



2024

Estudo da deformação imediata de vigas de concreto armado: comparação dos processos simplificados

João Carlos Weiler Marques dos Santos ^a; Andrés Batista Cheung ^b

^a Aluno de Graduação em Engenharia Civil, joao.w@ufms.br

^b Professor Orientador, Doutor, andres.cheung@ufms.br

Faculdade de Engenharias, Arquitetura e Urbanismo e Geografia. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Av. Costa e Silva, s/nº | Bairro Universitário | 79070-900 | Campo Grande, MS, Brasil.

RESUMO

A segurança numa estrutura é uma situação de extrema importância na qual envolve todos os profissionais da área da construção civil, especialmente para aqueles da área de projeto estrutural, pois a mínima possibilidade de colapso de uma estrutura configura-se uma situação extremamente perigosa, com danos materiais e humanos ocorrendo perdas de grande valor. Com o intuito de atender o Estado Limite de Serviço, a estrutura de concreto deve satisfazer critérios, como deslocamentos máximos permitidos por norma, conhecido como flechas, entretanto deve-se buscar métodos que estimem os deslocamentos em vigas de concreto armado de forma satisfatória. O presente trabalho tem como objetivo o estudo das flechas em vigas de concreto armado, enfatizando o estado limite de deformações excessivas, sendo desenvolvido procedimentos numéricos no programa “Mathcad Prime”, para análise do comportamento de vigas de concreto com seção transversal retangular, com uma vinculação do tipo biapoada. A consideração da não-linearidade física do concreto armado foi adotada através de modelos simplificados adequados, para compatibilização do concreto e aço, com a colaboração do concreto entre fissuras realizado através de modelo de *Tension-Stiffening* (rigidez, enrijecimento) para o concreto tracionado pós-fissuração em região de tração efetiva. Através do método de Branson e do método do CEB 90 (1991), com os resultados no Anexo A.

Palavras-chave: Concreto armado, viga, flecha, estado-limite de deformações excessivas.

ABSTRACT

A structure is an extremely important situation that involves all professionals in the construction industry, especially those in the area of structural design. The slightest possibility of a structure collapsing constitutes an extremely dangerous situation, resulting in material damage and significant losses. To meet State Service Limits, concrete structures must satisfy specific criteria, including maximum allowable deflections. However, it is essential to seek methods that accurately estimate displacements in reinforced concrete beams. This study aims to analyze deflections in reinforced concrete using numerical procedures developed in the ‘Mathcad Prime’ program. We focus on the limit state of excessive deformations in concrete beams with rectangular cross-sections and a bisupported connection. The consideration of physical non-linearity in reinforced concrete involves suitable simplified models to ensure compatibility between concrete and steel. Additionally, we collaborate on concrete behavior between cracks using the Tension-Stiffening model for post-cracking tensioned concrete in the effective traction region. The analysis employs both the Branson method and the CEB 90 method (1991). With the results in Appendix A.

Keywords: reinforced concrete, beams, deflection, limit state of excessive deformations.

1. INTRODUÇÃO

No dimensionamento estrutural de elementos de concreto fletidos, a verificação do Estado Limite de Serviço (ELS) é fundamental para o comportamento adequado da estrutura ao longo do tempo.

Os elementos fletidos são constituídos de concreto e barras de aço, denominadas de armadura. No caso de elementos submetidos a flexão, apresentam tensões de tração cuja resistência do concreto é baixa. Para isso, são adicionadas armaduras para absorção dos esforços de tração. Isto gera um material que se comporta como um conjunto monolítico, sem a separação entre os

materiais constituintes, verificando propriedades como a boa aderência entre o aço e o concreto de forma a resistirem aos esforços que tendem a provocar o deslizamento da armadura.

Com a evolução do cimento e do aço, tem-se proporcionado o emprego de concreto com maior resistência em estruturas. Juntamente com o avanço computacional, surgiram programas com procedimentos analíticos mais refinados, permitindo aos engenheiros estruturais projetarem estruturas mais esbeltas. Essa abordagem visa conceber estruturas mais leves, conseqüentemente mais solicitadas, que atendem aos critérios de segurança em dois aspectos principais. O primeiro aspecto é que a estrutura não pode atingir a ruptura, enquanto o segundo está relacionado ao uso e conforto da edificação.

De acordo com os itens 3.2 e 10 da norma NBR 6118 (ABNT, 2023), que abordam aspectos importantes relacionados aos Estados-Limites, são definidos condições e limites que não devem ser excedidos pelas estruturas. O item 3.2 está associado ao Estado Limite Último, que se refere à máxima capacidade de carga antes da falha estrutural.

Além disso, o item 10 aborda os Estados Limites de Serviço, que estão relacionados ao desempenho adequado da estrutura durante o uso normal, garantindo conforto e segurança aos usuários.

Determinar as deflexões exatas em estruturas de concreto é uma tarefa altamente complexa devido à influência de uma série de variáveis, como as condições ambientais de temperatura e umidade, os métodos de cura e exposição do material, a idade do concreto, o histórico de cargas aplicadas, a proporção de armadura de compressão e o percentual de carga permanente. Além disso, o fenômeno de fissuração do concreto desempenha um papel significativo, alterando as características de deformação das seções transversais e afetando a rigidez (*stiffen*) da estrutura ao longo de seu comprimento.

A desconsideração total do comportamento não-linear através de uma análise, puramente linear em estruturas de concreto armado resulta em menores deslocamentos não compatíveis com a realidade. Sob outra perspectiva, desprezar completamente a colaboração do concreto tracionado, leva a modelos flexíveis e, conseqüentemente, a valores de deslocamento superiores aos observados na realidade.

Dessa forma, modelos analíticos para avaliação de flecha em vigas de concreto armado devem prever tanto a colaboração do concreto tracionado entre fissuras quanto o comportamento não-linear do material. Somado os efeitos diferidos do concreto,

como fluência e retração, os quais causam aumento da curvatura, em estruturas submetidas à flexão, aumentando os deslocamentos imediatos ao longo do tempo. Tais efeitos devem ser considerados em modelos, que visem estimar flechas em vigas de concreto armado.

Diversas pesquisas propuseram modelos para avaliar os deslocamentos em vigas de concreto armado, considerando diferentes graus de complexidade para a consideração da não-linearidade física. Alguns desses modelos foram propostos por pesquisadores como Gilbert (2011), Vecchio e Collins (1988), Stramandinoli e La Rovere (2012) e Branson (1968). Contudo, para análises excessivamente refinadas demandam um elevado grau de complexidade e o tempo de processamento, tornando-se impraticável para situações de projetos reais.

A implementação de métodos computacionais avançados para a análise de deslocamentos verticais em estruturas é uma área de pesquisa de vital importância na engenharia civil moderna. O desenvolvimento de ferramentas computacionais robustas, que permitem a comparação entre diferentes metodologias analíticas e numéricas, é essencial para aprimorar a precisão no projeto estrutural alcançando valores mais próximo dos deslocamentos reais. Essas ferramentas são indispensáveis para a tomada de decisões informadas durante o planejamento e a concepção de estruturas, bem como para impulsionar o avanço de pesquisas científicas na área.

O principal objetivo do trabalho é desenvolver e comparar uma metodologia simplificada para a estimativa da flecha imediata em vigas de concreto armado com a consideração da não-linearidade física por meio do método Mohr (viga conjugada) junto da utilização da fórmula de Branson proposto pela norma NBR 6118 (ABNT, 2023) e o método Bilinear proposto pelo CEB 90 (1991).

2. REVISÃO TEORICA

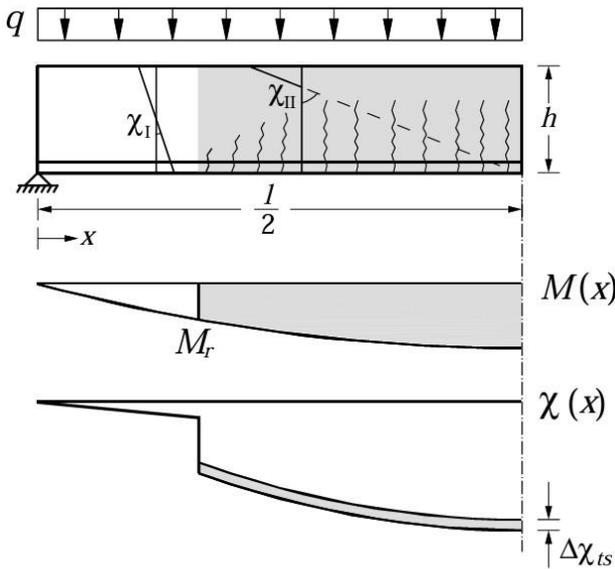
Os métodos para o cálculo do deslocamento vertical são classificados em geométricos no qual consideram as formas fletidas da estrutura como o método de Mohr e os de trabalho energia em que são baseados no princípio do trabalho virtual e de energia.

Segundo Burns (2011), a maneira geral de determinar flechas em vigas é integrar a curvaturas, $\chi(x)$, determinadas em cada seção, aplicando o princípio do trabalho virtual.

$$a = \int_0^l \chi(x) \cdot \bar{M}(x) dx \quad (1)$$

Isto significa forças axiais e rigidez variável (devido a fissuras ou encurtamento do concreto) podem ser considerados e os efeitos a longo prazo e o enrijecimento de tensão podem ser tratados ao nível da seção, como pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 – Ilustração esquemática das distribuições de momento e curvatura em uma viga parcialmente fissurada.



Fonte: Adaptado de Burns (2011).

2.1. Método da viga conjugada

O método da viga conjugada, desenvolvido por Otto Mohr em 1868, oferece uma abordagem mais vantajosa para calcular deslocamentos verticais e rotações em vigas do que o método da área-momento. Embora os esforços de cálculo necessários pelos dois métodos sejam essencialmente os mesmos, o método da viga conjugada é preferível devido à sua convenção sistemática de sinal e aplicação direta. Além do mais, o método de Mohr não requer o esboço da linha elástica da estrutura, ou seja, não é necessário considerar a situação deformada da estrutura.

Esse método fundamenta-se na analogia entre as relações de, carga, cortante, momento fletor e as relações de, M/EI , rotação e deslocamento vertical. Na Tabela 1, encontram-se as relações entre, carga, cortante e momento fletor, as quais possuem a mesma forma que as relações, M/EI , rotação e flecha.

Tabela 1 – Relações entre, carga, cortante e momento fletor os quais possuem a mesma forma que as relações, M/EI , rotação e flecha.

Relações entre Carga – Cortante - Momento Fletor	Relações entre M/EI , Rotação e Deslocamento Vertical
$\frac{dV}{dx} = q$	$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$
$\frac{dM}{dx} = V$ ou	$\frac{dy}{dx} = \theta$ ou
$\frac{d^2M}{dx^2} = q$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

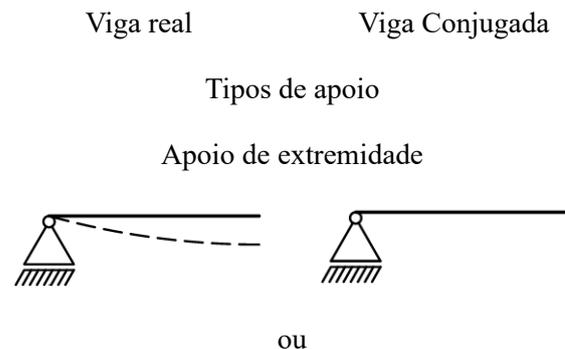
Fonte: Adaptado de Hibbeler (2013).

Deste modo, a rotação e deslocamento podem ser determinados a partir das equações de cortante e momento, obtidos de um carregamento que será descrito por uma função de M/EI da viga real em uma viga análoga e fictícia. Na seção transversal da viga fictícia, as equações de esforços internos, como cortante e momento fletor representam a rotação e o deslocamento da viga real.

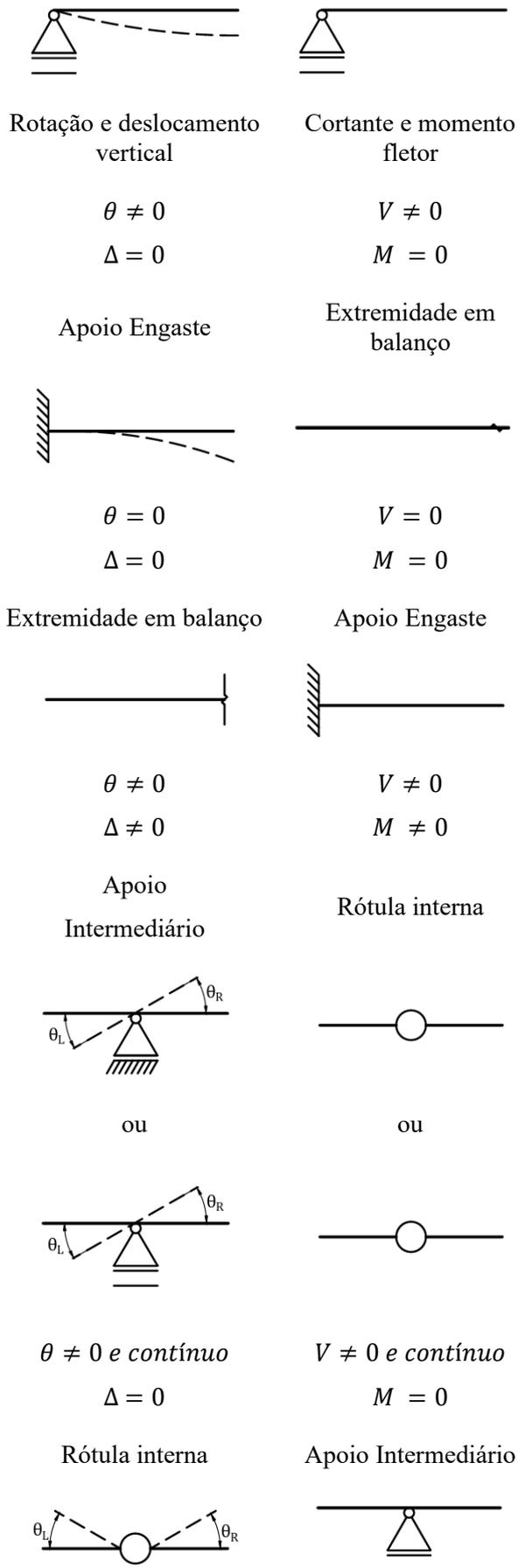
A definição de viga conjugada é uma viga fictícia que corresponde a uma viga real, apresentando o mesmo comprimento. No entanto a viga conjugada é externamente apoiada e internamente ligada com um carregamento que será uma função M/EI da viga real.

Os apoios da viga fictícia são determinados a partir das relações análogas entre vigas conjugadas e vigas reais correspondentes, isto é, o cortante e o momento fletor em qualquer ponto na viga conjugada devem ser compatíveis com a rotação e o deslocamento vertical nesse ponto da viga real. Os conjugados equivalentes de vários tipos de apoios reais são mostrados na Figura 2.

Figura 2 – Apoio para viga conjugada.



ou



$\theta \neq 0$ e descontínuo $V \neq 0$ e descontínuo
 $\Delta \neq 0$ $M \neq 0$

Fonte: Adaptado de Leet, Uang e Gilbert (2009).

O efeito dos apoios fictícios é impor condições de contorno que garantam que o cortante e o momento fletor produzidos na viga conjugada, com um carregamento descrito por função de M/EI da viga real, sejam respectivamente, iguais à inclinação e a deflexão da viga real.

No presente trabalho como a viga é biapoiada, a viga conjugada também será biapoiada. Os conjugados de alguns tipos de vigas, principalmente de vigas estaticamente determinada terão sempre vigas conjugadas estaticamente determinada, porém vigas estaticamente indeterminadas terão vigas conjugadas instáveis, entretanto serão auto equilibradas pelo carregamento M/EI da viga real.

O procedimento adotado para aplicação do método é o seguinte, primeiramente deve-se construir o diagrama de momento fletor da viga real, utilizando o método das seções para formular a equação de momento fletor e dividir pelo módulo de elasticidade “E” do material da viga multiplicado pelo momento de inercia da seção transversal “I”.

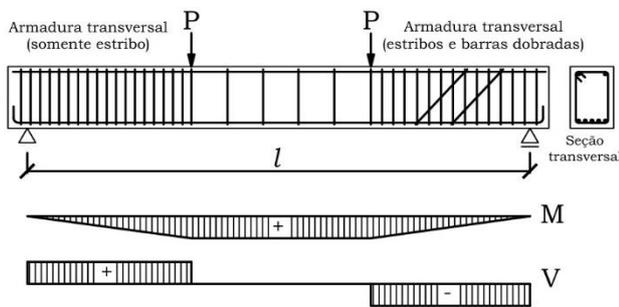
Posteriormente, determina-se a viga conjugada correspondente à referida viga real. Os apoios externos e a ligação internas para a viga conjugada devem ser selecionados de maneira que o cortante e momento fletor em qualquer ponto na viga conjugada sejam compatíveis com a rotação e flecha. Os conjugados de vários tipos de apoio reais foram mostrados na Figura 2. Após isso, aplica-se o diagrama M/EI da viga real, como carregamento na viga conjugada. As ordenadas positivas do diagrama M/EI são aplicadas como cargas ascendentes na viga conjugada e vice-versa.

Em seguida calcula-se a reações de apoio da viga conjugada aplicando as condições de equilíbrio da estática e outras condições se houver. Posteriormente determina-se pelo método das seções as equações de cortante e momento fletor para viga conjugada no qual irá fornecer as rotações e as deflexões ao longo do comprimento da viga real. Lembrando que a rotação em um ponto da viga real é positiva ou anti-horária se o cortante for positivo, já o momento fletor positivo na viga conjugada representa uma flecha positiva ou ascendente na viga real.

2.2. Comportamento de uma viga de concreto a flexão

Na Figura 3, tem-se o comportamento de uma viga de concreto armado biapoiada a flexão, sem força normal, $N = 0 N$, com um carregamento composto de duas forças concentradas de mesma intensidade, existindo armadura longitudinal para combater as tensões de tração induzidas pelo carregamento concentrado crescente, devido a flexão. Também tendo armadura de cisalhamento para combater o esforço cortante. Com dois tipos de armaduras de cisalhamento, estribos verticais do lado esquerdo e estribos inclinados do lado direito.

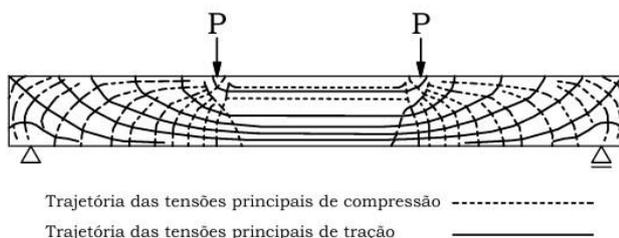
Figura 3 – Viga Biapoiada com diagrama dos esforços.



Fonte: Adaptado de Leonhardt e Mönning (1977).

As trajetórias das tensões principais de compressão e tração em uma viga de concreto armado, no estágio I, são paralelas ao eixo longitudinal da viga no trecho onde ocorre a flexão pura. No entanto, nos trechos delimitados pela carga concentrada até o apoio, de ambos os lados, existe esforço cortante o qual geram tensões de cisalhamento que alteram a trajetórias das tensões principais, apresentando-se inclinadas em relação ao eixo longitudinal da viga de concreto armado, como pode ser observado na Figura 4.

Figura 4 – Viga Biapoiada com trajetória das tensões principais.



Fonte: Adaptado de Leonhardt e Mönning (1977).

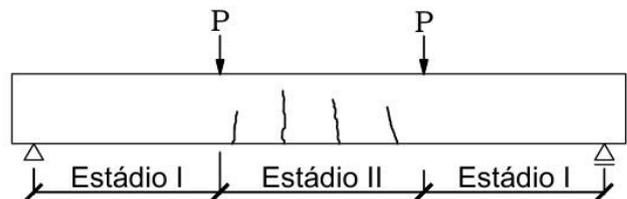
Com o aumento progressivo do carregamento, as tensões de tração e compressão induzidas pelo carregamento intensificam-se progressivamente até

igualarem-se às tensões resistentes do concreto utilizado na viga.

Quando isto ocorre, surge a primeira fissura de flexão na região onde a viga apresenta maior momento fletor, que é no meio do vão.

Com aumento do carregamento, surgem novas fissuras e ocorre o aumento das aberturas das fissuras no trecho de flexão pura, o qual está localizado entre as duas forças concentradas. Nesse trecho da viga, onde as fissuras se manifestam, a viga se encontra no estágio II. Nos trechos onde não existem fissuras a viga encontra-se no estágio I sendo válido a Lei de Hooke. Isso pode ser observado na Figura 5.

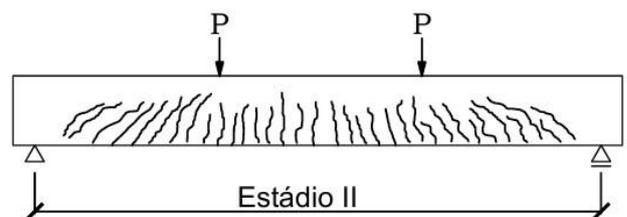
Figura 5 – Viga Biapoiada com aparecimento das primeiras fissuras de flexão.



Fonte: Adaptado de Leonhardt e Mönning (1977).

À medida que o carregamento se intensifica, começam a surgir fissuras inclinadas próximas dos apoios devido ao esforço cortante. Essas fissuras são designadas como fissuras de cisalhamento. Nesta fase, a viga está predominantemente no estágio II em quase toda a sua extensão. Isso é evidente na Figura 6.

Figura 6 – Viga Biapoiada com fissuras de flexão e fissuras de cisalhamento pouco antes da ruptura.



Fonte: Adaptado de Leonhardt e Mönning (1977).

2.3. Estádios de cálculos

A forma de caracterizar o desempenho de uma seção transversal de concreto, corresponde na aplicação de um carregamento no qual inicialmente é apenas o peso próprio da peça de concreto e posteriormente é aumentado o carregamento até a peça alcançar a ruptura. Às várias fases que a seção transversal de concreto passa durante o aumento do carregamento, onde variam parâmetros como tensões, deformações, curvatura, esforços internos entre outras propriedades da seção de concreto é denominado estádios, que são

comumente classificados como estágio I, estágio II e estágio III.

2.3.1 Estádio I

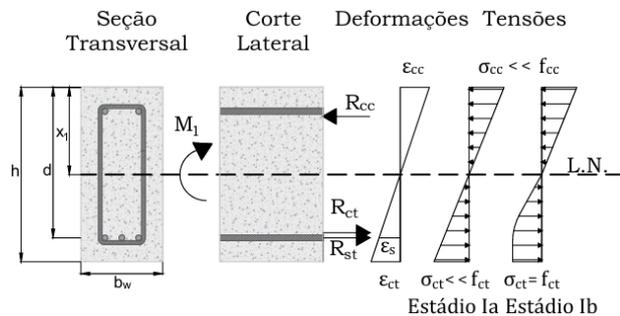
O estágio I é dividido em duas fases Ia e Ib, como ilustrado na Figura 7. Na primeira fase que é Ia, o concreto resiste à tração com diagrama triangular, sob a ação de um momento fletor M_I de baixa intensidade.

Nesta fase, Ia, as tensões normais existentes são de baixa intensidade e não superam a tensão de tração que o concreto consegue resistir.

O diagrama de tensões, na seção transversal da peça, é linear. A fase, Ib, corresponde ao início da fissuração do concreto, devido ao aumento do carregamento. Isto resulta na perda da linearidade das tensões de tração as quais deixam de serem proporcionais às deformações, existindo a linearidade apenas nas regiões comprimidas do concreto.

Com o aumento do carregamento atinge-se um valor no qual as tensões de tração existentes na peça superam a resistência a tração do concreto, surgindo a primeira fissura, que corresponde ao estágio Ib, terminando o estágio I e iniciando o estágio II. O momento que causa a primeira fissura é conhecido como momento de fissuração, M_r .

Figura 7 – Comportamento do concreto no estágio I.



2.3.2 Estádio II

No estágio II, geralmente, se realiza a verificação do estado limite de serviço para condições de deformações excessivas e abertura de fissuras.

Aumentado o valor do momento fletor de M_I para M_{II} ocorrem fissuras na região do concreto tracionado, por consequência, o concreto não irá contribuir à tração, apenas o aço passa a resistir aos esforços de tração. A parte comprimida ainda mantém um diagrama linear de tensões continuando válida a lei de Hooke, variando do valor nulo no eixo neutro para um valor máximo na borda comprimida. Esse estágio é denominado estágio II puro.

Com o aumento progressivo do carregamento, o número de fissuras aumenta as quais crescem no

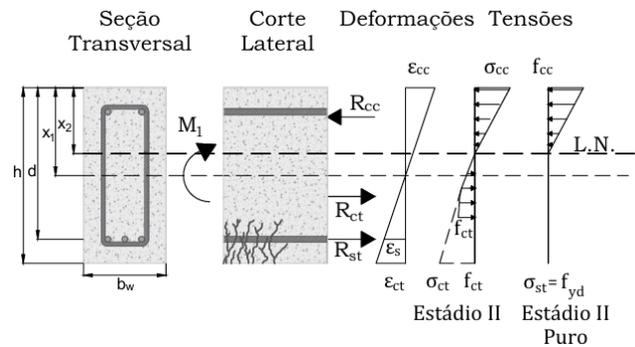
sentido do eixo neutro. Esse mesmo eixo tende a se deslocar no sentido da borda mais comprimida da seção transversal. Enquanto isso a tensão na armadura sofre um aumento progressivo, podendo ou não atingir o limite de escoamento da armadura.

Esse estágio é finalizado com o início da plastificação nas fibras mais comprimida do concreto. Ilustrado na Figura 8.

Não se pode esquecer o quanto a rigidez do elemento é reduzida devido o processo de abertura de fissuras.

A perda de rigidez é um fenômeno de difícil análise, pois depende do grau de fissuração, que é progressivo e depende dos momentos fletores os quais sofrem redistribuição a medidas que as fissuras aumentam. Além disso, existe um enrijecimento da parte tracionada gerado pelo concreto entre fissuras.

Figura 8 – Comportamento do concreto no estágio II.



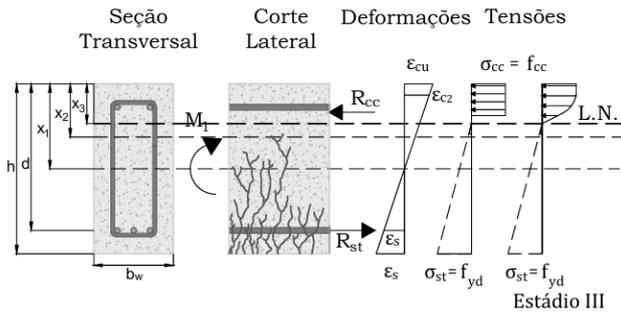
2.3.3 Estádio III

No estágio III, conforme ilustrado na Figura 9, a região comprimida da seção transversal, já está plastificada, indicando que o concreto está prestes a romper. Nesse estágio, adota-se um diagrama de tensões, que dependendo da deformação, assume a forma parabólica ou retangular. Esse diagrama é usualmente conhecido como diagrama parábola-retângulo. O mesmo pode ser substituído por um diagrama simplificado com forma retangular, com tensão média constante.

À medida que o carregamento aumenta, o estado de fissuração na viga se intensifica. A região comprimida do concreto começa a plastificar e as tensões deixam de seguir um comportamento linear, surgindo a não linearidade física do material comprimido.

No estágio III, realiza-se o dimensionamento dos elementos estruturais no Estado-Limite Último, situação conhecida como cálculo na ruptura.

Figura 9 – Comportamento do concreto no estágio III.



2.3.4 Características geométricas do estágio I

Como se sabe o dimensionamento de elemento de concreto armado é feito de maneira que as barras de aço conhecidas como armadura trabalhem solidariamente através do fenômeno da aderência entre o concreto e o aço, isso tem por consequência que o posicionamento da armadura influencia no centro de rotação da seção e da rigidez.

Para atingir esse objetivo, é necessário realizar a homogeneização da seção, convertendo as áreas das armaduras em uma área equivalente de concreto. Esse processo é baseado na relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto, conhecida como razão de homogeneização.

Nessa situação, considera-se que há uma relação linear entre tensão e deformação, o que valida a lei de Hooke. Isso ocorre porque as deformações são pequenas e admite-se a aderência entre o concreto e a armadura, considerando que ambos os materiais apresentam a mesma deformação.

$$R_s = \sigma_s \cdot A_s \quad (2)$$

Sendo:

R_s = Força Resultante na armadura;

σ_s = Tensão na armadura;

A_s = Área de aço.

Como

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \quad (3)$$

$$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c \quad (4)$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c \quad (5)$$

Sendo:

E_s = Módulo de elasticidade longitudinal do aço;

ε_s = Deformação específica no aço;

ε_c = Deformação específica no concreto;

σ_c = Tensão no concreto;

E_c = Módulo de elasticidade longitudinal do concreto.

Substituindo as equações (3) em (2) tem-se:

$$R_s = E_s \cdot \varepsilon_s \cdot A_s \quad (6)$$

Substituindo as equações (4) na (6) tem-se:

$$R_s = E_s \cdot \varepsilon_c \cdot A_s \quad (7)$$

Para homogeneizar a seção precisa encontrar a área de concreto que suporte uma força igual da armadura. Essa área é conhecida como área equivalente de concreto “ $A_{c.eq}$ ”.

$$R_s = E_c \cdot \varepsilon_c \cdot A_{c.eq} \quad (8)$$

Igualando as equações (7) e (8) e isolando a área equivalente de concreto “ $A_{c.eq}$ ” tem-se:

$$R_s = R_s$$

$$E_s \cdot \varepsilon_c \cdot A_s = E_c \cdot \varepsilon_c \cdot A_{c.eq}$$

$$A_{c.eq} = \frac{E_s \cdot \varepsilon_c \cdot A_s}{E_c \cdot \varepsilon_c}$$

$$A_{c.eq} = \frac{E_s \cdot A_s}{E_c} \quad (9)$$

Sendo:

$$\alpha_E = \frac{E_s}{E_c} \quad (10)$$

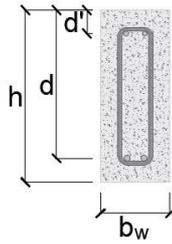
α_E = Razão de homogeneização da seção, ou relação entre os módulos de deformação longitudinal do aço e do concreto.

Então

$$A_{c.eq} = \alpha_E \cdot A_s \quad (11)$$

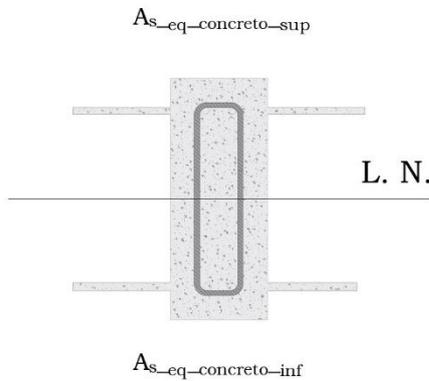
A Figura 10, mostra uma seção transversal retangular genérica de uma viga de concreto armado.

Figura 10 – Seção transversal retangular genérica de uma viga de concreto armado.



A Figura 11 mostra a seção homogeneizada no estágio I.

Figura 11 – Seção transversal homogeneizada no estágio I com área de concreto equivalente da armadura positiva e negativa.



Após o cálculo da área de concreto equivalente, pode-se, através do momento estático, calcular a altura do eixo neutro da seção homogeneizada. Para uma seção transversal retangular de concreto armado o qual é composta de uma área de concreto igual a $b_w \cdot h$, onde b_w representa a largura da viga e h representa a altura da viga, deve-se calcular a seção de concreto equivalente à do aço é igual $A_s \cdot (\alpha_e - 1)$, lembrando que o coeficiente α_e representa a área de aço a ser subtraída devido essa área ter sido computada na área de concreto da seção transversal o mesmo ocorre na seção de concreto equivalente da área de aço para armadura de compressão A'_s .

Calcular o centro de gravidade da seção homogeneizada necessita-se da área de concreto da seção transversal " $A_{concreto}$ ", área de concreto equivalente " $A_{c.eq}$ " e da área de aço das armaduras tanto tracionadas, " A_s " quanto comprimidas, " A'_s ". o cálculo do centro de gravidade da seção é feito pelas seguintes expressões:

$$A_{concreto} = b_w \cdot h \quad (12)$$

$$A_{c.eq} = \alpha_E \cdot A_s \quad (11)$$

$$A'_{c.eq} = \alpha_E \cdot A'_s \quad (13)$$

$$x_{cgI} = \frac{A_{concreto} \cdot \frac{h}{2} + (A_{c.eq} - A_s) \cdot (h - d)}{A_{concreto} + A_{c.eq} + A'_{c.eq} - A_s - A'_s} + \frac{(A_{c.eq} - A'_s) \cdot (h - d')}{A_{concreto} + A_{c.eq} + A'_{c.eq} - A_s - A'_s}$$

$$x_{cgI} = \frac{A_{concreto} \cdot \frac{h}{2} + A_s \cdot (\alpha_E - 1) \cdot (h - d)}{A_{concreto} + A_s \cdot (\alpha_E - 1) + A'_s \cdot (\alpha_E - 1)} + \frac{A'_s \cdot (\alpha_E - 1) \cdot (h - d')}{A_{concreto} + A_s \cdot (\alpha_E - 1) + A'_s \cdot (\alpha_E - 1)} \quad (14)$$

Visto que a altura da linha neutra no estágio I é obtido através da altura da seção " h " menos o centro de gravidade da seção homogeneizada " x_{cgI} " pela seguinte equação:

$$x_I = h - x_{cgI} \quad (15)$$

Com o valor do centro de gravidade pode-se efetuar o cálculo do momento de inercia da seção homogeneizada no estágio I, pela seguinte expressão:

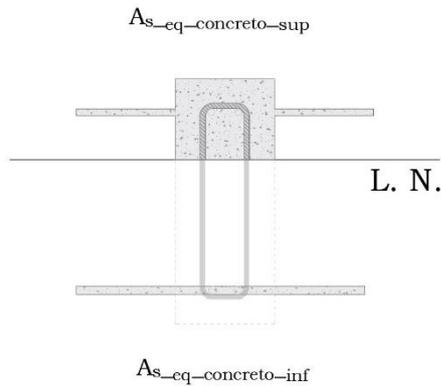
$$I_I = \frac{b_w \cdot h^3}{12} + b_w \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2} - x_{cgI}\right)^2 + (A_{c.eq} - A_s) \cdot (d - x_{cgI})^2 + (A'_{c.eq} - A'_s) \cdot (d' - x_{cgI})^2 \quad (16)$$

2.3.5 Características geométricas do estágio II puro

Do mesmo modo que no estágio I, procura-se a localização do eixo neutro e calcula-se o momento de Inercia da seção homogeneizada. Porém é desconsiderado a resistência do concreto a tração. Esse estágio é conhecido com estágio II puro. No qual a armadura absorverá toda a tensão de tração para que haja o equilíbrio das resultantes de compressão do concreto e da armadura comprimida na seção transversal.

A Figura 12 mostra a seção homogeneizada no estágio II.

Figura 12 – Seção transversal homogeneizada no estágio II com área de concreto equivalente da armadura positiva e negativa.



Para encontrar posição do eixo neutro “ x_{cgII} ” deve-se realizar o momento estático resolvendo a seguinte equação de 2º grau:

$$b_w \cdot \frac{x^2}{2} + A'_{c.eq} \cdot (x - d') - A'_s \cdot (x - d') - A_{c.eq} \cdot (d - x) = 0 \quad (17)$$

Calcula-se o momento de inércia no estágio II puro da seção homogeneizada será pela seguinte expressão:

$$I_{II} = \frac{b_w \cdot x_{cgII}^3}{12} + b_w \cdot x_{cgII} \cdot \left(x_{cgII,s,h} - \frac{x_{cgII}}{2} \right)^2 + (A_{c.eq} - A_s) \cdot (d - x_{cgII})^2 + (A'_{c.eq} - A'_s) \cdot (d' - x_{cgII})^2 \quad (18)$$

Após isso, calcula-se o Momento de fissuração, de acordo com o item 17.3.1 da norma, NBR 6118 (ABNT,2023), pode ser expresso por:

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ctm} \cdot I_c}{y_t} \quad (19)$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad (20)$$

$$f_{ctk.inf} = 0,7 \cdot f_{ctm} \quad (21)$$

Sendo:

α é um coeficiente que depende da forma da seção transversal, $\alpha = 1,2$ para seções em forma de “T” ou duplo “T”, $\alpha = 1,3$ seções I ou T invertido e $\alpha = 1,5$ para seções retangulares;

I_c = Momento de inércia do estágio I que pode ser adotado o momento de inércia da seção bruta de concreto ou momento de inércia da seção homogeneizada. Neste trabalho foi adotado da seção homogeneizada;

f_{ctm} = Resistência média a tração do concreto. Deve-se utilizar para Estado limite de deformação excessiva, já para verificação de abertura de fissura substitui o f_{ctm} por $f_{ctk.inf}$;

y_t = Distância do centro de gravidade à fibra mais tracionada da seção;

f_{ck} = Resistência característica à compressão do concreto.

Com o valor do momento de fissuração, é possível compará-lo com o momento solicitante da seção e determinar em qual estágio a viga se encontra, caso a seção esteja no estágio II pode-se utilizar a fórmula de Branson.

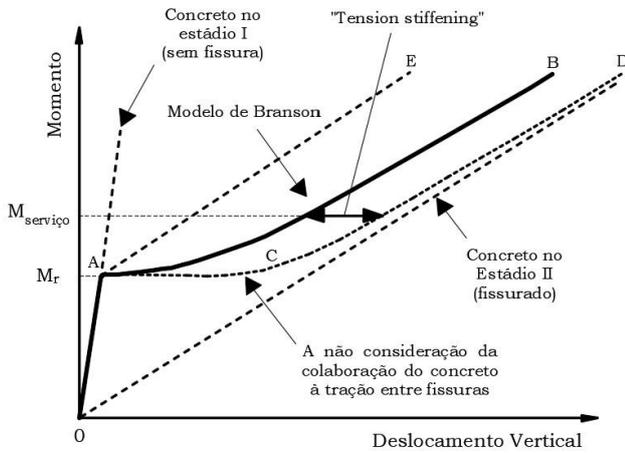
2.4. Fórmula de Branson

O modelo proposto por Branson em 1968 admite, para todo elemento de concreto, uma única inércia. Essa inércia representa os trechos fissurados e não fissurados, ou seja, os trechos em que a peça de concreto está no estágio I e os trechos em que a peça está no estágio II, Carvalho e Figueiredo Filho (2016).

Esse método é semiempírico, no qual é adotado a variação da tensão ao longo da seção transversal e ao longo do comprimento de forma simplificada, utilizando equações empíricas que fornecem valores médios da inércia. Como consequência a fórmula de Branson reflete o efeito da fissuração no concreto quanto submetido a flexão.

Segundo Burns (2011), incorporar o efeito de “tension stiffening” (enrijecimento à tração) ao nível da seção em elementos submetidos as flexões foram derivadas empiricamente do momento de inércia efetivo ilustrado na Figura 13.

Figura 13 –Momento versus deflexão.



Fonte: adaptado de Gilbert (2008).

Esse momento é utilizado para o cálculo das deformações imediatas. Conforme a seguinte expressão:

$$I_m = \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^n \cdot I_I + \left(1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^n\right) \cdot I_{II} \quad (22)$$

Sendo:

I_m = Momento de inércia efetivo, para uma seção ou para toda a peça, no caso de vigas simplesmente apoiadas, o momento de inércia médio entre a seção conforme o estágio em que se encontram;

I_I = Momento de inércia da peça no estágio I, podendo o mesmo ser da seção bruta ou da seção homogeneizada;

I_{II} = Momento de inércia da peça no estágio II;

M_r = Momento de Fissuração do concreto;

n = índice de valor igual a 4, para situações em que análise é feita em apenas uma seção da peça, ou igual a 3, quando se faz a análise da peça ao longo de todo o seu comprimento.

O método simplificado de Branson, de acordo com Carvalho e Figueiredo Filho (2016), foi proposto em 1963, adota uma fórmula de inércia equivalente ponderada entre os estádios I e II do concreto. Essa metodologia foi primariamente empregada pelo ACI (*American Concrete Institute*) para cálculo da flecha imediata, sendo também recomendado pela norma NBR 6118 (ABNT, 2023), no item 17.3.2.1.1, dada pela seguinte equação:

$$(E \cdot I)_{eq,t_0} = E_{cs} \cdot \left(\left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3 \cdot I_c\right) + E_{cs} \cdot \left(\left(1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3\right) \cdot I_{II}\right) \leq E_{cs} \cdot I_c \quad (23)$$

Sendo:

I_c = Momento de inércia da peça no estágio I, podendo o mesmo ser da seção bruta ou da seção homogeneizada;

I_{II} = Momento de inércia da peça no estágio II;

M_r = Momento de Fissuração do concreto;

M_a = Momento atuante na seção;

E_{cs} = Módulo de elasticidade secante do concreto.

2.5. Método Bilinear CEB 90 (1991)

O método Bilinear utiliza-se das curvas geradas no gráfico de momento versus curvatura ou pelo gráfico momento versus deslocamento vertical do estágio I e do estágio II para fazer se a interpolação entre as curvas gerando uma curva que se aproxime dos efeitos da não linearidades físicas do concreto (ARAÚJO, 2010). Segundo Burns (2011), o fator de *tension stiffening* de Rao está implicitamente incluído no fator de interpolação da equação.

A curvatura no estágio I.

$$\chi_I = \frac{M}{K_I} \quad (24)$$

$$K_I = E_{cs} \cdot I_I \quad (25)$$

Sendo:

χ_I = Curvatura no estágio I;

M = Momento atuante na seção;

K_I = Rigidez no estágio I.

A curvatura no estágio II.

$$\chi_{II} = \frac{M}{K_{II}} \quad (26)$$

$$K_{II} = E_{cs} \cdot I_{II} \quad (27)$$

Sendo:

χ_{II} = Curvatura no estágio II;

M = Momento atuante na seção;

K_{II} = Rigidez no estádio II.

Coefficiente de Interpolação estando no seguinte intervalo $0 \leq \eta_c \leq 1$ pode ser definido pelas seguintes expressões:

$$\eta_c = 0, \text{ se } M < M_r$$

$$\eta_c = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_r}{M}\right)^2, \text{ se } M \geq M_r \quad (28)$$

Sendo:

η_c = Coeficiente de interpolação;

M = Momento atuante na seção;

M_r = Momento de Fissuração;

β_1 = Coeficiente que avalia a qualidade da aderência que pode assumir o valor $\beta_1 = 1$, para barras de alta aderência e $\beta_1 = 0,5$, para barras lisas;

β_2 = Coeficiente que representa a influência da duração ou da repetição do carregamento que pode assumir o valor $\beta_2 = 1$, para o primeiro carregamento e $\beta_2 = 0,5$, para cargas de longa duração ou que tenha grande números de ciclos.

A curvatura pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\chi = (1 - \eta_c) \cdot \chi_1 + \eta_c \cdot \chi_2 \quad (29)$$

Sendo:

χ_1 = Curvatura no estádio I;

χ_2 = Curvatura no estádio II;

η_c = Coeficiente de interpolação.

Utilizando-se da relação M/EI que é a curvatura, pode-se calcular o deslocamento vertical pelo método da viga conjugada. Outra maneira que o método Bilinear, também permite é o cálculo do deslocamento vertical para estádio I e para estádio II puro, utilizando-se da rigidez no estádio I e no estádio II puro em todo o seu comprimento, desse modo o deslocamento provável é obtido através de uma interpolação entre esses valores extremos, de forma análoga as curvaturas.

Assim o deslocamento vertical numa seção de referência é expresso por:

$$\delta_v = (1 - \eta_c) \cdot \delta_{v,I} + \eta_c \cdot \delta_{v,II} \quad (30)$$

Importante salientar que o coeficiente de interpolação η_{δ_v} é diferente do coeficiente de interpolação da curvatura, " η_c ". Ambas as interpolações são empíricas e as diferenças entre elas

é para se alcançar o melhor ajuste na curva com os resultados obtidos através da análise não linear. O coeficiente de interpolação η_{δ_v} é dado pelas seguintes equações:

$$\eta_{\delta_v} = 0, \text{ se } M < M_r$$

$$\eta_{\delta_v} = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_r}{M}\right), \text{ se } M \geq M_r \quad (31)$$

Sendo:

η_{δ_v} = Coeficiente de interpolação;

M = Momento atuante na seção;

M_r = Momento de Fissuração;

β_1 = Coeficiente que avalia a qualidade da aderência que pode assumir o valor $\beta_1 = 1$, para barras de alta aderência e $\beta_1 = 0,5$ para barras lisas;

β_2 = Coeficiente que representa a influência da duração ou da repetição do carregamento que pode assumir o valor $\beta_2 = 1$, para o primeiro carregamento e $\beta_2 = 0,5$ para cargas de longa duração ou que tenha grande números de ciclos.

Segundo Araújo (2010) o momento de fissuração para o método Bilinear CEB 90 (1991) e dado pela seguinte expressão.

$$M_r = K_1 \cdot \frac{f_{ctm}}{E_{cs} \cdot (h - x_1)} \quad (32)$$

Sendo:

K_1 = Rigidez no estádio I;

f_{ctm} = Resistência Média a tração do concreto;

E_{cs} = Módulo de elasticidade secante do concreto;

x_1 = Altura da Linha Neutra no estádio I;

h = Altura da seção transversal.

3.0 METODOLOGIA

O presente trabalho irá comparar os métodos simplificados, dentre estes métodos será utilizado o proposto pela norma brasileira NBR 6118 (ABNT, 2023), que utiliza a fórmula de Branson e o método Bilinear proposto pelo CEB 90 (1991), utilizando para ambos os métodos o cálculo da flecha pelo método de Mohr.

Primeiramente foi apresentado os Métodos com as suas equações seguindo o mesmo roteiro que foi utilizado no programa desenvolvido no MathCad

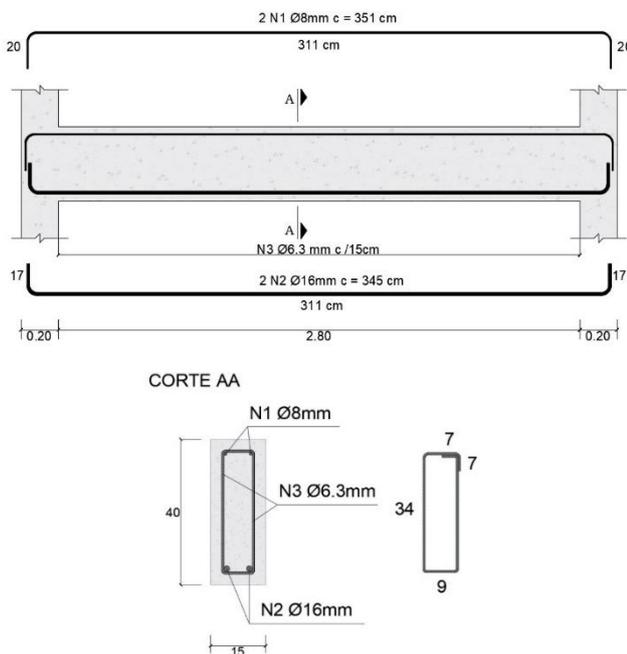
Prime 7 (Anexo A). E posteriormente, foi analisado os resultados numéricos das simulações.

3.1 Exemplo Estudado

Foi estudado uma viga biapoiada, denominada viga. Com uma seção transversal retangular, projetada para um carregamento uniformemente distribuído de 35,792 kN/m ao longo de seu comprimento de 3 m, resultando em um momento fletor último de cálculo de 56,373 kN.m. E para a armadura longitudinal foram adotadas 2Ø16 mm para a armadura positiva e 2Ø8 mm como porta-estribo.

O cobrimento da viga, foi adotado o proposto pela norma NBR 6118 (ABNT, 2023), considerando classe de agressividade II, com um cobrimento de 3 cm por face da viga, além de adotar para armadura de cisalhamento, um estribo de diâmetro 6.3mm. Todas as armaduras foram utilizadas aços CA 50, com resistência característica de 500 MPa e com módulo de Elasticidade de 210 GPa, já o concreto utilizado foi o C25, com resistência característica a compressão de 25 MPa, com α_e para granito e gnaiss, de valor 1,0. A seção transversal retangular apresenta uma largura $b_w = 15 \text{ cm}$ e uma altura $h = 40 \text{ cm}$. Como pode ser visto na Figura 14.

Figura 14 – Detalhamento da viga.



Nas simulações, adotando a Norma Brasileira, foram calculados os deslocamentos verticais utilizando o método de Mohr e a inércia nos estádios I e II da seção homogeneizada. Calculou-se o Momento de Fissuração para identificar os trechos da viga que estariam no estádio II, permitindo assim calcular a situação mais crítica. Esta consiste em considerar a

inércia do estádio I nos trechos onde o momento solicitante na viga, devido ao carregamento, não superou o momento de fissuração, e adotar a inércia do estádio II nos trechos onde o momento foi superado. Nesse cenário, os deslocamentos verticais obtidos na viga serão maiores que os deslocamentos reais.

Posteriormente, realizou-se uma simulação utilizando a fórmula de Branson, proposta pela norma brasileira, de duas maneiras: primeiramente, adotando-se uma inércia média ou equivalente para toda a viga, selecionando a seção transversal que apresenta o maior momento fletor solicitante — que, para uma viga biapoiada, ocorre no meio do vão — e aplicando a equação 22 com ($n = 3$). Em uma segunda abordagem, utilizou-se a fórmula de Branson variando de seção em seção da viga, nos trechos discretizados onde o momento fletor solicitante excedia o momento de fissuração, adotando-se ($n = 4$) na equação 22 e trabalhando com a inércia no estádio I e, para os trechos no estádio II, com a inércia variando de seção em seção ao longo da extensão da viga.

Pelo Método Bilinear do CEB 90 (1991), foi utilizado o coeficiente de interpolação η_c , que é fornecido pela equação 28 para a seção crítica no meio do vão, onde ocorre o maior momento fletor devido ao carregamento. Este coeficiente interpola as curvaturas dos estádios I e II para obter a curvatura média pela equação 29, que, por sua vez, é usada para calcular o deslocamento vertical utilizando o método de Mohr. A segunda abordagem consiste em utilizar o coeficiente de interpolação que varia por trechos discretizados ao longo da extensão da viga.

A terceira forma é a partir da flecha calculada considerando a viga inteira no estádio I e posteriormente no estádio II. Utilizar o coeficiente de interpolação η_{δ_v} dado pela equação 31, para uma seção crítica, no meio do vão. Após calcular o coeficiente de interpolação η_{δ_v} , o deslocamento vertical é obtido pela equação 30.

4.0 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Após fazer as simulações no Mathcad Prime 7 foram exportados os resultados e analisados.

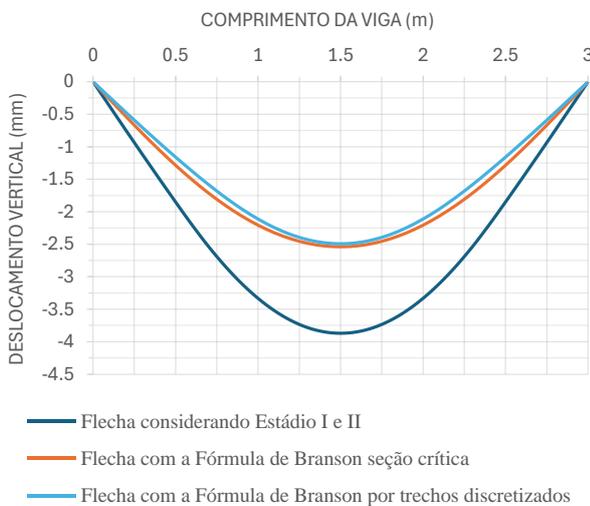
Os resultados das simulações pelo programa retornam o valor do deslocamento em qualquer posição da viga. Para o presente trabalho optou-se por dividir a viga em 12 partes com a posição “x” variando de 0,25 m a cada seção ao longo do comprimento da viga de 3 m.

O carregamento adotado foi de 24 kN/m, para análises de serviço, que representa aproximadamente 66% do carregamento último de 35,79 kN/m, conforme será visto na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados das simulações utilizando a norma NBR 6118(ABNT 6118:2023) para viga.

Deslocamento Vertical em (mm)				
Carregamento				
24 kN/m				
x (m)	Momento M(x) (kNm)	Flecha considerando do estádio I e II	Flecha com a Fórmula de Branson seção crítica	Flecha com a Fórmula de Branson por trechos discretizados
0,00	0,00	0,000	0,000	0,000
0,25	8,25	-0,936	-0,668	-0,591
0,50	15,00	-1,849	-1,286	-1,160
0,75	20,25	-2,689	-1,810	-1,682
1,00	24,00	-3,331	-2,208	-2,113
1,25	26,25	-3,732	-2,456	-2,395
1,50	27,00	-3,868	-2,540	-2,492
1,75	26,25	-3,732	-2,456	-2,395
2,00	24,00	-3,331	-2,208	-2,113
2,25	20,25	-2,689	-1,810	-1,682
2,50	15,00	-1,849	-1,286	-1,160
2,75	8,25	-0,936	-0,668	-0,591
3,00	0,00	0,000	0,000	0,000

Figura 15 – Deslocamento Vertical obtido pela Tabela 2, viga.



Como se pode observar na Figura 15, utilizando-se a fórmula de Branson com a inercia variando por

trechos discretizados, apresentará um deslocamento máximo no trecho onde a seção apresenta momento fletor máximo que para a viga em estudo será no meio do vão. Em contrapartida pelo método simplificado de Branson utilizando uma inercia equivalente para toda viga, os deslocamentos serão maiores em todas as seções, inclusive no meio do vão. Para a viga analisando o meio do vão, percebe-se que a Fórmula de Branson na seção crítica apresenta um deslocamento 1,93% maior que a fórmula de Branson por trechos discretizados,

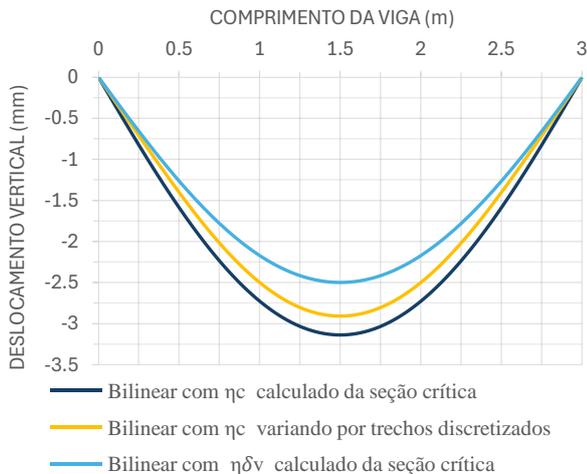
Ressaltando pelos resultados que a diferença entre as flechas é de centésimos de milímetros e devido à complexidade de cálculo para utilizar a fórmula de Branson com Inercia variando por trechos discretizados ao longo da extensão da viga, é razoável concluir que a utilização da fórmula de Branson adotando o momento atuante na seção crítica, com resultados satisfatório comparado a utilização da fórmula de Branson com a Inercia variando por trechos discretizados.

Na Tabela 3, os resultados da simulação da viga pelo Método Bilinear do CEB 90 (1991).

Tabela 3 – Resultados das simulações utilizando o método Bilinear CEB 90 (1991) para viga.

Deslocamento Vertical em (mm)				
Carregamento				
24 kN/m				
x (m)	Momento M(x) (kNm)	Bilinear com η_c constante calculado da seção crítica	Bilinear com η_c variando por trechos discretizados	Bilinear com $\eta_{\delta v}$ calculado da seção crítica
0,00	0,00	0,000	0,000	0,000
0,25	8,25	-0,826	-0,712	-0,658
0,50	15,00	-1,589	-1,402	-1,265
0,75	20,25	-2,236	-2,019	-1,781
1,00	24,00	-2,728	-2,500	-2,172
1,25	26,25	-3,034	-2,804	-2,416
1,50	27,00	-3,138	-2,908	-2,499
1,75	26,25	-3,034	-2,804	-2,416
2,00	24,00	-2,728	-2,499	-2,172
2,25	20,25	-2,236	-2,019	-1,781
2,50	15,00	-1,589	-1,402	-1,265
2,75	8,25	-0,826	-0,712	-0,658
3,00	0,00	0,000	0,000	0,000

Figura 16 – Deslocamento Vertical obtido pela Tabela 3, viga.



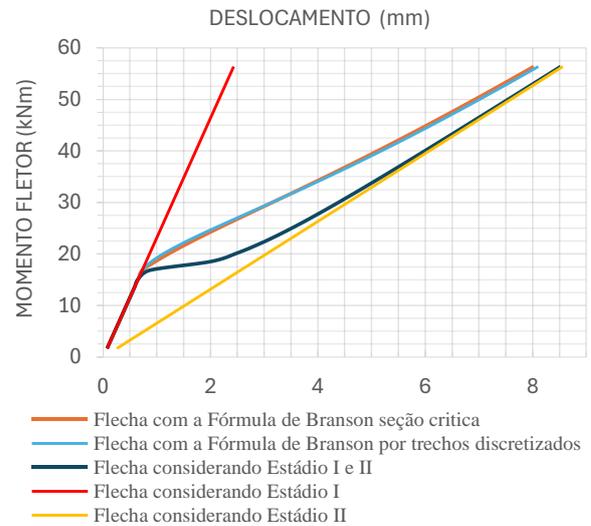
Como se pode perceber pela Figura 16, o deslocamento vertical na viga, adotando o coeficiente de interpolação η_c , constante, calculado a partir da seção crítica, apresentam valores maiores do que o coeficiente de interpolação η_c variando por trechos discretizados. Em termos de porcentagens para viga, o deslocamento com η_c constante, é 7,91% maior que o deslocamento com η_c variável, por trechos discretizados.

Comparando o coeficiente de interpolação $\eta_{\delta v}$, com os outros coeficientes de interpolação, tem-se um o menor resultado de deslocamento. Em termos de porcentagem o coeficiente $\eta_{\delta v}$, para viga, apresenta um deslocamento 25,57% menor que o coeficiente de interpolação η_c constante obtido através da seção crítica e apresenta um deslocamento de 16,37% menor ao utilizar η_c variando por trechos discretizados.

Comparando o método Bilinear do CEB 90 (1991) com o de método de Branson da NBR 6118 (ABNT, 2023), para valores de maiores deslocamentos no meio do vão. A viga, no método Bilinear, apresenta um deslocamento 23,54% maior do que por Branson com os parâmetros calculados conforme as normas citadas. Ao comparar os menores deslocamentos entre o método Bilinear e por Branson no meio do vão. A viga pelo método Bilinear apresenta um deslocamento maior de 0,28%. Cabe ressaltar, que os modelos são dependentes do momento de fissuração que foram calculados pelas respectivas normas.

Na Figura 17, o gráfico de momento fletor versus deslocamento da viga, observa-se que os deslocamentos obtidos por Branson para os diferentes momentos flectores na seção no meio do vão.

Figura 17 – Momento fletor versus Deslocamento da viga, para seção localizado no meio do vão utilizando o método de Branson.



Como se pode observar a reta em vermelho, representa a viga em estudo no estágio I, sem existir qualquer formação de fissura. Já a reta amarela representa a viga no estágio II, ou seja, a viga fissurada, com a perda de rigidez.

A região delimitada entre as retas do deslocamento do estágio I e do deslocamento do estágio II, representa a realidade do comportamento de uma viga de concreto armado. A curva em azul marinho denominada flecha no estágio I e II também não representa o comportamento real de uma viga de concreto armado, devido não considerar os efeitos de *tension stiffening*. Já esse efeito é representado no gráfico pela distância horizontal entre a reta azul claro, denominada flecha pelo modelo de Branson por trechos discretizados, e reta amarela que representa o deslocamento do estágio II.

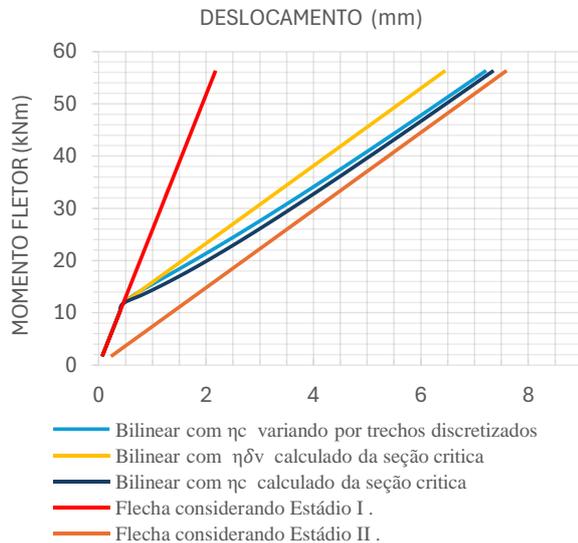
O mesmo efeito de *tension stiffening*, ocorre para curva laranja, denominada flecha pelo modelo Branson na seção crítica, cuja distância horizontal, com a reta amarela que representa a flecha no estágio II.

Na curva azul representada, na Figura 17, no trecho com o momento fletor variando de 15 kNm à 17,5 kNm, com um deslocamento vertical variando entre 0,75mm à 2,5mm, se tem uma perda de rigidez considerável, devido o momento solicitante superar o momento de fissuração que é de 16,86 kNm. E por não considerar o efeito de *tension stiffening*.

Na Figura 18, tem-se o gráfico de momento fletor versus deslocamento, na seção no meio do vão para viga,

obtidos pelo método Bilinear para os diferentes momentos fletores.

Figura 18 – Momento fletor versus Deslocamento da viga, para seção localizado no meio do vão, utilizando o método Bilinear.



Ao analisar a reta vermelha que representa o deslocamento do estágio I, tem-se um momento de fissuração de 11,85 kN.m, para uma flecha aproximadamente de 0,5 mm. Onde as curvas do método Bilinear com η_c constante calculado a partir da seção crítica, representado pela curva em azul marinho. E a curva em azul claro que representa o coeficiente de interpolação η_c variando por trechos discretizados, convergem para o estágio II mais rapidamente que pelo método de Branson. Porém se pode visualizar os efeitos da não linearidade física do concreto e o efeito *tension stiffening* no método Bilinear representando pela distância horizontal entre as curvas do método Bilinear e a reta laranja que representa o deslocamento vertical no estágio II.

Apesar do método Bilinear apresentar um momento de fissuração menor e alcançar mais rapidamente o estágio II, apresenta menores deslocamentos na ruptura da viga, quando comparado ao método de Branson o qual as curvas convergem mais devagar para a curva do deslocamento do estágio II, porém na situação de ruptura, Branson tem maiores deslocamentos.

4. CONCLUSÃO

A partir do trabalho realizado, as seguintes conclusões podem ser apresentadas:

- os valores de flechas calculados utilizando apenas os estádios I e II, sem considerar, mesmo que de maneira implícita, a contribuição das fissuras, podem resultar

em estimativas de flechas significativamente superiores aos valores obtidos por meio de formulações mais precisas;

- a discretização da viga, utilizando tanto a metodologia da NBR 6118 (ABNT, 2023) quanto a CEB 90 (1991), apresenta menores valores de flechas imediatas. Dessa forma, a simplificação na seção crítica pode ser utilizada em favor da segurança. A metodologia de Mohr pode ser aplicada para a consideração da não-linearidade física do concreto armado;

- O método Bilinear do CEB 90 (1991), apresenta valores superiores de flechas imediatas, isto ocorre devido aos parâmetros de resistência à tração, módulo de elasticidade secante do concreto, valores de rigidez nos estádios I e II diferentes entre os métodos de Branson e devido, a menor momento de fissuração.

5. AGRADECIMENTOS

Venho agradecer a todos as pessoas que contribuíram para minha formação pessoal, acadêmica e profissional.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado**. Vol. 2., 2a ed., Rio Grande, Editora Dunas, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto**. NBR 6118, ABNT, 2023.
- BURNS, Clare. **Serviceability analysis of reinforced concrete based on the tension chord model**. Zurich, 2011. Diss. ETH No. 19979. ETH Zurich, 2011.
- CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues de. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: segundo a NBR 6118:2014. 4. ed., São Carlos: Edufscar, 2016.
- GILBERT, R.I., **Calculation of long-term deflection**, 2008 – Centre for Infrastructure Engineering and Safety, The University of New South Wales, 2008.
- HIBBELER, R.C., **Análise das estruturas**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.
- LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Construções de concreto – Princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado**, v. 1. Rio de Janeiro, Ed. Interciência, 1977.
- M. LEET, Kenneth; UANG, Chiang-Ming; GILBERT, Anne M.. **Fundamentos da análise Estrutural**. 3ª Ed. Porto Alegre: Bookman, AMGH e McGraw-Hill, 2009.

Anexo A

Estudo da Flecha

Exemplo numérico

Análise de uma viga biapoiada de concreto com um concreto com as seguintes propriedades geométricas e característica do material

Dados da seção

$S_{tipo} :=$ Seção Retangular ▾

$f_{ck} := 25 \text{ MPa}$

$\gamma_c := 1.4$

$\alpha_e :=$ Para granito e gnaiss ▾

$f_{yk} := 500 \text{ MPa}$

$\gamma_s := 1.15$

Dados geométricos da seção transversal

$b_w := 15 \text{ cm}$

$h := 40 \text{ cm}$

$c_{nom} := 3 \text{ cm}$

Diâmetro da armadura longitudinal

Diâmetro do estribo

$\phi_1 := 16 \text{ mm}$

$\phi_2 := 16 \text{ mm}$

$\phi_t := 6.3 \text{ mm}$

Diâmetro da armadura porta estribo

Seção Transversal da Viga

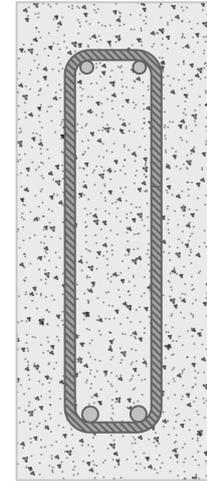
$\phi_3 := 8 \text{ mm}$

$\phi_4 := 8 \text{ mm}$

Altura útil

$$d := h - \left(c_{nom} + \phi_t + \frac{\phi_1}{2} \right) \quad d = 35.57 \text{ cm}$$

$$d' := c_{nom} + \phi_t + \frac{\phi_3}{2} \quad d' = 4.03 \text{ cm}$$



Cálculo da seção transformada de uma viga de concreto armado

Cálculo da área total da barras de aço por uma área equivalente de concreto

Área de aço da primeira camada inferior

Área de aço da primeira camada superior

$$A_{s_inf} := \frac{\pi \cdot \phi_1^2}{4} + \frac{\pi \cdot \phi_2^2}{4} = 4.021 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_sup} := \frac{\pi \cdot \phi_3^2}{4} + \frac{\pi \cdot \phi_4^2}{4} = 1.005 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_inf} = 4.021 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_sup} = 1.005 \text{ cm}^2$$

Razão de homogeneização

$$\alpha_E := \frac{E_s}{E_{cs}} = 8.696$$

$$\alpha_E = 8.696$$

Área de concreto equivalente da primeira camada inferior

$$A_{s_eq_concreto_inf} := \alpha_E \cdot A_{s_inf} = 34.967 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_eq_concreto_inf} = 3496.729 \text{ mm}^2$$

Área de concreto equivalente da primeira camada superior

$$A_{s_eq_concreto_sup} := \alpha_E \cdot A_{s_sup} = 8.742 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_eq_concreto_sup} = 8.742 \text{ cm}^2$$

Área da seção transversal de concreto

$$A_{concreto} := b_w \cdot h = 600 \text{ cm}^2$$

$$A_{concreto} = 600 \text{ cm}^2$$

Com as áreas podemos determinar a altura da Linha Neutra da seção homogeneizada de concreto no estágio I

Calcular do centro de gravidade da seção homogeneizada

$$x_{cg_I.s.h.} := \frac{A_{concreto} \cdot \frac{h}{2} + (A_{s_eq_concreto_inf} - A_{s_inf}) \cdot (h - d) + (A_{s_eq_concreto_sup} - A_{s_sup}) \cdot (h - d')}{A_{concreto} + A_{s_eq_concreto_inf} + A_{s_eq_concreto_sup} - A_{s_inf} - A_{s_sup}} = 19.439 \text{ cm}$$

Cálculo do Momento de Inercia da seção homogeneizada

$$I_{seção_homogenizada} := \frac{b_w \cdot h^3}{12} + b_w \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2} - x_{cg_I.s.h.} \right)^2 + (A_{s_eq_concreto_inf} - A_{s_inf}) \cdot (d - x_{cg_I.s.h.})^2 + (A_{s_eq_concreto_sup} - A_{s_sup}) \cdot (d' - x_{cg_I.s.h.})^2$$

$$I_{seção_homogenizada} = 90078.164 \text{ cm}^4$$

Cálculo do Momento de Inercia da seção bruta de concreto desprezando as áreas de armadura

$$I_{seção_bruta} := \frac{b_w \cdot h^3}{12} = 80000 \text{ cm}^4$$

$$I_{seção_bruta} = 80000 \text{ cm}^4$$

Com as áreas podemos determinar a altura da Linha Neutra da seção homogeneizada de concreto no estágio II

Calcular do centro de gravidade da seção homogeneizada no Estádio II

$$x_{cg_II} := b_w \cdot x \cdot \frac{x}{2} + A_{s_eq_concreto_sup} \cdot (x - d') - A_{s_sup} \cdot (x - d') - A_{s_eq_concreto_inf} \cdot (d - x) = 0 \xrightarrow{\text{solve, } x} \dots$$

$$x_{cg_II} = 10.499 \text{ cm}$$

Cálculo do Momento de Inercia da seção homogeneizada no estágio II desprezando área de concreto fissurado.

$$I_{seção_homogenizada_II} := \frac{b_w \cdot x_{cg_II}^3}{12} + b_w \cdot x_{cg_II} \cdot \left(x_{cg_II} - \frac{x_{cg_II}}{2} \right)^2 + (A_{s_eq_concreto_inf} - A_{s_inf}) \cdot (d - x_{cg_II})^2 + (A_{s_eq_concreto_sup} - A_{s_sup}) \cdot (x_{cg_II} - d')^2$$

$$I_{seção_homogenizada_II} = 25561.425869 \text{ cm}^4$$

Cálculo do Momento de Inercia da seção bruta de concreto desprezando as áreas de armadura

$$I_{seção_bruta} := \frac{b_w \cdot h^3}{12} = 80000 \text{ cm}^4$$

$$I_{seção_bruta} = 80000 \text{ cm}^4$$

Cálculo do Momento de Fissuração

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct.m} \cdot I_c}{y_t}$$

Importante lembrar que I_c é o momento de inercia da seção bruta de concreto, y_t é a distância do centro de gravidade à fibra mais tracionada

$$y_t := h - x_{cg_I_s.h.} = 20.561 \text{ cm}$$

$$I_c := I_{seção_homogenizada} = 90078.16 \text{ cm}^4$$

$$\alpha := \text{Para seções retangulares} \downarrow$$

$$\alpha = 1.5$$

$$f_{ct.m} = 0.256496 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

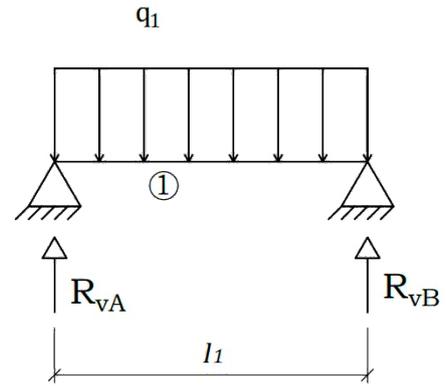
$$M_r := \frac{\alpha \cdot f_{ct.m} \cdot I_c}{y_t} \rightarrow 1685.5769123351474493 \cdot \text{cm} \cdot \text{kN} = 16.856 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_r = 16.86 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Carregamentos da viga biapoiada para o calculo dos esforcos internos externo na Barra 1 com suas respectivas distancias

$$l_1 := 3 \text{ m}$$

$$q_1 := 24 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$



Cálculo das reações dos apoios

$$R_{vA} := \frac{q_1 \cdot l_1}{2} = 36 \text{ kN}$$

$$R_{vB} := \frac{q_1 \cdot l_1}{2} = 36 \text{ kN}$$

Cálculo das equações dos esforço de Cortante e Momento fletor pelo método das seções

Seção 1 $S1 := 0 \text{ m} \leq x \leq l_1 \rightarrow 0 \leq x \leq 3 \cdot \text{m}$

Intervalo de x

$$x := (0 \text{ m}, 1 \text{ m}..l_1)$$

Equação do esforço Cortante

$$V_1(x) := R_{vA} - q_1 \cdot x \xrightarrow{\text{factor}} \frac{-(12 \cdot \text{kN} \cdot (2 \cdot x - 3 \cdot \text{m}))}{\text{m}}$$

$$V_1(0 \text{ m}) = 36 \text{ kN}$$

$$V_1(l_1) = -36 \text{ kN}$$

clear (x)

$$x := R_{vA} - q_1 \cdot x = 0 \xrightarrow{\text{solve, x}} \frac{3 \cdot \text{m}}{2}$$

$$x = 1.5 \text{ m}$$

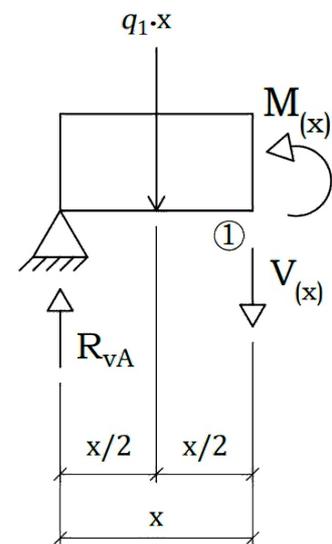
Equação do Momento Fletor

$$M_1(x) := R_{vA} \cdot x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} \xrightarrow{\text{factor}} \frac{-(12 \cdot \text{kN} \cdot (x - 3 \cdot \text{m}) \cdot x)}{\text{m}}$$

$$M_1(0 \text{ m}) = 0 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

$$M_1(l_1) = 0 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

$$M_{1.}(x_{max.1}) = 2700 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$



Intervalo de x

$$x_1 := (0 \text{ m}, 0.001 \text{ m}..l_1)$$

Gráfico de Cortante

$$V_1(0 \text{ m}) = 36 \text{ kN}$$

$$V_1(l_1) = -36 \text{ kN}$$

$$x_{0.1} := 0 \text{ m}$$

$$y_{0.1} := 0 \text{ kN}, 0.01 \text{ kN}..V_1(0 \text{ m})$$

$$x_{0.2} := l_1 = 3 \text{ m}$$

$$y_{0.2} := V_1(l_1), V_1(l_1) + 0.01 \text{ kN}..0 \text{ kN}$$

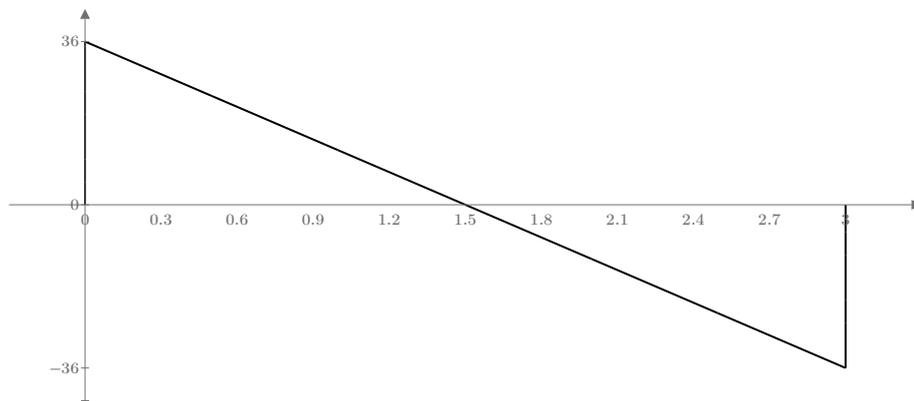


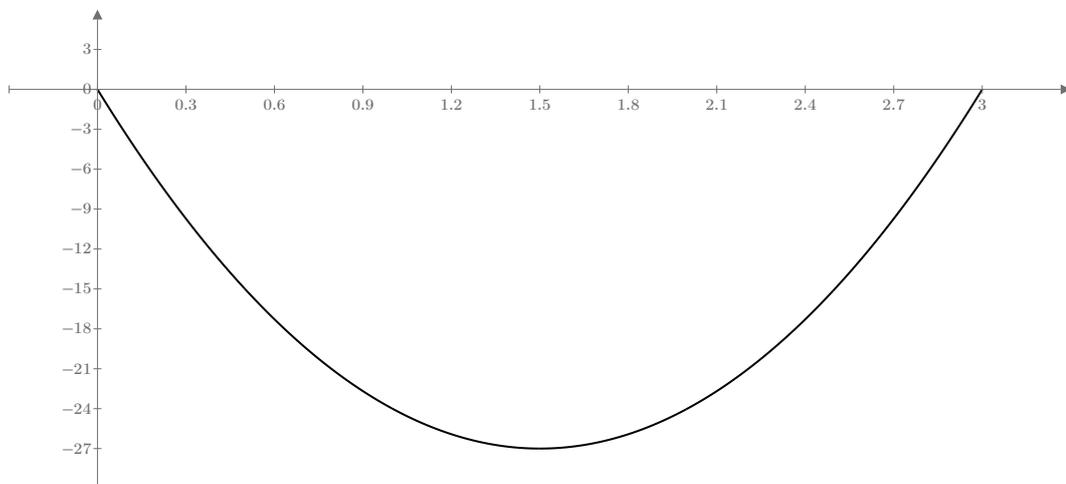
Gráfico de momento

$$M_1(0 \text{ m}) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_1(x_{max.1}) = 27 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$x_{max.1} = 1.5 \text{ m}$$

$$M_1(l_1) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Cálculo dos trechos da viga de concreto em que os esforço momento fletor atuante na seção transversal são menores que o momento de fissuração.

Valor do momento de Fissuração

$$M_r = 16.855769 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Equação do Momento Fletor

$$M_1(x) := R_{vA} \cdot x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$x := R_{vA} \cdot x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = M_r \xrightarrow{\text{solve}, x} \left[\begin{array}{l} (0.84535257305404375 \cdot \text{m}^2)^{0.5} + 1.5 \cdot \text{m} \\ -1.0 \cdot (0.84535257305404375 \cdot \text{m}^2)^{0.5} + 1.5 \cdot \text{m} \end{array} \right]$$

$$x = \left[\begin{array}{l} 2.419 \\ 0.581 \end{array} \right] \text{ m} \quad l_1 = 3 \text{ m}$$

$$x_2 = 0.580569429998086 \text{ m} \quad x_1 = 2.41943057000191 \text{ m}$$

Cálculo da rotação e da flecha pelo método da viga conjugada com trechos da viga no estádio I e outro no estádio II

Seções no Estádio I, intervalos

$$int_{1_inf} = 0 \text{ m} \quad int_{1_sup} = 0.581 \text{ m}$$

$$int_{3_inf} = 2.419 \text{ m} \quad int_{3_sup} = 3 \text{ m}$$

Seções no Estádio II, intervalos

$$int_{2_inf} = 0.581 \text{ m} \quad int_{2_sup} = 2.419 \text{ m}$$

Resultante do Carregamento atuantes na Viga Conjugada

$$Q_{1_vc} := \int_{int_{1_inf}}^{int_{1_sup}} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx = 2.429 \cdot 10^{-4}$$

$$q_{1_vc} := Q_{1_vc} = 0$$

$$Q_{2_vc} := \int_{int_{2_inf}}^{int_{2_sup}} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada_II}} \right) dx = 0.007$$

$$q_{2_vc} := Q_{2_vc} = 0.007$$

$$Q_{3_vc} := \int_{int_{3_inf}}^{int_{3_sup}} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx = 2.429 \cdot 10^{-4}$$

$$q_{3_vc} := Q_{3_vc} = 0$$

Cálculo do centroide em relação ao eixo y dos Carregamentos

$$x_{cg_1} := \frac{\int_{int_1_inf}^{int_1_sup} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx}{\int_{int_1_inf}^{int_1_sup} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx} = 0.38 \text{ m}$$

$$x_{cg_1} := x_{cg_1} = 0.38 \text{ m}$$

$$x_{cg_2} := \frac{\int_{int_2_inf}^{int_2_sup} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada_II}} \right) dx}{\int_{int_2_inf}^{int_2_sup} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada_II}} \right) dx} = 1.5 \text{ m}$$

$$x_{cg_2} := x_{cg_2} = 1.5 \text{ m}$$

$$x_{cg_3} := \frac{\int_{int_3_inf}^{int_3_sup} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx}{\int_{int_3_inf}^{int_3_sup} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx} = 2.62 \text{ m}$$

$$x_{cg_3} := x_{cg_3} = 2.62 \text{ m}$$

Cálculo das reações de apoio da viga conjugada

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_{VA_vc} \cdot l_1 - Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1}) - Q_{2_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_2}) - Q_{3_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_3}) = 0$$

$$R_{VA_vc} := \frac{-Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1}) - Q_{2_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_2}) - Q_{3_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_3})}{l_1} = -0.004$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{VB_vc} := -Q_{1_vc} - Q_{2_vc} - Q_{3_vc} - R_{VA_vc} = -0.004$$

$$R_{VA_vc} = -3.761 \cdot 10^{-3}$$

$$R_{VB_vc} = -3.761 \cdot 10^{-3}$$

Função das Cargas atuantes na Viga Conjugada

$$q_{1_vc}(x) := \int_{int_1_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx$$

$$q_{2_vc}(x) := \int_{int_2_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada_II}} \right) dx$$

$$q_{3_vc}(x) := \int_{int_3_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx$$

Cálculo do centroide em relação ao eixo y da viga conjugada

$$x_{cg_1}(x) := \begin{cases} \frac{\int_{int_1_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx}{\int_{int_1_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx} & \text{if } x \neq int_1_inf \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x_{cg_2}(x) := \begin{cases} \frac{\int_{int_2_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada_II}} \right) dx}{\int_{int_2_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada_II}} \right) dx} & \text{if } x \neq int_2_inf \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x_{cg_3}(x) := \begin{cases} \frac{\int_{int_3_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx}{\int_{int_3_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx} & \text{if } x \neq int_3_inf \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Cálculo das equações dos esforço de Cortante e Momento fletor pelo método das seções da viga conjugada

$$\text{Seção 1 } S1 := \text{int}_{_1_inf} \leq x \leq \text{int}_{_1_sup} \xrightarrow{\text{float}, 3} 0.0 \leq x \leq 0.581 \cdot m$$

Intervalo de x

$$x := (0 \text{ m}, 1 \text{ m} \dots \text{int}_{_1_sup})$$

Equação do esforço Cortante

$$V_{1_vc}(x) := R_{VA_vc} + q_{1_vc}(x)$$

$$V_{1_vc}(0 \text{ m}) = -3.760711 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc}(\text{int}_{_1_sup}) = -3.517796 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor

$$M_{1_vc}(x) := R_{VA_vc} \cdot x + q_{1_vc}(x) \cdot (x - x_{cg_1}(x))$$

$$M_{1_vc}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(\text{int}_{_1_sup}) = -2.134604 \text{ mm}$$

$$\text{Seção 2 } S1 := \text{int}_{_2_inf} \leq x \leq \text{int}_{_2_sup} \xrightarrow{\text{float}, 3} 0.581 \cdot m \leq x \leq 2.42 \cdot m$$

Intervalo de x

$$x := (\text{int}_{_2_inf}, \text{int}_{_2_inf} + .1 \text{ m} \dots \text{int}_{_2_sup})$$

Equação do esforço Cortante

$$V_{2_vc}(x) := R_{VA_vc} + q_{1_vc} + q_{2_vc}(x)$$

$$V_{2_vc}(\text{int}_{_2_inf}) = -3.517796 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{2_vc}(\text{int}_{_2_sup}) = (3.517796 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor

$$M_{2_vc}(x) := R_{VA_vc} \cdot x + q_{1_vc} \cdot (x - x_{cg_1}) + q_{2_vc}(x) \cdot (x - x_{cg_2}(x))$$

$$M_{2_vc}(\text{int}_{_2_inf}) = -2.134604 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.867552 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}(int_{2_sup}) = -2.134604 \text{ mm}$$

$$\text{Seção 3 } S3 := int_{3_inf} \leq x \leq int_{3_sup} \xrightarrow{\text{float}, 3} 2.42 \cdot m \leq x \leq 3.0 \cdot m$$

Intervalo de x

$$x := (int_{3_inf}, 0.1 \text{ m} .. int_{3_sup})$$

Equação do esforço Cortante

$$V_{3_vc}(x) := R_{VA_vc} + q_{1_vc} \cdot x + q_{2_vc} \cdot x + q_{3_vc}(x)$$

$$V_{3_vc}(int_{3_inf}) = (3.517796 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{3_vc}(int_{3_sup}) = (3.760711 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor

$$M_{3_vc}(x) := R_{VA_vc} \cdot x + q_{1_vc} \cdot (x - x_{cg_1}) + q_{2_vc} \cdot (x - x_{cg_2}) + q_{3_vc}(x) \cdot (x - x_{cg_3}(x))$$

$$M_{3_vc}(int_{3_inf}) = -2.134604 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc}(int_{3_sup}) = 0 \text{ mm}$$

Calcular a flecha na viga utilizando a inercia equivalente

Após o cálculo do momento de inercia da seção no Estádio 2 puro

Calcular o momento de inércia efetivo pela expressão obtida por Branson

Momento atuante máximo

$$M_a := M_1(x_{max.1}) = 2700 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

$$M_a = 2700 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

Momento de Fissuração

$$M_r = 1685.577 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

Momento de Inercia Estádio I

$$I_1 := I_{seção_homogenizada}$$

$$I_1 = 90078.164 \text{ cm}^4$$

Momento de Inercia Estádio II

$$I_{x.II} := I_{seção_homogenizada_II}$$

$$I_{x.II} = 25561.426 \text{ cm}^4$$

Calculo da Inercia efetiva por Branson

$$I_m := \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3 \cdot I_1 + \left(1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3\right) \cdot I_{x.II} = 41258.794 \text{ cm}^4$$

$$I_m = 41258.794 \text{ cm}^4$$

Cálculo da rigidez equivalente

$$EI_{eq.to} := E_{cs} \cdot I_m = 99639986.692 \text{ kN} \cdot \text{cm}^2 \quad I_c = 90078.164 \text{ cm}^4$$

$$EI_{eq.to} \leq E_{cs} \cdot I_c$$

$$R_{esp.1} = \text{"Condição atendida"}$$

Resultante do Carregamento atuantes na Viga Conjugada

$$q_{1_vc} := \int_0^{l_1} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx = 5.42 \cdot 10^{-3}$$

$$q_{1_vc.} := q_{1_vc} = 0.005$$

Cálculo do centroide em relação ao eixo y dos Carregamentos

$$x_{cg_1} := \frac{\int_0^{l_1} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx}{\int_0^{l_1} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx} = 1.5 \text{ m}$$

$$x_{cg_1.} := x_{cg_1} = 1.5 \text{ m}$$

Cálculo das reações de apoio da viga conjugada

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_{VA_vc} \cdot l_1 - q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1}) = 0$$

$$R_{VA_vc} := \frac{-q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1})}{l_1} = -0.003$$

$$R_{VA_vc} = -0.003$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{VB_vc} := -q_{1_vc} - R_{VA_vc} = -0.003$$

$$R_{VB_vc} = -0.003$$

Função das Cargas atuantes na Viga Conjugada

$$q_{1_vc}(x) := \int_0^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx$$

Cálculo do centroide em relação ao eixo y da viga conjugada

$$x_{cg_1}(x) := \begin{cases} \frac{\int_{int_1_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx}{\int_{int_1_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx} & \text{if } x \neq 0 \text{ m} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Cálculo das equações dos esforço de Cortante e Momento fletor pelo método das seções da viga conjugada

Seção 1 $S1 := 0 \text{ m} \leq x \leq l_1 \rightarrow 0 \leq x \leq 3 \cdot m$

Intervalo de x

$$x := (0 \text{ m}, 1 \text{ m}..l_1)$$

Equação do esforço Cortante (representa a rotação da viga real)

$$V_{1_vc_Im}(x) := R_{VA_vc} + q_{1_vc}(x)$$

$$V_{1_vc_Im}(0 \text{ m}) = -2.709755 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc}(0 \text{ m}) = -3.760711 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_Im}(int_1_sup) = -2.179412 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc}(int_1_sup) = -3.517796 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_Im}\left(\frac{l_1}{2}\right) = (4.336809 \cdot 10^{-19}) \text{ rad}$$

$$V_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = (1.301043 \cdot 10^{-18}) \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_Im}(int_2_sup) = (2.179412 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{2_vc}(int_2_sup) = (3.517796 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_Im}(l_1) = (2.709755 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{3_vc}(int_3_sup) = (3.760711 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor (representa o deslocamento vertical da viga real)

$$M_{1_vc_Im}(x) := R_{VA_vc} \cdot x + q_{1_vc}(x) \cdot (x - x_{cg_1}(x))$$

$$M_{1_vc_Im}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_1_sup) = -1.466767 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(int_1_sup) = -2.134604 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -2.540396 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.867552 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_{2_sup}) = -1.466767 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}(int_{2_sup}) = -2.134604 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc}(int_{3_sup}) = 0 \text{ mm}$$

Resultados dos Deslocamentos

Com Inercia no Estádio I e II

Com a fórmula de Branson com a Inercia calculado a partir da seção critica (meio do vão)

$$M_{1_vc}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(int_{1_sup}) = -2.134604 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_{1_sup}) = -1.466767 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.867552 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -2.540396 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}(int_{2_sup}) = -2.134604 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_{2_sup}) = -1.466767 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc}(int_{3_sup}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

Calcular o momento de inércia efetivo pela expressão obtida por Branson agora com Fórmula de Branson variando por trechos discretizados ao longo da extensão da viga

$$M_a(x) := M_1(x)$$

$$I_{x.II} := I_{seção_homogenizada_II}$$

$$I_m(x) := \left(\frac{M_r}{M_a(x)}\right)^4 \cdot I_1 + \left(1 - \left(\frac{M_r}{M_a(x)}\right)^4\right) \cdot I_{x.II}$$

$$I_m(int_{1_sup}) = 90078.164 \text{ cm}^4$$

$$I_m\left(\frac{l_1}{2}\right) = 35361.1 \text{ cm}^4$$

$$I_m(int_{2_sup}) = 90078.164 \text{ cm}^4$$

$$I_m(2 \text{ m}) = 41258.609 \text{ cm}^4$$

Cálculo dos trechos da viga de concreto em que os esforço momento fletor atuante na seção transversal são menores que o momento de fissuração.

Valor do momento de Fissuração

$$M_r = 16.855769 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Equação do Momento Fletor

$$M_1(x) := R_{vA} \cdot x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$x := R_{vA} \cdot x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = M_r \xrightarrow{\text{solve}, x} \left[\begin{array}{l} (0.84535257305404375 \cdot \text{m}^2)^{0.5} + 1.5 \cdot \text{m} \\ -1.0 \cdot (0.84535257305404375 \cdot \text{m}^2)^{0.5} + 1.5 \cdot \text{m} \end{array} \right]$$

$$x = \left[\begin{array}{l} 2.419 \\ 0.581 \end{array} \right] \text{ m} \quad l_1 = 3 \text{ m}$$

$$x_2 = 0.580569429998086 \text{ m}$$

$$x_1 = 2.41943057000191 \text{ m}$$

Seções no Estádio I, intervalos

$$int_{1_inf} = 0 \text{ m}$$

$$int_{1_sup} = 0.581 \text{ m}$$

$$int_{3_inf} = 2.419 \text{ m}$$

$$int_{3_sup} = 3 \text{ m}$$

Seções no Estádio II, intervalos

$$int_{2_inf} = 0.581 \text{ m}$$

$$int_{2_sup} = 2.419 \text{ m}$$

Cálculo da rotação e da flecha pelo método da viga conjugada

Resultante do Carregamento atuantes na Viga Conjugada

$$Q_{1_vc} := \int_{int_{1_inf}}^{int_{1_sup}} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx = 2.429 \cdot 10^{-4} \quad q_{1_vc} := Q_{1_vc}$$

$$Q_{2_vc} := \int_{int_{2_inf}}^{int_{2_sup}} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m(x)} \right) dx = 0.004 \quad q_{2_vc} := Q_{2_vc}$$

$$Q_{3_vc} := \int_{int_{3_inf}}^{int_{3_sup}} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx = 2.429 \cdot 10^{-4} \quad q_{3_vc} := Q_{3_vc}$$

Cálculo do centroide em relação ao eixo y dos Carregamentos

$$x_{cg_1} := \frac{\int_{int_1_inf}^{int_1_sup} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx}{\int_{int_1_inf}^{int_1_sup} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx} = 0.38 \text{ m}$$

$$x_{cg_1} := x_{cg_1} = 0.38 \text{ m}$$

$$x_{cg_2} := \frac{\int_{int_2_inf}^{int_2_sup} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m(x)} \right) dx}{\int_{int_2_inf}^{int_2_sup} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m(x)} \right) dx} = 1.5 \text{ m}$$

$$x_{cg_2} := x_{cg_2} = 1.5 \text{ m}$$

$$x_{cg_3} := \frac{\int_{int_3_inf}^{int_3_sup} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx}{\int_{int_3_inf}^{int_3_sup} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx} = 2.62 \text{ m}$$

$$x_{cg_3} := x_{cg_3} = 2.62 \text{ m}$$

Cálculo das reações de apoio da viga conjugada

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_{VA_vc} \cdot l_1 - Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1}) - Q_{2_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_2}) - Q_{3_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_3}) = 0$$

$$R_{VA_vc} := \frac{-Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1}) - Q_{2_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_2}) - Q_{3_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_3})}{l_1} = -0.002$$

$$R_{VA_vc} = -2.382 \cdot 10^{-3}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{VB_vc} := -Q_{1_vc} - Q_{2_vc} - Q_{3_vc} - R_{VA_vc} = -0.002$$

$$R_{VB_vc} = -2.382 \cdot 10^{-3}$$

Função das Cargas atuantes na Viga Conjugada

$$q_{1_vc}(x) := \int_{int_1_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx$$

$$q_{2_vc}(x) := \int_{int_2_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m(x)} \right) dx$$

$$q_{3_vc}(x) := \int_{int_3_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx$$

Cálculo do centroide em relação ao eixo y da viga conjugada

$$x_{cg_1}(x) := \begin{cases} \frac{\int_{int_1_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx}{\int_{int_1_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx} & \text{if } x \neq int_1_inf \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x_{cg_2}(x) := \begin{cases} \frac{\int_{int_2_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m(x)} \right) dx}{\int_{int_2_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m(x)} \right) dx} & \text{if } x \neq int_2_inf \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x_{cg_3}(x) := \begin{cases} \frac{\int_{int_3_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx}{\int_{int_3_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{seção_homogenizada}} \right) dx} & \text{if } x \neq int_3_inf \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Cálculo das equações dos esforço de Cortante e Momento fletor pelo método das seções da viga conjugada

Seção 1 $S1 := int_{-1_inf} \leq x \leq int_{-1_sup} \xrightarrow{float, 3} 0.0 \leq x \leq 0.581 \cdot m$

Intervalo de x

$$x := (0 \text{ m}, 1 \text{ m} .. int_{-1_sup})$$

Equação do esforço Cortante (que representa a rotação na viga real)

$$V_{1_vc_Im_v}(x) := R_{VA_vc} + q_{1_vc}(x)$$

$$V_{1_vc_Im_v}(0 \text{ m}) = -2.38231 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_Im_v}(int_{-1_sup}) = -2.139395 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor (que representa o deslocamento vertical na viga real)

$$M_{1_vc_Im_v}(x) := R_{VA_vc} \cdot x + q_{1_vc}(x) \cdot (x - x_{cg_1}(x))$$

$$M_{1_vc_Im_v}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im_v}(int_{-1_sup}) = -1.334346 \text{ mm}$$

Seção 2 $S1 := int_{-2_inf} \leq x \leq int_{-2_sup} \xrightarrow{float, 3} 0.581 \cdot m \leq x \leq 2.42 \cdot m$

Intervalo de x

$$x := (int_{-2_inf}, 1 \text{ m} .. int_{-2_sup})$$

Equação do esforço Cortante (que representa a rotação na viga real)

$$V_{2_vc_Im_v}(x) := R_{VA_vc} + q_{1_vc} + q_{2_vc}(x)$$

$$V_{2_vc_Im_v}(int_{-2_inf}) = -2.139395 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{2_vc_Im_v}(int_{-2_sup}) = (2.139395 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor (que representa o deslocamento vertical na viga real)

$$M_{2_vc_Im_v}(x) := R_{VA_vc} \cdot x + q_{1_vc} \cdot (x - x_{cg_1}) + q_{2_vc}(x) \cdot (x - x_{cg_2}(x))$$

$$M_{2_vc_Im_v}(int_2_inf) = -1.334346 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc_Im_v}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -2.492475 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc_Im_v}(int_2_sup) = -1.334346 \text{ mm}$$

Seção 3 $S3 := int_3_inf \leq x \leq int_3_sup \xrightarrow{\text{float}, 3} 2.42 \cdot m \leq x \leq 3.0 \cdot m$

Intervalo de x

$$x := (int_3_inf, 1 \text{ m} .. int_3_sup)$$

Equação do esforço Cortante (que representa a rotação na viga real)

$$V_{3_vc_Im_v}(x) := R_{VA_vc} + q_{1_vc} \cdot x + q_{2_vc} \cdot x + q_{3_vc}(x)$$

$$V_{3_vc_Im_v}(int_3_inf) = (2.139395 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{3_vc_Im_v}(int_3_sup) = (2.38231 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor (que representa o deslocamento vertical na viga real)

$$M_{3_vc_Im_v}(x) := R_{VA_vc} \cdot x + q_{1_vc} \cdot (x - x_{cg1}) + q_{2_vc} \cdot (x - x_{cg2}) + q_{3_vc}(x) \cdot (x - x_{cg3}(x))$$

$$M_{3_vc_Im_v}(int_3_inf) = -1.334346 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc_Im_v}(int_3_sup) = 0 \text{ mm}$$

Resultados obtidos de Deslocamento Para viga biapoiada

Com Fórmula de Branson com a Inercia adotada a partir da seção crítica (meio do vão)

Com a Fórmula de Branson com a Inercia variando por trechos discretizados ao longo da viga

$$M_{1_vc_Im}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im_v}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_1_sup) = -1.466767 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im_v}(int_1_sup) = -1.334346 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -2.540396 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc_Im_v}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -2.492475 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_2_sup) = -1.466767 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc_Im_v}(int_3_inf) = -1.334346 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc_Im_v}(int_3_sup) = 0 \text{ mm}$$

Deslocamento considerando
a Inercia no Estádio I e II

$$M_{1_vc}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(int_{1_sup}) = -2.134604 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.867552 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}(int_{2_sup}) = -2.134604 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc}(int_{3_sup}) = 0 \text{ mm}$$

Cálculo de flecha pelo método Bilinear do CEB 90

Exemplo numérico

Análise de uma viga biapoiada de concreto com um concreto com as seguintes propriedades geométricas e características do material

Dados da seção

$S_{.tipo} :=$ Seção Retangular ▾

$f_{ck} := 25 \text{ MPa}$

$\gamma_c := 1.4$

$\alpha_e :=$ Para granito e gnaiss ▾

$f_{yk} := 500 \text{ MPa}$

$\gamma_s := 1.15$

Dados geométricos da seção transversal

$b_w := 15 \text{ cm}$

$h := 40 \text{ cm}$

$c_{nom} := 3 \text{ cm}$

Diâmetro da armadura longitudinal

Diâmetro do estribo

$\phi_1 := 16 \text{ mm}$

$\phi_2 := 16 \text{ mm}$

$\phi_t := 6.3 \text{ mm}$

Diâmetro da armadura porta estribo

Seção Transversal da Viga

$\phi_3 := 8 \text{ mm}$

$\phi_4 := 8 \text{ mm}$

Altura útil

$$d := h - \left(c_{nom} + \phi_t + \frac{\phi_1}{2} \right) \quad d = 35.57 \text{ cm}$$

$$d' := c_{nom} + \phi_t + \frac{\phi_3}{2} \quad d' = 4.03 \text{ cm}$$

Área de aço da primeira camada inferior

Área de aço da primeira camada superior

$$A_{s_inf} := \frac{\pi \cdot \phi_1^2}{4} + \frac{\pi \cdot \phi_2^2}{4} = 4.021 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_sup} := \frac{\pi \cdot \phi_3^2}{4} + \frac{\pi \cdot \phi_4^2}{4} = 1.005 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_inf} = 4.021 \text{ cm}^2$$

$$A_s := A_{s_inf}$$

$$A_{s_sup} = 1.005 \text{ cm}^2$$

$$A'_s := A_{s_sup}$$

Cálculo das propriedades do concreto pelo CEB 90

Resistência média à compressão

Resistência média à tração

$$f_c := f_{ck} + 8 \text{ MPa}$$

$$f_c = 33 \text{ MPa}$$

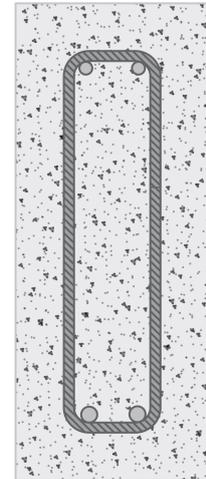
$$f_{ctm} := 1.4 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{10} \cdot \text{MPa} \right)^{\frac{1}{2}} = 2.579 \text{ MPa}$$

Deformações no concreto

$$f_{ctm} = 2.579 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_0 := 0.22\%$$

$$\varepsilon_u = 0.35\%$$



Módulo tangente do concreto

$$E_c := 21500 \cdot \left(\frac{f_c}{10} \cdot MPa \right)^{\frac{1}{3}} = 32009.319 \text{ MPa}$$

$$E_c = 32009.319 \text{ MPa}$$

Módulo de Elasticidade do aço

$$E_s := 210 \text{ GPa}$$

Módulo Secante do concreto

$$E_{cs} := 0.85 \cdot E_c = 27207.921 \text{ MPa}$$

$$E_{cs} = 27207.921 \text{ MPa}$$

Estádio I

Equilíbrio de forças na seção transversal

Resultante do concreto a compressão

$$R_{cc} = \frac{1}{2} \cdot E_{cs} \cdot b_w \cdot x^2 \cdot \chi$$

$$R_{cc.}(x, \chi) := \frac{1}{2} \cdot E_{cs} \cdot b_w \cdot x^2 \cdot \chi$$

Resultante do concreto a tração

$$R_{ct} = \frac{1}{2} \cdot E_{cs} \cdot b_w \cdot (h-x)^2 \cdot \chi$$

$$R_{ct.}(x, \chi) := \frac{1}{2} \cdot E_{cs} \cdot b_w \cdot (h-x)^2 \cdot \chi$$

Resultante da armadura comprimida

$$R'_s = E_s \cdot A'_s \cdot (x-d') \cdot \chi$$

$$R'_s.(x, \chi) := E_s \cdot A'_s \cdot (x-d') \cdot \chi$$

Resultante da armadura tracionada

$$R_s = E_s \cdot A_s \cdot (d-x) \cdot \chi$$

$$R_s.(x, \chi) := E_s \cdot A_s \cdot (d-x) \cdot \chi$$

Com Equilíbrio de forças calcula-se a altura da linha neutra para estágio I

$$\sum F = 0$$

$$R_{cc} + R'_s - R_{ct} - R_s = 0$$

Devido a linearização, todas as resultantes são diretamente proporcionais a curvatura, isto permitirá obtenção do linha neutra de forma explícita, eliminando a curvatura no somatório de forças.

$$x_I := R_{cc}(x) + R'_s(x) - R_{ct}(x) - R_s(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve, } x} \dots$$

$$x_I = 20.563 \text{ cm}$$

Posições do braço de alavanca das resultante no concreto e na armadura em relação a armadura mais tracionada

$$Z_{cc}(x) := d - \frac{x}{3} \qquad Z'_s := (d - d')$$

$$Z_{ct}(x) := d - \left(\frac{x + 2 \cdot h}{3} \right)$$

Através do equilíbrio de momentos em relação armadura mais tracionada obtemos a rigidez no estágio I, devido a curvatura ser simplificada, pois $M = K_I \cdot \chi$

Equilíbrio de Momento

$$R_{cc} \cdot Z_{cc} + R'_s \cdot Z'_s - R_{ct} \cdot Z_{ct} = K_I \cdot \chi$$

$$K_I := R_{cc}(x_I) \cdot Z_{cc}(x_I) + R'_s(x_I) \cdot Z'_s - R_{ct}(x_I) \cdot Z_{ct}(x_I) \qquad K_I := K_I$$

$$K_I = 2429695256.742 \text{ MPa} \cdot \text{cm}^4$$

Com a rigidez pode-se calcular a inercia da seção transversal no estágio I

$$I_I := \frac{K_I}{E_{cs}} = 89301.024 \text{ cm}^4$$

$$I_I = 89301.024 \text{ cm}^4$$

A tensão máxima no concreto ocorre quando $h - x_I$

$$\sigma_{ct.máx} = E_{cs} \cdot (h - x_I) \chi$$

$$\sigma_{ct.máx} = f_{ct}$$

Nesse instante ocorre a fissuração e o momento fletor é igual M_r que o momento de fissuração, e a curvatura de fissuração χ_r .

$$\chi_r = \frac{f_{ct}}{E_{cs} \cdot (h - x_I)}$$

$$M_r = K_I \cdot \chi_r$$

$$M_r := K_I \cdot \frac{f_{ctm}}{E_{cs} \cdot (h - x_I)}$$

$$M_r = 11.848 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Estádio II

Com Equilíbrio de forças calcula-se a altura da linha neutra para estágio II

$$x_{II} := R_{cc}(x) + R'_s(x) - R_s(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve, } x} \dots$$

$$x_{II} = \begin{bmatrix} 9.986 \\ -15.159 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

$$x_{II} := x_{II_1}$$

$$x_{II} = 9.986 \text{ cm}$$

Através do equilíbrio de momentos em relação armadura mais tracionada obtemos a rigidez no estágio II, devido a curvatura ser simplificada, pois $M = K_{II} \cdot \chi$, desconsiderando a resultante do concreto tracionado que será nula.

Equilíbrio de Momento

$$R_{cc} \cdot Z_{cc} + R'_s \cdot Z'_s = K_I \cdot \chi$$

$$K_{II} := R_{cc}(x_{II}) \cdot Z_{cc}(x_{II}) + R'_s(x_{II}) \cdot Z'_s$$

$$K_{II} = 695691930.1 \text{ MPa} \cdot \text{cm}^4$$

Com a rigidez pode-se calcular a inercia da seção transversal no estágio II

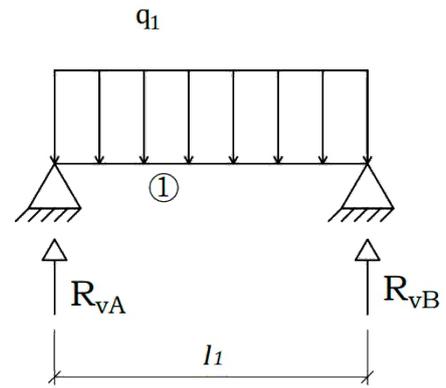
$$I_{II} := \frac{K_{II}}{E_{cs}} = 25569.463 \text{ cm}^4$$

$$I_{II} = 25569.463 \text{ cm}^4$$

Carregamentos da viga biapoiada para o calculo dos esforcos internos externo na Barra 1 com suas respectivas distancias

$$l_1 := 3 \text{ m}$$

$$q_1 := 24 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$



Cálculo das reações dos apoios

$$R_{vA} := \frac{q_1 \cdot l_1}{2} = 36 \text{ kN}$$

$$R_{vB} := \frac{q_1 \cdot l_1}{2} = 36 \text{ kN}$$

Cálculo das equações dos esforço de Cortante e Momento fletor pelo método das seções

Seção 1 $S1 := 0 \text{ m} \leq x \leq l_1 \rightarrow 0 \leq x \leq 3 \cdot \text{m}$

Intervalo de x

$$x := (0 \text{ m}, 1 \text{ m}..l_1)$$

Equação do esforço Cortante

$$V_1(x) := R_{vA} - q_1 \cdot x \xrightarrow{\text{factor}} \frac{-(12 \cdot \text{kN} \cdot (2 \cdot x - 3 \cdot \text{m}))}{\text{m}}$$

$$V_1(0 \text{ m}) = 36 \text{ kN}$$

$$V_1(l_1) = -36 \text{ kN}$$

clear (x)

$$x := R_{vA} - q_1 \cdot x = 0 \xrightarrow{\text{solve, x}} \frac{3 \cdot \text{m}}{2}$$

$$x = 1.5 \text{ m}$$

Equação do Momento Fletor

$$M_1(x) := R_{vA} \cdot x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} \xrightarrow{\text{factor}} \frac{-(12 \cdot \text{kN} \cdot (x - 3 \cdot \text{m}) \cdot x)}{\text{m}}$$

$$M_1(0 \text{ m}) = 0 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

$$M_1(l_1) = 0 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

$$M_{1.}(x_{max.1}) = 2700 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

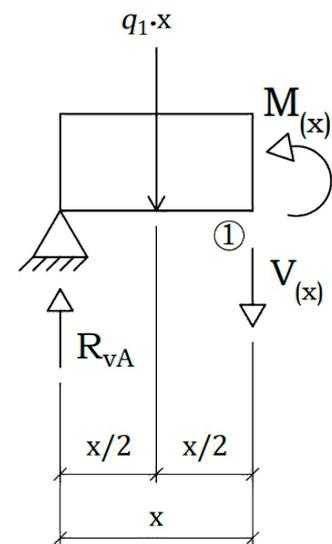


Gráfico do esforço cortante

Intervalo de x

$$x_1 := (0 \text{ m}, 0.001 \text{ m}..l_1)$$

Gráfico de Cortante

$$V_1(0 \text{ m}) = 36 \text{ kN}$$

$$\frac{V_1(0 \text{ m})}{\text{kN}} \quad \frac{V_1(l_1)}{\text{kN}}$$

$$V_1(l_1) = -36 \text{ kN}$$

$$x_{0.1} := 0 \text{ m}$$

$$y_{0.1} := 0 \text{ kN}, 0.01 \text{ kN}..V_1(0 \text{ m})$$

$$x_{\text{cortante.nulo}} = 1.5 \text{ m}$$

$$x_{0.2} := l_1 = 3 \text{ m}$$

$$y_{0.2} := V_1(l_1), V_1(l_1) + 0.01 \text{ kN}..0 \text{ kN}$$

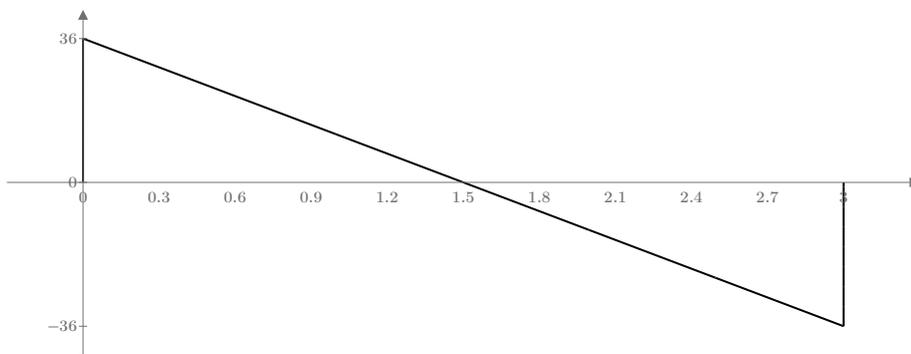


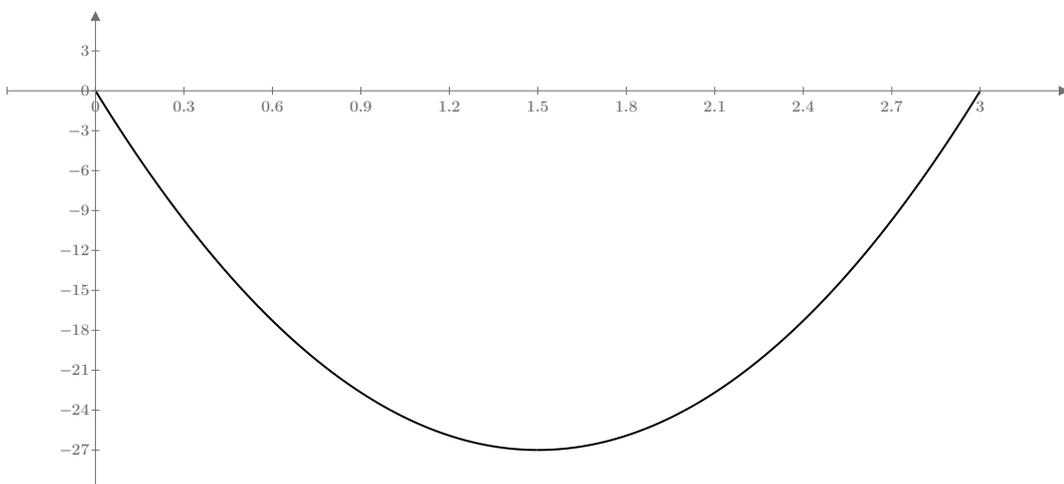
Gráfico de momento

$$M_1(0 \text{ m}) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{1.}(x_{\text{max.1}}) = 27 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$x_{\text{max.1}} = 1.5 \text{ m}$$

$$M_1(l_1) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Cálculo dos trechos da viga de concreto em que os esforço momento fletor atuante na seção transversal são menores que o momento de fissuração.

Valor do momento de Fissuração

$$M_r = 11.8478022651805 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_f := M_r$$

$$x := R_{vA} \cdot x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = M_r \xrightarrow{\text{solve, x explicit, } M_r} \dots$$

$$x = \begin{bmatrix} 0.376 \\ 2.624 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$l_1 = 3 \text{ m}$$

$$x_1 = 0.376 \text{ m}$$

$$x_2 = 2.624 \text{ m}$$

Equação do Momento Fletor

$$M_1(x) := R_{vA} \cdot x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Cálculo da rotação e da flecha pelo método da viga conjugada para trechos no estádio I e trechos da viga no estádio II

Seções no Estádio I, intervalos

$$int_{1_inf} = 0 \text{ m}$$

$$int_{1_sup} = 0.376 \text{ m}$$

$$int_{3_inf} = 2.624 \text{ m}$$

$$int_{3_sup} = 3 \text{ m}$$

Seções no Estádio II, intervalos

$$int_{2_inf} = 0.376 \text{ m}$$

$$int_{2_sup} = 2.624 \text{ m}$$

Resultante do Carregamento atuantes na Viga Conjugada

$$Q_{1_vc} := \int_{int_{1_inf}}^{int_{1_sup}} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx = 9.614 \cdot 10^{-5}$$

$$Q_{2_vc} := \int_{int_{2_inf}}^{int_{2_sup}} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx = 0.007$$

$$Q_{3_vc} := \int_{int_{3_inf}}^{int_{3_sup}} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx = 9.614 \cdot 10^{-5}$$

Cálculo do centroide da resultante dos carregamentos em relação ao eixo y (vertical) dos Carregamentos

$$x_{cg_1} := \frac{\int_{int_1_inf}^{int_1_sup} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx}{\int_{int_1_inf}^{int_1_sup} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx} = 0.248 \text{ m} \quad x_{cg_1} := x_{cg_1} = 0.248 \text{ m}$$

$$x_{cg_2} := \frac{\int_{int_2_inf}^{int_2_sup} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx}{\int_{int_2_inf}^{int_2_sup} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx} = 1.5 \text{ m} \quad x_{cg_2} := x_{cg_2} = 1.5 \text{ m}$$

$$x_{cg_3} := \frac{\int_{int_3_inf}^{int_3_sup} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx}{\int_{int_3_inf}^{int_3_sup} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx} = 2.752 \text{ m} \quad x_{cg_3} := x_{cg_3} = 2.752 \text{ m}$$

Cálculo das reações de apoio da viga conjugada

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_{VA_vc} \cdot l_1 - Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1}) - Q_{2_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_2}) - Q_{3_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_3}) = 0$$

$$R_{VA_vc} := \frac{-Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1}) - Q_{2_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_2}) - Q_{3_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_3})}{l_1} = -0.004$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{VB_vc} := -Q_{1_vc} - Q_{2_vc} - Q_{3_vc} - R_{VA_vc} = -0.004$$

$$R_{VA_vc} = -3.641 \cdot 10^{-3}$$

$$R_{VB_vc} = -3.641 \cdot 10^{-3}$$

Funções das Cargas atuantes na Viga Conjugada por trecho

$$q_{1_vc}(x) := \int_{int_1_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx$$

$$q_{2_vc}(x) := \int_{int_2_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx$$

$$q_{3_vc}(x) := \int_{int_3_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx$$

Cálculo do centroide em relação ao eixo y (vertical) das funções do carregamento na viga conjugada

$$x_{cg_1}(x) := \begin{cases} \text{if } x \neq int_1_inf \\ \frac{\int_{int_1_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx}{\int_{int_1_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx} \\ \text{else} \\ 0 \end{cases}$$

$$x_{cg_2}(x) := \begin{cases} \text{if } x \neq int_2_inf \\ \frac{\int_{int_2_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx}{\int_{int_2_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx} \\ \text{else} \\ 0 \end{cases}$$

$$x_{cg_3}(x) := \begin{cases} \text{if } x \neq int_3_inf \\ \frac{\int_{int_3_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx}{\int_{int_3_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx} \\ \text{else} \\ 0 \end{cases}$$

Cálculo das equações dos esforço de Cortante e Momento fletor pelo método das seções da viga conjugada

$$\text{Seção 1 } S1 := \text{int}_{-1_{inf} \leq x \leq \text{int}_{-1_{sup}}} \xrightarrow{\text{float}, 3} 0.0 \leq x \leq 0.376 \cdot m$$

Intervalo de x

$$x := (0 \text{ m}, 1 \text{ m} \dots \text{int}_{-1_{sup}})$$

Equação do esforço Cortante (que representa a rotação na viga real)

$$V_{1_{vc}}(x) := R_{VA_{vc}} + q_{1_{vc}}(x)$$

$$V_{1_{vc}}(0 \text{ m}) = -3.641413 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_{vc}}(\text{int}_{-1_{sup}}) = -3.545278 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor (que representa o deslocamento vertical na viga real)

$$M_{1_{vc}}(x) := R_{VA_{vc}} \cdot x + q_{1_{vc}}(x) \cdot (x - x_{cg_1}(x))$$

$$M_{1_{vc}}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_{vc}}(\text{int}_{-1_{sup}}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$\text{Seção 2 } S1 := \text{int}_{-2_{inf} \leq x \leq \text{int}_{-2_{sup}}} \xrightarrow{\text{float}, 3} 0.376 \cdot m \leq x \leq 2.62 \cdot m$$

Intervalo de x

$$x := (\text{int}_{-2_{inf}}, \text{int}_{-2_{inf}} + 1 \text{ m} \dots \text{int}_{-2_{sup}})$$

Equação do esforço Cortante (que representa a rotação na viga real)

$$V_{2_{vc}}(x) := R_{VA_{vc}} + Q_{1_{vc}} + q_{2_{vc}}(x)$$

$$V_{2_{vc}}(\text{int}_{-2_{inf}}) = -3.545278 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{2_{vc}}(\text{int}_{-2_{sup}}) = (3.545278 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor (que representa o deslocamento vertical na viga real)

$$M_{2_{vc}}(x) := R_{VA_{vc}} \cdot x + Q_{1_{vc}} \cdot (x - x_{cg_1}) + q_{2_{vc}}(x) \cdot (x - x_{cg_2}(x))$$

$$M_{2_{vc}}(\text{int}_{-2_{inf}}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{2_{vc}}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.579037 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}(int_{2_sup}) = -1.35796 \text{ mm}$$

Seção 3 $S3 := int_{3_inf} \leq x \leq int_{3_sup} \xrightarrow{\text{float}, 3} 2.62 \cdot m \leq x \leq 3.0 \cdot m$

Intervalo de x

$$x := (int_{3_inf}, int_{3_inf} + 1 \text{ m} .. int_{3_sup})$$

Equação do esforço Cortante (que representa a rotação na viga real)

$$V_{3_vc}(x) := R_{VA_vc} + Q_{1_vc} + Q_{2_vc} + q_{3_vc}(x)$$

$$V_{3_vc}(int_{3_inf}) = (3.545278 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{3_vc}(int_{3_sup}) = (3.641413 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor (que representa o deslocamento vertical na viga real)

$$M_{3_vc}(x) := R_{VA_vc} \cdot x + Q_{1_vc} \cdot (x - x_{cg_1}) + Q_{2_vc} \cdot (x - x_{cg_2}) + q_{3_vc}(x) \cdot (x - x_{cg_3}(x))$$

$$M_{3_vc}(int_{3_inf}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc}(int_{3_sup}) = 0 \text{ mm}$$

Utilizando do método Bilinear com a interpolação das curvaturas, porém adotando a seção mais crítica que para viga biapoiada será no meio do vão.

Calcular o coeficiente de interpolação η_c

Momento atuante na seção mais crítica

$$M_a := M_1 \left(\frac{l_1}{2} \right) = 27 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Momento de Fissuração

$$M_r = 11.85 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Coefficiente " β_1 " que leva em conta a qualidade da aderência .

$$\beta_1 := \text{para barras de alta aderência} \downarrow$$

$$\beta_1 = 1$$

Coefficiente " β_2 " que representa a influência da duração do carregamento ou da repetição do carregamento.

$$\beta_2 := \text{para o primeiro carregamento} \downarrow$$

$$\beta_2 = 1$$

$$\eta_c := \begin{cases} \text{if } M_a < M_r \\ 0 \\ \text{else if } M_a > M_r \\ 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^2 \end{cases} = 0.807$$

$$\eta_c = 0.807$$

Calculo da curvatura no estádio I

$$\chi_1 := \frac{M_a}{K_I}$$

$$\chi_1 = (1.111 \cdot 10^{-3}) \frac{1}{m}$$

Calculo da curvatura no estádio II

$$\chi_2 := \frac{M_a}{K_{II}}$$

$$\chi_2 = (3.881 \cdot 10^{-3}) \frac{1}{m}$$

Empregando-se o modelo da curvatura média " χ_m " que é obtida através de uma interpolação entre os valores extremos, calculados no estádio I e no estádio II puro.

$$\chi_m := (1 - \eta_c) \cdot \chi_1 + \eta_c \cdot \chi_2$$

$$\chi_m = (3.348 \cdot 10^{-3}) \frac{1}{m}$$

Com a curvatura média pode-se calcular a Inercia média

$$I_m := \frac{M_a}{E_{cs} \cdot \chi_m} = 29642.963 \text{ cm}^4$$

$$I_m = 29642.96 \text{ cm}^4$$

Com a inercia média pode-se calcular a rotação e o deslocamento vertical utilizando do método de Mohr

Resultante do Carregamento atuantes na Viga Conjugada

$$Q_{1_{vc}} := \int_0^{l_1} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx = 6.695 \cdot 10^{-3}$$

Cálculo do centroide da resultante do carregamento em relação ao eixo y (vertical) dos Carregamentos

$$x_{cg_1} := \frac{\int_0^{l_1} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx}{\int_0^{l_1} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx} = 1.5 \text{ m}$$

$$x_{cg_1} := x_{cg_1} = 1.5 \text{ m}$$

Cálculo das reações de apoio da viga conjugada

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_{VA_vc} \cdot l_1 - Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1}) = 0$$

$$R_{VA_vc} := \frac{-Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1})}{l_1} = -0.003$$

$$R_{VA_vc} = -0.003$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{VB_vc} := -Q_{1_vc} - R_{VA_vc} = -0.003$$

$$R_{VB_vc} = -0.003$$

Função das Cargas atuantes na Viga Conjugada

$$q_{1_vc}(x) := \int_0^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx$$

Cálculo do centroide em relação ao eixo y da viga conjugada

$$x_{cg_1}(x) := \begin{cases} \frac{\int_{int_1_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx}{\int_{int_1_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_m} \right) dx} & \text{if } x \neq 0 \text{ m} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Cálculo das equações dos esforço de Cortante e Momento fletor pelo método das seções da viga conjugada

Seção 1 $S1 := 0 \text{ m} \leq x \leq l_1 \rightarrow 0 \leq x \leq 3 \cdot \text{m}$

Intervalo de x

$$x := (0 \text{ m}, 1 \text{ m}..l_1)$$

Equação do esforço Cortante (que representa a rotação na viga real)

$$V_{1_vc_Im}(x) := R_{VA_vc} + q_{1_vc}(x)$$

$$V_{1_vc_Im}(0 \text{ m}) = -3.347702 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc}(0 \text{ m}) = -3.641413 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_Im}(int_{1_sup}) = -3.05809 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc}(int_{1_sup}) = -3.545278 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_Im}\left(\frac{l_1}{2}\right) = 0 \text{ rad}$$

$$V_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = 0 \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_Im}(int_{2_sup}) = (3.05809 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{2_vc}(int_{2_sup}) = (3.545278 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_Im}(l_1) = (3.347702 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{3_vc}(int_{3_sup}) = (3.641413 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor (que representa o deslocamento na viga real)

$$M_{1_vc_Im}(x) := R_{VA_vc} \cdot x + q_{1_vc}(x) \cdot (x - x_{cg,1}(x))$$

$$M_{1_vc_Im}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_{1_sup}) = -1.222611 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(int_{1_sup}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.138471 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.579037 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_{2_sup}) = -1.222611 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}(int_{2_sup}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc}(int_{3_sup}) = 0 \text{ mm}$$

Método Bilinear através da interpolação da flecha no estádio I e estádio II utilizando uma seção crítica que para viga biapoiada é no meio do vão

Calcular o coeficiente de interpolação η

Momento atuante na seção mais crítica

Momento de Fissuração

$$M_a := M_1\left(\frac{l_1}{2}\right) = 27 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_r = 11.85 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Coefficiente " β_1 " que leva em conta a qualidade da aderência .

$\beta_1 :=$ para barras de alta aderência ▾

$$\beta_1 = 1$$

$$\eta := \begin{cases} \text{if } M_a < M_r \\ 0 \\ \text{else if } M_a > M_r \\ 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_r}{M_a} \right) \end{cases} = 0.561$$

$$\eta = 0.561$$

Coefficiente " β_2 " que representa a influência da duração do carregamento ou da repetição do carregamento.

$\beta_2 :=$ para o primeiro carregamento ▾

$$\beta_2 = 1$$

Cálculo da flecha considerando a viga em todo o seu comprimento estágio I

Resultante do Carregamento atuantes na Viga Conjugada

$$Q_{1_vc} := \int_{0\text{ m}}^{l_1} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx = 2.223 \cdot 10^{-3}$$

Cálculo do centroide da resultante do carregamento em relação ao eixo y (vertical) dos Carregamentos

$$x_{cg_1} := \frac{\int_{0\text{ m}}^{l_1} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx}{\int_{0\text{ m}}^{l_1} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx} = 1.5\text{ m}$$

$$x_{cg_1} := x_{cg_1} = 1.5\text{ m}$$

Cálculo das reações de apoio da viga conjugada

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_{VA_vc} \cdot l_1 - Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1}) = 0$$

$$R_{VA_vc} := \frac{-Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1})}{l_1} = -0.001$$

$$R_{VA_vc} = -1.111 \cdot 10^{-3}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{VB_vc} := -Q_{1_vc} - R_{VA_vc} = -0.001$$

$$R_{VB_vc} = -1.111 \cdot 10^{-3}$$

Função das Cargas atuantes na Viga Conjugada

$$q_{1_vc}(x) := \int_{0 \text{ m}}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx$$

Cálculo do centroide em relação ao eixo y da viga conjugada

$$x_{cg_1}(x) := \begin{cases} \frac{\int_{int_1_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx}{\int_{int_1_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_I} \right) dx} & \text{if } x \neq 0 \text{ m} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Cálculo das equações dos esforço de Cortante e Momento fletor pelo método das seções da viga conjugada

Seção 1 $S1 := 0 \text{ m} \leq x \leq l_1 \rightarrow 0 \leq x \leq 3 \cdot \text{m}$

Intervalo de x

$$x := (0 \text{ m}, 1 \text{ m}..l_1)$$

Equação do esforço Cortante (que representa a rotação na viga real)

$$V_{1_vc_I}(x) := R_{VA_vc} + q_{1_vc}(x)$$

$$V_{1_vc_I}(0 \text{ m}) = -1.11125 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_I}(int_1_sup) = -1.015115 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_I}\left(\frac{l_1}{2}\right) = 0 \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_I}(int_2_sup) = (1.015115 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_I}(l_1) = (1.11125 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{1_vc}(0 \text{ m}) = -3.641413 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc}(int_1_sup) = -3.545278 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = 0 \text{ rad}$$

$$V_{2_vc}(int_2_sup) = (3.545278 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{3_vc}(int_3_sup) = (3.641413 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor

$$M_{1_{vc_I}}(x) := R_{VA_{vc}} \cdot x + q_{1_{vc}}(x) \cdot (x - x_{cg_1}(x))$$

$$M_{1_{vc_I}}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_{vc}}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_{vc_I}}(int_{1_{sup}}) = -0.405839 \text{ mm}$$

$$M_{1_{vc}}(int_{1_{sup}}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{1_{vc_I}}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -1.041797 \text{ mm}$$

$$M_{2_{vc}}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.579037 \text{ mm}$$

$$M_{1_{vc_I}}(int_{2_{sup}}) = -0.405839 \text{ mm}$$

$$M_{2_{vc}}(int_{2_{sup}}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{1_{vc_I}}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{3_{vc}}(int_{3_{sup}}) = 0 \text{ mm}$$

Cálculo da flecha considerando a viga em todo o seu comprimento no estágio II

Resultante do Carregamento atuantes na Viga Conjugada

$$Q_{1_{vc}} := \int_{0 \text{ m}}^{l_1} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx = 7.762 \cdot 10^{-3}$$

Cálculo do centroide da resultante do carregamento em relação ao eixo y (vertical) dos Carregamentos

$$x_{cg_1} := \frac{\int_{0 \text{ m}}^{l_1} x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx}{\int_{0 \text{ m}}^{l_1} \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx} = 1.5 \text{ m}$$

$$x_{cg_1} := x_{cg_1} = 1.5 \text{ m}$$

Cálculo das reações de apoio da viga conjugada

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_{VA_{vc}} \cdot l_1 - Q_{1_{vc}} \cdot (l_1 - x_{cg_1}) = 0$$

$$R_{VA_{vc}} := \frac{-Q_{1_{vc}} \cdot (l_1 - x_{cg_1})}{l_1} = -0.004$$

$$R_{VA_{vc}} = -3.881 \cdot 10^{-3}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{VB_{vc}} := -Q_{1_{vc}} - R_{VA_{vc}} = -0.004$$

$$R_{VB_{vc}} = -3.881 \cdot 10^{-3}$$

Função das Cargas atuantes na Viga Conjugada

$$q_{1_vc}(x) := \int_{0 \ m}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx$$

Cálculo do centroide em relação ao eixo y da viga conjugada

$$x_{cg_1}(x) := \begin{cases} \text{if } x \neq 0 \ m \\ \frac{\int_{int_1_inf}^x x \cdot \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx}{\int_{int_1_inf}^x \left(\frac{M_1(x)}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right) dx} \\ \text{else} \\ 0 \end{cases}$$

Cálculo das equações dos esforço de Cortante e Momento fletor pelo método das seções da viga conjugada

Seção 1 $S1 := 0 \ m \leq x \leq l_1 \rightarrow 0 \leq x \leq 3 \cdot m$

Intervalo de x

$$x := (0 \ m, 1 \ m..l_1)$$

Equação do esforço Cortante (que representa a rotação na viga real)

$$V_{1_vc_II}(x) := R_{VA_vc} + q_{1_vc}(x)$$

$$V_{1_vc_II}(0 \ m) = -3.881028 \cdot 10^{-3} \ \mathbf{rad}$$

$$V_{1_vc}(0 \ m) = -3.641413 \cdot 10^{-3} \ \mathbf{rad}$$

$$V_{1_vc_II}(int_1_sup) = -3.545278 \cdot 10^{-3} \ \mathbf{rad}$$

$$V_{1_vc}(int_1_sup) = -3.545278 \cdot 10^{-3} \ \mathbf{rad}$$

$$V_{1_vc_II}\left(\frac{l_1}{2}\right) = 0 \ \mathbf{rad}$$

$$V_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = 0 \ \mathbf{rad}$$

$$V_{1_vc_II}(int_2_sup) = (3.545278 \cdot 10^{-3}) \ \mathbf{rad}$$

$$V_{2_vc}(int_2_sup) = (3.545278 \cdot 10^{-3}) \ \mathbf{rad}$$

$$V_{1_vc_II}(l_1) = (3.881028 \cdot 10^{-3}) \ \mathbf{rad}$$

$$V_{3_vc}(int_3_sup) = (3.641413 \cdot 10^{-3}) \ \mathbf{rad}$$

Equação do Momento Fletor (que representa o deslocamento vertical na viga real)

$$M_{1_vc_II}(x) := R_{VA_vc} \cdot x + q_{1_vc}(x) \cdot (x - x_{cg_1}(x))$$

$$M_{1_vc_II}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_II}(int_{1_sup}) = -1.417387 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_II}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.638464 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_II}(int_{2_sup}) = -1.417387 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_II}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(int_{1_sup}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.579037 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}(int_{2_sup}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc}(int_{3_sup}) = 0 \text{ mm}$$

Calculo da flecha através da interpolação η do estádio I e estádio II

$$\delta(x) := (1 - \eta) \cdot M_{1_vc_I}(x) + \eta \cdot M_{1_vc_II}(x)$$

$$\delta(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$\delta(int_{1_sup}) = -0.973512 \text{ mm}$$

$$\delta\left(\frac{l_1}{2}\right) = -2.499027 \text{ mm}$$

$$\delta(int_{2_sup}) = -0.973512 \text{ mm}$$

$$\delta(l_1) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_{1_sup}) = -1.222611 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.138471 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_{2_sup}) = -1.222611 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

Calculo da flecha pelo método Bilinear através da interpolação do estádio I e estádio II, com variando η_c

Calcular o coeficiente de interpolação η_c

Momento da Seção

$$M_1(x) := R_{vA} \cdot x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Momento de Fissuração

$$M_r = 11.85 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Coefficiente " β_1 " que leva em conta a qualidade da aderência .

$\beta_1 :=$ para barras de alta aderência ▾

$$\beta_1 = 1$$

Coefficiente " β_2 " que representa a influência da duração do carregamento ou da repetição do carregamento.

$\beta_2 :=$ para o primeiro carregamento ▾

$$\beta_2 = 1$$

Cálculo da flecha através da interpolação do estágio I e estágio II, com η_c variando

Coefficiente de interpolação

$$\eta_c(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } M_1(x) < M_r \\ 0 & \\ 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_r}{M_1(x)} \right)^2 & \text{else if } M_1(x) > M_r \end{cases}$$

$$\chi_{\eta_c}(x) := (1 - \eta_c(x)) \cdot \frac{M_1(x)}{K_I} + \eta_c(x) \cdot \frac{M_1(x)}{K_{II}}$$

Cálculo da flecha

Resultante do Carregamento atuantes na Viga Conjugada

$$Q_{1_vc} := \int_{0 \text{ m}}^{l_1} (\chi_{\eta_c}(x)) dx = 5.729 \cdot 10^{-3}$$

Cálculo do centroide da resultante do carregamento em relação ao eixo y (vertical) dos Carregamentos

$$x_{cg_1} := \frac{\int_{0 \text{ m}}^{l_1} x \cdot (\chi_{\eta_c}(x)) dx}{\int_{0 \text{ m}}^{l_1} (\chi_{\eta_c}(x)) dx} = 1.5 \text{ m}$$

$$x_{cg_1} := x_{cg_1} = 1.5 \text{ m}$$

Cálculo das reações de apoio da viga conjugada

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_{VA_vc} \cdot l_1 - Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1}) = 0$$

$$R_{VA_vc} := \frac{-Q_{1_vc} \cdot (l_1 - x_{cg_1})}{l_1} = -0.003$$

$$R_{VA_vc} = -2.865 \cdot 10^{-3}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{VB_vc} := -Q_{1_vc} - R_{VA_vc} = -0.003$$

$$R_{VB_vc} = -2.865 \cdot 10^{-3}$$

Função das Cargas atuantes na Viga Conjugada

$$q_{1_vc}(x) := \int_{0 \text{ m}}^x (\chi_{\eta c}(x)) dx$$

Cálculo do centroide em relação ao eixo y da viga conjugada

$$x_{cg_1}(x) := \begin{cases} \text{if } x \neq 0 \text{ m} \\ \frac{\int_{int_1_inf}^x x \cdot (\chi_{\eta c}(x)) dx}{\int_{int_1_inf}^x (\chi_{\eta c}(x)) dx} \\ \text{else} \\ 0 \end{cases}$$

Cálculo das equações dos esforço de Cortante e Momento fletor pelo método das seções da viga conjugada

Seção 1 $S1 := 0 \text{ m} \leq x \leq l_1 \rightarrow 0 \leq x \leq 3 \cdot m$

Intervalo de x

$$x := (0 \text{ m}, 1 \text{ m}..l_1)$$

Equação do esforço Cortante (que representa a rotação na viga real)

$$V_{1_vc_qc}(x) := R_{VA_vc} + q_{1_vc}(x)$$

$$V_{1_vc_qc}(0 \text{ m}) = -2.864651 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc}(0 \text{ m}) = -3.641413 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_qc}(int_1_sup) = -2.768516 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc}(int_1_sup) = -3.545278 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_qc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = 0 \text{ rad}$$

$$V_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = 0 \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_qc}(int_2_sup) = (2.768517 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{2_vc}(int_2_sup) = (3.545278 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{1_vc_qc}(l_1) = (2.864652 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

$$V_{3_vc}(int_3_sup) = (3.641413 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}$$

Equação do Momento Fletor (que representa o deslocamento na viga real)

$$M_{1_vc_ \eta_c}(x) := R_{VA_vc} \cdot x + q_{1_vc}(x) \cdot (x - x_{cg_1}(x))$$

$$M_{1_vc_ \eta_c}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_ \eta_c}(int_{1_sup}) = -1.065658 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(int_{1_sup}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_ \eta_c}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -2.908105 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.579037 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_ \eta_c}(int_{2_sup}) = -1.065658 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}(int_{2_sup}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_ \eta_c}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc}(int_{3_sup}) = 0 \text{ mm}$$

Flechas pela curvatura χ

Com η_c constante calculado a partir da seção crítica

Com η_c variando

$$M_{1_vc_Im}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_ \eta_c}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_{1_sup}) = -1.222611 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_ \eta_c}(int_{1_sup}) = -1.065658 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.138471 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_ \eta_c}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -2.908105 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(int_{2_sup}) = -1.222611 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_ \eta_c}(int_{2_sup}) = -1.065658 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_Im}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_ \eta_c}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

Flechas pela flechas do estádio I e estádio II

Flecha considerando a viga inteira no Estádio I

Flecha considerando a viga inteira estádio II

$$M_{1_vc_I}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_II}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_I}(int_{1_sup}) = -0.405839 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_II}(int_{1_sup}) = -1.417387 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_I}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -1.041797 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_II}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.638464 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_I}(int_{2_sup}) = -0.405839 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_II}(int_{2_sup}) = -1.417387 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_I}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc_II}(l_1) = 0 \text{ mm}$$

Flecha com η constante calculado a partir da seção mais crítica

$$\delta(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$\delta(int_{1_sup}) = -0.973512 \text{ mm}$$

$$\delta\left(\frac{l_1}{2}\right) = -2.499027 \text{ mm}$$

$$\delta(int_{2_sup}) = -0.973512 \text{ mm}$$

$$\delta(l_1) = 0 \text{ mm}$$

Flecha considerando os trechos de estádio I e os trechos de estádio II puro

$$M_{1_vc}(0 \text{ m}) = 0 \text{ mm}$$

$$M_{1_vc}(int_{1_sup}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}\left(\frac{l_1}{2}\right) = -3.579037 \text{ mm}$$

$$M_{2_vc}(int_{2_sup}) = -1.35796 \text{ mm}$$

$$M_{3_vc}(int_{3_sup}) = 0 \text{ mm}$$