UNIVERSIDADE FEDERAL DE
MATO GROSSO DO SUL
Câmpus de Três Lagoas - CPTL - MS

Gabriela Lima Canassa

EXPLORANDO OS ESPAÇOS MÉTRICOS E TOPOLÓGICOS

Três Lagoas
2023

Gabriela Lima Canassa

EXPLORANDO OS ESPAÇOS MÉTRICOS E TOPOLÓGICOS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas.

Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade
Orientador

Três Lagoas

2023

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos um estudo exploratório sobre espaços métricos com o objetivo de explorar os espaços topológicos. Faremos uma introdução à topologia geral, analisando exemplos de topologias e resultados associados a esses espaços. No decorrer do trabalho, abordaremos conceitos e resultados em espaços métricos, como a definição de métrica, bolas abertas, métricas equivalentes, sequencias e introduziremos a topologia dos espaços métricos. Em seguida direcionamos o estudo para os espaços topológicos, começando pela definição de topologia e exibindo exemplos. Por fim definiremos conceitos topológicos essenciais para mostrar resultados importantes e caracterizarmos espaços compactos e conexos.

Palavras-chave: Espaços Métricos, Topologia; Espaços Topológicos.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A distância entre dois pontos é imprescindível para o estudo de diversas áreas da matemática, desde o ensino básico até o superior. Na matemática básica, mais especificamente, é comum atribuirmos a distância entre dois pontos de $\mathbb{R}^n$ como o comprimento do segmento de reta que os une. Apresentaremos neste trabalho que esta noção de distância é um caso particular de uma métrica definida em $\mathbb{R}^n$, chamada de métrica usual. Veremos também que este conceito de distância em $\mathbb{R}^n$ pode ser estendido para espaços mais gerais denominados espaços métricos.

No decorrer do trabalho, verificaremos que algumas métricas são equivalentes, como, por exemplo, a métricas euclidiana, do taxista e do máximo, e, portanto, geram a mesma topologia, ou seja, todas as propriedades topológicas que valem para uma delas, valem para as demais. Veremos também que muitas definições, tais como convergência, continuidade de funções e homeomorfimo, podem ser definidas topologicamente sem depender da distância entre coordenadas de pontos, mas sim considerando os conjuntos abertos do domínio e imagem.

Dessa forma, o objetivo é apresentar um estudo introdutório sobre topologia geral, enunciando e demonstrando conceitos importantes deste tema, como continuidade, homeomorfismo, compacidade e conexidade, aplicando-os em exemplos conhecidos de espaços métricos, assim como de conjuntos quaisquer.

Para este estudo, o trabalho foi dividido em capítulos de tal forma que cada tema seja estudado separadamente e em uma ordem conveniente. No primeiro capítulo, abordaremos a definição de métrica e espaços métricos, tomando como exemplos as métricas citadas nesta introdução e outras métricas comuns entre os matemáticos, aplicando-as em espaços conhecidos até espaços mais complexos. Após este reconhecimento do que são esses espaços, definiremos também elementos importantes como bolas abertas, métricas equivalentes, continuidade e sequências. Por fim, vamos definir a topologia dos espaços métricos com o foco em identificar quem são os conjuntos abertos nesses espaços e as propriedades que possuem.

No segundo capítulo, iniciaremos com a definição de topologia e espaço topológico, enfatizando exemplos simples para posteriormente trabalharmos exemplos mais elaborados, como espaços métricos com a topologia induzida pela métrica, subespaços topológicos e espaços de Hausdorff, dentre outros. Em seguida definiremos conceitos topológicos essenciais como ponto interior, vizinhança, conjuntos fechados, ponto de aderência, fronteira e acumulação. Por fim, aplicaremos esses conceitos estudados para definir e estudar topologicamente funções contínuas e homeomorfismos.

No terceiro capítulo, veremos a definição de compacidade e exemplos, em seguida vemeros algumas aplicações e resultados da continuidade em conjuntos compactos.

No quarto capítulo, trataremos sobre espaços conexos. Apresentaremos a definição e exemplos como feito no capítulo anterior e mostraremos resultados interessantes sobre continuidade usando os conceitos estudados até aqui.

1 ESPAÇOS MÉTRICOS

1.1 Definições e Exemplos

Definição 1.1. *Seja M um conjunto. Uma métrica em M é uma função*

$$\begin{aligned} d: M \times M &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\longmapsto d(x,y) \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$;
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$;

para todo $x,y,z \in M$. Neste caso o par (M,d) é dito um espaço métrico.

No decorrer do trabalho, utilizaremos propriedade reflexiva e desigualdade triangular para referenciar as propriedades 2 e 3, respectivamente.

Exemplo 1.1.1. *O par $(\mathbb{R},d)$, onde $d(x,y) = |x-y|$, é um espaço métrico.*

De fato, dados $x,y,z \in \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$d(x,y) = |x-y| = |-(x-y)| = |y-x| = d(y,x);$$

$$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Portanto, d é uma métrica em $\mathbb{R}$ e é denominada métrica usual de $\mathbb{R}$.

De forma mais geral, vamos considerar o conjunto $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

1. $(\mathbb{R}^n, d_E)$ é um espaço métrico, em que

$$d_E((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}.$$

Esta é chamada de métrica euclidiana ou usual de $\mathbb{R}^n$.

2. $(\mathbb{R}^n, d_T)$ é um espaço métrico, com

$$d_T((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Denominamos esta por métrica do taxista.

3. $(\mathbb{R}^n, d_M)$ é um espaço métrico, onde

$$d_M((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = max\{|x_1 - y_1|, \ \ldots \ ,|x_n - y_n|\}.$$

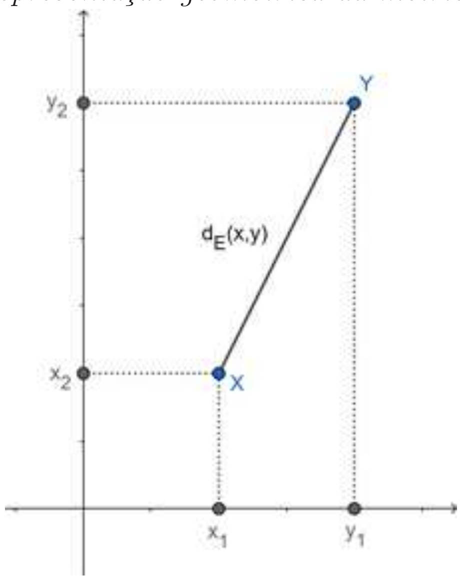
Esta é chamada métrica do máximo.

No exemplo a seguir veremos uma representação geométrica para o caso particular $M = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.1.2. *As métricas d_E, d_T e d_M em $\mathbb{R}^2$, onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$, são definidas por*

$$\begin{aligned} d_E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\longmapsto d_E(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

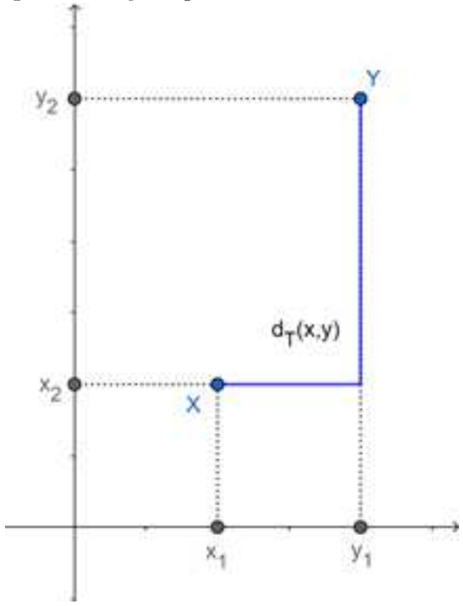
Figura 1 - Representação geométrica da métrica euclidiana.



Fonte: o autor.

$$\begin{aligned} d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\longmapsto d_T(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|. \end{aligned}$$

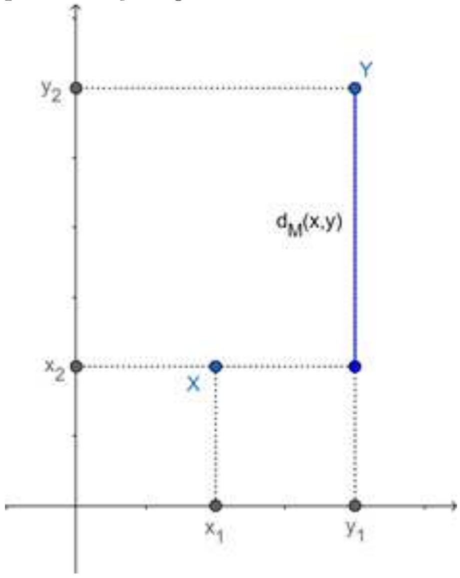
Figura 2 - Representação geométrica da métrica do taxista.



Fonte: o autor.

$$\begin{aligned} d_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\longmapsto d_M(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|,|x_2 - y_2|\}. \end{aligned}$$

Figura 3 - Representação geométrica da métrica do máximo.



Fonte: o autor.

Proposição 1.1. *O produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, sendo $(M_1,d_1),\ldots,(M_n,d_n)$ espaços métricos, é um espaço métrico, podendo ser definidas as seguintes métricas:*

$$D_1((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{d_1^2(x_1,y_1)+\cdots+d_n^2(x_n,y_n)};$$

$$D_2((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = d_1(x_1,y_1)+\cdots+d_n(x_n,y_n);$$

$$D_3((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \max\{d_1(x_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,y_n)\}.$$

Demonstração: Vamos provar que D_1 é uma métrica em M, verificando as propriedades de métrica. Dados $x = (x_1,\ldots,x_n),\ y = (y_1,\ldots,y_n),\ z = (z_1,\ldots,z_n) \in M$,

$$\begin{aligned} D_1(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{d_1^2(x_1,y_1)+\cdots+d_n^2(x_n,y_n)} = 0 \\ &\Leftrightarrow d_1^2(x_1,y_1)+\cdots+d_n^2(x_n,y_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow d_i^2(x_i,y_i) = 0,\ i = 1,\ldots,n \\ &\Leftrightarrow d_i(x_i,y_i) = 0,\ i = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Como cada d_i, com $i = 1,\ldots,n$, é uma métrica, temos

$$d_i(x_i,y_i) = 0,\ i = 1,\ldots,n \Leftrightarrow x_i = y_i,\ i = 1,\ldots,n \Leftrightarrow x = y.$$

Agora, vejamos a propriedade reflexiva da métrica:

$$D_1(x,y) = \sqrt{d_1^2(x_1,y_1)+\cdots+d_n^2(x_n,y_n)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{d_1^2(y_1,x_1)+\cdots+d_n^2(y_n,x_n)} \\
&= D_1(y,x).
\end{aligned}
$$

Para mostrar a validade da desigualdade triangular, usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwars, a qual assegura que

$$\forall a_i,\ b_i \in \mathbb{R},\ i=1,\ldots,n,\ a_1\cdot b_1+\cdots+a_n\cdot b_n \leq \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

Temos que:

$$D_1(x,y)=\sqrt{d_1^2(x_1,y_1)+\cdots+d_n^2(x_n,y_n)} \Rightarrow D_1^2(x,y)=d_1^2(x_1,y_1)+\cdots+d_n^2(x_n,y_n),$$

das propriedades de métrica

$$
\begin{aligned}
D_1^2(x,y) &\leq [d_1(x_1,z_1)+d_1(z_1,y_1)]^2+\cdots+[d_n(x_n,z_n)+d_n(z_n,y_n)]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i,z_i)+\sum_{i=1}^{n} d_i^2(z_i,y_i)+2\left[\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,z_i)d_i(z_i,y_i)\right] \\
&= D_1^2(x,z)+D_1^2(z,y)+2\left[\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,z_i)d_i(z_i,y_i)\right].
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwars, temos:

$$D_1^2(x,y)\leq D_1^2(x,z)+D_1^2(z,y)+2D_1(x,z)D_1(z,y) \Leftrightarrow D_1^2(x,y)\leq (D_1(x,z)+D_1(z,y))^2.$$

Como todas as parcelas são maiores ou iguais a zero, extraindo a raiz quadrada em ambos os lados, obtemos

$$D_1(x,y)\leq D_1(x,z)+D_1(z,y).$$

Portanto, D_1 é uma métrica sobre M. Agora, provaremos que D_2 é uma métrica sobre M.

$$
\begin{aligned}
D_2(x,y)=0 &\Leftrightarrow d_1(x_1,y_1)+\cdots+d_n(x_n,y_n)=0 \\
&\Leftrightarrow d_i(x_i,y_i)=0,\ i=1,\ldots,n \\
&\Leftrightarrow x_i=y_i,\ i=1,\ldots,n \\
&\Leftrightarrow x=y.
\end{aligned}
$$

Além disso, obtemos que:

$$D_2(x,y)=d_1(x_1,y_1)+\cdots+d_n(x_n,y_n)=d_1(y_1,x_1)+\cdots+d_n(y_n,x_n)=D_2(y,x).$$

Por fim, a desigualdade triangular é mostrada com:

$$\begin{aligned}
D_2(x,y) &= d_1(x_1,y_1) + \cdots + d_n(x_n,y_n) \\
&\leq d_1(x_1,z_1) + d_1(z_1,y_1) + \cdots + d_n(x_n,z_n) + d_n(z_n,y_n) \\
&= d_1(x_1,z_1) + \cdots + d_n(x_n,z_n) + d_1(z_1,y_1) + \cdots + d_n(z_n,y_n) \\
&= D_2(x,z) + D_2(z,y),
\end{aligned}$$

logo, $D_2(x,y)$ é uma métrica em M.

Finalmente, mostraremos que D_3 é uma métrica em M.

$$D_3(x,y) = 0 \Leftrightarrow \max\{d_1(x_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,y_n)\} = 0,$$

note que $d_i(x_i,y_i) \leq 0$, então

$$\begin{aligned}
D_3(x,y) = 0 &\Leftrightarrow d_i(x_i,y_i) = 0,\ i = 1,\ldots,n \\
&\Leftrightarrow x_i = y_i,\ i = 1,\ldots,n \\
&\Leftrightarrow x = y;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3(x,y) &= \max\{d_1(x_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,y_n)\} \\
&= \max\{d_1(y_1,x_1),\ldots,d_n(y_n,x_n)\} \\
&= D_3(y,x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3(x,y) &= \max\{d_1(x_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,y_n)\} \\
&\leq \max\{d_1(x_1,z_1) + d_1(z_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,z_n) + d_n(z_n,y_n)\} \\
&= d_r(x_r,z_r) + d_r(z_r,y_r)\ ,\ \text{para algum } r \in \{1,\ldots,n\} \\
&\leq \max\{d_1(x_1,z_1),\ldots,d_n(x_n,z_n)\} + \max\{d_1(z_1,y_1),\ldots,d_n(z_n,y_n)\} \\
&= D_3(x,z) + D_3(z,y).
\end{aligned}$$

Portanto, D_3 é uma métrica para o espaço M.

Observação 1. *Se escolhermos $M_1 = \cdots = M_n = \mathbb{R}$ e $d_1 = \cdots = d_n = d$ métrica usual de $\mathbb{R}$, obtemos $D_1(x,y) = d_E(x,y)$, $D_2(x,y) = d_T(x,y)$ e $D_3(x,y) = d_M(x,y)$, mostrando, então, que as métricas euclidiana, do taxista e do máximo satizfazem as propriedades de métrica.*

Exemplo 1.1.3. *Dado $M \neq \varnothing$ um conjunto. A função*

$$\begin{aligned} d_0 : M \times M &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\longmapsto d_0(x,y) = \begin{cases} 1 & se\ x \neq y, \\ 0 & se\ x = y, \end{cases} \end{aligned}$$

é uma métrica, denominada zero-um.

Certamente, a primeira propriedade de métrica é satisfeita pela definição da função: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Então, vamos provar as outras duas analizando cada caso. Para $x,y \in M$, quando $x = y$ teremos $d(x,y) = 0 = d(y,x)$, se $x \neq y$ teremos $d(x,y) = 1 = d(y,x)$. Agora, para $x,y,z \in \mathbb{R}$, temos 5 casos para analizar:

i. $x = y = z$

$$d(x,y) = 0 \leq 0 + 0 = d(x,z) + d(y,z);$$

ii. $x \neq y = z$

$$d(x,y) = 1 \leq 1 + 0 = d(x,z) + d(y,z);$$

iii. $x = y \neq z$

$$d(x,y) = 0 \leq 1 + 1 = d(x,z) + d(y,z);$$

iv. $z = x \neq y$

$$d(x,y) = 1 \leq 0 + 1 = d(x,z) + d(y,z);$$

v. $x \neq y \neq z$

$$d(x,y) = 1 \leq 1 + 1 = d(x,z) + d(y,z).$$

Portanto, d_0 é uma métrica.

Definição 1.2. *Dado (M,d) um espaço métrico e $S \subset M$ um conjunto não vazio. A restrição de d à S, denotada por d_S define uma métrica em S. Assim, dizemos que (S,d_S) é um subespaço métrico de (M,d).*

Exemplo 1.1.4. *O intervalo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ com a métrica*

$$\begin{aligned} d_{(0,1)} : (0,1) \times (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\longmapsto d_{(0,1)}(x,y) = |x - y| \end{aligned}$$

é um subespaço métrico de $(\mathbb{R},d)$, sendo d a métrica usual.

Exemplo 1.1.5. *O conjunto* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *com a métrica*

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\longmapsto d_{\mathbb{Z}}(x,y) = |x-y| \end{aligned}$$

é um subespaço métrico de $(\mathbb{R},d)$*, sendo* d *a métrica usual.*

Uma fonte de exemplos para espaços métricos são os espaços vetoriais normados munidos de uma métrica induzida sobre a norma.

Inicialmente, vamos definir espaço vetorial e norma.

Definição 1.3. *Dizemos que um conjunto* V *é um espaço vetorial sobre um corpo* K *com as operações*

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (u,v) &\longmapsto u+v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda,u) &\longmapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

se são satisfeitas as seguintes propriedades:

1. $\forall u,v,w \in V,\ u+(v+w) = (u+v)+w;$

2. $\forall u,v \in V,\ u+v = v+u;$

3. $\exists 0 \in V\ ;\ \forall u \in V,\ u+0 = 0+u = u;$

4. $\forall u \in V,\ \exists(-u) \in V\ ;\ u+(-u) = (-u)+u = 0;$

5. $\forall \alpha,\beta \in K,\ \forall\ v \in V,\ \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v;$

6. $\forall \alpha,\beta \in K,\ \forall v \in V,\ (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v;$

7. $\forall \alpha \in K,\ \forall u,v \in V,\ \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v;$

8. $\exists 1 \in K;\ \forall v \in V,\ 1 \cdot (v) = v.$

Definição 1.4. *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* K*. Uma norma é uma função*

$$\begin{aligned} \|\ \| : V &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

de tal forma que

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $\forall x \in V$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall \lambda \in K, \forall x \in V$;
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x,y \in V$;

para todo $x,y \in V$. Dizemos que o par $(V,\| \ \|)$ é um espaço vetorial normado.

Exemplo 1.1.6. *Dado $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, tome o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com a norma $\|x\| = \|(x_1,\ldots,x_n)\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$. Isto é,*

$$\begin{aligned} \| \ \| : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} \end{aligned} \tag{1}$$

define uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Deveras,

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1^2+\cdots+x_n^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_i^2 = 0, \ \forall \ i = 1,\ldots,n \\ &\Leftrightarrow x_i = 0, \ \forall \ i = 1,\ldots,n \\ &\Leftrightarrow x = (x_1,\ldots,x_n) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| = \|\lambda(x_1,\ldots,x_n)\| = \|(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)\| &= \sqrt{(\lambda x)_1^2+\cdots+(\lambda x)_n^2} \\ = \sqrt{\lambda^2 \cdot (x_1^2+\cdots+x_n^2)} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} &= |\lambda| \cdot \|(x_1,\ldots,x_n)\|; \end{aligned}$$

$$\|x+y\| = \|(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\| = \sqrt{(x_1+y_1)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2},$$

isto implica que

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x_1+y_1)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2 \\ &= x_1^2+2x_1y_1+y_1^2+\cdots+x_n^2+2x_ny_n+y_n^2 \\ &= x_1^2+\cdots+x_n^2+y_1^2\cdots+y_n^2+2(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) \\ &= \|x\|^2+\|y\|^2+2(x_1y_1+\cdots+x_ny_n). \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Shwarz,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2+\|y\|^2+2\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}\\ &= \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|\\ &= (\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2 \Longleftrightarrow \|x+y\| \leq (\|x\|+\|y\|).$$

Portanto, a função (1) define uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.2. *Seja V um espaço vetorial normado e $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$, $z=(z_1,\ldots,z_n)\in V$. O par (V,d), em que $d(x,y)=\|x-y\|$, $\forall x,y\in V$, é um espaço métrico tomando a métrica induzida d.*

Demonstração: Utilizando as propriedades de norma, temos que

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow \|x-y\|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y;$$

$$d(x,y)=\|x-y\|=\|(-1)(y-x)\|=|-1|\|y-x\|=1\cdot\|y-x\|=d(y,x);$$

$$d(x,y)=\|x-y\|=\|x-z+z-y\|\leq\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y).$$

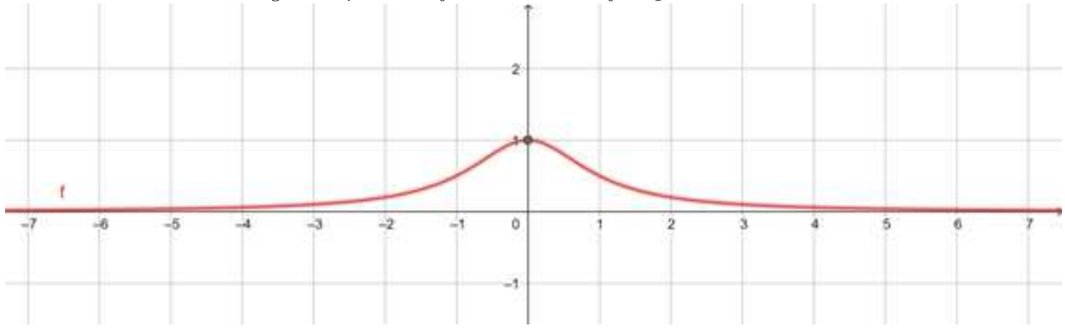
Portanto $d(x,y)=\|x-y\|$ é uma métrica em V.

Dessa forma, podemos concluir que todo espaço vetorial normado pode ser um espaço métrico munido da métrica induzida $d(x,y)=\|x-y\|$. Vale ressaltar que uma norma indica o comprimento de um vetor do espaço, já a métrica induzida determina a distância entre dois vetores do espaço.

Tomemos alguns exemplos em espaços vetoriais normados envolvendo funções limitadas. Antes relembremos o seguinte conceito, dado X um conjunto não vazio, a função $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita limitada se existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $|f(x)|<k$, $\forall x\in X$.

Exemplo 1.1.7. *A função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, com $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ é uma função limitada.*

Figura 4 - Gráfico de uma função limitada.



Fonte: o autor.

Com efeito, como $x^2 \geq 0$, então $x^2+1 \geq 1$, logo $\dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$. Portando, tomando $k=2$, temos $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{x^2+1}\right| = \dfrac{1}{x^2+1} < 2$.

Dessa forma, definiremos uma norma para o espaço vetorial de função $\mathcal{F}(X,\mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ f$ é limitada$\}$.

Exemplo 1.1.8. *$\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ tem a estrutura de espaço vetorial sobre o corpo dos reais, munido das operações*

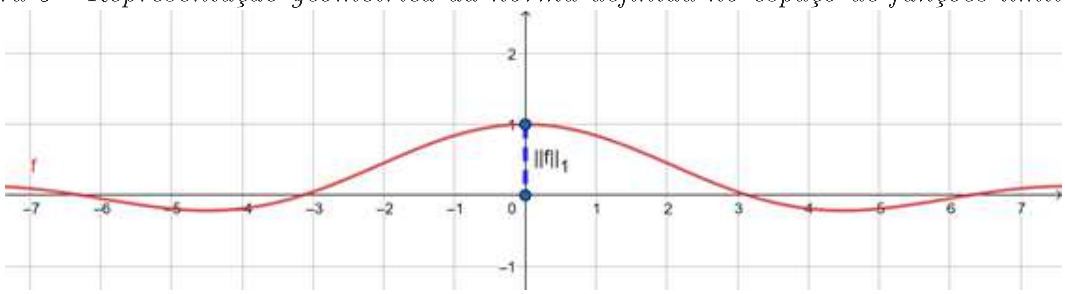
$$\begin{aligned} + : \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \\ (f,g) &\longmapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \\ (\lambda,f) &\longmapsto (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x), \end{aligned}$$

em $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ temos a seguinte norma:

$$\begin{aligned} \| \ \| : \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \|f\|_1 = \sup\{|f(x)|; x \in X\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Figura 5 - Representação geométrica da norma definida no espaço de funções limitadas.



Fonte: o autor.

De certo,

$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sup\{|f(x)|; x \in X\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in X.$$

Isto é f é a função nula, que é o vetor nulo deste espaço.

Agora,

$$\|\lambda f\|_1 = \sup\{|\lambda \cdot f(x)|; x \in X\} = \sup\{|\lambda \cdot ||f(x)|; x \in X\} = |\lambda| \cdot \sup\{|f(x)|; x \in X\} = |\lambda| \cdot \|f\|_1.$$

Por fim, seja $g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_1 &= \sup\{|f(x)+g(x)|; x \in X\} \\
&\leq \sup\{|f(x)|+|g(x)|; x \in X\} \\
&\leq \sup\{|f(x)|; x \in X\} + \sup\{|g(x)|; x \in X\} \\
&= \|f\|_1 + \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Portanto, a função (2) é uma norma para o espaço vetorial $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$.

Exemplo 1.1.9. *No espaço vetorial*

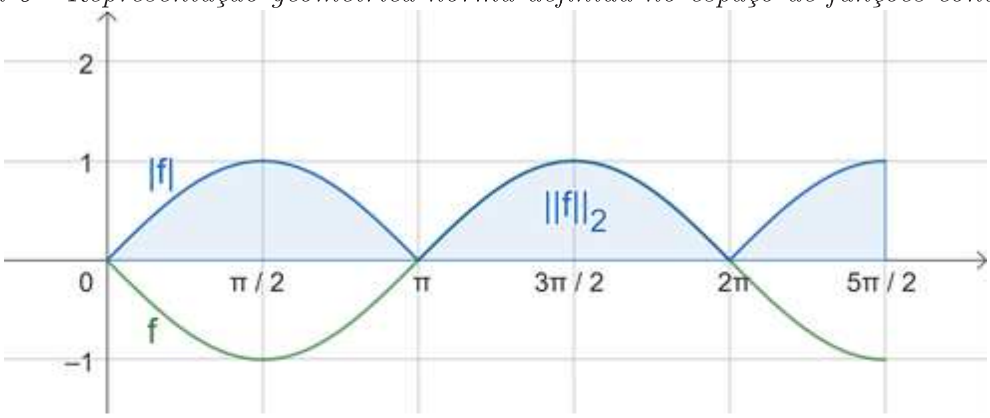
$$\mathcal{G}([a,b],\mathbb{R}) = \{g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ g \text{ é contínua } \},$$

com $[a,b] \subset \mathbb{R}$*, munida das mesmas operações que* $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$*. a função*

$$\begin{aligned}
\|\ \| : \mathcal{G}([a,b],\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
g &\longmapsto \|g\|_2 = \int_a^b |g(x)|dx
\end{aligned}$$

é uma norma.

Figura 6 - Representação geométrica norma definida no espaço de funções contínuas.



Fonte: o autor.

De fato, a norma está bem definida pois toda função contínua num intervalo fechado é limitada. Efetuando as mesmas verificações do exemplo anterior,obtemos

$$\|g\|_2 = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |g(x)|dx = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0, \forall x \in [a,b] \Leftrightarrow g(x) = 0, \forall x \in [a,b],$$

ou seja, g é identicamente nula. Agora,

$$\|\lambda g\|_2 = \int_a^b |\lambda g(x)|dx = \int_a^b |\lambda| \cdot |g(x)|dx = |\lambda| \cdot \int_a^b |g(x)|dx = |\lambda| \cdot \|g\|_2.$$

Por fim, seja $h \in \mathcal{G}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|g+h\|_2 &= \int_a^b |g(x)+h(x)|dx \leq \int_a^b |g(x)|+|h(x)|dx \\ &= \int_a^b |g(x)|dx + \int_a^b |h(x)|dx = \|g\|_2 + \|h\|_2. \end{aligned}$$

Logo, $\| \ \|_2$ é uma norma para o espaço vetorial $\mathcal{G}([a,b],\mathbb{R})$.

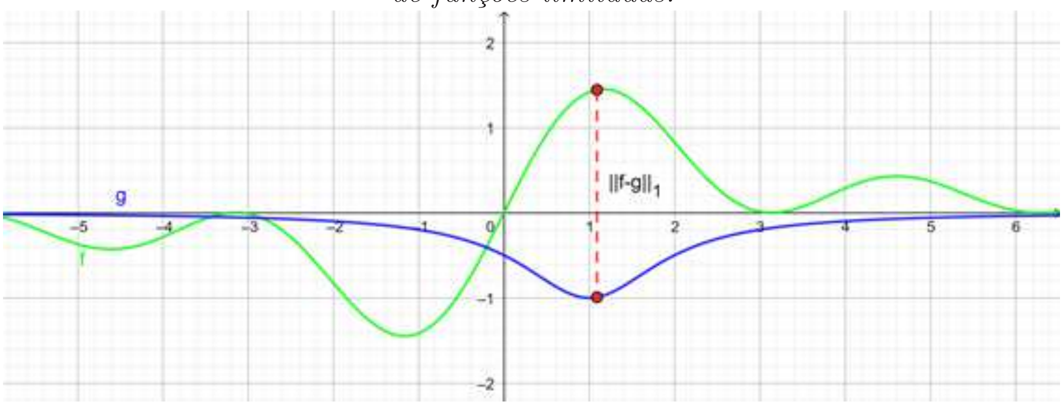
Assim, vamos analisar alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.1.10. *O par* $(\mathcal{F}(X,\mathbb{R}),d_1)$ *é um espaço métrico, em que*

$$d_1(f,h) = \|f-h\|_1 = \sup\{|f(x)-h(x)|; x \in X\}.$$

A seguir ilustramos a representação geométrica da métrica induzida pela norma $\| \ \|_1$.

Figura 7 - Representação geométrica da métrica induzida pela norma definida no espaço de funções limitadas.



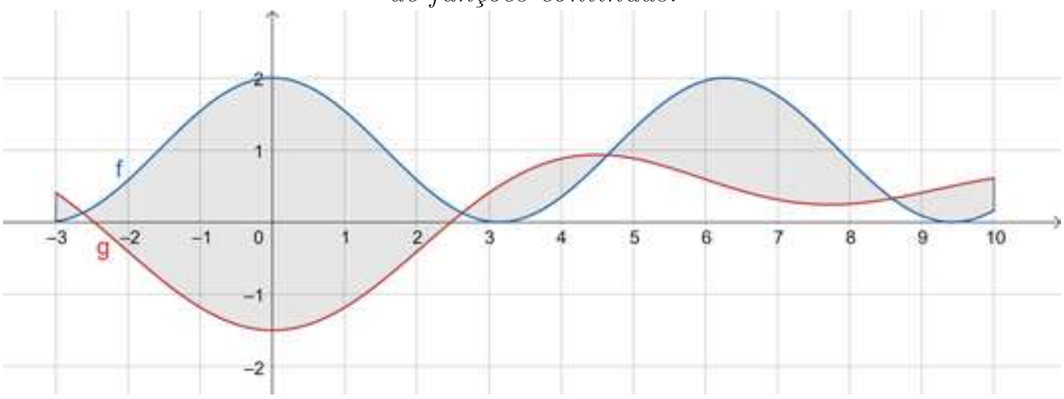
Fonte: o autor.

Exemplo 1.1.11. *O par* $(\mathcal{G}([a,b],\mathbb{R}),d_2)$ *é um espaço métrico, com*

$$d_2(g,h) = \|g-h\|_2 = \int_a^b |g(x)-h(x)|dx.$$

A seguir temos a representação geométrica da métrica induzida pela norma $\| \ \|_2$.

Figura 8 - Representação geométrica da métrica induzida pela norma definida no espaço de funções contínuas.



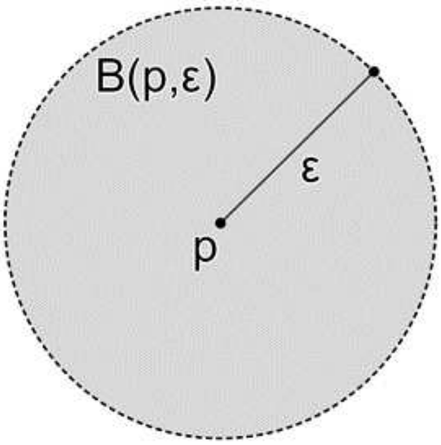
Fonte: o autor.

1.2 Bolas Abertas

Definição 1.5. *Seja* (M,d) *um espaço métrico,* $p \in M$ *um ponto e* $\varepsilon > 0$ *um número real. A bola aberta de centro p e raio* ε*, é o conjunto dos pontos* $x \in M$*, tais que a distância de* x *ao ponto* p *é menor que* ε*. Ou seja,*

$$B(p,\varepsilon) = \{x \in M; d(x,p) < \varepsilon\}.$$

Figura 9 - Representação intuitiva da bola Aberta de centro em p e raio ε*.*



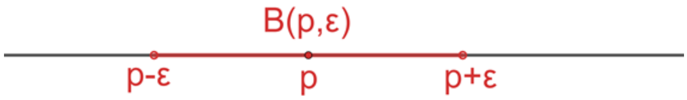
Fonte: o autor.

Exemplo 1.2.1. *No espaço métrico* $(\mathbb{R},d)$*, em que d é a métrica usual, a bola aberta*

$$B(p,\varepsilon) = \{x \in M; d(x,p) < \varepsilon\} = \{x \in M; |x-p| < \varepsilon\} = (p-\varepsilon, p+\varepsilon),$$

é representada geometricamente pela figura a seguir.

Figura 10 - Representação geométrica bola aberta na métrica usual de $\mathbb{R}$.



Fonte: o autor.

Exemplo 1.2.2. *Considere o espaço métrico* $(\mathbb{R}^2, d_E)$, *com*

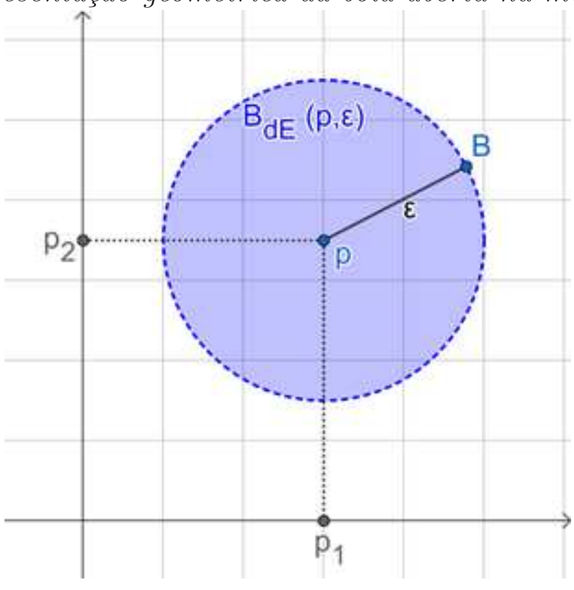
$$d_E((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

Sejam $x=(x_1,x_2)$ *e* $p=(p_1,p_2)$, *a bola aberta é dada por:*

$$\begin{aligned} B_{d_E}(p,\epsilon) &= \{x \in M \ ; \ d_E(x,p) < \varepsilon\} \\ &= \left\{x \in M \ ; \ \sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2} < \varepsilon\right\} \\ &= \left\{x \in M \ ; \ (x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2 < \varepsilon^2\right\}; \end{aligned}$$

e representada geometricamente pela imagem a seguir.

Figura 11 - Representação geométrica da bola aberta na métrica euclidiana.



Fonte: o autor.

Exemplo 1.2.3. *Considere o espaço métrico* $(\mathbb{R}^2, d_T)$, *com*

$$d_T((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|.$$

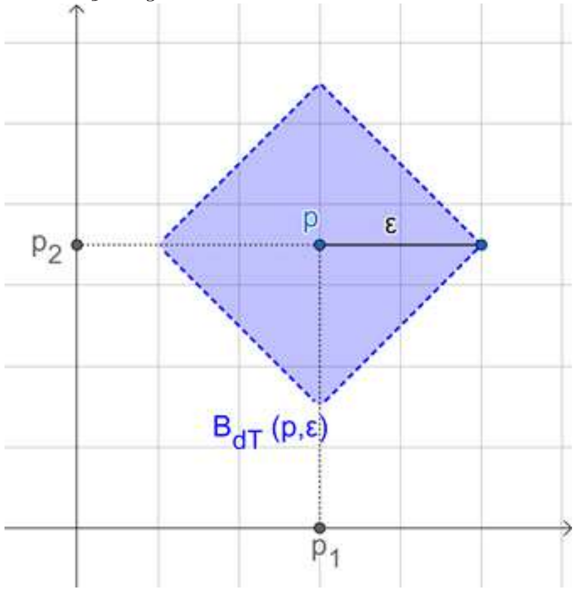
Sejam $x=(x_1,x_2)$ *e* $p=(p_1,p_2)$, *a bola aberta é dada por:*

$$B_{d_T}(p,\varepsilon) = \{x \in M \ ; \ d_T(x,p) < \varepsilon\}$$

$$= \{x \in M; |x_1 - p_1| + |x_2 - p_2| < \varepsilon\}$$
$$= \{x \in M; |x_2 - p_2| < \varepsilon - |x_1 - p_1|\}$$
$$= \{x \in M; |x_1 - p_1| + p_2 - \varepsilon < x_2 < \varepsilon + p_2 - |x_1 - p_1|\}$$

e representada geometricamente pela imagem a seguir.

Figura 12 - Representação geométrica da bola aberta na métrica do taxista.



Fonte: o autor.

Exemplo 1.2.4. *Considere o espaço métrico* $(\mathbb{R}^2, d_M)$*, com*

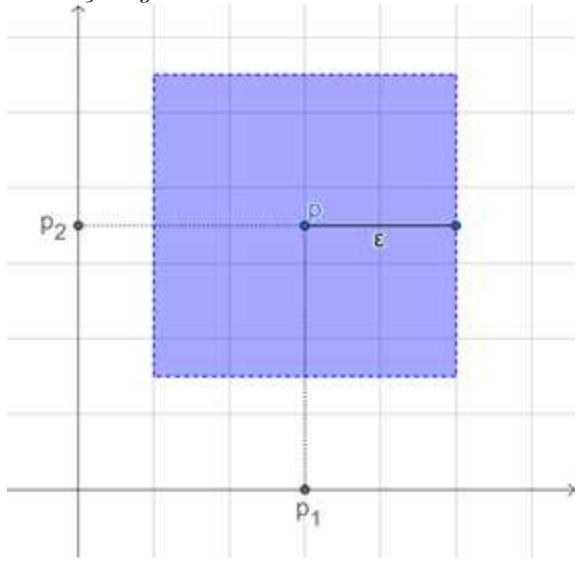
$$d_M((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Sejam $x = (x_1,x_2)$ *e* $p = (p_1,p_2)$*, a bola aberta é dada por:*

$$B_{d_M}(p,\varepsilon) = \{x \in M \ ; \ d_M(x,p) < \varepsilon\}$$
$$= \{x \in M \ ; \ \max\{|x_1 - p_1|, |x_2 - p_2|\} < \varepsilon\}$$
$$= \{x \in M \ ; \ |x_1 - p_1| < \varepsilon \ e \ |x_2 - p_2| < \varepsilon\}$$
$$= \{x \in M \ ; \ p_1 - \varepsilon < x_1 < p_1 + \varepsilon \ e \ p_2 - \varepsilon < x_2 < p_2 + \varepsilon\},$$

e representada geometricamente pela imagem a seguir.

Figura 13 - Representação geométrica da bola aberta na métrica do máximo.



Fonte: o autor.

Seja (M,d) um espaço métrico, uma bola aberta contida em M possui as seguintes propriedades básicas.

P1 *Se* $\epsilon_1 < \epsilon_2$*, então* $B(p,\epsilon_1) \subset B(p,\epsilon_2)$.

De fato,

$$x \in B(p,\epsilon_1) \Leftrightarrow d(x,p) < \epsilon_1 < \epsilon_2 \Rightarrow d(x,p) < \epsilon_2 \Leftrightarrow x \in B(p,\epsilon_2).$$

Logo, $B(p,\epsilon_1) \subset B(p,\epsilon_2)$.

P2 *Dado* $q \in B(p,\epsilon)$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $B(q,\delta) \subset B(p,\epsilon)$.

Com efeito, como $q \in B(p,\epsilon)$, temos que $d(p,q) < \epsilon$, logo tomando $\delta = \epsilon - d(p,q) > 0$, dado $x \in B(q,\delta)$ temos que

$$d(x,q) < \delta = \epsilon - d(p,q) \Rightarrow d(x,q) + d(p,q) < \epsilon.$$

Pela última propriedade de métrica,

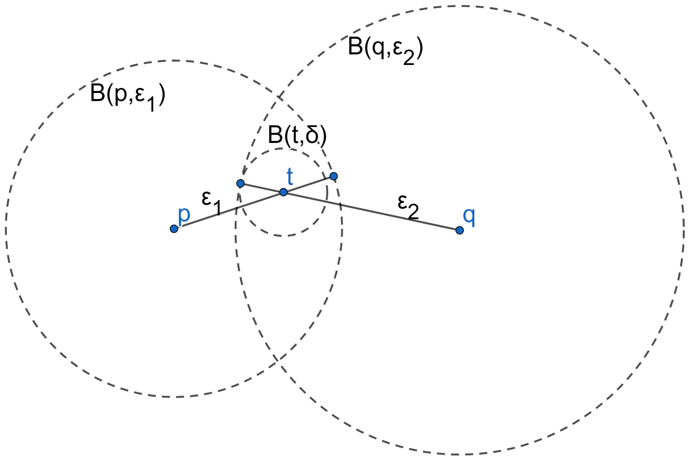
$$d(x,p) \leq d(x,q) + d(p,q) < \epsilon \Rightarrow x \in B(p,\epsilon).$$

Portanto, $B(q,\delta) \subset B(p,\epsilon)$.

P3 *Sejam* $B(p,\epsilon_1)$ *e* $B(q,\epsilon_2)$ *bolas não disjuntas. Se* $t \in B(p,\epsilon_1) \cap B(q,\epsilon_2)$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que* $B(t,\delta) \subset B(p,\epsilon_1) \cap B(q,\epsilon_2)$.

A situação está ilustrada na figura a seguir.

Figura 14



Fonte: o autor.

Deveras, tomando $\delta_1 = \epsilon_1 - d(t,p)$. Para $x \in B(t,\delta_1)$, temos que

$$d(x,t) < \delta_1 = \epsilon_1 - d(t,p) \Leftrightarrow d(x,t) + d(t,p) < \epsilon_1.$$

Note que

$$d(x,p) \leq d(x,t) + d(t,p) < \epsilon_1 \Rightarrow d(x,p) < \epsilon_1 \Leftrightarrow x \in B(p,\epsilon_1).$$

Agora, tomando $\delta_2 = \epsilon_2 - d(t,q)$ e $y \in B(t,\delta_2)$,

$$d(y,t) < \delta_2 = \epsilon_2 - d(t,q) \Leftrightarrow d(y,t) + d(t,q) < \epsilon_2.$$

Como

$$d(y,q) \leq d(y,t) + d(t,q) < \epsilon_2 \Rightarrow d(y,q) < \epsilon_2 \Leftrightarrow y \in B(q,\epsilon_2).$$

Portanto, basta considerar $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ para que $B(t,\delta) \subset B(p,\epsilon_1) \cap B(q,\epsilon_2)$

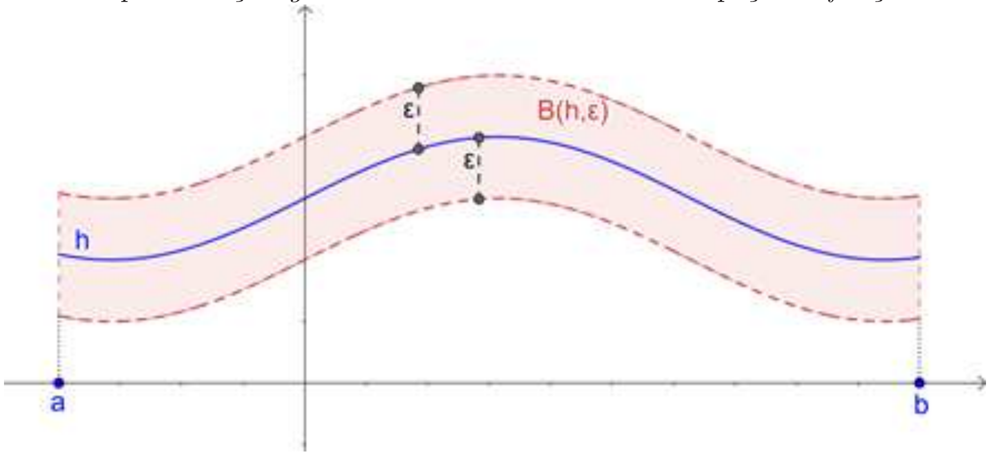
Exemplo 1.2.5. *As bolas abertas no espaço métrico* $(\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R}),d_1)$, *onde*

$$d_1(f,h) = \|f-h\|_1 = \sup\{|f(x)-h(x)|; x \in [a,b]\},$$

são dadas por

$$\begin{aligned} B(h,\varepsilon) &= \{f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R}); \|f-h\|_1 < \varepsilon\} \\ &= \{f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R}); \sup\{|f(x)-h(x)|; x \in [a,b]\} < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Figura 15 - Representação geométrica da bola aberta no espaço de funções limitadas.



Fonte: o autor.

1.3 Métricas Equivalentes

Definição 1.6. *Sejam d e d' métricas sobre um conjunto M. Dizemos que d e d' são métricas equivalentes se para cada $p \in M$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta,\delta' > 0$ tais que*

1. $B_d(p,\delta) \subset B_{d'}(p,\epsilon)$;
2. $B_{d'}(p,\delta') \subset B_d(p,\epsilon)$.

Exemplo 1.3.1. *As métricas d_E e d_M sobre $\mathbb{R}^2$ são equivalentes.*

Com efeito, dado $p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$, tome $\delta = \epsilon$. Seja $x = (x_1,x_2)$,

$$x \in B_{d_E}(p,\delta) \Leftrightarrow d_E(x,p) < \delta = \epsilon \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2} < \epsilon.$$

Mas, $d_M(x,p) = \max\{|x_1-p_1|,|x_2-p_2|\} = |x_r-p_r|$, para algum $r \in \{1,2\}$. Logo

$$d_M(x,p) = |x_r-p_r| = \sqrt{(x_r-p_r)^2} \leq \sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2} < \epsilon,$$

então $x \in B_{d_M}(p,\delta)$. Ou seja, $B_{d_E}(p,\delta) \subset B_{d_M}(p,\epsilon)$. Agora, considere $\delta' = \dfrac{\epsilon\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} x \in B_{d_M}(p,\delta') &\Leftrightarrow d_M(x,p) < \delta' = \frac{\epsilon\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \max\{|x_1-p_1|,|x_2-p_2|\} < \frac{\epsilon\sqrt{2}}{2} \\ &\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\max\{|x_1-p_1|,|x_2-p_2|\} < \epsilon. \end{aligned} \tag{3}$$

Vimos que $d_M(x,p) = |x_r - p_r|$, para algum $r \in \{1,2\}$, logo

$$\begin{aligned}
\max\{|x_1-p_1|,|x_2-p_2|\} &= |x_r-p_r| \\
&= \sqrt{(x_r-p_r)^2} \\
&= \sqrt{\frac{(x_r-p_r)^2+(x_r-p_r)^2}{2}} \\
&> \sqrt{\frac{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo em (3), obtemos

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2}\right) < \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\max\{|x_1-p_1|,|x_2-p_2|\} < \epsilon \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2} < \epsilon \Rightarrow d_E(x,p) < \epsilon \Leftrightarrow x \in B_{d_E}(p,\epsilon).$$

Assim, $B_{d_M}(p,\delta') \subset B_{d_E}(p,\epsilon)$. Portanto, as métricas d_E e d_M são equivalentes.

Exemplo 1.3.2. *Em $\mathbb{R}$, a métrica zero-um não é equivalente à métrica usual.*

De certo, considere como contra exemplo a bola aberta $B_{d_0}\left(1,\frac{1}{2}\right) = \{1\}$. Para todo $\delta > 0$, $B_d(1,\delta) = (1-\delta,1+\delta) \not\subseteq \{1\} = B_{d_0}\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

Proposição 1.3. *Sejam d e d' métricas sobre um conjunto M. Se existem $r,s > 0$ tais que*

$$r\cdot d(x,y) \leq d'(x,y) \leq s\cdot d(x,y),\ \forall x,y \in M,$$

então d e d' são equivalentes.

Demonstração: Dados $x,y \in M$ e $\epsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{s}$,

$$x \in B_d(p,\delta) \Leftrightarrow d(x,p) < \delta = \frac{\epsilon}{s} \Rightarrow s\cdot d(x,p) < \epsilon.$$

Mas, por hipótese

$$d'(x,p) \leq s\cdot d(x,p) < \epsilon \Rightarrow d'(x,p) < \epsilon \Leftrightarrow x \in B_{d'}(p,\epsilon).$$

Agora, admita $\delta' = \epsilon\cdot r$,

$$x \in B_{d'}(p,\delta') \Leftrightarrow d'(x,p) < \delta' = \epsilon\cdot r \Rightarrow d'(x,p) < \epsilon\cdot r.$$

Por hipótese,

$$r\cdot d(x,p)\leq d'(x,p)<\epsilon\cdot r\Rightarrow r\cdot d(x,p)<\epsilon\cdot r\Rightarrow d(x,p)<\epsilon\Leftrightarrow x\in B_d(p,\epsilon).$$

Portanto, as métricas d e d' são equivalentes.

Proposição 1.4. *As métricas em* $\mathbb{R}^n$

$$d_E(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2},$$

$$d_T(x,y)=|x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|,$$

$$d_M(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\},$$

em que $x=(x_1,\ldots,x_n)$ *e* $y=(y_1,\ldots,y_n)$*, satisfazem as seguintes desigualdades:*

$$d_M(x,y)\leq d_E(x,y)\leq d_T(x,y)\leq n\cdot d_M(x,y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n$$

e, portanto, são equivalentes entre si.

Demonstração: Dados $x,y\in\mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned}d_M(x,y)&=\max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\}\\&=|x_r-y_r|,\text{ para algum } r\in\{1,\ldots,n\}\\&=\sqrt{(x_r-y_r)^2}\\&\leq\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\\&=d_E(x,y).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}d_T^2(x,y)&=(|x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|)^2\\&=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2+2\cdot\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^n|x_i-y_i||x_j-y_j|\\&=d_E^2(x,y)+2\cdot\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^n|x_i-y_i||x_j-y_j|.\end{aligned}$$

Logo,

$$d_T^2(x,y)\geq d_E^2(x,y)\Rightarrow d_T(x,y)\geq d_E(x,y).$$

Por fim, para todo $i = 1,\ldots,n$,

$$|x_i - y_i| \leq \max\{|x_1 - y_1|,\ldots,|x_n - y_n|\} = d_M(x,y).$$

Assim,

$$d_T(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \leq n \cdot d_M(x,y).$$

Portanto, é provada a validade das desigualdades e consequentemente pela proposição anterior que as três métricas são equivalentes entre si.

Veremos nos próximos capítulos algumas aplicações importantes de métricas equivalentes dentro de espaços topológicos.

1.4 Sequências

Definição 1.7. *Seja (M,d) um espaço métrico. Uma sequência em M é uma função*

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\longrightarrow M \\ n &\longmapsto x(n) = x_n \end{aligned}$$

em que x_n é o n-ésimo termo. Vamos denotar a sequência por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_n).

Exemplo 1.4.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$, as funções*

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ com } f_n(x) = \begin{cases} -nx+1 & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{para } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

formam uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dentro do espaço vetorial normado $\mathcal{G}([0,1],\mathbb{R}) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}; f$ é contínua$\}$.

Definição 1.8. *Uma subsequência é uma restrição da função x a um subconjunto infinito $N' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k\} \subset \mathbb{N}$. Usaremos $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ou (x_{n_k}) para mencionar a subsequência $x' = x|_{N'}$.*

Definição 1.9. *Seja (M,d) um espaço métrico, $X \subset M$ é limitado quando existe $k \in M$ tal que $d(x,y) \leq k$, para qualquer $x,y \in M$.*

Exemplo 1.4.2. *Todo espaço métrico munido da métrica zero-um é limitado.*

De fato, basta tomar $k = 1$. Pela definição da métrica zero-um, $d_0(x,y) \leq 1$, para todo $x,y \in M$.

Definição 1.10. *Seja (M,d) um espaço métrico. Dizemos que $p \in M$ é o limite de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em (M,d) se, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $d(x_n,p) < \epsilon$. Ou seja,*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ;\ n > n_0 \Rightarrow x_n \in B_d(p,\epsilon).$$

Quando p é o limite de uma sequência (x_n), esta é convergente e converge para p. Denotaremos por $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, $\lim x_n = p$ ou $x_n \longrightarrow p$.

Exemplo 1.4.3. *No espaço métrico $(\mathbb{R},d_0)$ as únicas sequências convergentes são as estácionárias, isto é, se $x_n \longrightarrow p$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = p$, $\forall i \geq r$.*

Certamente, como a sequência converge para um valor $p \in \mathbb{R}$, temos que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ;\ n > n_0 \Rightarrow d_0(x_n,p) < \epsilon.$$

Então considere qualquer $0 < \epsilon < 1$, para $n > n_0$

$$d_0(x_n,\epsilon) < \epsilon < 1 \Rightarrow d_0(x_n,\epsilon) = 0 \Rightarrow x_n = p.$$

Assim, basta tomarmos $r = n_0 + 1$, para que $x_i = p, \forall i \geq r$. Portanto, neste espaço, toda sequência convergente é estacionária.

Exemplo 1.4.4. *No espaço métrico $(\mathcal{G}([0,1],\mathbb{R}),d_2)$, onde $d_2(f,g) = \|f-g\|_2$, a sequência de funções*

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ com\ f_n(x) = \begin{cases} -nx+1 & para\ 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & para\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

converge para a função nula $f_0 = 0$.

Deveras, para cada $\epsilon > 0$, considere $n_0 = \frac{1}{2\epsilon}$. Dessa forma,

$$n > n_0 = \frac{1}{2\epsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{2\epsilon} \Rightarrow \epsilon > \frac{1}{2n}.$$

Então,

$$d_2(f_n,f_0) = \|f_n - f_0\|_2 = \int_0^1 |f_n - f_0| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (f_n - f_0) dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 (f_n - f_0) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} (f_n - f_0) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (-nx + x) dx = \left[-\frac{nx^2}{2} + x \right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$= -\frac{n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + \frac{1}{n} - \left(-\frac{n\cdot 0^2}{2} + 0\right) = -\frac{\frac{n}{n^2}}{2} + \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n} + \frac{2}{2n} = \frac{1}{2n} < \epsilon.$$

Portanto, (f_n) converge para f_0.

Proposição 1.5. *Toda sequencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente em um espaço métrico (M,d) é limitada.*

Demonstração: Como (x_n) é convergente, existe um p tal que $x_n \longrightarrow p \in M$. Isto é, dado $\epsilon = 1$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n > r$ implica em $d(x_n,p) < 1$. Considerando que os termos $x_1,\ldots,x_r$ são finitos, então tome $k = \max\{d(x_1,p),\ldots,d(x_r,p),1\}$. Logo, dados $i,j \in \mathbb{N}$,

$$d(x_i,x_j) \leq d(x_i,p) + d(p,x_j) < k + k = 2k.$$

O conjunto $\{x_n\}$ é limitado por $2k$. Portanto, a sequência (x_n) é limitada.

Proposição 1.6. *Seja (M,d) um espaço métrico. Se uma sequência (x_n) converge para um determinado $p \in M$ em (M,d), então toda subsequência (x_{n_k}) converge para o mesmo valor p.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n,p) < \epsilon$. Tomando $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n_{k_0} > n_0$, obtemos $d(x_{n_k},p) < \epsilon$ como queríamos. Portanto, toda subsequência é convergente e converge para o mesmo ponto.

Proposição 1.7. *Sejam d e d' métricas equivalentes no espaço métrico M. Uma sequência (x_n) é convergente em (M,d) se, e somente se, é convergente em (M,d').*

Demonstração: Seja $a \in M$ de forma que $x_n \longrightarrow a$ em (M,d), da equivalência das métricas, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $B_d(a,\delta) \subset B_{d'}(a,\epsilon)$. Por hipótese, para este δ, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_1$

$$x_n \in B_d(a,\delta) \subset B_{d'}(a,\epsilon) \Rightarrow x_n \in B_{d'}(a,\epsilon).$$

Logo, $x_n \longrightarrow a$ converge em (M,d'). Reciprocamente, suponha que $x_n \longrightarrow b$ em (M,d'), da equivalência temos

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta' > 0; B_{d'}(a,\delta') \subset B_d(a,\epsilon). \tag{4}$$

Da hipótese,

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}; n > n_2 \Rightarrow x_n \in B_{d'}(a,\delta). \tag{5}$$

Logo, de (4) e (5), $x_n \longrightarrow a$ converge em (M,d).

1.5 Continuidade

Definição 1.11. *Sejam* (M,d) *e* (N,d') *espaços métricos. Uma aplicação* $f:(M,d)\longrightarrow(N,d')$ *é contínua num ponto* $p\in M$ *se, para todo* $\epsilon>0$*, existe* $\delta>0$*, tal que* $x\in M$ *e* $d(x,p)<\delta$ *implica em* $d'(f(x),f(p))<\epsilon$*.*
Dizemos que f *é contínua se for contínua em todo ponto de seu domínio.*

Exemplo 1.5.1. *Toda função* $f:(\mathbb{R},d_0)\longrightarrow(\mathbb{R},d)$*, em que* d_0 *é a métrica zero-um e* d *é a métrica usual dos reais, é contínua.*

Com efeito, dada a função $f:(\mathbb{R},d_0)\longrightarrow(\mathbb{R},d)$ e $p\in\mathbb{R}$. Para qualquer $\epsilon>0$, basta tomar $\delta=\frac{1}{2}$, logo

$$\begin{aligned}d_0(x,p)<\delta=\frac{1}{2}\Rightarrow d_0(x,p)=0\Rightarrow x=p\Rightarrow\\ f(x)=f(p)\Rightarrow d(f(x),f(p))=0<\epsilon.\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua.

Exemplo 1.5.2. *A função projeção da i-ésima coordenada dada por*

$$\begin{aligned}p_i:M_1\times\cdots\times M_n&\longrightarrow M_i\\ (x_1,\ldots,x_n)&\longmapsto p_i(x_1,\ldots,x_n)=x_i\end{aligned}$$

é contínua em $a\in M_1\times\cdots\times M_n$*.*

De fato, utilizando a métrica do taxista, Sejam $a=(a_1,\ldots,a_n)$ e $x=(x_1,\ldots,x_n)$ pertencentes a $M_1\times\cdots\times M_n$, dado $\epsilon>0$, tome $\delta=\epsilon$, assim

$$\begin{aligned}d(x,a)<\delta=\epsilon\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}|x_i-a_i|<\epsilon\Rightarrow|x_i-a_i|<\epsilon\ ,\ i=1,\ldots,n\\ \Rightarrow d(x_i,a_i)<\epsilon\Rightarrow d(p_i(x),p_i(a))<\epsilon.\end{aligned}$$

Portanto, p_i é contínua em a.

Exemplo 1.5.3. *Uma função* $f:(M,d)\longrightarrow(N,d')$ *é chamada de Lipschitz se existe* $k>0$ *tal que* $d'(f(x),f(y))\leq k\cdot d(x,y)$*, para todo* $x,y\in M$*. Toda função de Lipschitz é contínua.*

De certo, pois seja f uma função de Lipschitz, existe $k>0$ de tal forma que $d'(f(x),f(y))\leq k\cdot d(x,y)$. Dessa forma, dado $\epsilon>0$, tomando $\delta=\frac{\epsilon}{k}$ temos

$$d(x,y)<\delta\Rightarrow d'(f(x),f(y))\leq k\cdot d(x,y)<k\cdot\delta=k\cdot\frac{\epsilon}{k}=\epsilon,$$

isto é, $d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \epsilon$. Portanto, f é contínua.

Proposição 1.8. *Sejam (M,d) e (N,d') espaços métricos. Uma função $f : (M,d) \longrightarrow (N,d')$ é contínua em $p \in M$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, tal que $x_n \longrightarrow p$, tem-se que $f(x_n) \longrightarrow f(p)$.*

Demonstração: Suponha que f é contínua em p e seja (x_n) uma sequência de pontos de M, com $x_n \longrightarrow p$. Da continuidade de f, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\exists\delta > 0; d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(p)) < \varepsilon. \tag{6}$$

Da convergência de (x_n) para este $\delta > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; \ n > n_0 \Rightarrow d(x_n,p) < \delta. \tag{7}$$

Assim, por (7) e (6), $d(f(x_n),f(p)) < \varepsilon$ para todo $n > n_0$, isto é, $f(x_n) \longrightarrow f(p)$. Reciprocamente, suponha por absurdo que $x_n \longrightarrow p$ implica em $f(x_n) \longrightarrow f(p)$, mas f não é contínua em p. Então

$$\exists\ \epsilon > 0; \forall\ \delta' > 0, \exists\ x \in M; d(x,p) < \delta' \Rightarrow d(f(x),f(p)) \geq \epsilon.$$

Além disso, para cada $\delta' = \frac{1}{n}$, existe $x_n \in M$ tal que

$$d(x_n,p) < \delta' = \frac{1}{n} \text{ e } d(f(x_n),f(p)) \geq \epsilon.$$

Assim, por construção $x_n \longrightarrow p$, mas $f(x_n) \nrightarrow f(p)$, contrariando a hipótese. Portanto, f é contínua em p.

1.6 Topologia dos Espaços Métricos

Definição 1.12. *Seja (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que a é ponto interior de X se existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(a,\epsilon) \subset X$.*

Definição 1.13. *Dizemos que $A \subset M$, sendo (M,d) um espaço métrico, é aberto quando todos seus pontos são interiores.*

Exemplo 1.6.1. *Seja $(\mathbb{R},d)$ um espaço métrico, em que d é a métrica usual, todo intervalo aberto da reta é um conjunto aberto em $(\mathbb{R},d)$.*

De fato, seja (a,b), com $a,b \in \mathbb{R}$, um intervalo aberto na reta, tome $x \in (a,b)$, ou seja, $a < x < b$. Então $\epsilon = \min\left\{\dfrac{x-a}{2}, \dfrac{b-x}{2}\right\} > 0$, suponha sem perda de generalidade que $\epsilon = \dfrac{x-a}{2}$.

$$\left(x - \frac{x-a}{2}, x + \frac{x-a}{2}\right) = \left(\frac{x+a}{2}, \frac{3x-a}{2}\right).$$

Note que

$$x > a \Leftrightarrow \frac{x+a}{2} > \frac{a+a}{2} = a$$

e

$$\frac{3x-a}{2} = x + \frac{x-a}{2} < x + \frac{b-x}{2} = \frac{x+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b.$$

Portanto, o intervalo (a,b) é um conjunto aberto em $(\mathbb{R},d)$, pois $\left(\dfrac{x+a}{2}, \dfrac{3x-a}{2}\right) \subset (a,b)$.

Exemplo 1.6.2. *Seja (M,d_0) um espaço métrico, onde d_0 é a métrica zero-um. Todo subconjunto de M é aberto em (M,d_0).*

Seja $X \subset M$ e $a \in X$, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ temos que $B_{d_0}(a,\epsilon) = \{a\}$, então $B_{d_0}(a,\epsilon) \subset X$, ou seja, todo subconjunto $X \subset M$ é aberto em (M,d_0).

Proposição 1.9. *Seja (M,d) um espaço métrico. Toda bola aberta contida em M é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração: Seja $B(p,\epsilon) = \{x \in M; d(x,p) < \epsilon\}$ uma bola aberta. Seja $a \in B(p,\epsilon)$, considere $\varepsilon = \epsilon - d(p,a)$, vamos mostrar que $B(a,\varepsilon) \subset B(p,\epsilon)$.

$$x \in B(a,\varepsilon) \Leftrightarrow d(x,a) < \varepsilon = \epsilon - d(p,a) \Leftrightarrow d(x,a) + d(a,p) < \epsilon.$$

Da desigualdade triangular, temos

$$d(x,p) \leq d(x,a) + d(a,p) < \epsilon \Leftrightarrow d(x,p) \leq \epsilon \Leftrightarrow x \in B(p,\epsilon).$$

Portanto, toda bola aberta é um conjunto aberto em M.

Teorema 1.1. *Seja (M,d) um espaço métrico. Então:*

1. *$\varnothing$ e M são conjuntos abertos;*
2. *Sejam A_1, $A_2, \ldots$, A_n conjuntos abertos em M, então a interseção finita $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ é aberta;*

3. *Seja* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *uma família qualquer de conjuntos abertos de* M*, então a união qualquer* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ *é aberta.*

Demonstração: Provaremos cada um dos itens separadamente.

1. O conjunto $\varnothing$ é aberto por vacuidade e M é aberto pois, para todo $p \in M$, tomando $\epsilon = 1$, obtemos que $B(p,1) = \{x \in M; d(x,p) < 1\} \subset M$.

2. Dado $p \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, então $p \in A_i$ para todo $i = 1,\ldots,n$, em que cada A_i é um aberto, logo existe $\epsilon_i > 0$ tal que $B(p,\epsilon_i) \subset A_i$. Considere $\epsilon = \min_{1\leq i\leq n}\{\epsilon_i\}$, então

$$B(p,\epsilon) \subset A_i,\ i = 1,\ldots n \Rightarrow B(p,\epsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

   Portanto, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ é um aberto em M.

3. Dado $p \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, então $p \in A_\lambda$ para algum $\lambda \in \Lambda$. Como cada A_λ é aberto, existe $\epsilon > 0$ de tal modo que $B(p,\epsilon) \subset A_\lambda$. Isso implica que $B(p,\epsilon) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Portanto, a união infinita de conjuntos abertos em M é aberta em M.

Note que o item 2 do teorema 1.1 não vale para interseções infinitas, um contra-exemplo pode ser obtido no espaço métrico $\mathbb{R}$ munido da métrica usual. A interseção infinita de intervalos da forma $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ resulta em $\{0\}$ que não é aberto em $(\mathbb{R},d)$.

No próximo capítulo veremos que quando uma coleção de subconjuntos de M satisfazem o Teorema 1.1, essa coleção é denominada uma topologia para M.

2 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

2.1 Definição e Exemplos

Definição 2.1. *Uma topologia num conjunto T é uma coleção τ de subconjuntos, que satisfazem as seguintes propriedades:*

1. $\varnothing, T \in \tau$;
2. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$;
3. *Seja* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *uma família qualquer de subconjuntos.* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$.

Neste caso, cada elemento de τ é chamado de aberto. O par (T,τ) é chamado de espaço topológico.

Exemplo 2.1.1. *Considere o conjunto $T = \{a,b,c\}$. Vamos apresentar alguns exemplos simples de topologias.*

(i) $\tau_1 = \{\varnothing, \{a,b,c\}\}$;

(ii) $\tau_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b,c\}\}$;

(iii) $\tau_3 = \{\varnothing, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Com o mesmo conjunto, podemos verificar também coleções que não são topologias.

(iv) $\tau_4 = \{\varnothing, \{b\}, \{a,b\}\}$, *pois* $T \notin \tau_4$;

(v) $\tau_5 = \{\varnothing, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$, *pois* $\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\} \notin \tau_5$;

(vi) $\tau_6 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b,c\}\}$, *pois* $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin \tau_6$.

Exemplo 2.1.2. *Dado T conjunto qualquer, $\tau = \{\varnothing, T\}$ é uma topologia em T, que será denominada topologia trivial.*

Com efeito, temos que $\varnothing$, $T \in \tau$. Além disso, $\varnothing \cap T = \varnothing \in \tau$ e $\varnothing \cup T = T \in \tau$. Portanto, τ é uma topologia.

Exemplo 2.1.3. *Seja* (M,d) *um espaço métrico qualquer, a coleção*

$$\tau = \{A \subset M; A \text{ é aberto em } (M,d)\}$$

é uma topologia.

Este exemplo decorre diretamente da definição de topologia juntamente com o Teorema 1.1.

Exemplo 2.1.4. *Dado* T *conjunto qualquer, em que* $\mathcal{P}(T)$ *é o conjunto formado por todos os subconjuntos de* T*,* $\tau = \mathcal{P}(T)$ *é uma topologia em* T*, que será denominada topologia discreta.*

Deveras, neste caso, todo subconjunto de T será aberto, logo as três propriedades topológicas são satisfeitas.

Exemplo 2.1.5. *Seja* $f : S \longrightarrow X$ *uma aplicação de um conjunto arbitrário* S *num espaço topológico* (X,τ)*. A coleção* $\tau' = \{f^{-1}(A) \subset S; A \in \tau\}$ *é uma topologia em* S*. Esta chama-se topologia induzida em* S *pela aplicação* $f : S \longrightarrow X$*.*

Com efeito, como $\varnothing, X \in \tau$, temos que $f^{-1}(X) = S \in \tau'$ e $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau'$. Sejam $f^{-1}(A_i) \in \tau'$, A_i, temos

$$\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Como τ é uma topologia $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$, logo $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \in \tau'$. Agora dada uma família arbitrária $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de abertos de X, a união $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ também será aberta. Seja $f^{-1}(A_\lambda) \in \tau'$, com $\lambda \in \Lambda$,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(A_\lambda) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda)\right) \in \tau'.$$

Portanto, $\tau' = \{f^{-1}(A) \subset S; A \text{ é aberto em } X\}$ é uma topologia induzida em S pela aplicação f. A demonstração das propriedades de função inversa utilizadas nesta demonstração podem ser encontradas na referência [4].

Um subespaço do espaço topológico X é definido a partir de um caso particular do exemplo acima.

Seja S um subconjunto do espaço topológico X. A coleção

$$\tau' = \{i^{-1}(A) \subset S \; ; \; A \text{ é aberto em } X\}$$

é uma topologia induzida em S pela aplicação $i : S \longrightarrow X$, com $i(x) = x$, $\forall x \in S$. O subconjunto S munido desta topologia τ', é chamado subespaço topológico de X.

Note que $i^{-1}(A) = A \cap S$, para todo A aberto de X. Assim a topologia é dada por $\tau' = \{A \cap S \ ; \ A \text{ é aberto em } X\}$.

Exemplo 2.1.6. *Seja* $(\mathbb{R},d)$ *um espaço métrico munido da métrica usual, com a topologia* $\tau = \{A \ ; \ A \text{ é aberto em } \mathbb{R}\}$. *A topologia induzida em* $[0,1) \subset \mathbb{R}$ *pela aplicação* $i : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, *com* $i(x) = x$, $\forall x \in [0,1)$ *é*

$$\tau' = \{A \cap [0,1) \ ; \ A \text{ é aberto em } \mathbb{R}\}.$$

Observe que os elementos de τ' *não necessariamente são elementos de* τ. *Por exemplo, tome* $A = \left(-1,\frac{1}{2}\right)$, *então* $\left(-1,\frac{1}{2}\right) \cap [0,1) = \left[0,\frac{1}{2}\right)$ *é um aberto em* $[0,1)$.

Proposição 2.1. *Sejam* (M,d) *e* (M,d') *espaços métricos, para que* d *e* d' *definam a mesma topologia, é necessário e suficiente que sejam equivalentes.*

Demonstração: Sunponha que d e d' definam a mesma topologia τ. Assim, (M,d) e (M,d') possuem os mesmos abertos. Como em espaços métricos, toda bola aberta é um conjunto aberto, vide Proposição 1.9, dado $\epsilon > 0$ e $x \in M$, $B_d(x,\epsilon)$ é aberto em (M,d) e (M,d'). Por definição existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{d'}(x,\delta) \subset B_d(x,\epsilon).$$

Analogamente, $B_{d'}(x,\epsilon)$ é aberto em (M,d') e (M,d), logo existe $\delta' > 0$ tal que

$$B_d(x,\delta') \subset B_{d'}(x,\epsilon).$$

Portanto, as métricas são equivalentes. Reciprocamente, considere A aberto em (M,d) e seja $x \in A$, então existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_d(a,\epsilon_1) \subset A$. Da equivalência das métricas, temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{d'}(a,\delta) \subset B_d(a,\epsilon_1) \subset A \Rightarrow B_{d'}(a,\delta) \subset A.$$

Logo, A é aberto em (M,d'). Seja B um aberto em (M,d'), então dado $y \in B$ temos que existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $B_{d'}(a,\epsilon_2) \subset A$. Da equivalência, existe $\delta' > 0$ tal que

$$B_d(a,\delta') \subset B_{d'}(a,\epsilon_2) \subset A \Rightarrow B_d(a,\delta') \subset A.$$

Portanto, B é aberto é (M,d).

Definição 2.2. *Um espaço topológico é chamado metrizável quando é possível definir uma métrica d de tal forma que os abertos no espaço métrico gerado coincidam com os abertos do espaço topológico. Do contrário, o espaço é não metrizável.*

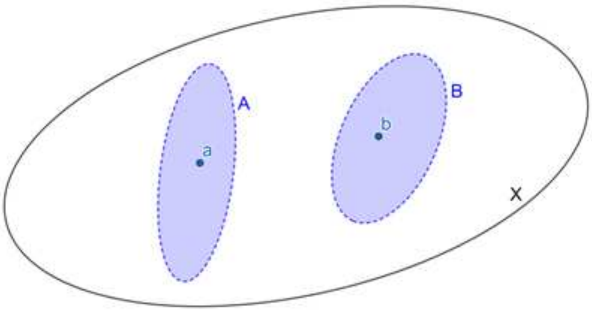
Exemplo 2.1.7. *Todo espaço métrico é um espaço topológico metrizável.*

Exemplo 2.1.8. *Um espaço topológico T munido da topologia discreta $\tau = \mathcal{P}(T)$ é um espaço metrizável.*

De certo, tomando a métrica zero-um, todos os subconjuntos de T serão abertos no espaço métrico (T,d_0), vide exemplo 1.6.2.

Definição 2.3. *Um espaço topológico X é um espaço de Hausdorff se para quaisquer dois pontos $x,y \in X$, com $x \neq y$, existem abertos $A,B \subset X$ tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \varnothing$.*

Figura 16 - Representação intuitiva de um espaço de Hausdorff.



Fonte: o autor.

Exemplo 2.1.9. *Seja (M,d) um espaço métrico, então M é um espaço de Hausdorff.*

Sejam $x,y \in M$, com $x \neq y$, tomando $\epsilon = \frac{d(x,y)}{2} > 0$, $A = B(x,\epsilon)$ e $B = B(y,\epsilon)$, temos que A e B são abertos em M, pela proposição 1.9, que contém, respectivamente, x e y com $A \cap B = \varnothing$. De fato, se existisse $a \in B(x,\epsilon) \cap B(y,\epsilon)$,

$$d(x,a) < \epsilon = \frac{d(x,y)}{2} \Rightarrow d(x,a) < \frac{d(x,y)}{2}; \tag{8}$$

$$d(y,a) < \epsilon = \frac{d(x,y)}{2} \Rightarrow d(y,a) < \frac{d(x,y)}{2}. \tag{9}$$

Somando (8) e (9), obtemos

$$d(x,a) + d(y,a) < \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(x,y)}{2} = d(x,y).$$

Das propriedades de métrica, $d(x,y) \leq d(x,a) + d(y,a) < d(x,y)$, que é um absurdo. Portanto, $B(x,\epsilon) \cap B(y,\epsilon) = \varnothing$.

Exemplo 2.1.10. *O espaço topológico* (T,τ)*, munido da topologia* $\tau = \{T,\varnothing\}$ *não é um espaço de Hausdorff, consequentemente não é metrizável.*

Certamente, sabemos que o único aberto deste espaço que contém x é o próprio T, mas também é o único que contém y, então não existe abertos disjuntos contendo x e y, respectivamente.

2.2 Ponto Interior, Vizinhança, Conjunto Aberto e Ponto de Fronteira

Definição 2.4. *Seja* S *um subconjunto do espaço topológico* X*. Um ponto* $x \in S$ *é interior de* S *quando existe um aberto* A *de* X *tal que* $x \in A \subset S$*. O conjunto dos pontos interiores de* S *é chamado de interior de* S *e denotado por* $int(S)$*.*

Proposição 2.2. *O interior de um subconjunto* S *num espaço topológico* X*, é a união de todos os subconjuntos abertos de* X *que estão contidos em* S*.*

Demonstração: Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de abertos de X tal que $A_\lambda \subset S$ e $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ a união arbitrária de todos eles, isso significa que $A \subset S$. Evidentemente, $x \in A$ implica que $x \in A_\lambda \subset S$, para algum $\lambda \in \Lambda$, logo $x \in int(S)$. Agora para cada $x \in int(S)$, existe um aberto A_x em X tal que $x \in A_x \subset S$, então $x \in \bigcup_{x\in int(S)} A_x \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, isto é, $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Portanto, $int(S) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Corolário 2.1. S *é aberto em* X *se, e somente se,* $S = int(S)$*.*

Demonstração: Seja S um conjunto aberto em X, que por sua vez é aberto em S, então $S \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ e pela proposição 2.2, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda = int(S)$, logo $S \subset int(S)$. Como $int(S) \subset S$ por definição, $S = int(S)$. Reciprocamente, pela proposição 2.2, $int(S) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$, logo $int(S) = S$ é aberto em X pois é uma união de abertos.

Definição 2.5. *Seja* X *um espaço topológico. Um conjunto* V *é uma vizinhança de* $x \in X$ *se* V *contém um aberto que contém* x*, isto é, se* $x \in int(V)$*. Denotaremos por* V_x*.*

Exemplo 2.2.1. *Toda bola aberta com centro em* x *num espaço métrico* (M,d) *é uma vizinhança de* $x \in M$*.*

Deveras, como toda bola aberta é um conjunto aberto em (M,d), dado $\epsilon > 0$, para todo $y \in B(x,\epsilon)$, y é ponto interior de $B(x,\epsilon)$. Portanto, toda bola aberta centrada em x é uma vizinhança de x.

Corolário 2.2. *Um conjunto A é aberto em um espaço topológico X se, e somente se, é uma vizinhança de cada um dos seus pontos.*

Demonstração: Seja A um conjunto aberto em X, sabemos que $A = int(A)$, vide corolário 2.1. Então todo ponto de A pertence ao seu interior, isto é, A é uma vizinhança de todos os seus pontos. Reciprocamente, suponha que A seja uma vizinhança em X de todos os seus pontos, ou seja, para todo $x \in A$, $x \in int(A)$, isto implica que $A = int(A)$, logo A é aberto em X.

Definição 2.6. *A fronteira de um subconjunto S de um espaço topológico X é o conjunto $fr(S)$ formado por todos os pontos $x \in X$ tais que toda vizinhança de x contem pontos de S e do complementar $X - S$. Dessa forma, é equivalente dizer que $x \in fr(S)$ se x não é ponto interior de S nem de $X - S$.*

Exemplo 2.2.2. *Num espaço métrico (M,d), x é ponto de fronteira de $S \subset M$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, $B_d(x,\epsilon) \cap S \neq \varnothing$ e $B_d(x,\epsilon) \cap (M - S) \neq \varnothing$.*

2.3 Sequências

Definição 2.7. *Seja X um espaço topológico. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X converge para $a \in X$ se, e somente se, para toda vizinhança V_a em X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in V_a$.*

Exemplo 2.3.1. *Num espaço topológico munido da topologia discreta, se uma sequência é convergente, então ela é estacionária.*

Com efeito, seja (x_n) uma sequência de pontos do espaço topológico X que converge para $p \in X$, temos que para toda vizinhança V de p em X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$. Como todo subconjunto é aberto, tome $V = \{p\}$, logo, para $n > n_0$, $x_n \in \{p\}$. Ou seja, $x_n = p$. Portanto, a sequência é estacionária.

Proposição 2.3. *Seja (x_n) uma sequência convergente em X, sendo X um espaço de Hausdorff, então o limite da sequência é único.*

Demonstração: Suponha que $x_n \longrightarrow p$ e $x_n \longrightarrow q$, com $p \neq q$. Seja V_p e V_q vizinhanças em X, tais que $V_p \cap V_q$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; \ n > n_0 \Rightarrow x_n \in V_p.$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \ ; \ n > n_1 \Rightarrow x_n \in V_q.$$

Logo, para $n > n_2 = \max\{n_0,n_1\}$, temos $x_n \in V_p \cap V_q$. Isto é, para toda vizinhança V_p e V_q, existe um índice $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $V_p \cap V_q \neq \varnothing$, contrariando o fato de ser um espaço de Hausdorff. Portanto, em espaços de Hausdorff, o limite de uma sequência é único.

Exemplo 2.3.2. *Num espaço topológico munido da topologia trivial, toda sequencia converge é convergente e converge para todo ponto do espaço.*

De certo, seja (x_n) uma sequência de pontos do espaço topológico (X,τ), com $\tau = \{\varnothing,X\}$. Dada uma vizinhança V de a em X, temos que $a \in A \subset V$, em que A é aberto, mas pela topologia dada, $A = X$, logo, $V = X$. Então para toda vizinhança V, tome $n_0 = 1$, $n > n_0 = 1 \Rightarrow x_n \in X = V$. Portanto, toda sequência (x_n) converge para todo ponto de X.

Observe que é possível mostrar que este espaço não é metrizável, pois contraria o teorema 2.3.

2.4 Conjunto Fechado, Ponto Aderente e de Acumulação

Definição 2.8. *Um subconjunto F de um espaço topológico X diz-se fechado quando seu complementar $F^c = X - F$ é aberto.*

Assim, num espaço topológico qualquer (T,τ), dado $A \in \tau$, $A^c = T - A$ é um conjunto fechado.

Proposição 2.4. *Os subconjuntos fechados de um espaço topológico X possuem as seguintes propriedades:*

1. *$\varnothing$ e X são fechados;*
2. *A interseção arbitrária de conjuntos fechados em X é fechada em X;*
3. *A união finita de conjuntos fechados em X é fechada em X.*

Demonstração:

1. Decorre diretamente da definição de fechado por complementar de aberto, como o $\varnothing$ e X são complementares um do outro, são fechados.

2. Dada uma família qualquer $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos fechados em X, temos que cada $A_\lambda = X - F_\lambda$ será aberto em X. Logo a reunião

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X - F_\lambda) = X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$$

é aberta e o complementar será fechado. Portanto, a interseção arbitrária $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ é fechada.

3. Sejam $F_1,\ldots,F_n$ conjuntos fechados, temos que cada $A_i = X - F_i$, com $i = 1,\ldots,n$, são conjuntos abertos em X, logo a interseção finita

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}^{n} A_i = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}^{n} (X - F_i) = X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda}^{n} F_i$$

é aberta, ou seja, o complementar $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}^{n} F_i$ é fechado.

Definição 2.9. *Seja S um subconjunto de um espaço topológico X. Um ponto $x \in X$ diz-se aderente a S quando toda vizinhança de x em X contém pelo menos um ponto de S. O conjunto dos pontos de X que são aderentes a S chama-se fecho de S e indica-se com a notação $\overline{S}$.*

Observe que, dado um ponto $x \in S$ e V uma vizinhança de x em X, é válido que $V \cap S \neq \varnothing$, pois x pertence a essa interseção. Por consequência, todos os pontos de S serão aderentes a S, isto é, $S \subset \overline{S}$.

Outra forma de interpretar a definição de ponto de aderência é tomando todo aberto, já que todo aberto é uma vizinhança de seus pontos, vide corolário 2.2. Assim, $x \in \overline{S}$ se, e somente se, para todo aberto A de X contendo x, $A \cap S \neq \varnothing$, ou seja, $A \not\subseteq X - S$. Então para que $x \in \overline{S}$ é necessário e suficiente que $x \notin int(X - S)$.

Exemplo 2.4.1. *Em $\mathbb{R}$, o fecho do conjunto dos pontos da sequência (x_n), com $x_n = \frac{1}{n}$, é $\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, pois, para toda vizinhança V_0 em $\mathbb{R}$, $V_0 \cap \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$.*

Exemplo 2.4.2. *Em $\mathbb{R}$, temos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, para toda vizinhança V_x em $\mathbb{R}$, $V_x \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$, pois $\mathbb{Q}$ é um conjunto denso nos $\mathbb{R}$, a demonstração desta informação pode ser encontrada em [3].

Exemplo 2.4.3. *Seja (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$. O ponto $p \in M$ é aderente ao conjunto X se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, $B_d(p,\epsilon) \cap X \neq \varnothing$.*

Proposição 2.5. *O fecho de um subconjunto S num espaço topológico X é a interseção de todos os subconjuntos fechados de X que contem S.*

Demonstração: Seja $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ a família de todos os fechados de X tal que $S \subset F_\lambda$ e $F = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ a interseção arbitrária de todos eles, então $S \subset F$. Evidentemente, cada $X - F_\lambda$ é aberto em $X - S$ e $X - F = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(X - F_\lambda) = int(X - S)$. Pela definição $x \in X$ é ponto aderente quando $x \notin int(X - S)$, logo o conjunto dos pontos aderentes é formado por todos os pontos de X que não pertencem ao $int(X - S)$:

$$\overline{S} = X - int(X - S) = X - (X - F) = F.$$

Portanto, $\overline{S} = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$.

Corolário 2.3. *$F \subset X$ é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.*

Demonstração: De fato, seja $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ a família de todos os fechados de X, com $F \subset F_\lambda$, pela proposição 2.5 sabemos que $\overline{F} = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$. Como F é um conjunto fechado de X, temos que $F = F_\lambda$, para algum $\lambda \in \Lambda$. Logo $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = F$. Logo, $\overline{F} = F$. Reciprocamente, supondo que $F = \overline{F}$, pela proposição 2.5 temos que $\overline{F} = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$, portanto F é fechado pois é uma interseção de fechados.

Definição 2.10. *Seja S um subconjunto de um espaço topológico X. Um ponto $x \in X$ chame-se ponto de acumulação de S quando toda vizinhança V de x em X contem algum ponto $s \in S$, tal que $s \neq x$. O conjunto dos pontos de acumulação de S chama-se derivado de S e denota-se por S'.*

Exemplo 2.4.4. *Em $\mathbb{R}$, o derivado do conjunto dos pontos da sequência (x_n), com $x_n = \frac{1}{n}$, é $\{0\}$, pois, para toda vizinhança V_0 em $\mathbb{R}$, $V_0 \cap \{x_n\} \neq \varnothing$, vide exemplo 2.4.1.*

Exemplo 2.4.5. *Em $\mathbb{R}$, temos que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.*

Certamente, dado $x \in \mathbb{R}$, para toda vizinhança V_x em $\mathbb{R}$, $V_x \cap (\mathbb{Q} - \{x\}) \neq \varnothing$, pois $\mathbb{Q}$ é um conjunto denso nos $\mathbb{R}$, vide exemplo 2.4.2.

Exemplo 2.4.6. *Seja X um subconjunto do espaço métrico (M,d), $x \in X'$ se para toda bola aberta com centro em x, $B_d(x,\epsilon) \cap (X - \{x\}) \neq \varnothing$.*

Proposição 2.6. *Seja X um espaço topológico. Para todo subconjunto $S \subset X$, tem-se $\overline{S} = S \cup S'$.*

Demonstração: Seja S um subconjunto de X, temos que $S \cup S' \subset \overline{S}$ decorre diretamente da definição de ponto aderente e de acumulação. Agora seja $x \in \overline{S}$, para toda vizinhança V_x em X, $V_x \cap S \neq \varnothing$. Dito isto temos duas possibilidades,

$$x \in S \Rightarrow x \in S \cup S'$$

ou

$$x \notin S \Rightarrow \exists s \in S,\ s \neq x\ ;\ s \in V_x \Rightarrow s \in S' \Rightarrow x \in S \cup S'.$$

Portanto, $\overline{S} = S \cup S'$.

Corolário 2.4. *Um conjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, $F' \subset F$.*

Demonstração: Seja $F \subset X$ um conjunto fechado, sabemos que $F = \overline{F}$ e, pela Proposição 2.6, $\overline{F} = F \cup F'$. Assim,

$$F = F \cup F' \Rightarrow F' \subset F.$$

Reciprocamente, suponha que $F' \subset F$, juntamente com a Proposição 2.6, temos que $\overline{F} = F \cup F' = F$. Portanto, F é fechado.

Observação 2. *Os conjuntos apresentados nos exemplos 2.4.1 e 2.4.4, assim como 2.4.2 e 2.4.5, ilustram a proposição.*

2.5 Continuidade e Homeomorfismo

Definição 2.11. *Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$, sendo X e Y espaços topológicos, diz-se contínua quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subset Y$ for um aberto em X.*

Provaremos na próxima proposição que a definição acima é consistente com a definição de continuidade dada nos espaços métricos

Proposição 2.7. *Sejam (M,d) e (N,d') espaços métricos, $f : (M,d) \longrightarrow (N,d')$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(A) = \{x \in M; f(x) \in A\}$ é aberto em (M,d) para todo aberto $A \subset N$.*

Demonstração: Dado $a \in f^{-1}(A)$, então $f(a) \in A$. Como A é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{d'}(f(a),\epsilon) \subset A$. Além disso, da continuidade de f, segue que para esse ϵ, existe $\delta > 0$ de forma que

$$x \in B_d(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in B_{d'}(f(a),\epsilon) \subset A \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(A).$$

Isto é $B_d(a,\delta) \subset f^{-1}(A)$. Portanto, $f^{-1}(A)$ é aberto. Reciprocamente, suponha que $f^{-1}(A)$ é aberto em X, para todo aberto A em Y. Assim, dado $a \in M$ e dado $\epsilon > 0$, considerando $A = B_{d'}(f(a),\epsilon)$ temos $a \in f^{-1}(A)$. Como $f^{-1}(A)$ é aberto, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_d(a,\delta) \subset f^{-1}(A) \Rightarrow f(B_d(a,\delta)) \subset A = B_{d'}(f(a),\epsilon).$$

Logo,

$$x \in B_d(a,\delta) \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A = B_{d'}(f(a),\epsilon).$$

Portanto, f é contínua em a.

Proposição 2.8. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos. A composta $g \circ f : X \longrightarrow Z$ de duas aplicações contínuas $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ é contínua.*

Demonstração: Como g é contínua, para todo aberto B em Z, $g^{-1}(B) = \{y \in Y; g(y) \in B\}$ é aberto. Da continuidade de f, a imagem inversa de todo aberto é aberta, particularmente, $f^{-1}(g^{-1}(B)) = (g \circ f)^{-1}(B)$ é aberta. Portanto, $g \circ f$ é contínua.

Corolário 2.5. *Sejam $M,M_1,\ldots,M_n$ espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow M_1 \times \cdots \times M_n$, com $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$ é contínua no ponto $a \in M$ se, se somente se, cada $f_i : M \longrightarrow M_i$ é contínua no ponto a.*

Demonstração: Seja $p_i : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow M_i$ a função projeção, com $p_i(x) = x_i$, temos que $f_i = p_i \circ f$. Logo, se f é contínua em $a \in M$, então f_i também será contínua em a, pois é a composta de funções contínuas. Reciprocamente, suponha que $f_1,\ldots,f_n$ são funções contínuas em a. Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existem $\delta_1,\ldots,\delta_n$ tais que

$$d(x,a) < \delta_i \Rightarrow d(f_i(x),f(a)) < \epsilon, \ i = 1,\ldots,n.$$

Utilizando a métrica do máximo, tome $\delta = \min\limits_{1 \le i \le n} \{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$, então

$$d(f(x),f(a)) = \max\{d(f_i(x),f(a)), \ i = 1,\ldots,n\} < \epsilon.$$

Portanto, f é contínua em a.

Note que, pela proposição 2.1, esta demonstração vale para todas as métricas que são equivalentes a métrica do máximo, como a euclidiana e do taxista.

Proposição 2.9. *Dadas as topologias τ e τ' num espaço topológico X. Para que $\tau' \subset \tau$ é necessário e suficiente que a aplicação identidade $i : (X,\tau) \longrightarrow (X,\tau')$ seja contínua.*

Demonstração: Suponha que $\tau' \subset \tau$ e seja B um aberto em (X,τ'). Como $i^{-1}(B) = B \in \tau'$ segue que $i^{-1}(B) \in \tau$ para todo $B \subset \tau'$, ou seja i é contínua. Agora, na recíproca, temos que i é contínua, então $i^{-1}(B)$ é aberto em (X,τ) para todo aberto B em (X,τ'). Isto é, para todo $B \in \tau'$, $i^{-1}(B) = B \in \tau$. Portanto, $\tau' \subset \tau$.

Proposição 2.10. *Sejam X e Y espaços topológicos. Para que uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(F)$ de todo conjunto fechado $F \subset Y$ seja um subconjunto fechado em X.*

Demonstração: Seja f uma função contínua, temos que $f^{-1}(A)$ é aberto em X, para todo aberto A em Y. Seja $F = X - A$, temos que F é fechado em Y. Então,

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(X - F) = X - f^{-1}(F),$$

vide referência [4], é um aberto em X. Logo $f^{-1}(F)$ é fechado em X. Reciprocamente, suponha que $f^{-1}(F)$ é fechado em X, para todo F fechado em Y, tomando $A = X - F$ aberto em Y, obtemos

$$X - f^{-1}(F) = X - f^{-1}(X - A) = X - \Big(X - f^{-1}(A)\Big) = f^{-1}(A)$$

aberto em X, para todo aberto A em Y.

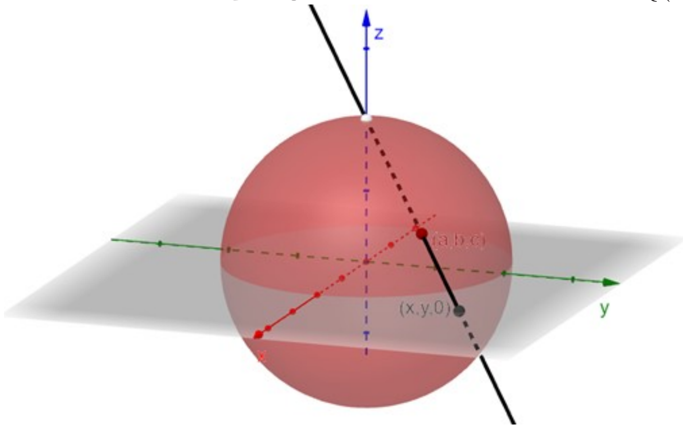
Portanto, f é contínua.

Definição 2.12. *Um homeomorfismo $h : X \longrightarrow Y$, de um espaço topológico X sobre um espaço topológico Y é uma aplicação contínua e biunívoca de X sobre Y, cuja inversa $h^{-1} : Y \longrightarrow X$ também é contínua.*

Exemplo 2.5.1. *A esfera menos o "polo norte": $S^2 - \{(0,0,1)\}$ é homeomorfa ao plano $\mathbb{R}^2$, em que $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.*

Demonstração: A imagem a seguir ilustra a situação, sendo $(a,b,c) \in S^2 - \{(0,0,1)\}$.

Figura 17 - Representaçao geométrica da esfera $S^2 - \{(0,0,1)\}$.



Fonte: o autor.

Mostraremos que a função

$$\begin{aligned} h: S^2 - \{(0,0,1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. Note que h é contínua, pois suas funções coordenadas $h_1, h_2 : S^2 - \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $h_1(x,y,z) = \frac{x}{1-z}$ e $h_2(x,y,z) = \frac{y}{1-z}$ são contínuas, pois os pontos de $\mathbb{R}^3$ em que $z = 1$ não pertencem ao domínio, vide corolário 2.5.

Provaremos agora que existe a inversa h^{-1} e que esta é contínua. Considere a função

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2 - \{(0,0,1)\} \\ (x,y) &\longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right). \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} g(h(x,y,z)) &= g\left(\frac{x}{z-1}, \frac{y}{z-1}\right) \\ &= \left(\frac{2 \cdot \dfrac{x}{1-z}}{\left(\dfrac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{1-z}\right)^2 + 1}, \frac{2 \cdot \dfrac{y}{1-z}}{\left(\dfrac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{1-z}\right)^2 + 1}, \frac{\left(\dfrac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{1-z}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{1-z}\right)^2 + 1}\right) \\ &= \left(\frac{2x(1-z)}{x^2+y^2+(1-z)^2}, \frac{2y(1-z)}{x^2+y^2+(1-z)^2}, \frac{x^2+y^2-(1-z)^2}{x^2+y^2+(1-z)^2}\right) \\ &= \left(\frac{2x(1-z)}{x^2+y^2+z^2+1-2z}, \frac{2y(1-z)}{x^2+y^2+z^2+1-2z}, \frac{x^2+y^2-1+2z-z^2}{x^2+y^2+z^2+1-2z}\right) \\ &= \left(\frac{2x(1-z)}{2-2z}, \frac{2y(1-z)}{2-2z}, \frac{2z-2z^2}{2-2z}\right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2x(1-z)}{2(1-z)}, \frac{2y(1-z)}{2(1-z)}, \frac{2z(1-z)}{2(1-z)} \right)$$
$$= (x,y,z).$$

Além disso, obtemos

$$\begin{aligned} h\left(g(x,y)\right) &= h\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{2x}{x^2+y^2+1}}{1-\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}}, \frac{\frac{2y}{x^2+y^2+1}}{1-\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{2x}{x^2+y^2+1}}{\frac{2}{x^2+y^2+1}}, \frac{\frac{2y}{x^2+y^2+1}}{\frac{2}{x^2+y^2+1}} \right) \\ &= (x,y). \end{aligned}$$

Logo, a função g é a inversa de h, podendo ser denotada por h^{-1}. Note que h^{-1} é contínua, pois suas funções coordenadas são funções contínuas. Portanto, a esfera $S^2 - \{(0,0,1)\}$ é homeomorfa ao plano $\mathbb{R}^2$.

3 CONJUNTOS COMPACTOS

Definição 3.1. *Sejam X um espaço topológico e S um subconjunto de X. Uma coleção $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ formada por subconjuntos de X é uma cobertura de S quando $S \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, ou seja, para cada $s \in S$, existe um índice $\lambda \in \Lambda$ tal que $s \in C_\lambda$. Tome o conjunto $\Lambda_0 \subset \Lambda$. Dizemos que a subcoleção $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_0}$ é uma subcobertura de S se $S \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} C_\lambda$.*

Uma cobertura é aberta se os subconjuntos que a compõe são abertos. Analogamente, uma cobertura é fechada se os subconjuntos são fechados.

Já a cardinalidade da cobertura depende do conjunto ao qual os índices pertencem. Se Λ for finito, enumerável ou não enumerável a cobertura também o será.

Definição 3.2. *Seja $K \subseteq X$, sendo X é um espaço topológico. O conjunto K é compacto se para toda cobertura $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ por abertos de X, existir uma subcobertura finita, ou seja, existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$, de tal forma que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_{\lambda_i}$.*

Considerando um espaço compacto, uma forma de analisar esta definição é tomar os complementares de cada C_λ. Dessa forma, $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma cobertura por abertos de X se, e somente se, $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, com $F_\lambda = X - C_\lambda$, forma uma família de fechados em X, com $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \varnothing$.

Por consequência, para que X seja compacto é necessário e suficiente que para toda família $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos fechados em X, cuja interseção $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \varnothing$, contém uma subfamília finita $\{F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n}\}$ com a interseção $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} = \varnothing$.

Dizemos que uma família possui a propriedade de interseção finita quando toda família finita $\{F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n}\}$ possui a interseção $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} \neq \varnothing$. Logo, X é compacto se, e somente se, toda família que possui a propriedade de interseção finita tem a interseção $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \varnothing$.

Exemplo 3.0.1. *Todo espaço topológico X finito é compacto.*

Deveras, como o espaço é finito, a cardinalidade dele é igual a algum $n \in \mathbb{N}$, isto é $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Logo, dada uma cobertura $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ por abertos de X, basta tomar uma subcobertura tal que $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2, \ldots, x_n \in C_n$, assim $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Portanto X é compacto.

Exemplo 3.0.2. $\mathbb{R}$ *não é compacto.*

Com efeito, a cobertura $\mathcal{C} = \{(-n,n); n \in \mathbb{N}\}$, esta não possui subcobertura finita, pois para todo n natural, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > n$.

Exemplo 3.0.3. *Um espaço topológico X infinito e munido da topologia discreta não é compacto.*

De certo, já que todo subconjunto de X é aberto, vide exemplo 2.1.4, podemos tomar a cobertura aberta $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, cujo $C_\lambda = \{x\}$, para cada $x \in X$, a qual não possui subcobertura finita.

Proposição 3.1. *Sejam K e L subconjuntos compactos de um espaço topológico X, então $K \cup L$ é compacto.*

Demonstração: Sejam K e L conjuntos compactos e $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura aberta de $K \cup L$, temos que $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma cobertura de K e de L, da compacidade de ambos, existem subcoberturas finitas tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} C_{\lambda_i}$ e $L \subset \bigcup_{j=1}^{l} C_{\lambda_j}$. Assim, temos que

$$K \cup L \subset \left(\bigcup_{i=1}^{k} C_{\lambda_i} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} C_{\lambda_j} \right),$$

então $K \cup L$ é compacto.

Proposição 3.2. *Num espaço compacto, todo subconjunto infinito possui um ponto de acumulação.*

Demonstração: Seja K um espaço compacto e suponha por absurdo que existe um subconjunto infinito X que não possui ponto de acumulação. Sendo infinito, X contém um subconjunto enumerável $F = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ que também não possui ponto de acumulação. Segue da proposição 2.6 que $\overline{F} = F \cup F'$, mas $F' = \varnothing$, então $\overline{F} = F$ implicando que F é fechado em K. Assim, a família $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de fechados, com $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, possui a propriedade de interseção finita, de fato, para toda subfamília $\{F_{N_1}, \ldots, F_{n_k}\}$ com $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, temos $\bigcap_{i=1}^{k} F_{n_i} = F_{n_k}$. Entretanto, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \varnothing$ por construção, logo K não é compacto, contrariando a hipótese. Portanto, todo subconjunto infinito possui um ponto de acumulação.

Proposição 3.3. *Todo subconjunto fechado F de um espaço compacto X é compacto.*

Demonstração: Seja $F \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ uma cobertura de F por abertos $C_\lambda \subset X$. Como X é compacto e $\{C_\lambda\} \cup A$, com $A = X - F$, é uma cobertura por abertos para X, então existe uma subcobertura finita $X \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{\lambda_i} \right) \cup A$. Já que F não está contido em A, temos que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_{\lambda_i}$. Portanto, F é compacto.

Proposição 3.4. *Seja X um espaço de Hausdorff. Todo subconjunto compacto $K \subset X$ é fechado em X.*

Demonstração: Seja $x \in X - K$, pela definição de Hausdorff, para cada $y \in K$ existem abertos A_y contendo x e B_y contendo y, tais que $A_y \cap B_y = \varnothing$. Assim, obtemos uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{y \in K} B_y$, a qual possui uma subcobertura finita $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}$. Além disso, $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_{y_i}$ é um aberto contendo x, com $A \cap K = \varnothing$, ou seja, $A \subset X - K$, concluindo assim que $x \in int(X - K)$. Portanto, $X - K$ é aberto, isto é, K é fechado em X.

Proposição 3.5. *Seja (M,d) um espaço métrico, $K \subset M$ é compacto, então K é limitado e fechado.*

Demonstração: Seja K um subconjunto compacto do espaço métrico (M,d). Para cada $x \in K$, seja $C_x = B(x,1)$. Assim, $K \subset \bigcup_{x \in K} C_x$ é uma cobertura para K. Da compacidade de K, existe uma subcobertura finita $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_{x_i}$, com $x_1, \ldots, x_n \in K$. Dados $y,z \in K$, sabemos que $y \in C_{x_i}$ e $z \in C_{x_j}$, para algum $i,j = 1, \ldots, n$. Dessa forma, seja $k = \max_{2 \leq i \leq n}\{d(x_1,x_i)\}$,temos que

$$
\begin{aligned}
d(y,z) &\leq d(y,x_1) + d(x_1,z) \\
&\leq (d(y,x_i) + d(x_i,x_1)) + (d(x_1,x_j) + d(x_j,z)) \\
&< (1 + k) + (k + 1) = 2k + 2
\end{aligned}
$$

Portanto, K é limitado por $2k + 2$. Como todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff, pela proposição 3.4, segue que K é fechado em (M,d)

Observação 3. *A recíproca da proposição 3.5 não é válida, como contra exemplo podemos enunciar o espaço métrico $(\mathbb{R},d_0)$, em que d_0 é a métrica zero-um, que, apesar de ser fechado e limitado, não é compacto, pois é um conjunto infinito e a métrica zero-um induz uma topologia discreta, vide exemplos 1.4.2, 2.1.8 e 3.0.3.*

Proposição 3.6. *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Demonstração: Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dado um subconjunto compacto $K \subset X$, seja $f(K) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ uma cobertura por abertos contida em Y. Da continuidade de f, os conjuntos $f^{-1}(C_\lambda)$ constituem uma cobertura aberta do compacto K, então existe uma subcobertura finita $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(C_{\lambda_i})$. Assim, pela definição de imagem inversa, $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_{\lambda_i}$. Portanto, $f(K)$ é compacto.

Corolário 3.1. *Toda aplicação contínua $f : K \longrightarrow Y$ de um espaço compacto K num espaço de Hausdorff Y é fechada, ou seja, a imagem de todo fechado em K é fechada em Y.*

Demonstração: Deveras, tome F um subconjunto fechado de K. Da proposição 3.3 temos que F é compacto. Pela proposição 3.6, $f(K) \subset Y$ é um conjunto compacto. Finalmente, pela proposição 3.4, $f(K)$ é fechado.

Proposição 3.7. *Toda função real contínua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num espaço compacto K, é limitada e atinge os seus extremos. Isto é, existem pontos $x_0,\ x_1 \in K$ tais que $f(x_0) = \inf\{f(x); x \in K\}$ e $f(x_1) = \sup\{f(x); x \in K\}$.*

Demonstração: Da proposição 3.6, temos que $f(K) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto nos reais, logo é fechado e limitado, vide proposição 3.5. Da limitação temos que existe $\inf(f(K))$ e $\sup(f(K))$. Além disso, como é fechado, então $\inf(f(K)), \sup(f(K)) \in f(K)' \subset f(K)$, vide corolário 2.4. Logo, existem $x_0,\ x_1 \in K$ tais que $f(x_0) = \inf(f(K))$ e $f(x_1) = \sup(f(K))$.

Proposição 3.8. *Toda aplicação $f : K \longrightarrow Y$, contínua e biunívoca, de um espaço compacto K sobre um espaço de Hausdorff Y é um homeomorfismo.*

Demonstração: Pelo corolario 3.1 sabemos que $f(F)$ é um conjunto fechado para todo fechado em $F \subset K$, logo pela proposição 2.10, temos que f^{-1} é contínua. Portanto, f é um homeomorfismo.

4 CONJUNTOS CONEXOS

Definição 4.1. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é conexo quando os únicos subconjuntos de X abertos e fechados simultaneamente são $\varnothing$ e X.*
No caso de um espaço topológico não ser conexo, ele é denominado desconexo.

Exemplo 4.0.1. *Todo espaço topológico munido da topologia discreta é desconexo.*

De fato, todos os subconjuntos deste espaço são abertos, inclusive os complementares, então são abertos e fechados, vide exemplo 2.1.4.

Exemplo 4.0.2. $\mathbb{R}-\{0\}$ *é desconexo.*

Certamente, note que $(-\infty,0)$ e $(0,\infty)$ são conjuntos abertos em $\mathbb{R}-\{0\}$. Além disso, $(-\infty,0)^c=(0,\infty)$, logo ambos são abertos e fechados.

Proposição 4.1. *Para que um subconjunto não vazio e não unitário $I\subset\mathbb{R}$ seja conexo é necessário e suficiente que I seja um intervalo.*

Demonstração: Seja I um intervalo da reta com extremos a e b. Suponha que I seja desconexo, logo existe um subconjunto $S\neq\varnothing$ e $S\neq I$ tal que S é aberto e fechado. Como S é aberto, dado $c\in S$ temos que $c\in int(S)$, então podemos considerar o intervalo $(r,s)\subset S$, de forma que $c\in(r,s)$. Seja $b'=\sup\{t\in I;(r,t)\subset S\}$ e $a'=\inf\{t\in I;(t,s)\subset S\}$. Assim $(a',b')\subset S$. Mas S é fechado, logo $a',b'\in S'\subset S$. Além disso, S é aberto, o que implica em $a',b'\in int(S)$, então existem $\epsilon,\delta>0$ tal que $(a'-\delta,s)\subset S$ e $(r,b'+\epsilon)\subset S$, contrariando a definição de supremo e ínfimo. Portanto, I é conexo. Reciprocamente, seja I um conjunto conexo da reta, suponha que I não é um intervalo, então existem $a,b\in I$ e $c\notin I$ de modo que $a<c<b$. Dessa forma, sejam $G=(-\infty,c)\cap I$ e $H=(c,\infty)\cap I$ abertos em I, temos que $I-G=H$. Portanto, G e H não vazios e diferentes de I, pois $a\in G$ e $b\in H$, são abertos e fechados, contrariando a hipótese, significando que I é um intervalo.

Note que a demonstração é valida para qualquer que seja o intervalo da reta, incluido $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Portanto, a reta é conexa.

Proposição 4.2. *Um espaço topológico X é desconexo se, e somente se, existem $A,B\subset X$ abertos e não vazios tais que $A\cap B=\varnothing$ e $A\cup B=X$.*

Demonstração: Como X é desconexo, então existe $A \subset X$ de forma que A é aberto e fechado, isto é, A é aberto e A^c também é aberto, além disso $A \cap A^c = \varnothing$ e $A \cup A^c = X$. Portanto, existe A e $B = A^c$, tais que $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = X$. Na recíproca, temos que $A^c = B$ é aberto e $B^c = A$ é aberto. Assim existem $A,B \neq \varnothing$ e $A,B \neq M$ abertos e fechados. Ou seja X é desconexo.

Proposição 4.3. *Seja X um espaço topológico e $S \subset X$ um conjunto conexo. Se $f : X \longrightarrow Y$ é contínua, então $f(S)$ é um conjunto conexo.*

Demonstração: Sumponha que $f(S)$ não seja conexo, então existe $A \subset f(S)$ aberto e fechado tal que $A \neq \varnothing$ e $A \neq f(S)$. Da continuidade de f, $f^{-1}(A)$ é aberto. Mas A^c é aberto também, logo $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$ é aberto. Assim, $f^{-1}(A) \subset S$ é aberto e fechado, então S não seria conexo, contrariando a hipótese. Portanto, $f(S)$ é conexo.

Corolário 4.1. *Seja X um espaço topológico e conexo. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(X)$ é um intervalo.*

De fato, da proposição acima temos que $f(X) \subset \mathbb{R}$ é conexo, portanto é um intervalo.

Corolário 4.2. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$. Se $f(a) < c < f(b)$, então existe $x \in [a,b]$ de modo que $f(x) = c$.*

Certamente, como todo intervalo é conexo e f é contínua, $f([a,b])$ é conexo e, portanto, um intervalo. Isto é, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$.

Definição 4.2. *Um espaço topológico X é dito conexo por caminhos quando, dados dois pontos quaisquer $a,b \in X$, existe uma aplicação contínua $f : [0,1] \longrightarrow X$, chamada caminho, com $f(0) = a$ e $f(1) = b$, sendo a e b extremidades do caminho.*

Proposição 4.4. *Todo espaço topológico conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração: Seja X um espaço topológico conexo por caminhos e suponha por absurdo que X seja desconexo. Assim, existe $A \subset X$ não vazio, A e A^c são abertos em X. Tome $a \in A$ e $b \in A^c$, por hipótese existe um caminho $f : [a,b] \longrightarrow X$ contínuo de modo que $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Como f é contínua, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$ abertos em $[0,1]$. Assim temos que $0 \in f^{-1}(A)$ e $1 \in f^{-1}(A^c)$, logo $f^{-1}(A) \subset [0,1]$ é aberto e fechado, com $f^{-1}(A) \neq \varnothing$ e $f^{-1}(A) \neq [0,1]$, o que é um absurdo pois $[0,1]$ é conexo. Portanto, X é conexo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre espaços métricos e topológicos com o objetivo de adquirir um conhecimento introdutório sobre topologia geral. Abordamos diversos temas importantes como a topologia dos espaços métricos, continuidade de funções, convergência de sequências, espaços homeomorfos, espaços conexos e compactos.

Ademais, com o intuido de tornar os conceitos mais tangíveis ao entendimento e também como forte de exemplos, apresentamos inicialmente um estudo sobre as propriedade topológicas inerentes aos espaços métricos para, posteriormente, introduzir o conceito de espaços topológicos. Vale destacar também que neste trabalho foram apresentados diversos exemplos a cada definição e resultado proposto, dando um caráter pessoal e também elucidando os conceitos apresentados.

Por fim, pode-se notar a importância do estudo dos vários tópicos apresentados, não apenas para a construção de uma noção básica sobre espaços métricos, mas também para a compreensão da noção mais geral de espaços topológicos, sendo este um tema amplo que possui diversos resultados importantes para a área da Matemática Pura.

REFERÊNCIAS

[1] DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo, Editora Atual, 1982.

[2] HONORIO, Fernanda Loureiro. **Espaços Métricos e o Teorema do Valor Intermediário**. Orientador: Prof$^{\underline{o}}$. Dr$^{\underline{o}}$. Allan Edley Ramos de Andrade. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Campus de Três Lagoas, Três Lagoas/MS, 2022.

[3] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, Vol. 1. 15$^{\underline{a}}$ edição. Projeto Euclides. Rio de Janeiro:IMPA, 2022.

[4] LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. Textos universitarios. Rio de Janeiro: IMPA, 1970.

[5] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 2$^{\underline{a}}$ edição. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

[6] RAMTHUN, Cleison dos Santos. **Topologia dos Espaços Métricos**. Orientador: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Naiara Vergian de Paulo Costa. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2019.