**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL**
**CAMPUS DE TRÊS LAGOAS**
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**
**PROFMAT**

**DANILO APARECIDO MATIAS DOS SANTOS**

# A FUNÇÃO QUADRÁTICA NO 9.º ANO: PRÁTICAS COM ROTEIROS E PROJETOS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

**TRÊS LAGOAS – MS**
**2025**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL**

**CAMPUS DE TRÊS LAGOAS**

**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**PROFMAT**

# A FUNÇÃO QUADRÁTICA NO 9.º ANO: PRÁTICAS COM ROTEIROS E PROJETOS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Câmpus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade**

**TRÊS LAGOAS – MS**

**2025**

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PÓLO DE TRÊS LAGOAS/MS

**A FUNÇÃO QUADRÁTICA NO 9.º ANO: PRÁTICAS COM ROTEIROS E PROJETOS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO**

**DANILO APARECIDO MATIAS DOS SANTOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade (Orientador)
UFMS – CPTL

Prof. Dr. Enio Garbelini
Unifadra – Faculdades de Dracena

Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi
UFMS – CPTL

Três Lagoas, 26 de agosto de 2025.

## DEDICATÓRIA

Primeiramente, a Deus, pois "Digno És, Senhor, de receber Glória, e Honra, e Poder; porque Tu criaste todas as coisas, e por Tua vontade são e foram criadas."

Aos meus familiares: Waldemar Targa e Maria Aparecida Lemes Targa, meus avós maternos, e à minha mãe, Suely Aparecida Targa, que não mediram esforços, dentro do que lhes era possível, para me educar. À minha esposa, Elke Carolino dos Santos, bússola e refrigério em minha jornada, e ao meu amado filho, Tony Carolino dos Santos, motivações pelas quais não desisto de lutar, razões pelas quais desejo ser uma pessoa melhor.

A todos os Professores do Curso, em especial ao meu orientador, Allan Edley, bem como a todos os docentes que tive ao longo da vida, que com sabedoria, preparo e excelência contribuíram para a construção do meu caráter e tiveram papel fundamental na minha formação. Verdadeiros exemplos, em quem me inspiro.

Aos meus queridos alunos dos nonos anos, turmas D e E, de 2024, bem como ao estimado colega Wesley Pedracci Custódio, Professor das aulas de reforço, parceiros na realização deste projeto. Ao Trio Gestor da Escola Municipal Leônidas Ramos de Oliveira — Priscila Estevam Engel, Coordenadora Pedagógica; Danielly Andrade Silva, Vice-Diretora; e Maria Lúcia Pereira de Souza Urdiales Fonseca, Diretora —, assim como à Professora Coordenadora da SMEECTL – Tupi Paulista/SP, Alessandra Rodrigues Cezário Gomes, e a Adelmo Merighi Filho, pela formação contínua em Avaliação da Aprendizagem, Gestão e Liderança em sala de aula.

A todos os pares, ou seja, aos companheiros de curso — tanto desta etapa, turma 2023-2025 da UFMS de Três Lagoas, quanto da turma 2013-2015 da UNESP de Presidente Prudente — que, com seus exemplos de vida e experiências, agregaram imenso valor a tudo o que sou, em especial meus companheiros de viagem, Bruno e Maurício.

Por fim, quero deixar registrado algo que foi crucial para a minha retomada aos estudos no PROFMAT: a leitura da dedicatória do seu TCC, Tiago Grajanin de Souza. Saiba que sua lembrança me motivou a retomar essa odisseia e, por essa razão, você tem o meu respeito e minha admiração. Como você mesmo disse: tudo no tempo de Deus.

*“É no conhecimento que existe a chance de libertação”*

*Leandro Karnal*

# SUMÁRIO

## RESUMO

Este projeto tem como objetivo investigar como a experiência com jogos, brinquedos e protótipos, bem como o uso de manuais e tutoriais, pode influenciar a aprendizagem da matemática, em especial, equações e funções do 2.º grau. Através de uma sequência didática inspirada na cultura *maker*, buscamos entender como essa abordagem pode promover a iniciativa e a autonomia dos alunos, além de facilitar a conexão entre atividades lúdicas com as convencionais, ajudando-os a desenvolver competências e habilidades em um ambiente de aprendizagem mais significativo.

## PALAVRAS-CHAVE

Roteiros; Projeto pedagógico; Leitura; Pensamento computacional; Ensino.

**ABSTRACT**

This project aims to investigate how experience with games, toys, and prototypes, as well as the use of manuals and tutorials, can influence the learning of mathematics, particularly quadratic equations and functions. Through a didactic sequence inspired by maker culture, we seek to understand how this approach can promote students' initiative and autonomy, in addition to facilitating the connection between playful activities and conventional ones, helping them develop competencies and skills in a more meaningful learning environment.

**KEYWORDS**

Scripts; Pedagogical project; Reading; Computational thinking; Teaching.

# 1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho aborda a dificuldade dos alunos em ler e compreender os enunciados das situações-problema em Matemática, especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental. Com o objetivo de propor uma solução para esse problema, decidimos observar a influência de projetos práticos e roteiros pré-definidos, como jogos educativos de montagem com certa complexidade e, como fase mediadora, a robótica com Arduino, introduzindo os alunos na programação e construção de robôs, pois o foco da observação recaiu sobre os impactos que a semelhança com esse tipo de dinâmica poderia causar na aprendizagem.

O que pretendemos é a ressignificação da Matemática como algo desafiador e prazeroso, por isso, buscou-se apresentar os conceitos matemáticos de forma teórica e prática, fortalecendo o senso de colaboração, aumentando o engajamento e fidelização, ou seja, promovendo uma participação mais ativa nas aulas.

A avaliação diagnóstica dessas turmas, por exemplo, trouxe à tona a realidade educacional dos alunos revelando um panorama complexo e desafiador. Observou-se que os alunos se dividiam em três grupos distintos, cada um com suas particularidades e desafios: aqueles com conceitos fragmentados, que conseguiam realizar atividades com auxílio, mas ainda careciam de uma compreensão mais sólida dos conteúdos; também aqueles alunos que não realizavam atividades, muitas vezes por não conseguirem enxergar a relevância e aplicabilidade da Matemática em suas vidas e, por fim, os alunos desconectados do ambiente escolar, para os quais a escola parece algo distante de sua realidade.

O estudo de Cobuci (2021), realizado no âmbito do PROFMAT pela Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), é uma importante referência para projetos que buscam integrar a Robótica Educacional ao ensino de funções matemáticas. A autora desenvolveu uma sequência didática que uniu conteúdos de função afim e função quadrática à experimentação prática com robótica baseada na plataforma Arduino, promovendo uma abordagem interdisciplinar com a física. Os resultados mostraram que o uso de ferramentas tecnológicas favoreceu o interesse dos alunos, aumentou o engajamento nas aulas e contribuiu para a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos.

Além disso, a pesquisa evidenciou que a interação entre física, matemática e robótica ampliou o entendimento conceitual dos estudantes, especialmente por meio da realização de atividades experimentais que estimularam a participação ativa e colaborativa dos discentes.

Cobuci (2021, p. 70) afirma que:

> *“Com um equipamento sólido, diferenciado de aulas expositivas usando somente o quadro, traz clareza de conteúdo e concentração dos alunos, o que torna um benefício para o ensino. Assim, podemos afirmar que como vantagem a robótica educacional associada com a física e matemática proporciona ampliação dos conhecimentos e aproximação dos conteúdos de forma interdisciplinar.”*

O trabalho de Ribeiro (2023), desenvolvido no âmbito do PROFMAT pela Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, reforça a relevância da utilização de ferramentas tecnológicas, como a robótica, no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, especialmente no 9º ano do Ensino Fundamental. Em sua pesquisa, o autor destaca que a mediação pedagógica, aliada ao uso de tecnologias, potencializa a compreensão dos conteúdos matemáticos e favorece o desenvolvimento de habilidades cognitivas e sociais nos alunos.

Além disso, Ribeiro (2023) evidencia que a implementação de atividades com robótica desperta o interesse dos estudantes e aponta a importância de se estruturar ambientes escolares tecnologicamente equipados para atender às novas demandas educacionais, sugerindo a criação de salas tecnológicas voltadas para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Ribeiro (2023, p. 85) destaca que:

> *"A inserção de elementos tecnológicos na mediação do ensino de temas matemáticos em sala de aula sempre foi um objetivo na construção das minhas práticas pedagógicas. [...] A mediação de ferramentas tecnológicas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática pode auxiliar a compreensão de conteúdo e estimular habilidades cognitivas e sociais entre os alunos."*

Peters (2023), em sua pesquisa desenvolvida no âmbito do PROFMAT pela Universidade Federal do Espírito Santo, destaca a importância de promover a formação de professores voltada à apropriação do pensamento computacional e da robótica educacional, de forma alinhada às diretrizes da BNCC e ao Currículo do Estado do Espírito Santo. O autor defende que o desenvolvimento dessas competências, sobretudo a Competência Geral nº 5 da BNCC, é essencial para preparar os alunos para os desafios do mundo digital e tecnológico contemporâneo.

Além disso, Peters (2023) enfatiza a necessidade de planejar estratégias didáticas que integrem o uso de tecnologias digitais de forma criativa e significativa, promovendo a resolução de problemas reais e o fortalecimento da autonomia dos estudantes. Sua experiência com o curso de formação de Professores, denominado "Formação Ensino Maker", que contou com mais de 1350 inscrições para apenas 400 vagas disponíveis, demonstra o crescente interesse dos educadores por essa temática e a urgência de inserir práticas tecnológicas no contexto educacional brasileiro.

Segundo Peters (2023, p. 194), "a necessária atualização dos currículos escolares para uma escola formadora mais moderna e atualizada" reforça a importância de práticas educativas baseadas em tecnologias emergentes, como a robótica educacional e o pensamento computacional.

A diversidade de perfis dos alunos dentro dessas turmas exigiu abordagens pedagógicas mais flexíveis, inclusivas e que atendessem às necessidades específicas de cada grupo. As metodologias foram cuidadosamente planejadas para promover um ambiente de aprendizagem que favoreça a construção significativa do conhecimento.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos, organizados da seguinte forma: o Capítulo 1 apresenta o projeto de pesquisa, com a descrição detalhada dos elementos que compõem cada uma de suas fases; o Capítulo 2 relata todo o desenvolvimento do projeto, incluindo os procedimentos metodológicos adotados e os resultados obtidos; o Capítulo 3 aborda as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com ênfase na Competência Geral n.º 5, além de analisar as contribuições de alguns especialistas em aprendizagem e avaliação no contexto do processo de ensino-aprendizagem; e, por fim, o Capítulo 4 apresenta as conclusões gerais do estudo, com destaque para os principais aprendizados e contribuições que o trabalho pretende oferecer.

# 2 CAPÍTULO 1: O PROJETO DE PESQUISA

**A Função Quadrática no 9.º Ano: Práticas com Roteiros e Projetos como Estratégia de Ensino**

## 2.1 OBJETIVO, METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

O presente estudo tem como objetivo geral investigar o impacto de uma sequência didática fundamentada em projetos práticos, manuais de instruções e roteiros predefinidos na aprendizagem da matemática, buscando compreender de que forma essa abordagem pode contribuir para o desenvolvimento da iniciativa e da autonomia na resolução de problemas e na própria construção do conhecimento. Pretende-se, de forma específica, analisar o engajamento e a motivação dos alunos ao realizarem projetos práticos e seguirem instruções; reconhecer a organização do trabalho em atividades mão na massa aplicadas ao estudo da função quadrática; identificar as dificuldades, fracassos e êxitos apresentados pelos estudantes ao resolverem problemas matemáticos propostos ao longo do projeto; avaliar a desenvoltura dos alunos na compreensão de conceitos e na busca por soluções para adversidades encontradas; e comparar o desempenho em atividades tradicionais de matemática com aquele obtido em atividades baseadas em projetos e roteiros estruturados.

A metodologia prevê a participação de alunos dos nonos anos D e E, anos finais do Ensino Fundamental – período vespertino – da Escola Municipal Leônidas Ramos de Oliveira, localizada em Tupi Paulista/SP. Os instrumentos de coleta de dados incluem a participação oral mediante apontamentos, dúvidas e explicações; a realização de questionários e listas de exercícios; a observação do manuseio de manuais e tutoriais para a montagem de brinquedos ou mecanismos; a produção de trabalhos com material reciclado; e a reprodução de modelos colaborativos em desafios matemáticos inseridos no contexto de roteiros que exijam participação individual ou coletiva.

Os procedimentos contemplam a aplicação de um pré-teste para avaliar o conhecimento prévio dos alunos em matemática, seguido do desenvolvimento de uma sequência didática composta por seis fases integradas. A primeira fase consiste em construir projetos simples, como brinquedos e kits de eletrônica, a partir de manuais de instruções. A segunda fase busca introduzir as equações do segundo grau, roteirizando a resolução pela fórmula de Resolução da Equação do 2.º Grau. Na terceira fase, propõe-se iniciar a robótica com a construção de projetos mais elaborados, como pisca-piscas, semáforos, cancelas, robôs seguidores de linha e braços robóticos, utilizando kits e vídeos tutoriais, bem como o ambiente Tinkercad, a fim de compreender a lógica de programação por meio da construção em blocos. A quarta fase explora a regra da soma e do produto para a resolução de equações quadráticas, com foco no caso particular em que $a = 1$. A quinta fase destina-se à apresentação oral e escrita dos trabalhos ao longo das aulas e durante eventos escolares. Por fim, a sexta fase estabelece a relação entre o projeto e conceitos matemáticos, seguindo roteiros que orientam a observação dos coeficientes, o cálculo do discriminante, a determinação das raízes e das coordenadas do vértice, bem como o esboço do gráfico da função quadrática, permitindo também realizar o processo inverso, ou seja, determinar a função, nas formas geral e canônica, a partir da observação de uma parábola.

Após a execução das fases, será aplicado um pós-teste para avaliar a aprendizagem dos alunos, mantendo as características de atividades mão na massa e explorando tanto questões objetivas quanto roteiros de resolução. Os dados coletados, de natureza qualitativa e quantitativa, serão analisados de modo a possibilitar uma compreensão abrangente dos resultados.

## 2.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática proposta fundamenta-se em pressupostos teóricos que articulam a cultura *maker* com o ensino da matemática, priorizando a aprendizagem significativa, a resolução de problemas e a aprendizagem para o domínio. A integração entre projetos práticos e conceitos matemáticos favorece a construção de significados e a aquisição de conhecimento, enquanto os desafios propostos incentivam a aplicação dos conteúdos em situações reais. A prática constante, aliada ao *feedback* docente, busca promover o domínio dos conceitos e estabelecer conexões com a realidade, tornando a aprendizagem mais relevante e funcional.

Entre as contribuições esperadas, destacam-se o fortalecimento das competências leitora e escritora em benefício da resolução de problemas e da tomada de decisões; a oferta de uma alternativa metodológica que torne o ensino da matemática mais atrativo, significativo e desafiador; e o estímulo ao desenvolvimento de habilidades essenciais para o século XXI, como o domínio de novas linguagens, a criatividade e o trabalho em equipe. Espera-se, ainda, que a prática pedagógica desenvolvida possa ser compartilhada e replicada em outros contextos, oferecendo subsídios para a elaboração de novas sequências didáticas mais eficazes e transformadoras.

A proposta aqui delineada oportuniza aos alunos o contato com jogos, brinquedos e projetos de robótica básica que demandam a utilização de manuais ou tutoriais para sua execução, permitindo que reconheçam semelhanças entre as dinâmicas transversais e as abordagens convencionais do ensino, contemplando adaptações curriculares que vão desde a introdução ao estudo das equações quadráticas até procedimentos mais complexos, como o esboço de gráficos e a determinação da função nas formas geral e canônica a partir da análise de parábolas. Dessa forma, o trabalho busca explorar de maneira aprofundada os conteúdos programáticos do 9.º ano do Ensino Fundamental no componente curricular de Matemática, com ênfase na função quadrática.

## 2.3 AVALIAÇÃO

A avaliação do projeto será conduzida de forma contínua e processual, abrangendo todo o período de desenvolvimento da sequência didática e contemplando instrumentos variados que possibilitem analisar, de maneira abrangente, a aprendizagem dos alunos e o impacto da metodologia adotada. Em vez de aplicar um pré-teste pontual, será utilizado o histórico escolar detalhado das turmas participantes, construído a partir do acompanhamento sistemático realizado desde o 8.º ano do Ensino Fundamental. Esse histórico incluirá o desempenho em avaliações bimestrais, médias finais, registros de participação em atividades escolares, observações pedagógicas e evidências coletadas ao longo das aulas regulares e de reforço. Esse mapeamento prévio permitirá identificar padrões de aprendizagem, lacunas conceituais e dificuldades recorrentes, especialmente no que se refere à resolução de problemas matemáticos e à compreensão de conteúdos relacionados à função quadrática.

Durante a execução das atividades do projeto, serão registradas observações sistemáticas sobre o desempenho individual e coletivo dos alunos, com especial atenção para o nível de engajamento, a motivação demonstrada e a postura diante dos desafios propostos. Serão analisadas as interações entre os estudantes durante a realização de projetos práticos, a capacidade de seguir instruções contidas em manuais e roteiros, a qualidade das soluções encontradas para problemas apresentados e a habilidade de adaptar ou modificar procedimentos diante de imprevistos. Esses registros, de natureza qualitativa, incluirão anotações, fotografias e, quando pertinente, gravações em áudio ou vídeo, possibilitando uma análise mais detalhada do processo de aprendizagem.

A avaliação também contemplará a análise das produções dos alunos, como a montagem de protótipos, a elaboração de relatórios escritos e a apresentação oral dos resultados obtidos. Nesses momentos, serão considerados critérios como clareza na comunicação, coerência na explicação dos procedimentos, pertinência na aplicação de conceitos matemáticos e criatividade na resolução de problemas. Serão igualmente analisadas as respostas a questionários e listas de exercícios, permitindo acompanhar o desenvolvimento conceitual e a consolidação dos conteúdos ao longo do projeto.

Ao término das fases da sequência didática, será aplicado um pós-teste estruturado de forma a dialogar diretamente com as experiências vivenciadas no decorrer do projeto. O instrumento contemplará tanto questões objetivas e dissertativas quanto tarefas práticas que exijam a utilização de roteiros de resolução e a transposição de conceitos matemáticos para contextos aplicados, como a programação e a simulação de circuitos. Essa estratégia permitirá avaliar não apenas a retenção dos conteúdos, mas também a capacidade dos alunos de mobilizá-los para resolver situações inéditas.

Os dados coletados, de natureza quantitativa e qualitativa, serão analisados de maneira integrada. A análise quantitativa possibilitará comparar o desempenho inicial (identificado no histórico escolar e nos registros pedagógicos) e final (resultante das avaliações e do pós-teste), mensurando os avanços obtidos. Já a análise qualitativa permitirá compreender nuances do processo de aprendizagem, identificando mudanças de postura, evolução nas estratégias de resolução de problemas e ampliação da autonomia intelectual. Essa combinação de enfoques tende a fornecer uma visão ampla e consistente dos resultados, permitindo não apenas verificar a eficácia da proposta, mas também identificar elementos passíveis de aprimoramento em futuras implementações.

# 3 CAPÍTULO 2: DESENVOLVIMENTO

O projeto teve início no começo do segundo bimestre do ano letivo de 2024. Sendo assim, como as turmas observadas do 9.º ano permaneceram, por dois anos, sob acompanhamento dos mesmos professores, tanto o titular das aulas quanto o professor de reforço da aprendizagem, o vínculo de permanência possibilitou observar e registrar o desempenho desses alunos com mais clareza e assertividade.

## 3.1 FASE 1: CONSTRUÇÃO DE MÁQUINAS SIMPLES

Iniciamos o projeto com as duas turmas, concomitantemente ao conteúdo curricular, onde no total de cinco aulas semanais, separamos duas delas para a realização do projeto, propondo a montagem de brinquedos que oferecem certo nível de desafio para sua realização, sendo imprescindível a leitura de seus manuais de montagem – Figura 1.

Figura 1 – Kits de Montagem para Máquinas Simples

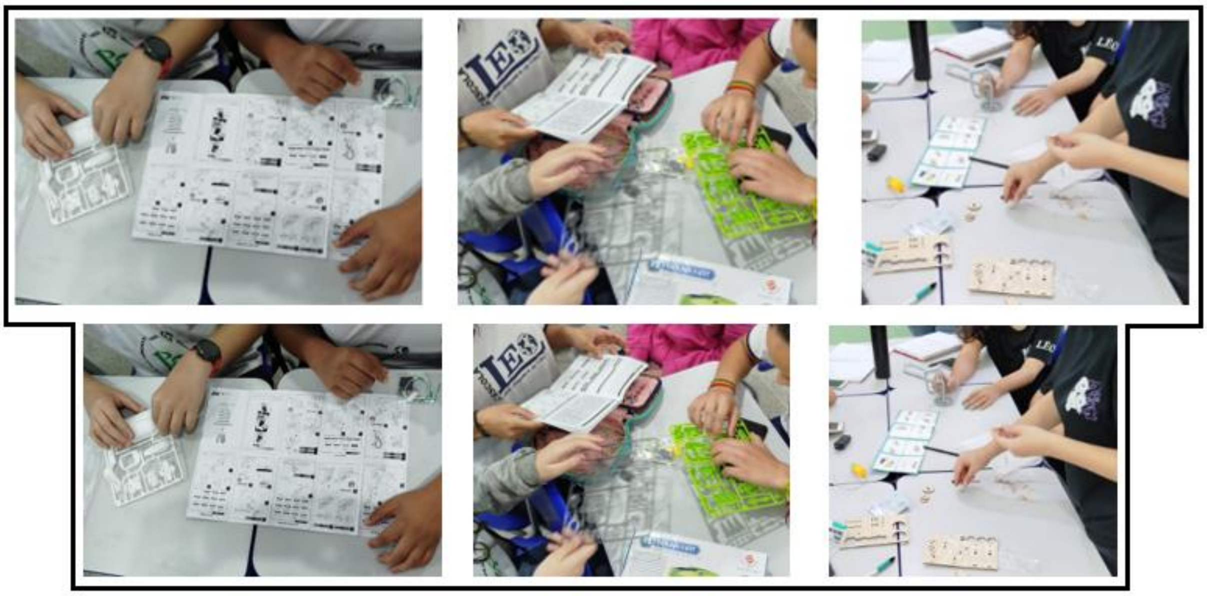

Fonte: Autoria Própria (2025)

Dividimos cada turma em quatro grupos e distribuímos cada kit de peças, ou seja, cada jogo conforme os alunos os escolhessem, seja pela predileção ou curiosidade, mas também houve a necessidade de direcionar artefatos mais simples para grupos cuja presença de alunos com menores expectativas de aprendizagem, dentro da avaliação das Professoras do Atendimento Educacional Especializado (AEE), era mais acentuada. Houve a possibilidade de utilização do mesmo kit nas duas turmas pelo fato do jogo/brinquedo oferecer mais de uma possibilidade de construção.

Após a entrega desses brinquedos, mesmo sendo notório o entusiasmo, os alunos manifestaram bastante receio ao primeiro contato, ficando muito ressabiados até mesmo de abrir as caixas inclusive os pacotes. A partir disso, registramos nossa primeira observação e imediata constatação de que essa experiência seria uma ótima simulação do que comumente enfrentamos em sala de aula, e não apenas no ensino da matemática – as recorrentes perguntas dos alunos, como: “Professor, o que é para fazer?” ou “Professor, como a gente faz isso?” – Na verdade, dentro das realidades dessas turmas de nonos anos, há muito tempo essa era uma pergunta que deixou de acontecer, ora pelo formato de aula não proporcionar contato suficientemente interessante com o assunto para despertar a curiosidade devido ao formato engessado da dinâmica tradicional, ora pela assumida inércia dos alunos ao declararem: “olha Professor, hoje eu não estou a fim”, pois os conteúdos do cardápio curricular não estabelecem comunicação com suas realidades.

Os alunos foram conscientizados da necessidade de ler os manuais de instrução e montagem, por mais simples que fossem os brinquedos e, a depender do *game* e seu nível de complexidade, buscar tutoriais em vídeos na internet, pois alguns ofereciam essa possibilidade ao mirar no QR code de suas embalagens. Na Figura 2, temos algumas imagens que evidenciam esse primeiro contato com os manuais e montagem inicial.

Figura 2 – Primeiro Contato com o Material



Fonte: Autoria Própria (2025)

O projeto foi aplicado em duas aulas por semana, nas ocasiões de encontro duplo dessas aulas e, evidentemente, alguns grupos conseguiram a montagem de seus projetos no primeiro encontro, enquanto outros, mediante a complexidade do seu kit, precisaram de até quatro encontros para fechar o *game*.

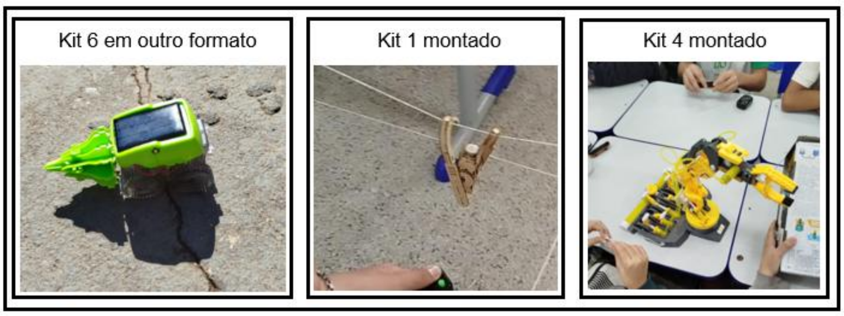
A escolha e utilização desses artefatos, ou seja, desses brinquedos ou mecanismos, possibilitou durante a execução dessa primeira etapa o estudo e a observação das trocas de energia, pois alguns brinquedos possuem esse princípio da captação do calor e luz solar para a realização de seu movimento mecânico (energia solar em energia cinética); a troca da energia hidráulica em energia mecânica, energia elétrica em cinética ou a simples troca de energia para a sustentação e equilíbrio – Figura 3.

Figura 3 – Primeiros Exemplos Montados


Fonte: Autoria Própria (2025)

Essa experiência nos chamou a atenção para dois fatos apontados pelos alunos, o primeiro foi o reconhecimento de que esses brinquedos executam movimentos simples, ou seja, tarefas simples demais, com questionamentos do tipo: “Professor, o brinquedo só anda pra frente?” e, o segundo, dentro do que esperávamos, a percepção das trocas de energia – deixando evidente inquietação e a necessidade de se explorar algo dentro da proposta com a programação com o Arduino, para abrir mais o leque de possibilidades em se tratando da execução de tarefas diversificadas.

Figura 4 – Novos Modelos Montados



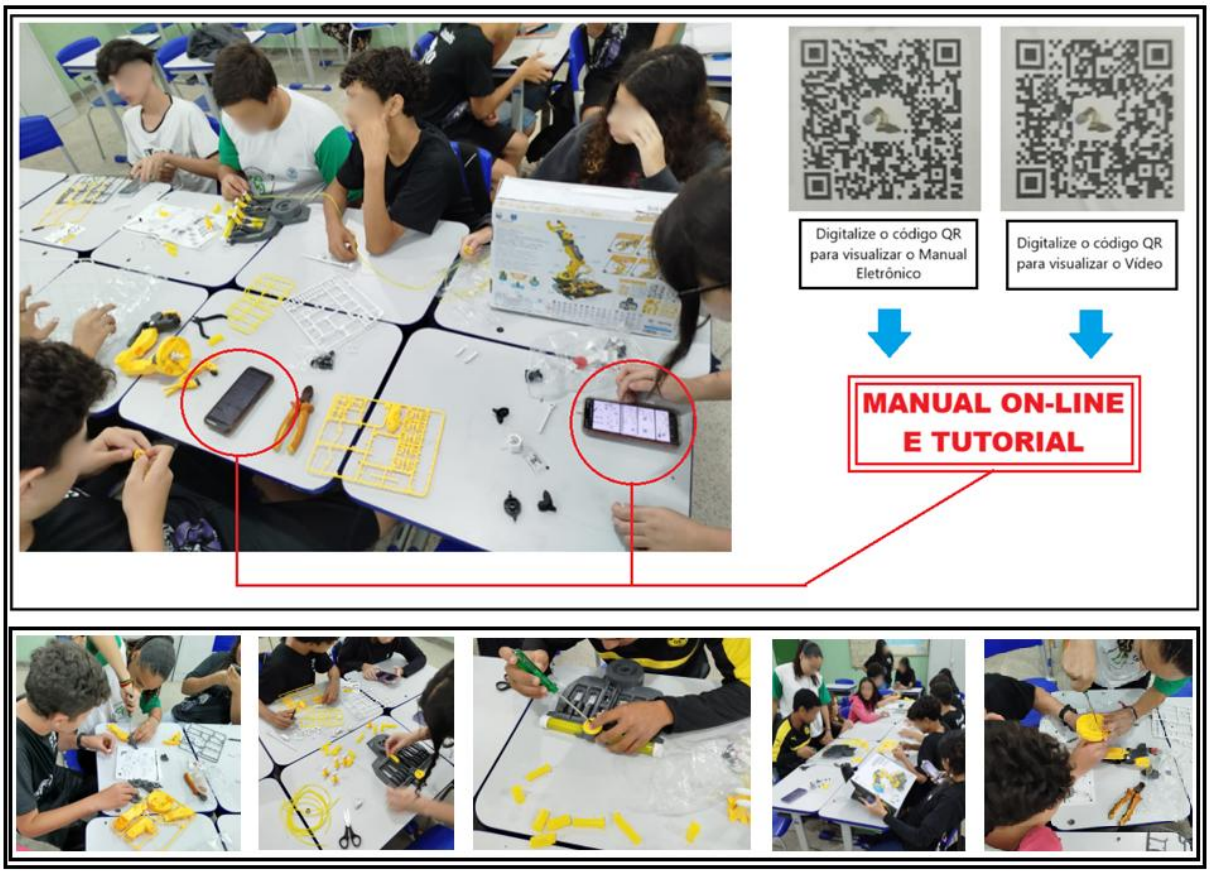

Fonte: Autoria Própria (2025)

Antes de partirmos para a fase de adaptação curricular com a introdução ao estudo de Equações do 2.º Grau, conseguimos a montagem de mais dois artefatos diferentes e, ainda, mais a reconfiguração de um projeto já realizado – Figura 4.

Como foi relatado anteriormente, para a realização deste trabalho separamos duas aulas de um total de cinco semanais e, apesar de alguns desses projetos serem finalizados na primeira ou segunda semanas, outros precisaram de um prazo mais dilatado, caso do kit 4 e do kit 2, que tiveram suas conclusões bem mais adiante, quando outras fases do projeto estavam em curso.

Algo relevante a se declarar a respeito do kit 4, de longe, foi o projeto mais desafiador para as duas turmas, pois foram necessárias 12 (doze) aulas ao todo para sua conclusão. Ou seja, seis semanas de inteira dedicação e, para melhor aproveitamento do kit e participação das duas turmas, a primeira se encarregou da base nas seis primeiras aulas – Figuras 5, enquanto a segunda turma ficou responsável pela montagem do braço e de toda a parte hidráulica nas seis aulas seguintes – Figura 6.

Figura 5 – Manual Digital (Turma E)




Fonte: Autoria Própria (2025)

Figura 6 - Finalização do Braço Hidráulico (Turma D)

Fonte: Autoria Própria (2025)

Outro ponto importante a se relatar é como a leitura desses manuais se deu, pois, a origem desses kits de montagem é chinesa, logo, seus manuais e embalagens trazem suas orientações em mandarim. Isso a princípio quis se mostrar como uma barreira, mas não demorou até que alguns percebessem que poderiam utilizar o tradutor do Google Lens[1] para traduzir os textos. Os alunos com maior clareza sobre a ferramenta socializaram a habilidade com os demais e, a partir disso, a língua não era mais algo que atrapalhava a leitura do texto como ele está escrito, primeiro modelo de leitura observado. Além da leitura via a decodificação de letras, observou-se a leitura de imagens, mediante a associação das figuras com as peças ainda em seus gabaritos e, também, aquilo que podemos chamar de leitura intuitiva, baseada na comparação e associação que os alunos faziam a relacionar uma peça a outra pelo tamanho, cor, encaixe, formato etc., para concluir determinado estágio do projeto.

O que chama muito a atenção é o fato de uma estratégia dessas requerer um tempo considerável, 40% (quarenta por cento) da grade semanal, isso poderia comprometer o desenvolvimento dos conteúdos previstos para os bimestres em que as atividades *maker* ocorreram. Pelo contrário, a redução de tempo para a apresentação convencional desse conteúdo não foi um fator a ser considerado como um revés. Claro que a adaptação curricular, de certa forma, tende a abreviar bastante a carga de fundamentação teórica, mas foi observada melhora no desempenho e interesse significativos por parte dos alunos.

---

[1] O Google Lens é uma ferramenta de inteligência artificial que permite pesquisar o que está à vista numa imagem, foto ou câmera. Ele compara os objetos na imagem com outras imagens e classifica-os com base na relevância e semelhança.

## 3.2 FASE 2: INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DO 2.º GRAU

Sabemos da importância que esse conteúdo possui para as turmas do 9.º ano, pois as habilidades de reconhecer e resolver uma equação do 2.º grau, bem como de distinguir suas características em relação às equações do 1.º grau, precisam estar devidamente consolidadas para o desenvolvimento de aprendizagens futuras.

Nesse sentido, é fundamental que o professor realize uma breve retomada sobre as equações do 1.º grau em seus diferentes formatos, evidenciando de forma clara as diferenças entre os dois tipos, tanto no que se refere ao expoente da incógnita quanto aos procedimentos de cálculo que cada modelo exige.

### 3.2.1 Revisando Equações do 1.º Grau

De forma bem suscinta, equações do 1.º grau com uma incógnita são sentenças matemáticas estabelecidas em igualdades que podem ser reduzidas e equivalentes a $ax + b = 0$, onde $a$ e $b$ são números reais, com $a \neq 0$, e $x$ como incógnita. O grau de uma equação é determinado pelo grau da incógnita, que no caso das equações do 1.º grau é 1 ($x = x^1$).

Para resolver uma equação do 1.º grau, vamos considerar três ações, sendo elas a ação de *separar* os termos algébricos dos termos puramente numéricos, tomando o cuidado de assinalar a troca do sinal se um ou outro trocar de membro durante essa manobra; a ação de *reduzir* os termos já separados ao único algébrico e único numérico levando em consideração a regra de sinais para a adição e subtração; e a ação de *dividir* o termo numérico pelo coeficiente do termo algébrico para a determinação do valor desconhecido e posterior determinação do Conjunto Solução da equação, se exigido.

Embora essa não seja a abordagem mais ortodoxa, trata-se de uma adaptação curricular voltada a um conteúdo já trabalhado desde o 7.º ano. Nesse contexto, conceitos como os inversos aditivo e multiplicativo podem ser retomados de forma breve, apenas como comentário, sem a necessidade de registro formal. A intenção é que essas explicações ocorram de maneira oral, durante a exposição do professor, utilizando uma linguagem acessível e próxima à realidade dos alunos. Nesse momento, por exemplo, é possível classificar os diferentes formatos de equações de maneira simplificada — como “linha simples”, “com propriedade distributiva”, “proporcional”, “racional”, entre outros. A seguir, serão apresentados alguns exemplos que retomam esses aspectos de forma prática.

**EXEMPLO 2.1**

Resolva as equações do 1.º grau abaixo para determinar seus conjuntos-solução:

**Formato Linha Simples:**

$a)\ 5x - 14 = 22 - 7x$

$5x + 7x = 22 + 14\ \ (separar)$

$12x = 36\ \ (reduzir)$

$x = \frac{36}{12}\ \ (dividir)$

$x = 3$

$\boldsymbol{S = \{3\}}$

**Formato Linha com Propriedade Distributiva:**

$b)\ x + 4.(x - 5) = 2.(x + 11)$

$x + 4x - 20 = 2x + 22$

$x + 4x - 2x = 22 + 20$

$3x = 42$

$x = \frac{42}{3}$

$x = 14 \qquad \boldsymbol{S = \{14\}}$

**Formato Proporcional:**

$c)\qquad \frac{x-4}{5} = \frac{x+2}{10}$

$10.(x - 4) = 5.(x + 2)$

$10x - 40 = 5x + 10$

$10x - 5x = 10 + 40$

$5x = 50$

$x = \frac{50}{5}$

$x = 10$

$\boldsymbol{S = \{10\}}$

**Formato Racional:**

$d)\ \ \frac{x}{2} - \frac{3}{5} = \frac{x}{10} + \frac{1}{4}$

$\frac{10x - 12}{20} = \frac{2x + 5}{20}$

$10x - 2x = 5 + 12$

$8x = 17$

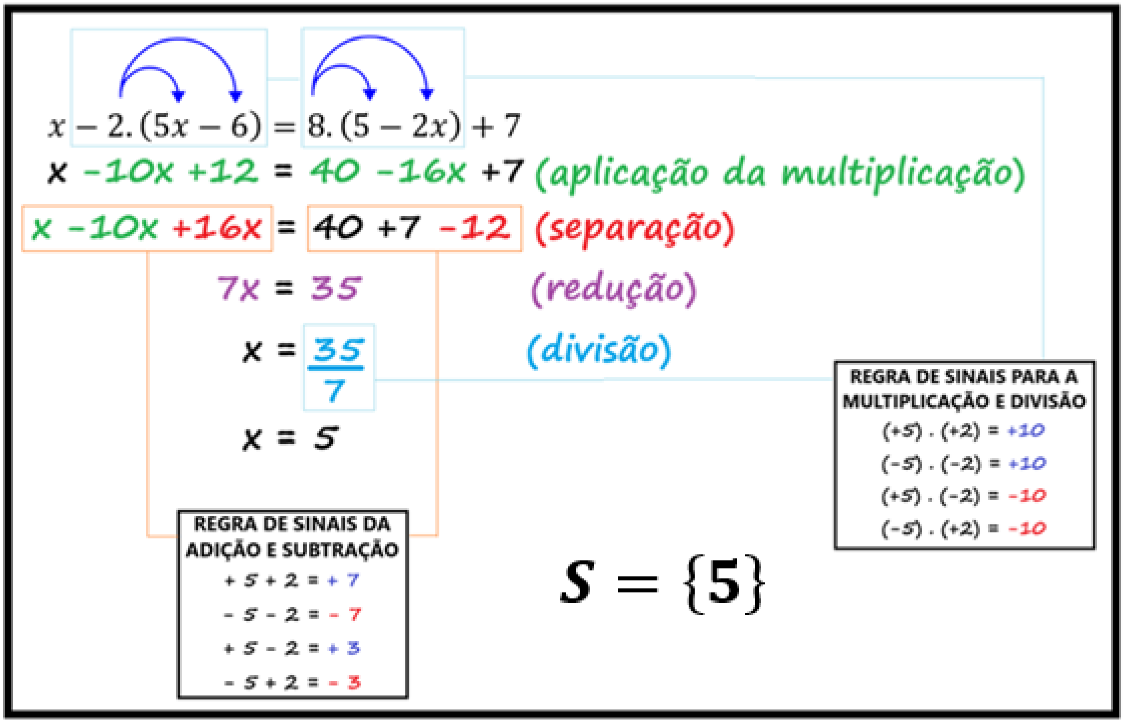
$x = \frac{17}{8}$

$\boldsymbol{S = \left\{\frac{17}{8}\right\}}$

Vale a pena ressaltar que o Professor pode e deve lançar mão de todas as formas de recursos didáticos para alcançar a maior compreensão dos alunos. Isso pode ser feito por meio de flechas, anotações, regras de sinais e onde e como elas ocorrem – Figura 7.

Acaba por se tratar de uma legenda simples e mais direta a inserção das regras de sinais para a adição e subtração e para a multiplicação e divisão, mas é algo que para o aluno faz muita diferença, sempre que possível, indicar em que momentos tais regras são aplicadas. Muitos alunos não dominam as duas regras como padrões distintos, pois ainda confundem o formato de uma com o formato da outra, o que nos exige mais energia e atenção para diagnosticar se existem, por parte dos alunos, dificuldades de processamento com a aplicação das regras.

Figura 7 – Resolução do exemplo $e)\ x - 2.(5x - 6) = 8.(5 - 2x) + 7$




Fonte: Autoria Própria (2025)

Essas são apenas sugestões do que pode ser oferecido aos alunos, pois existem inúmeros formatos de equações do 1.º grau que podem ser exploradas nesse momento. No entanto, o que precisa ser enfatizado nesse instante é todo o esforço algébrico a ser desempenhado para se chegar aos resultados, por mais simples que seja o formato da equação.

### 3.2.2 Equação do 2.º Grau – Definição

O que caracteriza uma equação do segundo grau é o fato do maior grau da incógnita ser 2. Em outras palavras, a equação do 2º grau é caracterizada por um polinômio de grau 2 identicamente nulo, ou seja, uma sentença matemática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a$, $b$ e $c$ são números reais, com $a \neq 0$ ($a$ não nulo).

Podemos denominar essa sentença de forma geral da equação do segundo grau e, ao resolvê-la, estamos interessados em encontrar valores para a incógnita $x$ que validam a expressão. A esses possíveis valores de $x$ se dá o nome de raízes da equação. A seguir, propomos a resolução da equação $ax^2 + bx + c = 0$, a fim de determinar suas raízes. Para isso, considere o seguinte raciocínio:

$$ax^2 + bx + c = 0 \xRightarrow[\text{Divida por } a]{} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \xRightarrow{\text{Complete o quadrado}} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\xRightarrow[\text{Reescreva na forma fatorada}]{} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\xRightarrow[\text{Extraia a raiz quadrada de ambos os membros}]{} \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \xRightarrow{\text{Subtraia } \frac{b}{2a} \text{ de ambos os membros}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde é comum indicarmos o valor discriminante $b^2 - 4ac$ por $\Delta$ (delta). Sendo assim, os possíveis valores de $x$, quando eles existem, são $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, normalmente indicados por $x_1$ e $x_2$. Logo, podemos determinar como solução da equação $x^2 + bx + c = 0$, as raízes:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

O que nos motiva substituir a expressão $b^2 - 4ac$ por $\Delta$, trata-se de colocar o modelo convencional em prática e a serviço de uma aprendizagem formatada em etapas, como foram realizadas nos manuais de construção das máquinas simples. Ou seja, para fins meramente didáticos, utilizamos uma narrativa de realização de ações/etapas para adaptar a apresentação desse conteúdo partindo de um modelo de trabalho mais tangível, pois o que tentamos deixar bem claro para os nossos alunos que, se eles fossem capazes de realizar um projeto passo-a-passo, seriam perfeitamente capazes de resolver uma equação do 2.º grau respeitando cada etapa do processo de resolução.

Como orientações ao leitor, e a depender do nível de proficiência de suas turmas, a demonstração da Fórmula de Resolução de uma Equação do 2.º Grau é essencial, ainda que a posteriori para a caracterização do modelo de resolução em etapas, desde a mera observação até a substituição de elementos e realização das operações envolvidas. Consideremos o seguinte roteiro para a resolução de Equação do 2.º Grau apresentada aos alunos.

**Equações do 2.º Grau – Regra de Resolução**

Seja $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ uma equação do segundo grau na forma geral, sendo que $x$ é o valor incógnito da equação e $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são os coeficientes, com $\boldsymbol{a \neq 0}$. Para resolver equações desse tipo, uma ferramenta bastante útil que podemos aplicar é a Regra de Resolução.

Essa regra consiste em três etapas de resolução baseadas na correta leitura da equação e no cálculo numérico que validam o desenvolvimento da resolução formal disposto na página 24. Estão elas estabelecidas no seguinte roteiro:

**1.ª ETAPA:** Indicar os coeficientes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ da equação na forma geral;

**2.ª ETAPA:** Calcular o valor do discriminante delta ($\Delta$) de acordo com a relação $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4.a.c}$;

**3.ª ETAPA:** Determinar a solução da equação ao se calcular os possíveis valores da incógnita com fórmula $\boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{b} \pm \sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2.a}}$.

**EXEMPLO 2.2**

Determine os Conjuntos Soluções das equações do 2.º grau sugeridas abaixo:

**MODELO:** $\boldsymbol{a)\ 3x^2 - 9x + 6 = 0}$

1.ª ETAPA: Indicar os coeficientes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ da equação na forma geral.

$\boldsymbol{3x^2 - 9x + 6 = 0}$

$a = \boldsymbol{3}$

$b = \boldsymbol{(-9)}$

$c = \boldsymbol{6}$

2.ª ETAPA: Calcular o valor do discriminante $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4.a.c}$.

$$\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4.a.c}$$
$$\Delta = \boldsymbol{(-9)^2 - 4.3.6}$$
$$\Delta = \boldsymbol{81 - 72}$$
$$\Delta = \boldsymbol{9}$$

3.ª ETAPA: Determinar a solução com a regra de resolução $\boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{b} \pm \sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2.a}}$.

$$\boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{b} \pm \sqrt{\Delta}}{2.\boldsymbol{a}} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{9}}{2.3} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{9-3}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \\ \\ x_2 = \dfrac{9+3}{6} = \dfrac{12}{6} = 2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{S} = \{1, 2\}$$

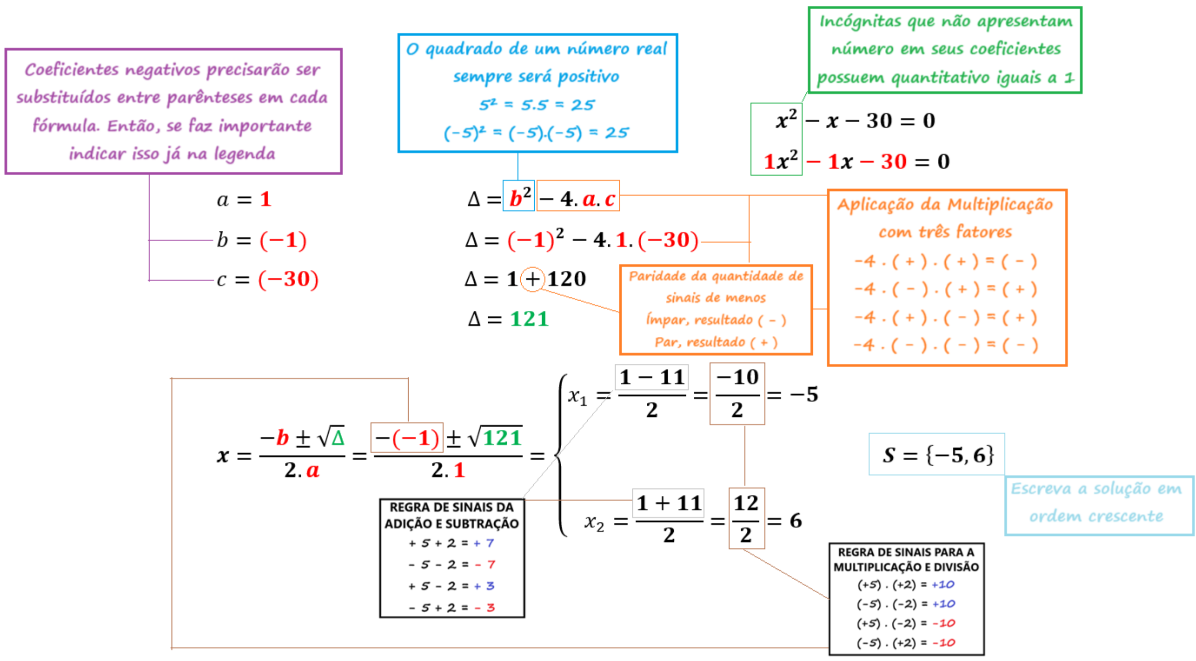
b) $2x^2 - 10x + 12 = 0$

c) $x^2 + 2x - 15 = 0$

d) $-x^2 - 3x + 4 = 0$

Nesse momento da sequência didática, principalmente em favor daqueles alunos com muita dificuldade de aprendizagem, se fez importante ignorar qualquer tipo de pressa quanto ao estabelecimento das etapas descritas. O que verificamos a respeito da facilidade por parte de alguns alunos e a superação de dificuldades de outros, foi o relato deles ao compararem as dinâmicas do passo-a-passo da fase 1 com o passo-a-passo da fase 2 ao dizerem em muitas ocasiões que o “esquema é o mesmo” e que “basta coletar as informações e seguir a estratégia” – o que evidencia envolvimento com as duas dinâmicas, além de se sentirem mais confiantes, pois de algum modo, por mais trabalhosa que fosse a montagem do kit, o exercício de um modelo concreto semelhante ao roteiro de ações de uma equação, tornou o desafio algo mais convidativo.

Figura 8 – Caracterização do Conjunto Solução de $x^2 - x - 30 = 0$.




Fonte: Autoria Própria (2025)

No caso das turmas observadas, para a etapa 1, foi utilizada uma aula para exercitar apenas essa etapa e, para as etapas 2 e 3, duas aulas cada uma, onde também trabalhamos as atividades de cada etapa isoladamente, ou seja, uma semana completa de trabalho. Tal percepção foi incorporada à prática pedagógica ao longo do processo, pois em algumas semanas o projeto precisou dar uma pausa para a implementação de outras situações de aprendizagem.

Os exemplos sugeridos acima possuem um perfil de resolução mais direto por serem equações já configuradas na forma geral, mas a depender do nível de proficiência da turma ou de seu desenvolvimento, equações distintas à forma geral, com termos semelhantes e não nulas, podem ser ofertadas para que habilidades de organização e escrita sejam aprimoradas. No caso das turmas observadas, a apresentação de equações com formatos diferentes ocorreu gradativamente.

Durante a exposição desse conteúdo, tentamos ao máximo inserir orientações e recomendações como fossem mapas mentais nos exemplos de introdução para aumentar o aspecto de manual de resolução – Figura 8.

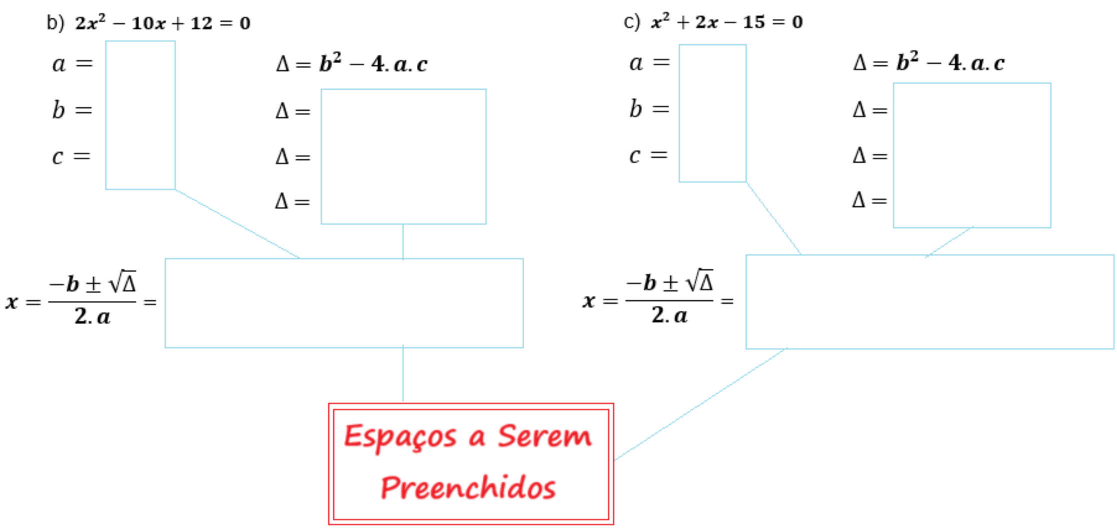
Embora tais observações e explicações pudessem permanecer restritas à oralidade durante a exposição do conteúdo, ao optar por formalizá-las por meio de registros escritos no caderno, foi possível perceber um envolvimento mais significativo por parte dos alunos. Notou-se que muitos se dedicaram com esmero e criatividade à elaboração desses registros, indo além do que lhes foi solicitado. Inseriram anotações complementares a partir de suas próprias compreensões e associações, revelando não apenas cuidado estético, mas também interesse genuíno e entusiasmo diante do novo aprendizado. Esse movimento espontâneo de apropriação do conteúdo aponta para um processo ativo de construção do conhecimento, favorecido por práticas que valorizam a autoria e o protagonismo estudantil.

A exemplo disso, observou-se um aspecto frequentemente evitado por muitos professores: a explicitação de detalhes considerados "óbvios" no processo algébrico. No entanto, os próprios alunos perceberam, de forma autônoma, que o valor a ser indicado por "$-b$" (na etapa 3) corresponde, na realidade, ao coeficiente "$b$" com o sinal trocado — um *insight* que evidenciou avanços concretos na leitura algébrica e na compreensão simbólica das expressões.

Esse tipo de descoberta espontânea reforçou a importância de valorizar o raciocínio dos estudantes, ainda que por caminhos não convencionais. Foi necessário, porém, orientá-los quanto ao uso equilibrado de atalhos, dicas e estratégias operatórias. Reforçou-se que a intenção pedagógica era adaptar a aplicação do conhecimento sem comprometer a integridade conceitual do conteúdo matemático. Ainda assim, os alunos foram reconhecidos por suas interpretações e pela leitura crítica de seu próprio percurso de aprendizagem, o que favoreceu o engajamento e a construção de sentido.

Uma estratégia simples, mas especialmente eficaz para alunos com dificuldades acentuadas, consistiu em apresentar, nos primeiros exercícios, uma estrutura resolutiva previamente estabelecida — semelhante a um modelo ou "roteiro de gabarito", que funcionava como um mapa a ser seguido. Esse recurso, ao ser assimilado pelos estudantes, ganhou características semelhantes às de um *game*, em que cada etapa vencida representava um avanço no domínio da resolução da equação quadrática. Tal abordagem contribuiu para tornar o processo mais lúdico, acessível e motivador, sem renunciar ao rigor matemático. (Figura 9).

Figura 9 - Estruturas de Resolução



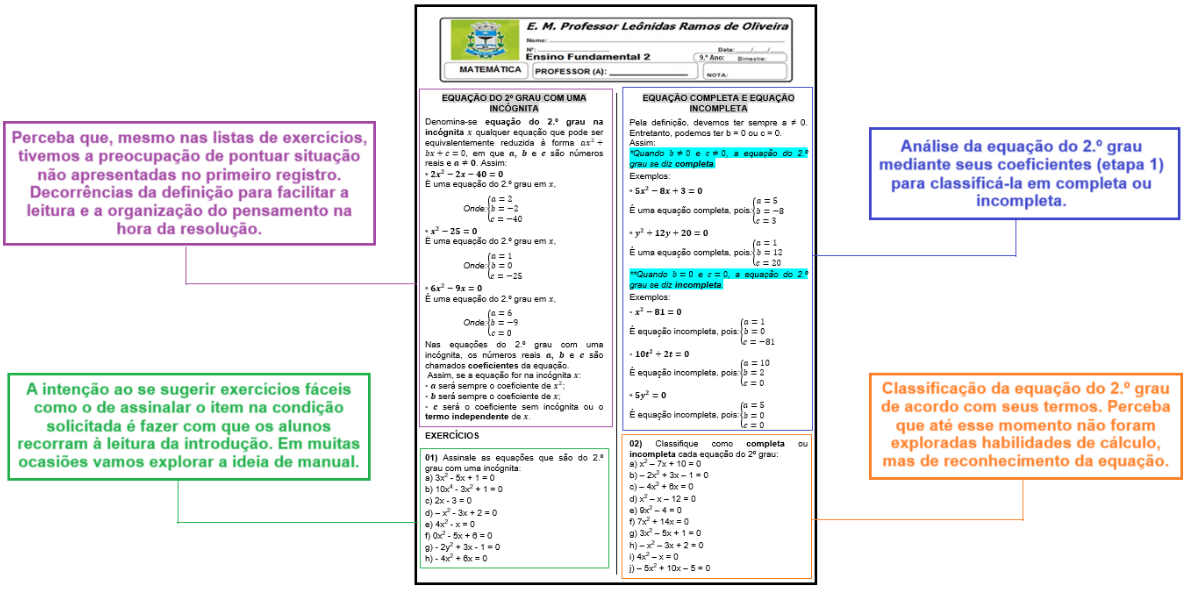

Fonte: Autoria Própria (2025)

Finda a explicação e o treinamento das três etapas de resolução, para que todo o esforço do projeto pudesse fazer sentido, a caracterização de roteiros precisou ficar bastante clara tanto no formato de resolução das equações de 2.º grau quanto foi explanado ao longo de todo o processo de aprendizagem das equações de 1.º grau.

Por esse motivo, nos preocupamos em deixar bem evidente as diferenças de resolução onde, na equação de primeiro grau, temos a manipulação de termos devido o algebrismo caracterizado pelos inversos aditivo e multiplicativo, fora a aplicação de outras propriedades, até sua completa resolução e, na equação de segundo grau, via regra de resolução, temos a observação e a coleta dos coeficientes na etapa 1 para sua manipulação numérica e operatória nas etapas 2 e 3, até a completa resolução.

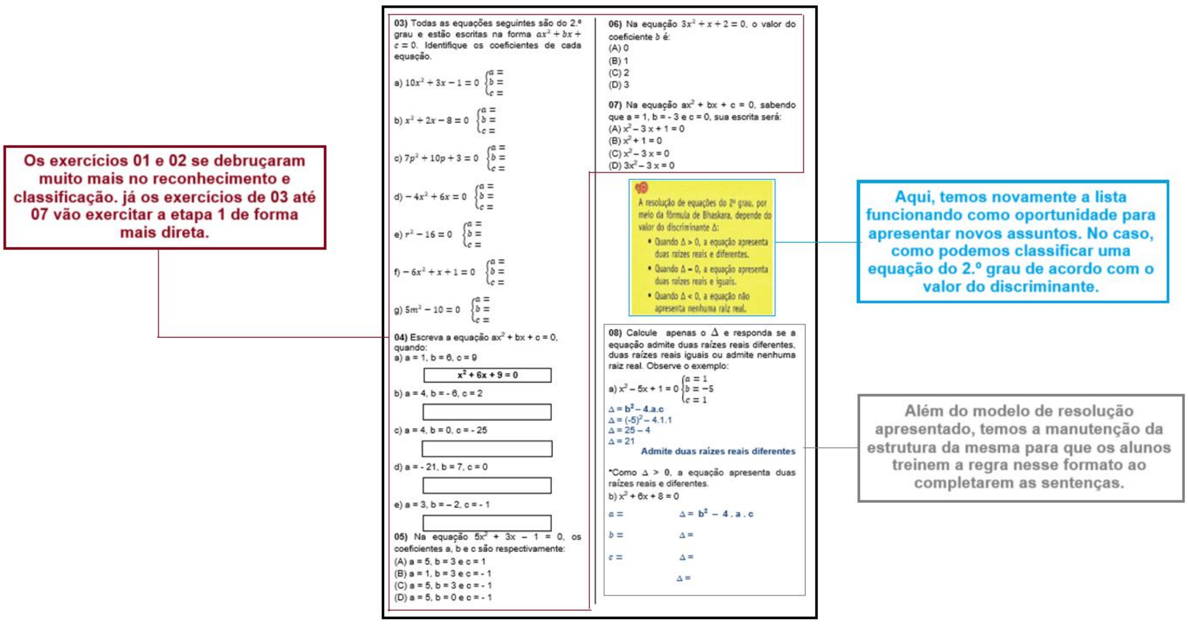
Depois de fixada essa aprendizagem, exercícios de contexto e aplicações foram oportunizados aos alunos para praticarem esse tipo de equação. Foram problemas envolvendo equações do 2.º grau completas e incompletas onde, também aos poucos, pudemos explorar a mistura dessas habilidades com outras. Observe uma das listas trabalhadas ao longo das apresentações das Figuras 10, 11, 12 e 13.

Figura 10 - Lista de Atividades - 1.ª página



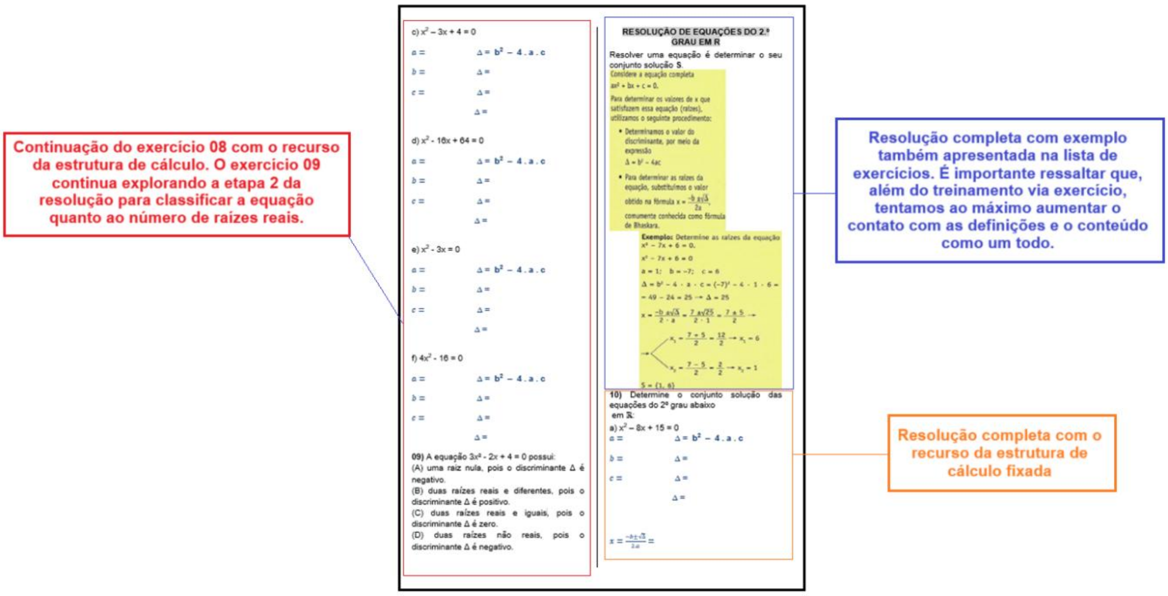

Fonte: Autoria Própria (2025)

Figura 11 - Lista de Atividades - 2.ª página




Fonte: Autoria Própria (2025) – Recortes Caderno do Futuro

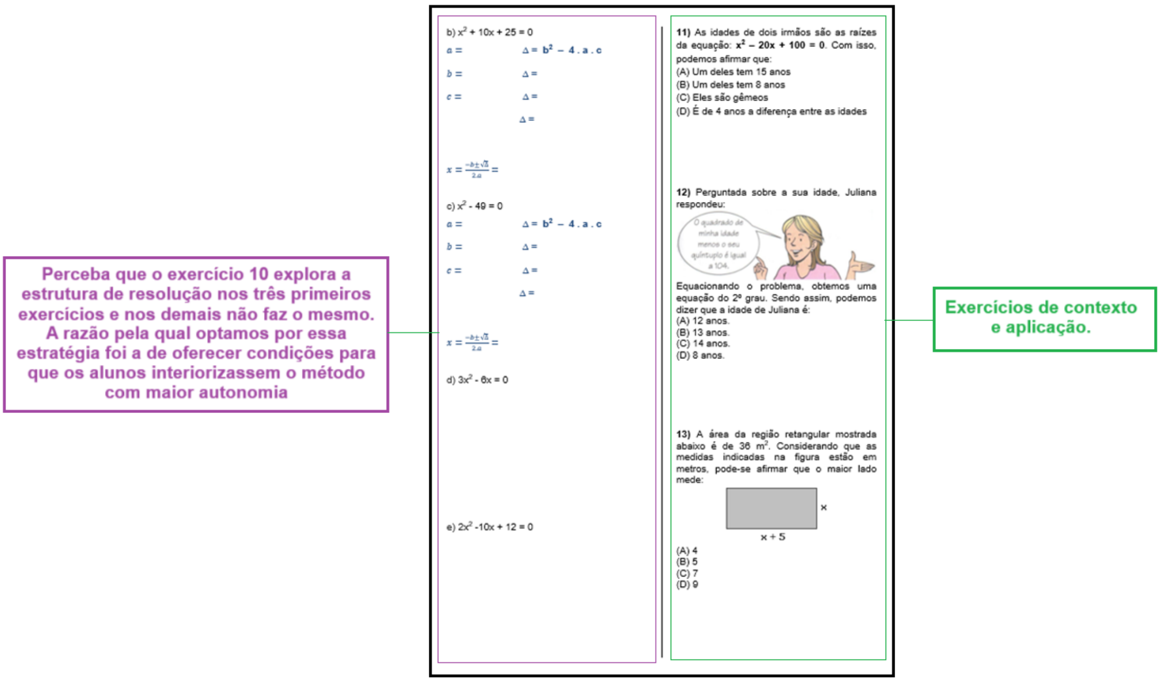
Figura 12 - Lista de Atividades - 3.ª página




Fonte: Autoria Própria (2025) – Recortes Caderno do Futuro

Ao elaborarmos a lista de exercícios, buscamos não apenas apresentar os conceitos básicos, mas também aprofundar a compreensão dos alunos sobre a equação do segundo grau. Para isso, incluímos situações que vão além da simples definição, facilitando a organização do pensamento e a resolução dos problemas.

Figura 13 - Lista de Atividades - 4.ª página




Fonte: Autoria Própria (2025)

A lista de exercícios também serve como oportunidade para introduzir novos conceitos, como a classificação da equação de acordo com o valor do discriminante.

Ao apresentar um modelo de resolução e manter uma estrutura consistente nos exercícios, os alunos têm a chance de praticar e interiorizar o método.

Além de fornecer exemplos de resolução completa, a lista inclui exercícios que exploram diferentes aspectos da equação do segundo grau. Essa variedade de exercícios permite que os alunos apliquem os conhecimentos adquiridos em diferentes contextos e aprofundem a compreensão do conteúdo.

Ao variar a estrutura dos exercícios, procuramos oferecer mais oportunidades de assimilação do modo de resolução de forma mais autônoma, ou seja, propomos não só em listas, mas em todas as atividades de caderno, a possibilidade de compreensão mais aprofundada não apenas ao exercitar as etapas, mas entender o porquê que cada uma delas ocorre, assim, estimulando o raciocínio lógico e a capacidade de resolução de problemas.

Para finalizar, incluímos exercícios que contextualizam a equação do segundo grau, mostrando sua aplicação em situações reais com o objetivo, apesar da singeleza deles, de tornar o aprendizado mais significativo e relevante para os alunos.

Figura 14 - Resolução do Exercício 12 da Lista

**12)** Perguntada sobre a sua idade, Juliana respondeu:


Equacionando o problema, obtemos uma equação do 2º grau. Sendo assim, podemos dizer que a idade de Juliana é:
(A) 12 anos.
(B) 13 anos.
(C) 14 anos.
(D) 8 anos.

*Idade de Juliana* $= x$

*O quadrado da sua idade* $= \boldsymbol{x^2}$

*O quíntuplo da sua idade* $= \boldsymbol{5x}$

*Equação descrita*: $\boldsymbol{x^2 - 5x = 104}$

*Equação reorganizada*: $\boldsymbol{1x^2 - 5x - 104} = 0$

$a = \mathbf{1}$ $\quad\quad \Delta = \boldsymbol{b^2 - 4.a.c}$

$b = (\mathbf{-5})$ $\quad\quad \Delta = (\mathbf{-5})^2 - \mathbf{4.1.(-104)}$

$c = (\mathbf{-104})$ $\quad\quad \Delta = \mathbf{25 + 416}$

$\Delta = \mathbf{441}$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{-b \pm \sqrt{\Delta}}}{\mathbf{2.}\boldsymbol{a}} = \frac{\mathbf{-(-5) \pm \sqrt{441}}}{\mathbf{2.1}} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{\mathbf{5 - 21}}{\mathbf{2}} = -\dfrac{\mathbf{16}}{\mathbf{2}} = \mathbf{-8} \\ \\ x_2 = \dfrac{\mathbf{5 + 21}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{26}}{\mathbf{2}} = \mathbf{13} \end{cases} \qquad \boldsymbol{S} = \{\mathbf{-8, 13}\}$$

***Resposta***:

*Pela natureza numérica do problema, temos que a idade de Juliana é 13 anos.*

***Gabarito B***

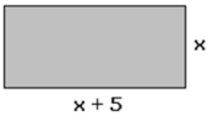
Fonte: Autoria Própria (2025) – D31 (9º ANO - Mat.) - Blog do Prof. Warles.doc

Em resumo, a lista de exercícios foi elaborada com o objetivo de proporcionar aos alunos uma aprendizagem gradual e significativa da equação do segundo grau, assim como as atividades do caderno tiveram esse mesmo aspecto tanto na semana de apresentação do conteúdo quanto nos treinamentos posteriores.

Através de uma abordagem mais cautelosa, talvez, onde se combine teoria e prática, buscamos desenvolver habilidades de reconhecimento, análise, resolução de problemas e aplicação dos conhecimentos adquiridos debruçados a princípio na roteirização de conhecimentos clássicos, experiência que se mostrou válida pelo que observamos. Vamos resolver dois dos problemas listados acima – Figuras 14 e 15.

Figura 15 - Resolução do Exercício 13 da Lista

**13)** A área da região retangular mostrada abaixo é de 36 m². Considerando que as medidas indicadas na figura estão em metros, pode-se afirmar que o maior lado mede:




(A) 4
(B) 5
(C) 7
(D) 9

*Como* $36\ m^2$ *se trata da área do retângulo, temos:*

$$x.(x+5) = 36$$

$$x.(x+5) = 36$$

$$x^2 + 5x = 36$$

$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$a = 1 \qquad \Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$b = 5 \qquad \Delta = 5^2 - 4.1.(-36)$$

$$c = (-36) \qquad \Delta = 25 + 144$$

$$\Delta = 169$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2.1} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5-13}{2} = -\dfrac{18}{2} = -9 \\ \\ x_2 = \dfrac{-5+13}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases} \qquad S = \{-9, 4\}$$

***Resposta:***

*Pela natureza do problema, temos que x mede 4 e o lado maior* $(x+5)$ *mede 9.*

***Gabarito D***

Fonte: Autoria Própria (2025) – SAEGO-2012, adaptado

No início da proposta, muitos alunos expressaram certo desconforto diante da quantidade de elementos que precisavam ser observados simultaneamente. Para eles, o método proposto — embora estruturado por roteiros que guiavam o processo — exigia atenção a muitos detalhes, o que, num primeiro momento, foi percebido como algo trabalhoso e até excessivamente formal. No entanto, após a fase de ambientação e a familiarização com a lógica da roteirização, esse sentimento inicial foi gradualmente superado.

Com o tempo, a percepção registrada nos relatos dos próprios alunos revelou uma mudança significativa: muitos passaram a demonstrar clara preferência pela resolução das equações do segundo grau em comparação com as do primeiro grau. Um comentário recorrente entre os estudantes era o de que resolver uma equação quadrática “parecia um jogo de completar”, semelhante a uma cruzadinha — o que tornava o processo não apenas mais acessível, mas também mais interessante e envolvente. Essa comparação reforça o caráter lúdico e estruturado da abordagem, permitindo que até mesmo um conteúdo tradicionalmente considerado complexo fosse reinterpretado sob uma nova perspectiva, mais leve e atraente.

Concluímos, portanto, que a roteirização das etapas para a resolução das equações do 2.º grau, inspirada nas práticas realizadas na fase anterior com as máquinas simples, não apenas viabilizou a aprendizagem formal do conteúdo, como também promoveu maior engajamento, apropriação simbólica e superação das dificuldades algébricas historicamente enfrentadas por essas turmas. Essa abordagem reforça a importância das metodologias integradas e da valorização do percurso do aluno como protagonista de seu processo de aprendizagem.

À primeira vista, é compreensível que se questione a relação entre os experimentos práticos aqui descritos e os conteúdos matemáticos do currículo. Essa indagação, no entanto, não ficará sem resposta. Retomaremos esse ponto mais adiante, revelando conexões que talvez não sejam tão evidentes de início.

## 3.3 FASE 3: INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO E ELETRÔNICA

Iniciamos a Fase 3 nas duas últimas semanas do segundo bimestre. Considerando que o desenvolvimento principal ocorreria ao longo do terceiro bimestre — período que também abrange o recesso escolar — optamos por introduzir os componentes eletrônicos e a programação a partir da exibição de vídeos explicativos. Em seguida, promovemos uma conversa com os alunos para identificar seus conhecimentos prévios sobre o tema.

Nesse primeiro momento, realizamos a apresentação do Curso Manual Maker[2], desenvolvido pelo Canal Manual do Mundo e disponível gratuitamente no YouTube. O curso foi selecionado como ponto de partida por sua linguagem acessível, atrativa e

---

[2] Curso Manual Maker – Manual do Mundo – Curso. Com objetivos de aprendizagem, podemos aprender a mexer em ferramentas, a construir circuitos de Eletrônica, montar projetos em Arduino, impressora 3D, corte a laser e muito mais com aulas teóricas e práticas. Disposto em: https://youtube.com/playlist?list=PLYjrJH3e_wDNLUTN32WittrpBxeleEqNp&si=8Yd3JS3uXSwPpmge

por abordar conteúdos introdutórios relacionados à eletrônica e à cultura *maker*, que dialogam diretamente com a proposta pedagógica do nosso projeto interdisciplinar. É importante destacar que não seguimos o curso em sua totalidade e tampouco de forma linear. A estratégia adotada foi pinçar, de maneira criteriosa, aquelas videoaulas consideradas mais significativas e adequadas ao perfil da turma, levando em conta tanto a complexidade dos conceitos quanto o potencial de despertar o interesse dos estudantes.

Figura 16 - Vídeo Aulas do Curso Manual Maker

Para que servem os componentes eletrônicos? #ManualMaker Aula 3, Vídeo 1


Como funciona uma protoboard #ManualMaker Aula 3, Vídeo 2


O que é Arduino, afinal de contas? #ManualMaker Aula 4, Vídeo 1


Fonte: Canal Manual do Mundo (acesso: 2025)

Dessa forma, buscamos estruturar uma trilha de aprendizagem inicial que possibilitasse a compreensão dos fundamentos dos circuitos elétricos e eletrônicos, preparando o terreno para o trabalho prático a ser realizado no segundo semestre, quando se pretendia avançar para a construção de projetos de circuitos simples, com e sem o uso de programação – Figura 16.

Materiais de eletrônica básica e robótica, avulsos ou em kits semelhantes aos apresentados, podem ser adquiridos por meio do Programa Dinheiro Direto na Escola (PDDE), destinado à manutenção de projetos de tecnologia, ou em diferentes plataformas de comércio eletrônico, geralmente a valores acessíveis. No caso deste trabalho, por se tratar de um projeto piloto, optou-se pela aquisição própria do material.

Figura 17 - Kits de Robótica Básica

Fonte: Imagens do buscador de internet (acesso: 2025)

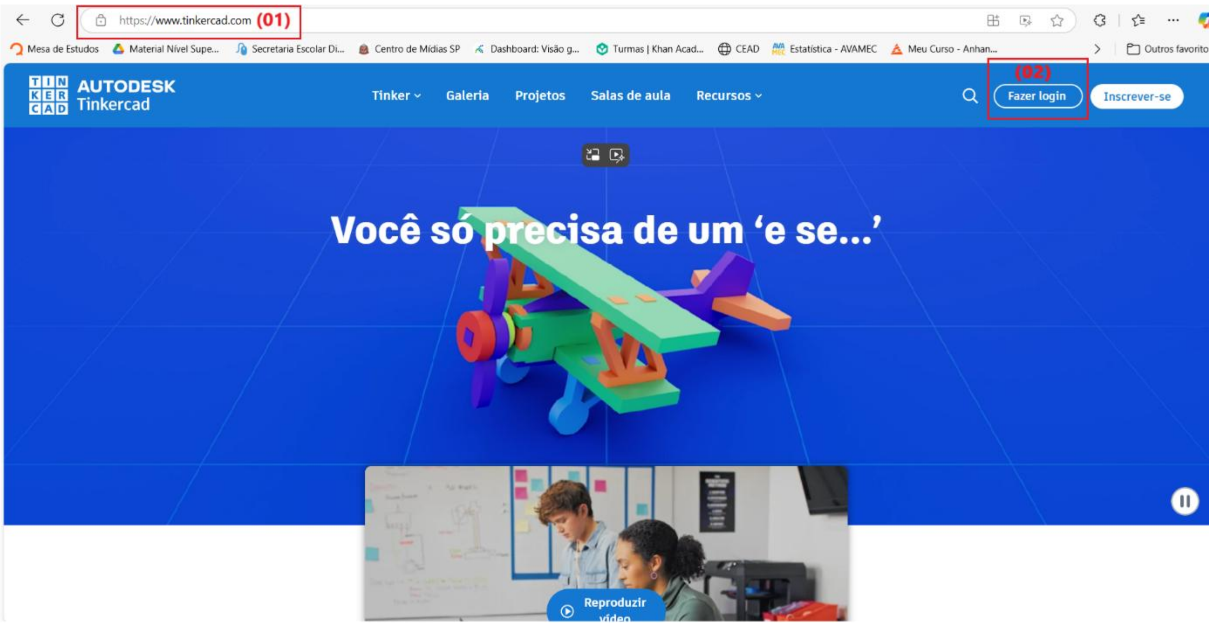
Ao longo dessas aulas, aproveitamos a oportunidade para apresentar os componentes e materiais citados em cada vídeo. A maior parte deles é encontrada em kits básicos de robótica – Figura 17.

As vantagens de partir para uma iniciativa dessas, com certa ousadia poderíamos admitir, foram ter a experiência registrada e, com isso, os resultados dela, o reconhecimento da Gestão Escolar e da Administração Municipal para a importância de projetos que explorem tecnologia e inovação na formação dos nossos alunos, o reaproveitamento de todo o material em anos letivos futuros, pois tudo que foi construído pode facilmente ser desmontado e reaproveitado em outras oportunidades e, principalmente, a satisfação por parte dos alunos em estar em contato com uma dinâmica de aula mais prática e atrativa.

No início do terceiro bimestre, apresentamos o Tinkercad[3] aos alunos, plataforma onde os primeiros passos na concepção de projetos se dariam, bem como o aprendizado de programação via blocos lógicos e escrita de códigos, a depender da facilidade ou preferência dos alunos para essa formulação. Com uma introdução bem rápida e intuitiva, orientamos sobre (01) o acesso, (02) o login via computador ou smartphone com a própria conta clicando em contas pessoais e continuar com Google – Figura 18.

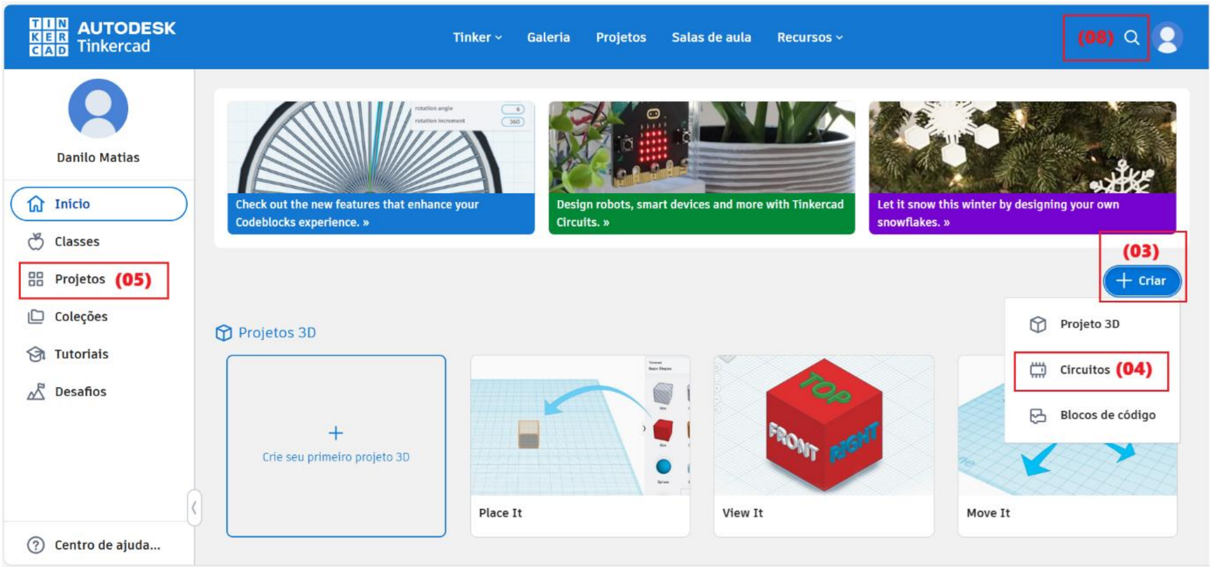
[3] O Tinkercad é um software gratuito e online que permite criar modelos 3D, projetos de circuitos eletrônicos e programação para robótica. Link: [Tinkercad - Crie projetos digitais 3D com o CAD online]

Figura 18 - Interface de Entrada do Tinkercad




Fonte: Autoria Própria (2025)

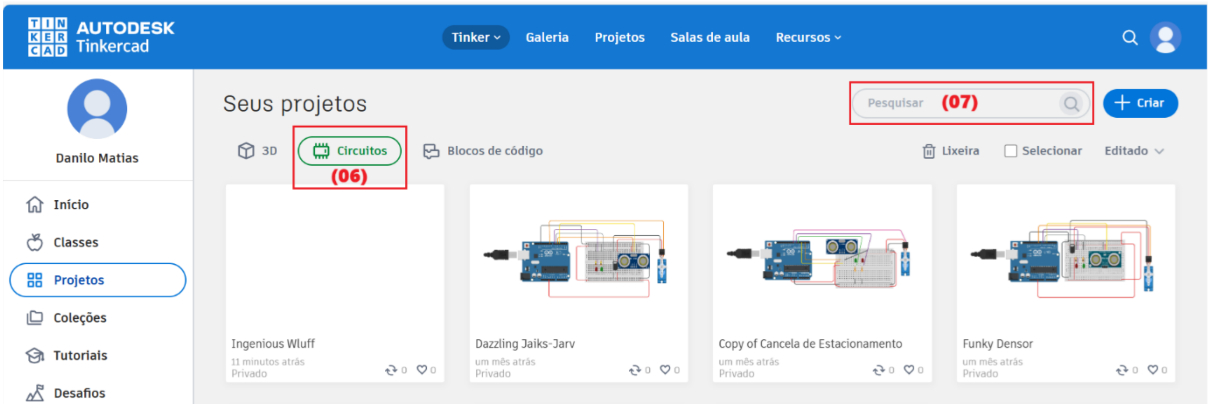
Figura 19 - Página de Usuário




Fonte: Autoria Própria (2025)

Já na interface do dashboard para a escolha do que se pretende fazer, orientamos a iniciar (03) clicando em criar e, posteriormente, em (04) circuito para de fato começarmos a explorar o que essa ferramenta poderia oferecer de possibilidades de construção de projetos – Figura 19. Alguns alunos optaram pelo acesso no aparelho celular, mas a maioria preferiu a utilização dos computadores da sala de informática.

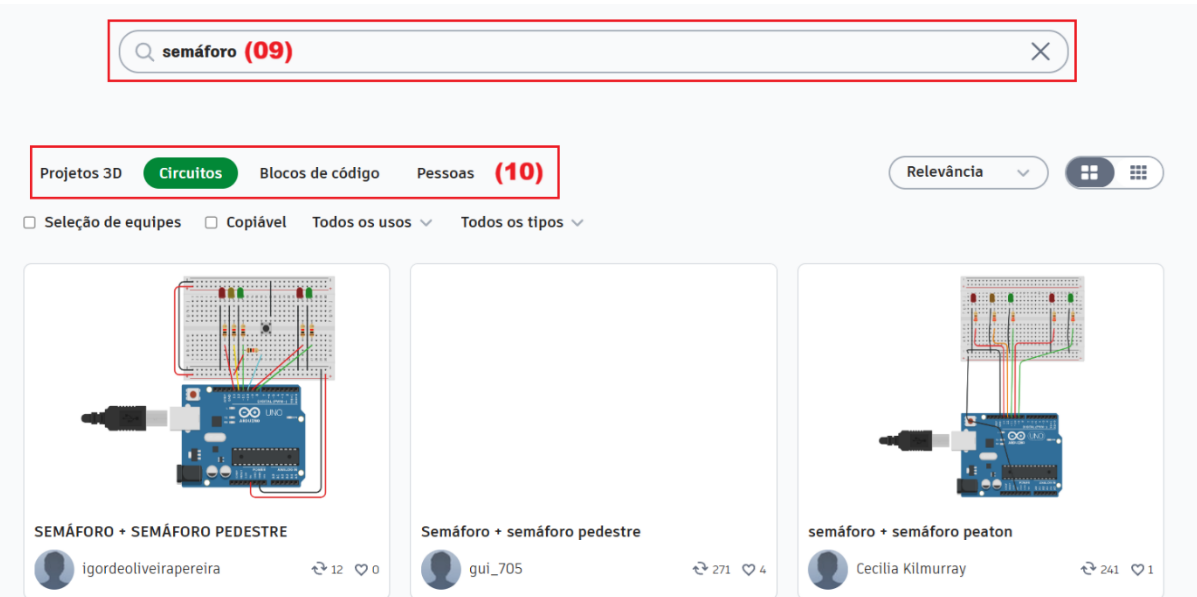
Figura 20 - Projetos Salvos do Próprio Usuário




Fonte: Autoria Própria (2025)

A ferramenta possibilita a criação de novos projetos conforme descrevemos ou, ainda, a chance de se escolher um projeto já existente clicando em (05) projetos – Figura 19. Como a intenção do projeto é trabalhar (06) circuitos, nessa tela ficarão todos os projetos desenhados pelos alunos podendo, inclusive, (07) pesquisar pelo nome dos projetos salvos – Figura 20.

Figura 21 - Projetos de Outros Usuários




Fonte: Autoria Própria (2025)

Ao se clicar na (08) lupa no início da plataforma – Figura 19, existe a possibilidade de pesquisar por um projeto realizado por algum usuário, podendo assim fazer uso dele para a montagem dos componentes. Ao se ter acesso ao projeto, também é possível coletar os códigos de programação para sua inserção no Arduíno.

Figura 22 - Apresentação do Tinkercad na Lousa Digital

Fonte: Autoria Própria (2025)

Em (09) podemos fazer a busca por um projeto e em (10) podemos selecionar o tipo de projeto, como mostra a figura a seguir – Figura 21. Dentro da sequência didática, sempre optamos por circuitos.

Todas as orientações e recomendações sobre onde e como acessar o ambiente digital para elaborar os primeiros projetos, as turmas receberam ainda em sala de aula – Figura 22, algo que ocorreu brevemente, pois a intenção foi aproveitar ao máximo o tempo de trabalho realizado pelos alunos.

Figura 23 - Primeiro Contato com o Tinkercad

Fonte: Autoria Própria (2025)

Nesse primeiro contato dos alunos – Figura 23, demos a eles total liberdade de criação dentro dos componentes que tínhamos à mão.

Figura 24 - Primeiros Circuitos

Fonte: Autoria Própria (2025)

Para as duas turmas foi um momento bastante proveitoso para entenderem como as conexões na protoboard[4] poderiam ser feitas, o sentido da corrente e o significado por trás do positivo e negativo enquanto sinal e terra, respectivamente, bem como a utilização do Arduíno Uno[5] para estabelecer comunicação com os circuitos desenhados, o que não ocorreu de primeira, pois era importante que os alunos aprendessem a fazer distinção de terminais digitais dos analógicos, o sinal positivo para alimentar o sistema criado, o GND como terra/retorno e a programação propriamente dita. Sendo assim, optamos pela criação de circuitos mais básicos com LEDs, resistores e potenciômetros, todos instalados na placa e alimentados diretamente por pilhas alcalinas.

Por mais simples que pudessem ser os primeiros projetos rascunhados e a montagem deles na protoboard, a experiência se mostrou muito válida e a janela de duas aulas, 110 minutos, portanto, enormemente produtiva levando em conta tudo o que evidenciamos – Figura 24.

Com a intenção de acelerar a utilização do Arduíno e o exercício da escrita de programação, desafiamos as turmas a fazer o circuito de um semáforo. Não haveria a necessidade de se fazer um sistema de semáforos muito complexo, com mais de uma fase ou com luzes para pedestres inclusive, bastaria um sistema de três luzes que respeitasse a dinâmica do acender e apagar do objeto, mas que fosse descrito com programação.

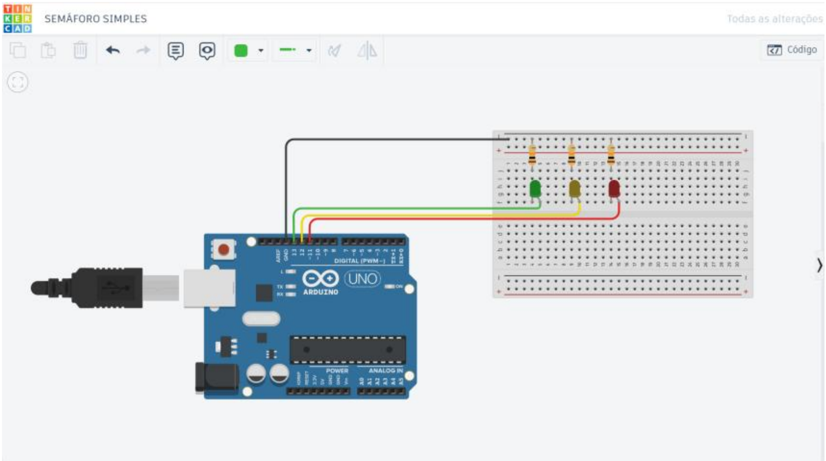
Os alunos tiveram mais dificuldade de assimilação nesse momento, mesmo ao se poder contar com a possibilidade de construir a programação via blocos lógicos para posterior coleta dos códigos na ferramenta, as duas turmas tiveram a princípio falta de percepção para alinhar o circuito com a escrita lógica. Os principais equívocos ocorridos tiveram a ver com a troca da numeração dos terminais, por exemplo, se a conexão fosse feita no terminal 7, sua comunicação na escrita de programação acabava sendo transmitida para um terminal de qualquer outro numeral.

---

[4] Uma protoboard é uma placa de plástico com furos e conexões internas que permite montar circuitos eletrônicos de forma temporária. É uma ferramenta muito utilizada por engenheiros, estudantes e *makers* para testar e prototipar circuitos.

[5] O Arduino Uno é uma placa eletrônica de microcontrolador open-source que é muito utilizada para desenvolver projetos eletrônicos e robóticos, sistemas de automação doméstica, fins educacionais etc.

Figura 25 - Projeto de Semáforo




Fonte: Autoria Própria (2025)

O tempo necessário para que os alunos concluíssem esse desafio foi de duas semanas, mas nem todos os grupos concluíram a montagem do sistema, embora todos tenham realizado o projeto e simulado seu funcionamento corretamente. Na Figura 25 temos um exemplo de como o semáforo poderia ser esboçado. Perceba que os terminais positivos das LEDs verde, amarela e vermelha são alimentados pelas portas digitais 13, 12 e 11, respectivamente. Os retornos de seus terminais negativos são conectados a resistores de $150\Omega$ de resistência, imediatamente ligados a rede negativa da protoboard que, por sua vez, está conectada ao GND (retorno) do Arduíno Uno.

No início dessa terceira fase do projeto, exortamos para que os alunos ponderassem a possibilidade de programação via a escrita dos códigos diretamente – Figura 22, algo muito desafiador a princípio, mas com exercício contínuo, o domínio da linguagem C++ viria em algum momento. No entanto, o primeiro contato de todos com esse tipo de codificação foi por ocasião dessas aulas. Com isso, a predileção pela construção da programação em blocos – Figura 26 – foi absoluta, pois bastaria conhecer as categorias de blocos e configurar a construção da sentença mediante o que se pretendia realizar.

Na estrutura da Figura 26, o sistema inicia com o pino 13 ligado e os pinos 11 e 12 desligados, ou seja, a LED verde inicia acesa enquanto as LEDs amarela e vermelha ficam desligadas. A partir daí, o comportamento a se repetir será o descrito anteriormente por 5 segundos; em seguida, verde apaga, amarela acende e vermelha permanece apagada por 2 segundos; para finalizar o ciclo, verde permanece apagada, amarela apaga e vermelha acende por 5 segundos.

Figura 26 - Estrutura de Programação em Blocos


Fonte: Autoria Própria (2025)

Como podemos observar, uma construção bastante simples que facilita muito a aquisição da programação por códigos para ser transmitida para o Arduíno. Na Figura 27, temos a transliteração do que pudemos observar na construção dos blocos, só que agora em linguagem de códigos C++[6].

Observe que dentro dessa linguagem, o que temos em void setup é a forma descrita dos terminais de saída 13, 12 e 11 como pinMode em suas portas digitais ligado, desligado e desligado, respectivamente. Em void loop temos a representação correlata do que vemos no bloco de controle “para sempre” da construção de blocos na Figura 26, com uma pequena ressalva, pois os tempos de 5 e 2 segundos são ressignificados para 5000 e 2000 milissegundos, reciprocamente.

Antes de seguirmos para a transmissão dos códigos de programação para o Arduíno, vamos compreender quais os tipos de blocos que podem ser utilizados na configuração de uma programação. Na Figura 28, temos cada categoria a começar pelos blocos de saída, que são responsáveis por controlar as saídas de informações,

[6] C++ é uma linguagem de programação de alto nível, de propósito geral, que permite desenvolver uma grande variedade de programas.

como por exemplo, alterar o estado de um pino digital ou analógico para ligado ou desligado. Os blocos de entrada são responsáveis por receber informações, como ler um pino digital ou ler um pino analógico conectado a algum sensor.

Figura 27 - Estrutura de Programação em Códigos

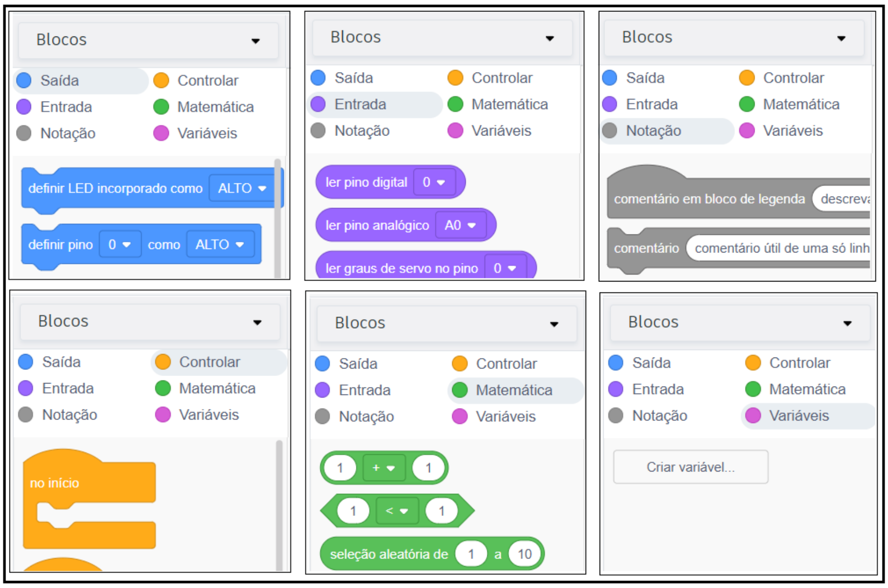
```
// C++ code
//
void setup()
{
  pinMode(13, OUTPUT);
  pinMode(12, OUTPUT);
  pinMode(11, OUTPUT);

  digitalWrite(13, HIGH);
  digitalWrite(12, LOW);
  digitalWrite(11, LOW);
}

void loop()
{
  digitalWrite(13, HIGH);
  digitalWrite(12, LOW);
  digitalWrite(11, LOW);
  delay(5000); // Wait for 5000 millisecond(s)
  digitalWrite(13, LOW);
  digitalWrite(12, HIGH);
  digitalWrite(11, LOW);
  delay(2000); // Wait for 2000 millisecond(s)
  digitalWrite(13, LOW);
  digitalWrite(12, LOW);
  digitalWrite(11, HIGH);
  delay(5000); // Wait for 5000 millisecond(s)
}
```

Fonte: Autoria Própria (2025)

Figura 28 - Tipos de Blocos

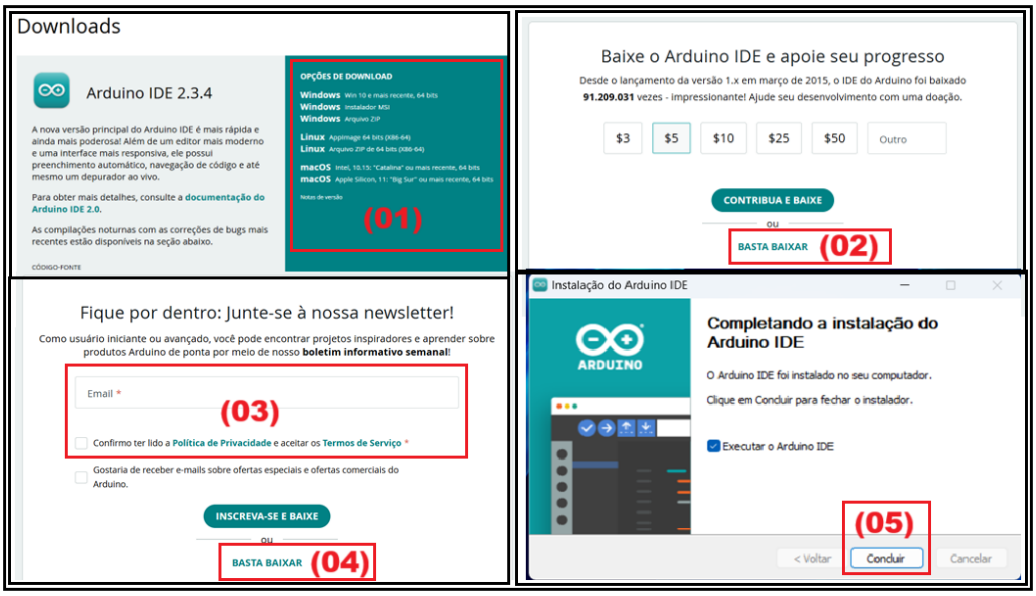



Fonte: Autoria Própria (2025)

Blocos de notação servem para o fim de adicionar comentários aos códigos-fonte; os blocos da categoria controlar são utilizados para controlar o fluxo de um programa, como por exemplo, para realizar repetições, verificações de condições ou controlar o tempo; os blocos da categoria matemática são usados para realizar operações matemáticas ou configurar uma condição específica de acordo com a sentença escrita, essa é uma categoria muito versátil. Por fim, temos os blocos da categoria variáveis, onde temos a possibilidade de criar uma variável, ou seja, definir uma variável qualquer para configurar a sentença, a exemplo, variável $t$ para um tempo qualquer.

Para transmitir todas os códigos para o Arduíno, vamos precisar do software Arduíno IDE, que é o ambiente de desenvolvimento utilizado para programar todas as placas da categoria Arduino, onde IDE é uma abreviação do termo em inglês, *Integrated Development Environment*, que em português significa Ambiente de Desenvolvimento Integrado.

Figura 29 - Abas de Download e Instalação do Arduíno IDE

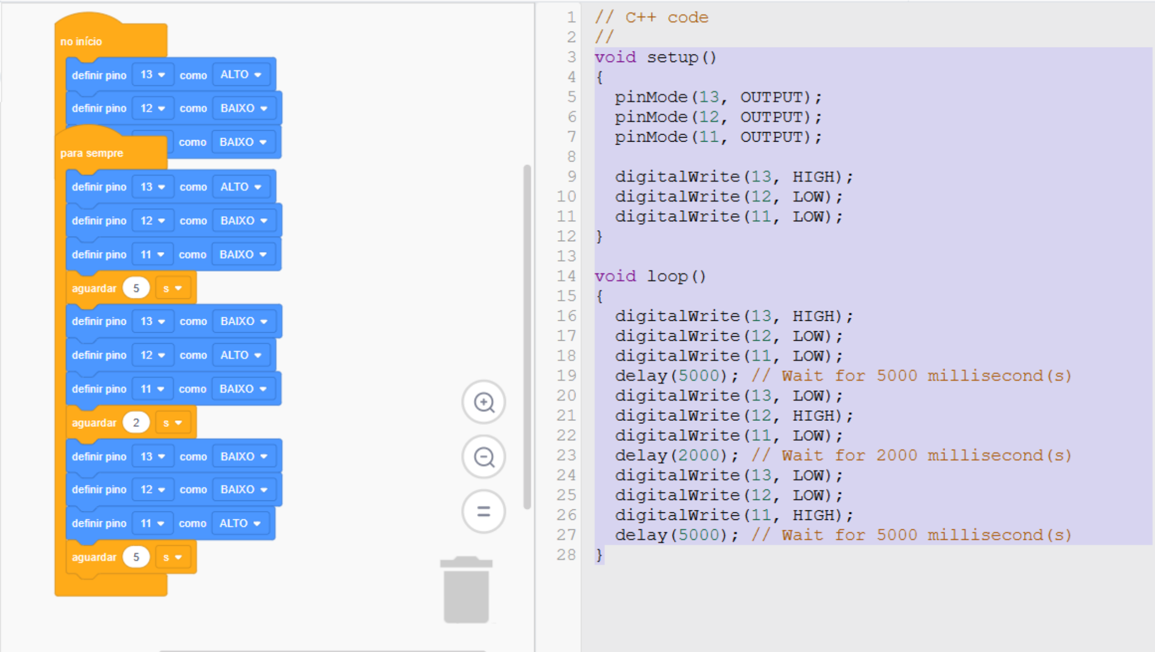



Fonte: Autoria Própria (2025)

Para baixar esse software, devemos acessar o endereço eletrônico do site oficial cujo link é https://www.arduino.cc/en/software – Figura 29, onde fica disposta em primeiro plano a versão mais atualizada da IDE para os sistemas operacionais Windows, Linux e MacOS (01). Ao se escolher o sistema, somos direcionados para uma aba de donativos, mas é suficiente clicar em “basta baixar” (02). Na próxima aba, precisaremos escrever algum endereço de e-mail e clicar na confirmação da política de privacidade e termos de serviço (03), apenas protocolo.

A instalação é bem intuitiva e, ao carregar tudo, basta concluir (05) para começar a usufruir o software. Ao abri-lo, vale muito a pena fazer a troca da linguagem do programa, pois facilita muito o entendimento e a busca por ferramentas que a IDE disponibiliza. Para isso, precisaremos na interface do software acessar file, clicaremos em preferences e, na aba que abrirá, em language selecionaremos português (Brasil).

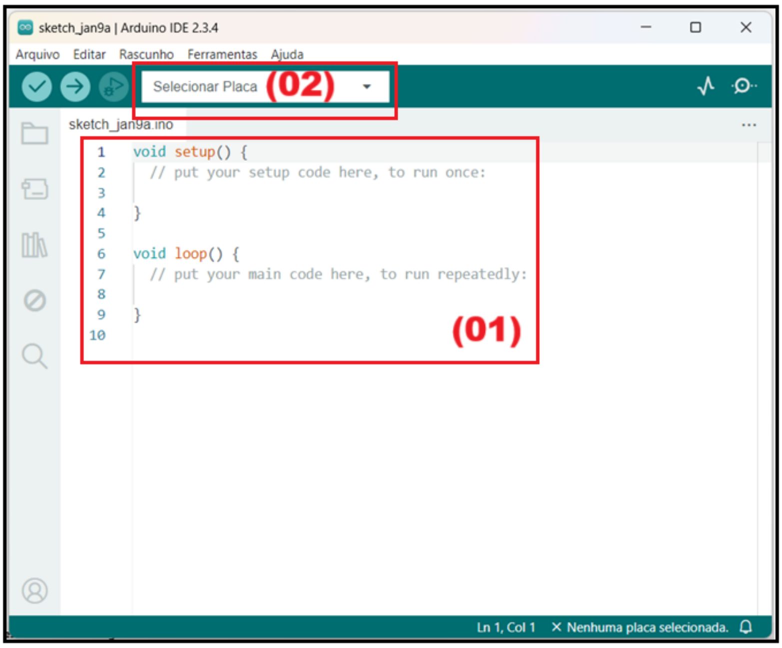
Figura 30 - Seleção dos Códigos




Fonte: Autoria Própria (2025)

Agora, vamos realizar a transferência dos códigos para o Arduíno Uno, a placa que irá gerenciar o funcionamento do circuito do semáforo. Para isso, vamos para o Tinkercad copiar a codificação gerada. Selecionaremos todo o código a partir de void setup na linha 3 – Figura 30, copie todo o conteúdo e abra o software Arduíno IDE.

Figura 31 - Arduíno IDE

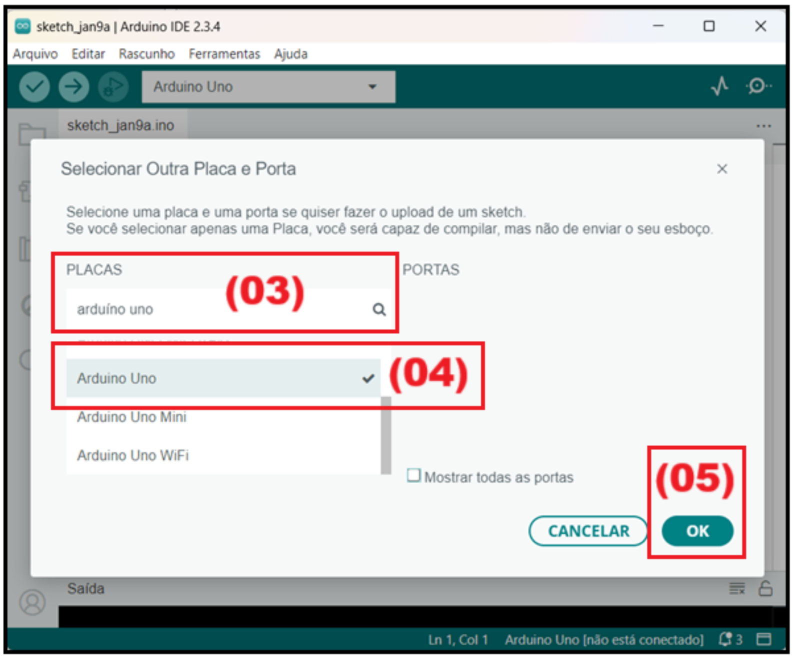



Fonte: Autoria Própria (2025)

O Arduíno precisa estar conectado ao computador para a compilação dos códigos. Sendo assim, precisamos verificar se de fato o Arduíno está conectado, um mini LED acenderá indicando a conexão. No Arduíno IDE – Figura 31, podemos selecionar o texto de entrada (01) e deletá-lo. É importante selecionar o tipo de Arduíno que iremos utilizar para a realização do circuito, nesse caso, vamos selecionar o Arduíno Uno. Então, podemos clicar em selecionar placa (02).

Imediatamente, abrirá uma aba de seleção de placa e porta (USB onde o Arduíno será conectado ao computador) – Figura 32. Desse modo, podemos digitar o nome da placa na busca (03), a qual desejamos transmitir os códigos, Arduíno Uno em nosso caso, para facilitar sua procura na lista abaixo, onde clicamos na opção desejada (04). Feito isso, em (05) clicaremos em ok para confirmar a ação.

Figura 32 - Seleção do Tipo de Arduíno

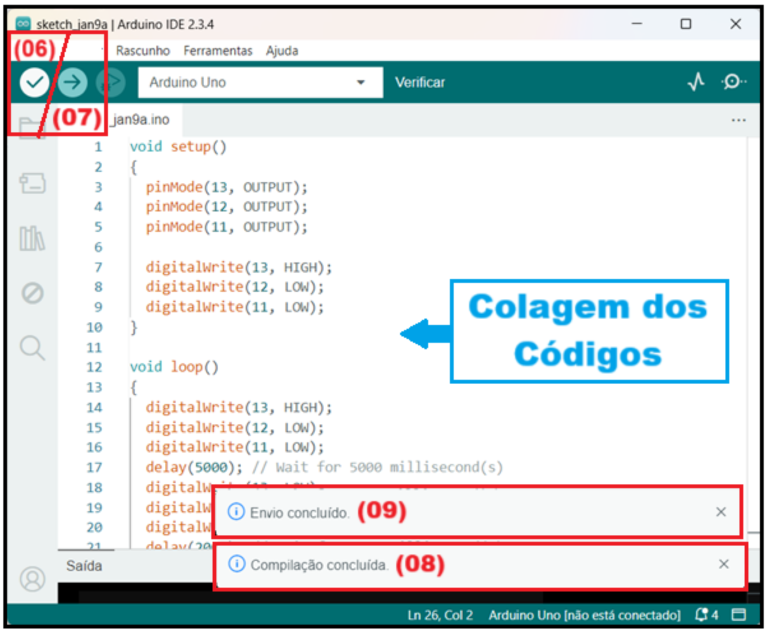



Fonte: Autoria Própria (2025)

Após todo esse alinhamento, podemos fazer a colagem dos códigos copiados no Tinkercad na janela do Arduíno IDE – Figura 33. Uma ótima forma de verificar algum erro ou inconsistência é o uso da ferramenta verificar (06), pois se o código apresentar algum problema de sintaxe, então surgirá na parte inferior da janela uma mensagem informando essa incoerência. Se estiver tudo correto, então a mensagem será o informe de que a compilação foi concluída (08).

Feito isso, vamos enviar os códigos para a placa clicando em (07) enviar usando o programador. O tempo de carregamento é breve e, havendo algum problema com a conexão do Arduíno ao computador, uma mensagem de erro será comunicada também no rodapé da janela. Estando tudo em conformidade, a mensagem de que o envio dos códigos foi concluído (09) será mostrada na parte inferior do software.

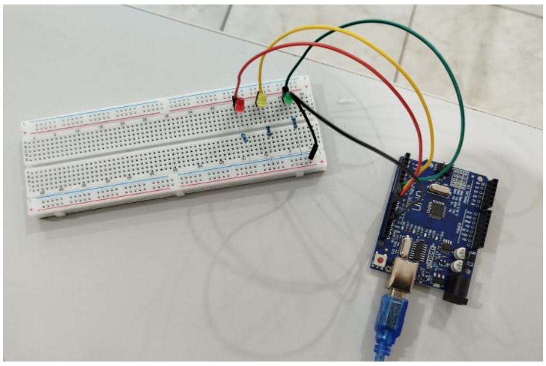
Figura 33 - Verificação e Envio de Códigos



Fonte: Autoria Própria (2025)

Como podemos observar, a instalação e o uso do Arduino IDE para compilar e enviar códigos à placa são bastante intuitivos. A principal dificuldade dos alunos não esteve na etapa de compilação ou transmissão, mas sim na elaboração dos códigos, já que a escrita direta em C++ exige maior atenção e domínio da linguagem. Ainda assim, para ampliar a colaboração e apoiar futuros aprendizados, deixamos a seguir o link de um tutorial detalhado, que explica de forma clara todo o processo de instalação e utilização do Arduino IDE: Curso Arduino - Como Baixar e Instalar a IDE do Arduino [2023] - Aula #02 (acesso em janeiro de 2025).

Figura 34 - Circuito de Semáforo


Fonte: Autoria Própria (2025)

Na Figura 34, temos um dos circuitos montados por um dos grupos que concluíram o desafio. Desafio esse que, apesar de simples, mostrou-se bastante eficiente para iniciá-los na empreitada de projetar, montar e programar circuitos.

Vamos aproveitar o momento para enumerar alguns pontos positivos e outros negativos do que foi observado nessa fase.

Os pontos positivos foram o entusiasmo e a satisfação dos alunos em realizarem algo novo e desafiador, pois se tratava de algo novo, para os professores inclusive; e a observação do desejo e prontidão de vontade de fazer a montagem do circuito do semáforo em postes dentro de uma maquete, ideia sugerida por eles e que nos evidenciou que a iniciativa se traduziu em uma experiência frutífera; outro ponto positivo a se destacar foi o fato de se verificar o significativo aumento de interesse dos alunos em entender mais sobre a elétrica e o comportamento da tensão e a corrente, algo que foi trabalhado também concomitante às aulas de reforço da aprendizagem no Projeto Ciclo Completo da Energia Elétrica – Figura 35.

Os pontos negativos foram o limite de tempo para as demais atividades, pois o desenvolvimento de trabalhos para além daquilo que estava previsto nos dos projetos poderia comprometer o desenvolvimento do currículo corrente, o que nos levou a decidir pela escolha de uma maior quantidade de tempo para realizar a adaptação do que queríamos roteirizar; e o pouco material à disposição, pois até cogitamos a possibilidade desses trabalhos serem realizados em casa, mas isso demandaria maior quantidade de material para atendermos a todos os grupos.

Figura 35 - Projeto Ciclo Completo da Energia Elétrica


Fonte: Autoria Própria (2025)

A propósito, esse é outro ponto positivo a se destacar, pois é muito comum que aulas de reforço da aprendizagem ocorram, em primeira hipótese, no contraturno, mas no caso da unidade escolar onde se deu o estudo observado, essas aulas acontecem durante o horário regular e, com isso, o que acontece na maioria dos casos é a retirada da sala de aula dos alunos com menor rendimento e desempenho nas atividades para outro ambiente, a sala de reforço. Na contramão disso, propomos as aulas de reforço da aprendizagem conjuntamente, ou seja, tanto o Professor Titular das aulas quanto para o de Professor de Reforço ficam com todos os alunos no mesmo ambiente, não importando se dentro ou fora da sala de aula. Isso ocorreu para as duas turmas desde o oitavo ano, ocasião em que adotamos a abordagem colaborativa, tanto em orientação quanto em regência para melhor aproveitamento do tempo e otimização de resultados de recuperação. Destacamos, ainda, o vínculo profissional e afetivo construído com essas turmas, bem como a consciência de que, para alcançar melhores resultados, seria necessário adotar práticas diferenciadas por meio das aulas de reforço. Dessa compreensão nasceu a motivação para a realização dos dois projetos ao longo do nono ano desses alunos.

Figura 36 - Conexão de Componentes Eletrônicos à Protoboard

Fonte: Autoria Própria (2025)

Outro fenômeno observado foi o comportamento de ansiedade e, de certo modo, predileção dos alunos pelas aulas de reforço por terem aspectos práticos, o que contrasta com a outra dinâmica citada acima, pois é bastante comum observar uma postura resistente por parte dos alunos em participar das aulas de reforço e, até mesmo, transferindo essa resistência à pessoa do Professor de Reforço, algo que neste estudo não ocorreu. Muito pelo contrário, podemos dizer que tanto o Professor Titular quanto o Professor de Reforço tiveram o trabalho facilitado, algo configurado pelo atendimento e *feedbacks* equivalentes em quase todas as oportunidades, seja nas aulas estritamente direcionadas aos projetos, seja naquelas semanas em que eles precisaram dar uma pausa para que o currículo corrente pudesse fluir.

O formato de trabalhos envolvendo eletrônica e programação descreve uma dinâmica de tentativa e erro, algo desafiador não só para os alunos, mas para os docentes. Por essa razão, a franqueza quanto ao tamanho do que seria desafiador a todos possibilitou, também, um ambiente de aprendizagem mais colaborativo e mais favorável à aprendizagem – Figura 36.

## 3.4 FASE 4: REGRA DA SOMA E PRODUTO

Assim como a fase anterior, a fase 4 teve predominância no terceiro bimestre e, aproveitando o momento, podemos aqui esclarecer uma ou outra dúvida que possa ter ficado com as fases estabelecidas do projeto. Isso porque, levando em consideração que o desenvolvimento do projeto está dividido em seis fases, a ideia que pode prevalecer em quem eventualmente leia essa dissertação é de que cada uma ocorrerá estritamente uma após a outra. Não necessariamente, pois precisamos lembrar que destinamos duas aulas semanais para o desenvolvimento de projetos nas aulas de reforço e três aulas para o currículo corrente, podendo haver a possibilidade desses projetos fazerem uma pausa para corrigir o curso curricular.

Tendo isso em vista que as fases 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6, começaram simultaneamente, a divisão das aulas favoreceu a realização das fases em alternância nas aulas de reforço e, para as demais aulas semanais, a contemplação dos outros conteúdos do currículo, o que tornou o desenvolvimento do projeto muito fluído e organizado, facilitando muito a conversa com os alunos sobre aspectos semelhantes das fases de suporte (robótica e programação) com as fases de contexto e aplicação de função quadrática e outros elementos convencionais do estudo de matemática para o nono ano.

### 3.4.1 Definição da Regra

Já aprendemos que, ao resolver uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, suas raízes são, quando elas existem em valores reais $(\Delta \geq 0)$, os números $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, onde o discriminante $\Delta$ (delta) é dado pela expressão $b^2 - 4ac$.

Como pretendemos estabelecer uma regra entre a soma e o produto dessas raízes, vamos verificar o resultado de cada operação e analisá-los posteriormente.

$$\textbf{SOMA: } \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\boldsymbol{\Delta}}-b+\sqrt{\boldsymbol{\Delta}}}{2a} = \frac{-\mathbf{2}b}{\mathbf{2}a} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

$$\textbf{PRODUTO: } \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-\boldsymbol{\Delta}}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{b}^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{ac}}{\mathbf{4}\boldsymbol{a}^2} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$$

Perceba que o resultado da soma das raízes é $-\frac{b}{a}$ e o resultado do produto entre elas é $\frac{c}{a}$, o que revela a obtenção de informações importantes bastando conhecer os coeficientes $a$, $b$ e $c$ da equação quadrática.

A regra da soma e produto é um método prático e rápido para determinar as raízes (soluções) de uma equação do 2º grau, especialmente quando essas raízes são números inteiros. Ela se baseia em duas relações importantes entre as raízes e os coeficientes da equação.

Sendo assim, sejam $x_1$ e $x_2$ as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, podemos dizer que a soma e o produto entre essas soluções são dados por:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Essas relações são úteis porque permitem que, conhecendo os coeficientes da equação, podemos determinar informações sobre suas raízes sem precisar resolvê-las diretamente. Essa é uma ferramenta especialmente útil em problemas que envolvem equações do 2.º grau em que a aplicação da regra de resolução não é o artifício mais cômodo e, também, na análise de funções quadráticas mais adiante.

**EXEMPLO 2.3**

**01)** Resolva as equações:

a) $3x^2 - 15x + 18 = 0$

b) $x^2 - 105x + 500 = 0$

RESOLUÇÃO

a) Na equação $3x^2 - 15x + 18 = 0$, temos que $a = 3$, $b = -15$ e $c = 18$. Então, podemos dizer que:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\dfrac{(-15)}{3} = \dfrac{15}{3} = 5 \\ \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{18}{3} = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases}$$

Assim, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, pois sabemos que $2 + 3 = 5$ e $2 \cdot 3 = 6$.

$$\boldsymbol{S = \{2, 3\}}$$

b) Na equação $x^2 - 105x + 500 = 0$, temos que $a = 1$, $b = -105$ e $c = 500$. Então, podemos dizer que:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\dfrac{(-105)}{1} = \dfrac{105}{1} = 105 \\ \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{500}{1} = 500 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 105 \\ x_1 \cdot x_2 = 500 \end{cases}$$

Logo, $x_1 = 5$ e $x_2 = 100$, pois sabemos que $5 + 100 = 105$ e $5 \cdot 100 = 500$.

$$\boldsymbol{S = \{5, 100\}}$$

**02)** Domingo foi dia de jogo do Brasil. Um colega da escola que não assistiu ao jogo, quis saber qual foi o placar final. Outro jovem, com bom conhecimento a respeito de equações do 2.º grau, respondeu: “O Brasil venceu pelo placar de $x^2 - 8x + 15 = 0$”. Muitos ali ficaram sem entender nada. Sendo assim, podemos dizer que o placar final, favorável à Seleção Brasileira, foi de:

a) $6 \times 2$ b) $7 \times 1$ c) $5 \times 3$ d) $5 \times 2$ e) $4 \times 2$

RESOLUÇÃO

Na equação $x^2 - 8x + 15 = 0$, temos que $a = 1$, $b = -8$ e $c = 15$. Então, podemos dizer que:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\dfrac{(-8)}{1} = \dfrac{8}{1} = 8 \\ \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{15}{1} = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 \cdot x_2 = 15 \end{cases}$$

Como $3 + 5 = 8$ e $3 \cdot 5 = 15$, podemos dizer que $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$.

$$\boldsymbol{S = \{3, 5\}}$$

Logo, o gabarito é **C**, pois o Brasil venceu com placar final de $5 \times 3$.

Em cada um dos exemplos acima, chegamos à solução por meio da aplicação da regra da soma e produto. Observe que, para o exemplo 2.3 – 1, item a e, para o exemplo 2.3 – 2, poderíamos resolvê-los aplicando a regra de resolução, tarefa que no item b do exemplo 2.3 – 1, não seria tão tranquila comparada à regra aplicada.

Vamos resolver $x^2 - 105x + 500 = 0$ pelo referido método de resolução e analisar o modo pelo qual cada etapa se encaminha.

$$\boldsymbol{x^2 - 105x + 500 = 0}$$

$$\boldsymbol{1x^2 - 105x + 500 = 0}$$

$a = 1$ $\quad\quad \Delta = b^2 - 4.a.c$

$b = (-105)$ $\quad\quad \Delta = (-105)^2 - 4.1.500$

$c = 500$ $\quad\quad \Delta = 11025 - 2000$

$\Delta = 9025$

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-105) \pm \sqrt{9025}}{2.1}} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{\mathbf{105 - 95}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{2}} = \mathbf{5} \\[2ex] x_2 = \dfrac{\mathbf{105 + 95}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{200}}{\mathbf{2}} = \mathbf{100} \end{cases} \qquad \boldsymbol{S = \{5, 100\}}$$

Podemos constatar que, quando uma equação do 2.º grau apresenta coeficientes elevados, como é o caso de $x^2 - 105x + 500 = 0$, o cálculo do discriminante ($\Delta$) frequentemente envolve números grandes. Nesse exemplo, temos $105^2 = 11025$ e $4 \cdot 1 \cdot 500 = 2000$, resultando em $\Delta = 9025$. Embora esse não seja um cálculo impossível, ele representa um desafio significativo para alunos com dificuldades em Matemática, especialmente por envolver etapas sequenciais, como a extração da raiz quadrada de um número relativamente alto.

É evidente que há estratégias para facilitar esses cálculos, como a fatoração do discriminante ou mesmo o uso da calculadora. No entanto, em situações formais de avaliação, seja em provas internas ou externas, frequentemente não se permite o uso de recursos tecnológicos, o que exige dos alunos maior domínio das técnicas manuais. Nesse contexto, o processo de resolução pela regra pode se tornar mais árduo e desmotivador para alguns estudantes.

Diante disso, a aplicação da regra da soma e do produto mostra-se uma alternativa eficiente e pedagógica. Quando a equação admite raízes inteiras e o produto dos coeficientes é acessível, essa estratégia permite ao aluno chegar à solução de forma mais direta e com menor carga cognitiva. Além de proporcionar economia de tempo, essa abordagem valoriza o raciocínio lógico e a observação de padrões numéricos, competências fundamentais no ensino da Matemática.

Apesar da aparente simplicidade da regra da soma e produto, é possível — e desejável — roteirizar sua aplicação para favorecer a compreensão de alunos com maiores defasagens, criando um modelo-padrão que possa ser reutilizado em diferentes situações-problema. Esse processo de roteirização permite adaptar o conteúdo às necessidades específicas da turma, sem comprometer o rigor matemático, oferecendo assim uma experiência de aprendizagem mais acessível, engajadora e significativa.

Conforme defende David Ausubel (2003), "o fator mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe", destacando a relevância dos conhecimentos prévios e da significação dos conteúdos. Nesse sentido, adaptar o ensino ao nível atual de compreensão dos estudantes, por meio de estratégias como a roteirização e a contextualização, permite criar pontes cognitivas eficazes.

A proposta de roteirizar essa abordagem, especialmente para alunos com maiores defasagens, atende ainda às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destaca a importância de metodologias ativas e inclusivas, capazes de desenvolver competências como o raciocínio lógico, a resolução de problemas e o pensamento crítico (BRASIL, 2017). Tais roteiros funcionam como mapas de orientação que guiam o aluno de forma estruturada, promovendo segurança e favorecendo a construção de uma aprendizagem significativa.

Portanto, mais do que apenas uma técnica de resolução, a regra da soma e do produto, quando aplicada de forma intencional e adaptada ao contexto da turma, transforma-se em uma oportunidade de inclusão, protagonismo e valorização do raciocínio matemático — elementos fundamentais para tornar o ensino da Matemática mais acessível e eficaz.

### 3.4.2 Roteirização da Regra

Para roteirizar a regra da soma e produto e sua aplicação, vamos ajustá-la para o caso particular em que $a = 1$, além de também roteirizar a seleção das raízes mediante a combinação dos sinais da soma e do produto.

Como já vimos anteriormente, se $x_1$ e $x_2$ são as raízes da equação do 2.º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, podemos dizer que a soma e o produto entre essas soluções são dados por $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$, respectivamente.

Para $a \neq 1$, vamos dividir a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por $a$. Assim, a equação original passará a ter formato $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Considerando que $S = -\frac{b}{a}$ é equivalente a $-S = \frac{b}{a}$, podemos reescrever $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ como:

$$x^2 - \boldsymbol{S}x + \boldsymbol{P} = 0$$

$$onde: \quad \boldsymbol{S} \rightarrow Soma$$
$$\boldsymbol{P} \rightarrow Produto$$

Esse modelo é perfeitamente ajustável a qualquer equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a$ diferente de zero, favorecendo a determinação de soluções inteiras e, ainda que $a$ não seja 1, pois poderemos multiplicar $a$ equação por algum escalar a fim de obter essa equivalência.

Com a equação formatada nesta configuração, podemos simplificar a regra da soma e produto do padrão clássico para a “regrinha do quem mais quem, quem vezes quem”, para definir a dupla numérica que pode satisfazer tanto a soma quanto o produto. Acaba por ser uma abordagem extremamente simples, mas que acabou fazendo toda a diferença, pois esse formato facilitou muito o entendimento das turmas observadas. Agora, em cada exemplo que vamos resolver a seguir, demonstraremos o que e como nossos alunos precisam pensar para determinar o conjunto solução de cada equação.

**EXEMPLO 2.4**

**01)** Resolva as equações:

a) $x^2 - 11x + 30 = 0$

b) $x^2 - 10x + 21 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$

d) $-x^2 + 5x - 6 = 0$

RESOLUÇÃO

a) Na equação $x^2 - 11x + 30 = 0$, como $a = 1$, temos que $S = 11$ e $P = 30$. Então, queremos saber quem mais quem é igual a 11 e, quem vezes quem, é igual a 30. Vamos desenhar um esquema para representar a charada e respondê-la:

$$\underline{\;5\;} + \underline{\;6\;} = \boxed{11}$$
$$\underline{\;5\;} \times \underline{\;6\;} = \boxed{30}$$

Assim, $x_1 = 5$ e $x_2 = 6$.

$$\boldsymbol{S = \{5, 6\}}$$

b) Em $x^2 - 10x + 21 = 0$, como $a = 1$, temos que $S = 10$ e $P = 21$. Então, a charada é quem mais quem é igual a 10, quem vezes quem é igual a 21?

$$\underline{\;3\;} + \underline{\;7\;} = \boxed{10}$$
$$\underline{\;3\;} \times \underline{\;7\;} = \boxed{21}$$

Assim, $x_1 = 3$ e $x_2 = 7$.

$$\boldsymbol{S = \{3, 7\}}$$

c) Já na equação $3x^2 - 9x + 6 = 0$, como $a = 3$, vamos dividir a equação por 3, ou se preferir, multiplicá-la por $\frac{1}{3}$. A equação equivalente será $x^2 - 3x + 2 = 0$, em que temos que $S = 3$ e $P = 2$. A charada, agora, é quem mais quem é igual a 3, quem vezes quem é igual a 2?

$$\underline{\;1\;} + \underline{\;2\;} = \boxed{3}$$
$$\underline{\;1\;} \times \underline{\;2\;} = \boxed{2}$$

Assim, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

$$\boldsymbol{S = \{1, 2\}}$$

d) Parra $-x^2 + 5x - 6 = 0$, como $a = -1$, basta multiplicar a equação por $(-1)$. Daí, teremos $x^2 - 5x + 6 = 0$ e, desse modo, $S = 10$ e $P = 21$. Então iremos perguntar: quem mais quem é igual a 5 e, quem vezes quem, é igual a 6?

$$\underline{\;2\;} + \underline{\;3\;} = \boxed{5}$$
$$\underline{\;2\;} \times \underline{\;3\;} = \boxed{6}$$

Assim, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

$$\boldsymbol{S = \{2, 3\}}$$

**02)** Na equação $2x(x - 25) = 3x(x + 16) - 200$, podemos afirmar que a diferença entre suas raízes é:

a) 98 b) 41 c) 48 d) 125 e) 102

RESOLUÇÃO

Vamos desenvolver a equação $2x(x-25) = 3x(x+16) - 200$.

$$2x(x-25) = 3x(x+16) - 200 \Rightarrow 2x^2 - 50x = 3x^2 + 48x - 200 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 3x^2 - 50x - 48x + 200 = 0 \Rightarrow -x^2 - 98x + 200 = 0 \xRightarrow{\times(-1)}$$

$$x^2 + 98x - 200 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \boldsymbol{S} = -98 \\ \boldsymbol{P} = -200 \end{cases}$$

$$-\underline{\mathbf{100}} + \underline{\ \mathbf{2}\ } = \boxed{-\mathbf{98}}$$

$$-\underline{\mathbf{100}} \times \underline{\ \mathbf{2}\ } = \boxed{-\mathbf{200}}$$

Assim, $x_1 = -100$ e $x_2 = 2$.

$$\boldsymbol{S = \{-100, 2\}}$$

Como o problema quer saber a diferença entre as raízes da equação, devemos calcular $2 - (-100) = 2 + 100 = 102$.

$$\boldsymbol{Logo, o\ gabarito\ \text{é}\ E, pois\ a\ diferença\ entre\ as\ raízes\ \text{é}\ 102.}$$

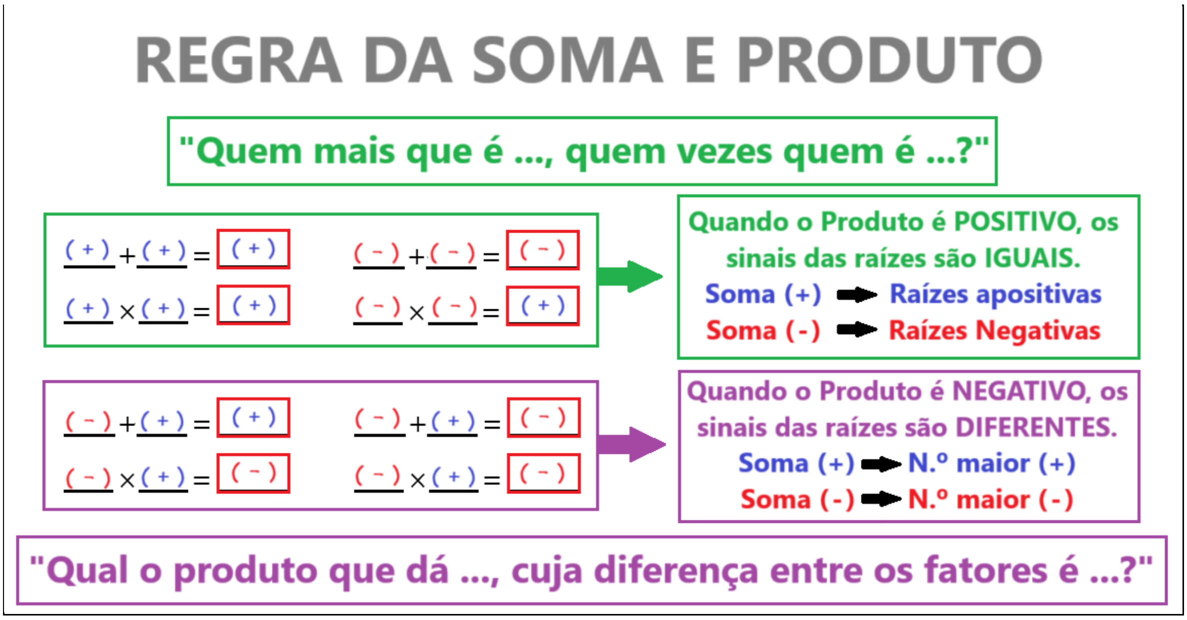
Observando o que foi desenvolvido com as turmas ao longo do trabalho, especialmente durante a Fase 2, percebe-se que, gradualmente, exercitamos o método com o intuito de consolidar a aprendizagem e aumentar a segurança dos alunos na seleção adequada dos números para “matar a charada”. A dificuldade mais recorrente foi a demora dos alunos em compreender que o par numérico escolhido para a soma deveria ser o mesmo que deve satisfazer o produto — ou seja, o mesmo par de números deveria atender simultaneamente às duas condições.

Superado esse obstáculo inicial, passamos a observar dois outros pontos que requeriam atenção: primeiro, as eventuais variações de sinais nas equações, que causavam confusões frequentes; o segundo, a tendência de os alunos confundirem as raízes da equação com os valores de soma e produto, especialmente no momento de determinar corretamente o conjunto solução.

Diante disso, optamos por trabalhar inicialmente com diversos exemplos que apresentavam raízes inteiras e positivas, alterando apenas a estrutura algébrica das equações. O objetivo era exercitar a reorganização dos termos e promover a identificação de equações equivalentes ao modelo geral $x^2 - Sx + P = 0$. Esse trabalho despertou nos alunos uma curiosidade espontânea quanto ao funcionamento da regra em situações com sinais variados. A mesma curiosidade foi observada durante as atividades com robôs programáveis movidos por placas solares, quando questionaram: "Mas eles só andam para frente?"[7], evidenciando que o senso investigativo, estimulado em uma atividade, também se manifestava em outra.

Ao trabalharmos com exemplos que envolviam variações nos sinais da soma e do produto, tornou-se ainda mais evidente a fragilidade dos alunos no domínio das regras de sinais. Muitos demonstraram compreender uma operação (como adição ou multiplicação) sem conseguir relacioná-la corretamente à outra, enquanto outros ainda misturavam conceitos, gerando confusões nas respostas.

*Figura 37 - Roteiro de Decisão de Sinais*




Fonte: Autoria Própria (2025)

Para sanar essas dificuldades e fortalecer as habilidades relacionadas ao uso adequado das regras de sinais — tanto na adição e subtração quanto na multiplicação e divisão — estruturamos um roteiro de verificação de sinais, pensado especificamente para orientar os alunos na tomada de decisão correta. Na Figura 37, observa-se um exemplo claro desse roteiro, demonstrando como os alunos podem analisar as variações e, a partir delas, definir corretamente os sinais das raízes em cada equação.

O que buscamos, aqui, foi deixar muito claro para os nossos alunos a condição do sinal do produto no primeiro instante, pois, se positivo, então os sinais das raízes

[7] Paráfrase que retoma uma expressão apresentada no segundo parágrafo da página 20.

seriam iguais, afinal de contas, o produto de dois fatores com o mesmo sinal resulta em valor positivo; se negativo, então os sinais das raízes seriam diferentes, por conta de o produto de dois fatores com sinais diferentes ser negativo.

No segundo instante, se as raízes tivessem o mesmo sinal, então a condição de somá-las continuaria e esse mesmo sinal dependeria do sinal da soma, pois se ela for positiva, positivas são as raízes, se negativa, as raízes são negativas; se as raízes tivessem sinais diferentes, então o que precisaríamos verificar não seria mais a soma, mas sim, a diferença entre as raízes, se atentando cuidadosamente para o fato de que, se a soma fosse positiva, então o numeral maior dentre as soluções seria positivo, se negativa, então o numeral maior das soluções seria o negativo.

Nos próximos exemplos vamos tentar explorar mais essas ideias associadas a esse tipo de tomada de decisão.

**EXEMPLO 2.5**

**01)** Determine o conjunto solução das equações abaixo:

a) $x^2 - 13x + 36 = 0$

$$\underline{\ 4\ } + \underline{\ 9\ } = \boxed{13}$$
$$\underline{\ 4\ } \times \underline{\ 9\ } = \boxed{36}$$
$$S = \{4, 9\}$$

b) $x^2 + 12x + 35 = 0$

$$\underline{-5} + \underline{-7} = \boxed{-12}$$
$$\underline{-5} \times \underline{-7} = \boxed{35}$$
$$S = \{-5, -7\}$$

c) $x^2 - 2x - 80 = 0$

$$\underline{-8} + \underline{10} = \boxed{2}$$
$$\underline{-8} \times \underline{10} = \boxed{-80}$$
$$S = \{-8, 10\}$$

d) $x^2 + 3x - 10 = 0$

$$\underline{-5} + \underline{\ 2\ } = \boxed{-3}$$
$$\underline{-5} \times \underline{\ 2\ } = \boxed{-10}$$
$$S = \{-5, 2\}$$

e) $-x^2 + 15x - 36 = 0 \ \times (-1)$

$x^2 - 15x + 36 = 0$

$$\underline{\ 3\ } + \underline{12} = \boxed{15}$$
$$\underline{\ 3\ } \times \underline{12} = \boxed{36}$$
$$S = \{3, 12\}$$

f) $5x^2 + 10x + 5 = 0 \ \div 5$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\underline{-1} + \underline{-1} = \boxed{-2}$$
$$\underline{-1} \times \underline{-1} = \boxed{1}$$
$$S = \{-1\}$$

g) $-3x^2 + 3x + 60 = 0 \ \div (-3)$

$x^2 - x - 20 = 0$

$$\underline{-4} + \underline{\ 5\ } = \boxed{1}$$
$$\underline{-4} \times \underline{\ 5\ } = \boxed{-20}$$
$$S = \{-4, 5\}$$

h) $2x^2 + 10x - 12 = 0 \ \div 2$

$x^2 + 5x - 6 = 0$

$$\underline{-6} + \underline{\ 1\ } = \boxed{-5}$$
$$\underline{-6} \times \underline{\ 1\ } = \boxed{6}$$
$$S = \{-6, 1\}$$

**02)** Os números reais $-7$ e $2$ são raízes de uma dentre as equações listadas abaixo. Qual das equações tem conjunto solução $S = \{-7, 2\}$?

a) $-x^2 + 9x - 14 = 0$

b) $2x^2 - 10x - 28 = 0$

c) $-4x^2 - 36x + 56 = 0$

d) $5x^2 + 25x - 70 = 0$

e) $3x^2 - 30x + 63 = 0$

RESOLUÇÃO

Vamos reescrever cada equação na forma $x^2 - Sx + P = 0$.

a) $-x^2 + 9x - 14 = 0 \xRightarrow{\times(-1)} x^2 - 9x + 14 = 0$

b) $2x^2 - 10x - 28 = 0 \overset{\div 2}{\Rightarrow} x^2 - 5x - 14 = 0$

c) $-4x^2 - 36x + 56 = 0 \xRightarrow{\div(-4)} x^2 + 9x - 14 = 0$

**d)** $\mathbf{5x^2 + 25x - 70 = 0} \overset{\div 5}{\Rightarrow} \mathbf{x^2 + 5x - 14 = 0}$

e) $3x^2 - 30x + 63 = 0 \overset{\div 3}{\Rightarrow} x^2 - 10x + 21 = 0$

Como $-7$ e $2$ são as raízes, temos pela soma e produto:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{-7} + \underline{\ 2\ } = \boxed{-5} \\ \underline{-7} \times \underline{\ 2\ } = \boxed{-14} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{x^2 + 5x - 14 = 0}$$

$\boldsymbol{Logo, o\ gabarito}$ é $\boldsymbol{d}$.

**03)** Ao se calcular a soma e o produto entre as raízes da equação do 2.º grau $x^2 + 80 = 20x$, temos respectivamente os valores:

a) $80\ e\ 20$

b) $20\ e\ 80$

c) $-20\ e\ 80$

d) $-80\ e\ 20$

e) $4\ e\ 20$

RESOLUÇÃO

Vamos reescrever a equação $x^2 + 80 = 20x$ na forma $x^2 - Sx + P = 0$. Assim, teremos $x^2 - 20x + 80 = 0$. Desse modo, a soma e o produto ficam descritos na própria equação. Logo, $S = 20$ e $P = 80$. Gabarito **b**.

A principal ideia foi sempre colaborar com ferramentas e dar maior liberdade para que os alunos decidissem qual seria a estratégia que lhes fosse mais eficaz. Quanto mais diversificamos a oferta de equações e problemas, mais segurança e percepção os alunos adquiriram ao exercitar esse tipo de habilidade. A exemplo, vamos pensar em duas equações do 2.º grau, digamos, $2x^2 - 9x + 10 = 0$ e $3x^2 - 15x + 12 = 0$. Podemos perceber de imediato a possibilidade de se reescrever a segunda equação na forma $x^2 - Sx + P = 0$, caracterizando uma solução com raízes inteiras, o que não ocorre com a primeira equação.

E o grande desafio de qualquer trabalho dentro de um manual de sobrevivência (Plano de Aula ou Passo-a-Passo) como esse é justamente tornar a percepção imediata do professor algo também da percepção do aluno, pois uma aula difícil qualquer profissional consegue ministrar, o difícil é pegar assuntos difíceis, que são verdadeiros tabus para os alunos, e fazê-los compreender de uma forma mais fácil.

O que tentamos propor para nossos alunos foram condições que eles observassem equações desse tipo e ponderassem: “Olha! Tive mais dificuldades de pensar em dois números para $2x^2 - 9x + 10 = 0$, não deu para simplificar, então eu resolvi pela regra de resolução”, ou então, “Ah, já sei! Consigo simplificar a equação $3x^2 - 15x + 12 = 0$ por 3 e, com $x^2 - 5x + 4 = 0$, sei que $1 + 4 = 5$ e $1 \times 4 = 4$. Então, a solução é $S = \{1, 4\}$”. Guardadas as devidas proporções, esse diálogo interno que o aluno precisaria realizar consigo mesmo, o professor precisa provocar e, por essa razão, tentamos nos manter ao máximo disponíveis para diagnosticar e sanar eventuais dúvidas e dificuldades.

Habitualmente, no Brasil, atribui-se o nome do matemático indiano do século XII, Bhaskara Akaria, à famosa fórmula de resolução de equações do segundo grau — conhecida como “fórmula de Bhaskara”. No entanto, historicamente essa atribuição é equivocada. Segundo Lima e Morgado (2004), a fórmula não foi descoberta por Bhaskara, e sua associação só se consolidou na cultura escolar brasileira — por volta da década de 1960 — provavelmente devido à influência de livros didáticos que incorporaram erroneamente o nome.

Em virtude disso, preferimos chamar o procedimento rotineiro de resolução da equação do segundo grau de “regra roteirizada” ou simplesmente “regra de resolução”, adotando uma abordagem em etapas didáticas e acessíveis. Embora o termo "fórmula de Bhaskara" persista no vocabulário escolar e seja amplamente compreendido entre professores e alunos, é importante situar historicamente essa nomenclatura como um erro histórico consolidado. Vamos, a seguir, aplicar essa regra na resolução da equação $2x^2 - 9x + 10 = 0$.

RESOLUÇÃO:

$$\mathbf{2x^2 - 9x + 10 = 0}$$

$a = \mathbf{2}$ $\qquad \Delta = \mathbf{b^2 - 4.a.c}$

$b = (\mathbf{-9})$ $\qquad \Delta = \mathbf{(-9)^2 - 4.2.10}$

$c = \mathbf{10}$ $\qquad \Delta = \mathbf{81 - 80}$

$\Delta = \mathbf{1}$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-b \pm \sqrt{\Delta}}}{\mathbf{2.a}} = \frac{\mathbf{-(-9) \pm \sqrt{1}}}{\mathbf{2.2}} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{\mathbf{9-1}}{\mathbf{4}} = \dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{4}} = \mathbf{2} \\ \\ x_2 = \dfrac{\mathbf{9+1}}{\mathbf{4}} = \dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{4}} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} \end{cases} \qquad \boldsymbol{S} = \left\{2;\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right\}$$

## 3.5 FASE 5: RESULTADOS DO TRABALHO

Ao iniciarmos esta pesquisa, parte da introdução foi dedicada à caracterização das turmas envolvidas, com o objetivo de compreender suas particularidades. Para uma análise mais aprofundada, entretanto, torna-se essencial considerar o contexto histórico e social no qual esses estudantes estão inseridos.

Figura 38 - Participação em Lousa

Fonte: Autoria Própria (2025)

As turmas em questão cursaram nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o 5º ano e, já nos anos finais, o 6º ano, em um período marcado pela pandemia da COVID-19, quando as aulas foram realizadas de forma remota. A interrupção das atividades escolares presenciais, aliada às desigualdades de acesso à tecnologia e à internet, resultou em impactos significativos na aprendizagem. A transição para os anos finais do Ensino Fundamental tornou-se ainda mais desafiadora, exigindo dos alunos não apenas a recuperação de conteúdos defasados, mas também a reconstrução de vínculos sociais e o desenvolvimento de competências como o comprometimento e a tolerância, severamente comprometidos pelo isolamento prolongado.

Além das dificuldades decorrentes da pandemia, identificamos um número expressivo de alunos com necessidades educacionais especiais nas turmas pesquisadas. Entre os casos diagnosticados, observam-se estudantes com deficiência intelectual, transtorno do espectro autista (TEA), transtorno de déficit de atenção e hiperatividade (TDAH), transtorno opositor desafiador (TOD), além de alunos reclassificados em virtude de dificuldades de aprendizagem e alfabetização tardia. É importante ressaltar que muitos apresentam comorbidades, o que torna o processo de ensino e aprendizagem ainda mais desafiadores.

Figura 39 - Produção de Trabalhos

Fonte: Autoria Própria (2025)

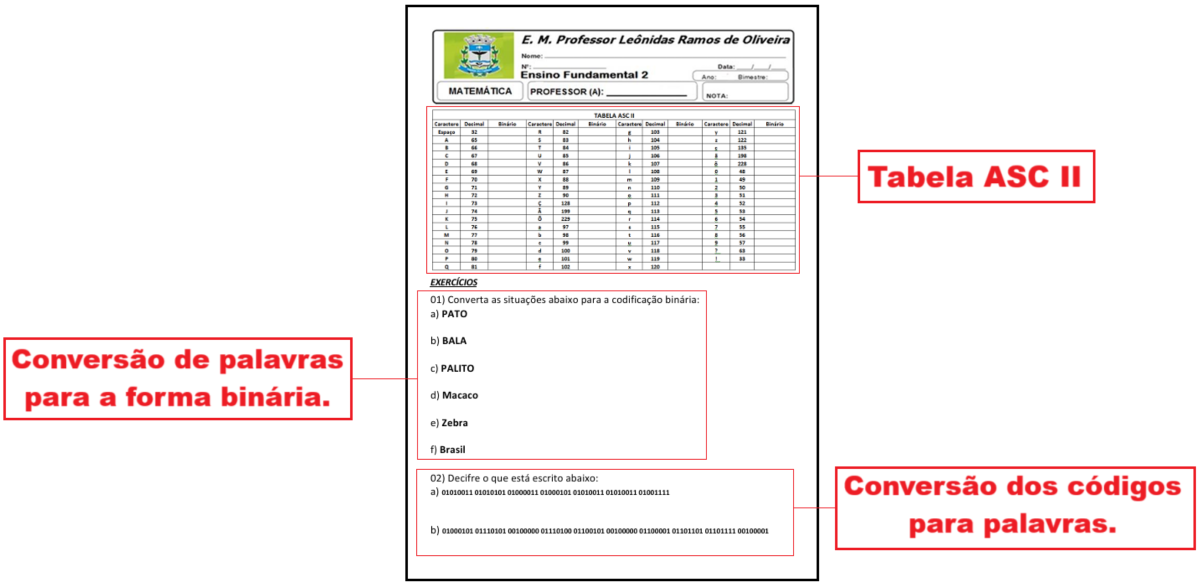
Os resultados obtidos ao longo da presente investigação revelaram-se expressivos, particularmente no que tange à mudança comportamental dos discentes, com destaque para aqueles que apresentavam maiores dificuldades no processo de aprendizagem. Constatou-se uma evolução significativa na postura e no engajamento desses alunos, resultado, em grande parte, da participação em atividades práticas pautadas na criatividade, na colaboração e na resolução de desafios cognitivos e socioemocionais.

Conforme apresentado na Figura 38, foi possível observar o progresso de estudantes que, em etapas iniciais do projeto, demonstravam acentuada dificuldade em se expressar oralmente em contextos coletivos. A inserção em atividades de caráter *maker* proporcionou um ambiente de aprendizagem seguro, motivador e acolhedor, no qual os alunos desenvolveram autoconfiança e protagonismo, passando a contribuir de forma mais ativa nas interações e discussões em sala.

É relevante destacar que tais avanços decorrem de um processo colaborativo contínuo, fundamentado em práticas pedagógicas intencionalmente estruturadas para promover a aprendizagem significativa. A proposição de projetos desafiadores, articulados a uma lógica de trabalho em equipe, proporcionou o desenvolvimento de competências como a comunicação eficaz, a cooperação, a resolução de problemas e a criatividade. A Figura 39 exemplifica a transformação observada nas relações interpessoais entre os estudantes, evidenciando um comportamento mais colaborativo, empático e respeitoso.

Durante a execução das atividades, os alunos foram gradualmente aprendendo a lidar com frustrações, a explorar caminhos alternativos para resolução de impasses e a reconhecer os avanços conquistados ao longo do percurso. Essa vivência contribuiu de forma significativa para o fortalecimento da autoestima dos participantes e para a construção de uma autoimagem positiva enquanto sujeitos capazes de enfrentar desafios, superar limitações e alcançar metas de aprendizagem.

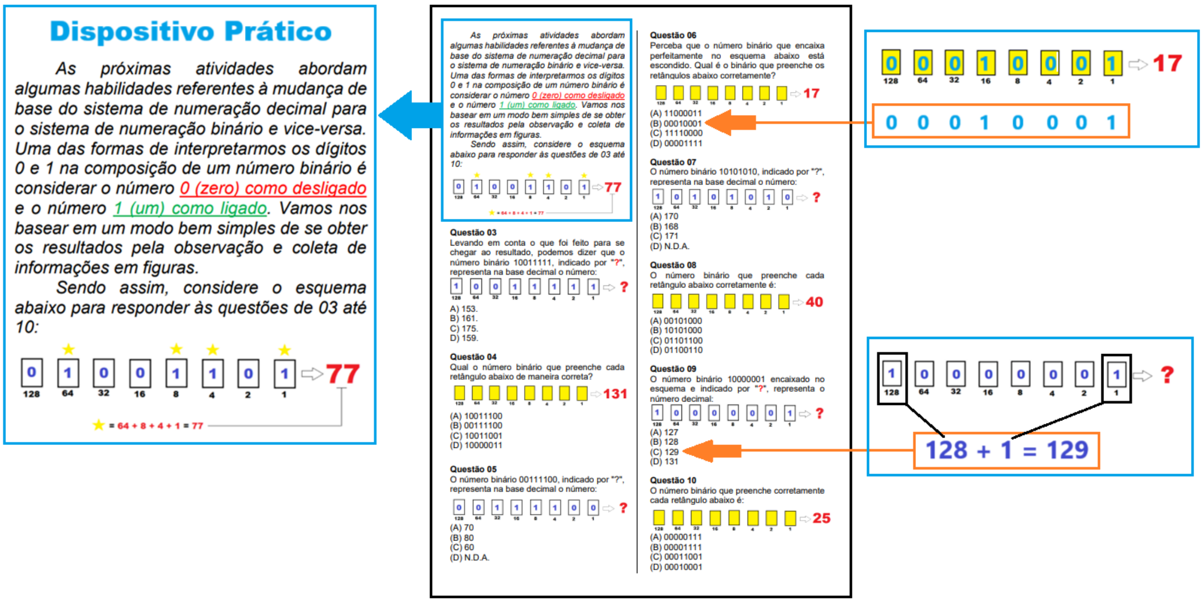
Figura 40 - Atividade com Números Binários




Fonte: Autoria Própria (2025)

A fim de tornar a aprendizagem mais significativa e prazerosa, buscamos estabelecer conexões entre os diferentes conteúdos abordados. Um exemplo disso foi a atividade que desenvolvemos para a retomada do tema de notação científica. Ao invés de apresentar o conteúdo de forma isolada, decidimos associá-lo à conversão de números para o sistema binário. Essa abordagem permitiu explorar as propriedades da potenciação de forma mais concreta e relacioná-las com outras operações matemáticas, como a multiplicação e a divisão.

Figura 41 - Dispositivo Prático da Atividade



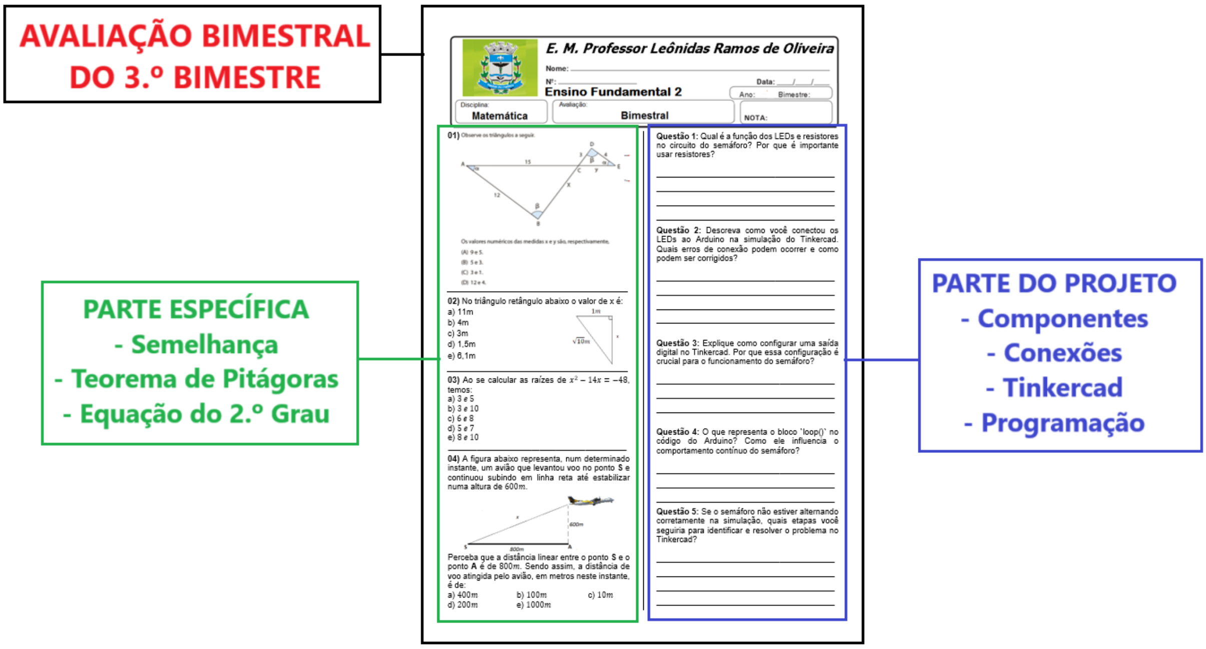

Fonte: Autoria Própria (2025)

A atividade proposta, que envolvia a codificação e decodificação de mensagens utilizando a tabela ASCII, mostrou-se bastante eficaz para despertar o interesse dos alunos e promover a aprendizagem ativa. As Figuras 40 e 41 apresentam exemplos dessa atividade, que permitiu aos alunos aplicarem os conhecimentos adquiridos em um contexto prático e desafiador.

Com o objetivo de oferecer aos alunos uma avaliação mais significativa e personalizada, decidimos integrar os conteúdos da frente específica do currículo com as atividades desenvolvidas no projeto. Essa abordagem permitiu-nos avaliar não apenas a memorização de conceitos, mas também a capacidade dos estudantes de aplicar esses conhecimentos em situações práticas e desafiadoras.

A avaliação apresentada na Figura 42 foi elaborada de forma a contemplar tanto os conteúdos matemáticos tradicionais, como equação do segundo grau e Teorema de Pitágoras, quanto os conhecimentos adquiridos durante o desenvolvimento do projeto, como a eletrônica e a programação. As questões propostas foram cuidadosamente selecionadas para que os alunos pudessem demonstrar sua compreensão sobre a função dos componentes eletrônicos, a lógica de programação e a relação entre os diferentes conceitos abordados.

Figura 42 - Avaliação Composta das Duas Frentes




Fonte: Autoria Própria (2025)

Ao solicitar que os alunos explicassem a configuração de uma saída digital no Tinkercad, a função do bloco "*loop()*" e os cuidados na montagem de circuitos, buscou-se avaliar a capacidade de construção de raciocínio lógico, autonomia na resolução de problemas e aplicação prática dos conhecimentos adquiridos. Além disso, as questões relacionadas ao desafio do semáforo permitiram verificar a capacidade dos alunos de aplicar os conhecimentos adquiridos para criar soluções inovadoras.

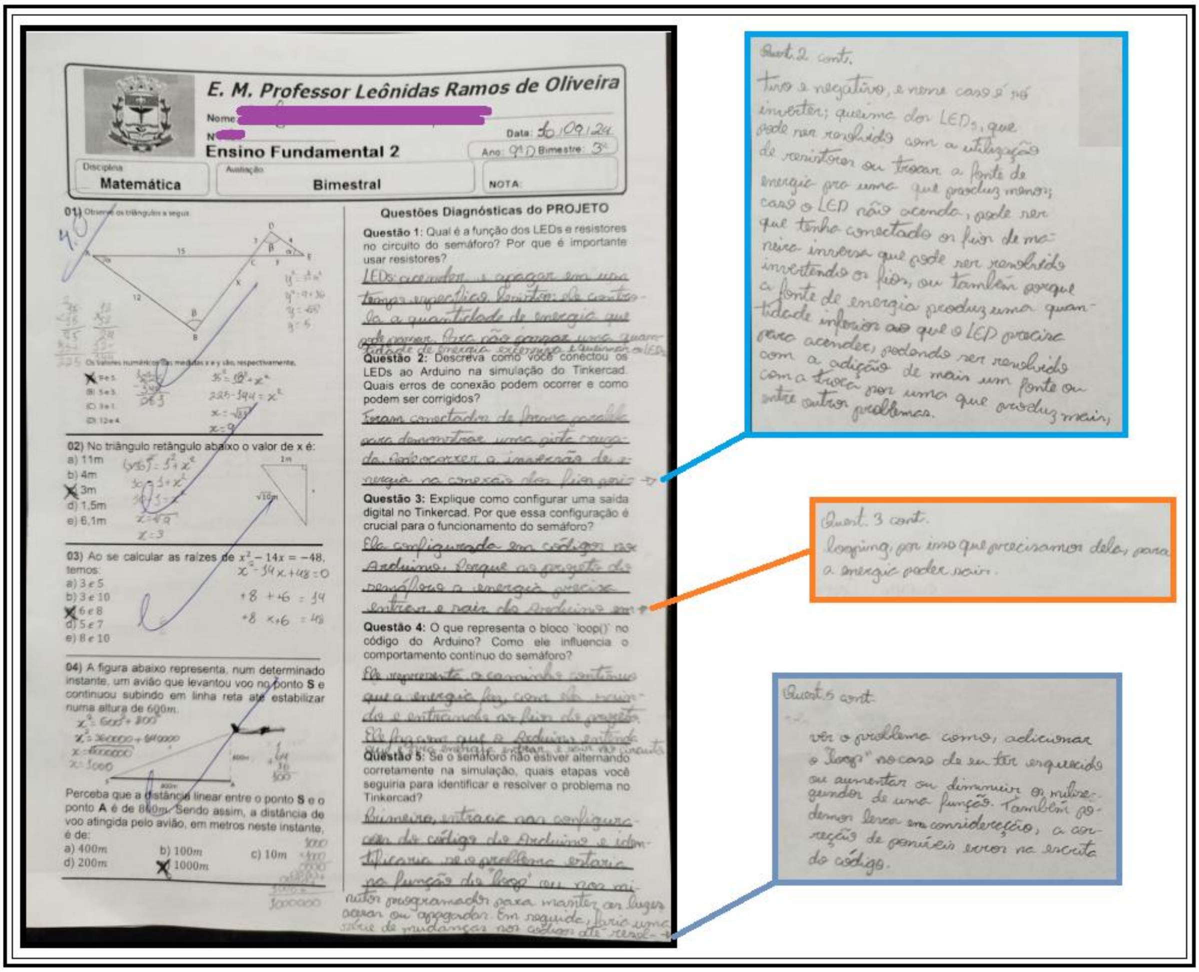
Figura 43 - Realização da Avaliação Bimestral

Fonte: Autoria Própria (2025)

Os alunos demonstraram a capacidade de aplicar conceitos matemáticos como equação do segundo grau e Teorema de Pitágoras e descrever a respeito de situações práticas de eletrônica e programação, configuração de circuitos e relatar situações experienciadas no desafio de realizar a simulação de um semáforo.

A resolução das questões propostas exigiu a construção de um raciocínio lógico desenvolvido ao longo do projeto. A transição de um protocolo mais objetivo — centrado nos cálculos — para outro de caráter interpretativo e descritivo ampliou a percepção dos alunos acerca das diferenças entre o ensino tradicional e as metodologias alternativas. Essa mudança favoreceu a integração de distintas estratégias de aprendizagem, permitindo que os estudantes identificassem múltiplos caminhos para a resolução de um mesmo problema e demonstrassem maior capacidade de abstração e pensamento crítico (Figura 44).

Figura 44 - Avaliação Bimestral do 3.º Bimestre




Fonte: Autoria Própria (2025)

Cada aluno procurou expressar, a seu modo, a compreensão obtida em relação às diferentes dinâmicas. Embora, em um primeiro momento, os protocolos tenham sido trabalhados de forma independente, ao longo das fases do projeto buscamos aproximar progressivamente as linhas de raciocínio, seja para a resolução de problemas, para a superação de desafios ou para a formulação de respostas a questões abertas. Observamos que a ausência de uma linguagem técnica consolidada não impediu os alunos de expressarem de forma coerente suas compreensões sobre os conteúdos. Um exemplo disso pode ser visto na Figura 44: mesmo diante de um problema formulado em termos de semelhança, uma aluna reconheceu a configuração como sendo de triângulos pitagóricos, demonstrando a capacidade de relacionar conceitos distintos.

Além disso, constatamos que os estudantes adquiriram condições de aplicar os conhecimentos construídos a novas situações, expressando suas ideias com maior clareza, coerência e, gradativamente, com o uso adequado da linguagem técnica. O interesse pelo tema tornou-se evidente após a avaliação, quando muitos buscaram *feedback* e compartilharam espontaneamente suas soluções, revelando engajamento e protagonismo no processo de aprendizagem.

Figura 45 - Semana de Arte e Tecnologia

Fonte: Autoria Própria (2025)

A Figura 45 mostra os alunos expondo seus trabalhos e atividades durante a Semana de Arte. Por três dias, eles organizaram uma mostra e receberam visitantes, apresentando seus projetos. A ampla divulgação atraiu um grande público, inclusive alunos que não conheciam o projeto e demonstraram grande interesse em participar no futuro.

As contribuições das Professoras do Atendimento Educacional Especializado (AEE) foram particularmente significativas. Segundo elas, as dinâmicas propostas no projeto, desde as mais simples às mais complexas, possibilitaram a inclusão efetiva dos alunos com dificuldades severas, muitas vezes sem a necessidade de adaptações específicas. Para elas, a abordagem *maker* conseguiu, de forma orgânica, englobar diferentes níveis de compreensão, favorecendo o protagonismo, a oralidade e a criatividade de todos os estudantes.

Em conversa com essas Professoras sobre a adaptação curricular, pudemos ouvir apontamentos bastantes significativos, pois, segundo elas, a dinâmica das aulas de robótica e programação, desde realizações mais básicas até as mais elaboradas, conseguiu incluir os alunos com mais dificuldade quase sem uma adaptação. Nas palavras delas, a dinâmica foi tão boa e prazerosa que todos estavam ali praticamente igualados, isso porque alunos com extrema dificuldade, inclusive com a escrita, conseguiram desenvolver muito sua oralidade, fazer suas atividades e montar seus cronogramas, indo muito além do que era esperado, fazendo as apresentações e ensinando o que aprenderam de forma bastante original.

Segundo as Professoras do AEE, nesse caso, não seria possível afirmar que o projeto se configurou como uma adaptação curricular. A dinâmica aplicada foi tão eficiente que conseguiu incluir todos os alunos. Quando falamos em adaptação curricular, tratamos de mudanças no currículo para atender às dificuldades específicas de um aluno ou grupo. Já no caso da makerização e da robótica, a proposta foi diferente: não se limitou a ajustes, mas integrou todos os aspectos do processo. Houve a compreensão da situação-problema, a elaboração de estratégias para resolvê-la e a vivência de diferentes situações práticas. Essas etapas foram apresentadas de modo acessível e inclusivo. Assim, praticamente todos os alunos conseguiram desenvolver suas atividades com autonomia e participação efetiva.

Figura 46 - Continuação do Projeto e Aluno Destaque


Fonte: Autoria Própria (2025)

As Professoras sugeriram que outros docentes adotem metodologias semelhantes às aplicadas no projeto, que integrem ludicidade e inclusão de forma intencional, em lugar de adaptações genéricas e pouco efetivas. A Figura 46 ilustra um dos alunos que mais se destacaram na experiência. De acordo com as Professoras, ele se envolveu de tal forma com o conteúdo que se voluntariou para ensinar os colegas, desenvolvendo, nesse processo, sua habilidade de comunicação.

Esse resultado evidencia o impacto positivo do projeto na promoção da inclusão de todos os alunos. Na visão das Professoras, o que precisa ser fortalecido em cada docente é a crença de que os estudantes são capazes de realizar o que lhes é proposto. Muitas vezes, novas situações de aprendizagem sequer são oferecidas por se considerar, antecipadamente, que determinados alunos não têm domínio da leitura ou da escrita. No entanto, a prática mostrou que, ainda com essas limitações, os estudantes são capazes de compreender conceitos, manipular materiais, transformar ideias em ação e alcançar aprendizagens significativas.

No caso do aluno em destaque, essa constatação foi particularmente evidente. Embora não escreva e sua leitura se restrinja a palavras simples, sem plena compreensão de contexto, ele demonstrou excelente desempenho na oralidade. Para as especialistas do AEE, esse foi o ponto alto: o estudante conseguiu explicar conceitos e processos com clareza e propriedade, sobressaindo-se nas atividades práticas.

À luz do artigo 32 da Lei nº 9.394/96 (LDB), reconhece-se que apenas a prática não é suficiente para que a escola cumpra sua função de garantir o domínio da leitura, da escrita e do cálculo. Contudo, se o objetivo é reduzir desigualdades, é preciso oferecer condições para que os alunos vivenciem com maior frequência atividades práticas, estabelecendo pontes entre o concreto e o abstrato. A dificuldade em ler e escrever, observada em muitos casos, pode estar relacionada justamente à ausência de conexões significativas entre esses dois campos. O fato é que, quando convidados a agir sobre situações concretas, os alunos conseguem avançar, mesmo diante de barreiras linguísticas.

Esse fenômeno pode ser ilustrado por uma analogia com a programação de uma cancela em um projeto no Arduíno IDE. Para que o sistema funcione corretamente, é necessário importar a biblioteca <servo.h>, configurar o objeto, indicar a porta digital correspondente e, por fim, programar o ângulo de movimentação do servo motor. Guardadas as devidas proporções, não se trata de comparar o ser humano a uma máquina, mas de destacar que o professor atua como agente mediador capaz de “ativar bibliotecas” internas em seus alunos, estabelecendo caminhos adequados de comunicação entre conteúdos de modo a estruturar aprendizagens cada vez mais sólidas e significativas.

Nessa perspectiva, Machado (2012) destaca:

> *“Quando se trata de um mapa conceitual elaborado por um professor, um mapa que contém tudo não serve para nada, pois ele não é a realidade. Por outro lado, um mapa que não contém nada também não tem utilidade. Entre o tudo e o nada está a competência de saber mapear.”*

Assim, o papel do professor é contribuir para uma educação capaz de tratar os iguais de forma igual e os desiguais de forma desigual, mas sempre na medida de suas desigualdades, favorecendo a equidade e desempenhando o papel de facilitador do aprendizado.

O relato das professoras do AEE reforça essa compreensão. O aluno em questão, mesmo apresentando severas dificuldades de leitura e escrita, destacou-se nas atividades práticas e orais, mostrando que a aprendizagem significativa pode se manifestar de formas diversas e complementares. Ao possibilitar que todos participassem ativamente, o projeto reafirmou que a equidade é alcançável por meio de metodologias que valorizem a diversidade, estimulem a colaboração e promovam a construção de conhecimento de maneira prática e contextualizada. Essa experiência reforça, portanto, a necessidade de repensar o currículo a partir de uma perspectiva inclusiva e transformadora.

## 3.6 FASE 6: ROTEIRIZAÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Tudo o que realizamos até agora foi objetivando essa fase do Projeto, pois nessa culminância pudemos explorar as duas dinâmicas de aprendizado em uma só ação que roteiriza atividades de contexto e aplicação dos conceitos de função quadrática. Realizado no quarto bimestre, vamos descrever como apresentamos e abordamos o tema função nesse trabalho que, diferente do que ocorre no ensino médio, em que o sequenciamento dos conteúdos segue uma progressão lógica que ajuda os alunos a construírem uma compreensão mais linear do tema, vamos dar início ao estudo de função por meio da função quadrática, aproveitando as oportunidades em alguns momentos para a breve passagem por funções do 1.º grau, mas com predominância em função quadrática.

### 3.6.1 Introdução ao Conceito de Função Quadrática

O lançamento de uma bola de basquete ao cesto, o formato de uma ponte ou da estrutura de um ginásio arqueadas, o movimento de um skatista ao subir e descer uma rampa do tipo halfpipe[8], são exemplos de como podemos observar formas ou comportamentos descritos por uma função do 2.º grau, pois a função quadrática descreve esse tipo de movimento, ou seja, ela cria um formato de "U" ou "∩" no seu desenho (traçado ou gráfico).

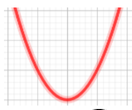
A função quadrática, ou função do 2.º grau, é uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $\boldsymbol{a}$**,** $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são números fixos (chamados coeficientes), com $a \neq 0$ e $\boldsymbol{x}$ é a variável.

Nesse estudo, vamos buscar formas de aprender sobre a parábola descrita pela função quadrática e fortalecer conceitos necessários e suficientes para reconhecer se a função tem concavidade voltada para cima ou para baixo, se ela admite ou não raízes reais, calcular a intersecção da função com o eixo y e as coordenadas do vértice da parábola, e traçar o lugar geométrico dessa função no plano.

Considere os argumentos a respeito da Função do 2.º Grau:

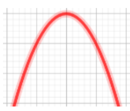
01) As funções do 2.º grau descrevem o lugar geométrico de PARÁBOLAS.

→ Se $a > 0$, então a parábola tem concavidade voltada para cima:



$a = \oplus$

→ Se $a < 0$, então a parábola tem concavidade voltada para baixo:



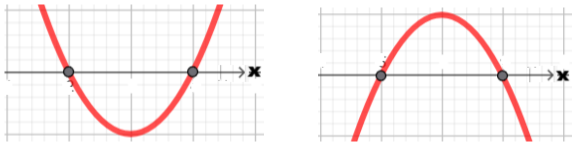
$a = \ominus$

---

[8] O Halfpipe, ou meio tubo, é uma estrutura em forma de U destinada a prática de desportos radicais, como o skate, snowboarding, ski, patins em linha ou BMX

02) O valor do discriminante $\Delta$ (delta) determina a posição relativa da parábola em relação ao eixo $x$.

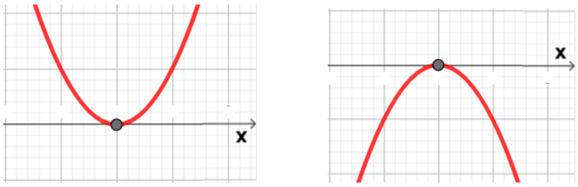
→ Se $\Delta > 0$, então a parábola intersecta dois pontos da reta $x$:




$a = \oplus$ $\qquad$ $a = \ominus$

$\Delta > \mathbf{0}$ → a equação possui duas raízes reais.

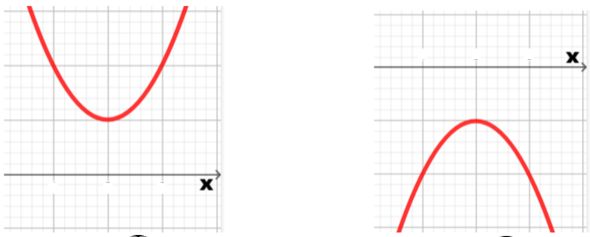
→ Se $\Delta = 0$, então a parábola toca apenas um ponto da reta $x$:




$a = \oplus$ $\qquad$ $a = \ominus$

$\Delta = \mathbf{0}$ → a equação possui uma raiz real.

→ Se $\Delta < 0$, então a parábola NÃO TOCA o eixo $x$:




$a = \oplus$ $\qquad$ $a = \ominus$

$\Delta < \mathbf{0}$ → a equação NÃO possui raízes reais.

03) O vértice da parábola $(V)$ é o ponto de MÁXIMO ou MÍNIMO, a depender do sinal de $a$. Ou seja, se $a > 0$, então $V$ é ponto de mínimo e, se $a < 0$, então $V$ é ponto de máximo. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, com $a \neq 0$, as coordenadas do vértice de sua parábola são dadas por:

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{x_V}, \boldsymbol{y_V}), onde: \begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} \\ y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

**Demonstração 2.1:**

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, uma função do 2.º grau de raízes $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Como $x_V$ é o eixo de simetria da parábola, tem-se que ele é ponto médio entre as raízes de $f(x)$. Assim, temos que:

$$x_V = \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2} =$$

$$\frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2} = -\frac{2b}{4a} = -\frac{b}{2a}$$

Como $y_V$ é a imagem de $x_V$, basta calcular $f(-\frac{b}{2a})$ para verificarmos a ordenada. Assim, temos:

$$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2} =$$

$$\frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^2} = \frac{-a(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Logo, $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ ■

Vamos praticar esses conceitos de modo a deixar bem evidente cada um dos aspectos apontados anteriormente nos exemplos a seguir.

**EXEMPLO 2.6**

Esboce o gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $f(x) = -x^2 + 4x + 12$

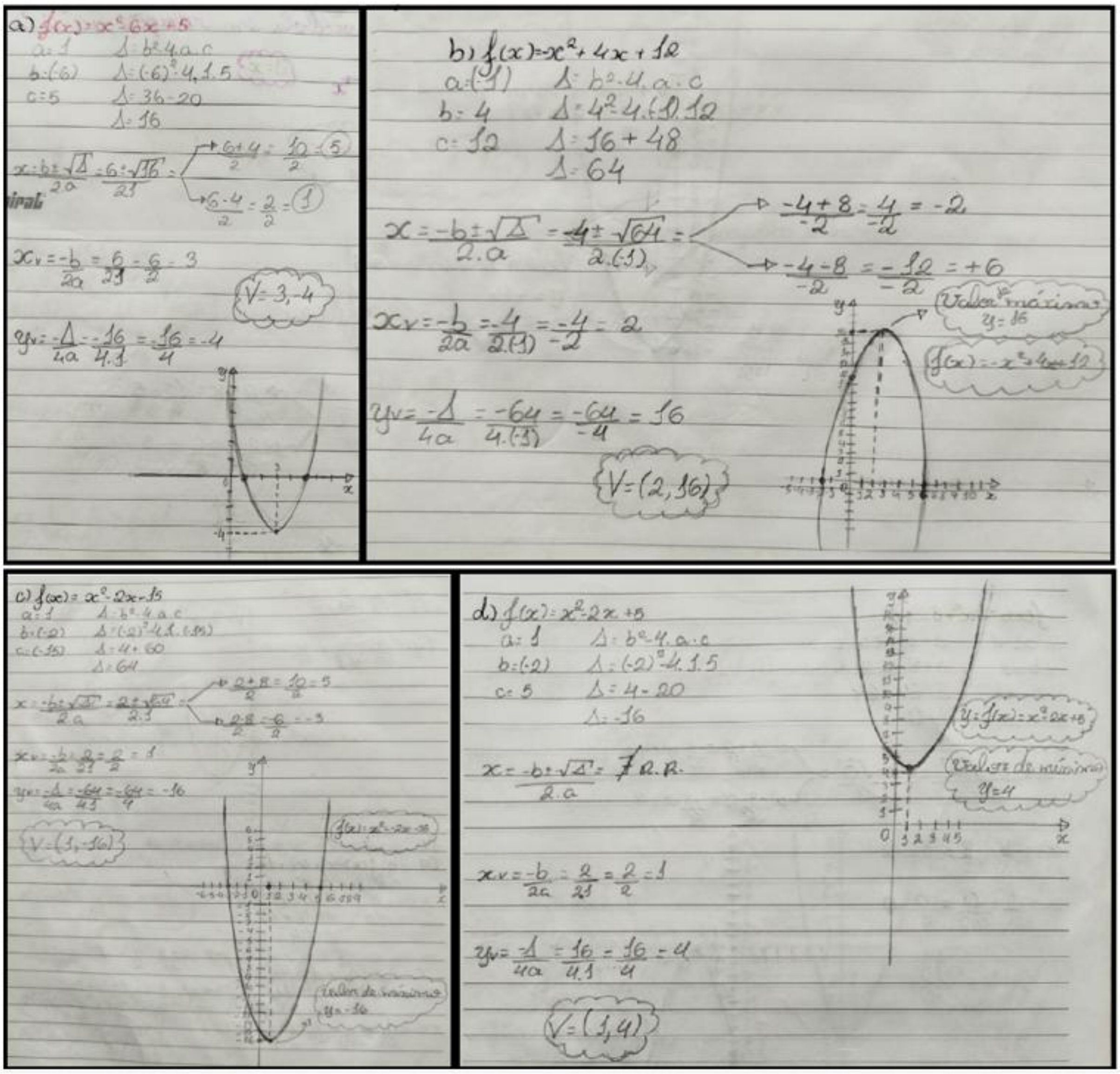
c) $f(x) = x^2 - 2x - 15$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

A introdução de um novo conteúdo matemático, especialmente aquele que envolve maior grau de abstração como a função quadrática, requer do professor uma abordagem didática cuidadosa e progressiva. Apresentar exemplos e propor exercícios de maneira gradual é fundamental para que os alunos possam construir o conhecimento de forma sólida, sem se sentirem sobrecarregados ou desmotivados pelo excesso de atividades.

Na figura 47, realizamos a resolução do item a e abrimos espaço para que os alunos realizassem os itens restantes em ritmo de exercício.

Figura 47 – Resolução de um dos nossos alunos




Fonte: Autoria Própria (2025)

**EXERCÍCIO 2.1**

Desenhe o gráfico das funções a seguir:

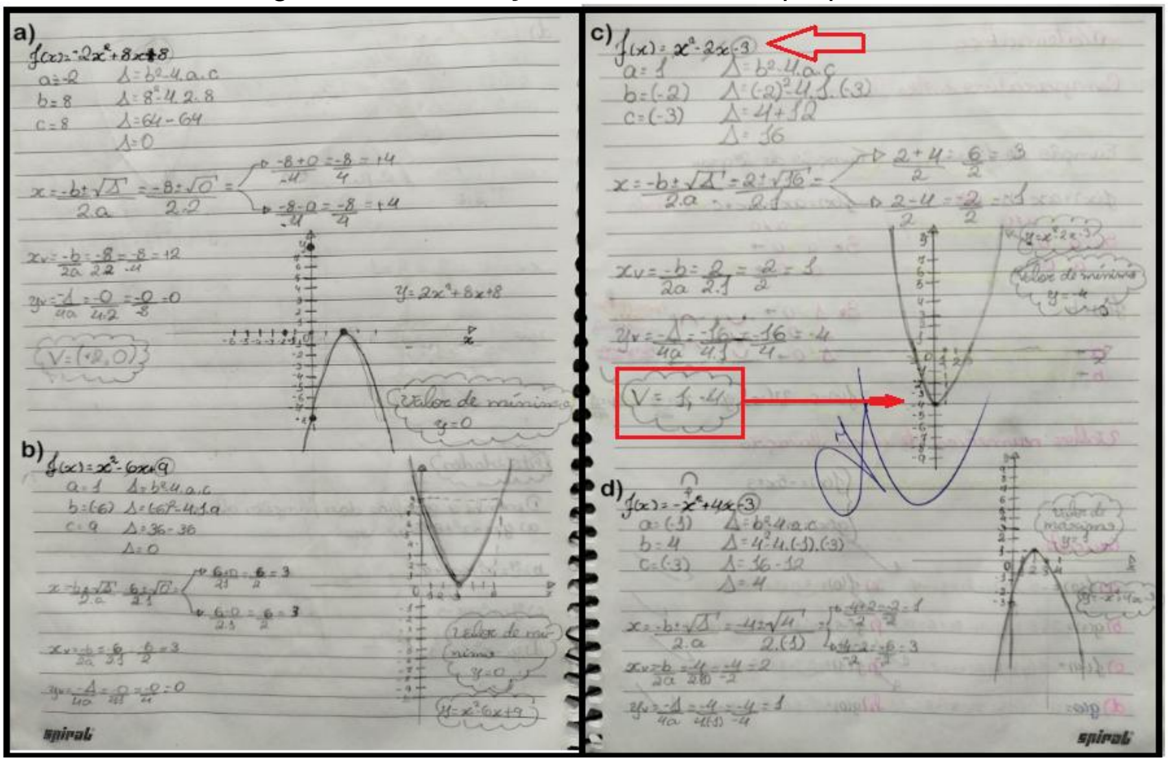
a) $f(x) = -2x^2 + 8x + 8$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

d) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

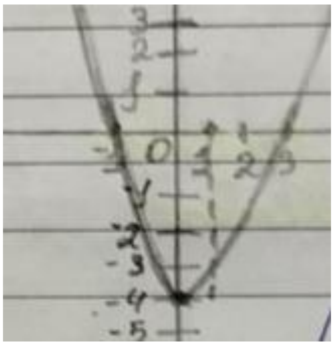
Figura 48 - Resolução das atividades propostas



Fonte: Autoria Própria (2025)

Perceba que nosso aluno, na figura 48, apesar de ter sinalizado corretamente o coeficiente $c = -3$, por onde o traço da parábola deve cortar o eixo $y$ e, mesmo calculado corretamente as coordenadas do vértice $V(1, -4)$, não esboçou o gráfico corretamente, pois fixou o vértice em $(0, -4)$. Observe na figura 49:

Figura 49 - Tentativa de esboço do item c



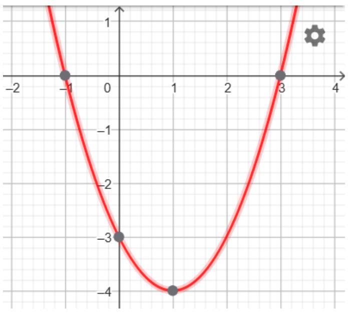
Fonte: Autoria Própria (2025)

Dessa forma, os roteiros de aprendizagem configuram-se como importantes instrumentos de mediação pedagógica, conduzindo os alunos por etapas organizadas e coerentes, nas quais os componentes do conhecimento matemático se articulam diretamente com a lógica da programação. Quando o professor evidencia de maneira clara a lógica de correspondência entre as áreas, possibilita que o aluno reconheça, por exemplo, a relação entre o coeficiente “c” da parábola e a variável utilizada no código para a execução de movimento de um servo motor, ou ainda, compreenda como a coleta de dados advinda da leitura da função pode resultar na representação gráfica de uma curva quadrática.

O roteiro de atividades com Arduino, quando elaborado com etapas bem definidas, recursos visuais adequados, linguagem de programação simplificada e uma intencional conexão com os conteúdos matemáticos, oferece ao estudante múltiplas formas de representação — visual, cinestésica e simbólica — atendendo, assim, a diferentes estilos cognitivos. Ao explicitar a correspondência entre um elemento do código e determinado conceito matemático — como, por exemplo, a transformação da função quadrática na instrução responsável pelo cálculo da altura de um robô — o professor não apenas favorece a aprendizagem, mas também promove uma inclusão efetiva.

A exemplo do que observamos na figura 48, podemos relacionar o erro de execução da tarefa com eventuais falhas ao simular um projeto no Tinkercad provocadas por trocas de comando ou utilização de componentes incompatíveis com o que se pretende criar. Essa abordagem valoriza a tradicional dinâmica de inserção de valores e observação de resultados, comum tanto na linguagem matemática quanto na linguagem de programação, proporcionando ao aluno oportunidades concretas de análise, experimentação e aplicação dos conhecimentos adquiridos em atividades ou projetos significativos.

Figura 50 - Gráfico de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ corrigido.




Fonte: Autoria Própria (2025)

### 3.6.2 Forma Canônica da Função Quadrática

Considere a função do $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Vamos reescrevê-la do seguinte modo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$, vamos realizar essas substituições para compactar mais a função. Sendo assim, temos:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a(x - x_V)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_V)^2 + y_V$$

Logo, a função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita como $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$, onde $x_V$ e $y_V$ são as coordenadas do vértice da parábola de $f$.

A exemplo do que realizamos na demonstração de $x_V$ e $y_V$, utilizando a forma geral da função quadrática, agora, vamos fazer a demonstração das coordenadas do vértice da parábola, mas se valendo da função quadrática na forma canônica. Dessa forma, conseguiremos caracterizar a posição da parábola em relação ao eixo $x$, ou seja, poderemos verificar se a parábola tem concavidade voltada para cima, com $a > 0$ e o vértice como mínimo local, ou se a parábola tem concavidade voltada para baixo, com $a < 0$ e o vértice como máximo local.

**Demonstração 2.2:**

Seja $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$, com $a, x_V, y_V \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, uma função do 2.º grau na forma canônica, portanto, de eixo vertical para seu gráfico.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, é verdade sempre que $(x - x_V)^2 \geq 0$, com igualdade somente quando $x = x_V$.

Desse modo,

i) Se $a > 0$, então $a(x - x_V)^2 \geq 0$ e $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V \geq y_V$, com igualdade em $x = x_V$. Logo, $f$ atinge mínimo em $x = x_V$ e esse valor mínimo é $y = f(x_V) = y_V$.

ii) Se $a < 0$, então $a(x - x_V)^2 \leq 0$ e $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V \leq y_V$, com igualdade em $x = x_V$. Logo, $f$ atinge máximo em $x = x_V$ e esse valor máximo é $y = f(x_V) = y_V$.

Em ambos os casos, o ponto extremo do gráfico é $(x_V, y_V)$.

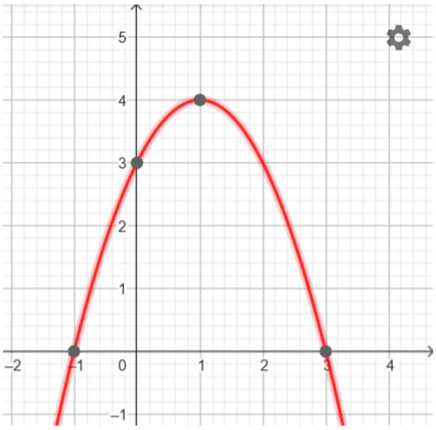
A expressão $(x - x_V)^2$, depende apenas da distância $|x - x_V|$. Assim, $f(x_V + t) = f(x_V - t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$, o que mostra que a reta $x = x_V$ é o eixo de simetria da parábola. O ponto extremo sobre esse eixo é justamente $(x_V, y_V)$, caracterizando-o como vértice.

Portanto, para $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$, o vértice é $V = (x_V, y_V)$ ■

**EXEMPLO 2.7**

Escreva a forma geral e a forma canônica da função $g(x)$ abaixo – figura 51:

Figura 51 - Função $g(x)$




Fonte: Autoria Própria (2025)

Obedeça ao seguinte roteiro:

1.º) Identifique no gráfico, por meio da observação simples, elementos importantes como as raízes, o coeficiente $\boldsymbol{c = g(0)}$ e as coordenadas do vértice.

$a = ?$ $\quad$ $b = ?$ $\quad$ $c = 3$

$Raízes: \{-1, 3\}$ e $Coordenadas\ do\ Vértice: V(1, 4)$

2.º) Calcule os coeficientes a e b por meio da regra da soma e produto.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Comece pelo produto para calcular $\boldsymbol{a}$, em seguida, utilize a soma para calcular $\boldsymbol{b}$:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (-1) \cdot 3 = \frac{3}{a} \Rightarrow -3a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{3} \Rightarrow a = -1$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{(-1)} \Rightarrow (-1) + 3 = b \Rightarrow b = 2$$

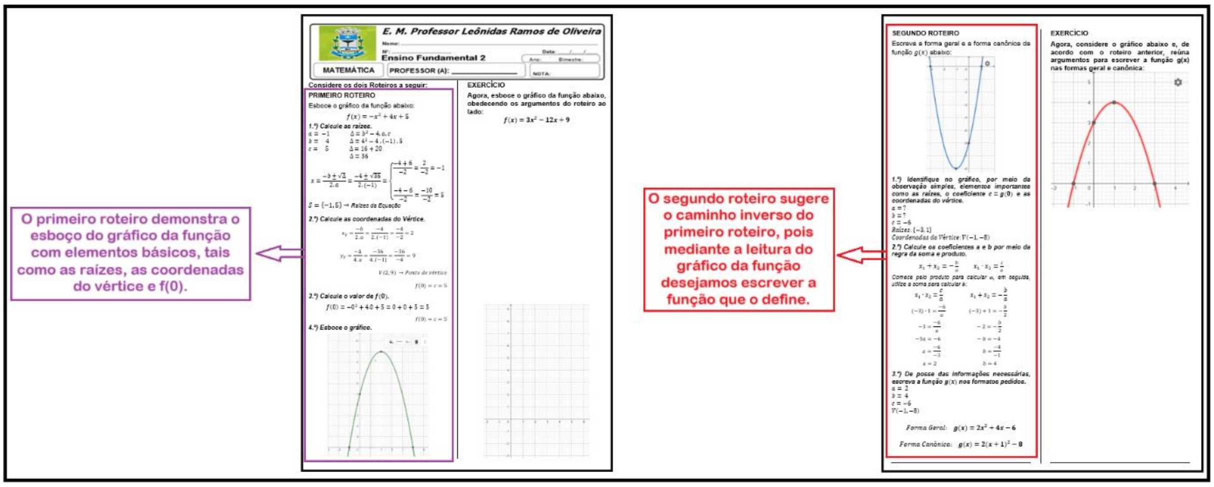
3.º) De posse das informações necessárias, escreva a função $\boldsymbol{g(x)}$ nos formatos pedidos. Sejam $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$ e $V(1, 4)$, todos os elementos necessários, temos a escrita da função nas seguintes formas:

$$Forma\ Geral: \quad \boldsymbol{g(x) = -x^2 + 2x + 3}$$

$$Forma\ Canônica: \quad \boldsymbol{g(x) = -(x - 1)^2 + 4}$$

Logo após a apresentação do conteúdo e a prática de alguns exemplos, oportunizamos a realização da atividade disposta na figura 52.

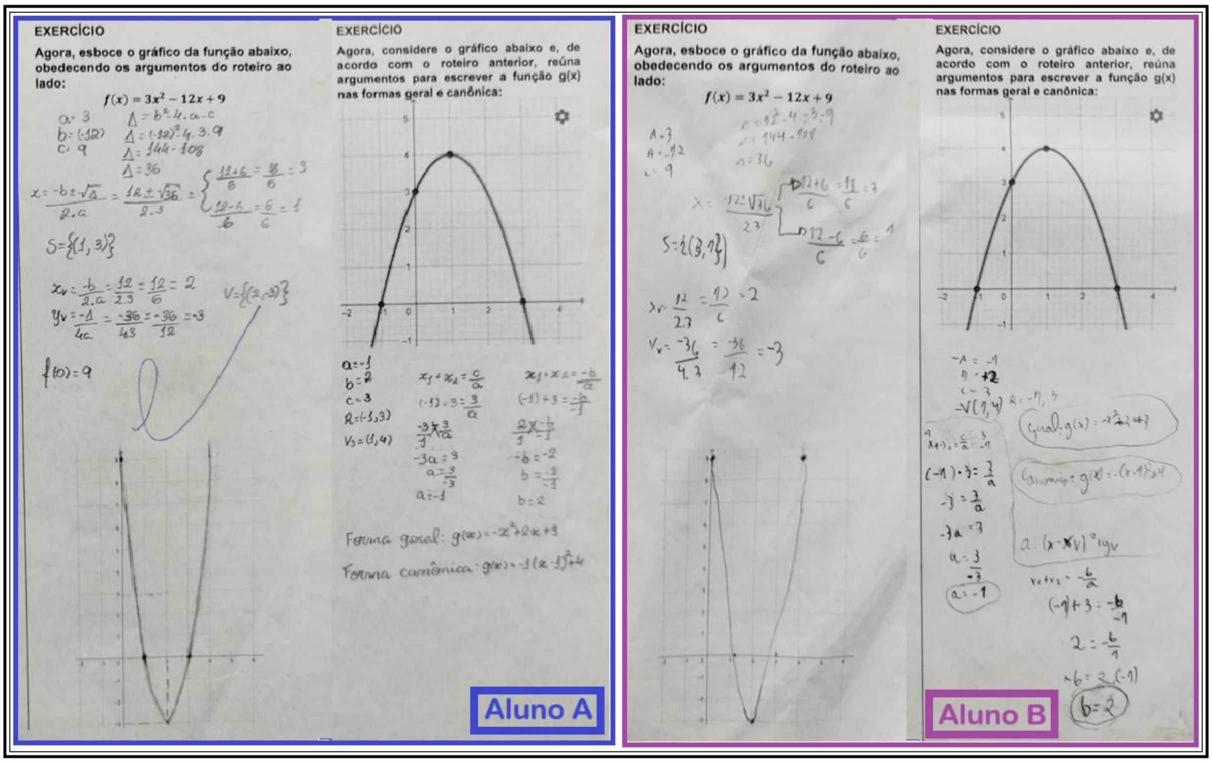
Figura 52 - Avaliação Complementar Roteirizada




Fonte: Autoria Própria (2025)

Nessa avaliação complementar, por mais que não tenhamos recomendado a formalidade de uma prova, mas de uma atividade comum, solicitamos a priori a resolução individual e não colaborativa. Como foi comum ao longo desse período de observação, em eventuais atrasos na entrega da atividade, nossos alunos puderam contar com a colaboração de colegas que já haviam concluído.

Figura 53 - Resolução da Atividade em Roteiro




Fonte: Autoria Própria (2025)

Na figura 53, selecionamos a resolução de dois de nossos alunos para observar a aplicação do roteiro. Observe que em se tratando do traço do lugar geométrico da função do primeiro exercício, o aluno A possui maior precisão quando comparado ao aluno B e, no caso do segundo exercício, a escrita do aluno A referente a função na forma canônica foi $g(x) = -1(x-1)^2 + 4$ , enquanto o aluno B escreveu sua função abreviadamente como $g(x) = -(x-1)^2 + 4$, algo que observamos, inclusive na forma geral, com certa recorrência.

A diferença de escrita entre os alunos A e B para uma mesma função — embora matematicamente equivalentes — revela algo muito valioso no processo de aprendizagem: a manifestação da autonomia intelectual e da compreensão conceitual de cada estudante. Essa originalidade, além de demonstrar níveis distintos de formalização, se conecta diretamente com a lógica de programação, onde diferentes sintaxes ou estruturas podem produzir o mesmo resultado, desde que estejam logicamente corretas.

O que podemos observar de relevante é, primeiro, a flexibilidade cognitiva e compreensão estrutural, pois o aluno A escreve a função com todos os coeficientes explicitados em $g(x) = -1(x-1)^2 + 4$, o que mostra atenção à estrutura algébrica completa da função quadrática na forma canônica, valorizando a presença do coeficiente $a = -1$, enquanto que o aluno B escreve de forma mais sintética em $g(x) = -(x-1)^2 + 4$, onde isso pode indicar que ele compreende que $-1$ é implícito quando se usa o sinal de menos na frente do parêntese — uma habilidade bastante comum em níveis mais avançados de abstração matemática e muito comum em programação.

O segundo ponto a ser observado é o estilo de escrita como reflexo do raciocínio lógico, pois cada aluno revela um caminho lógico diferente para expressar a mesma ideia. O aluno A está mais voltado à completude e rigor; o aluno B está mais próximo da economia de linguagem e otimização — características centrais na lógica computacional.

O terceiro ponto é a conexão com a programação, o que aponta para uma perfeita simbiose entre as duas dinâmicas exercidas, pois na programação, um mesmo algoritmo pode ser escrito de formas distintas, desde que respeite a lógica da linguagem e os operadores. A equivalência lógica entre as duas expressões matemáticas $g(x) = -1(x-1)^2 + 4$ e $g(x) = -(x-1)^2 + 4$ pode ser representada em C++ de forma equivalente assim na figura 54.

Figura 54 - Escrita C++ (cpp) da Função $g(x)$

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath> // Para usar pow()

double g_explicit(double x) {
    return -1 * pow((x - 1), 2) + 4;
}

double g_compact(double x) {
    return -(pow((x - 1), 2)) + 4;
}

int main() {
    double x = 3.0;

    std::cout << "Versão explícita: " << g_explicit(x) << std::endl;
    std::cout << "Versão compacta:  " << g_compact(x) << std::endl;

    return 0;
}
```

Fonte: Autoria Própria (2025)

Como explicação complementar, a função $pow(a, b)$ representa a operação matemática de potência, ou seja, calcula $a^b$ — o número $a$ elevado à potência $b$. No exemplo anterior, a programação foi desenvolvida apenas para avaliar a função no ponto $x = 3$, razão pela qual somente esse valor foi apresentado como resultado. Cabe destacar que ambas as formas da função utilizadas no código — embora escritas de maneira distinta — são matematicamente equivalentes.

Ambas retornam o mesmo valor numérico, mas o estilo de escrita reflete diferentes abordagens quanto à clareza, objetividade ou economia de código. Esse aspecto é essencial no campo da lógica de programação, onde múltiplas soluções para o mesmo problema são não apenas possíveis, mas desejáveis, desde que corretas e funcionais.

Essa diferença de expressão observada entre os alunos aproxima-se da Competência Geral nº 5 da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que propõe o uso crítico, ético e criativo das tecnologias digitais nos processos de aprendizagem. Ao personalizar a maneira como representa uma ideia matemática, o estudante está exercitando, de forma análoga ao programador, a capacidade de criar algoritmos, modular soluções e estruturar seu raciocínio com intencionalidade e eficácia comunicativa.

Abaixo, na figura 55, está a tradução completa e comentada do código C++, linha por linha, mantendo a estrutura original para facilitar o entendimento.

Figura 55 - Tradução da figura 54.

```cpp
#include <iostream>      // Inclui a biblioteca para entrada e saída de dados (como cout)
#include <cmath>         // Inclui a biblioteca matemática para usar a função pow()

// Função g_explicit: representa a forma explícita da função quadrática
double g_explicit(double x) {
    return -1 * pow((x - 1), 2) + 4;   // Calcula -1*(x - 1)^2 + 4
}

// Função g_compact: representa a forma compacta da mesma função
double g_compact(double x) {
    return -(pow((x - 1), 2)) + 4;     // Calcula -(x - 1)^2 + 4
}

int main() {
    double x = 3.0;   // Define o valor de x como 3.0

    // Imprime o resultado da função na forma explícita
    std::cout << "Versão explícita: " << g_explicit(x) << std::endl;

    // Imprime o resultado da função na forma compacta
    std::cout << "Versão compacta:  " << g_compact(x) << std::endl;

    return 0;   // Encerra o programa
}
```

Fonte: Autoria Própria (2025)

Assim, o estilo de escrita adotado pelos alunos não deve ser compreendido apenas como uma variação formal ou estética, mas sim como uma expressão legítima de diferentes formas de pensar, representar e comunicar conceitos matemáticos. Reconhecer essa diversidade permite ao professor valorizar trajetórias de aprendizagem singulares, fomentar o debate sobre equivalências algébricas e, sobretudo, articular o ensino da Matemática com o desenvolvimento do pensamento computacional. Trata-se de uma oportunidade pedagógica potente para incentivar a autonomia, a criatividade e a capacidade de “pensar fora da caixa”.

### 3.6.3 Aplicações da Função Quadrática

Tendo isso em vista, a inserção de problemas contextualizados e de aplicação prática deve ser não apenas considerada, mas amplamente incentivada no ensino da função quadrática. Essa abordagem foi consistentemente adotada ao longo do quarto bimestre, como parte integrante do planejamento didático, e revelou-se eficaz na promoção do engajamento e na consolidação da aprendizagem. Ao trazer situações reais ou simuladas, próximas do cotidiano dos alunos, favorece-se a mobilização de conhecimentos prévios e o desenvolvimento de competências cognitivas superiores, como análise, síntese e avaliação.

Além disso, tais práticas permitem explorar a função quadrática como ferramenta de modelagem, reforçando seu valor social e utilitário — aspectos muitas vezes negligenciados em abordagens puramente algorítmicas, pois quando o professor insere situações do cotidiano e problemas contextualizados ao ensinar função quadrática, ele transforma esse conteúdo em algo com sentido real, com valor para a vida prática do aluno, e não apenas como um conjunto de regras para seguir em provas. Com base nessa perspectiva, e alinhado aos princípios da BNCC, propõe-se, a seguir, a apresentação de alguns exemplos que ilustram como problemas de contexto que podem ser planejados e oferecidos em sala de aula, respeitando as especificidades do conteúdo e o perfil da turma.

**EXEMPLO 2.8**

**01)** O custo $C(x)$ da fabricação de $x$ máquinas, em milhares de reais, é dado por $C(x) = x^2 + 2x + 15$. Em um determinado dia, o custo da produção dessas $x$ máquinas foi de 95 mil reais. Desse modo, podemos dizer que nesse dia o número de máquinas fabricadas foi de:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 15

RESOLUÇÃO

Se o custo $C(x) = x^2 + 2x + 15$, no dia em questão, foi de 95 mil reais, então temos que $C(x) = 95$, considerado o fato de que o custo é dado em milhares de reais. Logo, podemos calcular do seguinte modo:

$$x^2 + 2x + 15 = 95 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x + 15 - 95 = 0 \;\Rightarrow$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \boldsymbol{S} = -2 \\ \boldsymbol{P} = -80 \end{cases}$$

$$\underline{\mathbf{-10}} + \underline{\mathbf{8}} = \boxed{\mathbf{-2}}$$

$$\underline{\mathbf{-10}} \times \underline{\mathbf{8}} = \boxed{\mathbf{-80}}$$

Perceba que a solução da equação é $\{-10, 8\}$,

mas pela natureza do problema a raiz $10$ não é uma possibilidade.

Logo, o número de máquinas é $8$.Gabarito é b.

**02)** Marina é confeiteira e vem se especializando na arte de fazer bolos para complementar a renda mensal. Ela percebeu que o lucro $L(x)$ da confecção e venda de $x$ bolos no mês é descrito pela função $L(x) = -4x^2 + 64x - 60$. Agora, ela precisa de ajuda para determinar:

a) quantas unidades desses bolos estabelecem lucro zero;

b) o número de bolos para se adquirir lucro máximo;

c) o lucro máximo que Marina pode alcançar;

d) o que representa Marina vender nenhum bolo no mês;

e) o esboço do gráfico de $L(x)$.

RESOLUÇÃO

**a) Quantas unidades desses bolos estabelecem lucro zero?**

Para encontrar os valores de $x$ que tornam o lucro igual a zero, resolvemos:

$$L(x) = 0$$

$$-4x^2 + 64x - 60 = 0$$

Ao se dividir a equação por $(-4)$, temos:

$$x^2 - 16x + 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \boldsymbol{S} = 16 \\ \boldsymbol{P} = 15 \end{cases}$$

$$\underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{15}} = \boxed{\mathbf{16}}$$

$$\underline{\mathbf{1}} \times \underline{\mathbf{15}} = \boxed{\mathbf{15}}$$

Logo, a solução da equação é $\{\mathbf{1}, \mathbf{15}\}$.

Resposta (a): Marina terá lucro zero ao vender 1 ou 15 bolos no mês.

**b) Número para obtermos lucro máximo em $L(x) = -4x^2 + 64x - 60$:**

O lucro máximo acontece no vértice da parábola, abscissa do vértice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{64}{2(-4)} = \frac{-64}{-8} = 8$$

Resposta (b): Marina terá lucro máximo ao vender 8 bolos.

**c) Lucro máximo que Marina pode alcançar:**

Agora, calculamos $L(8)$:

$$L(8) = -4 \cdot 8^2 + 64 \cdot 8 - 60$$

$$L(8) = -256 + 512 - 60$$

$$L(8) = 196$$

Resposta (c): O lucro máximo será de R$ 196,00.

**d) O que representa Marina vender nenhum bolo no mês?**

Vamos calcular $L(0)$:

$$L(0) = -4 \cdot 0^2 + 64 \cdot 0 - 60$$

$$L(0) = 0 + 0 - 60$$

$$L(0) = -60$$

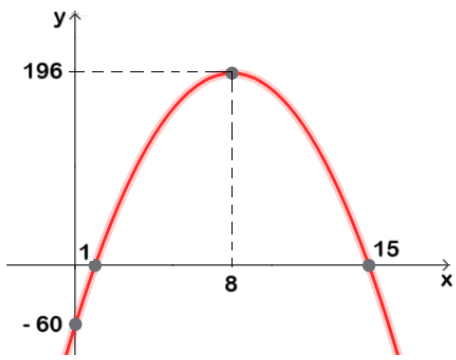
Resposta (d): Se Marina não vender nenhum bolo, ela terá um prejuízo de R$ 60,00, provavelmente relacionado a custos fixos.

**e) Esboço do gráfico de $L(x) = -4x^2 + 64x - 60$:**

Características principais da parábola:

- Concavidade: Voltada para baixo (porque o coeficiente de $x^2$ é negativo)
- Raízes: $x = 1$ e $x = 15$
- Vértice: $(8, 196)$
- Interseção com o eixo $y$: No ponto $(0, -60)$

*Figura 56 - Gráfico de $L(x) = -4x^2 + 64 - 60$*




Fonte: Autoria Própria (2025)

**03)** Um robô seguidor de linha realiza seu caminho sobre um plano cartesiano e contornando o traçado de uma parábola, passando pelos pontos $(-5, 0)$, $(-1, 16)$, $(0, 15)$ e $(3, 0)$, conforme se representa na figura 57 abaixo. Assim sendo, pode-se afirmar a função do segundo grau que descreve a parábola por onde segue o robô é:

a) $y = -x^2 + 8x + 15$

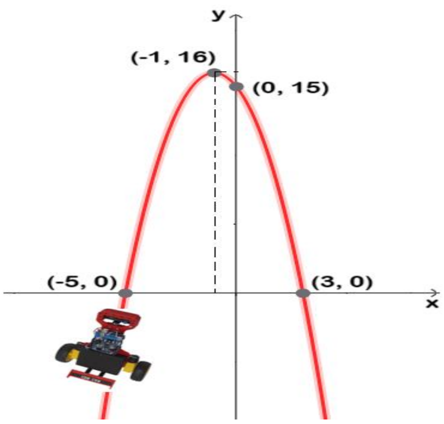
b) $y = x^2 + 8x - 15$

c) $y = -x^2 + 2x + 15$

d) $y = -x^2 - 2x + 15$

e) $y = x^2 - 2x - 15$

Figura 57 - Traçado do Robô seguidor de linha.




Fonte: Autoria Própria (2025)

RESOLUÇÃO

A equação geral de uma parábola é $y = ax^2 + bx + c$ e, ao se analisar a imagem do gráfico, temos pelos $(-5, 0)$ e $(3, 0)$ que os zeros de $y$ são $x_1 = -5$ e $x_2 = 3$. Além disso, temos as coordenadas do vértice em $(-1, 16)$ e $c = y(0) = 15$ pelo ponto $(0, 15)$. Agora, basta calcular os valores dos coeficientes $a$ e $b$ pela regra da soma e produto. Dessa forma, temos:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \implies -5 \cdot 3 = \frac{15}{a} \implies -15 = \frac{15}{a} \implies -15a = 15 \implies a = -\frac{15}{15} \implies a = -1$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \implies -5 + 3 = -\frac{b}{(-1)} \implies -2 = -\frac{b}{(-1)} \implies -b = 2 \implies b = -2$$

Logo, de $a = -1$, $b = -2$ e $c = 15$, temos que $y = -x^2 - 2x + 15$.

Gabarito (d): O traçado do robô segue a parábola $y = -x^2 - 2x + 15$.

Outra forma de se resolver esse último problema seria pelo emprego da forma canônica da função quadrática e a utilização do vértice $(-1, 16)$. Observe:

$$y = a(x - x_V)^2 + y_V = -1 \cdot [x - (-1)]^2 + 16 = -(x + 1)^2 + 16 = -(x^2 + 2x + 1) + 16$$
$$= -x^2 - 2x - 1 + 16 = -x^2 - 2x + 15$$

Portanto, $y = -x^2 - 2x + 15$.

A utilização de problemas contextualizados no ensino da função quadrática é uma estratégia essencial para aproximar a Matemática da realidade dos alunos. Exemplos como o cálculo de lucros e o trajeto de um robô evidenciam a aplicação prática dos conceitos matemáticos, estimulando o raciocínio lógico, a interpretação de dados e a tomada de decisão. Essa abordagem amplia o significado dos conteúdos, desenvolve a autonomia intelectual e favorece competências da BNCC, tornando a aprendizagem mais dinâmica, interdisciplinar e alinhada às demandas da vida real.

### 3.6.4 Avaliação Final e Resultados

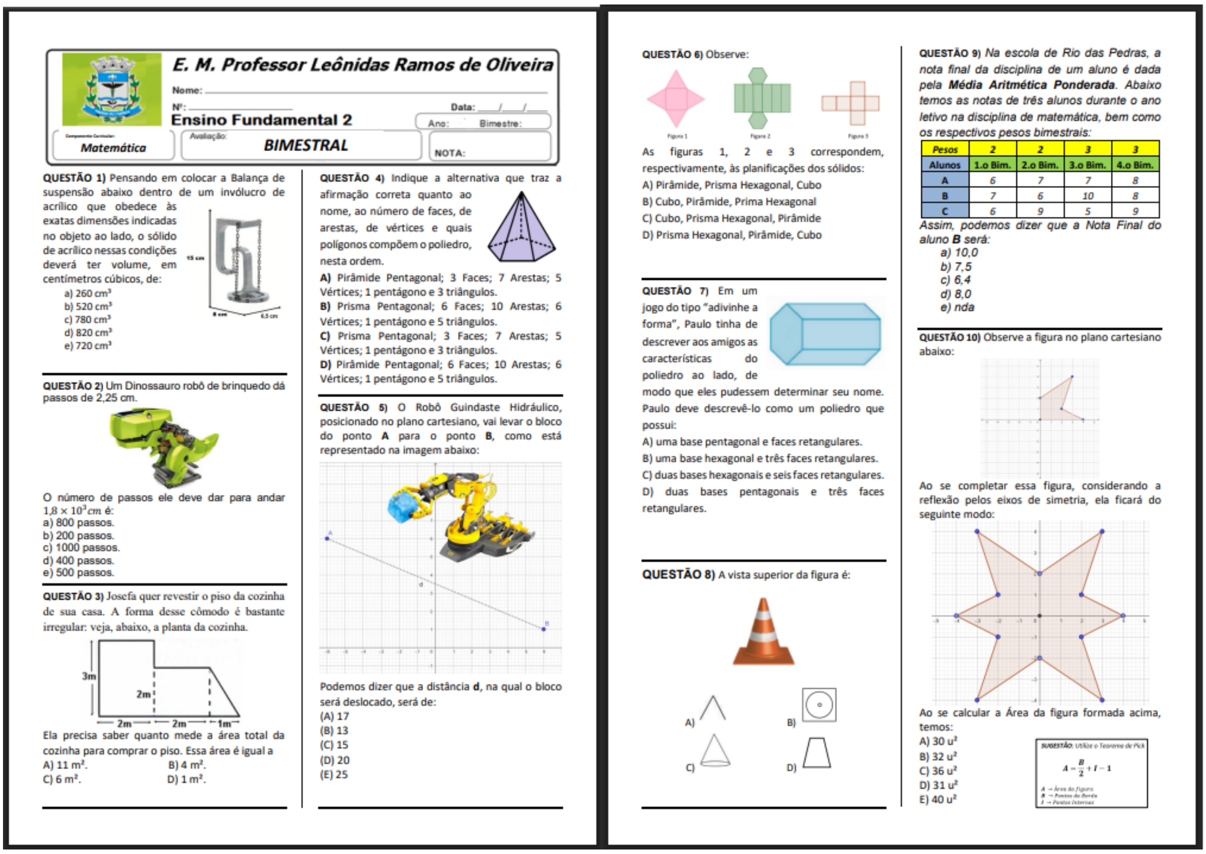
Na avaliação final, decidimos aproveitar a ocasião da semana de avaliações bimestrais do quarto bimestre para propor um desafio às duas turmas similar ao que foi proposto nas dinâmicas de montagem dos projetos. Além de solicitarmos a realização da avaliação bimestral – Figura 58 – com todo o conteúdo do currículo corrente, também desafiamos as duas classes de nono ano a resolverem uma lista de avaliação complementar com uma atividade de função lucro roteirizada – Figura 59.

Inicialmente, os alunos demonstraram certo receio ao perceberem que a atividade avaliativa envolveria um volume maior de tarefas a serem realizadas no mesmo intervalo de tempo (duas aulas). Manifestaram dúvidas quanto à dinâmica da avaliação e questionaram, por exemplo, se haveria possibilidade de consulta ao material ou se haveria alguma compensação em termos de pontuação.

Considerando o objetivo formativo da proposta e a natureza colaborativa do roteiro, explicamos que as atividades poderiam ser realizadas em duplas ou pequenos grupos, com liberdade para o compartilhamento de estratégias, discussões e uso do material didático. Essa abordagem, previamente planejada pelo professor, buscava valorizar o processo de construção coletiva do conhecimento, promovendo o engajamento e a reflexão. A proposta foi bem recebida pelos estudantes, que se mostraram satisfeitos e dispostos a participar das duas frentes avaliativas: a avaliação bimestral e a avaliação complementar.

Os estudantes dividiram-se em bancadas, de forma semelhante ao que ocorria nas aulas práticas, mantendo praticamente as configurações de grupos formadas ao longo do projeto. À primeira vista, essa organização poderia sugerir uma facilitação da atividade avaliativa. No entanto, é importante ressaltar que a avaliação bimestral foi concebida como um momento essencial no processo de aprendizagem, exigindo de professores e alunos uma postura comprometida, formal e livre de intercorrências.

Figura 58 - Avaliação Bimestral de Matemática



E. M. Professor Leônidas Ramos de Oliveira

Nome:

Nº:

Data: ___/___/___

Ensino Fundamental 2

Ano: Bimestre:

Componente Curricular: Matemática

Avaliação: BIMESTRAL

NOTA:

**QUESTÃO 1)** Pensando em colocar a Balança de suspensão abaixo dentro de um invólucro de acrílico que obedece às exatas dimensões indicadas no objeto ao lado, o sólido de acrílico nessas condições deverá ter volume, em centímetros cúbicos, de:

a) 260 cm³
b) 520 cm³
c) 780 cm³
d) 820 cm³
e) 720 cm³

**QUESTÃO 2)** Um Dinossauro robô de brinquedo dá passos de 2,25 cm.

O número de passos ele deve dar para andar $1,8 \times 10^3 cm$ é:

a) 800 passos.
b) 200 passos.
c) 1000 passos.
d) 400 passos.
e) 500 passos.

**QUESTÃO 3)** Josefa quer revestir o piso da cozinha de sua casa. A forma desse cômodo é bastante irregular: veja, abaixo, a planta da cozinha.

Ela precisa saber quanto mede a área total da cozinha para comprar o piso. Essa área é igual a

A) 11 m². B) 4 m².
C) 6 m². D) 1 m².

**QUESTÃO 4)** Indique a alternativa que traz a afirmação correta quanto ao nome, ao número de faces, de arestas, de vértices e quais polígonos compõem o poliedro, nesta ordem.

**A)** Pirâmide Pentagonal; 3 Faces; 7 Arestas; 5 Vértices; 1 pentágono e 3 triângulos.
**B)** Prisma Pentagonal; 6 Faces; 10 Arestas; 6 Vértices; 1 pentágono e 5 triângulos.
**C)** Prisma Pentagonal; 3 Faces; 7 Arestas; 5 Vértices; 1 pentágono e 3 triângulos.
**D)** Pirâmide Pentagonal; 6 Faces; 10 Arestas; 6 Vértices; 1 pentágono e 5 triângulos.

**QUESTÃO 5)** O Robô Guindaste Hidráulico, posicionado no plano cartesiano, vai levar o bloco do ponto **A** para o ponto **B**, como está representado na imagem abaixo:

Podemos dizer que a distância **d**, na qual o bloco será deslocado, será de:

(A) 17
(B) 13
(C) 15
(D) 20
(E) 25

**QUESTÃO 6)** Observe:

As figuras 1, 2 e 3 correspondem, respectivamente, às planificações dos sólidos:

A) Pirâmide, Prisma Hexagonal, Cubo
B) Cubo, Pirâmide, Prima Hexagonal
C) Cubo, Prisma Hexagonal, Pirâmide
D) Prisma Hexagonal, Pirâmide, Cubo

**QUESTÃO 7)** Em um jogo do tipo "adivinhe a forma", Paulo tinha de descrever aos amigos as características do poliedro ao lado, de modo que eles pudessem determinar seu nome. Paulo deve descrevê-lo como um poliedro que possui:

A) uma base pentagonal e faces retangulares.
B) uma base hexagonal e três faces retangulares.
C) duas bases hexagonais e seis faces retangulares.
D) duas bases pentagonais e três faces retangulares.

**QUESTÃO 8)** A vista superior da figura é:

A) B)
C) D)

**QUESTÃO 9)** *Na escola de Rio das Pedras, a nota final da disciplina de um aluno é dada pela **Média Aritmética Ponderada**. Abaixo temos as notas de três alunos durante o ano letivo na disciplina de matemática, bem como os respectivos pesos bimestrais:*

| Pesos | 2 | 2 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Alunos | 1.o Bim. | 2.o Bim. | 3.o Bim. | 4.o Bim. |
| A | 6 | 7 | 7 | 8 |
| B | 7 | 6 | 10 | 8 |
| C | 6 | 9 | 5 | 9 |

*Assim, podemos dizer que a Nota Final do aluno **B** será:*

a) 10,0
b) 7,5
c) 6,4
d) 8,0
e) nda

**QUESTÃO 10)** Observe a figura no plano cartesiano abaixo:

Ao se completar essa figura, considerando a reflexão pelos eixos de simetria, ela ficará do seguinte modo:

Ao se calcular a Área da figura formada acima, temos:

A) 30 u²
B) 32 u²
C) 36 u²
D) 31 u²
E) 40 u²

SUGESTÃO: Utilize o Teorema de Pick

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

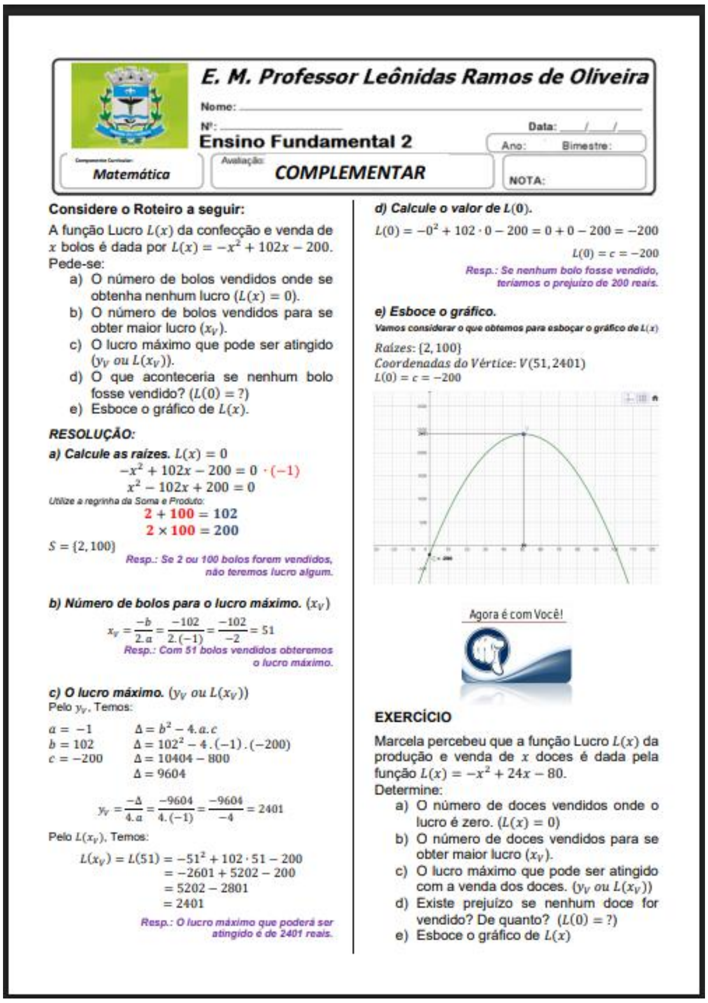
A → Área da figura
B → Pontos da Borda
I → Pontos Internos

Fonte: Autoria Própria (2025)

Dessa forma, torna-se necessário destacar que o desafio proposto não foi reduzido nem simplificado. Pelo contrário, os dois instrumentos avaliativos continham uma quantidade consistente de exercícios para o tempo disponível, apresentando variedade adequada de questões e um nível de dificuldade ajustado ao formato da atividade. Qualquer descuido por parte dos alunos poderia comprometer o desempenho na avaliação.

Nesse contexto, as duas turmas destacaram-se de maneira significativa, tanto pela divisão estratégica das tarefas — aproveitando as melhores habilidades individuais de cada integrante — quanto pela busca de interação com outros grupos, como ilustra a Figura 60.

Figura 59 – Avaliação Complementar com Roteiro



**E. M. Professor Leônidas Ramos de Oliveira**

Nome: ______________________

Nº: ________ Data: ___/___/___

**Ensino Fundamental 2**

Ano: Bimestre:

Componente Curricular: *Matemática*

Avaliação: ***COMPLEMENTAR***

NOTA:

**Considere o Roteiro a seguir:**

A função Lucro $L(x)$ da confecção e venda de $x$ bolos é dada por $L(x) = -x^2 + 102x - 200$.

Pede-se:

a) O número de bolos vendidos onde se obtenha nenhum lucro ($L(x) = 0$).
b) O número de bolos vendidos para se obter maior lucro ($x_V$).
c) O lucro máximo que pode ser atingido ($y_V$ ou $L(x_V)$).
d) O que aconteceria se nenhum bolo fosse vendido? ($L(0) = ?$)
e) Esboce o gráfico de $L(x)$.

***RESOLUÇÃO:***

***a) Calcule as raízes.*** $L(x) = 0$

$$-x^2 + 102x - 200 = 0 \cdot (-1)$$
$$x^2 - 102x + 200 = 0$$

*Utilize a regrinha da Soma e Produto:*

$$2 + 100 = 102$$
$$2 \times 100 = 200$$

$S = \{2, 100\}$

*Resp.: Se 2 ou 100 bolos forem vendidos, não teremos lucro algum.*

***b) Número de bolos para o lucro máximo.*** $(x_V)$

$$x_V = \frac{-b}{2.a} = \frac{-102}{2.(-1)} = \frac{-102}{-2} = 51$$

*Resp.: Com 51 bolos vendidos obteremos o lucro máximo.*

***c) O lucro máximo.*** $(y_V \text{ ou } L(x_V))$

Pelo $y_V$, Temos:

$a = -1$ $\quad \Delta = b^2 - 4.a.c$
$b = 102$ $\quad \Delta = 102^2 - 4.(-1).(-200)$
$c = -200$ $\quad \Delta = 10404 - 800$
$\Delta = 9604$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4.a} = \frac{-9604}{4.(-1)} = \frac{-9604}{-4} = 2401$$

Pelo $L(x_V)$, Temos:

$$L(x_V) = L(51) = -51^2 + 102 \cdot 51 - 200 = -2601 + 5202 - 200 = 5202 - 2801 = 2401$$

*Resp.: O lucro máximo que poderá ser atingido é de 2401 reais.*

***d) Calcule o valor de*** $L(0)$.

$$L(0) = -0^2 + 102 \cdot 0 - 200 = 0 + 0 - 200 = -200$$
$$L(0) = c = -200$$

*Resp.: Se nenhum bolo fosse vendido, teríamos o prejuízo de 200 reais.*

***e) Esboce o gráfico.***

*Vamos considerar o que obtemos para esboçar o gráfico de* $L(x)$

$Raízes: \{2, 100\}$
$Coordenadas\ do\ Vértice: V(51, 2401)$
$L(0) = c = -200$

Agora é com Você!

**EXERCÍCIO**

Marcela percebeu que a função Lucro $L(x)$ da produção e venda de $x$ doces é dada pela função $L(x) = -x^2 + 24x - 80$.

Determine:

a) O número de doces vendidos onde o lucro é zero. ($L(x) = 0$)
b) O número de doces vendidos para se obter maior lucro ($x_V$).
c) O lucro máximo que pode ser atingido com a venda dos doces. ($y_V$ ou $L(x_V)$)
d) Existe prejuízo se nenhum doce for vendido? De quanto? ($L(0) = ?$)
e) Esboce o gráfico de $L(x)$

Fonte: Autoria Própria (2025)

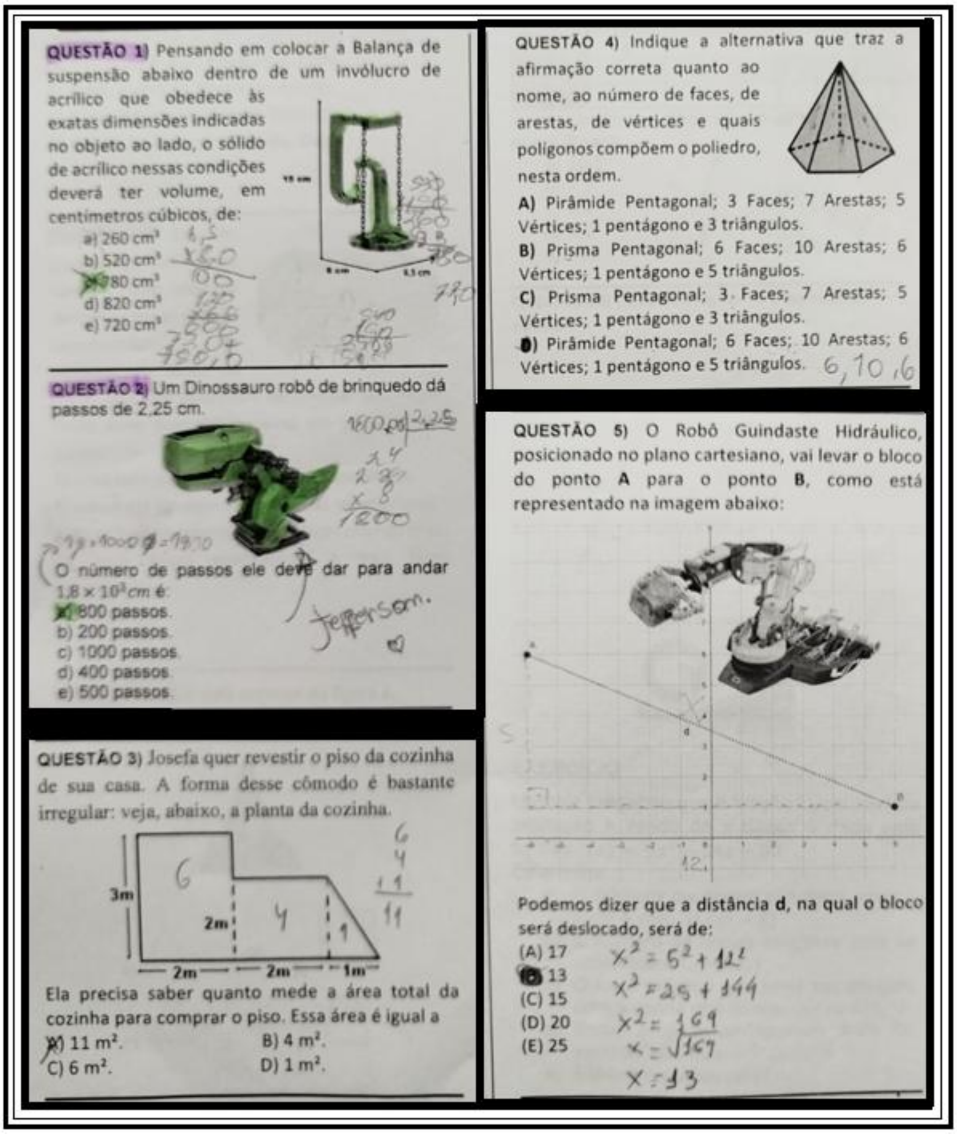
Figura 60 - Realização da Avaliação Bimestral

Fonte: Autoria Própria (2025)

A experiência de adaptar a avaliação bimestral tradicional para um formato colaborativo e contextualizado representou uma significativa inovação pedagógica no ensino da Matemática realizado até então com esses alunos, especialmente no trabalho com a função quadrática, comunicada concomitantemente a inicialização de robótica e programação, de forma singela, mas buscando estabelecer elos matemáticos entre as duas dinâmicas.

A proposta de integrar o conteúdo curricular com uma atividade prática, desafiadora e realizada em grupo, não apenas proporcionou aos alunos um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, como também ampliou suas oportunidades de desenvolvimento cognitivo, social e emocional.

Figura 61 - Resolução da Avaliação Bimestral - Parte I


QUESTÃO 1) Pensando em colocar a Balança de suspensão abaixo dentro de um invólucro de acrílico que obedece às exatas dimensões indicadas no objeto ao lado, o sólido de acrílico nessas condições deverá ter volume, em centímetros cúbicos, de:

a) 260 cm³
b) 520 cm³
c) 780 cm³
d) 820 cm³
e) 720 cm³

QUESTÃO 2) Um Dinossauro robô de brinquedo dá passos de 2,25 cm.

O número de passos ele deve dar para andar $1{,}8 \times 10^3\,cm$ é:

a) 800 passos.
b) 200 passos.
c) 1000 passos.
d) 400 passos.
e) 500 passos.

Jefferson.

QUESTÃO 3) Josefa quer revestir o piso da cozinha de sua casa. A forma desse cômodo é bastante irregular: veja, abaixo, a planta da cozinha.



Ela precisa saber quanto mede a área total da cozinha para comprar o piso. Essa área é igual a

A) 11 m². B) 4 m².
C) 6 m². D) 1 m².

QUESTÃO 4) Indique a alternativa que traz a afirmação correta quanto ao nome, ao número de faces, de arestas, de vértices e quais polígonos compõem o poliedro, nesta ordem.

A) Pirâmide Pentagonal; 3 Faces; 7 Arestas; 5 Vértices; 1 pentágono e 3 triângulos.
B) Prisma Pentagonal; 6 Faces; 10 Arestas; 6 Vértices; 1 pentágono e 5 triângulos.
C) Prisma Pentagonal; 3 Faces; 7 Arestas; 5 Vértices; 1 pentágono e 3 triângulos.
D) Pirâmide Pentagonal; 6 Faces; 10 Arestas; 6 Vértices; 1 pentágono e 5 triângulos.

6, 10, 6

QUESTÃO 5) O Robô Guindaste Hidráulico, posicionado no plano cartesiano, vai levar o bloco do ponto A para o ponto B, como está representado na imagem abaixo:

Podemos dizer que a distância d, na qual o bloco será deslocado, será de:

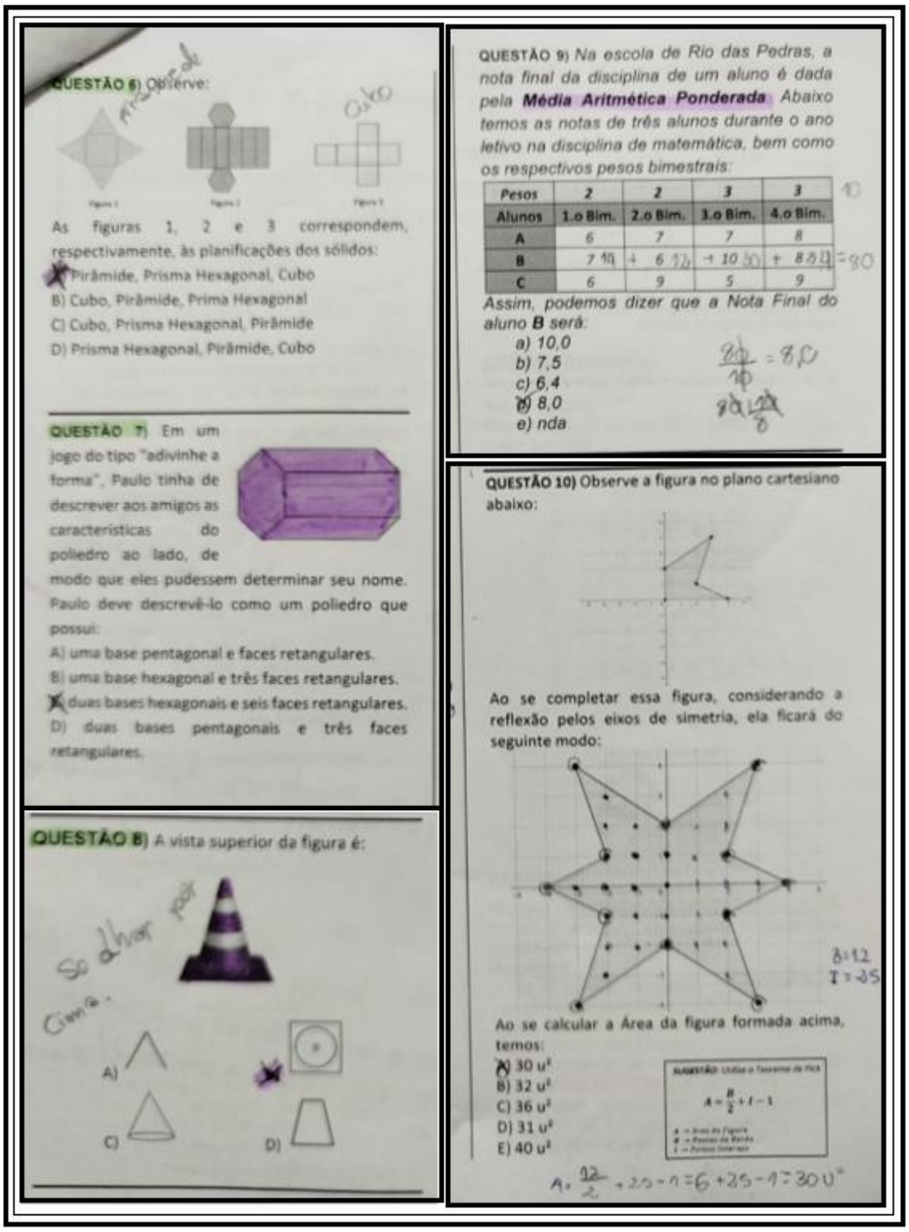
(A) 17
(B) 13
(C) 15
(D) 20
(E) 25

$x^2 = 5^2 + 12^2$
$x^2 = 25 + 144$
$x^2 = 169$
$x = \sqrt{169}$
$x = 13$

Fonte: Autoria Própria (2025)

Ao confrontarem-se com situações-problema que exigiam raciocínio lógico, modelagem matemática e aplicação de conceitos de função lucro, os estudantes foram estimulados a mobilizar competências essenciais previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017), como a resolução de problemas, a argumentação, o uso de diferentes representações matemáticas e o pensamento crítico. Essa estratégia dialoga diretamente com as orientações de Perrenoud (2000), que defende uma prática avaliativa capaz de promover aprendizagens significativas, indo além da mera verificação de conteúdos memorizados.

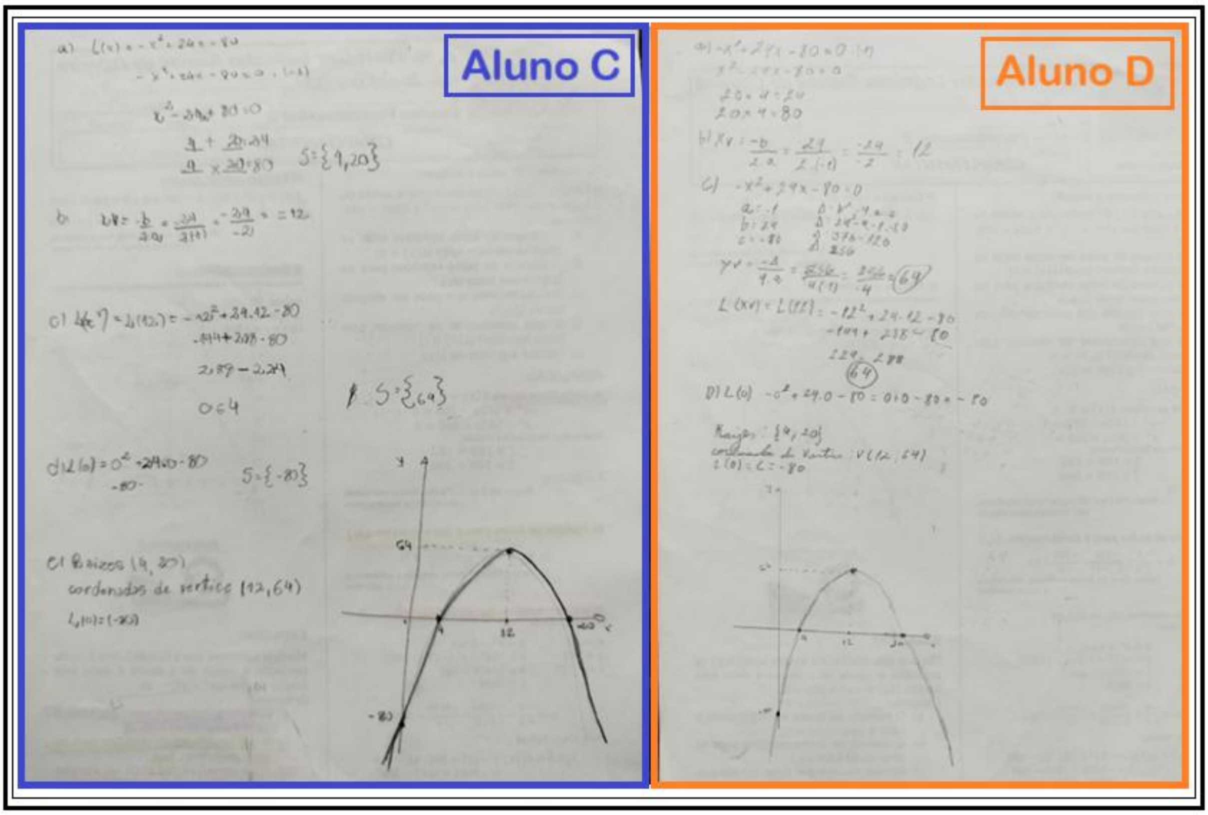
Figura 62 - Resolução da Avaliação Bimestral - Parte II



Fonte: Autoria Própria (2025)

Além disso, o formato colaborativo favoreceu o desenvolvimento de habilidades socioemocionais, permitindo que os alunos compartilhassem estratégias, construíssem soluções coletivas e valorizassem a contribuição individual de cada integrante. Essa abordagem encontra respaldo nas teorias de Vygotsky (1991), ao destacar o papel da interação social como elemento central no processo de aprendizagem, e de Piaget (2003), ao reconhecer que o desenvolvimento cognitivo se fortalece quando o aluno é desafiado a estabelecer relações entre o novo conteúdo e seus esquemas mentais prévios.

Figura 63 - Resolução da Avaliação Complementar Final




Fonte: Autoria Própria (2025)

No entanto, é importante reconhecer as limitações desse modelo avaliativo. Uma das principais questões diz respeito à dificuldade de aferir, com precisão, o desempenho individual de cada aluno, o que pode suscitar dúvidas quanto à equidade e à fidedignidade da avaliação. Para mitigar esse aspecto, foram adotadas estratégias complementares, como a observação sistemática do desempenho dos alunos durante a atividade e a aplicação de autoavaliações reflexivas ao final do processo discutidas na oralidade, em consonância com as orientações de Luckesi (2011) sobre a importância da avaliação formativa, além da entrega dos documentos de avaliação individualmente.

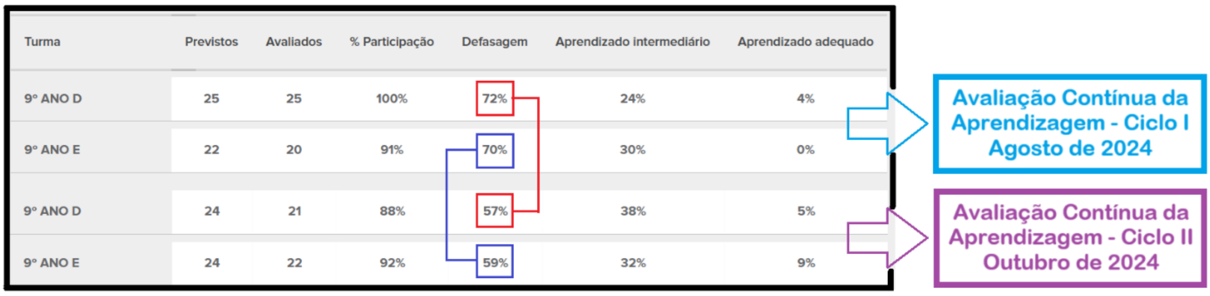
Do ponto de vista metodológico, a proposta também se alinha ao que Rios (2001) define como uma prática docente de qualidade, baseada na compreensão das diferentes formas de aprender e na valorização da participação ativa dos estudantes. Essa experiência reforça a premissa de que a avaliação pode e deve ser um momento de aprendizagem, oportunizando que os alunos reflitam, reajam e se apropriem do conhecimento de maneira significativa.

Em síntese, a estratégia de avaliação adotada permitiu a construção de um ambiente educativo inclusivo e desafiador, no qual os alunos puderam experimentar a Matemática de forma viva e aplicada. Essa vivência proporcionou o desenvolvimento de competências alinhadas às demandas contemporâneas, ainda que a realidade das turmas não favorecesse pelo alto grau de defasagem e a condição atípica de muitos, preparando os estudantes não apenas para responder a um conjunto de questões, mas para resolver problemas reais, trabalhar em equipe e desenvolver o pensamento crítico.

Dessa forma, a experiência fortalece o entendimento de que a avaliação, quando bem planejada e fundamentada em princípios pedagógicos atuais, pode ser uma poderosa aliada na construção de uma aprendizagem significativa e transformadora.

As avaliações formativas permitem um acompanhamento mais detalhado ao longo do ano letivo, onde podemos encontrar os principais indicadores produzidos pela Avaliação Contínua da Aprendizagem fornecida pelo MEC, o Pacto Nacional pela Recomposição das Aprendizagens. A análise e a reflexão sobre esses resultados são relevantes para embasar estratégias de intervenções pedagógicas mais assertivas, possibilitando uma melhoria contínua da aprendizagem dos estudantes.

Figura 64 - Avaliação Contínua da Aprendizagem



| Turma | Previstos | Avaliados | % Participação | Defasagem | Aprendizado intermediário | Aprendizado adequado |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9º ANO D | 25 | 25 | 100% | 72% | 24% | 4% |
| 9º ANO E | 22 | 20 | 91% | 70% | 30% | 0% |
| 9º ANO D | 24 | 21 | 88% | 57% | 38% | 5% |
| 9º ANO E | 24 | 22 | 92% | 59% | 32% | 9% |

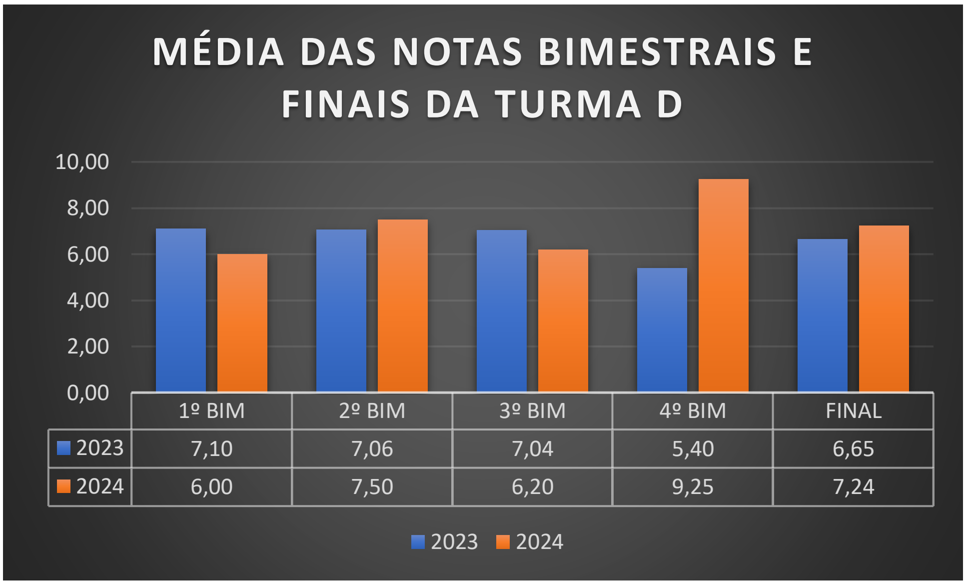


Fonte: https://avaliacaoaprendizagensanosfinais.mec.gov.br

Na Figura 64, os resultados da avaliação contínua da aprendizagem, ciclos I e II, apontam uma significativa diminuição da defasagem nas turmas acompanhadas, o que se traduziu em um ligeiro crescimento nos níveis de aprendizagem intermediário e adequado.

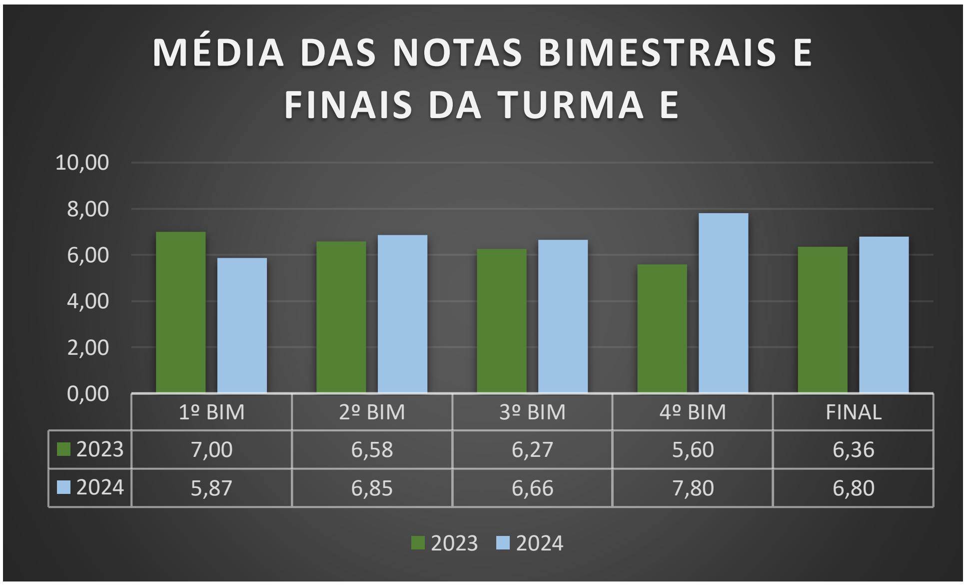
A evolução ao longo de dois anos das duas turmas observadas foi ilustrada nos Gráficos 1, 2 e 3. No Gráfico 1, realizamos a comparação das médias das notas bimestrais da Turma D, incluindo a média final. Isso foi feito para a Turma E no Gráfico 2. No Gráfico 3, dividimos os dois anos letivos em oito bimestres para verificar a progressão das turmas ao longo de todo o período de acompanhamento.

Gráfico 1 - Comparativo de Notas 2023/2024 - Turma D




Fonte: Autoria Própria (2025) – Dados do Sistema de Notas

Gráfico 2 - Comparativo de Notas 2023/2024 - Turma E

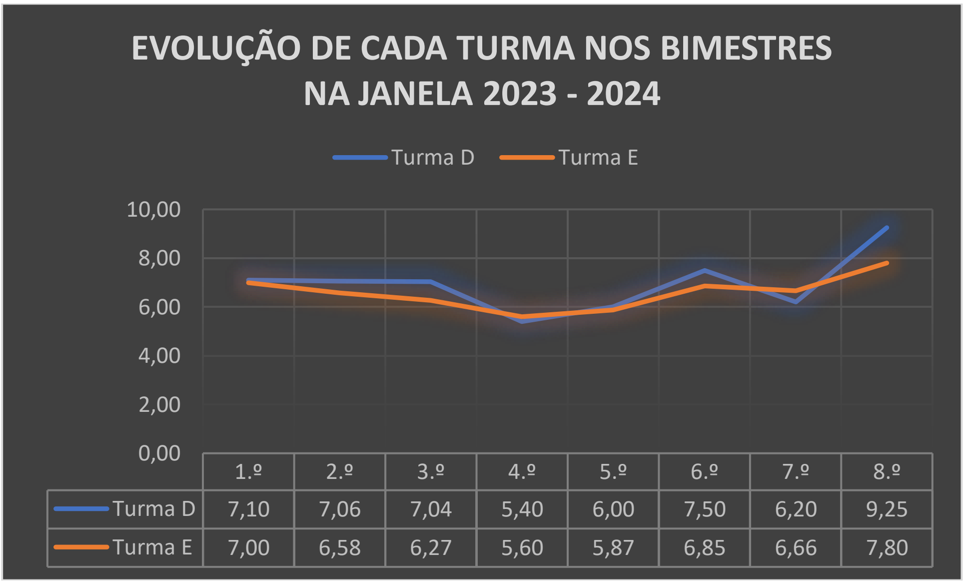



Fonte: Autoria Própria (2025) – Dados do Sistema de Notas

No caso da Turma D, é possível perceber que, no ano de 2023, quando estavam no 8.º ano, houve uma queda de aproximadamente 24% (vinte e quatro por cento). Em 2024, o período de realização do Projeto ocorreu a partir do 2.º bimestre, momento em que as médias apresentaram certa volatilidade, com aumento no 2.º bimestre, ajuste no 3.º e confirmação da elevação da média da turma no 4.º bimestre.

Comparando as médias finais, observou-se um aumento de quase 9% (nove por cento) entre o 8.º e o 9.º ano.

Gráfico 3 - Evolução das Turmas



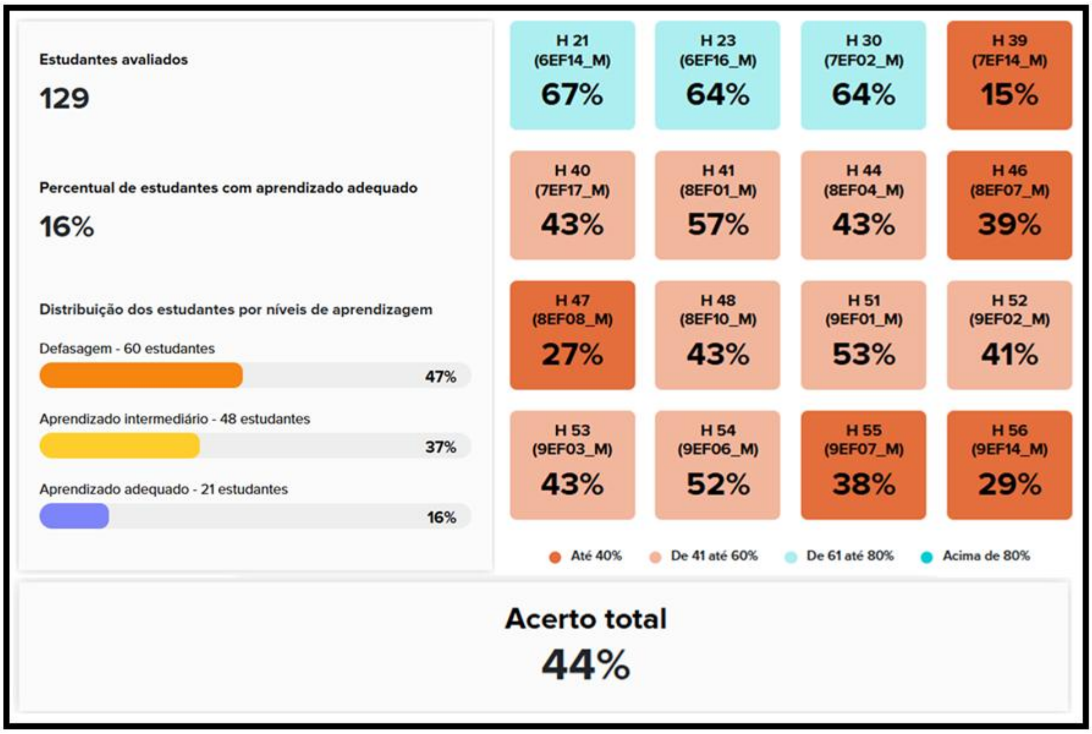

Fonte: Autoria Própria (2025) – Dados do Sistema de Notas

Já na Turma E, verifica-se que também houve uma redução na média bimestral, ainda que aparentemente mais discreta, com uma queda de cerca de 20% (vinte por cento) no ano de 2023. Em 2024, o comportamento das médias foi menos volátil do que o observado na Turma D, apresentando até mesmo uma maior consistência na evolução dessas médias. Ao comparar as médias finais, constata-se um aumento de quase 7% (sete por cento) de um ano para o outro.

Por fim, ao comparar o rendimento dos alunos, desde quando os recebemos no 8.º ano até o final do 9.º ano, observamos que as médias bimestrais da Turma D aumentaram em 30% (trinta por cento), enquanto na Turma E foi registrado um crescimento superior a 11% (onze por cento). Esses resultados indicam que, para ambas as turmas, o Projeto e as adaptações curriculares foram bastante significativos. Na Turma D, em especial, o impacto foi ainda mais expressivo, evidenciando que a realização do Projeto constituiu, no mínimo, uma relevante estratégia de intervenção para reverter a baixa nas médias bimestrais, o que também pode ser observado no "vale" do Gráfico 3, entre o quarto e o quinto bimestres.

No contexto geral, os nonos anos da escola apresentaram rendimento de 44% (quarenta e quatro por cento) na Avaliação Contínua da Aprendizagem – Ciclo I/2024. A distribuição dos alunos por níveis de aprendizagem, bem como o percentual de aproveitamento das questões por habilidade, pode ser visualizada no Gráfico 4.

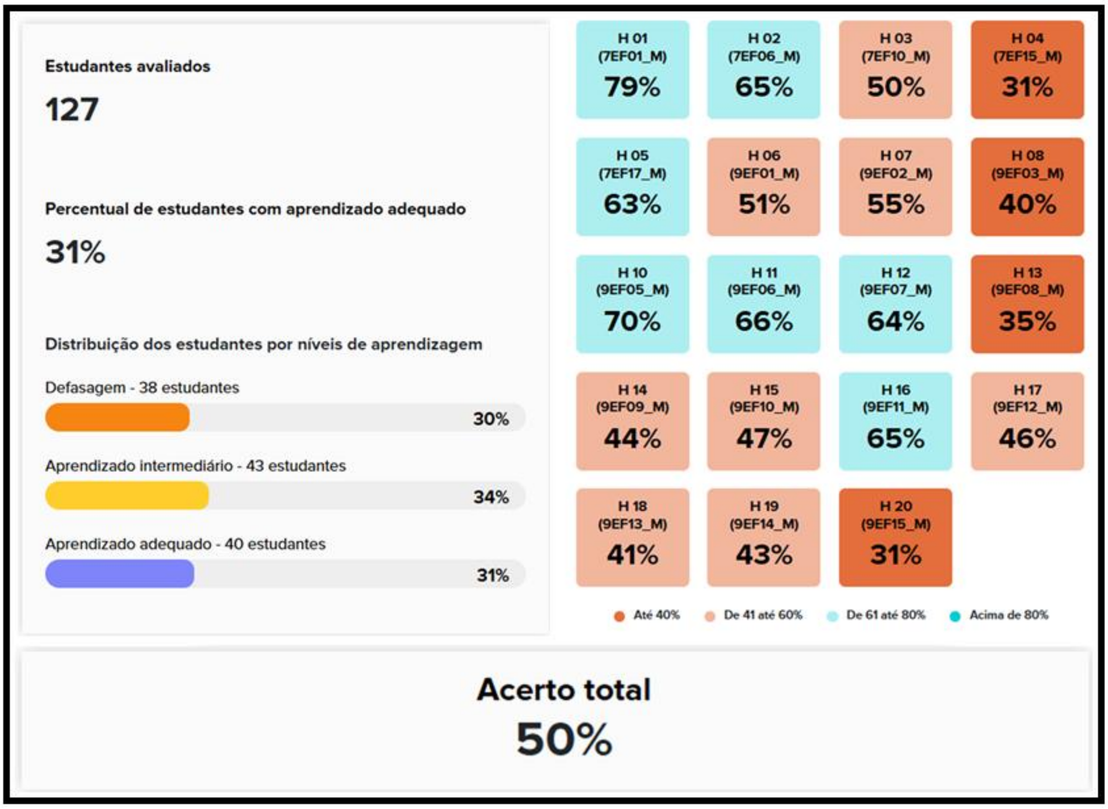
Gráfico 4 – Resultado da Avaliação Contínua da Aprendizagem – Ciclo I/2024




Fonte: https://avaliacaoaprendizagensanosfinais.mec.gov.br

Em seguida, realizamos um comparativo entre o desempenho dessas mesmas turmas no segundo momento avaliativo, o Ciclo II/2024, representado no Gráfico 5.

Gráfico 5 – Resultado da Avaliação Contínua da Aprendizagem – Ciclo II/2024




Fonte: https://avaliacaoaprendizagensanosfinais.mec.gov.br

Embora as habilidades avaliadas não sejam exatamente as mesmas, o segundo cenário revela maior presença de cores frias, indicando melhor aproveitamento em um número mais amplo de questões. Vale destacar que, no Ciclo II, houve predominância de itens relacionados a habilidades específicas do 9º ano, o que conferiu ao processo um nível de desafio superior em relação ao Ciclo I.

Os resultados apontam para avanços significativos: observou-se uma redução superior a 36% (trinta e seis por cento) no número de alunos classificados em condição de defasagem e uma diminuição de 10% (dez por cento) entre aqueles com aprendizagem intermediária. Por outro lado, o grupo com aprendizagem adequada apresentou um crescimento expressivo de mais de 90% (noventa por cento).

Como consequência, o percentual de acertos globais saltou de 44% no Ciclo I para 50% no Ciclo II, representando uma evolução superior a 13% (treze por cento). Ainda que esses números se refiram ao panorama geral das turmas de 9º ano, é importante destacar que as turmas diretamente observadas contribuíram de forma consistente para esse avanço coletivo.

Conclui-se, portanto, que a Fase 6 representou o ápice integrador do projeto, unindo teoria matemática, prática computacional e construção colaborativa do conhecimento. Ao trabalharem com roteiros orientados para o estudo da função quadrática e sua representação gráfica, os estudantes foram desafiados a interpretar, construir e aplicar conceitos como concavidade, vértice, raízes e simetria em situações-problema contextualizadas, inclusive no ambiente de simulação eletrônica. A abordagem prática permitiu ampliar a compreensão da matemática além do papel, favorecendo o protagonismo estudantil, a autorregulação da aprendizagem e a autonomia investigativa. As avaliações aplicadas confirmaram a evolução dos alunos, tanto em domínio conceitual quanto em competências socioemocionais, consolidando esta etapa como essencial para o êxito do percurso formativo e para a replicação de propostas interdisciplinares em contextos similares.

# 4 CAPÍTULO 3: A BNCC E TEORIAS EDUCACIONAIS

## 4.1 O ENSINO DA MATEMÁTICA E O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que orienta as políticas educacionais no Brasil, estabelece dez competências gerais a serem desenvolvidas ao longo da Educação Básica, visando à formação integral dos estudantes. Entre elas, destaca-se a Competência Geral nº 5, que propõe aos educadores o desafio de garantir que os alunos compreendam, utilizem e criem tecnologias digitais de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais e escolares, com o objetivo de comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2017).

Tal competência representa um avanço nas diretrizes curriculares ao articular diretamente o desenvolvimento do pensamento computacional, da resolução de problemas e do protagonismo estudantil. Para que isso ocorra, o processo de ensino-aprendizagem precisa incorporar novas metodologias, recursos tecnológicos educacionais e práticas interdisciplinares, visando formar sujeitos críticos, criativos e preparados para interagir e transformar a realidade em um mundo cada vez mais digitalizado e dinâmico.

No campo específico da Matemática, a BNCC enfatiza que o conhecimento matemático é essencial para a formação integral dos alunos da Educação Básica, não apenas por sua aplicação prática na sociedade contemporânea, mas também por sua contribuição ao desenvolvimento do pensamento crítico, lógico e investigativo (BRASIL, 2017). O documento destaca que a Matemática deve ser ensinada de forma contextualizada, a partir de situações significativas para os estudantes, envolvendo a resolução de problemas, a análise de dados, a interpretação de fenômenos do mundo físico e a construção de argumentações consistentes.

A BNCC propõe que os processos de ensino e aprendizagem em Matemática estejam centrados na compreensão dos conceitos, na sua aplicação em diferentes contextos e no estímulo à curiosidade e à investigação. A resolução de problemas, a modelagem matemática, o desenvolvimento de projetos e as atividades investigativas são destacadas como estratégias essenciais para a construção do letramento matemático, entendido como a capacidade de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, utilizando conceitos, procedimentos e ferramentas adequadas.

Além disso, a BNCC orienta que o ensino da Matemática favoreça a percepção dos alunos de que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para compreender e atuar no mundo, reconhecendo a Matemática como um campo do saber que promove o desenvolvimento de competências pessoais e sociais. O documento ressalta ainda a importância de proporcionar aos estudantes experiências que tornem o aprendizado prazeroso, estimulando a autoestima, a perseverança e o espírito de investigação científica (BRASIL, 2017).

Em relação às unidades temáticas – Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística – a BNCC reforça a necessidade de abordagens integradas e interdisciplinares, explorando os conceitos matemáticos de maneira articulada com outras áreas do conhecimento e com situações da vida cotidiana. O desenvolvimento de habilidades como a leitura de dados, o uso de tecnologias digitais, a resolução de problemas reais, a produção de argumentos matemáticos e a generalização de propriedades matemáticas são considerados fundamentais para o processo de aprendizagem.

A BNCC também aponta que o ensino da Matemática deve considerar a progressão das aprendizagens, respeitando os conhecimentos prévios dos alunos e valorizando a construção de significados ao longo dos anos escolares. Nesse sentido, recomenda que os objetos de conhecimento e as habilidades não sejam trabalhados de forma fragmentada, mas em articulação, promovendo uma aprendizagem contínua e cumulativa.

## 4.2 CONTRIBUIÇÕES DAS TEORIAS PARA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

No campo da aprendizagem, autores como Machado (2005, 2009, 2012) apontam que a construção de significados está intrinsecamente ligada à contextualização do conteúdo. Segundo Machado (2005), a contextualização funciona como uma ponte que conecta o conhecimento escolar às experiências vivenciadas pelos alunos, promovendo uma aprendizagem mais significativa. Para o autor, essa aproximação favorece a articulação de saberes, possibilitando que o aluno reconheça relações entre os conceitos novos e os já conhecidos.

A formação por competências, conforme defende Machado (2012), não se restringe à transmissão de conteúdos, mas requer a mobilização de capacidades cognitivas, afetivas e sociais, sendo imprescindível a integração entre técnica e valores. Isso implica que o currículo escolar, em qualquer componente curricular, considere não apenas os conteúdos disciplinares, mas também o desenvolvimento de atitudes e habilidades, como a resolução de problemas, o pensamento crítico e a colaboração.

Além disso, a ideia de criar um ambiente educacional colaborativo e encorajador, onde os alunos possam se sentir valorizados e acolhidos, está alinhada com as discussões atuais sobre a importância da promoção de um ambiente escolar positivo para o desenvolvimento dos estudantes. Como aponta Tavares: "[...] a construção de um ambiente de aprendizagem positivo é fundamental para o desenvolvimento integral dos alunos, pois é neste contexto que eles se sentem motivados a aprender, a participar ativamente das atividades propostas e a se engajarem no processo educativo" (TAVARES, 2015, p. 43).

Neste contexto, Imbernón (2011) afirma que a formação docente precisa preparar os professores para lidar com a mudança e a incerteza, competências fundamentais em um mundo dinâmico e tecnologicamente avançado. O autor defende que os educadores planejem sequências didáticas estruturadas, com atividades diversificadas e adequadas aos diferentes perfis de aprendizagem encontrados em sala de aula.

Outro marco teórico relevante é apresentado por Jacques Delors et al. (1998), no Relatório para a UNESCO, ao estabelecer os quatro pilares da educação: aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a conviver e aprender a ser. Esses princípios reforçam que a escola deve promover o desenvolvimento integral dos alunos, o que demanda estratégias pedagógicas que articulem teoria e prática, como ocorre, por exemplo, com o uso de projetos interdisciplinares e tecnologias educacionais.

Piaget (2003) e Vygotsky (1991) também oferecem importantes fundamentos para a compreensão do processo de ensino-aprendizagem. Para Piaget, a aprendizagem significativa ocorre quando o aluno consegue incorporar novos conhecimentos às suas estruturas cognitivas, respeitando as fases do desenvolvimento intelectual. Já Vygotsky destaca o papel da mediação docente e a importância da zona de desenvolvimento proximal, na qual o aluno realiza atividades que, sozinho, ainda não conseguiria realizar, mas que, com o auxílio do professor, tornam-se possíveis.

Philippe Perrenoud (2000) complementa essa perspectiva ao enfatizar a importância de sequências didáticas planejadas, mas suficientemente flexíveis para se adaptarem às necessidades específicas de cada turma. O autor reforça que o trabalho com situações-problema e a aprendizagem por competências demandam uma ação docente pautada na observação, na avaliação contínua e na adaptação de estratégias de ensino.

Outro aspecto essencial é o equilíbrio na quantidade e na complexidade das atividades propostas. Sweller (1988), ao apresentar a Teoria da Carga Cognitiva, alerta que o excesso de informações e tarefas pode sobrecarregar a capacidade de processamento dos alunos, prejudicando a aprendizagem. Assim, o planejamento didático deve respeitar o ritmo de cada estudante, oferecendo atividades progressivas e contextualizadas.

Marise Ramos (2001) discute a tensão entre autonomia e adaptação curricular, apontando que a mediação pedagógica precisa oferecer caminhos que favoreçam tanto a personalização da aprendizagem quanto o alcance dos objetivos curriculares. Telma Weisz (2018), por sua vez, destaca a importância do diálogo contínuo entre ensino e aprendizagem, considerando que a construção do conhecimento é um processo interativo que envolve hipóteses, testagens e ajustes por parte dos alunos.

## 4.3 DESAFIOS ESTRUTURAIS E A INSERÇÃO DAS TIC´S NAS ESCOLAS

Ao discutir a inserção das tecnologias na educação, é essencial considerar as condições reais das escolas brasileiras. Grajanin de Souza (2016), em sua pesquisa sobre a seleção e implantação das TIC na Educação Básica, revela dados do Cetic[9] (2014) que demonstram entraves significativos: equipamentos obsoletos (81%), falta de suporte técnico (88%), baixa velocidade da internet (91%) e número insuficiente de computadores conectados (88%).

Segundo Grajanin de Souza (2016, p. 65), "a presença de equipamentos obsoletos ou ultrapassados (81%) e a ausência de suporte técnico ou manutenção (88%) são aspectos citados pelos diretores das escolas pesquisadas como fatores que dificultam o uso pedagógico de computadores e da internet na instituição".

---

[9] O Cetic educação refere-se à pesquisa "TIC Educação", realizada pelo Cetic.br (Centro Regional de Estudos para o Desenvolvimento da Sociedade da Informação).

### 4.3.1 Atualização da infraestrutura de TIC nas escolas (Fonte: Cetic 2023)

A atualização com base na edição mais recente da TIC Educação (2023) do Cetic.br aponta que a proporção das escolas de Ensino Fundamental e Médio com acesso à internet subiu de 82% (edição 2020) para 92% em 2023. No entanto, temos que apenas 62% das escolas contam com ao menos um dispositivo digital (computador, tablet etc.) para uso dos alunos em atividades educacionais, onde nas escolas públicas, esse índice é ainda menor: cerca de 55% têm computadores disponíveis para alunos; além da persistência de desigualdades significativas, por exemplo, em áreas rurais, apenas 39% das escolas disponibilizam dispositivos para alunos, enquanto em áreas urbanas esse número chega a 75%.

Esses dados atualizados evidenciam avanços na conectividade, mas revelam que o acesso efetivo a tecnologias pelos alunos ainda é limitado, especialmente no meio rural e em escolas públicas. As estatísticas reforçam a relevância das restrições apontadas por Grajanin de Souza (2016): suporte técnico insuficiente, obsolescência de equipamentos e conectividade ainda precária continuam sendo entraves reais. Esses indicadores reforçam que a adoção de projetos com robótica e programação, especialmente pela audiência de tutoriais e utilização de plataformas educacionais como o TinkerCad, deve ser pensada com provisão adequada de dispositivos, conexão mínima garantida e suporte técnico permanente, de modo a evitar que iniciativas pedagógicas inovadoras sejam limitadas pela infraestrutura escolar.

Dessa forma, a infraestrutura escolar é um fator determinante para o sucesso de propostas que envolvem robótica e programação. A inserção eficaz das TIC exige planejamento, suporte técnico e capacitação docente, em consonância com as diretrizes da BNCC que apontam para uma educação inovadora, interdisciplinar e tecnologicamente integrada.

Em síntese, as diretrizes da BNCC, as contribuições das teorias educacionais e a análise crítica da infraestrutura escolar convergem para a urgência de transformar a prática pedagógica. Essa transformação exige metodologias que articulem tecnologia, resolução de problemas, pensamento crítico e protagonismo, formando alunos mais preparados para os desafios do século XXI.

# 5 CAPÍTULO 4: CONCLUSÃO

O presente trabalho analisou, à luz de referenciais teóricos contemporâneos e das diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a implementação de um projeto interdisciplinar que integrou Matemática, Robótica e Programação como estratégia para o ensino da função quadrática. Desenvolvido ao longo de grande parte do ano letivo com turmas do 9.º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública do interior paulista, o projeto foi organizado em seis fases progressivas, contemplando diagnóstico, fundamentação conceitual, práticas roteirizadas e avaliação dos resultados de aprendizagem. Essa estrutura possibilitou enfrentar os desafios pedagógicos intensificados no período pós-pandêmico e, ao mesmo tempo, promover um ensino mais contextualizado, autoral e significativo.

A investigação buscou compreender o impacto de uma sequência didática baseada em projetos práticos e roteiros instrucionais tanto na aprendizagem matemática quanto no desenvolvimento da autonomia discente. Os dados obtidos indicam que a proposta favoreceu a superação de dificuldades históricas ligadas à leitura e à interpretação de problemas, contribuindo para avanços no domínio conceitual e no desempenho escolar. A articulação entre teoria e prática, apoiada em tecnologias educacionais e na colaboração entre professores, mostrou-se eficaz na construção do conhecimento matemático, especialmente no estudo da função quadrática.

Também se observou maior engajamento e motivação dos alunos, que se mostraram mais participativos diante de atividades práticas, desafios de programação e montagem de circuitos com aplicações reais. O trabalho em grupos, aliado ao uso de roteiros claros e materiais acessíveis, possibilitou aos estudantes assumir papéis ativos e investigativos, mobilizando saberes interdisciplinares e desenvolvendo competências que extrapolam o conteúdo matemático. Entre elas, destacam-se a capacidade de interpretar manuais, transpor linguagens simbólicas para a computacional e propor soluções criativas para problemas concretos.

O impacto positivo do projeto refletiu-se ainda na formação integral dos estudantes, em consonância com os quatro pilares da educação (DELORS et al., 1998): aprender a conhecer, a fazer, a conviver e a ser. Ao colaborarem entre si, aplicarem conhecimentos em situações reais e participarem da construção do saber, os alunos desenvolveram competências cognitivas, sociais e emocionais, assumindo maior protagonismo em seu processo de aprendizagem.

Destaca-se, nesse contexto, a parceria entre o professor regente de Matemática e o professor de reforço escolar, cuja atuação conjunta favoreceu ajustes metodológicos em tempo real, apoio individualizado e acolhimento das diferenças de ritmo e estilo de aprendizagem. Esse trabalho colaborativo evidencia práticas de adaptação curricular alinhadas às propostas de Ramos (2001) e Weisz (2018).

Apesar dos resultados positivos, o projeto enfrentou limitações, como o tempo restrito para consolidar todos os conteúdos previstos no currículo e a dependência de infraestrutura mínima (computadores, internet e kits de robótica). Essas barreiras, contudo, foram parcialmente superadas por meio de ferramentas gratuitas, como o TinkerCad, que democratizaram o acesso e garantiram a continuidade da proposta.

Conclui-se que a metodologia desenvolvida se configura como uma alternativa viável, fundamentada e inovadora para os desafios contemporâneos do ensino da Matemática. Ao articular conteúdos curriculares a práticas investigativas e tecnológicas, o projeto contribuiu para uma aprendizagem mais significativa, inclusiva e conectada à realidade dos alunos. Para o futuro, aponta-se a possibilidade de expansão dessa abordagem para outros conteúdos matemáticos, como funções exponenciais e estatística, bem como a incorporação de tecnologias emergentes – a exemplo da Inteligência Artificial aplicada à personalização do ensino – ampliando seu potencial transformador e fortalecendo o compromisso com a equidade educacional.

## REFERÊNCIAS

AUSUBEL, David P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 20 jun. 2025.

BRASIL. **Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, p. 27833, 23 dez. 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 15 ago. 2025. **Art. 32**.

COBUCI, Bruna Nogueira Simões. **O uso da Robótica Educacional como ferramenta no ensino e aprendizagem de função afim e quadrática**. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2021.

COMITÊ GESTOR DA INTERNET NO BRASIL. **Pesquisa TIC Educação 2023: tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras**. São Paulo: CGI.br, 2024. Acesso em: 2 jul. 2025. Disponível em: https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/20241119194257/tic_educacao_2023_livro_completo.pdf.

CORTES DE MATEMÁTICA E FÍSICA. **Por que a fórmula de Bhaskara se chama assim?** Discussão PAPMEM 2004. Participação: Elon Lages Lima; Paulo Cezar Pinto Carvalho; Eduardo Wagner; Augusto Cesar Morgado. [S. l.: s. n.], 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=oCd1uL3srIc. Acesso em: 14 ago. 2025.

COUTINHO, Idalci; GONÇALVES, Kátia; MOREIRA, Vera; HELENO, Salete Maria. **Plano de trabalho docente – PDE 2014: tendência metodológica: História da Matemática**. Orientação: Violeta. [S. l.: s. n.], 2014. Disponível em: http://paginapessoal.utfpr.edu.br/estephan/pde-programa-de-desenvolvimento-educacional/turma-2014/HISTORIA%20DE%20BHASKARA.pdf. Acesso: 14.08.2025.

DELORS, Jacques et al. **Educação: um tesouro a descobrir**. 2. ed. São Paulo: Cortez; Brasília, DF: MEC/UNESCO, 1998.

SOUZA, Tiago Grajanin de. **Metodologia para seleção e implantação das Tecnologias da Informação e Comunicação no ensino da educação básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), São José do Rio Preto – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2016.

IMBERNÓN, Francisco. **Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza**. 10. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MACHADO, Nilson José. **A importância do contexto nas situações de ensino**. In: POMMER, Wagner Marcelo; RETROZ POMMER, Clarice P. C. **Microeconomia na Educação Básica: um tema portador de contextos significativos para explorar conteúdos e competências em situações de ensino**. Curitiba: Appris, 2021. p. 31–34.

MACHADO, Nilson José. **Educação: projeto, valores e competências**. São Paulo: Moderna, 2005.

__________. **Epistemologia e Didática: as disciplinas escolares e o pensamento complexo**. São Paulo: Cortez, 2009.

__________. **Razão e emoção na sala de aula**. São Paulo: Cortez, 2012.

PERRENOUD, Philippe. **Ensinar: agir na urgência, decidir na incerteza**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PETERS, Márcio. **A apropriação do pensamento computacional e da robótica educacional para um currículo alinhado às novas tendências em tecnologias educacionais**. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Espírito Santo, 2023.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança**. 12. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

RAMOS, Marise. **Currículo e formação humana: autonomia ou adaptação?** In: GENTILI, Pablo (org.). **Pedagogia da exclusão: crítica ao neoliberalismo em educação**. 5. ed. Petrópolis: Vozes, 2001. p. 63-76.

RIBEIRO, Willy da Rocha. **A robótica no ensino da Matemática: uma análise sobre a utilização de ferramentas tecnológicas em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental**. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

SWELLER, John. **Cognitive load during problem solving: effects on learning** [Carga cognitiva durante a resolução de problemas: efeitos na aprendizagem]. *Cognitive Science*, v. 12, n. 2, p. 257–285, 1988.

TAVARES, Jucimara. **O ambiente escolar e o desenvolvimento integral do aluno**. Curitiba: Appris, 2015.

UNIVESP. **Cursos USP – Tópicos de Epistemologia e Didática – Aula 7 (2/2).** Vídeo YouTube, 7 de fevereiro de 2012. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-XhrSWmPUeg&t=305s. Acesso em: 15 ago. 2025.

VYGOTSKY, Lev S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

WEISZ, Telma. **O diálogo entre o ensino e a aprendizagem**. 4. ed. São Paulo: Ática, 2018.