B)$ é retângulo? Como o triângulo $(A)$ tem ângulos $\alpha$ e $\beta$ e o vértice que está sobre o alinhamento $(c + b)$, que formam três ângulos cuja soma é $180°$ e, $\alpha + \beta = 90°$ (pelos dois triângulos congruentes), concluímos que o ângulo $\theta = 90°$.

***Proposição 1.5:*** *Considerando a construção feita por Garfield, temos no triângulo* $(A)$*, pertencente ao trapézio, que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, ou seja,* $a^2 = b^2 + c^2$.

***Demonstração***: Vamos calcular a área do triângulo $(A)$ da Figura 1.12 de dois modos:

Calculando a área do trapézio, obtemos:

$$\acute{A}rea = \frac{(c+b)\cdot(c+b)}{2} = \frac{(c+b)^2}{2}$$

$$= \frac{c^2}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{b^2}{2}. \tag{1.9}$$

Pela somas das partes dos três triângulos retângulos, temos que:

$$\acute{A}rea = \frac{b\cdot c}{2} + \frac{a\cdot a}{2} + \frac{b\cdot c}{2}$$

$$= \frac{2bc}{2} + \frac{a^2}{2}. \tag{1.10}$$

Igualando $(1.9)$ e $(1.10)$, temos:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{2bc}{2} + \frac{a^2}{2},$$

então, simplificando, chegamos à:

$$c^2 + 2bc + b^2 = 2bc + a^2,$$

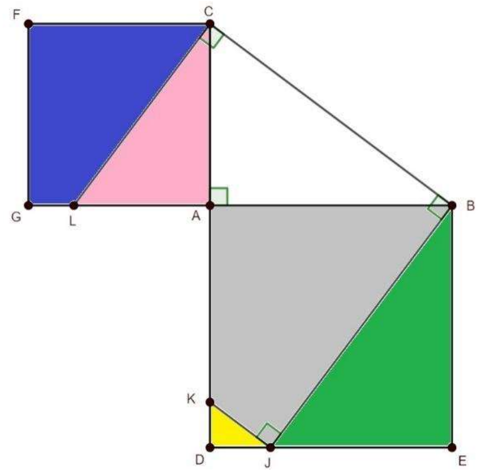
ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$, o que demonstra o Teorema de Pitágoras.

## 1.7. DECOMPOSIÇÃO EM 5 POLÍGONOS

Esta decomposição é atribuída a Jacques Ozanam (1640 – 1717), matemático francês, que ficou conhecido no meio acadêmico do continente europeu, a partir de várias menções de Leibniz a seus trabalhos. Uma de suas obras foi o *Dictionnaire mathématique*, um dicionário de matemática, publicado em Amsterdã no ano de 1691 (https://www.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=81).

Seja um triângulo $ABC$ reto em $A$. Agora considere os quadrados $ABED$ e $ACFG$ construídos respectivamente sobre os catetos $AB$ e $AC$. Sejam $J$ e $K$onde $J \in DE$ e $K \in AD$ tais que $BJ \perp BC$ e $JK \perp BJ$ e no quadrado $ACFG$, $L \in AG$ tal que $LC \perp BC$. Dessa forma, os quadrados construídos sobre os catetos ficaram decompostos em 5 polígonos que são $ABJK$, $BEJ$, $JKD, ACL$e $CFGL$, como pode ser observado na Figura 1.13.

Figura 1.13: Decomposição de Jacques Ozanam




Fonte: A autora

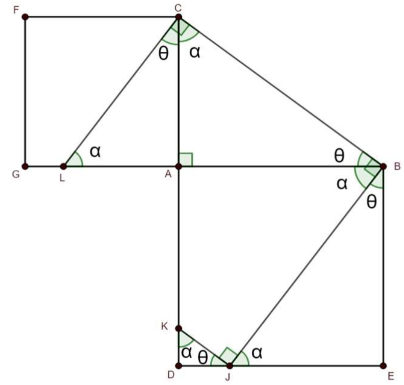
***Proposição 1.6:*** *Considerando a decomposição de Jacques Ozanam, a soma das áreas dos cinco polígonos $ACL$, $CFGL$, $ABJK$, $DJK$, $BEJ$, obtidos a partir dos quadrados construídos sobre os catetos $AC$ e $AB$ , é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa $CB$.*

**Demonstração:** Considere no triângulo $ABC$ da Figura $1.14$, a hipotenusa $BC = a$ e os catetos $AC = b$, $AB = c$ e ainda $A\hat{C}B = \alpha$ e $C\hat{B}A = \theta$.

Os triângulos $ABC$ e $EBJ$ são congruentes pelo caso $ALA$ pois possuem um ângulo reto $J\hat{E}B \equiv C\hat{A}B$, lado $EB = AB$ (por construção) e um ângulo comum $A\hat{B}C \equiv E\hat{B}J$. Logo $BJ \equiv BC = a$.

Por construção temos que $C\hat{B}J = 90°$ e como $\alpha + \theta = 90°$ então $A\hat{B}J = \alpha$. Mas os lados $AB$ e $DE$ são paralelos, assim $B\hat{J}E = \alpha$ e consequentemente $J\hat{B}E = \theta$. Agora observamos que por construção $B\hat{J}K = 90°$, logo $D\hat{J}K = \theta$ e $D\hat{K}J = \alpha$.

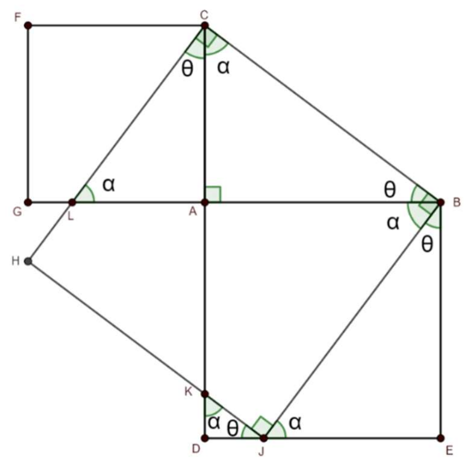
Figura 1.14: Indicação dos ângulos na decomposição de Jacques Ozanam




Fonte: A autora

Seja $H$ o ponto de intersecção do prolongamento do lado $JK$ com o prolongamento do lado $CL$.

Figura 1.15: Construção do quadrado $CBJH$

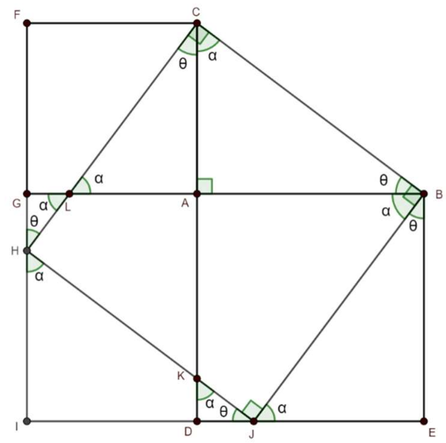



Fonte: A autora

Assim, $CBJH$ é um quadrado de lado $a$. Como os triângulos $ABC$ e $BEJ$ são congruentes, basta provarmos que a soma das áreas do triângulo $DJK$ e do trapézio $CFGL$ é equivalente à área do polígono $AKHL$.

De fato, seja $I$ o ponto de intersecção das semirretas $DE$ e $FG$, conforme a Figura 1.16. Observe que $G\hat{L}H = \alpha$ pois é oposto pelo vértice, logo $G\hat{H}L = \theta$. O triângulo $HIJ$ é retângulo em $I$ e como $K\hat{J}I = \theta$ então $I\hat{H}J = \alpha$. Dessa forma, os pontos $G$, $H$ e $I$ estão alinhados pois $G\hat{H}L + C\hat{H}J + I\hat{H}J = 180^{\circ}$ e então o quadrilátero $ADIG$ é um retângulo.

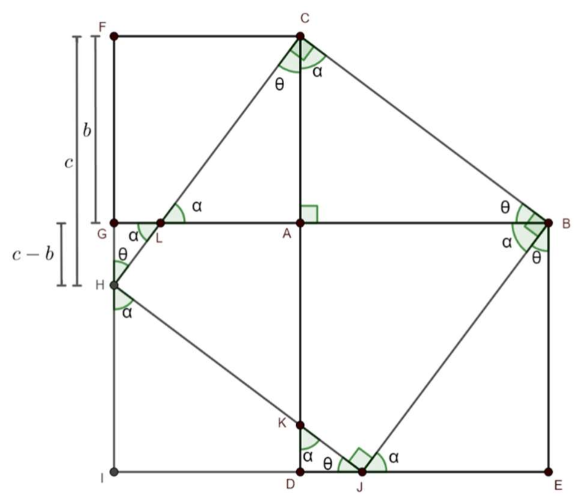
Figura 1.16: Construções Auxiliares




Fonte: A autora

Temos que o triângulo $FHC$ é congruente ao triângulo $ABC$ por $LAL$ pois $FC \equiv AC$, $F\hat{C}H \equiv A\hat{C}B = \alpha$ e $CH \equiv BC$. Então $FH = c$. Como $FG = b$, temos que $GH = (c - b)$. Ora, então os triângulos $GHL$ e $JKD$ são congruentes por $ALA$ pois $L\hat{G}H \equiv K\widehat{D}J$, $GH \equiv DJ$e $G\widehat{H}L \equiv D\hat{J}K$.

Figura 1.17: Congruência dos triângulos $GHL$ e $JKD$




Fonte: A autora

Observe também que os triângulos $CFH$ e $HIJ$ são congruentes por $LAL$ ($CF \equiv HI = b$, $C\hat{F}H \equiv H\hat{I}J$ e $FH \equiv IJ = c$), e como os triângulos $GHL$ e $JKD$ são congruentes por $ALA$, temos então que os quadriláteros $CFGL$ e $DIHK$ também são congruentes.

Desta forma, obtemos:

$$A_{(CFGL)} + A_{(DJK)} = A_{(HIDK)} + A_{(DJK)} = A_{(HIJ)} = \frac{b \cdot c}{2}. \qquad (1.11)$$

Como os triângulos $GHL$ e $JKD$ são congruentes, então:

$$A_{(HIDK)} + A_{(GHL)} = \frac{b \cdot c}{2}. \quad (1.12)$$

Da área do retângulo $ADIG$ e $(1.12)$, temos que:

$$A_{(ADIG)} = A_{(GHL)} + A_{(AKHL)} + A_{(HIDK)} = b \cdot c,$$

Então

$$A_{(AKHL)} = \frac{b \cdot c}{2}. \quad (1.13)$$

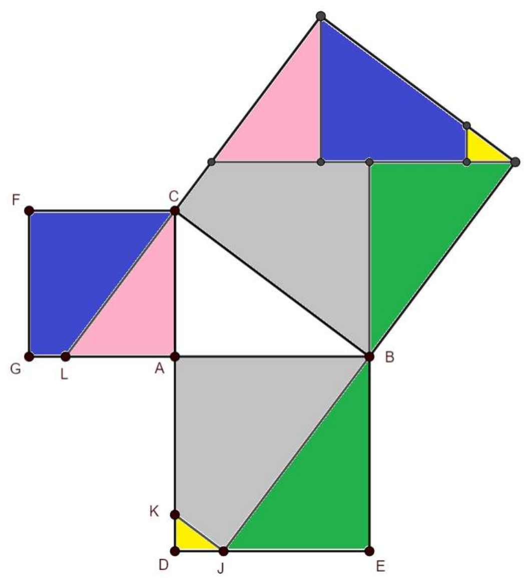
Assim, de $(1.11)$ e $(1.13)$ temos que:

$$A_{(DJK)} + A_{(CFGL)} = A_{(AKHL)}.$$

Portanto

$$A_{(BEJ)} + A_{(ABJK)} + A_{(JKD)} + A_{(ACL)} + A_{(CFGL)} = A_{(CBJH)} = a^2.$$

Figura 1.18: Resolução do quebra cabeça de Jacques Ozanam




Fonte: A autora

## 1.8. A RECÍPROCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

A escolha desta demonstração está no fato de que é importante conversar com os alunos sobre equivalência e fazer assim sua demonstração, desta forma os alunos têm um conhecimento maior sobre o Teorema de Pitágoras.

Podemos afirmar que em todo triângulo que é retângulo vale a igualdade

$$a^2 = b^2 + c^2 \ ,$$

onde $a$ é sua hipotenusa $b$ e $c$ são os catetos.

Mas será que sua recíproca é verdadeira? Ou seja, se $a^2 = b^2 + c^2$ então temos um triângulo retângulo com hipotenusa medindo $a$, e seus catetos medindo $b, c$? A resposta é afirmativa e mostraremos na proposição seguinte.

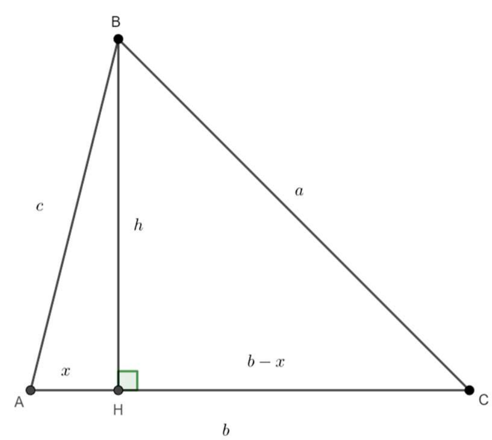
***Proposição 1.7*** *Se $a$, $b$ e $c$ forem as medidas dos lados de um triângulo tal que $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo de hipotenusa $a$ e catetos $b$ e $c$.*

**Demonstração:** Considere um triângulo $ABC$ onde $AB = c, AC = b$ e $BC = a$. Temos dois casos a analisar:

**1º Caso:** $\hat{A} < 90°$

Seja $H$ o pé da perpendicular do triângulo $ABC$ com base em $AC$. Seja $x = AH$, logo $b - x = HC$.

Figura 1.19: Ângulo Â agudo




Fonte: A autora

Observe na Figura 1 que o triângulo $ABH$ é retângulo em $H$. Desta forma, temos que:

$$c^2 = x^2 + h^2. \tag{1.14}$$

Do mesmo modo, o triângulo $BCH$ também é retângulo. Temos então que:

$$a^2 = (b - x)^2 + h^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2. \tag{1.15}$$

De (1.14) e (1.15) temos:

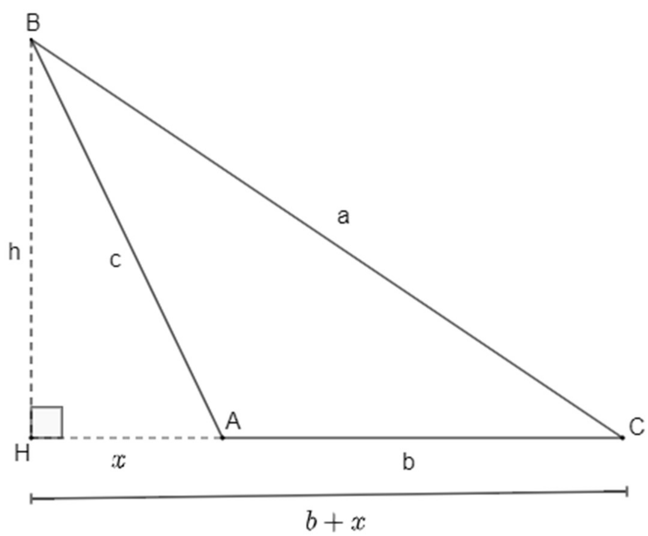
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

Pelo fato de $-2bx < 0$ então $a^2 < b^2 + c^2$.

**2º Caso:** $\hat{A} > 90°$

Seja $H$ o pé da altura do triângulo $ABC$ relativo ao lado $AC$. Neste caso a altura $BH$do triângulo $ABC$é exterior, pois o triângulo é obtuso. Seja $x = AH$, logo $x + b = HC$.

Figura 1.20: Ângulo Â obtuso




Fonte: A autora

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $AHB$, obtemos:

$$c^2 = h^2 + x^2. \tag{1.16}$$

Analogamente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $BCH$, obtemos:

$$a^2 = h^2 + (x + b)^2$$

$$a^2 = h^2 + x^2 + 2bx + b^2 \tag{1.17}$$

De (1.16) e (1.17), temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx,$$

mas $2bx > 0$, então $a^2 > b^2 + c^2$.

Portanto, quando Â é agudo temos $a^2 < b^2 + c^2$ e quando Â é obtuso obtemos $a^2 > b^2 + c^2$. Então concluímos que quando $a^2 = b^2 + c^2$, devemos ter Â $= 90°$.

# CAPÍTULO 2: EXTENSÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Neste capítulo trataremos de mostrar um pouco da construção sobre os lados relativos à hipotenusa e aos catetos, outros polígonos que não sejam o quadrado, mas sim o triângulo equilátero, o hexágono regular e até mesmo a extensão não retilínea dos semicírculos e, além disso, a generalização de George Polya.

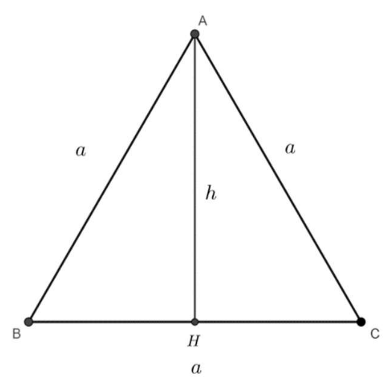
## 2.1 TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS

Notemos que em um triângulo equilátero de lado $a$, a altura $h$ e a área $A$ do triângulo são dadas respectivamente por:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ e } A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

onde sua altura pode ser demonstrada pela aplicação do Teorema de Pitágoras como mostraremos na figura 2.1. Considere triângulo equilátero de vértices $ABC$ e lado medindo $a$ e $H$ o pé da altura do triângulo $ABC$ relativo ao lado $BC$ como mostra a Figura 2.1.

Figura 2.1 Triângulo equilátero




Fonte: A autora

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $ABH$, temos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

E a área do triângulo equilátero $ABC$ sendo assim obtida:

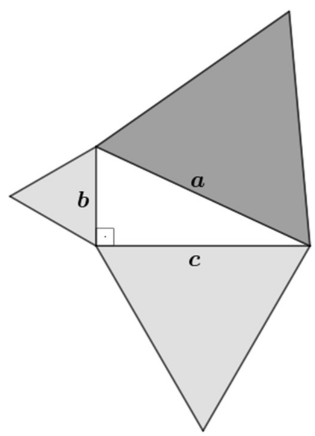
$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \tag{2.1}$$

Para os casos seguintes, considere um triângulo retângulo de hipotenusa $a$ e catetos $b$ e $c$. De posse da fórmula da área do triângulo equilátero e do teorema de Pitágoras vamos mostrar algumas variações deste mesmo teorema.

***Proposição 2.1:*** *A área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual à soma das áreas de triângulos equiláteros construídos sobre os catetos deste triângulo.*

**Demonstração:** Considere o triângulo retângulo com hipotenusa medindo $a$ e catetos medindo $b, c$. Sob cada lado construímos triângulos equiláteros conforme a Figura 2.2:

Figura 2.2: Triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo




Fonte: A autora

Sejam $A_a$, $A_b$ e $A_c$ áreas dos triângulos equiláteros construídos, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos. Então, de (2.1) temos que:

$$A_a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, A_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \; e \; A_c = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Somando as áreas $A_b$ e $A_c$ e aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$A_b + A_c = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= (b^2 + c^2)\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

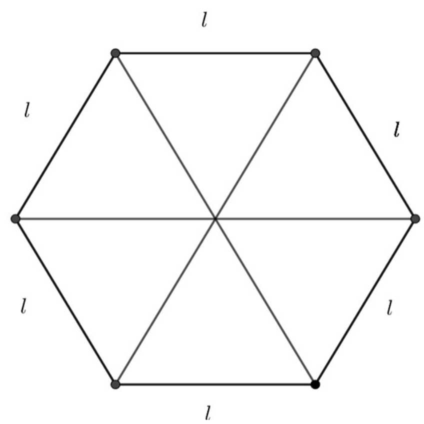
$$= A_a \ .$$

Portanto, $A_a = A_b + A_c$, como queríamos demonstrar.

## 2.2 HEXÁGONOS REGULARES

A palavra hexágono tem origem na língua grega, em que héx se refere ao número seis e gonía refere-se a ângulo. Portanto, uma figura com seis ângulos. Os hexágonos regulares possuem os seis lados e os seis ângulos de mesma medida e é composto por seis triângulos equiláteros.

Figura 2.3: Hexágono regular




Fonte: A autora

A área do hexágono regular de lado $l$ é seis vezes a área do triângulo equilátero de lado $l$, assim temos que:

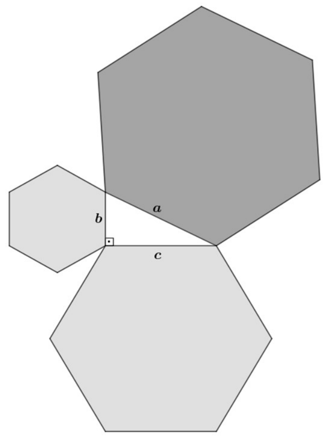
$$A = 6\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}. \tag{2.2}$$

Desta forma, podemos mostrar a seguinte variação do teorema de Pitágoras.

***Proposição 2.2:*** *A área do hexágono regular construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual a soma das áreas dos hexágonos regulares construídos sobre seus catetos.*

**Demonstração:** Considere o triângulo retângulo com hipotenusa medindo $a$ e catetos medindo $b, c$. Sob cada lado do triângulo construímos hexágonos regulares conforme a Figura 2.4:

Figura 2.4: Hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo




Fonte: A autora

Sejam $A_a$, $A_b$ e $A_c$ as áreas dos hexágonos regulares construídos, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos. Então, de $(2.2)$ temos que:

$$A_a = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2},\ A_b = \frac{3b^2\sqrt{3}}{2} \text{ e } A_c = \frac{3c^2\sqrt{3}}{2}.$$

Somando as áreas $A_b$ e $A_c$ temos que:

$$\begin{aligned} A_b + A_c &= \frac{3b^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3c^2\sqrt{3}}{2} \\ &= (b^2 + c^2)\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &= a^2\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &= A_a. \end{aligned}$$

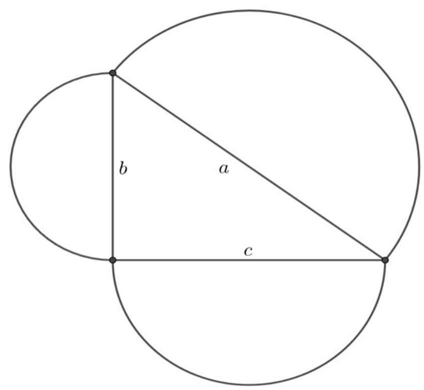
Portanto, $A_a = A_b + A_c$ como queríamos demonstrar.

## 2.3 OS LADOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO SÃO OS DIÂMETROS DOS SEMICÍRCULOS.

***Proposição* $\mathbf{2.3}$**: *A soma das áreas dos semicírculos, cujos diâmetros são os catetos de um triângulo retângulo, é igual à área do semicírculo cujo diâmetro é a hipotenusa desse mesmo triângulo.*

**Demonstração**: Considere o triângulo retângulo com hipotenusa medindo $a$ e catetos medindo $b, c$. Sob cada lado do triângulo construímos semicírculos conforme a Figura 2.5:

Figura 2.5: Semicírculos sobre os lados do triângulo retângulo




Fonte: A autora

Sejam $A_a, A_b$ e $A_c$ as áreas dos semicírculos cujos diâmetros são respectivamente os lados da hipotenusa e dos catetos do triângulo retângulo da Figura 2.5, desta forma, temos que:

$$A_a = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2, \qquad A_b = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2, \qquad A_c = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Somando $A_b,\ A_c$ obtemos:

$$\begin{aligned} A_b + A_c &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\pi(b^2+c^2)}{8} \\ &= \frac{\pi a^2}{8} \\ &= A_a. \end{aligned}$$

Portanto $A_a = A_b + A_c$.

## 2.4 GENERALIZAÇÃO DE GEORGE POLYA

George Polya nasceu em 1887 em Budapeste, capital da Hungria, e faleceu em 1985 na Califórnia, EUA. Entende-se que Polya nunca foi adepto da memorização (https://www.somatematica.com.br/biograf/polya.php).

Em 1912, 1913 e 1914 respectivamente, concluiu seu doutorado em matemática, conheceu o matemático David Hilbert, nesse mesmo ano publicou um dos seus maiores resultados "a solução do problema do passeio aleatório" e foi trabalhar na Universidade de Zurich, onde conheceu Hurwitz. Trabalhou em Oxford, Cambridge e Stanford nos Estados Unidos. Publicou a classificação dos planos de simetria em dezessete grupos, que mais tarde veio a inspirar Escher.

Além de outros livros publicados, há sua mais famosa publicação em 1945 que foi "How to Solve it", como resolver isso?, que em português recebe o título "A Arte de Resolver Problemas", que segue quatro passos:

- Entendendo o problema;
- Desenvolvendo um plano (encontre a conexão entre os dados e o desconhecido);
- Realizando o plano (execute seu plano);
- Olhando para trás (examine, valide a solução obtida).

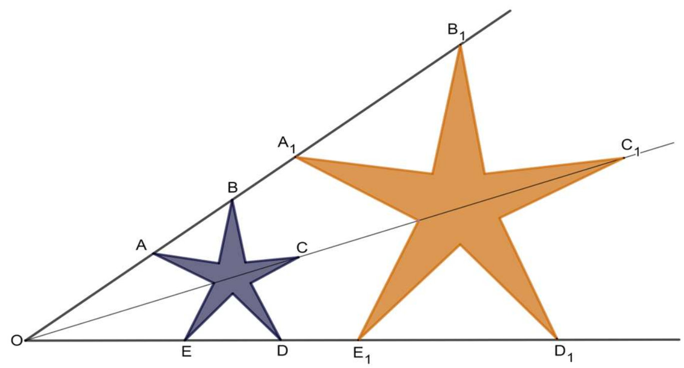
Veremos agora a demonstração de George Polya que segundo Rosa, 1983, considera essa demonstração como sendo a mais inteligente do Teorema de Pitágoras que se encontra no livro "*Induction and Analogy in Mathematics*".

Antes, vamos relembrar algumas definições:

**Definição 2.1 (Figuras Semelhantes):** Duas figuras $A$ e $L$ são ditas semelhantes com razão de semelhança igual a $k$, quando existe uma bijeção $s: A \to L$ entre os pontos de $A$ e de $L$, tais que, se $X$ e $Y$são pontos quaisquer de $A$ e $X_1 = s(X)$ e $Y_1 = s(Y)$ são seus correspondentes em $L$, então

$$\frac{XY}{X_1Y_1} = k.$$

Figura 2.6: Razão $k$ de semelhança entre duas figuras




Fonte: A autora

Temos que $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{OD_1}{OD} = \frac{OE_1}{OE} = K$ onde $K$ é chamada de razão de homotetia.

***Definição 2.2 (Homotetia):*** *Dado um ponto $O$ e um número real $k \neq 0$, definimos a homotetia de centro $O$ e razão $k$ (em notação: $H(O,k)$), como sendo a transformação geométrica que leva um ponto $P$ até um ponto $P'$ de maneira que $OP' = k \cdot OP$ e podemos escrever: $P' = H(P)$.*

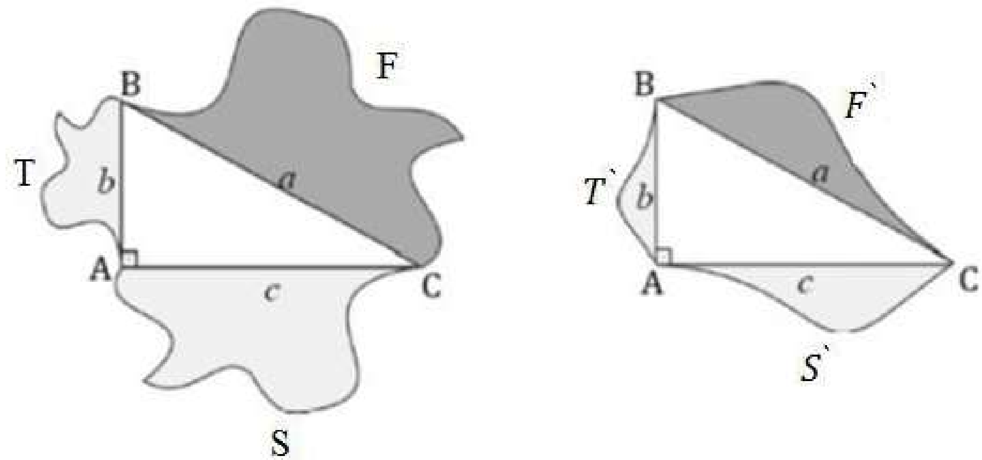
Semelhança de triângulos é um caso particular de homotetia.

**Definição 2.3 (Lados Homólogos):** Dadas duas figuras semelhantes, lados homólogos são os lados opostos aos mesmos ângulos congruentes nos dois triângulos dados.

***Proposição 2.4:*** *Sejam $F$, $S$ e $T$ três figuras semelhantes, construídas respectivamente sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Se os lados do triângulo retângulo são lados homólogos aos lados das figuras semelhantes que os contém, então as áreas $A(F)$, $A(S)$ e $A(T)$ satisfazem a relação pitagórica $A(F) = A(S) + A(T)$.*

**Demonstração:** Sejam $ABC$, dois triângulos congruentes cuja hipotenusa e catetos medem respectivamente $a$, $b$ e $c$. Sejam $F$, $S$ e $T$ e também $F'$, $S'$ e $T'$, figuras semelhantes três a três, ambas construídas sobre a hipotenusa e os catetos do triângulo $ABC$, para os quais seja válida a relação $A(F) = A(S) + A(T)$.

Figura 2.7: Figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo




Fonte: A autora

Sabemos que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão entre quaisquer dois lados homólogos, então temos que:

$$\frac{A_{(F`)}}{A_{(S`)}} = \frac{A_{(F)}}{A_{(S)}} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{A_{(F`)}}{A_{(T`)}} = \frac{A_{(F)}}{A_{(T)}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

ou ainda,

$$\frac{A_{(F`)}}{A_{(F)}} = \frac{A_{(S`)}}{A_{(S)}} \quad \text{e} \quad \frac{A_{(F`)}}{A_{(F)}} = \frac{A_{(T`)}}{A_{(T)}}$$

o que, pela transitividade, nos permite concluir que

$$\frac{A_{(F`)}}{A_{(F)}} = \frac{A_{(S`)}}{A_{(S)}} = \frac{A_{(T`)}}{A_{(T)}} = k.$$

Assim,

$$A_{(F`)} = k \cdot A_{(F)} \;,\; A_{(S`)} = k \cdot A_{(S)} \quad \text{e} \quad A_{(T`)} = k \cdot A_{(T)}.$$

Então:

$$\begin{aligned} A_{(S`)} + A_{(T`)} &= k \cdot A_{(S)} + k \cdot A_{(T)} \\ &= k(A_{(S)} + A_{(T)}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Como $A_{(S)} + A_{(T)} = A_F$ então substituindo em (2.3), temos que:

$$A_{(S')} + A_{(T')} = k \cdot A_{(F)}, \tag{2.4}$$

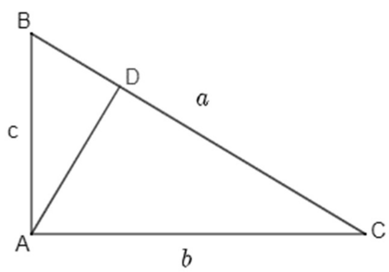
mas $A_{(F')} = k \cdot A_{(F)}$. Então, de (2.4) obtemos:

$$A_{(S')} + A_{(T')} = A_{(F')}.$$

Agora basta encontrarmos as figuras semelhantes.

Dado o triângulo $ABC$ da Figura 2.8, tracemos a altura $AD$ baixada do vértice do ângulo reto $A$ sobre a hipotenusa $BC$.

Figura 2.8: Triângulo ABC reto em A com a altura AD sobre BC




Fonte: A autora

A figura $F$ será o próprio triângulo $ABC$. Para $S$ escolheremos o triângulo $ACD$ e para $T$ o triângulo $ABD$. Obviamente $F$, $S$ e $T$ são figuras semelhantes. E mais evidente ainda, temos que:

$$A_{(F)} = A_{(S)} + A_{(T)}$$

Assim, concluímos aqui o encerramento do capítulo 2. Espera-se que sirva de inspiração aos estudos e aprendizagens, podendo assim contribuir para os ensinamentos em sala de aula.

# CAPÍTULO 3: APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO TEOREMA DE PITÁGORAS PARA SALA DE AULA

Como podemos observar no Quadro 3.1 do currículo paulista, é a partir do 9º ano que se dá a introdução do Teorema de Pitágoras, em que o enfoque é a demonstração utilizando a semelhança de triângulos e aplicações através de situações-problema. Portanto a autora coloca aqui algumas sugestões, contribuindo assim com uma aprendizagem que possa desenvolver no aluno a criatividade, a autonomia, o engajamento e que também seja prazerosa.

Quadro 3.1: Habilidades do Currículo do Estado de São Paulo para o Teorema de Pitágoras, 9º Ano

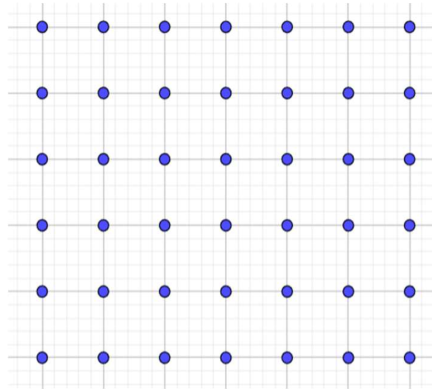
| 3º BIMESTRE | | |
|---|---|---|
| **UNIDADES TEMÁTICAS** | **HABILIDADES** | **OBJETOS DE CONHECIMENTO** |
| Geometria | (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. | Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração. |
| Geometria | (EF09MA14) Resolver e elaborar situações-problema de aplicação do teorema de Pitágoras. | Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração. |

Fonte: Currículo Paulista

## 3.1. UMA ATIVIDADE SIMPLES, ÚTIL E PRÁTICA SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS A PARTIR DO CÁLCULO DE ÁREAS

Esta atividade está relacionada com a demonstração por Bhaskara. Considere uma folha pontilhada na qual a distância entre dois pontos consecutivos, tanto na horizontal quanto na vertical, tem uma unidade de comprimento.

Figura 3.1: Folha pontilhada com distância 1 $u$



Fonte: A autora

**Atividade em sala de aula:** Calcular a área dos quadrados.

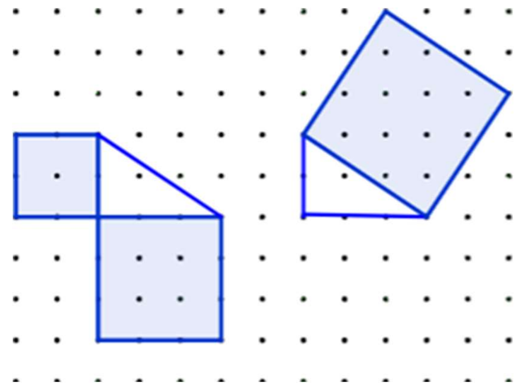
Esta atividade representa a demonstração por Bhaskara como apresentado no Capítulo 1 Seção 1.5. O cálculo de áreas de quadrados, cujos lados são horizontais e verticais requer dos alunos um simples cálculo de multiplicação, porém há alunos que têm dificuldades no entendimento de áreas. Exemplos do cotidiano como o chão de uma sala a ser revestida com piso, uma parede a ser pintada, um terreno a ser limpo, representam áreas.

Agora, ao calcular a área cujo lado do quadrado é a hipotenusa, requer maiores dificuldades, pois este está inclinado. Nesse momento temos uma boa oportunidade para falar sobre a demonstração por Bhaskara.

**Atividade 1**

Baseado na Figura 3.2, responda às perguntas abaixo. Considere, na malha abaixo, dois pontos consecutivos como sendo, uma unidade de comprimento, tanto na vertical como na horizontal.

Figura 3.2: Quadrados sobre os lados do triângulo



Fonte: A autora

Questão 1: Quantas unidades de área tem os quadrados da primeira figura?

*R: O quadrado menor 4 $u.a.$ e o maior 9 $u.a.$*

Antes de responder à Questão 2, faça o desenho no quadrado sobre a hipotenusa da Figura 3.2 decompondo-o em quatro triângulos retângulos e no centro, um quadrado.

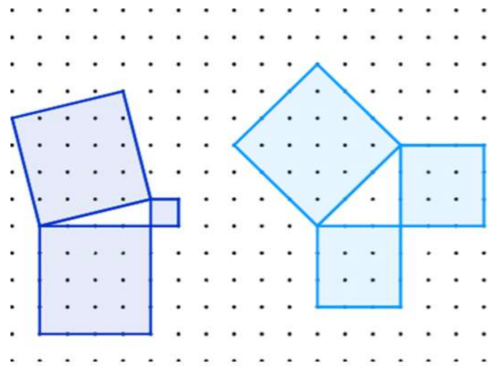
Questão 2: Como você procederia para calcular a área do quadrado da segunda figura?

*R: Como o quadrado está inclinado, devemos encaixar* 4 *triângulos retângulos congruentes igual ao original, mais o quadrado que se forma ao meio, que na verdade, é a demonstração de Bhaskara,*

$$A = 4\frac{3 \cdot 2}{2} + 1 \cdot 1 = 13\, u.a.$$

Questão 3: Observe a malha de pontos na Figura 3.3 e preencha o Quadro 3.2, calculando os valores das áreas dos quadrados, cujos lados são os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo dado. Em seguida, na própria figura, mostre como procedeu para calcular a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa do triângulo retângulo.

Figura 3.3 Cálculo de áreas



Fonte: A autora

Quadro 3.2: Cálculo de áreas

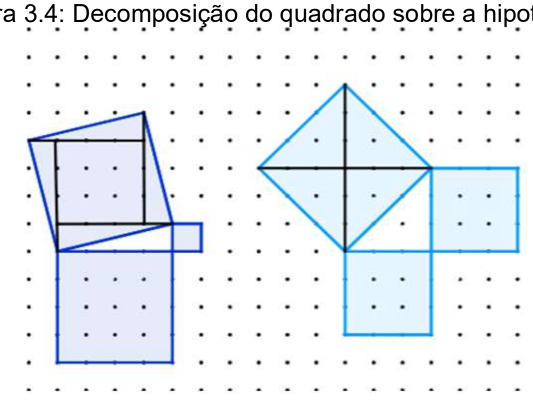
| **Figura** | Área do quadrado sobre o cateto menor | Área do quadrado sobre o cateto maior | Soma das áreas dos quadrados sobre os catetos | Área do quadrado sobre a hipotenusa |
|---|---|---|---|---|
| **1** | | | | |
| **2** | | | | |

Fonte: A autora

Questão 4: Qual a conclusão final da atividade?

*R: Que em todas as figuras a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa que é o Teorema de Pitágoras*

Figura 3.4: Decomposição do quadrado sobre a hipotenusa



Fonte: A autora

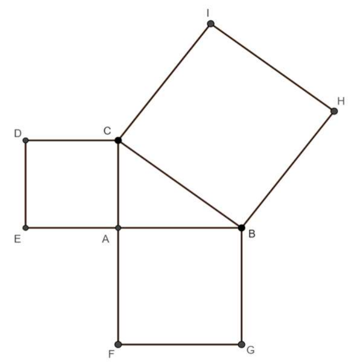
Observe que quando os catetos possuem o mesmo comprimento, não há o quadrado ao meio na decomposição do quadrado cujo lado é a hipotenusa.

Sugere-se também para calcular a área do quadrado relativa à hipotenusa a utilização do software geogebra.

## 3.2. ORIENTAÇÃO PARA A ATIVIDADE NA DECOMPOSIÇÃO DO QUEBRA-CABEÇAS A PARTIR DE JACQUES OZANAM

Nesta seção vamos construir o passo a passo de quebra cabeça que ilustra o Teorema de Pitágoras baseado na decomposição feita por Jacques Ozanam. Considere um triângulo retângulo $ABC$ com ângulo reto em $A$. Sobre seus lados construímos quadrados conforme a Figura 3.5:

Figura 3.5: Quadrados sobre os lados de um triângulo

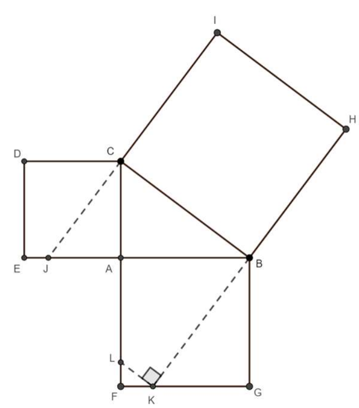



Fonte: A autora

Vamos decompor os quadrados $ACDE$ e $AFGB$ em polígonos de tal forma que juntos se encaixem perfeitamente no quadrado $BCIH$, satisfazendo assim o Teorema de Pitágoras. A decomposição pode ser feita utilizando régua, esquadro, transferidor e lápis ou o software Geogebra.

Passo 1: Prolongue os lados $HB$ e $IC$ até encontrar o ponto $K$ no lado $FG$ e o ponto $J$ no lado $AE$. Seja $L$ um ponto no lado $AF$ de tal modo que $KL$ seja perpendicular a $BK$.

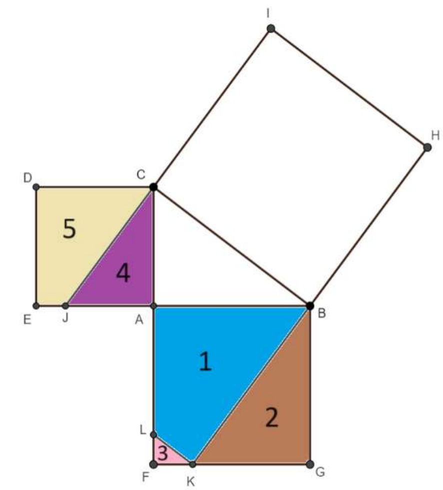
Figura 3.6: Prolongamento dos lados do quadrado




Fonte: A autora.

Passo 2: Recorte os polígonos $DCJE, CAJ, ABKL, FKL$ e $BGK$. Tais polígonos cobrem a área dos quadrados sobre os catetos.

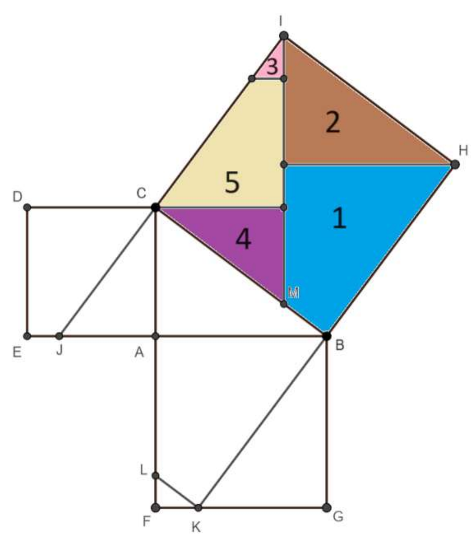
Figura 3.7: Os polígonos enumerados




Fonte: A autora

Passo 3: Rearrange os polígonos no quadrado sobre a hipotenusa.

Figura 3.8: Os Polígonos encaixados no quadrado maior




Fonte: A autora

Desta forma o quebra cabeça conclui que as cinco peças cujos os lados dos quadrados são os catetos preenche toda a área do quadrado cujo o lado é a hipotenusa, ou seja,

"Num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos"

**Atividade 2**

Elaboração do quebra cabeça de Pitágoras por Jacques Ozanam e questionamentos.

Material a ser utilizado como orientado na seção 3.2.

1) Construa, numa cartolina, um triângulo retângulo $ABC$ de medidas $AC = 6\ cm$, $AB = 8\ cm$ e $BC = 10\ cm$.
2) Construa os quadrados $ACDE, ABGF$e $BCIH$ nos lados externos ao triângulo.
3) Prolongue o lado $IC$até encontrar o lado $AE$ no ponto $J$e também o lado $HB$ até encontrar o lado $FG$no ponto $K$. Faça o seguimento $KL$, com $L$ em $AF$ de modo que $LK \perp BK$.
4) Construa, em outra cartolina, apenas os quadrados referentes aos dois catetos com as divisões executadas no passo anterior, recorte e enumere-os os cinco polígonos que compõem esses dois quadrados. Muito bem, seu quebra-cabeças está pronto para você tentar encaixar as peças no quadrado $BCIH$.

QUESTIONAMENTOS AOS ALUNOS:

1) Quais são os dados do problema?

   *R: Há cinco polígonos enumerados de 1 a 5.*

2) Que polígonos são estes formados a partir da decomposição de Ozanan que são os cinco polígonos relativos aos catetos originários da construção?

   *R: 1: Quadrilátero $ABKL$; 2,3 e 4: Triângulos Retângulos $FLK, BGK$ e $ACJ$; 5: Trapézio Retângulo $CDEJ$.*

3) Qual a conclusão?

   *R: Que os polígonos de 1 a 5 se encaixaram perfeitamente no quadrado cujo lado se debruça sobre a hipotenusa, ou seja, que a soma dos quadrados dos catetos resulta no quadrado da hipotenusa, que é o Teorema de Pitágoras.*

4) Os triângulos $ABC$ e $BGK$ são congruentes? Qual o caso

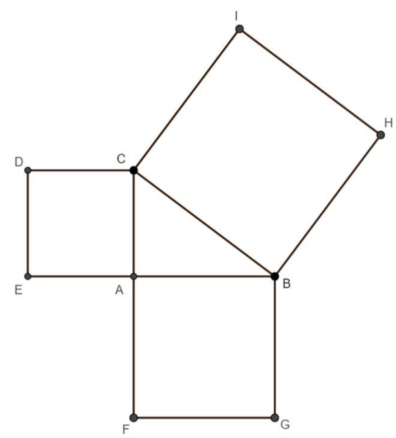
   *R: Sim, são congruentes pelo caso LAL pois, $CB \equiv BK$, $AB \equiv BG$ e $C\hat{B}A \equiv K\hat{B}G$*

## 3.3. ORIENTAÇÃO QUEBRA-CABEÇAS NA DISSECÇÃO DE HENRY PERIGAL

Henry Perigal foi um matemático e astrônomo amador, que passou a maior parte de sua vida (1801-1898) perto de Londres, na Inglaterra. Perigal era contador, mas suas paixões eram a observação de estrelas e a matemática. Ele era membro da Sociedade Astronômica Real e tesoureiro da Royal Meteorological Society (Ribeiro, 2013).

Considere um triângulo retângulo $ABC$ com ângulo reto em $A$. Sobre seus lados construímos quadrados conforme a Figura 3.9:

Figura 3.9: Quadrados sobre os lados de um triângulo

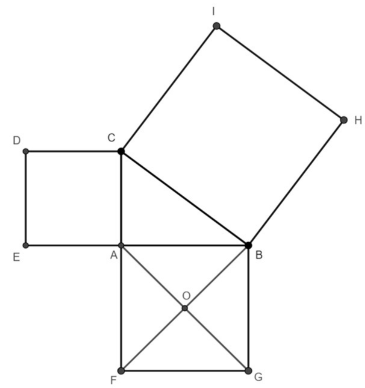



Fonte: A autora

Vamos decompor os quadrados $ACDE$ e $AFGB$ em polígonos de tal forma que juntos se encaixam perfeitamente no quadrado $BCIH$ satisfazendo assim o Teorema de Pitágoras.

Passo 1: No quadrado $AFGB$, traçamos as diagonais $FB$ e $AG$ para encontrar o centro $O$ do quadrado conforme a Figura 3.10:

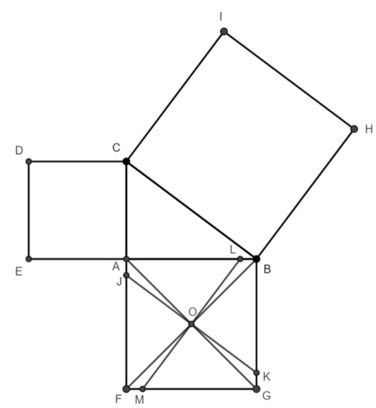
Figura 3.10: Centro do quadrado $AFGB$




Fonte: A autora

Passo 2: Trace o segmento $JK$ passando por $O$ e paralelo à hipotenusa, em seguida trace o segmento $LM$ passando por $O$ e perpendicular a $CB$, conforme a Figura 3.11:

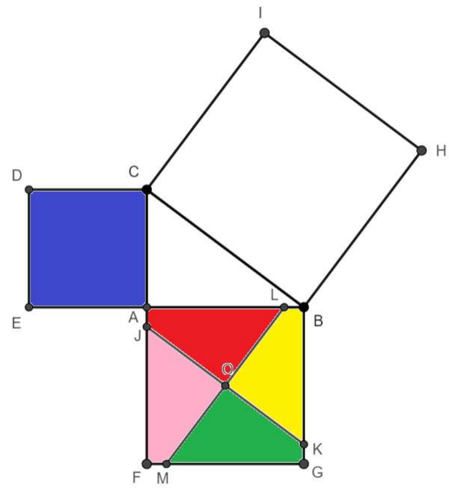
Figura 3.11: Construção dos polígonos no quadrado $AFGB$




Fonte: A autora

Passo 3: Temos então quatro polígonos congruentes $AJOL, FMOJ, GKOM$ e $BLOK$ que cobrem todo o quadrado $AFGB$. O quinto polígono é o próprio quadrado $ACDE$. Desta forma temos os cinco polígonos da construção de Perigal, conforme mostra a Figura 3.12

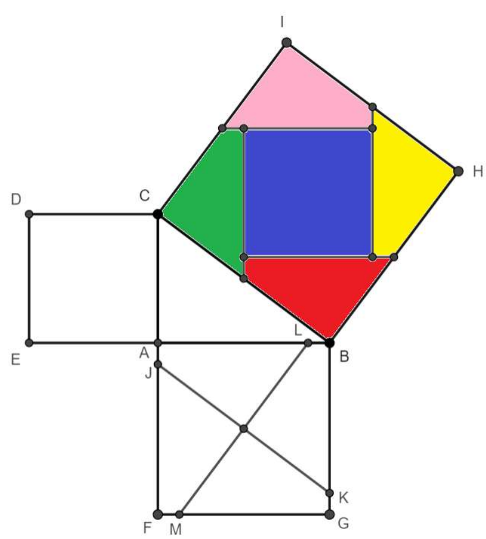
Figura 3.12: Polígonos da construção de Perigal




Fonte: A autora

Passo 4: Montagem dos polígonos sobre o quadrado $BHIC$.

Figura 3.13: Quebra cabeça montado sobre o quadrado $BHIC$




Fonte: A autora

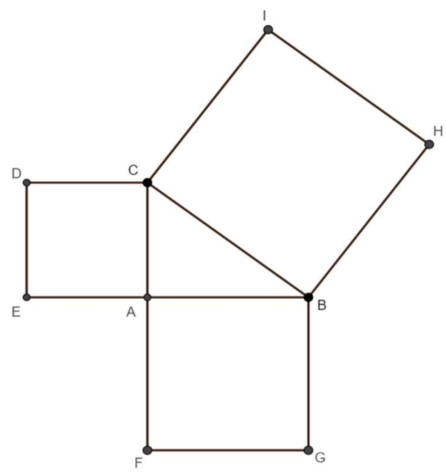
**Atividade 3**

Elaboração do quebra-cabeça de Pitágoras por Henry Perigal.

A partir da Figura 3.14, faça a atividade de acordo com a orientação.

Material: lápis, régua e compasso ou utilização do software geogebra.

Figura 3.14: Quadrados sobre os lados do triângulo retângulo $ABC$




Fonte: A autora

1) No quadrado $AFGB$, trace as diagonais $FB$ e $AG$ para encontrar o centro $O$ desse quadrado. Em seguida trace o segmento $JK$ passando por $O$ e paralelo à hipotenusa, e o segmento $LM$ perpendicular a $mesma$. O que você obteve? Qual o nome dessas figuras? O que elas têm em comum?

   *R: Obteve* 4 *polígonos, todos quadriláteros e congruentes.*

2) Recorte esses quatro polígonos mais o quadrado $CDEA$.

3) Encaixe os 5 polígonos no quadrado cujo lado é a hipotenusa do triângulo retângulo e conclua a atividade.

# CAPÍTULO 4: “MÃO NA MASSA”, DA TEORIA À PRÁTICA

Neste capítulo apresentamos resultados de atividades de laboratório realizado com estudantes do 1º e 3º ano do E.M. da escola pública E.E. Padre Clemente Marton Segura, com a participação de cerca de 25 alunos. Os laboratórios 1 e 2 foram aplicados no pátio da escola e os laboratórios 3, 4 e 5 em sala de aula.

Inicialmente as atividades de laboratórios aconteceria distribuindo os quebra-cabeças e uma folha de perguntas para cada aluno responder. Porém, por estratégia ao ensino-aprendizagem, e com exceção da atividade do laboratório 5, as atividades de laboratórios foram desenvolvidas com perguntas e respostas orais, o que ocasionou uma boa desenvoltura por parte dos alunos.

Contudo, para que a atividade fosse concluída com sucesso, ainda foi necessária a realização do questionário por escrito no qual cabe ressaltar que nem sempre a pergunta oral é a mesma da escrita, pois as dinâmicas são distintas.

É de suma importância a aplicação prática, pois além do engajamento, os alunos passa a ver a Matemática como uma atividade recreativa, motivacional e envolvente, já que por diversos fatores as crianças/adolescentes veem a matemática como um tabu.

Além disso, temos como consequência das atividades práticas de forma lúdica o desenvolvimento da autonomia, o raciocínio lógico, a resolução de problemas, a habilidade de tomar decisões, a concentração, o protagonismo dentre outros.

**Laboratório 1 -** Quebra-cabeça com quadrados sobre a hipotenusa e os catetos em material de madeira.

Neste laboratório, participaram cerca de 10 alunos que estavam iniciando o ensino médio. Portanto já haviam recebido os conteúdos sobre o Teorema de Pitágoras no 9º ano. Cabe observar que de todos os alunos que participaram da prática, alguns apenas observaram, outros apenas tatearam as peças e outros ainda procuram questionar mais sobre o jogo.

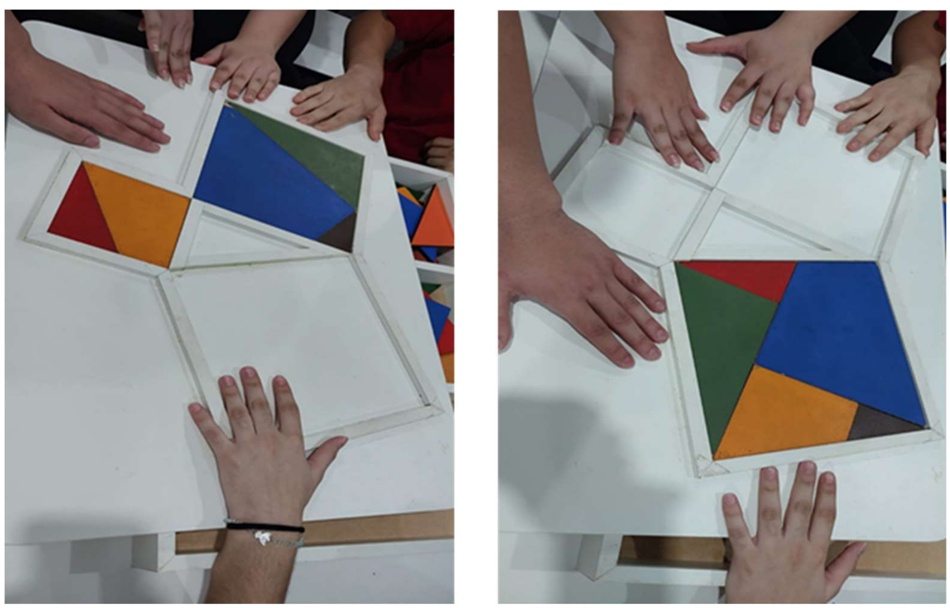
A atividade foi desenvolvida em 2 aulas de 45 minutos. Após a realização da montagem, foram aplicadas perguntas de forma oral e escrita, completando assim a atividade.

Figura 4.1: Alunos em tentativas de montagem do quebra-cabeça cujo quadrados estão sobre os lados do triângulo retângulo central

Fonte: A autora

Na Figura 4.1 a imagem apresenta alunos em tentativas para a montagem da área dos quadrados e na Figura 4.2, o quebra-cabeça já montado pelos mesmos.

Figura 4.2: Montagem do quebra-cabeça com quadrados sobre os lados do triângulo retângulo



Fonte: A autora

PERGUNTAS ORAIS FEITAS PELA PROFESSORA E RESPOSTAS ORAIS DOS ALUNOS APÓS A MONTAGEM:

- Que figura é esta no centro do quebra-cabeças?
  *R: Um triângulo;*

- Qual o nome deste triângulo?
  *R: (Nenhuma resposta imediata);*

- Este triângulo possui um ângulo de quantos graus?
  *R: 90 graus;*

- Triângulos que possuem um ângulo reto (90 graus) é denominado?
  *R: Triângulo retângulo;*

- O que se aplica em triângulos retângulos?
  *R: O Teorema de Pitágoras;*

- E qual a conclusão deste quebra-cabeças que vocês montaram?
  *R: (Mais uma vez aqui tive que fazer outras perguntas).*

- Que nomes recebem os lados de um triângulo retângulo?
  *R: Catetos e hipotenusa.*

- Ao montarem o quebra-cabeças relacionado aos catetos e a hipotenusa, o que vocês montaram? Que figuras são estas?
  *R: Quadrados;*

- Pois bem, e o que estas peças montadas representam?
  *R: (nenhuma resposta imediata)*

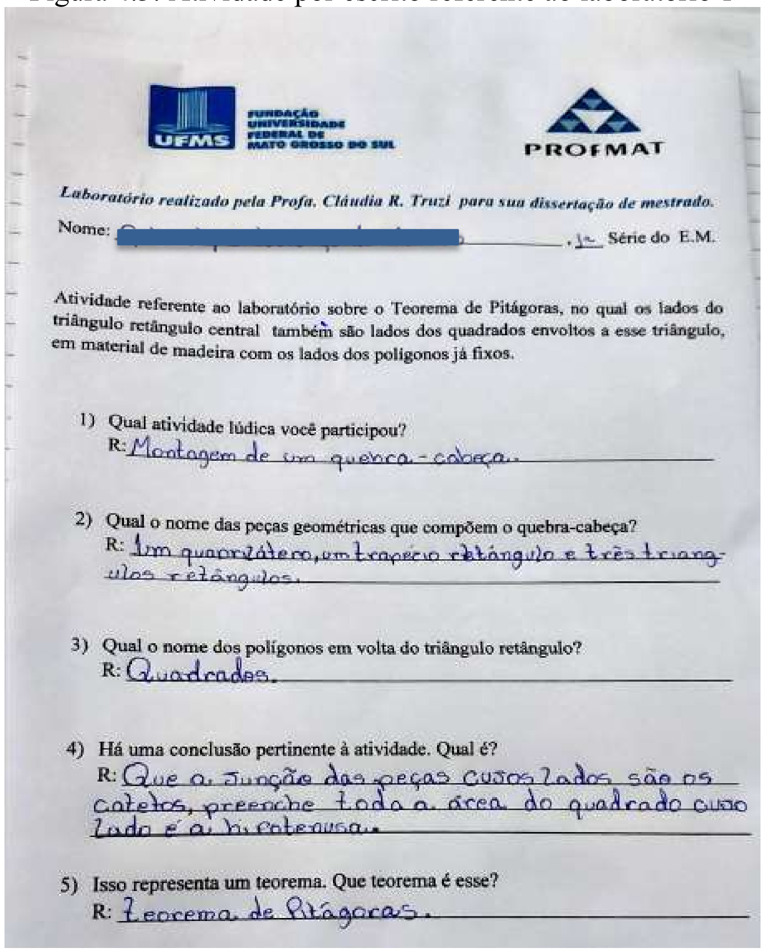
- Esses quadrados que vocês montaram são superfícies quadradas, correto? Que nome damos a essas superfícies?
  *R: Áreas;*

- Muito bem! E qual a conclusão que chegam?
  *R: Que esses dois quadrados juntos dá o outro.*

- Ok, mas como poderíamos dizer de uma maneira formal?
  *R: A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*

- E esse é qual Teorema?
  *R: O Teorema de Pitágoras.*

Figura 4.3: Atividade por escrito referente ao laboratório 1



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL — UFMS

PROFMAT

*Laboratório realizado pela Profa. Cláudia R. Truzi para sua dissertação de mestrado.*

Nome: [redacted], 1ª Série do E.M.

Atividade referente ao laboratório sobre o Teorema de Pitágoras, no qual os lados do triângulo retângulo central também são lados dos quadrados envoltos a esse triângulo, em material de madeira com os lados dos polígonos já fixos.

1) Qual atividade lúdica você participou?
R: Montagem de um quebra-cabeça.

2) Qual o nome das peças geométricas que compõem o quebra-cabeça?
R: Um quadrilátero, um trapézio retângulo e três triangulos retângulos.

3) Qual o nome dos polígonos em volta do triângulo retângulo?
R: Quadrados.

4) Há uma conclusão pertinente à atividade. Qual é?
R: Que a junção das peças cujos lados são os catetos, preenche toda a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa.

5) Isso representa um teorema. Que teorema é esse?
R: Teorema de Pitágoras.

Fonte: A autora.

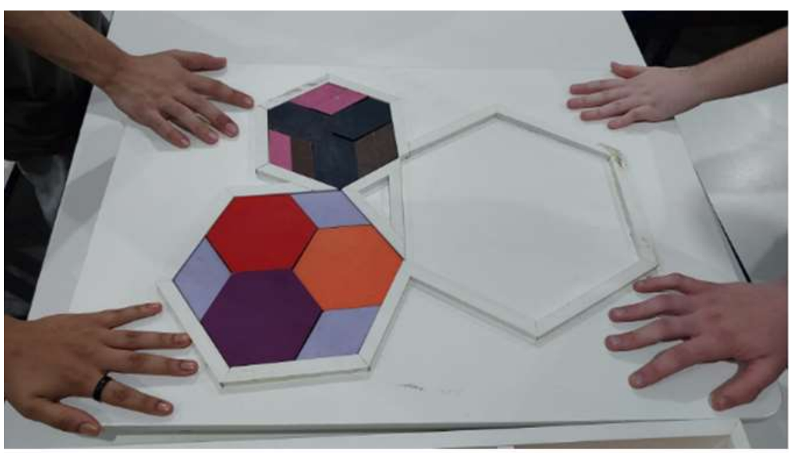
**Laboratório 2** - Quebra-cabeça de hexágonos sobre a hipotenusa e os catetos em material de madeira.

A diferença entre o laboratório 1 e o laboratório 2 é que agora as superfícies trabalhadas são hexágonos, diferenciando-os dos quadrados e foram apresentadas as mesmas dinâmicas.

Além disso, outros alunos se juntaram aos participantes do laboratório 1. Os estudantes trabalharam em grupos de forma que uns montaram as áreas, cujos lados são os catetos e outros cujo lado é a hipotenusa. Mas todos acompanharam as duas montagens.

Uma observação pertinente é que os alunos que já haviam participado do laboratório 1, orientaram os novos colegas e, com isso, no laboratório 2 houve um melhor êxito na conclusão da atividade ao observar que os dois hexágonos menores juntos cobrem perfeitamente o hexágono maior. Este laboratório foi desenvolvido em 2 aulas de 45 minutos.

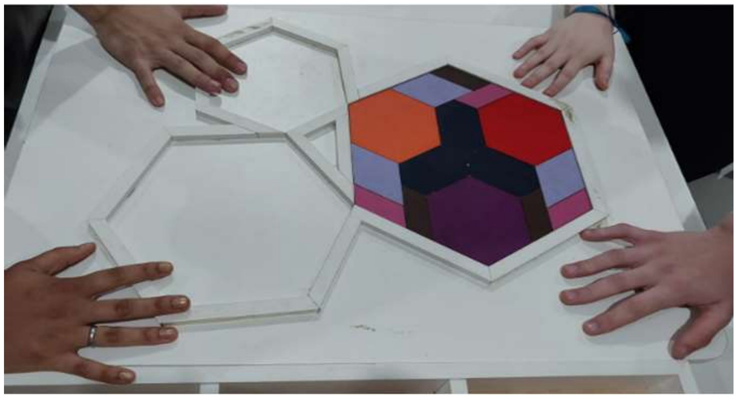
Figura 4.4: Montagem do quebra-cabeça com hexágonos regulares sobre os lados dos catetos do triângulo retângulo central



Fonte: A autora

Na Figura 4.4 foi realizada a montagem das áreas cujos lados do hexágono regular são os catetos do triângulo retângulo e na Figura 4.5 temos a montagem da área cujo lado do hexágono regular é a hipotenusa do triângulo retângulo.

Figura 4.5: Montagem do quebra-cabeça com hexágono regular sobre os lados do triângulo retângulo central



Fonte: A autora

Na Figura 4.6 os alunos realizaram uma outra montagem, cujo lado do hexágono regular é a hipotenusa, nesta atividade observamos uma maior dificuldade devido ao quebra cabeça possuir mais peças.

Figura 4.6: Uma outra construção relativa a hipotenusa

Fonte: A autora

PERGUNTAS ORAIS FEITA PELA PROFESSORA E RESPOSTAS ORAIS DOS ALUNOS APÓS A MONTAGEM:

- Há alunos que estão participando desta atividade que também participaram da atividade anterior. O que diferencia uma atividade da outra?

*R: Que na atividade anterior as figuras montadas eram quadrados e nesta as figuras montadas são hexágonos;*

- Muito bem! E qual é o objetivo desta atividade?

*R: A gente perceber que as peças desses dois hexágonos juntos são as mesmas peças desse outro hexágono;*

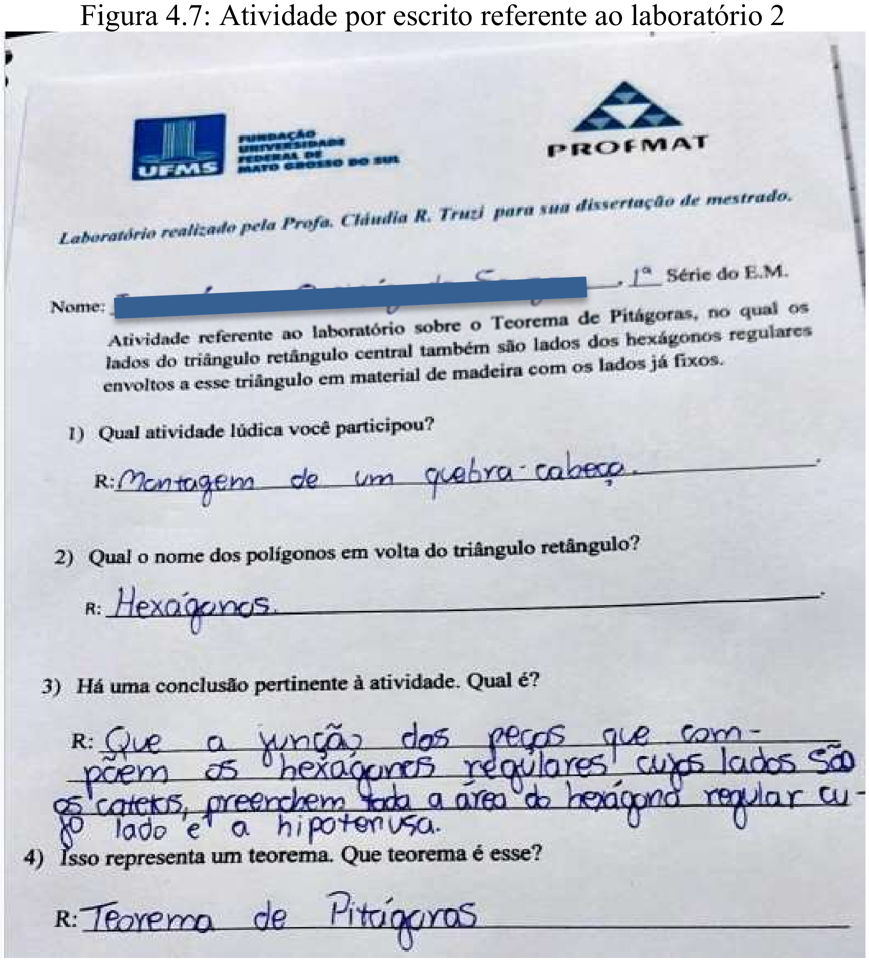
- Ok! Mas isso se refere a quê?

*R: Ao Teorema de Pitágoras;*

- Então conclua a atividade por favor?

*R: Que a soma das áreas dos hexágonos regular cujos lados são os catetos é a mesma da área do hexágono regular cujo lado é a hipotenusa.*

Figura 4.7: Atividade por escrito referente ao laboratório 2


UFMS FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROFMAT

*Laboratório realizado pela Profa. Cláudia R. Truzi para sua dissertação de mestrado.*

Nome: [redacted], 1ª Série do E.M.

Atividade referente ao laboratório sobre o Teorema de Pitágoras, no qual os lados do triângulo retângulo central também são lados dos hexágonos regulares envoltos a esse triângulo em material de madeira com os lados já fixos.

1) Qual atividade lúdica você participou?

R: Montagem de um quebra-cabeça.

2) Qual o nome dos polígonos em volta do triângulo retângulo?

R: Hexágonos.

3) Há uma conclusão pertinente à atividade. Qual é?

R: Que a junção das peças que compõem os hexágonos regulares cujos lados são os catetos, preenchem toda a área do hexágono regular cujo lado é a hipotenusa.

4) Isso representa um teorema. Que teorema é esse?

R: Teorema de Pitágoras

Fonte: A autora.

**Laboratório 3 -** Quebra-cabeça por comparação de áreas em material de acrílico.

O quebra cabeça utilizado no laboratório 3 retrata o conteúdo do Capítulo 1, em 1.2 – A Notável Demonstração, ou seja, por comparação de áreas.

Figura 4.8: O Quebra-cabeça em acrílico

Fonte: A autora

Este laboratório foi desenvolvido com alunos da 3ª série do EM do período noturno, dentro da sala de aula. Assim sendo, foram expostas as peças na frente de todos, orientados sobre a montagem e realizadas as perguntas orais e concluído o questionário por escrito.

Cabe ressaltar que os alunos participantes não tiveram dificuldades em montar o quebra-cabeça, porém apresentaram dificuldades na conclusão da atividade que era perceber que a área do quadrado maior é igual a soma das áreas dos quadrados menores. Esta atividade necessitou de 2 aulas de 45 minutos.

PERGUNTAS ORAIS FEITA PELA PROFESSORA E RESPOSTAS ORAIS DOS ALUNOS:

- Algum de vocês conhece este quebra-cabeça?

R: *Não.*

Ele possui uma base quadrada vermelha, três quadrados amarelos e quatro triângulos retângulos, todos congruentes, laranja.

- Alguém quer tentar montar? Há dois quebra-cabeças a ser montado sobre a base quadrada vermelha.

- Nessas duas montagens o que observaram?

*R: (Não obtive respostas corretas).*

- É a mesma área onde os quebra-cabeças foram montados?

*R: Sim.*

- Há figuras que se repetem nas duas montagens? Quais são?

*R: Sim, os 4 triângulos retângulos laranjas.*

- Como disse no início, esses 4 triângulos são o que?

*R: São "iguais".*

- Qual é a palavra que representa que eles são iguais?

*R: Congruentes.*

- Os lados dos quadrados são os mesmos que os lados do triângulo laranja?

R: *Sim.*

- E qual a conclusão que chegaram?

*R: (Não obtive respostas).*

- O triângulo laranja é retângulo. Quais os nomes dos seus lados?

*R: Catetos e hipotenusa.*

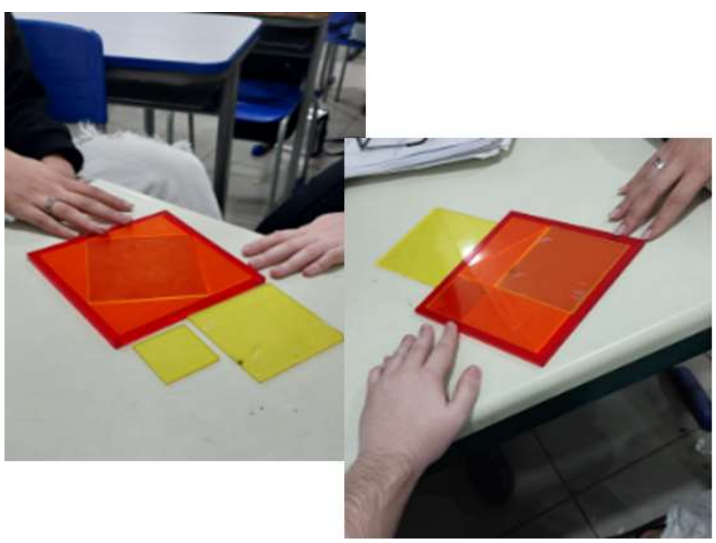
- Lembram de algum teorema?

*R: Sim, o teorema de Pitágoras.*

- Então concluem por favor?

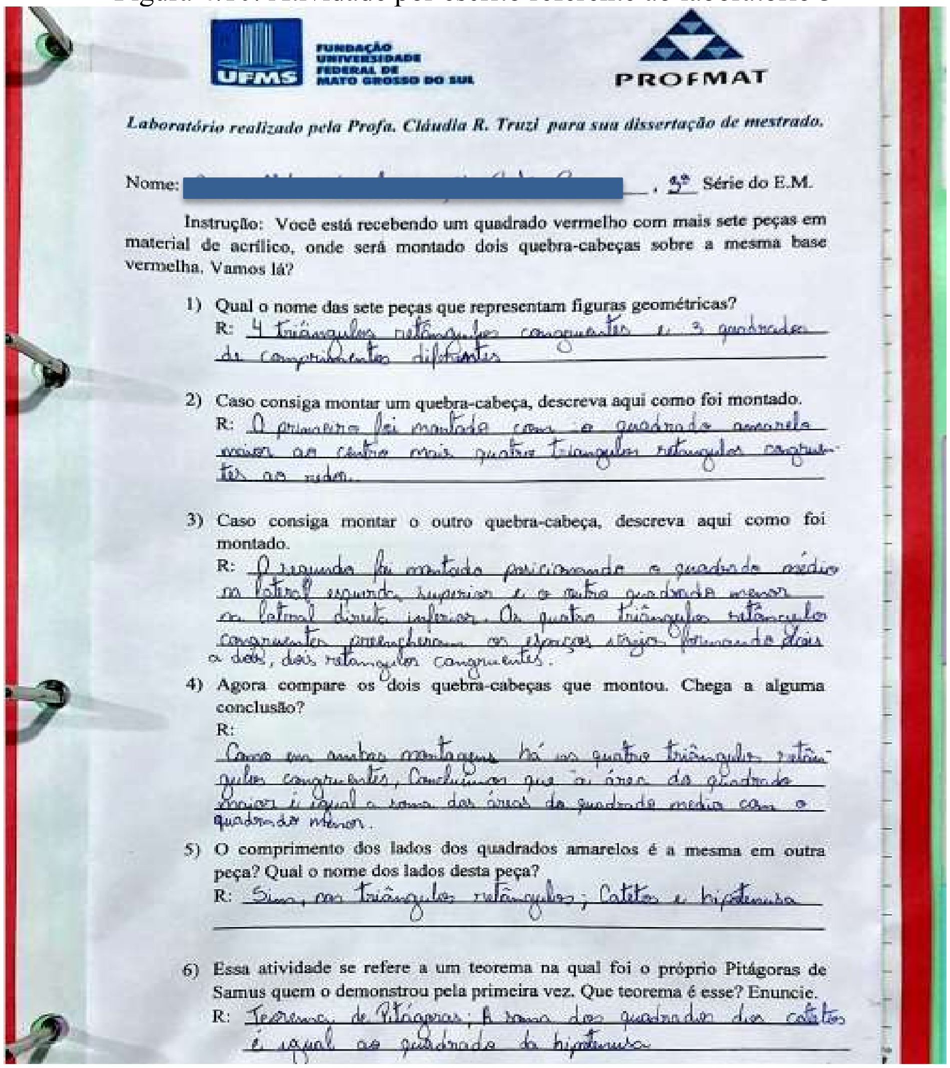
*R: Que a área do quadrado da primeira montagem é a mesma que a área dos dois quadrados da segunda montagem.*

Figura 4.9 - Montagem do quebra-cabeça por comparação de áreas



Fonte: A autora

Figura 4.10: Atividade por escrito referente ao laboratório 3



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

UFMS

PROFMAT

*Laboratório realizado pela Profa. Cláudia R. Truzi para sua dissertação de mestrado.*

Nome: [redacted], 3ª Série do E.M.

Instrução: Você está recebendo um quadrado vermelho com mais sete peças em material de acrílico, onde será montado dois quebra-cabeças sobre a mesma base vermelha. Vamos lá?

1) Qual o nome das sete peças que representam figuras geométricas?
R: 4 triângulos retângulos congruentes e 3 quadrados de comprimentos diferentes

2) Caso consiga montar um quebra-cabeça, descreva aqui como foi montado.
R: O primeiro foi montado com o quadrado amarelo maior ao centro mais quatro triângulos retângulos congruentes ao redor.

3) Caso consiga montar o outro quebra-cabeça, descreva aqui como foi montado.
R: O segundo foi montado posicionando o quadrado médio na lateral esquerda superior e o outro quadrado menor na lateral direita inferior. Os quatro triângulos retângulos congruentes preencheram os espaços vazios formando dois a dois, dois retângulos congruentes.

4) Agora compare os dois quebra-cabeças que montou. Chega a alguma conclusão?
R: Como em ambas montagens há os quatro triângulos retângulos congruentes, Concluímos que a área do quadrado maior é igual a soma das áreas do quadrado médio com o quadrado menor.

5) O comprimento dos lados dos quadrados amarelos é a mesma em outra peça? Qual o nome dos lados desta peça?
R: Sim, nos triângulos retângulos; Catetos e hipotenusa

6) Essa atividade se refere a um teorema na qual foi o próprio Pitágoras de Samus quem o demonstrou pela primeira vez. Que teorema é esse? Enuncie.
R: Teorema de Pitágoras; A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa

Fonte: A autora.

**Laboratório 4** - Quebra-cabeça com quadrados sobre a hipotenusa e os catetos em material de acrílico.

O objetivo deste quebra-cabeça é o aluno perceber que a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é a mesma que a soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos.

Aqui neste laboratório também foram apresentadas, na frente da sala, todas as peças do mesmo, além de realizar outras perguntas que não fossem relacionadas ao Teorema de Pitágoras como por exemplo uma breve analogia sobre os encaixes perfeitos, desencadeando uma curiosa discussão.

Prosseguindo nas orientações, o quadrado laranja serve de base para o aluno preencher sua superfície cujo lado tem o mesmo comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo laranja.

Participaram desta atividade os mesmos estudantes do laboratório 3, os quais apresentaram certa dificuldade na montagem da área do quadrado cujo lado é o cateto maior e da área do quadrado cujo lado é a hipotenusa.

Pelo fato de já serem estudantes do 3º ano do Ensino Médio, houve uma desenvoltura mais rápida na conclusão da atividade em perceber o Teorema de Pitágoras. A atividade teve duração de duas aulas de 45 minutos.

Figura 4.11: O Quebra-cabeça

Fonte: A autora

PERGUNTAS ORAIS REALIZADA PELA PROFESSORA E RESPOSTAS ORAIS DOS ALUNOS:

- Vocês conhecem esse quebra-cabeça?

*R: Não.*

- Há três quebra-cabeças quadrados  a serem montados. Posicione o triângulo retângulo laranja, cujos lados são os lados dos quadrados a serem montados. Também encoste o quadrado laranja na hipotenusa do triângulo laranja para servir de referência. Vamos lá? Chegaram em alguma conclusão?

*R: Todas as peças dos dois catetos se encaixaram na hipotenusa.*

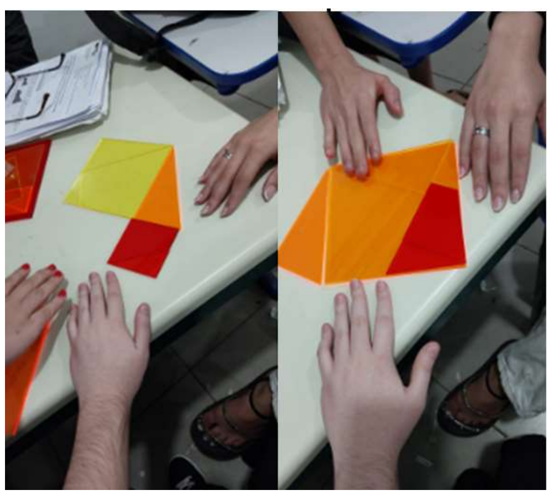
- E isto te lembra o quê?

*R: O Teorema de Pitágoras.*

- Então conclua por favor?

*R: Que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*

Figura 4.12: A construção realizada pelos alunos na qual os lados dos quadrados são os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo laranja

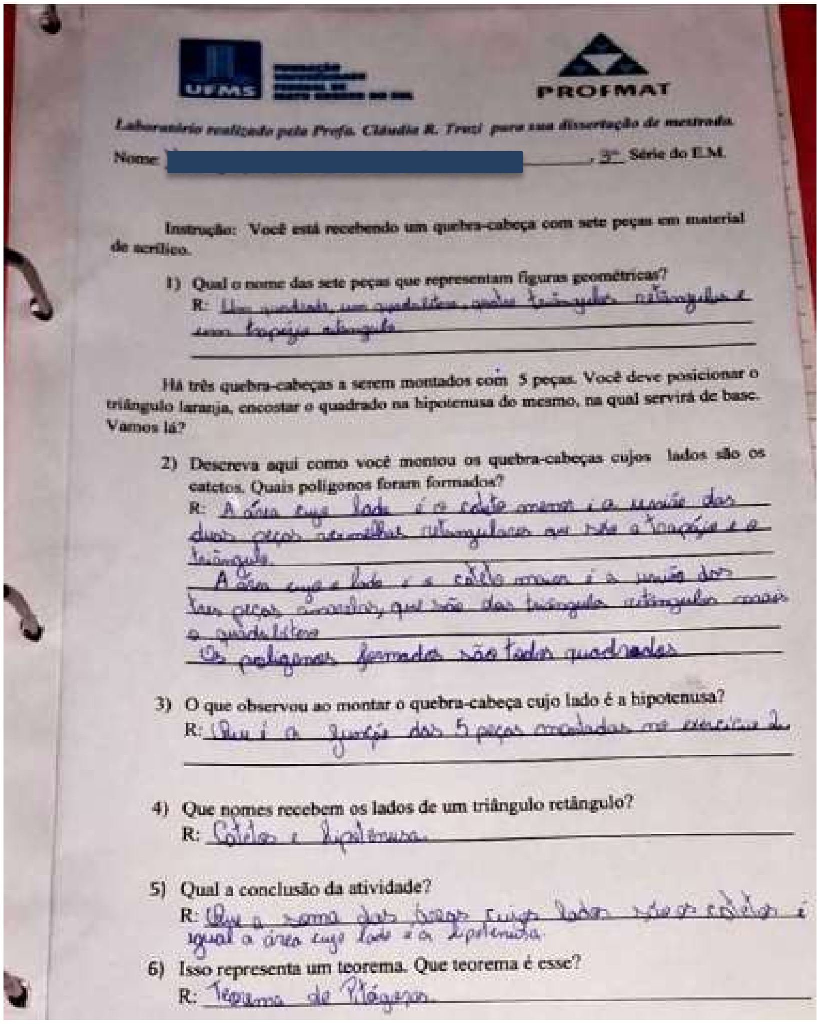


Fonte: A autora

Figura 4.13: Uma outra disposição de montagem cujo lado do quadrado é a hipotenusa.

Fonte: A autora.

Figura 4.14: Atividade por escrito referente ao laboratório 4



UFMS PROFMAT

*Laboratório realizado pela Profa. Cláudia R. Trazi para sua dissertação de mestrado.*

Nome: [redacted], 3ª Série do E.M.

Instrução: Você está recebendo um quebra-cabeça com sete peças em material de acrílico.

1) Qual o nome das sete peças que representam figuras geométricas?
R: Um quadrado, um quadrilátero, quatro triângulos retângulos e um trapézio retângulo

Há três quebra-cabeças a serem montados com 5 peças. Você deve posicionar o triângulo laranja, encostar o quadrado na hipotenusa do mesmo, na qual servirá de base. Vamos lá?

2) Descreva aqui como você montou os quebra-cabeças cujos lados são os catetos. Quais polígonos foram formados?
R: A área cujo lado é o cateto menor é a união das duas peças vermelhas retangulares que são o trapézio e o triângulo.
A área cujo lado é o cateto maior é a união das três peças amarelas, que são dois triângulos retângulos e o quadrilátero.
Os polígonos formados são todos quadrados

3) O que observou ao montar o quebra-cabeça cujo lado é a hipotenusa?
R: Que é a junção das 5 peças montadas no exercício 2.

4) Que nomes recebem os lados de um triângulo retângulo?
R: Catetos e hipotenusa.

5) Qual a conclusão da atividade?
R: Que a soma das áreas cujos lados são os catetos é igual a área cujo lado é a hipotenusa.

6) Isso representa um teorema. Que teorema é esse?
R: Teorema de Pitágoras.

Fonte: A autora.

**Laboratório 5** – Cálculo das áreas sobre os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo seguindo a demonstração por Bhaskara.

Este laboratório foi desenvolvido com 8 alunos da 3ª série do Ensino Médio do período noturno que se propuseram a participar da atividade.

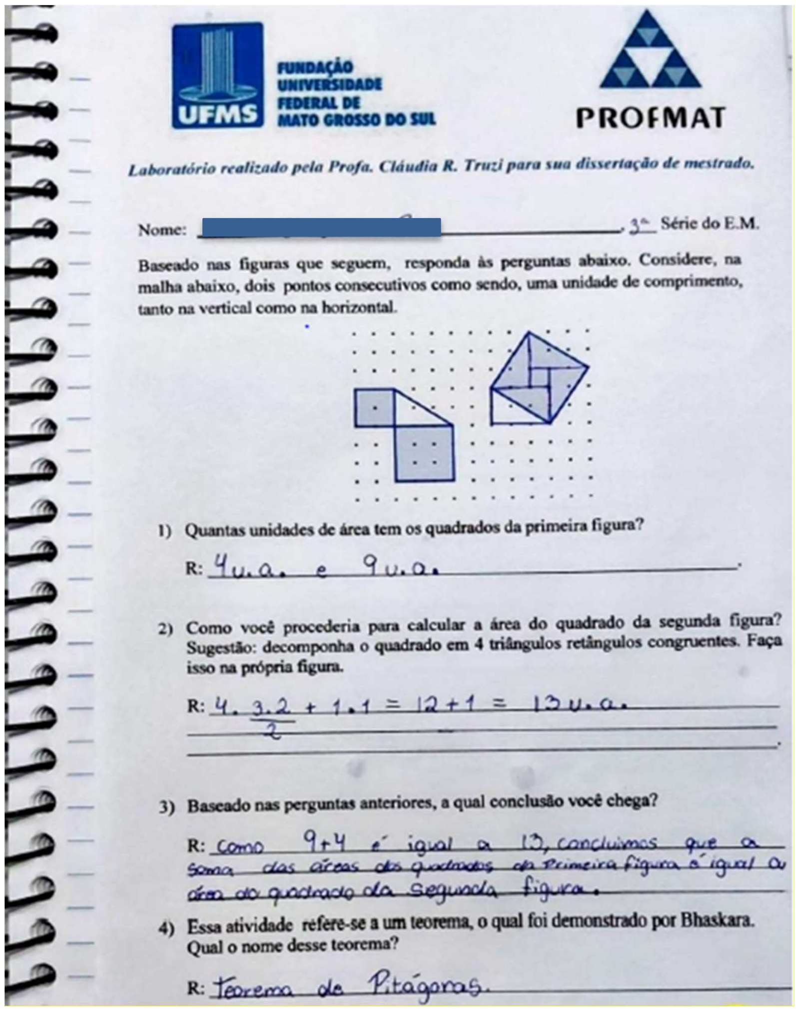
Foram distribuídas as folhas de atividade e dadas as orientações pertinentes para a sua realização, a qual ocupou o tempo de uma aula de 45 minutos.

Uma observação pertinente foi que a questão 2 tinha por objetivo o cálculo da área do quadrado, cujo lado é a hipotenusa, não utilizar o teorema de Pitágoras como foi passado nas orientações.

Um outro ponto a destacar é que nenhum dos alunos tiveram dificuldade em desenvolver a questão 2 em relação a decomposição, descrita na Figura 4.15.

A figura 4.15 é uma atividade desenvolvida por uma aluna, a qual foi selecionada para fazer parte desta dissertação.

Figura 4.15: Atividade sobre áreas



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

UFMS

PROFMAT

*Laboratório realizado pela Profa. Cláudia R. Truzi para sua dissertação de mestrado.*

Nome: [redacted] 3ª Série do E.M.

Baseado nas figuras que seguem, responda às perguntas abaixo. Considere, na malha abaixo, dois pontos consecutivos como sendo, uma unidade de comprimento, tanto na vertical como na horizontal.

1) Quantas unidades de área tem os quadrados da primeira figura?

R: 4 u.a. e 9 u.a.

2) Como você procederia para calcular a área do quadrado da segunda figura? Sugestão: decomponha o quadrado em 4 triângulos retângulos congruentes. Faça isso na própria figura.

R: $4 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} + 1 \cdot 1 = 12 + 1 = 13$ u.a.

3) Baseado nas perguntas anteriores, a qual conclusão você chega?

R: Como 9+4 é igual a 13, concluimos que a soma das áreas dos quadrados da primeira figura é igual a área do quadrado da segunda figura.

4) Essa atividade refere-se a um teorema, o qual foi demonstrado por Bhaskara. Qual o nome desse teorema?

R: Teorema de Pitágoras.

Fonte: A autora

**Reflexões sobre estas atividades de laboratórios e a matemática**

Os alunos se interessaram pelos quebra-cabeças e houve um menor interesse na realização da atividade quando apresentada de forma escrita mostrando assim, dificuldades em sua interpretação.

Constatou-se que, com a pandemia, o uso desregrado do celular e o avanço das plataformas e avaliações tecnológicas, os estudantes fazem uso cada vez menor da poderosa dupla “lápis e papel”, o que poderá desencadear consequências negativas irreparáveis para o ensino/aprendizagem.

Outro ponto pertinente observado é que os estudantes almejam coisas rápidas de serem solucionadas, tornando-os impacientes, ansiosos e imediatistas. Esse é um desafio enorme para todos do magistério, pois o aprendizado não ocorre de um momento para o outro. É uma construção morosa. E a matemática tem um papel importante diante de tudo isso.

Logo, cabe aos professores, mediante reflexões, planejamento e discussões com os pares, qual é o melhor caminho a ser tomado, embora haja uma tendência na imposição de como o Professor deve ensinar, reduzindo assim, sua liberdade de cátedra.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ser professor é tarefa árdua, de uma responsabilidade grandiosa e estudos, planejamentos, aperfeiçoamentos e reflexões contínuas. Quem decide ir para o magistério deve estar ciente, repito, da responsabilidade do papel do professor. E ainda associado a isso há as condições precárias que o Professor enfrenta no dia a dia, inclusive com baixos salários. Para isso, espera-se dos administradores públicos maior seriedade com a educação e tenacidade e brandura para com os Professores de todos os níveis de ensino. Embora essa discussão seja importante, porém não é o foco dessa dissertação, sendo um pequeno desabafo e esperança de quem sabe, vivenciarmos coisas melhores num futuro não tão distante pois, a educação básica como o próprio nome diz, é a base para o que virá adiante. É preciso sisudez e muita energia para com ela.

Assim sendo, concluímos aqui esse trabalho, que através do Teorema de Pitágoras, trouxe riqueza de conteúdos embutidos no tema, seja por meio da teoria, como as demonstrações, assim como da forma lúdica através dos laboratórios, explorando os conceitos de áreas, semelhança e congruência de triângulos, figuras semelhantes, além da prática do desenho geométrico através por exemplo, da dupla compasso e régua e até mesmo o software geogebra.

Portanto esperamos que essa dissertação possa contribuir para aprimorar os conhecimentos e desenvolver o conteúdo aqui apresentado de modo um pouco mais aprofundado e ao mesmo tempo lúdico.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a base. Brasília: MEC, 2018.

BEZERRA, J. **Pitágoras**. 2024. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/pitagoras/. Acesso em: 24 fev. 2024.

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. **George Pólya**. 2020. Disponível em: clubes.obmep.org.br/blog/b_bgpoly. Acesso em: 01 mar 2024.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** 5. ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FRAZÃO, D. **Biografia de Pitágoras**. 2021. Disponível em: https://www.ebiografia.com/pitagoras/. Acesso em: 25 fev. 2024.

Filho, H. G. **Teorema de Pitágoras - FERMAT - Resolução dos Trios Pitágóricos**, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2010.

GOMES, C. R**.** Pitágoras de Samos: De Místico a Precursor da Teoria dos Números**.** *In:* BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 5., Paraíba, 2010. **Anais...** Paraíba: SBM, 2010. p.1-4. Disponível em: http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Conferencias/CarlaReginaGomes/trabalho_final.pdf. Acesso em: 25 fev. 2024.

GORMAN, P. **Pitágoras Uma Vida.** 1. ed. São Paulo: Cultrix/ Pensamento, 1979.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean Proposition, Classics in Mathematics Education Series.** Washington, D.C: Council of Teachers of Mathematics Inc., 1968.

MARQUES, S. C. **A descoberta do Teorema de Pitágoras.** 1. ed. São Paulo: Editora LF, 2011.

NOBRE, S. Uma introdução à história das enciclopédias - a enciclopédia de matemática de Christian Wolff de 1716. **Revista da SBHC**, Rio de Janeiro, v.5, n.1, p.34-46, jan./jul. 2007. Disponível em: https://www.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=81. Acesso em: 20 de fev. 2024.

NOVODOVOSKI, A.; STASCOVIAN, J. **Além do teorema:** uma visão da vida e obra de Pitágoras de Samos. 2024. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4406341/mod_resource/content/1/vida_pitagoras.pdf. Acesso em: 07 maio 2024.

PEREIRA, L. **História da matemática em CD-ROM**: A escola pitagórica e o teorema de Pitágoras**.** 2001. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Passo Fundo, Rio Grande do Sul, 2001.

POLYA, G. A **Arte de Resolver Problemas:** Um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PORFÍRIO, Francisco. **Pitágoras**. 2024. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/pitágoras-1.htm. Acesso em: 24 fev. 2024.

PROFMAT. **Material didático - MA13**: Geometria Analítica. Rio de Janeiro: IMPA/ SBM, 2012. Unidades 5 e 7.

RIBEIRO, V. V. S. M. **Revisitando o Teorema de Pitágoras**. Rio de Janeiro: PROFMAT, 2013.

ROSA, E. Mania de Pitágoras**. Revista Professor de Matemática - SBM,** v.2, 14-22, 1983.

SANTOS, M. C. **Teorema de Pitágoras:** Suas diversas demonstrações. 2011. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2011.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas Tecnologias - Ensino Fundamental - Ciclo II e Médio. São Paulo, SEE, 2011.

SILVA, J. E. B. **Teorema de Pitágoras:** extensões e generalizações**.** 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Estadual Paulista – UNESP, São José do Rio Preto, 2014.

SÓ MATEMÁTICA. **George Pólya**. 2024. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/biograf/polya.php. Acesso em: 02 abr. 2024.

USP. **John Wallis.** 2024. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/wallis.htm. Acesso em: 02 abr. 2024.

WAGNER, E. **Teorema de Pitágoras e Áreas.** Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2015.