

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CÂMPUS DE AQUIDAUANA

RODRIGO BENITES DOS SANTOS

ESPAÇOS TOPOLOGICOS METRIZÁVEIS

AQUIDAUANA
2025

RODRIGO BENITES DOS SANTOS

ESPAÇOS TOPOLOGICOS METRIZÁVEIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Câmpus de Aquidauana, como requisito para obtenção parcial do grau de Licenciado em Matemática, sob a coordenação do prof. Dr. Thales Fernando Vilamaior Paiva.

AQUIDAUANA
2025

FOLHA DE APROVAÇÃO

RODRIGO BENITES DOS SANTOS

ESPAÇOS TOPOLOGICOS METRIZAVEIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Câmpus de Aquidauana, como requisito para obtenção parcial do grau de Licenciado em Matemática, sob a coordenação do prof. Dr. Thales Fernando Vilamaior Paiva.

Resultado: Aprovado

Aquidauna, 28 de Novembro de 2025

BANCA EXAMINADORA

Thales F. V. Paiva

Prof. Dr. Thales fernando Vilamaior Paiva (UFMS)

Adriana Wagner

Profa. Dra. Adriana Wagner (UFMS)

Documento assinado digitalmente
gov.br OSMAR DO NASCIMENTO SOUZA
Data: 05/12/2025 09:57:32 -0300
Verifique em <https://validar.itd.gov.br>

Prof. Dr. Osmar do Nascimento Souza (UFMS)

Dedico este trabalho aos meus pais, Tatiane e Luiz, que sobe
muito sol, me fizeram-me chegar até aqui, na sombra.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por ter me dado forças e sabedoria durante toda essa caminhada acadêmica. Aos meus pais, que sempre acreditaram em mim e me apoiaram incondicionalmente, mesmo nos momentos mais difíceis. Seus conselhos, amor e dedicação foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. Sou imensamente grato por todo o esforço e sacrifício que fizeram para que eu pudesse realizar esse sonho. Agradeço também a todos os meus familiares, amigos e colegas que, de alguma forma, contribuíram com palavras de incentivo, apoio emocional ou ajuda prática durante o desenvolvimento deste trabalho. Ao meu orientador, que com paciência, dedicação e vasto conhecimento, me orientou ao longo desta pesquisa, sempre indicando o melhor caminho e incentivando meu desenvolvimento acadêmico. Por fim, agradeço a todos os professores da instituição, que contribuíram para minha formação acadêmica. A todos vocês, meu muito obrigado!

Até mesmo a menor das vozes pode mudar o curso do destino.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução aos principais critérios que caracterizam a metrizabilidade de espaços topológicos, destacando a relevância dos axiomas de separação e das bases enumeráveis na análise de quando uma topologia pode ser induzida por uma métrica. Apresentamos resultados clássicos de metrizabilidade, exemplos e aplicações. Ao final, discutimos condições suficientes para a metrizabilidade de espaços mais gerais.

Palavras-chave: Topologia geral; Bases; Espaços metrizáveis; Metrizabilidade.

ABSTRACT

This work presents an introduction to the main criteria that characterize the metrizability of topological spaces, highlighting the relevance of separation axioms and countable bases in determining when a topology can be induced by a metric. Classical results, examples and applications are presented, as well as sufficient conditions for the metrizability of more general spaces.

Keywords: Topology; Bases; Metrizable spaces; Metrizability.

LISTA DE SÍMBOLOS

$d(x, y)$	distância entre os pontos x e y .
\mathbb{R}^n	espaço euclidiano real de dimensão $n > 0$.
$\max\{\cdot\}$	função máximo.
$C(X)$	espaço das funções contínuas de X .
$\inf A$	ínfimo do conjunto A .
$\sup A$	supremo do conjunto A .
(X, d)	espaço métrico X com a métrica d .
$B_r(x)$	bola aberta de centro em x e raio $r > 0$.
$B_r[x]$	bola fechada de centro em x e raio $r > 0$.
(X, τ)	espaço topológico X , com topologia τ .
τ_d	topologia em um conjunto induzida por uma métrica d .
\overline{A}	fecho do conjunto A .
$\text{int}(A)$	interior do conjunto A .
$A \setminus B$	complementar do conjunto B em relação ao conjunto A .
(X, τ)	espaço topológico X equipado com a topologia τ .
T_i	axiomas de separação.
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$	sequência de termo geral x_n .
$x_n \rightarrow x$	convergência da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para o ponto x .
X^Y	espaço das funções de X em Y .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	3
2	ESPAÇOS MÉTRICOS	4
2.1	Definição e exemplos iniciais	4
2.2	Abertos e fechados	6
3	ESPAÇOS TOPOLOGICOS	11
3.1	Definição e exemplos iniciais	11
3.2	Bases	14
3.3	Axiomas de separação	15
3.4	Axiomas de enumerabilidade	17
3.5	Compactos	18
4	FUNÇÕES CONTÍNUAS	21
4.1	Definição e exemplos	21
4.2	Continuidade e sequências	23
4.3	Extensão de funções contínuas	24
4.4	Homeomorfismo e mergulho	27
4.5	Topologia produto	29
5	ESPAÇOS METRIZÁVEIS	33
5.1	Algumas obstruções	33
5.2	Mergulho de Urysohn	35
6	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos espaços topológicos e, em particular, das condições que garantem a sua metrizabilidade, ocupa lugar central na Topologia Geral. Como coloca (STEEN; SEEBACH; STEEN, 1978) em seu prólogo, a busca por condições necessárias e suficientes para a metrizabilidade de espaços topológicos é um dos problemas mais antigos e produtivos da topologia.

A noção de espaço métrico X , concebida a partir da definição de uma distância ou métrica (em X), que trata-de de uma função

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

satisfazendo condições bastante razoáveis (identidade, simetria e desigualdade triangular), possui forte apelo intuitivo e permite, dentre muitas questões teóricas, aplicar técnicas analíticas na investigação de propriedades topológicas. No entanto, desde as primeiras investigações é sabido que nem toda topologia é induzido por uma métrica. Nessa direção podemos mencionar os exemplos clássicos de espaços de funções que surgem naturalmente em contextos explorados pela análise funcional.

De forma geral, dada a sua relevância, diversas conclusões foram sendo obtidas ao longo dos anos, como os teoremas clássicos de metrização Urysohn (1925) e Nagata–Smirnov (1951), que desempenham papel fundamental na teoria. Tais resultados estabelecem condições necessárias e suficientes para que um espaço topológico (X, τ) seja metrizável, envolvendo propriedades como regularidade, normalidade, existência de bases numeráveis e os axiomas de separação (T_1 , T_2 , T_3 , etc.). E, além de fornecer caracterizações abstratas, teoremas de metrizabilidade também produzem ferramentas concretas.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar alguns desses critérios clássicos de metrizabilidade, com ênfase em caracterizações baseadas justamente nos axiomas de separação e de enumerabilidade. Ao final, damos um destaque para o enunciado e demonstração do Teorema de Metrização de Urysohn, que estabelece condições topológicas naturais sob as quais um espaço é garantidamente metrizável, oferecendo assim uma caracterização robusta e amplamente utilizada na teoria moderna.

2 ESPAÇOS MÉTRICOS

Nesse capítulo definimos o conceito de métrica em um conjunto, bem como a noção de espaço métrico juntamente com alguns exemplos. Além disso investigamos algumas propriedades essenciais que utilizamos nos capítulos seguintes. Para esse fim utilizamos como referências principais os textos (AURICHI, 2022) e (LIMA, 2009b).

2.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS INICIAIS

Definição 2.1. Uma *métrica* em um conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada par $(x, y) \in X \times X$ associa um número real $d(x, y) \in \mathbb{R}$, satisfazendo aos seguintes axiomas:

- (i) $d(x, y) = 0$ com $x = y$ e $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

para quaisquer $x, y, z \in X$. Chamamos de *espaço métrico* ao par (X, d) em que X é um conjunto não-vazio e d é uma métrica em X .

Exemplo 2.1 (Métrica zero-um ou discreta). Qualquer conjunto não-vazio X pode ser equipado com uma métrica: basta definir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Essa métrica é chamada de métrica zero-um ou métrica discreta.

Exemplo 2.2. A reta real é talvez o exemplo mais relevante de espaço métrico, pois as construções mais gerais surgem naturalmente como uma generalização de sua métrica usual definida pelo valor absoluto, ou seja,

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|.$$

É uma tarefa simples¹ verificar que o par (\mathbb{R}, d) é de fato um espaço métrico.

Exemplo 2.3. Uma generalização natural para o caso da reta real acima se dá por meio dos espaços euclidianos \mathbb{R}^n 's. Para $n = 1$ obviamente $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, para $n = 2$ temos o plano euclidiano, comumente equipado com a métrica

¹ Na verdade apenas a desigualdade triangular não é imediata, e uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em (LIMA, 2010), p. 14.

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

E, de modo geral, para n um número inteiro positivo qualquer, \mathbb{R}^n é o produto cartesiano de n cópias de \mathbb{R} , isto é,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) ; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

equipado com a métrica

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

para $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ quaisquer.

Verificar que a função d , acima definida, de fato satisfaz as condições exigidas para uma métrica é necessário. Com efeito, é evidente que $d(x, x) = 0$, que $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$ e que $d(x, y) = d(y, x)$. Resta, portanto, verificar apenas a desigualdade triangular. Para isso, sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$ em \mathbb{R}^n . Devemos mostrar que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}.$$

Nesse sentido, fazendo $x_i - y_i = a_i$ e $y_i - z_i = b_i$ para $i = 1, \dots, n$, observe que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2}.$$

e, elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, vemos que isto equivale a mostrar que

$$\sum_{i=1}^n (a_i)^2 + \sum_{i=1}^n (b_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n (a_i)^2 + \sum_{i=1}^n (b_i)^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2},$$

o que por, sua vez, é equivalente a

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2}.$$

Por fim, note que a validade da última desigualdade segue então como uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz².

² Veja (LIMA, 2009a), p. 22, para a demonstração completa.

Observação 2.1. Convém destacar que um espaço pode possuir mais de uma métrica. Por exemplo, em \mathbb{R}^n além da métrica d definida no exemplo anterior podemos ainda considerar as métricas da soma d' e do máximo d'' , a saber

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

e

$$d''(x, y) = \max\{|x_i - y_i| ; i = 1, \dots, n\},$$

para quaisquer $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Além disso, verifica-se a desigualdade

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y).$$

Exemplo 2.4 (Métrica do supremo). Seja $[a, b]$ um intervalo fechado da reta e considere

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ é contínua}\}.$$

Definimos em $C([a, b])$ uma métrica d da seguinte forma:

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Verifiquemos que d é de fato uma métrica: é imediato que $d(f, g) \geq 0$ e $d(f, g) = 0$ se, e somente se, $f = g$. Além disso, como $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$, então $d(f, g) = d(g, f)$. Por fim, para todo $x \in [a, b]$, temos

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|.$$

Logo, tomando o supremo em ambos os lados, obtemos

$$d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h).$$

Essa métrica é conhecida como a *métrica do supremo*, e com isso o par $(C([a, b]), d)$ é um espaço métrico.

Intuitivamente, a distância $d(f, g)$ mede o maior desvio possível entre os valores de f e g no intervalo $[a, b]$, ou seja, as funções são “próximas” se seus valores são uniformemente próximos.

2.2 ABERTOS E FECHADOS

Definição 2.2. Sejam (X, d) um espaço métrico, $a \in X$ e $r > 0$ um número real positivo.

- (a) Chamamos *bola aberta* de centro em a e raio r ao conjunto $B_r(a)$, dos pontos de X cujas distâncias até o ponto a é menor que r . Ou seja

$$B_r(a) = \{x \in X; d(x, a) < r\}.$$

- (b) Chamamos *bola fechada* de centro a e raio r ao conjunto $B_r[a]$, dos pontos de X que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a . Ou seja

$$B_r[a] = \{x \in X; d(x, a) \leq r\}.$$

Definição 2.3. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é *aberto* se, para todo $x \in A$, existir um número real $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Dizemos que $F \subset X$ é *fechado* se $X \setminus F$ é aberto.

Exemplo 2.5. Seja (X, d) espaço métrico. Então X e \emptyset são abertos em X .

Proposição 2.1. Sejam (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $r > 0$. Então:

(a) $B_r(x)$ é aberto;

(b) $B_r[x]$ é fechado.

Demonstração. (a) Seja $y \in B_r(x)$ e tome $s = r - d(x, y) > 0$. Vamos provar que $B_s(y) \subset B_r(x)$. De fato, seja $z \in B_s(y)$. Temos:

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < s + d(x, y) = r - d(x, y) + d(x, y) = r.$$

logo, $z \in B_r(x)$. Portanto $B_s(y) \subset B_r(x)$.

(b) Seja $a \notin B_r[x]$. Vamos mostrar que existe $s > 0$ tal que $B_s(a) \subset X \setminus B_r[x]$. Como $a \notin B_r[x]$, temos $d(x, a) > r$. Considere $s = d(x, a) - r > 0$ e observe que $B_s(a) \cap B_r[x] = \emptyset$, isto é, que $B_s(a) \subset X \setminus B_r[x]$. De fato, suponha que exista $b \in B_s(a) \cap B_r[x]$. Então

$$d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a) < r + s = d(x, a),$$

uma contradição. □

Proposição 2.2. Seja (X, d) um espaço métrico. Dados quaisquer dois pontos $x, y \in X$, existem abertos A e B disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Demonstração. Se existisse algum ponto $a \in A_r(x) \cap B_s(y)$, teríamos $d(x, a) < r$ e $d(y, a) < s$. Daí $d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, a) \leq r + s \leq d(x, y)$ o que é um absurdo. □

Observação 2.2. Espaços que possuem a propriedade apresentada na Proposição 2.2 são chamados de Espaços de *Hausdorff* ou T_2 , conforme a definição 3.12 mais geral para espaços topológicos. O que provamos, portanto, é que todo espaço métrico é Hausdorff. Em outras palavras, satisfazer tal propriedade é uma condição necessária para um espaço métrico.

Definição 2.4. Seja X um espaço métrico. Um ponto $a \in X$ chama-se *ponto isolado* de X quando ele é uma bola aberta em X , ou seja, quando existe $r > 0$, tal que $B_r(a) = \{a\}$. Isto significa, evidentemente, que além do próprio a , não existe outros pontos de X a uma distância de a inferior a r . Dizer que um ponto a de X não é isolado, significa afirmar que para todo $r > 0$ pode se encontrar um ponto $x \in A$ tal que $0 < d(a, x) < r$.

Definição 2.5. Um espaço X chama-se *discreto* quando todo ponto de X é isolado. Por exemplo, um espaço com a métrica zero-um é discreto. Um subconjunto $Y \subset X$ chama-se discreto se quando o subespaço Y (métrica induzida) é discreto. Isto significa que, para cada $x \in Y$ acontece $Y \cap B_r(x) = \{x\}$.

Definição 2.6. Um ponto a diz-se *aderente* a um subconjunto Y de um espaço métrico X quando $d(a, Y) = 0$. Isto significa que existem pontos de Y arbitrariamente próximos de a , ou seja, para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar $x \in Y$ tal que $d(x, Y) < \epsilon$.

Definição 2.7. O *fecho* (ou aderência) de um conjunto Y num espaço métrico X é o conjunto \overline{Y} dos pontos de X que são aderentes a Y . Portanto, escrever $a \in \overline{Y}$ é o mesmo que afirmar que o ponto a é aderente a Y em X .

Proposição 2.3. *Seja X um espaço métrico. Dado $F \subset X$, tem-se $\overline{F} = F$ se, e somente se, $X \setminus F$ é aberto. Em outras palavras: um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes.*

Demonstração. É suficiente observar que $\overline{F} = F$ se, e somente se, os pontos que não pertencem a F não são aderentes a F . Isso, por sua vez, é equivalente a dizer que, para todo $a \in X \setminus F$, existe $r > 0$ tal que a bola aberta $B_r(a)$ não contém pontos de F , ou seja, para todo $a \in X \setminus F$, existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset X \setminus F \Leftrightarrow X \setminus F$ é aberto. \square

Proposição 2.4. *Os subconjuntos abertos de um espaço métrico X qualquer possuem as seguintes propriedades:*

- (i) o espaço todo X e o vazio \emptyset são subconjuntos abertos de X ;

- (ii) se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ for uma família qualquer (finita ou infinita) de subconjuntos abertos de X , a união $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um subconjunto aberto de X ;
- (iii) a interseção $A_1 \cap \dots \cap A_n$ de uma família finita de subconjuntos abertos A_1, \dots, A_n em X é ainda um subconjunto aberto de X .

Demonstração. Para (i), é claro que X é aberto; para mostrar que \emptyset é aberto basta notar que um subconjunto qualquer de X só deixa de ser aberto quando existe uma ponto tal que nenhuma bola de centro nele esteja contida no conjunto. Como não existe tal ponto, o conjunto vazio não viola tal propriedade.

Com relação a (ii), dado $x \in A$, existe um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe uma bola $B_\epsilon(x)$ contida em A_λ , logo $B_\epsilon(x) \subset A$.

Por fim, Sejam $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe uma bola aberta $B_{\epsilon_i}(x)$ contida em A_i . Tomemos $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ de forma que $\epsilon > 0$ e $B_\epsilon(x) \subset B(x; \epsilon_i) \subset A_i$ para cada i , ou seja, $B_\epsilon(x) \subset A_1 \cap \dots \cap A_n$.

□

Corolário 2.1. Os subconjuntos fechados de um espaço métrico X qualquer possuem as seguintes propriedades:

- (a) \emptyset e X são conjuntos fechados;
- (b) a interseção arbitrária de conjuntos fechados é fechada;
- (c) a união finita de conjuntos fechados é fechada.

Demonstração. Pela proposição 2.4 , sabemos que \emptyset e X são abertos, que uniões arbitrárias de abertos são abertas e que interseções finitas de abertos são abertas. Portanto o resultado segue pelas propriedades dos complementares. Precisamente, para (a), como um conjunto é fechado se, e somente se, o seu complementar é aberto, e como $X \setminus \emptyset = X$ e $X \setminus X = \emptyset$ são abertos, pela Proposição anterior, segue que ambos são também fechados.

Para (b), Sejam $\{F_i\}_{i \in I}$ uma família arbitrária de conjuntos fechados. Então cada complemento $X \setminus F_i$ é aberto. Pelas leis de De Morgan, temos

$$X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i),$$

e segue o resultado.

Por fim, para (c), Sejam F_1, \dots, F_n uma família finita de conjuntos fechados. Como os complementares $X \setminus F_k$ são abertos, pelas leis de De Morgan, temos

$$X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n F_k \right) = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus F_k),$$

e o reutado segue novamente pela proposição anterior. \square

3 ESPAÇOS TOPOLOGICOS

Neste capítulo definimos o conceito de espaço topológico, apresentamos alguns exemplos e também enunciamos os axiomas de separação e enumerabilidade, que são ferramentas importantes para estabelecer os critérios de metrização que estudamos ao longo do texto. Ao fim do capítulo estabelecemos o conceito de espaço compacto. As principais referências utilizadas foram (AURICHI, 2022), (LIMA, 2009a) e (MEZABARBA, 2025).

3.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS INICIAIS

Definição 3.1. Seja X um conjunto. Uma *topologia* em X é uma coleção τ de subconjuntos de X que satisfazem aos seguintes axiomas:

- (a) \emptyset e X pertencem a τ ;
- (b) τ é fechado para interseções finitas, isto é, se $A_1, \dots, A_n \in \tau$, então $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$.
- (c) τ é fechado para uniões arbitrárias, ou seja, se $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in I\}$ é uma família de elementos de τ , então $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Um *espaço topológico* é um par (X, τ) em que X é um conjunto e τ é uma topologia em X . Nesse caso dizemos que os elementos de τ são os *abertos* do espaço topológico (X, τ) .

Observação 3.1. Na maioria das vezes iremos indicar um espaço topológico (X, τ) simplesmente por X , quando estiver claro qual é a topologia τ que está sendo considerada.

Exemplo 3.1 (Topologia católica e topologia discreta). Todo conjunto pode ser equipado com ao menos duas topologias. De fato, se X é um conjunto qualquer, podemos sempre considerar

$$\tau = \{\emptyset, X\} \text{ e } \tau' = \{\{x\} ; x \in X\},$$

que são chamadas respectivamente de *topologia caótica* e *topologia discreta* em X . É um exercício simples a verificação de que tais famílias constituem, de fato, topologias em X , segundo a Definição 3.1.

Exemplo 3.2. Seja X um conjunto não vazio. A *topologia cofinita* em X é a família

$$\tau_{\text{cof}} = \{U \subseteq X : U = \emptyset \text{ ou } X \setminus U \text{ é finito}\}.$$

Isto é, os abertos são exatamente o conjunto vazio e todos os subconjuntos de X cujo complementar é finito.

Exemplo 3.3. Todo espaço métrico (X, d) é um espaço topológico, graças a Proposição 2.4. Nesse caso indicamos a topologia pelo símbolo τ_d . De forma geral, temos a seguinte definição.

Definição 3.2. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que X é *metrizável* quando existe uma métrica d em X tal que $\tau = \tau_d$.

Observação 3.2. Naturalmente a definição acima suscita a seguinte pergunta: *todo espaço topológico é métrico?* Em outras palavras, dado (X, τ) um espaço topológico, é sempre possível encontrar uma métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau = \tau_d$? O próximo exemplo, apesar de simples, responde a essa questão.

Exemplo 3.4 (Um espaço não metrizável - Espaço de Sierpiński). Conforme demonstramos na Proposição 2.2 assim como na Observação 2.2, todo espaço métrico é Hausdorff, dessa forma, se todo espaço topológico fosse metrizável, ele seria também Hausdorff. Entretanto, considerando $X = \{0, 1\}$ com a topologia $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$, observe que este não é Hausdorff, portanto não deve existir nenhuma métrica d em X para a qual $\tau = \tau_d$. Este espaço é conhecido como *espaço de Sierpiński*. Para apresentar um exemplo que aparente ser menos artificial, precisaremos de alguns conceitos preliminares que faremos a seguir.

Definição 3.3. Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Chamamos de *vizinhança* de x a qualquer subconjunto $V \subseteq X$ tal que $x \in V$ e existe $A \in \tau$ com $x \in A$ e $A \subseteq V$.

Observação 3.3. Note que se $x \in V$ e V é aberto, então é claramente uma vizinhança de x .

Definição 3.4. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que um subconjunto $F \subseteq X$ é *fechado* se seu complementar $X \setminus F$ é aberto, ou seja, $X \setminus F \in \tau$.

Definição 3.5. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$.

(a) Chamamos de *fecho* de A ao subconjunto

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

em que $\mathcal{F} = \{F \subset X ; F \text{ é fechado e } A \subset F\}$.

(b) Chamamos de *interior* de A ao subconjunto

$$\text{int}(A) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$$

no qual $\mathcal{V} = \{V \subset X ; V \text{ é aberto e } V \subset A\}$.

Proposição 3.1. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Então \overline{A} é um subconjunto fechado enquanto o interior $\text{int}(A)$ é um subconjunto aberto.

Demonstração. Mostremos que \overline{A} é fechado. Pela definição, \overline{A} é a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm A . Ou seja,

$$\overline{A} = \bigcap\{F \subseteq X : F \text{ é fechado e } A \subseteq F\}.$$

Como uma interseção arbitrária de conjuntos fechados é fechada, segue que \overline{A} é fechado.

Uma demonstração alternativa: seja $x \in X \setminus \overline{A}$. Por definição de fecho, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $U \cap A = \emptyset$. Assim $U \subseteq X \setminus A$, logo $X \setminus \overline{A}$ é aberto. Portanto \overline{A} é fechado.

Vamos verificar agora que $\text{int}(A)$ é aberto. Pela definição, $\text{int}(A)$ é a união de todos os conjuntos abertos contidos em A . Ou seja,

$$\text{int}(A) = \bigcup\{U \subseteq X : U \text{ é aberto e } U \subseteq A\}.$$

Como uma união arbitrária de conjuntos abertos é aberta, segue que $\text{int}(A)$ é aberto.

Também se pode usar a relação com complementares: $\text{int}(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$. Como $\overline{(X \setminus A)}$ é fechado, seu complementar é aberto, portanto $\text{int}(A)$ é aberto. \square

Definição 3.6. Seja X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Um ponto $x \in X$ é chamado *ponto aderente* de A se para todo aberto V com $x \in V$, a interseção $V \cap A$ é não-vazia.

Proposição 3.2. Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Então \overline{A} é precisamente o conjunto dos pontos aderentes a A .

Demonstração. Chamemos de D o conjunto dos pontos aderentes a A . Vamos provar que o $\overline{A} \subset D$. Seja $x \in \overline{A}$. Seja V aberto tal que $x \in V$ e suponha $V \cap A \neq \emptyset$. Logo $A \subset X \setminus V$ que é fechado. Assim, pela definição de \overline{A} , segue que $\overline{A} \subset X \setminus V$, contradição com o fato de que $x \in \overline{A}$ e $x \in V$.

Mostraremos agora que $D \subset \overline{A}$. Para isso, seja $x \in D$ e suponha que $x \notin \overline{A}$, logo $x \in X \setminus \overline{A}$ que é aberto. Como $x \in D$, temos que $(X \setminus \overline{A}) \cap A \neq \emptyset$ contradição, pois $A \subset \overline{A}$. \square

3.2 BASES

Definição 3.7. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma *base* para (X, τ) se, para cada aberto não vazio $A \in \tau$, existe uma família $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B.$$

Proposição 3.3. Uma família \mathcal{B} de subconjuntos de τ é uma base de (X, τ) se, e somente se, para todo aberto não vazio $A \in \tau$ e para cada ponto $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Demonstração. Suponha que \mathcal{B} seja uma base e tome $A \in \tau$. Para cada $x \in A$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ com $x \in B_x \subseteq A$. Assim,

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Reciprocamente, suponha que para todo $x \in A \in \tau$ exista $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Então podemos escrever

$$A = \bigcup_{B' \in \mathcal{B}'} B',$$

em que $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Portanto, \mathcal{B} é uma base. \square

Exemplo 3.5. Seja X um conjunto qualquer. A coleção formada por todos os subconjuntos unitários de X é uma base para a topologia discreta em X .

Definição 3.8. Seja X um espaço topológico. Uma família \mathcal{B} de subconjuntos de X é chamada de *sub-base* para X se o conjunto das interseções finitas de elementos de \mathcal{B} ,

$$\{B_1 \cap \cdots \cap B_n ; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\},$$

constitui uma base para a topologia em X .

Definição 3.9. Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $x \in X$. Dizemos que uma família $\mathcal{B}_x = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vizinhanças de x é uma *base local enumerável* em x se:

1. Cada B_n é uma vizinhança de x , isto é, $x \in \text{int}(B_n)$;
2. Para toda vizinhança V de x , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_n \subseteq V$.

Em outras palavras, uma base local enumerável em x é um *sistema fundamental de vizinhanças* de x formado por uma sequência de vizinhanças que aproximam qualquer outra vizinhança de x .

3.3 AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

Definição 3.10. Dizemos que um espaço topológico X é T_0 se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existir um aberto que contenha somente um dos pontos. Isto é, $x \in A$ e $y \notin A$ ou $x \notin A$ e $y \in A$.

Exemplo 3.6. Todo espaço com pelo menos dois pontos equipado com a topologia caótica não é T_0 , enquanto todo espaço (com pelo menos dois pontos distintos) discreto o é.

Proposição 3.4. Um espaço topológico X é T_0 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos e para quaisquer bases locais \mathcal{B}_x e \mathcal{B}_y , para x e y respectivamente, tem-se $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.

Demonstração. Suponha que (X, τ) é T_0 . Tomemos $x, y \in X$ pontos distintos e $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ bases locais arbitrárias para x e y respectivamente. Por X ser T_0 , existe um aberto A tal que $x \in A$ e $y \notin A$, ou $x \notin A$ e $y \in A$. Sem perda de generalidade, suponha o primeiro caso. Por \mathcal{B}_x ser base, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq A$. Como $y \notin A$, segue que $y \notin B$ e, portanto, $B \notin \mathcal{B}_y$, mostrando que $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.

Reciprocamente, suponha que para quaisquer $x, y \in X$ distintos, toda base local de x seja distinta de qualquer base local de y . Em particular,

$$\mathcal{B}_x = \{A \in \tau ; x \in A\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_y = \{A \in \tau ; y \in A\}$$

são bases locais de x e y respectivamente. Logo, $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$ pela hipótese. Assim, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \notin \mathcal{B}_y$, ou existe $B \in \mathcal{B}_y$ tal que $B \notin \mathcal{B}_x$. \square

Definição 3.11. Dizemos que um espaço topológico X é T_1 quando para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existir um aberto $A \subseteq X$ tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

Observação 3.4. Obviamente ser T_1 implica em ser T_0 .

Proposição 3.5. Um espaço topológico X é T_1 se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é fechado.

Demonstração. Seja X um espaço topológico sendo T_1 . Sejam x, y distintos pertencentes a X , então $x \in A$ e $y \notin A$, e se X é T_1 logo $A \cap \{x\} = \emptyset$ logo $y \notin \{\bar{x}\}$. Sabemos que o único ponto que pertence ao fecho de x é o próprio x . Perceba que $\{x\}$ é fechado para qualquer $x \in X$, logo $X \setminus \{x\}$ é aberto, $y \in X \setminus \{x\}$ e $y \notin \{x\}$ \square

Exemplo 3.7. Qualquer conjunto X equipado com a topologia cofinita é um exemplo de espaço T_1 .

Exemplo 3.8. Todo espaço métrico é T_1 (e por conseguinte T_0). De fato, se (X, d) é um espaço métrico e $x \in X$ é um ponto qualquer, então dado $y \in X \setminus \{x\}$ temos $B_r(y) \subseteq X \setminus \{x\}$, para $r = d(x, y) > 0$, o que garante que o complementar de $\{x\}$ é aberto em X .

Definição 3.12. Dizemos que um espaço topológico X é T_2 ou de *Hausdorff* quando, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existirem abertos disjuntos $A, B \subseteq X$ tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Observação 3.5. A definição acima trata-se exatamente da generalização da propriedade homônima para os espaços métricos, conforme a Proposição 2.2. A grande diferença é que nem todos os espaços topológicos gozam dessa propriedade, conforme o exemplo 3.4. Além disso, ser T_2 implica em ser T_1 , mas a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 3.9. Seja X um espaço topológico munido da topologia cofinita. Se X for infinito, então será T_1 mas não será T_2 . Com efeito, veja que se x e y são pontos distintos em X , então para A e B abertos que contenham x e y , respectivamente, então naturalmente $A = X \setminus F_1$ e $B = X \setminus F_2$, com F_1 e F_2 finitos. Então $A \cap B = X \setminus (F_1 \cup F_2)$, não satisfazendo, portanto a condição para ser T_2 .

Definição 3.13. Dizemos que um espaço topológico X é T_3 quando para quaisquer $x \in X$ e $F \subset X$ fechado, com $x \notin F$, existem $A, B \subseteq X$ abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $F \subset B$. Se, além disso, X for T_1 , diremos que ele é um espaço *regular*.

Exemplo 3.10. Todo espaço métrico é regular. De fato, se (X, d) é um espaço métrico e $x \in X$ e F fechado com $x \notin F$, basta tomar

$$r = \frac{1}{2}d(x, F) = \frac{1}{2} \inf\{d(x, y) ; y \in F\} > 0$$

e definir os abertos $A = B_r(x)$ e $B = X \setminus B_r[x]$.

Proposição 3.6. Um espaço topológico X é T_3 se, e somente se, para todo $x \in X$ e para todo aberto $V \subseteq X$ aberto com $x \in V$, existe um aberto $A \subseteq X$ tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset V$.

Demonstração. Suponha X espaço T_3 . Seja $x \in X$ e $V \in \tau$ tal que $x \in V$. Note que $X \setminus V$ é fechado e $x \notin X \setminus V$. Então existem A, B abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $X \setminus V \subset B$. Assim $A \subset X \setminus B$ que é fechado. Logo, $\overline{A} \subset X \setminus B \in V$.

Reciprocamente, mostraremos que X é T_3 . Seja $x \in X$ e $F \subset X$ fechado, tais que $x \notin F$. Então $X \setminus F$ é aberto que contém x . Logo existe A aberto tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset X \setminus F$. Note que $x \in A$ e $F \subset X \setminus \overline{A}$ e $A \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$. \square

Definição 3.14. Dizemos que X é T_4 se, para quaisquer $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existirem A, B abertos disjuntos, tais que $F \subset A, G \subset B$. Se, além disso, X for T_1 , então X é chamado *espaço normal*.

Exemplo 3.11 (A reta de Sorgenfrey). No conjunto \mathbb{R} dos números reais considere a topologia gerada a partir da base $\mathcal{B} = \{[a, b) ; a < b\}$. Tal espaço topológico é conhecido pelo nome de *A reta de Sorgenfrey*, e frequentemente indicada pelo símbolo \mathbb{R}_S . Vamos mostrar que \mathbb{R}_S é normal.

Primeiramente note que é T_1 : Sejam F, G fechados disjuntos. Para cada $a \in F$ e cada $b \in G$, podemos escolher pontos $x(a)$ e $y(b)$ de forma que

$$[a, x(a)) \cap G = \emptyset \quad \text{e} \quad [b, y(b)) \cap F = \emptyset.$$

Note que isso é possível pelo fato de os complementares de F e G serem abertos. Sejam

$$A = \bigcup_{a \in F} [a, x(a)) \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{b \in G} [b, y(b)).$$

Note que $F \subset A$ e $G \subset B$, e que A e B são abertos. Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que não. Então existe $c \in A \cap B$. Para tanto, existem $a \in F$ e $b \in G$ tais que

$$c \in [a, x(a)) \cap [b, y(b)).$$

Caso $a < b$: então $x(a) < b$, pois $b \notin [a, x(a))$; logo $[a, x(a)) \cap [b, y(b)) = \emptyset$, absurdo. Se $b < a$, obtém-se uma contradição de maneira análoga. É claro que $a = b$ não pode ocorrer por estarmos supondo $F \cap G = \emptyset$.

Observação 3.6. Apesar da reta de Sorgenfrey ser normal, conforme vimos no exemplo anterior, é possível mostrar¹ que o produto $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal. Em particular, produto de espaços normais não é necessariamente normal.

3.4 AXIOMAS DE ENUMERABILIDADE

Definição 3.15. Dizemos que um espaço topológico satisfaz o *primeiro axioma de enumerabilidade* se, para todo $x \in X$, existe um sistema fundamental de vizinhanças (bases locais enumeráveis).

¹ Vide proposição 4.2.3 em (AURICHI, 2022).

Exemplo 3.12. Todo espaço métrico (X, d) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Para isso basta notar que $\{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para cada $x \in X$.

Definição 3.16. Dizemos que X satisfaz o *segundo axioma de enumerabilidade* se admite uma base enumerável.

Exemplo 3.13. A reta real satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, já que $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base.

Definição 3.17. Seja X um espaço topológico e sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X . Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $x \in X$ se para toda vizinhança V de x , existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $x_n \in V$. Notação $x_n \rightarrow x$.

Observação 3.7. Sabemos que o segundo axioma de enumerabilidade implica no primeiro: se B é uma base enumerável para a topologia de X , então o subconjunto de B formado por aqueles elementos da base que contém o ponto x é uma base enumerável em x .

3.5 COMPACTOS

Definição 3.18. Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma família \mathcal{A} de subconjuntos de X é uma *cobertura* (ou *recobrimento*) de X se

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X.$$

Quando todos os conjuntos de \mathcal{A} são abertos em X , dizemos que \mathcal{A} é uma *cobertura aberta*.

Definição 3.19. Um espaço topológico (X, τ) é dito *compacto* se, para toda cobertura aberta \mathcal{A} de X , existe uma subcobertura finita $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ tal que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A = X.$$

Em outras palavras, é possível cobrir X com um número finito de abertos da cobertura inicial.

Exemplo 3.14. Subconjuntos finitos constituem os primeiros exemplos de compactos, por razões óbvias. Também qualquer intervalo fechado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ é compacto, com a topologia usual da reta, o que embora não seja um resultado imediato, assumiremos como verdadeiro².

² Para uma demonstração, veja o exemplo 1 na p. 210 de (LIMA, 2009b)

Proposição 3.7. Sejam X um espaço compacto e $F \subset X$ um fechado. Então F é compacto.

Demonstração. Considere \mathcal{A} uma cobertura aberta de F . Para cada $A \in \mathcal{A}$, seja A^* um aberto em X tal que $A^* \cap F = A$. Defina $\mathcal{A}^* = \{A^* : A \in \mathcal{A}\}$. Observe que $\mathcal{A}^* \cup \{X \setminus F\}$ constitui uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, essa cobertura admite uma subcobertura finita. Logo, \mathcal{A} também possui uma subcobertura finita, o que mostra que F é compacto. \square

Lema 3.1. Sejam X um espaço de Hausdorff, $x \in X$ e $K \subset X$ um compacto tal que $x \notin K$. Então existem abertos A e B tais que $x \in A$, $K \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Demonstração. Para cada $y \in K$, como X é de Hausdorff, existem abertos A_y e B_y tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como K é compacto, existem pontos $y_1, \dots, y_n \in K$ tais que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Defina então

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i} \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Os conjuntos A e B são abertos, com $x \in A$ e $K \subset B$. Suponha, por contradição, que $A \cap B \neq \emptyset$. Então existe $z \in A \cap B$ e, portanto, $z \in B_{y_j}$ para algum j . Mas como $z \in A \subseteq A_{y_j}$, temos $z \in A_{y_j} \cap B_{y_j}$, o que é impossível. Logo, $A \cap B = \emptyset$. \square

Proposição 3.8. Sejam X um espaço de Hausdorff e $F \subset X$ um compacto. Então F é fechado.

Demonstração. Seja $x \in X \setminus F$. Pelo lema anterior, existem abertos A e B tais que $x \in A$, $F \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. Isso mostra que $x \in X \setminus B$, o qual é aberto, logo F é fechado. \square

Corolário 3.1. Seja X um espaço compacto e Hausdorff. Um subconjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, F for compacto.

Proposição 3.9. Sejam X um espaço de Hausdorff e $F, G \subset X$ compactos e disjuntos. Então existem abertos A e B tais que $F \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Demonstração. Como F e G são compactos e disjuntos, pelo Lema anterior, para cada $x \in F$ e $y \in G$ existem abertos A_y e B_y tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como G é compacto, existem pontos $y_1, y_2, \dots, y_n \in G$ tais que

$$G \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Definimos então

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i} \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Os conjuntos A e B são abertos, $F \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. □

Proposição 3.10. *Todo espaço compacto de Hausdorff é normal.*

Demonstração. Sabemos que em espaços de Hausdorff, conjuntos compactos são fechados.

Assim, aplicando o resultado anterior, obtemos a normalidade do espaço. □

4 FUNÇÕES CONTÍNUAS

Neste capítulo definimos o conceito de função contínua, que trata-se de uma ferramenta importante para investigar propriedades topológicas. Em especial, estabelecemos critérios de continuidade a partir de sequências, condições para a existência de extensão (contínua) de uma função e a definição de homeomorfismo, essenciais para o principal teorema que discutimos do capítulo 5. Utilizamos como referências principais os textos (AURICHI, 2022), (MEZABARBA, 2025) e (LIMA, 2009a).

4.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

Definição 4.1. Sejam X e Y espaços topológicos. Diz-se que uma função $f : X \rightarrow Y$ é *contínua* em um ponto $x \in X$ se, para cada vizinhança B de $f(x)$ existe uma vizinhança A de x de forma que $f(A) \subseteq B$. De forma geral, diremos que f é contínua se for contínua em todo ponto, ou seja, quando para qualquer B aberto em Y a pré-imagem $f^{-1}(B)$ é aberta em X .

Exemplo 4.1. Para qualquer espaço topológico X , a função identidade $I(x) = x$, para todo $x \in X$, é obviamente contínua. Também qualquer função constante $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = y_0$, para todo $x \in X$ e $y_0 \in Y$ fixado, é contínua, uma vez que $\text{Im}(f) = \{y_0\}$ e $f^{-1}(B) = X$ para todo aberto $B \subseteq Y$ com $y_0 \in B$.

Observação 4.1. Note que a definição de continuidade de uma função está intrinsecamente associada às topologias dos espaços envolvidos. Além disso, se $f : X \rightarrow Y$ é uma função e se a topologia de Y é dada por uma base \mathcal{B} , então para verificar a continuidade de f é suficiente mostrar que a imagem inversa de cada elemento básico é aberta: um conjunto aberto arbitrário V de Y pode ser escrito como uma união de elementos básicos

$$V = \bigcup_{\alpha \in j} B_\alpha.$$

Assim,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in j} f^{-1}(B_\alpha)$$

de modo que $f^{-1}(V)$ é aberto sempre que cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ for aberto.

Analogamente, se a topologia sobre Y é dada por uma sub-base \mathcal{S} , então para verificar a continuidade de f é suficiente mostrar que a imagem inversa de cada elemento da sub-base é aberto: se um elemento básico B de Y pode ser escrito como uma interseção finita $B =$

$S_1 \cap \dots \cap S_n$ de elementos da sub-base, deduz-se da equação

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \dots \cap f^{-1}(S_n)$$

que a imagem inversa de cada elemento básico é aberto.

Exemplo 4.2. Considere uma função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nas disciplinas de cálculo e análise, tradicionalmente a continuidade de f é definida mediante o uso dos *epsilons* e *deltas*, o que pode contribuir para a percepção errônea de que se trata de um conceito não geométrico. A fim de verificar que tal definição e a versão topológica que apresentamos aqui são equivalentes, seja $x_0 \in \mathbb{R}$, e dado $\varepsilon > 0$, o intervalo

$$V = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

é um conjunto aberto do espaço de chegada \mathbb{R} . Portanto, $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto no espaço de saída \mathbb{R} .

Como $f^{-1}(V)$ contém o ponto x_0 , ele deve conter algum elemento básico (a, b) ao redor de x_0 . Escolhemos δ como sendo o menor dos dois números $x_0 - a$ e $b - x_0$.

Assim, se $|x - x_0| < \delta$, então o ponto x deve pertencer a (a, b) , de modo que $f(x) \in V$, ou seja,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

mostrando que, de fato, a definição topológica generaliza o conceito de continuidade vista nas disciplinas introdutórias.

Proposição 4.1. *A composição entre funções contínuas é uma função contínua.*

Demonstração. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ funções contínuas. Dado $B \subseteq Z$ aberto, a continuidade de g implica em $g^{-1}(B)$ ser aberto em Y . Da continuidade de f segue que $f^{-1}(g^{-1}(B))$ é um aberto em X . Consequentemente,

$$A = f^{-1}(g^{-1}(B)) = (g \circ f)^{-1}(B)$$

é um aberto, portanto a função composta $g \circ f$ é contínua. \square

Definição 4.2. Dizemos que um subconjunto A de um espaço topológico X é *denso* (em X) quando $\overline{A} = X$. Equivalentemente, A é denso em X quando, para qualquer $x \in X$ e V vizinhança de x , tem-se $V \cap A \neq \emptyset$.

Exemplo 4.3. Em \mathbb{R}^n , o subconjunto \mathbb{Q}^n é denso.

Proposição 4.2. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e sobrejetora. Se D é denso em X , então $f(D)$ é denso em Y .

Demonstração. Se $A \subset Y$ não vazio, então por f ser sobrejetora, $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ e, se $d \in D$, tal que $d \in f^{-1}(A)$, ou seja, $f(d) \in A$, então $f(D) \cap A \neq \emptyset$. \square

4.2 CONTINUIDADE E SEQUÊNCIAS

Definição 4.3. Considere o conjunto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com a topologia gerada pelos conjuntos da forma $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ou $\{\infty\} \cup A$, em que $\mathbb{N} \setminus A$ é finito. Chamamos esse espaço de *espaço de sequência convergente*.

Proposição 4.3. Seja X um espaço topológico e seja $f : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow X$ uma função. Então, f é contínua se, e somente se, $f(n) \rightarrow f(\infty)$ (i.e., a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que cada $x_n = f(n)$, é convergente para $x = f(\infty)$)

Demonstração. Suponha que f é contínua. Seja A aberto tal que $f(\infty) \in A$. Como f é contínua, então $f^{-1}(A)$ é aberto. Logo $\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)$ é finito, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $n \in f^{-1}(A)$. Logo, para $n \geq n_0$, $f(n) \in A$. \square

Proposição 4.4. Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in X$. Então $f(x_n) \rightarrow f(x)$

Demonstração. Seja $\psi : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow X$, com $\psi(n) = x$ e $\psi(\infty) = x_n$. Note que ψ é contínua pela proposição anterior. veja também que $f \circ \psi$ é continua, pela composição de funções continuas. Note que $(f \circ \psi)(n) = f(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ e $(f \circ \psi)(\infty) = f(\infty)$. Pela proposição anterior aplicada a $f \circ \psi$ temos $f(x_n) \rightarrow f(x)$. \square

Proposição 4.5. Sejam X e Y espaços topológicos, onde X possui bases locais enumeráveis. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \rightarrow x$, tem-se $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demonstração. Já está feito supondo f contínua. Para a recíproca, sejam $x \in X$ e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base local para x . Seja A aberto em Y tal que $f(x) \in A$. Mostremos que existe V aberto tal que $x \in V \subset f^{-1}(A)$.

Suponha, por contradição, que não existe. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\bigcap_{k \leq n} B_k \not\subseteq f^{-1}(A)$. Seja $x_n \in \bigcap_{k \leq n} B_k$ tal que $f(x_n) \notin A$. Agora, observe que $x_n \rightarrow x$. De fato, seja $V \ni x$ aberto. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset V$. Portanto, para todo $m \geq n$, $x_m \in V$.

Note, também, que $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$. De fato, veja que $f(x) \in A$, que é aberto e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \notin A$, o que é contradição. \square

4.3 EXTENSÃO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

Definição 4.4. Sejam X e Y espaços topológicos e $A \subset X$ e $f : A \rightarrow Y$ uma função contínua. Dizemos que uma função contínua $g : X \rightarrow Y$ é uma *extensão* de f quando $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$.

Proposição 4.6. Sejam X e Y espaços topológicos, com Y Hausdorff. Se $D \subset X$ é denso e $f, g : X \rightarrow Y$ são funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, então $f = g$. Isto é, os valores de f em um subconjunto denso determinam, no máximo, uma única função contínua.

Demonstração. Admitamos, por contradição, que $f \neq g$. Então, existe $x \in X$ com $f(x) \neq g(x)$. Como Y é Hausdorff, existem abertos disjuntos A e B com $f(x) \in A$ e $g(x) \in B$. Assim, $f^{-1}(A)$ e $g^{-1}(B)$ são abertos em X que contêm x . Portanto, existe $d \in f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$. Mas como $d \in D$, temos $f(d) = g(d)$, o que é impossível. \square

Lema 4.1. Seja X um espaço topológico e suponha que existe uma família de fechados $(F_s)_{s \in \mathbb{Q}}$ satisfazendo as condições

1. $F_r \subset \text{Int}(F_s)$ sempre que $r < s$;
2. $\bigcup_{s \in \mathbb{Q}} F_s = X$;
3. $\bigcap_{s \in \mathbb{Q}} F_s = \emptyset$.

Então a função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in F_r\}$, é contínua.

Demonstração. Primeiro, note que φ está bem definida graças às condições (2) e (3). Para verificar a continuidade, tomemos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e mostremos que

$$\varphi^{-1}[(a, b)] = \bigcup_{(r,s) \in Q} (\text{Int}(F_s) \setminus F_r),$$

onde

$$Q = \{(r, s) \in \mathbb{Q}^2 : a < r < s < b\}.$$

De fato:

\Rightarrow Se $x \in \varphi^{-1}[(a, b)]$, então $a \leq \varphi(x) \leq b$. Assim, podemos escolher racionais r, s tais que $a < r < \varphi(x) < s < b$. Como $\varphi(x) < s$, temos $x \in F_s \subset \text{Int}(F_s)$. Além disso, $\varphi(x) > r$ implica $x \notin F_r$. Portanto, $x \in \text{Int}(F_s) \setminus F_r$.

\Leftarrow Se $x \in \text{Int}(F_s) \setminus F_r$ para algum $(r, s) \in Q$, então $x \in F_s$ e $x \notin F_r$. Isso implica $r < \varphi(x) \leq s$. Como $a < r < s < b$, obtemos $a \leq \varphi(x) \leq b$, logo $x \in \varphi^{-1}[(a, b)]$.

Assim, a igualdade está verificada, e concluímos que $\varphi^{-1}[(a, b)]$ é aberto, já que é união de abertos. Portanto, φ é contínua. \square

Proposição 4.7. *Seja X um espaço topológico T_4 , $A \subseteq X$ um fechado e $f : A \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua. Então existe uma extensão $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ de f .*

Demonstração. Fixe $r \in \mathbb{Q}$ e $s \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Definimos;

$$A_r = \{x \in A : f(x) \leq r\}, \quad U_s = X \setminus \{x \in A : f(x) \geq s\}.$$

Note que, como f é contínua, A_r é fechado em X (pois $A_r = f^{-1}((-\infty, r])$). Além disso, U_s é aberto, e se $r < s$, então $A_r \subset U_s$.

Agora, considere $(r_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma enumeração de

$$P = \{(r, s) \in \mathbb{Q}^2 : 0 \leq r < s < 1\}.$$

No espaço $[0, 1]$, cada intervalo (r, s) contém algum racional q com $r < q < s$. Assim, temos também que $A_r \subset U_s$.

Nosso objetivo é construir uma sequência $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de abertos em X tal que

- (a) $A_{r_n} \subset H_n \subset U_{s_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (b) $\overline{H_n} \subset H_m$ sempre que $(r_m, s_m) \subset (r_n, s_n)$.

Faremos essa construção por indução. Pelo axioma T_4 , podemos escolher H_0 tal que

$$A_{r_0} \subset H_0 \subset \overline{H_0} \subset U_{s_0}.$$

Agora suponha que já tenhamos definido H_j para todo $j < n$, satisfazendo (a) e (b). Vamos definir H_n . Considere os conjuntos de índices

$$J = \{j < n : (r_j, s_j) \subset (r_n, s_n)\}, \quad K = \{k < n : (r_n, s_n) \subset (r_k, s_k)\}.$$

Pela hipótese de indução, temos que $\overline{H_j} \subset H_n$ para $j \in J$, e também que $H_n \subset H_k$ para $k \in K$. Assim, novamente pelo axioma T_4 , podemos escolher H_n aberto de forma que

$$A_{r_n} \cup \bigcup_{j \in J} \overline{H_j} \subset H_n \subset \overline{H_n} \subset U_{s_n} \cap \bigcap_{k \in K} H_k.$$

Portanto, a construção da família $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está concluída. Para facilitar, reindexamos essa família de modo conveniente

Por fim, pela própria construção, obtemos as propriedades desejadas.

Note que, pela construção, temos

$$A_r \subset H_{(r,s)} \subset U_s, \quad \text{para todo } (r, s) \in P,$$

e ainda

$$\overline{H_{(r,s)}} \subset H_{(a,b)}, \quad \text{sempre que } (r, s) \subset (a, b).$$

Estamos prontos para definir a família $(F_r)_{r \in \mathbb{Q}}$ como no lema anterior. Para isso, dividimos em casos:

- Se $r < 0$, definimos $F_r = \emptyset$;
- Se $0 \leq r < 1$, então $F_r = \bigcap_{s > r} \overline{H_{(r,s)}}$;
- Se $r \geq 1$, tomamos $F_r = X$.

É imediato que cada F_r é fechado e $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} F_r = X$. Falta mostrar que, se $r < t$, então $F_r \subset \text{Int}(F_t)$.

Esse fato é evidente nos casos em que $r < 0$ ou $s > 1$. Resta o caso em que $0 \leq r < t < 1$, que é justamente a situação principal.

Fixe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t < s$. Note que

$$F_r \subset \overline{H_{(r,s)}} \subset H_{(t,u)} \subset \bigcap_{v > t} H_{(t,v)} = \text{Int}(F_t).$$

Portanto, de fato $F_r \subset \text{Int}(F_t)$. Assim, temos a família de fechados $(F_r)_{r \in \mathbb{Q}}$ satisfazendo todas as condições do lema.

Definimos então a função

$$F(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in F_r\}.$$

Pelas propriedades anteriores, essa função é contínua. Além disso, por definição dos F_r , temos $0 \leq F(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.

Resta verificar que F estende f . De fato, se $x \in A$, então

$$x \in \bigcap_{s>r} A_s = A_r \iff x \in \bigcap_{s>r} F_s = F_r.$$

Logo, pela definição de F , obtemos

$$F(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in A.$$

Portanto, F é uma extensão contínua de f ao espaço X .

□

Corolário 4.1. Um espaço topológico X é T_4 se, e somente se, para quaisquer fechados disjuntos F e G , existir uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(F) = \{0\}$ e $f(G) = \{1\}$.

Demonstração. Como a função $g : F \cup G \rightarrow [0, 1]$, definida por $g(x) = 0$ se $x \in F$ e $g(x) = 1$ se $x \in G$ é contínua, qualquer extensão f de g , segundo a proposição anterior, satisfaz a condição. Reciprocamente, note que

$$f^{-1}[0, 1/2] \text{ e } f^{-1}(1/2, 1]$$

são abertos.

□

4.4 HOMEO MORFISMO E MERGULHO

Definição 4.5. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Dizemos que f é um *homeomorfismo* quando é bijetora e sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é também contínua. Nesse caso, diremos que os espaços X e Y são *homeomorfos* e indicamos pelo símbolo $X \cong Y$.

Exemplo 4.4 (Projeção etereográfica). Considere a esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e fixe um ponto $p_0 \in S^n$. É possível mostrar que $S^n \setminus \{p_0\}$ é homeomorfo a \mathbb{R}^n . Para isso, utilizando a decomposição $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e escrevemos um ponto (a, b) com $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$, a esfera unitária é então descrita por

$$S^n = \{(a, b) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|a\|^2 + |b|^2 = 1\}.$$

Escolhemos $p_0 = (0, \dots, 1)$, o pólo norte da esfera, o hiperplano

$$V = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é identificado com \mathbb{R}^n por meio da aplicação (homeomorfismo) $f : S^n \setminus \{p_0\} \rightarrow V$ definida por: dado $(a, b) \in S^n \setminus \{p_0\}$, traçamos a reta passando por p_0 e (a, b) e tomamos como $f(a, b)$

o ponto de interseção dessa reta com V . Se $p = (a, b)$, a reta que passa por p_0 e p é dada por

$$x(t) = p_0 + t(p - p_0) = (0, 1) + t(a, b - 1) = (ta, t(b - 1) + 1).$$

Para que $x(t) \in V$, devemos ter $t(b - 1) + 1 = 0$, ou seja

$$t = \frac{1}{1 - b}.$$

Substituindo em $x(t)$, obtemos

$$f(a, b) = \left(\frac{a}{1 - b}, 0 \right).$$

Observação 4.2. Em geral, mostrar que dois espaços topológicos são homeomorfos é menos custoso do que o contrário, já que basta exibir uma função que cumpre essa tal condição. Por conta disso faz-se uso de ferramentas que detectam características de espaços que eventualmente podem ser homeomorfos, isto é, são invariantes por homeomorfismos. Essa é a motivação da próxima definição.

Definição 4.6. Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma propriedade \mathcal{P} de X é um *invariante topológico* quando ela é preservada por homeomorfismos. Ou seja, se Y é um espaço homeomorfo a X , então também satisfaz \mathcal{P} .

Exemplo 4.5. Todos os axiomas de separação e as propriedades de enumerabilidade apresentados anteriormente são invariantes topológicos.

Proposição 4.8. *A metrizabilidade é um invariante topológico.*

Demonstração. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Suponha que X seja metrizável, isto é, existe uma métrica d em X tal que $\tau_X = \tau_d$. Definimos então a função $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_Y(y_1, y_2) = d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$$

para $y_1, y_2 \in Y$.

Veja que d_Y é uma métrica em Y , pois $d_Y(y_1, y_2) = 0$ se, e somente se,

$$d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = 0,$$

o que ocorre se, e somente se, $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, isto é, $y_1 = y_2$. A simetria segue imediatamente da simetria de d , enquanto a desigualdade triangular é verificada da seguinte forma: para $y_1, y_2, y_3 \in$

Y , veja que

$$\begin{aligned} d_Y(y_1, y_3) &= d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_3)) \\ &\leq d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) + d(f^{-1}(y_2), f^{-1}(y_3)) \\ &= d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3). \end{aligned}$$

Por construção, a aplicação f é uma isometria¹ quando vista como uma aplicação entre os espaços métricos (X, d) e (Y, d_Y) , pois para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ vale

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d(f^{-1} \circ f(x_1), f^{-1} \circ f(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Portanto, por construção, a topologia induzida por d_Y em Y é exatamente a topologia de Y , ou seja, $\sigma = \sigma_{d_Y}$ e Y é metrizável. \square

Observação 4.3. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Se f é injetora, mas não necessariamente sobrejetora, então a função $\tilde{f} : X \rightarrow f(X) \subseteq Y$, que se trata apenas de f com o contra-domínio restrito apenas à imagem de f , é um homeomorfismo. Ou seja, sempre que f for uma aplicação injetora, então é possível identificar X com a sua imagem $f(X)$ em Y .

Definição 4.7. Sejam X e Y espaço topológicos. Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um *mergulho* (topológico) quando $X \cong f(X)$.

Exemplo 4.6. Sejam (X, τ) um espaço topológico e (Y, d) um espaço métrico. Se existir um mergulho $f : X \rightarrow Y$, então X é metrizável. Com efeito, basta verificar que

$$d_X(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$$

define uma métrica em X , de forma que $\tau = \tau_{d_X}$.

4.5 TOPOLOGIA PRODUTO

Observação 4.4. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. O conjunto de todos os subconjuntos da forma $A \times B$, em que $A \in \tau$ e $B \in \sigma$, é claramente uma topologia em $X \times Y$, que é chamada apropriadamente de *topologia produto*. Observe que se \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 forem bases para (X, τ) e (Y, σ) , respectivamente, então

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 ; B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

é uma base para a topologia produto em $X \times Y$. Além disso, esta é a menor topologia em $X \times Y$ que torna as projeções $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ contínuas. Com efeito,

¹ Isto é, f preserva as distâncias.

os conjuntos em

$$\{\pi_X^{-1}[V] ; V \text{ aberto em } X\} \cup \{\pi_Y^{-1}[W] ; W \text{ aberto em } Y\}$$

geram tal topologia em $X \times Y$. Tal construção serve de motivação para a seguinte generalização.

Definição 4.8. Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de funções, na qual X é um conjunto e cada (Y_α, τ_α) é um espaço topológico. A *topologia fraca* induzida por \mathcal{F} é a topologia em X gerada pelos conjuntos

$$f_\alpha^{-1}[V], \quad \alpha \in A, V \in \tau_\alpha.$$

Observação 4.5. Por construção, cada f_α como na definição anterior é contínua relativamente à topologia fraca induzida pela família \mathcal{F} .

Definição 4.9. Seja $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos. A *topologia produto*² em

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} ; x_\alpha \in X_\alpha \forall \alpha \in A\}.$$

é a topologia fraca na qual as projeções

$$\pi_\alpha : \prod_{\beta \in A} X_\beta \longrightarrow X_\alpha, \quad \pi_\alpha((x_\beta)_{\beta \in A}) = x_\alpha,$$

são todas contínuas, de forma que os conjuntos $\pi_\alpha^{-1}[U]$, com U aberto em X_α constituem uma sub-base para essa topologia.

Observação 4.6. Note que a topologia produto é gerada pelos conjuntos da forma $\prod_{\beta \in A} V_\beta$, onde

$$V_\beta = \begin{cases} V, & \text{se } \beta = \alpha, \\ X_\beta, & \text{se } \beta \neq \alpha, \end{cases}$$

com V aberto em X_α . Assim, $\pi_\alpha^{-1}[V] = \prod_{\beta \in A} V_\beta$.

Exemplo 4.7. Nem todo produto de abertos na topologia produto é aberto. Por exemplo,

$$A = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right)$$

não é aberto em $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$.

² Também chamada de topologia de *Tychonoff*.

Proposição 4.9. Se $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família de conjuntos fechados em X_α , então $\prod_{\alpha \in A} F_\alpha$ é fechado em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Demonstração. Seja $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha \in A} F_\alpha$. Existe $\alpha_0 \in A$ tal que $x_{\alpha_0} \notin F_{\alpha_0}$. Como F_{α_0} é fechado, existe um aberto $V \subseteq X_{\alpha_0}$ com

$$x_{\alpha_0} \in V \quad \text{e} \quad V \cap F_{\alpha_0} = \emptyset.$$

Defina

$$V_\beta = \begin{cases} V, & \text{se } \beta = \alpha_0, \\ X_\beta, & \text{se } \beta \neq \alpha_0. \end{cases}$$

Então $B = \prod_{\beta \in A} V_\beta$ é aberto, $x \in B$ e $B \cap \prod_{\alpha \in A} F_\alpha = \emptyset$. Portanto, o produto $\prod_{\alpha \in A} F_\alpha$ é fechado. \square

Proposição 4.10. Se cada espaço topológico X_α , $\alpha \in A$, é T_i , para $i = 1, 2, 3$, então o produto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é T_i , $i = 1, 2, 3$.

Demonstração. Veja a Proposição 4.1.7 em (AURICHI, 2022). \square

Observação 4.7. Já sabemos pela Observação 3.6 que o produto de espaços normais não é, necessariamente, normal.

Proposição 4.11. Se cada espaço topológico X_α , $\alpha \in A$, satisfaz o primeiro (segundo) axioma de enumerabilidade, então o produto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ também o satisfaz.

Demonstração. Veja a Proposição 4.2.1 em (AURICHI, 2022). \square

Teorema 4.1 (Tychonoff). Se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma família de espaços compactos, então o produto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é compacto.

Demonstração. Veja o Teorema 5.2.1 em (AURICHI, 2022). \square

Observação 4.8 (Métrica em produto de espaços métricos). Se $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ são espaços métricos, então não é difícil perceber que a função

$$d : \prod_{i=1}^n X_i \times \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathbb{R},$$

dado por $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = d_1(x_1, y_1) + \dots + d_n(x_n, y_n)$ define uma métrica em $\prod_{i=1}^n X_i$, que por razões óbvias é chamada de *métrica produto*.

O “problema” reside em reproduzir tal construção para um número infinito de espaços, pois não se pode garantir, em geral, que a série

$$\sum_{\alpha \in A} d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$$

seja convergente, para uma família qualquer de espaços métricos $\{X_\alpha, d_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Definição 4.10. Seja $\{X_\alpha, d_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de espaços métricos e suponha que, para cada $\alpha \in A$, existe uma constante $c_\alpha > 0$ tal que a série $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha$ seja convergente e $d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \leq c_\alpha$ sejam quais forem $x_\alpha, y_\alpha \in M_\alpha$. Então a métrica em $M = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$,

$$d(x, y) = \sum_{\alpha \in A} d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha).$$

está bem definida, e torna o par

$$\left(M = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha, d \right)$$

um espaço métrico, chamado *produto* da família $\{M_\alpha, d_\alpha\}$. A métrica d é chamada *métrica produto*.

Observação 4.9. Se $M = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$, note que cada uma das projeções $p_\alpha : (M, d) \rightarrow (M_\alpha, d_\alpha)$ é contínua. Assim, se A_α é um subconjunto aberto de M_α , sua imagem inversa, $p_\alpha^{-1}(A_\alpha)$, é um subconjunto aberto de M . Os conjuntos desse tipo são chamados *abertos básicos do produto*.

Exemplo 4.8 (Espaço de Hilbert e cubo de Hilbert). Chamamos *espaço de Hilbert* ao espaço métrico H , constituído por todas as sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge, equipado com a métrica

$$d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

É possível mostrar (veja a p. 64 de (STEEEN; SEEBACH; STEEN, 1978)) que H é homeomorfo a $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, o produto enumerável de cópias de \mathbb{R} .

Seja $\mathcal{I} \subset H$ das sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $0 \leq x_j \leq 1/j$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Este espaço, equipado com a métrica induzida (subespaço), é chamado *cubo de Hilbert*, por ser homeomorfo ao produto $[0, 1]^\mathbb{N}$. Explicitamente, a função

$$g : \mathcal{I} \rightarrow [0, 1]^\mathbb{N}, \quad g(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$$

é um homeomorfismo, ou seja, $g : \mathcal{I} \cong H$.

Além disso, a métrica em \mathcal{I} coincide com a métrica produto e, como cada intervalo $[0, 1]$ é compacto, segue pelo teorema 4.1 que \mathcal{I} é um espaço métrico compacto.

5 ESPAÇOS METRIZÁVEIS

Neste capítulo trabalhamos resultados que caracterizam os espaços metrizáveis a partir dos axiomas de separação e enumerabilidade, apresentados anteriormente. No final demonstramos o teorema de metrização de Urysohn, que afirma que todo espaço T_2 , normal e com base enumerável, pode ser mergulhado no cubo de Hilbert, e portanto herda a sua métrica. Adotamos como referências principais os textos (AURICHI, 2022), (MUNKRES, 2000) e (MEZABARBA, 2025).

5.1 ALGUMAS OBSTRUÇÕES

Observação 5.1. Já sabemos pela proposição 2.2 que todo espaço metrizável é T_2 . Este fato constitui talvez a obstrução mais simples para verificar se um espaço topológico é ou não metrizável, e pudemos verificar sua aplicação conforme o exposto nos Exemplos 3.4 e 3.9. A seguir faremos a construção de um exemplo mais elaborado.

Exemplo 5.1 (Convergência em quase todo ponto). Seja $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ o conjunto de todas as funções reais $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos uma topologia em $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ tomando como base os conjuntos da forma

$$U(f; F, \{I_x\}_{x \in F}) = \{g \in \mathbb{R}^\mathbb{R} ; g(x) \in I_x \text{ para todo } x \in F\},$$

onde $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ é uma função dada, $F \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito e, para cada $x \in F$, o conjunto $I_x \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto.

Dessa forma, uma vizinhança básica de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ controla o valor da função apenas em um conjunto finito de pontos. Fora de F , nenhuma restrição é imposta. Nesta topologia, dizemos que uma sequência (g_n) converge para f se, para cada n , $g_n(x) = f(x)$ para todos os valores de x fora de um conjunto finito (dependente de n). É uma noção de convergência extremamente fraca, no sentido de que não exige controle uniforme nem controle pontual global.

Vejamos que tal topologia não é Hausdorff: Considere duas funções distintas $f, g \in Y$ tais que elas diferem apenas em um conjunto finito

$$K = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \neq g(x)\}$$

e vejamos que f e g não podem ser separadas por vizinhanças abertas distintas.

Seja $U(f; F, \{I_x\})$ uma vizinhança básica de f . Como F é finito, basta escolher F grande o bastante para conter o conjunto finito K onde f e g diferem. Nessa situação, teremos

$g \in U(f; F, \{I_x\})$ sempre que cada intervalo I_x contém $f(x)$. E de modo semelhante, toda vizinhança de g contém f .

Explicitamente, considere as funções $f \equiv 0$ identicamente nula e $g(x) = 1$ se $x = 0$ e $g(x) = 0$ para todo $x \neq 0$. Observe que elas diferem apenas no ponto 0. Assim, se $0 \notin F$, então toda vizinhança básica $U(f; F, \{I_x\})$ de f contém g . Se $0 \in F$, basta tomar I_0 um intervalo aberto contendo 0 para que novamente g pertença à vizinhança. Portanto não há abertos disjuntos que separem f de g .

Proposição 5.1. *Todo espaço metrizável é normal.*

Demonstração. Seja (X, τ_d) um espaço topológico metrizável, com métrica d , e sejam A e B subconjuntos fechados disjuntos de X . Para cada $a \in A$, escolhemos $\varepsilon_a > 0$ de tal modo que $B_{\varepsilon_a}(a) \cap B = \emptyset$ e, similarmente, para cada $b \in B$, escolhemos $\varepsilon_b > 0$ de tal modo que $B_{\varepsilon_b}(b) \cap A = \emptyset$. Definindo

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon_a/2) \quad \text{e} \quad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \varepsilon_b/2).$$

temos U e V conjuntos abertos que contêm A e B , respectivamente, e disjuntos. De fato, se existisse $z \in U \cap V$, então

$$z \in B(a, \varepsilon_a/2) \cap B(b, \varepsilon_b/2)$$

para algum $a \in A$ e algum $b \in B$. Pela desigualdade triangular, temos

$$d(a, b) < \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2}.$$

Mas se $\varepsilon_a \leq \varepsilon_b$, então $d(a, b) < \varepsilon_b$, de modo que a bola $B_{\varepsilon_b}(b)$ conteria o ponto a . Se $\varepsilon_b \leq \varepsilon_a$, então $d(a, b) < \varepsilon_a$, de modo que o ponto b estaria na bola $B_{\varepsilon_a}(a)$. Como nenhuma dessas situações é possível, segue o resultado. \square

Observação 5.2. Até agora, graças aos resultados dos Exemplos 3.8, 3.10 e Proposições 2.2 e 5.1 temos que todo espaço metrizável é T_0, T_1, T_2, T_3 e T_4 . Em símbolos, podemos sintetizar essa infirmação por

$$\text{Metrizável} \implies T_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Observação 5.3. Enquanto o exemplo 3.12 estabelece que todo espaço metrizável deve satisfazer o primeiro axioma de enumerabilidade, o mesmo não ocorre com o segundo axioma de enumerabilidade. De fato, se tomarmos a reta real com a métrica discreta veremos que este não satisfaz ao segundo axioma de enumerabilidade, já que a base $\{\{x\}; x \in \mathbb{R}\}$ é obviamente não-enumerável.

5.2 MERGULHO DE URYSOHN

Proposição 5.2. (*Urysohn*) Todo espaço de Hausdorff normal X , com base unumerável, é homeomorfo a um subespaço do cubo de Hilbert¹ \mathcal{I} . Consequentemente, X é metrizável.

Demonstração. A estratégia da demonstração consiste em construir uma forma de mergulhar X no cubo de Hilbert, no sentido do exemplo 4.6, razão pela qual o resultado é conhecido na literatura como *Teorema do mergulho de Urysohn* ou mesmo *Teorema de metrização de Urysohn*. O resultado seguirá do fato de que o cubo de Hilbert é metrizável, conforme o exposto no exemplo 4.8.

Para isso, seja $\mathcal{B} = (B_n)$ uma base enumerável de X . Diremos que um par ordenado $P = (B_m, B_n)$ é admissível quando $B_m \subset B_n$. Evidentemente, o conjunto dos pares admissíveis é enumerável. Escolhamos, de uma vez por todas, uma enumeração

$$(P_1, P_2, \dots, P_i, \dots)$$

dos pares admissíveis. Para cada par admissível $P_i = (B_m, B_n)$, podemos escolher uma função contínua $f_i : X \rightarrow C$ pondo, para todo $x \in B_m$, $f_i(x) = 1$ e $f_i(x) = 0$ para todo $x \in B_n$. Definimos uma aplicação $f : X \rightarrow C$, por

$$f(x) = (f_i(x)/2, f_i(x)/2^2, \dots).$$

segue que f é contínua. Mostraremos que f é injetora.

Como X é de Hausdorff, dados $x \neq y$, existe i em \mathcal{B} tal que $x \in B_m$, $y \notin B_n$. Assim, pelo Corolário 4.1, existe uma função f_i tal que $f_i(x) = 1$ e $f_i(y) = 0$. Logo, $f(x) \neq f(y)$.

Finalmente, para provar que f é um homeomorfismo de X sobre $f(X)$, resta mostrar que f transforma abertos de X em abertos de $f(X)$. É suficiente considerar um aberto da forma B_k . Dado B_k , seja $J \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices i tais que existe um par admissível $P_i = (B_m, B_n)$ cujo segundo elemento é B_k . Note que, quando $i \in J$, o conjunto

$$A_i = \{y \in C; y_i > 0\}$$

é aberto em C , pois $f_i(X \setminus B_k) = 0$. Logo, $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ também é aberto em C . Afirmamos que

$$f(B_k) = A \cap f(X),$$

o que garantirá que $f(B_k)$ é aberto em $f(X)$. Ora, em primeiro lugar, se $x \in B_k$, então, pelo lema, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m \subset B_n = B_k$. Assim, $P_i = (B_m, B_n)$ é um par admissível,

¹ Veja o Exemplo 4.8.

com $f_i(x) = 1$. Segue-se que $f(x) \in A_i \subset A$, donde $f(x) \in A \cap f(X)$. Isto mostra que

$$f(B_k) \subset A \cap f(X).$$

Reciprocamente, se $f(x) \in A \cap f(X)$ então existe $i \in J$ tal que $f_i(x) > 0$ e assim $x \in B_k$. Portanto, $A \cap f(X) \subset f(B_k)$. \square

Definição 5.1. Chamamos *variedade topológica* de dimensão n a qualquer espaço topológico X de Hausdorff que satisfaça o segundo axioma de enumerabilidade e que, além disso, para cada ponto $x \in X$, existam $U_x \subseteq X$ um aberto contendo x e um homeomorfismo $\varphi : U_x \rightarrow \varphi(U_x) \subseteq \mathbb{R}^n$. Tais espaços são bastante relevantes e constituem uma importante classe de espaços topológicos, podendo ser percebidos como uma generalização dos espaços euclidianos. Por essa razão podemos nos referir a eles como espaços localmente euclidianos.

Observação 5.4. Não é difícil perceber que toda variedade topológica é localmente compacta, ou seja, todo ponto possui uma vizinhança compacta. Basta, para isso, perceber que como $\varphi : U_x \rightarrow \varphi(U_x)$ é um homeomorfismo, então escolhemos uma bola aberta $B_r(\varphi(x)) \subset \varphi(U_x)$ de modo que

$$V_x = \varphi^{-1}(B_r[\varphi(x)])$$

será um compacto em X , pela continuidade de φ , com $x \in \text{int } V_x$, ou seja, uma vizinhança de x em X .

Proposição 5.3. *Todo espaço de Hausdorff localmente compacto é regular.*

Demonstração. Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Para $x \in X$ e F fechado com $x \notin F$, tome K um compacto em X tal que $x \in \text{int } K$. Como X é Hausdorff, para cada $y \in F \cap K$ podemos escolher abertos disjuntos U_y e V_y tais que $x \in U_y$ e $y \in V_y$.

Observando que $F \cap K$ é compacto (fechado em um compacto Hausdorff), e que os conjuntos $V_y \cap (F \cap K)$ formam uma cobertura aberta de $F \cap K$, então existe uma subcobertura finita, digamos $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$.

Sejam

$$V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} \quad \text{e} \quad U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i},$$

com $F \cap K \subseteq V$, $x \in U_y$ para cada $y \in F \cap K$, e $x \in U$. Além disso, como $U_y \cap V_y = \emptyset$, então também U e V são disjuntos.

Agora, considerando os conjuntos $U \cap \text{int } K$ e $V \cup (X \cap K)$, observe que eles são abertos (pois são união de abertos). Além disso, como $x \in U$ e $x \in \text{int } K$, então $x \in U \cap K$.

Por fim, observe que, como $F \subseteq V \cup (X \setminus K)$, temos $\text{int } K \subseteq K$, $X \setminus K \subseteq X \setminus \text{int } K$ e portanto $\text{int } K \cap (X \setminus K) = \emptyset$. Com isso temos

$$(U \cap K) \cap (V \cup (X \cap K)) = \emptyset,$$

que são os conjuntos disjuntos que separam x e F , como queríamos. \square

Corolário 5.1. *Toda variedade topológica é metrizável*

Demonstração. Segue imediatamente da proposição anterior juntamente com o teorema de Urysohn. \square

Corolário 5.2. *Para que um espaço compacto de Hausdorff X seja metrizável, é necessário e suficiente que X tenha base enumerável.*

Demonstração. Com efeito, se X possui uma base enumerável, então X é metrizável porque todo espaço compacto de Hausdorff é normal, graças à Proposição 3.10. Reciprocamente, basta notar que todo espaço métrico compacto possui uma base enumerável. \square

Exemplo 5.2. Enquanto o espaço $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ é de fato metrizável (vide Exemplo 4.8), o Corolário anterior nos permite concluir que qualquer espaço $[0, 1]^{\Lambda}$, para Λ um conjunto não-enumerável, não é metrizável (considerando a topologia produto), por não possuir base enumerável. De fato, basta ver que os abertos em $[0, 1]^{\Lambda}$ são necessariamente gerados por conjuntos conforme a Observação 4.6. Mais geralmente, podemos estabelecer que $[0, 1]^{\Lambda}$ é metrizável se, e somente se, Λ é enumerável.

6 CONCLUSÃO

O estudo desenvolvido ao longo deste trabalho teve como propósito investigar critérios clássicos de metrizabilidade, com ênfase nos axiomas de separação e de enumerabilidade, culminando na apresentação e demonstração do Teorema de Metrização de Urysohn. Ao longo do texto foi possível observar que, embora a definição de métrica seja por vezes independente, *a priori* à topologia, existem condições puramente topológicas (separação e enumerabilidade) que são suficientes para caracterizar quando uma topologia admite uma métrica compatível. Nesse sentido, o Teorema de Urysohn, apresentado originalmente por P. Urysohn em 1925, constitui uma dos resultados fundamentais da Teoria.

Entretanto, apesar de seu papel central, o Teorema de Urysohn representa apenas uma parte de um panorama muito mais amplo. Muitos outros resultados profundos foram desenvolvidos ao longo do século XX, como os Teoremas de Metrização de Nagata–Smirnov, que estabelecem condições equivalentes de metrizabilidade baseadas em noções de bases σ -discretas e redes locais estruturadas (veja, por exemplo, o Capítulo 4 de (ENGELKING, 1989)) que refinaram significativamente nossa compreensão da metrizabilidade, proporcionando critérios mais flexíveis e aplicáveis a contextos mais gerais.

Assim, observamos também que, embora seja bem desenvolvida, ainda permanecem diversas questões abertas e linhas de pesquisa ativas envolvendo conceitos de metrizabilidade e suas generalizações (problemas envolvendo espaços submetrizáveis, paracompactos, espaços de funções ou produtos infinitos em geral), com publicações recentes em muitos periódicos internacionais.

Dessa forma, concluímos destacando que a metrizabilidade, longe de ser um assunto esgotado, permanece um campo fértil para estudo e pesquisa. Assim, embora este trabalho tenha se limitado a apresentar resultados clássicos e essenciais, o tema ainda oferece inúmeras oportunidades para aprofundamento, seja por meio da investigação de teoremas mais gerais, seja pela exploração de novas estruturas topológicas cujas propriedades métricas ainda não são plenamente compreendidas.

REFERÊNCIAS

- AURICHI, Leandro F. **Topologia Geral**. São Paulo: LF Editorial, 2022.
- ENGELKING, Ryszard. **General topology**. Revised edition. Berlin: Heldermann, 1989.
- LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2009.
- _____. **Espaços Métricos**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- _____. **Análise Real, v. 1: Funções de uma Variável Real**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- MEZABARBA, Renan Maneli. Fundamentos de topologia geral. Manuscrito disponível em <https://github.com/mezabarbarm/Fund_Top_Geral>. 2025.
- MUNKRES, James. **Topology**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.
- STEEN, Lynn Arthur; SEEBACH, J Arthur; STEEN, Lynn A. **Counterexamples in topology**. New York: Springer, 1978.