UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS TRÊS LAGOAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

BRUNO OTÁVIO ALVES PEREIRA

Explorando Volume e Capacidade com Metodologias Ativas: Uma Experiência com Oficinas e Rotação por Estações no Ensino Médio

TRÊS LAGOAS – MS
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS TRÊS LAGOAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

BRUNO OTÁVIO ALVES PEREIRA

Explorando Volume e Capacidade com Metodologias Ativas: Uma Experiência com Oficinas e Rotação por Estações no Ensino Médio

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul / UFMS, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Romanini.

TRÊS LAGOAS – MS
2025

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE

NACIONAL – PROFMAT

Campus de Três Lagoas

Explorando Volume e Capacidade com Metodologias Ativas: Uma Experiência com Oficinas e Rotação por Estações no Ensino Médio

por

BRUNO OTÁVIO ALVES PEREIRA

Dissertação de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS – Campus de Três Lagoas, como parte do requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br
EDIVALDO ROMANINI
Data: 05/09/2025 11:37:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Edivaldo Romanini (Orientador)

UFMS/CPTL

Documento assinado digitalmente
gov.br
RENATO CESAR DA SILVA
Data: 05/09/2025 12:04:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Renato César da Silva

UFMS/CPTL

Documento assinado digitalmente
gov.br
JOSE ANTONIO MENONI
Data: 05/09/2025 13:25:50-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. José Antônio Menoni

UFMS/CPTL

Três Lagoas – MS
2025

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha gratidão aos colegas de curso, em especial ao Danilo e ao Maurício, que viajavam comigo para a UFMS, compartilhando momentos importantes durante nossa jornada acadêmica, além de todos os outros colegas que estiveram presentes e contribuíram para este percurso.

Agradeço também aos professores do curso, que me prepararam de forma dedicada para o ENQ, transmitindo conhecimento e motivação essenciais para o meu desenvolvimento.

À minha mãe, meu reconhecimento e carinho eternos, por acreditar em mim e oferecer apoio incondicional em todos os momentos.

RESUMO

Analisamos, neste trabalho como o uso de metodologias ativas pode contribuir para a aprendizagem de conteúdos de Geometria Espacial no Ensino Médio, com foco na utilização de estações de aprendizagem associadas a recursos tecnológicos e atividades práticas, com o objetivo de engajar, e incentivar os estudantes. Com uma sequência didática centrada no protagonismo dos estudantes, articulando saberes teóricos e experiências concretas com sólidos geométricos.

A aplicação ocorreu em uma escola da cidade de Presidente Epitácio – SP, com uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, na disciplina de Orientação de Estudos – Matemática, que tem como foco a recomposição de habilidades e o estímulo à autonomia dos estudantes.

A análise dos resultados foi realizada com base em registros das aulas, observações, quiz de perguntas e feedback dos estudantes. Os resultados apontam que a abordagem favoreceu a participação, trabalho em grupo e a compreensão dos conceitos geométricos, além de promover maior engajamento e autonomia dos estudantes. Com isso, reafirmamos a importância das metodologias ativas, que incentive a investigação, conceitos teóricos e práticos que valorizem o aprender fazendo e ampliem as possibilidades de ensinar Matemática de forma significativa.

Palavras Chave: metodologias ativas; geometria espacial; ensino médio.

.

ABSTRACT

In this work, we analyze how the use of active methodologies can contribute to the learning of Spatial Geometry content in High School, focusing on the use of learning stations associated with technological resources and practical activities, aiming to engage and encourage students. We developed a didactic sequence centered on student protagonism, articulating theoretical knowledge and concrete experiences with geometric solids.

The application took place in a school in the city of Presidente Epitácio – SP, with a third-year High School class, in the subject of Study Guidance – Mathematics, which focuses on rebuilding skills and stimulating student autonomy.

The analysis of the results was carried out based on class records, observations, quizzes, and student feedback. The results indicate that the approach favored participation, group work, and the understanding of geometric concepts, as well as promoting greater student engagement and autonomy. Thus, we reaffirm the importance of active methodologies, which encourage investigation, theoretical and practical concepts that value learning by doing and expand the possibilities of teaching Mathematics in a meaningful way.

Keywords: active methodologies; spatial geometry; high school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo das grandezas e medidas, em especial os conceitos de volume e capacidade, ocupa um lugar central na formação matemática, tanto em contextos escolares quanto na formação de professores. Esses conceitos não apenas sustentam aplicações práticas no cotidiano, como também contribuem para o desenvolvimento do pensamento geométrico, da estimativa e da compreensão das relações espaciais. Na Matemática, o ensino de volume e capacidade requer uma abordagem que vá além da memorização de fórmulas, valorizando a construção de significados a partir de experiências concretas, representações diversas e argumentação matemática.

A medição de volumes e capacidades foi uma das primeiras formas de quantificação utilizadas pelas civilizações antigas, como mostram registros e instrumentos de egípcios, mesopotâmicos e gregos (D'AMBROSIO, 2001). No entanto, no contexto educacional atual, esse conhecimento é frequentemente ensinado de forma descontextualizada e desvinculada da compreensão conceitual. Como afirmam Van de Walle, Karp e Bay-Williams (2010), "a aprendizagem significativa de medidas requer experiências práticas, reflexão sobre as unidades utilizadas e compreensão das relações entre elas".

No Brasil, os documentos curriculares, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), reforçam a importância do desenvolvimento das habilidades ligadas à medição, destacando que os alunos devem ser capazes de "estimar, comparar e calcular medidas de volume e capacidade em diferentes contextos" (BRASIL, 2018).

Esperamos que, no terceiro ano do ensino médio, os estudantes tenham conceitos bem estabelecidos de área, volume e capacidade. Entretanto, defasagens provocadas por fatores como a pandemia da COVID-19, associadas à vulnerabilidade social presente em diversas escolas, comprometeram esse processo. Diante disso, precisamos encontrar meios para sanar essas dificuldades.

O estudo para sanar essas dificuldades foi aplicado nas aulas de Orientação de Estudos – Matemática, que, segundo a Resolução SEDUC n.º 84/2024 (SÃO PAULO, 2024), tem como objetivo promover a recuperação de habilidades em defasagem, revisar conteúdos essenciais da disciplina e fortalecer a aprendizagem por meio de práticas mais autônomas.

No terceiro ano do Ensino Médio, essa disciplina é pautada em uma apostila chamada São Paulo em Ação, elaborada pela Editora Moderna, que apresenta uma coletânea de questões de matemática com diferentes níveis de dificuldade centrada em resoluções de exercícios, portanto no ensino tradicional.

As metodologias ativas que utilizamos foram pensadas com base em alguns conteúdos presentes nesse material, como área, volume e capacidade, mas com foco em resgatar conceitos mais estruturantes e, ao mesmo tempo, motivar os estudantes e aumentar o engajamento da turma. Isso porque onde a pesquisa foi aplicada, se tratava de um grupo de estudantes pouco participativos, frequentemente desmotivado e cansado do ensino tradicional, baseado apenas em aulas expositivas e resolução de exercícios no material impresso.

Neste trabalho, propomos investigar práticas didáticas significativas para o ensino de volume e capacidade em sólidos geométricos, com o objetivo de contribuir para a superação das dificuldades conceituais presentes no processo de ensino-aprendizagem, buscando engajar os estudantes, incentivar a investigação e favorecer o trabalho em grupo, conseguimos também favorecer princípios fundamentais que dão base para as atividades teóricas e práticas, incluindo noções básicas de poliedros, o uso de ferramentas de medição, comparação entre medidas, sempre dentro da perspectiva das metodologias ativas, especialmente a rotação por estações e o agrupamento produtivo.

No Capítulo 1, discutimos a importância das metodologias ativas para a aprendizagem das habilidades já citadas, com ênfase nas estratégias que mais utilizamos ao longo da pesquisa: o agrupamento produtivo e a rotação por estações, buscamos destacar como essas metodologias promovem a participação ativa dos estudantes e favorecem a aprendizagem significativa.

No capítulo 2, apresentamos a fundamentação matemática dos conceitos que foram aplicados no estudo, como área, volume e capacidade, trazendo fundamentação para aplicações no contexto educacional.

No capítulo 3, trabalhamos as justificativas pedagógicas que direcionam a escolha do tema, enfatizando a relevância do uso de materiais concretos para o ensino de volume e capacidade e também destacamos a importância desses conteúdos na BNCC e a necessidade de práticas que atendam às realidades e às dificuldades enfrentadas pelos estudantes da educação básica.

Descrevemos no capítulo 4 o plano de aula aplicado, detalhando cada etapa das atividades práticas desenvolvidas com os estudantes. Com os registros das atividades práticas, materiais utilizados e as estratégias adotadas, com foco das práticas desenvolvidas pelos estudantes, dificuldades e as aplicações das metodologias descritas nos capítulos anteriores.

No capítulo 5 mostramos os resultados obtidos das atividades aplicadas, destacando dificuldades e avanços, analisamos a aplicação das metodologias apresentadas no capítulo anterior e seu impacto para o engajamento dos estudantes, levantando pontos importantes a serem considerados nas considerações finais.

Como descrito, a pesquisa tem como base o conhecimento concreto das habilidades ligadas à medição e à geometria, conforme previsto na BNCC. Consideramos que a aplicação das metodologias ativas é fundamental para desenvolver a capacidade de aplicar os conhecimentos teóricos na prática, favorecer o engajamento, incentivar a investigação e construir conclusões que promovam o pensamento crítico e o conhecimento matemático.

Capítulo 1

METODOLOGIAS ATIVAS

1.1 Conceito e importância

As metodologias ativas são estratégias de ensino-aprendizagem centradas no estudante, que o colocam como protagonista do processo educativo. Nós as utilizamos para desenvolver habilidades como pensamento crítico, resolução de problemas, colaboração e autonomia, comparado ao modelo tradicional, em que o professor é o principal transmissor de conteúdo.

Buscamos chamar a atenção dos estudantes e instigar o conhecimento, tendo como foco principal a aprendizagem a partir de práticas lúdicas, dinâmicas e investigativas, incentivando o protagonismo e autonomia, tornando esses estudantes não só receptores passivos de informações, mas também participantes ativos na construção do próprio conhecimento.

Carmo, Martinez e Martinez (2024, p. 127) explicam:

> As metodologias ativas, que ganharam destaque na década de 1980, têm suas raízes nos anos 1930, com educadores como John Dewey, Maria Montessori, Paulo Freire, entre outros, que enfatizavam a importância da participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem. A contribuição de diversos educadores fortaleceu o uso das metodologias ativas, possibilitando a aplicação de novas ferramentas e métodos de ensino no âmbito educacional. Esse movimento promove a ideia de que o aprendizado não ocorre apenas por meio do sistema de ensino tradicional, mas também através do compartilhamento de experiências vivenciadas, nas quais o aluno assume um papel central. Nesse contexto, destaca-se que "as metodologias ativas de aprendizagem adquirem papel importante nas atividades de ensino, uma vez que proporcionam ao aluno oportunidades significativas de intervenção na realidade concreta, seja individualmente, com seus professores ou com os demais alunos" (Santos, 2015, p. 127).

A seguir, a Figura 1 apresenta os principais elementos envolvidos nas metodologias ativas de ensino, destacando aspectos essenciais do processo.

Figura 1 – Elementos das metodologias ativas de ensino

Fonte: Carmo, Martinez e Martinez (2024, p. 130).

Percebemos que o estudante ocupa o centro da aprendizagem, sendo apoiado por estratégias como por exemplo o trabalho em grupo, o papel do professor como mediador, a autonomia e a problematização da realidade. Esses fatores juntos favorecem um aprendizado mais significativo e participativo.

1.2 Principais Metodologias Ativas

1.2.1 Rotação por Estações

A Rotação por Estações é um modelo híbrido em que dividimos os estudantes em grupos e fazemos a rotação entre diferentes "estações de aprendizagem", ela consiste em organizar a sala de aula em estações onde grupos de estudantes irão circular entre elas com um tempo pré-estabelecido, cada estação tem uma função que pode ser um pequeno grupo de estudantes dando uma pequena aula, experimentos práticos, vídeos em computadores ou televisões, questões para resolver e discutir com os colegas, tarefas individuas entre outras situações que possam desenvolver o conhecimento. Desta forma, busca valorizar a diversificação de métodos e recursos, o ensino personalizado, e o protagonismo do estudante.

Segundo Horn e Staker (2015), autores que sistematizaram os modelos de ensino híbrido, a rotação por estação é definida como:

> ‘um modelo em que os estudantes passam por uma série de atividades, ou ‘estações’, que podem incluir o ensino presencial como o professor, atividades online, tarefas colaborativas e práticas individuais” (Horn & Staker, 2015, p. 36).

De acordo com Carmo, Martinez e Martinez, 2024, p. 130, antes de colocarmos em prática a metodologia de rotação por estações, precisamos ser claros quanto aos objetivos da aula e as habilidades que espera que os estudantes alcancem. Para isso é importante planejar antes cada atividade de cada estação, é necessário explicar claramente para os estudantes como a dinâmica da aula irá funcionar estabelecendo um cronograma bem definido.

A rotação por estações promove um conjunto de habilidades e competências alinhadas à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como:

- Autonomia e responsabilidade
- Pensamento Crítico
- Trabalho colaborativo e
- Uso consciente das tecnologias.

Além disso, segundo Valente (2014)

> “ Essa metodologia favorece o protagonismo do aluno, ao mesmo tempo que permite ao professor acompanhar mais de perto os avanços e dificuldades dos estudantes”(Valente, 2014, p. 57).

1.2.2 Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP)

A Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), conhecida internacionalmente como *Problem-Based Learning (PBL)*, é uma metodologia ativa centrada no estudante, que utiliza problemas reais ou contextualizados como ponto de partida, para o processo de ensino-aprendizagem. Seu objetivo principal é desenvolver, além do conhecimento conceitual, habilidades como pensamento crítico, resolução de problemas, trabalho em equipe e tomada de decisão.

Segundo Savery (2006), um dos principais teóricos da área:

> “A ABP é uma abordagem instrucional onde os problemas dirigem o processo de aprendizagem, sendo utilizados para motivar, focar, estruturar e iniciar o processo de aquisição de conhecimentos” (Savery, 2006, p. 12).

Essa metodologia foi originalmente desenvolvida na área da saúde, especialmente na Universidade de *McMaster*, no Canadá, mas atualmente é aplicada em diversas áreas do conhecimento e níveis de ensino, está apoiada em concepções construtivas e sociointeracionais, nas quais o estudante é agente ativo da construção do conhecimento e aprende em interação com os outros com o contexto.

De acordo com Barrows e Tamblyn (1980) precursores dessa metodologia:

> “Aprender a resolver problemas complexos é mais eficaz quando os estudantes trabalham em pequenos grupos, com orientação do professor, partindo de problemas abertos e realistas” (Barrows & Tamblyn, 1980, p. 1).

Com esse método o estudante tem as situações-problema como motivação para o conhecimento. Ele busca estratégias para alcançar um objetivo previamente traçado, encontrando formas de resolvê-lo ou explicá-lo. Segundo Souza e Dourado (2015), tratando de o aluno apresentar um diagnóstico e, em seguida, buscar uma solução por meio de conhecimentos prévios ou de investigação, promovendo autonomia, confiança e determinação para alcançar o propósito. Essa metodologia visa ativar o raciocínio, guiar a relação professor-aluno e motivar a solução de problemas.

1.2.3 Sala de Aula Invertida

A Sala de Aula Invertida (ou Flipped Classroom) é uma metodologia ativa que inverte a lógica tradicional de ensino: em vez de o estudante receber o conteúdo em sala e praticá-lo em casa, ele acessa o conteúdo previamente, geralmente por meio de vídeos, textos ou materiais digitais, e usa o tempo da aula para atividades práticas, discussões, resolução de problemas e aprofundamento com o professor e colegas.

Segundo Bergmann e Sams (2012), idealizadores do modelo moderno de sala de aula invertida:

> “Invertemos nossas salas de aula para que os alunos tenham mais tempo de qualidade com o professor. O tempo da aula é usado para aplicar, analisar e discutir o conteúdo, não apenas para ouvi-los” (Bergmann & Sams, 2012, p. 13).

Essa metodologia ativa é pautada na pesquisa e no protagonismo. Consiste em o estudante realizar uma pesquisa prévia e apresentá-la para os colegas e professor.

Souza e Dourado (2015), dizem que sala de aula invertida, também conhecida em inglês *flipped classroom*, trata do ensino híbrido, onde o aluno tem acesso prévio aos materiais de forma virtual e à realização de outras atividades em sala de aula.

Essa abordagem visa aprimorar a autonomia do estudante e valorizar o momento presencial, que deixa de ser uma mera exposição para se tornar um ambiente de interação, colaboração e construção ativa do conhecimento.

1.2.4 Agrupamento Produtivo

O agrupamento produtivo é uma prática que visa à formação de grupos heterogêneos de estudantes, com diferentes níveis de conhecimento, habilidade e experiências, que colaboram entre si, permitindo que a aprendizagem ocorra por meio da interação, da escuta e da mediação coletiva, com objetivo de promover a aprendizagem colaborativa, valorizando o conhecimento prévio dos alunos e promovendo o protagonismo, ao mesmo tempo em que fortalece a cooperação e o respeito às diferenças (COSTA, 2020).

Segundo Costa (2020):

> “O agrupamento produtivo pressupõe a criação de grupos heterogêneos, com estudantes que possuam diferentes ritmos e níveis de aprendizagem, para que haja entre eles troca de experiências e ajuda mútua, favorecendo, assim, a construção coletiva do conhecimento” (Costa 2020, p. 65).

Esse tipo de agrupamento não se dá ao acaso, mas é planejado intencionalmente pelo professor com base em critérios pedagógicos. A proposta é que os estudantes com mais domínio sobre determinados conteúdos possam ajudar os colegas em processo de construção do conhecimento, sem que isso gere dependência, mas sim cooperação, troca e desenvolvimento mútuo.

Segundo Nóvoa (1992): “Aprender com os outros é uma forma de aprender consigo mesmo. O agrupamento produtivo permite que o conhecimento circule e se reconstrua coletivamente” (Nóvoa, 1992, p. 45).

Essa metodologia encontra base nas teorias sociointeracionalistas de Vygotsky (1998), especialmente no conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que propõe que os estudantes aprendem melhor quando interagem com colegas que já dominam determinado conteúdo.

“O que a criança consegue fazer hoje com ajuda, será capaz de fazer sozinha amanhã” (Vygotsky, 1998, p. 112).

Autores como Perronoud (2000) defendem que a diversidade de saberes em sala de aula deve ser valorizada como recurso pedagógico, não como obstáculo.

1.2.5 Oficinas Práticas

A metodologia de oficinas práticas é uma abordagem pedagógica centrada na aprendizagem pela experiência, em que os participantes atuam ativamente na construção do conhecimento por meio de atividades manuais, intelectuais, artísticas ou investigativas. As oficinas buscam integrar teoria e prática em ambientes colaborativos e reflexivos, despertando a curiosidade, a criatividade e o protagonismo dos participantes.

De acordo com Freire (1996), toda prática educativa deve ser uma ação dialógica e problematizadora:

“Ensinar não é transferir conhecimentos, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção” (Freire, 1996, p. 7).

As oficinas práticas representam uma metodologia ativa que promove a aprendizagem por meio da experimentação, da construção e da manipulação de materiais. Essa abordagem favorece o protagonismo estudantil, permitindo que o aluno seja autor do próprio processo de aprendizagem, ao aplicar conceitos teóricos em atividades concretas e contextualizadas (COSTA, 2020).

Nesse sentido, não são momento de mera execução de tarefas, mas espaços de experimentação e reflexão crítica, nos quais os sujeitos se colocam como autores de sua aprendizagem, pois estas se apoiam no princípio do construtivismo (Piaget) e da aprendizagem significativa (Ausubel), e se articulam também com o pensamento de Dewey, para quem a experiência é essencial na formação crítica do sujeito.

1.3 Aplicações no projeto

Com tudo que foi citado sobre as metodologias ativas, fica clara a sua importância no processo de ensino-aprendizagem, com valorização da construção de habilidades, tanto por meio de parcerias e cooperação entre colegas de sala, quanto por atividades lúdicas e pelo desenvolvimento e articulação de ideias que formam as habilidades pleiteadas na pesquisa.

Usando a metodologia de rotação por estações, e dentro de cada estação aplicando diferentes metodologias ativas, com foco em oficinas práticas, agrupamento produtivo e aprendizagem baseada em problemas, os grupos serão formados com diferentes níveis de dificuldade, possibilitando o estímulo ao debate, ao trabalho em equipe, ao senso crítico e à curiosidade.

As situações-problema, aplicadas a partir do que foi primeiramente construído com o concreto, permitem uma visualização mais clara de como resolvê-las, estimulando os estudantes a consolidarem ideias que poderão ser aplicadas tanto no seu cotidiano quanto em vestibulares, avaliações internas e externas.

Escolhemos essas metodologias ativas porque, além de promoverem o engajamento e a aprendizagem, também se alinham aos objetivos investigativos desta pesquisa, que busca uma aprendizagem eficaz e significativa. No capítulo a seguir, vamos apresentar a fundamentação matemática que embasa a aplicação dessas metodologias, revisitando conceitos de área e aprofundando o estudo de volume e capacidade, que são centrais para as atividades propostas.

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 Geometria Euclidiana

Geometria Euclidiana, também chamada de Geometria Plana, é um dos pilares fundamentais da Matemática, estruturando conceitos essenciais de forma, espaço e medida. Originada a partir da Obra Os Elementos de Euclides, escrita por volta de 300 a.C., essa geometria estabeleceu um sistema axiomático que serviu de modelo por mais de dois mil anos para o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo.

Conforme destaca Boyer (1996) “a geometria de Euclides representou a primeira tentativa sistemática de organizar o conhecimento matemático sob um conjunto coerente de definições, postulados e teoremas”. Os cinco postulados apresentados por Euclides, especialmente o famoso quinto postulado também conhecido como postulado das paralelas, são a base para a construção da geometria em um plano bidimensional. Esse último postulado afirma que: “Por um ponto fora de uma reta, passa uma única reta paralela à reta dada.”

A estrutura dedutiva da Geometria Euclidiana envolve conceitos primitivos como ponto, reta e plano, e definições que se constroem com base nesses elementos, utilizando uma lógica sequencial. Segundo Lins e Gimenez (1997), “a importância do estudo da geometria no Ensino Básico não reside apenas na aquisição de conhecimentos espaciais, mas no desenvolvimento da capacidade de raciocínio lógico, visualização e resolução de problemas.”

Além disso, a Geometria Euclidiana é essencial para diversas aplicações práticas. Ela está presente no desenho técnico, na engenharia, na arquitetura e na computação gráfica, entre outras áreas. Como observa Fiorentini (1995), “o ensino da geometria não deve ser reduzido a memorização de fórmulas, mas deve envolver a construção de significados a partir da observação, manipulação e abstração de formas geométricas.”

Com a institucionalização da Matemática como disciplina escolar, a geometria passou a ocupar um lugar de destaque nos currículos escolares. A

Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça a importância do pensamento geométrico, destacando a necessidade de que os alunos desenvolvam a capacidade de reconhecer, representar e analisar formas geométricas e suas propriedades (BRASIL, 2018).

Em suma a Geometria Plana é a área da matemática onde estudamos figuras chamadas de bidimensionais, vemos que os conceitos de ponto, reta e plano são noções primitivas, e aceitos sem definição formal, pois constituem os elementos básicos para a construção das demais figuras geométricas.

Veremos o conceito de área de figuras planas, considerado um dos conceitos fundamentais e o mais relevante da Geometria Euclidiana. Inicialmente, abordaremos esse conceito no contexto dos polígonos que são figuras formadas por segmentos de retas que se encontram apenas nos seus pontos finais e não se cruzam. Esses pontos de encontro são denominados vértices.

2.1.1 Definição de Polígonos

Um polígono é uma figura geométrica plana fechada, formada exclusivamente por uma sequência finita de segmentos de reta consecutivas, chamados de lados, que se encontram dois a dois apenas nos extremos, formando assim uma linha poligonal fechada e simples.

Segundo Lima e Carvalho (1990), “um polígono é uma linha poligonal fechada e simples, isto é, uma cadeia de segmentos de reta, consecutivos dois a dois, que se unem de modo a formar uma figura plana sem cruzamentos.”

Os tipos dos polígonos são:

- Convexos;
- Não Convexo (Concavo);
- Regulares;
- Irregulares;

2.1.2 Polígonos convexos e não convexos

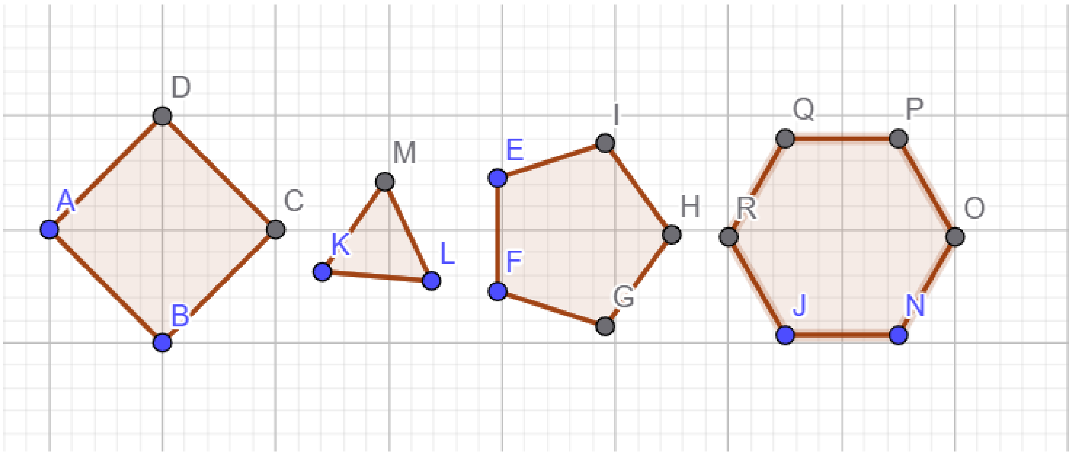
Um polígono convexo é uma figura geométrica plana, fechada e formada por segmento de reta (lados), na qual todos os ângulos internos são menores que 180° e qualquer segmento de reta que une dois pontos quaisquer do polígono está inteiramente contido em seu interior.

De acordo com Lima e Carvalho (1990), “um polígono é dito convexo quando, dados quaisquer dois pontos em seu interior, o segmento de reta que os une também está contido no interior do polígono.” Isso implica que não há “reentrâncias” na figura, isto é, nenhum vértice do polígono aponta para o interior da figura.

Outra característica fundamental de um polígono convexo, se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um de seus lados (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 26).

Na figura 2, apresentamos exemplos de polígonos regulares e convexos, construídos no software *GeoGebra.*

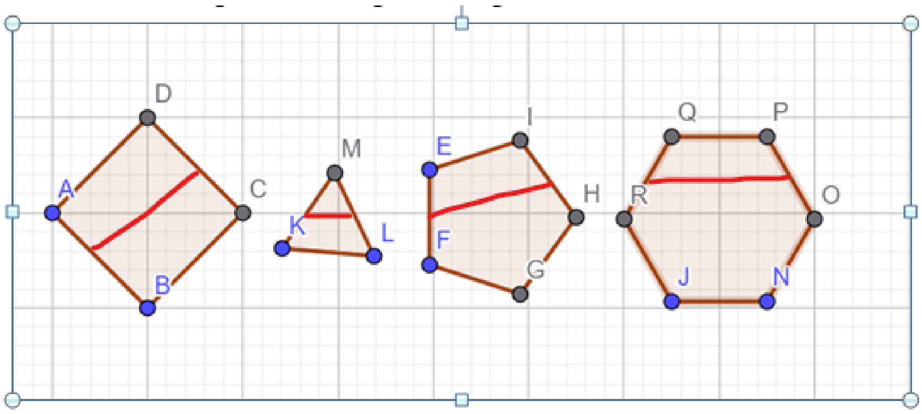
Figura 2 – Polígonos regulares convexos.



Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos notar que por serem polígonos convexos, se traçarmos um segmento ligando dois pontos quaisquer do polígono ele estará contido em seu interior, conforme Figura 3.

Figura 3 – Polígonos convexos

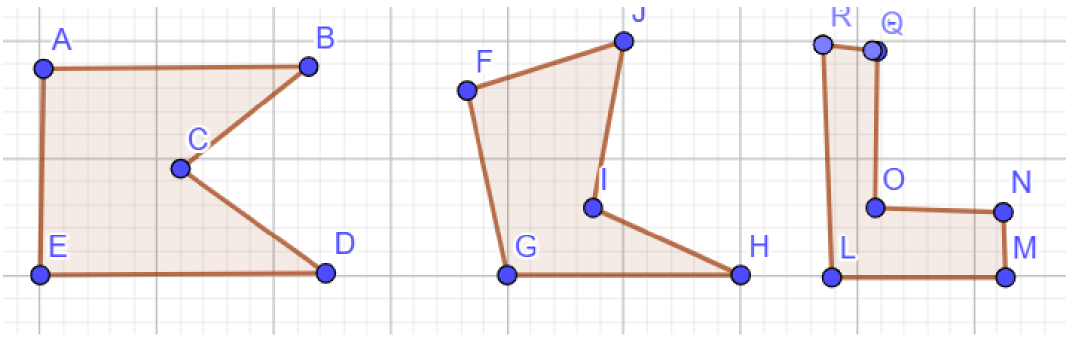


Fonte: Elaborado pelo autor

> Uma região poligonal convexa que, como definimos, é a reunião de um polígono convexo com seu interior, pode ser vista como a união de um número finito de regiões triangulares tais que, se duas quaisquer delas se interseccionam, a interseção é um segmento de reta ou um ponto (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 26).

Na figura 4, apresentamos exemplos de polígonos não convexos construídos no software *GeoGebra*, que possuem pelo menos um segmento de reta ligando dois pontos interiores que não está totalmente contido na figura:

Figura 4 - Polígonos não convexos.



Fonte: Elaborado pelo autor

2.1.3 Região Poligonal

Uma região poligonal é a porção do plano delimitada por um polígono simples (isto é, um polígono cujos lados não se cruzam, exceto nos vértices adjacentes), ela inclui tanto os pontos pertencentes ao contorno do polígono quanto todos os pontos localizados no seu interior.

Para Lima e Carvalho (1990), “região poligonal é a reunião do polígono (seu contorno) com o conjunto dos pontos internos a ele, formando assim uma área do plano limitada por segmentos de reta. ”

Assim, a região poligonal não se restringe apenas à figura geométrica formada pelos lados (o polígono), mas engloba também o interior dessa figura, formando uma área contínua e finita no plano.

É frequentemente usada em problemas de medição de áreas, divisão de terrenos, design gráfico, entre outros contextos práticos e matemáticos.

Para Barbosa (1994), a noção da área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas:

> **“Axioma VI.1.** A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero. O número a que se refere este axioma é chamado de área da região.
> **Axioma VI.2.** Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.
> **Axioma VI.3.** Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.
> **Axioma VI.4.** Se ABCD é um retângulo então sua área é dada pelo produto AB · BC “(Barbosa, 1994, p. 120).

A visão de Euclides segundo a tradução de “Os Elementos” feita por Bicudo (2009), no Livro I, apresenta as noções comuns, princípios fundamentais que servem de base para todo o desenvolvimento da geometria euclidiana:

> “1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si;
> 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais;
> 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais;
> 4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais;
> 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si;
> 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si;
> 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si;
> 8. E o todo é maior do que a parte;
> 9. E duas retas não contêm uma área.” (EUCLIDES, 2009, p. 99).

Ao analisarmos o contexto do livro, percebemos que as “Noções de comuns” numeradas de 1 a 9 podem ser aplicadas ao estudo de área de figuras planas. As operações de soma, divisões, subtrações e multiplicações de áreas se encaixam perfeitamente no que ele descreve, quando é citado por Euclides (2009), que em duas retas não contêm uma área, é viável compreender que o polígono com o menor número de lados capaz de definir uma área é o triângulo, pois que se trata de uma forma fechada com o mínimo de lados necessários para tal.

Então, fica compreendido que áreas de polígonos são a região delimitada por eles e que o menor polígono possível de delimitar área é o triângulo. Todos os outros polígonos convexos são formados por um número finito de regiões triangulares. Como as operações básicas matemáticas com áreas podem ser realizadas, e a área de um retângulo pode ser obtida pela multiplicação dos seus lados, é possível concluir que as chamadas fórmulas para os cálculos das mesmas são obtidas juntando ou dividindo polígonos em formas geométricas com métodos já bem definidos de cálculos de área.

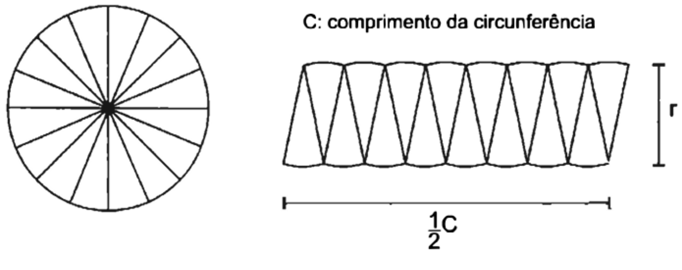
Estendendo a compreensão de área de polígonos para a de um círculo, Euclides tinha uma ideia de aproximar a área de um círculo usando polígonos regulares inscritos. Quanto maior o número de lados desses polígonos, menores são os seguimentos que compõem os lados e mais a área se aproximava do valor exato.

> “Em seu Livro XII. Euclides prova que as áreas de dois círculos quaisquer estão entre si como os quadrados de seus diâmetros. Denotando por D um círculo de raio r, este resultado implica que área D = c.r², para uma constante positiva e, que independe do particular círculo escolhido. Além disso, ele já conhecia o resultado de que a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro era uma constante k” (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 117).

Atualmente sabemos que a constante k é chamada de π, então Euclides já tinha chegado à conclusão de que o comprimento da circunferência dividido pelo diâmetro resulta nessa constante.

REZENDE; QUEIROZ (2008, p. 117) trazem uma figura que ilustra como se chega experimentalmente à $A = \pi r^2$, equação utilizada para calcular a área do círculo.

Figura 5 – Círculo reconfigurado em forma aproximada de paralelogramo



Fonte: (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 117)

O círculo que está ilustrado na figura 5 foi decomposto em um número par de setores e depois rearranjados de forma que formem uma figura próxima a um paralelogramo ou um retângulo, cujo sua altura é o raio e a base é metade da circunferência. Aplicando o conceito de área do retângulo temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot C \cdot r \tag{1}$$

Sabendo que o comprimento da circunferência dividido por duas vezes o raio é igual a π, temos:

$$C = \pi \cdot 2r \tag{2}$$

Substituindo a equação (2) na equação (1), obtemos:

$$A = \frac{1}{2}\pi \cdot 2r \cdot r \tag{3}$$

Simplificando:

$$A = \pi \cdot r^2 \tag{4}$$

Essa é a fórmula usada para calcular a área do círculo.

2.2 Geometria Espacial

A Geometria Espacial é um campo da matemática dedicado ao estudo das figuras tridimensionais e das relações entre seus elementos: vértices, arestas, faces, volumes e superfícies. Ao contrário da geometria plana, que restringe a duas dimensões, a geometria espacial amplia a compreensão do espaço e das formas, sendo essencial para o desenvolvimento da percepção e da visualização em três dimensões.

Segundo Cury (2005, p. 23) “a geometria espacial possibilita ao indivíduo compreender, representar e agir no espaço em que vive, facilitando a interpretação dos objetos e das formas presentes no cotidiano”. Essa capacidade é fundamental para que o estudante construa uma visão mais completa do mundo ao seu redor e para o desenvolvimento de habilidades necessárias em áreas como arquitetura, engenharia, design e ciências.

Historicamente, a geometria espacial tem suas raízes na antiguidade, especialmente nos trabalhos de Euclides, que sistematizou os sólidos geométricos regulares, os chamados sólidos platônicos. Conforme relata Duval (2006, p. 45), “a geometria espacial, embora presente na prática construtiva desde os primórdios das civilizações, foi formalmente estruturada na Grécia Antiga e teve grande influência na evolução do pensamento matemático ocidental”. No entanto, apesar da importância histórica, a geometria espacial sofreu marginalização nos currículos escolares durante parte do século XX.

No Brasil, a reforma educacional dos anos 1970 promoveu uma redução no ensino da geometria espacial, privilegiando conteúdos algébricos e aritméticos. Lorenzato (2006, p. 12) aponta que “essa desvalorização contribuiu para que muitos estudantes não desenvolvessem adequadamente o pensamento espacial, essencial para resolução de problemas e para a compreensão das relações tridimensionais”. Contudo, a partir da década de 1990, novas diretrizes voltaram a reforçar a importância da geometria, culminando com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que incorpora explicitamente a geometria espacial como componente fundamental do currículo de matemática (BRASIL, 2018).

Conforme destaca o documento oficial da BNCC (BRASIL, 2018, p. 168), “espera-se que os estudantes do Ensino Fundamental e Médio desenvolvam competências para reconhecer, representar e analisar figuras geométricas espaciais, compreendendo suas propriedades e utilizando diferentes formas de visualização para resolver problemas”. Essa valorização oficial reafirma a necessidade de práticas pedagógicas que explorem não apenas os cálculos, mas também a compreensão conceitual e a visualização das formas tridimensionais.

Apesar dessa importância reconhecida, pesquisas indicam que muitos professores ainda encontram dificuldades para ensinar a geometria espacial de forma significativa. Lorenzato (2006, p. 35) observa que “a prática docente muitas vezes limita-se a apresentar fórmulas para cálculo de volume e área, sem desenvolver a compreensão das propriedades espaciais nem estimular a visualização dos sólidos”. Isso evidencia a necessidade de metodologias que articulem teoria e prática, utilizando recursos que permitam a manipulação concreta e digital das figuras geométricas.

Além disso, o trabalho de Duval (2003, p. 58) enfatiza que “a aprendizagem da geometria exige a coordenação entre diferentes registros semióticos, incluindo a visualização, os desenhos, os modelos concretos e a linguagem simbólica, para que o aluno possa construir um conhecimento profundo e duradouro”. Essa abordagem multidimensional é essencial para superar as dificuldades típicas da geometria espacial.

Van Hiele (1986, p 22) contribui com sua teoria dos níveis de pensamento geométrico, afirmando que “os estudantes só conseguem avançar na compreensão da geometria quando ultrapassam o nível visual e alcançam níveis de análise e dedução, processo que deve ser mediado pelo professor e pela prática pedagógica adequada”. Assim, o ensino da geometria espacial deve fomentar a progressão cognitiva por meio de atividades que promovam a experimentação, investigação e reflexão.

2.2.1 Poliedros

É importante, antes de introduzirmos a ideia de volume e capacidade de forma matemática, definirmos o que são poliedros e quais são as suas propriedades mais relevantes. Azevedo Filho (2015, p. 75) afirma que “o conceito de poliedro está para o espaço assim como o conceito de polígono está para o plano”, considerando que os polígonos já foram definidos anteriormente.

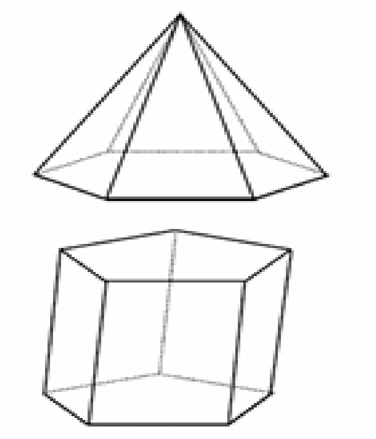
Segundo Azevedo Filho (2015, p. 76), poliedro é definido da seguinte forma:

> Chama-se poliedro a região do espaço delimitada por um número finito de polígonos que satisfazem às seguintes condições:
> i) cada lado de qualquer polígono é lado de exatamente dois polígonos;
> ii) dois polígonos consecutivos quaisquer nunca são coplanares;
> iii) dois polígonos não consecutivos quaisquer jamais se interceptam.
> Os polígonos são chamados de faces, os lados das faces são chamados de arestas e os vértices das faces de vértices do poliedro. Chama-se diagonal do poliedro todo segmento de reta que une dois vértices não pertencentes a uma mesma aresta. A reunião das faces chama-se superfície, bordo ou fronteira do poliedro (AZEVEDO FILHO, 2015, p. 76).

Após compreender a definição, é importante observar visualmente algumas dessas estruturas.

A figura 6 ilustra exemplos de poliedros:

Figura 6 – Exemplos de poliedros

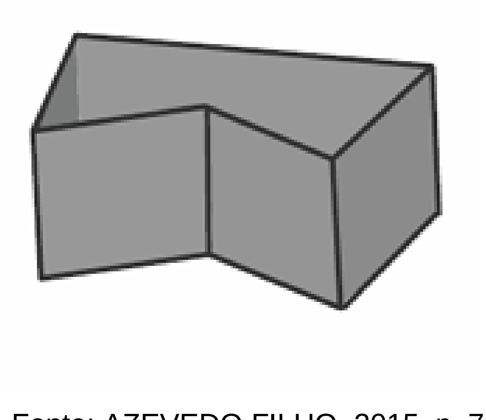


Fonte: AZEVEDO FILHO, 2015, p. 78

É possível observar na Figura 6 dois poliedros convexos, definidos segundo Azevedo Filho (2015, p. 76) "um poliedro é convexo se satisfaz à seguinte condição: iv) fixada cada face, as demais se encontram num mesmo semi-espaço (em relação à fixada)". Em outras palavras, dizemos que um poliedro é convexo quando, ao traçarmos um segmento de reta ligando dois pontos quaisquer no interior do poliedro, esse segmento permanece totalmente contido dentro da figura.

A figura 7 ilustra um exemplo de poliedro não convexo:

Figura 7 – Exemplo de poliedro não convexo



Fonte: AZEVEDO FILHO, 2015, p. 76

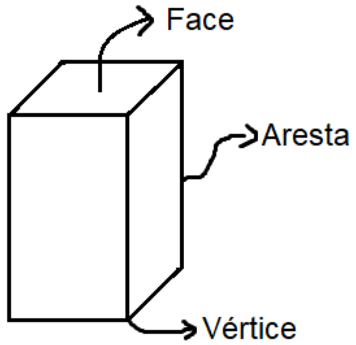
O poliedro ilustrado na Figura 7 é não convexo, pois é evidenciado pelas partes que apontam para dentro. Ou seja, é possível traçar um segmento de reta entre dois pontos internos que não permanece totalmente dentro da figura, o que contraria a definição de poliedros convexos.

Após compreendermos o que são os poliedros convexos e suas principais características, é importante destacarmos conteúdos fundamentais que costumam ser abordados em sala de aula. Esses conteúdos servem como base para a construção do tema central deste trabalho, pois a visualização de figuras tridimensionais exige uma compreensão clara dos elementos que as constituem, desde a planificação até a contagem de vértices, arestas e faces.

Dessa forma, veremos a seguir uma importante relação matemática aplicada aos poliedros convexos, que envolve justamente o número de faces, arestas e vértices que compõem essas figuras. A relação entre esses elementos é chamada de Relação de Euler. Azevedo Filho (2015, p. 79) enuncia esse teorema da seguinte forma: “Se V, A e F são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, então V- A + F = 2.”

É importante destacar que V, A e F representam, respectivamente, os vértices, arestas e faces dos poliedros. A Figura 8 apresenta um exemplo com a indicação desses elementos:

Figura 8 – Poliedro com indicações de face, aresta e vértice



Fonte: Elaborado pelo autor

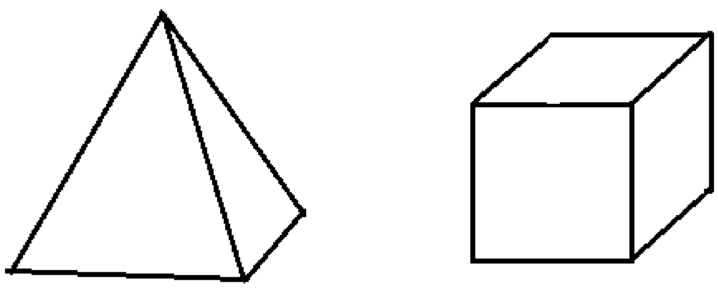
A Figura 8 ilustra um poliedro chamado paralelepípedo reto retângulo e indica um exemplo de face, aresta e vértice. Para verificarmos o teorema de Euler já enunciado podemos fazer uma contagem simples e manual na imagem, observamos que ele possui 6 faces, 12 arestas e 8 vértices. Aplicando esses valores no teorema, temos: V – A + F = 8 – 12 + 6 = 2, confirmando que a relação se verifica nesse caso.

O exemplo aplicado ilustra a utilização da relação de Euler, confirmando sua validade para esse poliedro convexo. No entanto, a prova formal dessa relação envolve argumentos matemáticos mais complexos, que não são abordados no ensino médio e estão fora da proposta deste trabalho.

Veremos agora outro conceito importante: a planificação de poliedros. A ideia de planificação está relacionada às figuras planas, mas, neste caso, a aplicamos aos poliedros. Isso significa que "desmontamos" a figura tridimensional, retirando suas faces e organizamos em um plano, como se estivéssemos abrindo o sólido e visualizando suas partes em duas dimensões.

A Figura 9 apresenta dois sólidos geométricos: uma pirâmide de base retangular e um cubo.

Figura 9 – Pirâmide de base retangular e cubo.

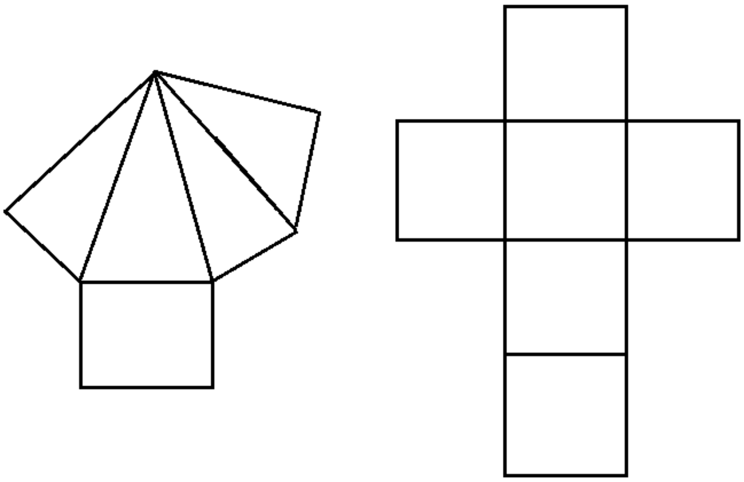


Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 9 observamos dois sólidos bastante comuns no estudo da geometria espacial, uma pirâmide de base retangular e um cubo. São exemplos que costumamos utilizar em sala de aula para facilitar a visualização dos elementos principais dos poliedros, como vértices, arestas e faces.

E a figura 10 suas respectivas planificações:

Figura 10 – Planificações da pirâmide de base retangular e do cubo.



Fonte: Elaborado pelo autor

Já na Figura 10, temos um tipo de planificação de cada figura, respectivas, que nos ajudam a entender como essas figuras tridimensionais podem ser representadas no plano. Essa representação é essencial para desenvolver a noção de superfície e compreender a estrutura do sólido, com a planificação conseguimos visualizar mais facilmente quantas e quais são as faces de um poliedro, e como podemos desenvolver análises de construção de sólidos ou até mesmo facilita no cálculo de área da superfície dessas figuras.

2.2.2 Volume e Capacidade

O conteúdo estudado sobre volume no ensino médio oferece a oportunidade de integrar conceitos matemáticos com o cotidiano do estudante, para isso, abordaremos o conceito de volume e capacidade em figuras geométricas comuns, como prismas, pirâmides, cilindros e cones.

Usando as definições de poliedros já apresentada anteriormente, vamos focar em alguns que julgamos serem mais importantes para o desenvolvimento do trabalho.

Dentre os poliedros a serem estudados, destacamos os prismas definidos com duas bases paralelas iguais no formato de polígonos, e as faces laterais são paralelogramos, e também pirâmides que podemos definir como uma base poligonal com faces laterais triangulares que se encontram em um único vértice.

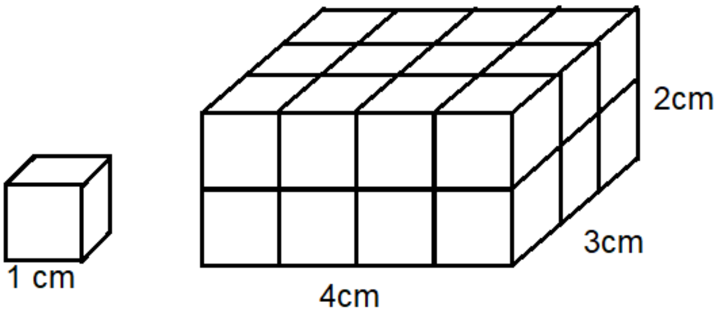
Para compreendermos o volume de sólidos consideremos um conceito que segundo Azevedo Filho (2015, p. 56), o volume de um sólido é a quantidade de vezes que o cubo de aresta unitária "cabe" nele.

Esse cubo será a unidade de medida de volume, essa medida será baseada na unidade correspondente, se for utilizado centímetros, será chamada de centímetro cúbico, se for de metro, metro cúbico, ou qualquer outra medida citada.

Azevedo Filho (2015, p. 37) cita que se chama paralelepípedo todo prisma cuja base é um paralelogramo. Todo paralelepípedo reto cuja base é um retângulo é chamado de paralelepípedo retangular ou paralelepípedo retângulo, faremos o entendimento de volume de paralelepípedos e estenderemos o entendimento a outros prismas:

Na figura 11 está representado um cubo de aresta unitária e um prisma de base retangular cujo volume deve ser medido:

Figura 11 - polígonos regulares para comparação de volume



Fonte: Elaborado pelo autor

O volume da figura é uma simples contagem de cubos unitários, 4cm x 3cm x 2cm = 24 cm³, que é exatamente a quantidades de cubos que formam a figura ao lado do cubo unitário de 1 cm.

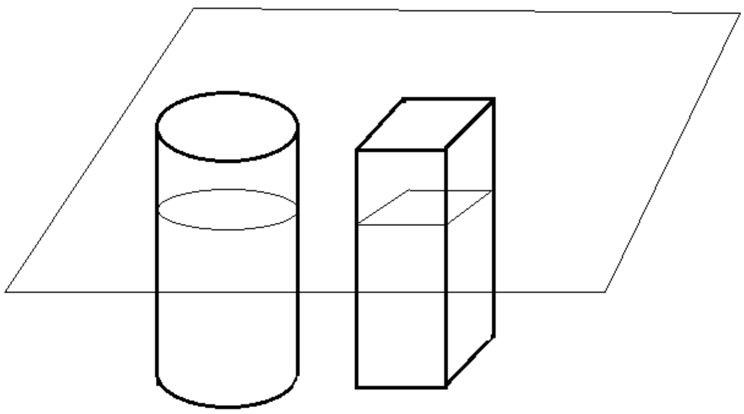
Podemos pensar no conceito de volume como o espaço que um objeto ocupa, e a ideia de capacidade usada no trabalho vai ser da quantidade de volume que pode ser colocado dentro de um objeto.

De acordo com SÃO PAULO (Estado, 2024, p.4) volume é a medida do espaço ocupado por um sólido, um líquido ou gás, capacidade é o volume interno de um recipiente. Portanto, mesmas grandezas em situações diferentes.

Para estudarmos cilindros e cones, usaremos a ideia que Azevedo Filho (2015, p. 36) cita, “chama-se prisma todo cilindro cuja base é um polígono”, ou seja, podemos entender o cilindro como um prisma especial cuja base é um círculo, diferentemente dos prismas que possuem bases poligonais.

Então para estendermos conceitos de volume e capacidade a cilindros e cones usaremos o axioma conhecido como Princípio de Cavalieri, de acordo com Azevedo Filho (2015, p. 60) “Sejam S e S' sólidos. Se todo plano horizontal intercepta S e S' segundo figuras com mesma área, então S e S' têm mesmo volume”, com isso entendemos que, se cortarmos dois sólidos diferentes por planos horizontais e em cada altura a área do corte forem iguais, então esses sólidos possuem o mesmo volume, mesmo que tenham formatos diferentes, a figura 12 ilustra um exemplo:

Figura 12 –Cilindro e primas de mesma altura cortados por um plano.



Fonte: Elaborado pelo autor

Observando a figura 12, podemos usar esse princípio para relacionar o volume do cilindro ao volume do prisma. Se tivermos um cilindro e um prisma com a mesma altura e cortarmos ambos com vários planos horizontais, como o representado na figura, onde vemos um corte feito por um plano, e compararmos as áreas das figuras planas e forem iguais, e fizemos vários cortes em vários níveis e se essas áreas forem sempre iguais em todos os níveis, então, de acordo com o Princípio de Cavalieri, os volumes também serão iguais. Isso nos permite justificar que o volume do cilindro é dado pela mesma fórmula do volume do prisma: área da base multiplicada pela altura. Assim, o princípio pode ser usado como uma base teórica importante para demonstrar as fórmulas que utilizamos no cálculo de volume e capacidade.

Podemos utilizar o mesmo princípio para justificar as fórmulas de volume da pirâmide e do cone, onde se compararmos pirâmides e primas de uma mesma altura e com a área da base iguais, fizermos cortes horizontais a área das secções da pirâmide serão proporcionais a área do prisma, se realizarmos em todos os níveis, observamos que o volume da pirâmide ocupa um terço do volume do prisma com a mesma área da base e mesma altura, da mesma forma comparando um cone e cilindro de mesma área da base e mesma altura chegaremos à conclusão que o cone ocupa um terço do volume do cilindro.

2.2.3 Sínteses e implicações para o ensino

Neste capítulo, abordamos os conceitos fundamentais que sustentam a realização da pesquisa, destacamos desde a importância teórica até a aplicabilidade prática de conteúdos como polígonos, áreas, volume e capacidade, todos serão conectados às metodologias ativas que serão trabalhadas.

Com base na fundamentação apresentada, compreendemos que o estudo desses conceitos vai além da simples memorização de fórmulas e aplicação de cálculos mecânicos, exige entendimento profundo dos princípios que os sustentam e de sua origem, o que será evidenciado nas atividades didáticas aplicadas, a tabela 1 a seguir apresenta fórmulas importantes que serão aplicadas na metodologia:

Tabela 1 – Fórmulas de volume dos sólidos geométricos

Sólidos:	**Fórmulas de Volume**
Prismas	Área da base x altura : Ab · h
Pirâmides	(Área da base x altura)/ 3 : $\frac{\mathrm{Ab} \cdot \mathrm{h}}{3}$
Cilindros	Área da base x altura : $\pi \cdot r^2 \cdot \mathrm{h}$
Cones	(Área da base x altura)/ 3 : $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot \mathrm{h}}{3}$

Fonte: Elaborado pelo autor

As fórmulas apresentadas na tabela 1 serão fundamentais para o desenvolvimento das atividades propostas na pesquisa.

No capítulo seguinte apresentamos a justificativa da pesquisa, pautada em fundamentos pedagógicos e nas dificuldades recorrentes no ensino da geometria espacial, destacamos a importância dos materiais concretos e das abordagens ativas na superação desses obstáculos.

Capítulo 3

Justificativa e Fundamentos Pedagógicos

3.1 Dificuldades do Ensino e Aprendizagem da Geometria Espacial

O ensino e a aprendizagem da geometria espacial apresentam desafios significativos tanto para estudantes quanto para professores, decorrentes de características intrínsecas ao próprio conteúdo e das metodologias tradicionalmente adotadas nas escolas.

Uma das principais dificuldades está relacionada à visualização tridimensional, que é uma habilidade cognitiva e essencial para o entendimento de figuras espaciais. Conforme Duval (2003, p. 62), “a visualização não é apenas um processo passivo de observação, mas um processo ativo de construção mental que envolve a coordenação entre diferentes registros de representação, como imagens, desenhos e modelos concretos”. Muitos alunos apresentam limitações em realizar essa coordenação, o que prejudica a compreensão das relações espaciais entre faces, arestas e vértices dos sólidos geométricos.

Além disso, Lorenzato (2006, p. 28) destaca que “a dificuldade em interpretar planificações e vistas múltiplas dos sólidos geométricos é uma das barreiras mais comuns enfrentadas pelos estudantes, pois exige um nível de abstração e transposição mental que não é espontâneo e precisa ser desenvolvido progressivamente”. Essa dificuldade é agravada pelo fato de que a geometria espacial exige a habilidade de imaginar movimentos, rotações e transformações no espaço tridimensional, algo que muitos ainda não dominam.

Outro desafio que encontramos é a confusão entre conceitos de volume e capacidade, tema escolhido para o desenvolvimento desse trabalho, devido serem semanticamente próximos, mas geometricamente distintos. Segundo Cury (2005, p. 34), “a compreensão da diferença entre volume, medida do espaço ocupado por um corpo, e capacidade, volume disponível para conter substâncias, não é trivial para a maioria dos estudantes e demanda contextualizações práticas para ser internalizada”. Essa prática é o que buscamos para o aprimoramento do conhecimento dos estudantes do ensino médio, demonstrando seu uso no cotidiano.

Do ponto de vista docente, pesquisas apontam que muitos professores não se sentem preparados para ensinar geometria espacial de maneira significativa. Segundo Nascimento (2019, p. 45), “a formação inicial deficiente e a ausência de materiais didáticos adequados contribuem para que o ensino da geometria espacial seja restrito à memorização de fórmulas, sem o desenvolvimento da visualização e do raciocínio espacial”. Tal abordagem limita o potencial de aprendizagem dos estudantes e dificulta o desenvolvimento de habilidades essenciais.

A teoria dos níveis de pensamento geométrico de Van Hiele (1986, p. 22) oferece uma explicação didática para essas dificuldades. Van Hiele afirma que “os estudantes passam por níveis sequenciais na compreensão da geometria, desde a percepção visual até a análise formal e dedutiva, sendo que muitos permanecem nos níveis iniciais por falta de estímulo adequado”. Isso implica que o ensino deve ser planejado para promover a progressão cognitiva, com atividades que favoreçam o avanço do pensamento geométrico.

Por fim, Duval (2003, p. 75) ressalta que “a aprendizagem da geometria espacial requer a articulação entre múltiplos registros semióticos, uma tarefa complexa que pode gerar confusão e dificuldades se não for mediada por estratégias pedagógicas eficazes”.

O uso de materiais concretos, representações visuais diversificadas e tecnologias digitais podem ser decisivos para superar os obstáculos enfrentados no processo de ensino-aprendizagem.

3.2 O Papel dos Materiais Concretos e Tecnologias Digitais

O ensino da geometria espacial demanda estratégias pedagógicas que favoreçam o desenvolvimento da visualização, da manipulação e da compreensão tridimensional. Nesse contexto, o uso de materiais concretos e tecnologias digitais desempenham um papel essencial para tornar o aprendizado mais significativo e acessível, contribuindo para a superação das dificuldades típicas dessa área da matemática.

Segundo Lorenzato (2006, p. 19), “materiais concretos são objetos físicos que permitem aos estudantes manusearem, montar, desmontar, experimentar, verificar e construir conceitos matemáticos a partir da ação e da observação”. No caso da geometria espacial, tais materiais possibilitam a exploração prática de sólidos geométricos, favorecendo a compreensão de propriedades como faces, arestas, vértices, planificações e volume.

A manipulação de objetos tridimensionais reais, como blocos, poliedros de encaixes ou sólidos confeccionados com pastas arquivos (PVC), papelão, caixa de leite, ajudam o estudante a construir representações mentais do espaço. Isso está em conformidade com a perspectiva de Piaget, que defende que o conhecimento é construído pela ação: “a manipulação precede e fundamenta a construção de estruturas mentais mais complexas” (Piaget, 1975, p. 42). Assim, os materiais manipulativos funcionam como pontes entre experiência sensível e o pensamento abstrato.

Além disso, a literatura aponta que os recursos digitais têm ampliado as possibilidades de ensino da geometria espacial. Softwares como o *GeoGebra* 3D, *Cabri* 3D e *SketchUp* permitem que os estudantes explorem sólidos, realizem rotações, cortes, secções planas e visualizem planificações de forma dinâmica e interativa. Segundo Borba e Villarreal (2005, p. 89), “as tecnologias digitais introduzem um novo tipo de materialidade no ensino da matemática, mediando a construção de significados por meio da simulação e da interação com representações virtuais”.

Tais ferramentas são especialmente úteis na superação de limitações associadas ao ensino tradicional, centrado na lousa e em imagens estáticas. De acordo com Nascimento (2019, p. 54), “o uso de *software* de geometria dinâmica favorece a experimentação e o raciocínio indutivo, permitindo que os estudantes explorem propriedades espaciais por meio de conjecturas visuais e verificações empíricas”. Assim, os ambientes digitais enriquecem o processo de ensino-aprendizagem ao possibilitarem múltiplas representações e a manipulação em tempo real.

O uso combinado de materiais concretos e digitais também potencializa a aprendizagem. Duval (2003, p. 64) argumenta que “a aprendizagem da geometria só se torna eficaz quando há uma coordenação entre diferentes registros de representação-figural, simbólico e verbal – o que pode ser facilitado pela combinação entre manipulação concreta e visualização digital". Portanto, integrar recursos físicos e virtuais pode ajudar os estudantes a avançarem nos níveis de pensamento geométrico descritos por Van Hiele.

Contudo, o uso desses recursos requer planejamento didático e formação adequada dos professores. Segundo Oliveira e Miorim (2012, p. 137), "a simples introdução de tecnologia ou de materiais manipulativos não garantem a melhoria da aprendizagem; é necessário que o professor atue como mediador, propondo situações-problema, questionamentos e reflexões que conduzam à construção do conhecimento geométrico".

Assim, o papel dos materiais concretos e das tecnologias digitais no ensino da geometria espacial deve ser compreendido como um meio e não como um fim em si mesmo. Quando bem utilizados, esses recursos promovem a investigação, a modelagem e a articulação entre diferentes formas de representação, elementos fundamentais para uma aprendizagem significativa.

3.3 A Geometria Espacial dentro da BNCC (Base Nacional Comum Curricular)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2017 para Educação Infantil e o Ensino Fundamental, e em 2018 para o Ensino Médio, estabelece as diretrizes essenciais para a formação dos estudantes brasileiros, incluindo competências e habilidades voltadas à Matemática. No que se refere à Geometria Espacial, a BNCC reconhece sua importância na formação do pensamento lógico, visual e na compreensão do mundo físico.

Conforme o documento da BNCC (BRASIL, 2018, p. 268), uma das competências da Matemática no Ensino Fundamental é:

"Compreender características de figuras planas e espaciais, como números de lados, vértices, faces, ângulos, medidas de comprimento, área e volume, utilizando instrumentos de medição, tecnologias digitais e estratégias de cálculos e estimativa".

Essa diretriz indica a valorização não apenas do domínio técnico de fórmulas, mas da compreensão conceitual das formas e volumes, bem como de sua aplicação no cotidiano. A BNCC enfatiza ainda que a Matemática deve contribuir para o desenvolvimento da capacidade de modelar e resolver problemas reais, sendo a Geometria Espacial uma ferramenta essencial nesse processo.

A presença da Geometria Espacial é mais evidente nos componentes da unidade temática “Espaço e Forma”, que está presente desde os anos iniciais até o final do Ensino Médio. Para os anos finais do Ensino Fundamental, por exemplo, o objeto de conhecimento “Sólidos Geométricos” está associado a habilidades como identificar, nomear, classificar e comparar poliedros e corpos redondos com base em suas propriedades geométricas (BRASIL, 2018, p. 272).

No Ensino Médio, a BNCC reforça a importância de uma abordagem interdisciplinar e contextualizada da geometria, conectando o conhecimento matemático com situações do cotidiano e de outras áreas do saber. Segundo o texto oficial (BRASIL, 2018, p. 563):

“A Matemática contribui para a compreensão e a atuação no mundo, permitindo a interpretação e a produção de informações e a solução de problemas, com ou sem o uso de tecnologias digitais.”

Esse trecho reforça o compromisso da BNCC com o ensino que desenvolva a alfabetização matemática, por meio da qual os estudantes possam interpretar, modelar e interagir com a realidade. A Geometria Espacial, nesse sentido, é essencial para lidar com representações tridimensionais, desde o planejamento de espaços até a leitura de plantas, mapas e maquetes.

De acordo com Lorenzato (2006, p. 15), “a presença da geometria nos currículos oficiais brasileiros é essencial para garantir que o estudante desenvolva habilidades espaciais, tão necessárias para sua formação pessoal e profissional”. Vai de acordo com a BNCC, ao incluir a geometria espacial de maneira estruturada, contribui para uma matemática mais significativa e completa.

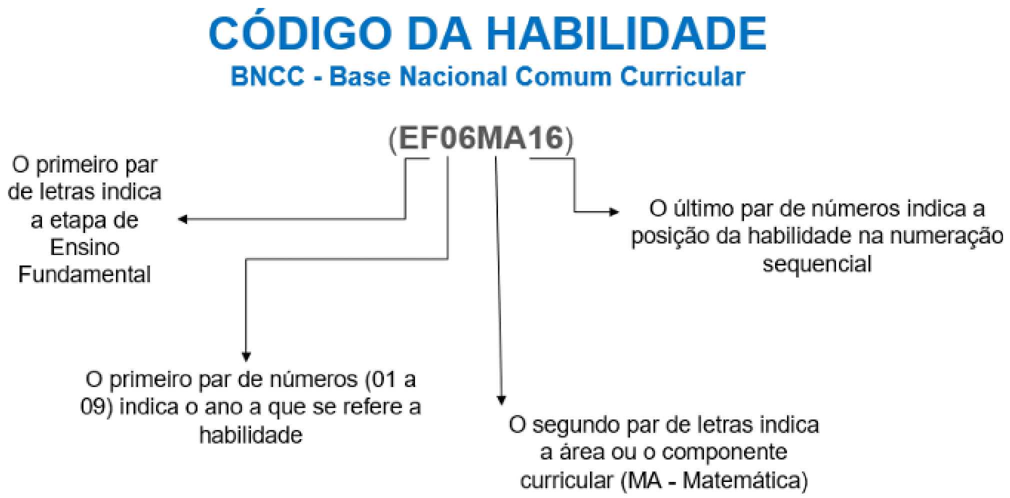
Entretanto, apesar da presença formal do conteúdo, o desafio está na efetiva implementação pedagógica dessas diretrizes. Nascimento (2019, p. 42) observa que “há uma distância entre o que a BNCC propõe e o que é praticado na sala de aula, especialmente em relação ao uso de recursos digitais e manipulativos para o ensino da geometria espacial”, isso mostra que, além da proposta curricular, é necessária formação docente contínua para que os professores possam aplicar essas orientações com qualidade.

Assim, a BNCC representa um avanço importante ao estabelecer a Geometria Espacial como conteúdo essencial da no ensino de matemática. No entanto, para que suas diretrizes se tornem realidade, é imprescindível que as escolas ofereçam suporte pedagógico, formação adequada e recursos didáticos que favoreçam uma abordagem investigativa, visual e significativa da geometria.

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo deste trabalho é propor práticas didáticas significativas voltadas ao ensino de volume e capacidade, com a intenção de contribuir para a superação de dificuldades conceituais e ampliar o engajamento dos estudantes.

A pesquisa se fundamenta nos princípios do Ensino de Matemática crítica e reflexiva, em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que orientam o desenvolvimento de habilidades voltadas ao pensamento geométrico, à resolução de problemas e à argumentação matemática, a Figura 13 ilustra como realizamos a leitura e a interpretação de habilidades da BNCC.

Figura 13 - Código de habilidades BNCC



Fonte: VELHO, Cecília Martinez (2023, p. 35).

No capítulo 4, essa fundamentação teórica é colocada em prática por meio da apresentação dos planos de aula e das atividades desenvolvidas. Todos os planos são estruturados com base em habilidades específicas da BNCC.

Capítulo 4

ATIVIDADES DIDÁTICAS APLICADAS

Neste capítulo, apresentamos as atividades aplicadas em uma turma da terceira série do ensino médio, a fundamentação matemática de área, volume e capacidade que serão exploradas em aula estão embasadas nos capítulos anteriores.

4.1 Plano de aula de sequência didática

No terceiro ano do ensino médio, é comum que os conceitos geométricos sejam abordados com um olhar mais analítico e algébrico. Considerando que os conteúdos de área, conceitos básicos de poliedros como: arestas, vértices e faces; e planificações já haviam sido trabalhados de forma consistente ao longo da trajetória escolar dos estudantes, inclusive no próprio ano letivo, optamos por direcionar o foco principal da sequência didática aos conceitos de volume e capacidade.

Ainda assim, foi necessário revisitar de forma pontual e estratégica alguns conhecimentos prévios, fórmulas específicas de área, conceitos de planificação e conceitos básicos de poliedros, como dito serão apenas citados como introdução, com o objetivo de oferecer uma base de apoio para os novos conteúdos, partindo do pressuposto que os estudantes já estavam familiarizados com esses temas, permitindo assim que a proposta avançasse em direção às habilidades específicas relacionadas ao estudo do volume e da capacidade.

É importante destacar que nas descrições das habilidades nos planos de aula, constam sempre habilidades do ensino fundamental e também do ensino médio, justificamos esse fato, pois são habilidades que se relacionam de forma integral com as atividades propostas, contribuindo tanto para construção de novos conhecimentos quanto para o resgate de habilidades que estão em defasagem ao longo da trajetória escolar dos estudantes.

4.1.1 Aula 1: Conceitos teóricos

A aula focou em conceitos teóricos, fórmulas, cálculos e resoluções de problemas.

Habilidade da BNCC: (EF07MA30): Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares.

(EF08MA18): Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipientes em formato de bloco retangular.

(EF09MA19): Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e cilindros retos.

(EM13MAT309): Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais.

Objetivos: Compreender a ideia de volume e prismas, pirâmides, cilindros e cones por meio de exemplos práticos estabelecendo relações entre as fórmulas utilizadas e esses exemplos; e reconhecer a aplicação desses conceitos em diferentes contextos geométricos e situações do cotidiano.

Competências socioemocionais: Entusiasmo e assertividade.

Objetos de conhecimento: sólidos geométricos (prismas, pirâmides, cilindros e cones).

Duração: 2 aulas de 50 minutos cada.

Local: Sala de aula.

Organização dos estudantes: Agrupamento produtivo em grupos de até 6 estudantes.

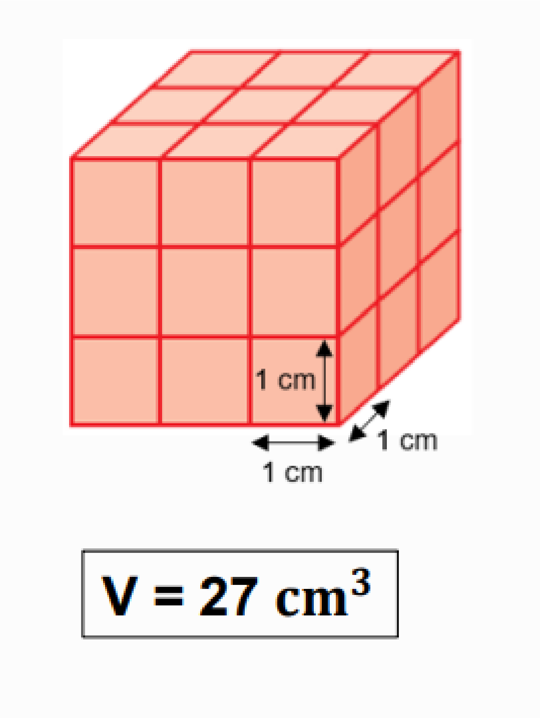
Recursos e materiais: Slides, lousa e folha de exercícios impressa.

Metodologia Ativa: Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) e agrupamento produtivo.

Desenvolvimento: Iniciamos a aula com o uso de slides, realizamos uma breve revisão sobre conceitos fundamentais sobre poliedros, como arestas, vértices e faces, e sua definição, e relembramos fórmulas usadas para cálculo de área.

A noção de volume foi introduzida a partir da ideia de preenchimento com cubos unitários. A figura 14 a seguir, presente no slide da aula, exemplifica quantos cubos de lado 1 cm são necessários para preencher um cubo com aresta de 3 cm.

Figura 14 – Quantidade de cubos que é preciso para preencher um poliedro



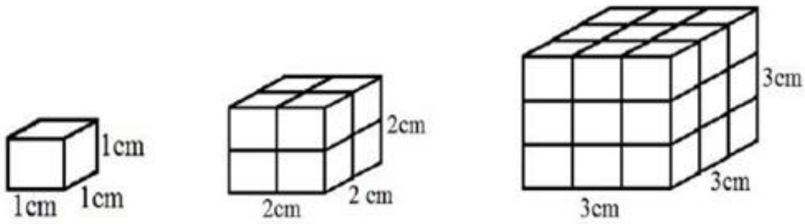
Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2024, p. 5

Com a análise dessa figura e outros exemplos com a intenção de que os estudantes concluam que é possível calcular o volume de um cubo ou paralelepípedo multiplicando as suas dimensões: comprimento x profundidade x altura. Essa compreensão será posteriormente estendida a outros poliedros.

Para instigar a curiosidade e promover a aplicação do conceito, os estudantes receberam uma folha com algumas questões. A primeira delas, retirada de uma prova do Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ), e adaptada apresenta a seguinte situação:

> A primeira figura representa um cubo de aresta 1 cm. Empilhando, como representado na segunda figura, oito cubos como aquele da primeira figura, podemos formar um cubo de aresta 2 cm. Da mesma maneira, empilhando, conforme a terceira figura, 27 cubos de aresta 1 cm, podemos formar um cubo de aresta 3 cm.

Figura 15 - Formação de cubos maiores a partir de cubos unitários

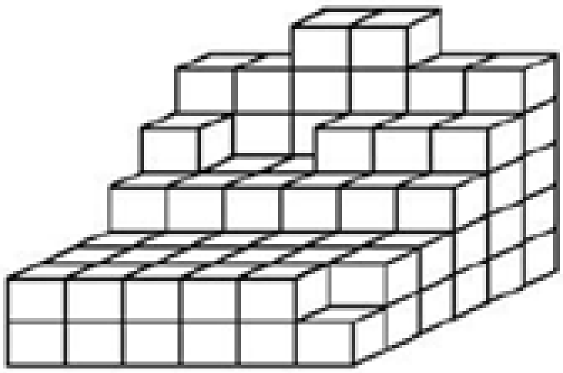


Fonte: CMRJ, s.d.

Na figura abaixo mostra parte de um cubo de aresta 6 cm que ainda não foi formado por completo.

Pergunta: Quantos cubos de aresta 1 cm ainda precisam ser empilhados para completar o cubo de aresta 6 cm?

Figura 16 - figura da questão para contagem de cubos unitários



Fonte: CMRJ, s.d.

Essa atividade tem o objetivo de reforçar a relação entre volume e potência cúbica, permitindo que os estudantes infiram que o volume de um cubo de aresta **a** é dado por **a³**, e consequentemente, compreendam de forma concreta o significado de volume em unidades cúbicas, a questão é respondida em grupo com debate e com a contagem manual e depois é feita uma socialização geral com os estudantes.

Os sólidos geométricos (prismas, pirâmides, cilindros e cones), utilizando slide e exemplos visuais para relembrar as características principais de cada sólido. Com os estudantes organizados em grupos de até seis integrantes para participarem da oficina prática.

Os demais conceitos de volumes foram apresentados nos slides sempre com demonstrações práticas das fórmulas a serem estudadas.

Os estudantes resolveram, em grupo, uma série de exercícios impressos, aplicando as fórmulas para calcular o volume dos sólidos estudados, com base em dados fornecidos ou medidos diretamente do material.

4.1.2 Aula 2: Aplicações práticas

Realizamos nesta aula, uma atividade prática por meio da metodologia de rotação por estações, na qual os estudantes puderam comprovar, na prática, as fórmulas estudadas em sala, explorar relações entre medidas e interagir entre si, trocando ideias e discutindo conhecimentos prévios com o objetivo de construir conclusões fundamentadas.

Habilidade da BNCC:(EF08MA17): Reconhecer a relação entre litro e decímetro cúbico, e entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade.

(EM13MAT309): Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais.

Objetivo: Relacionar o conceito de volume, trabalhado na aula anterior, com o conceito de capacidade, explicando a equivalência entre centímetros cúbicos (cm^3) e mililitros (ml), litro e decímetro cúbico. Além disso, proporcionar aos alunos uma compreensão prática das fórmulas utilizadas, aplicando-as no cálculo de volume e capacidade de diferentes sólidos geométricos.

Competências socioemocionais: Entusiasmo e assertividade, estimuladas por meio da cooperação em grupo, tomada de decisões e participação ativa nas estações experimentais.

Objetos de conhecimento: Sólidos geométricos (prismas, pirâmides, cilindros e cones).

Duração: 2 aulas de 50 minutos cada.

Local: Pátio da escola.

Organização dos estudantes: Agrupamento produtivo em grupos de até seis estudantes.

Recursos e materiais: Sólidos geométricos ocos confeccionados com papel cartão e materiais recicláveis, roteiro impresso do experimento, régua, copos medidores de água, arroz e notebooks.

Metodologia Ativa: Oficinas e Laboratórios Práticos, rotação por estações e agrupamento produtivo.

Desenvolvimento: Os estudantes foram organizados em grupos de até seis integrantes e receberam um roteiro impresso com a explicação a seguir. Cada grupo passou por três estações, em duas delas realizaram experimentos práticos, e na terceira realizaram questões em forma de quiz sobre o conteúdo.

Primeira estação: Na estação 1, foram disponibilizados pares de sólidos (pirâmides e prismas de mesma base e altura, cones e cilindros) para que os alunos verificassem a relação entre seus volumes.

A proposta consistia em encher as pirâmides e os cones com arroz até a borda e, em seguida, despejar esse conteúdo dentro dos prismas e cilindros correspondentes, observando quantas vezes era necessário encher o sólido menor para poder preencher o sólido maior. Com base nessa experiência, os estudantes respondiam às questões propostas no roteiro.

Figura 17 - Estação para demonstração das fórmulas de volumes

Fonte: Elaborado pelo autor

Como ilustra a Figura 17, os sólidos foram confeccionados previamente utilizando papel cartão e pastas de arquivo recicladas, permitindo a observação prática das relações entre os volumes. O roteiro entregue aos estudantes trazia as seguintes questões:

Estação 1 – Roteiro de perguntas:

1. Quantas vezes encheu a pirâmide ou cone para conseguir encher o prisma ou cilindro?
2. Qual a relação dessa quantidade de vezes com as fórmulas de volume estudadas em classe?
3. Faça uma conclusão sobre o experimento.

A figura 18 ilustra a aplicação da atividade prática, e como os estudantes se empenharam e participaram em grupos para conseguir chegar a uma conclusão do experimento.

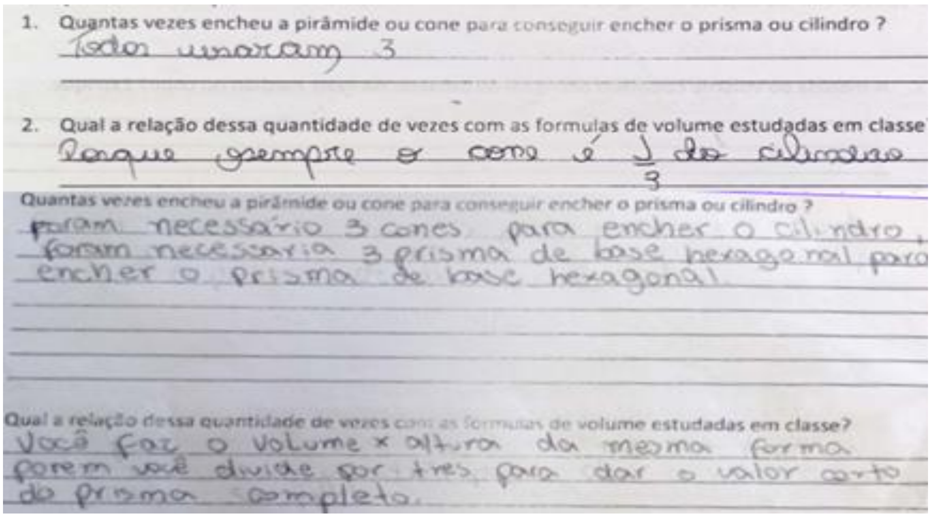
Figura 18 - Atividades práticas dos estudantes na estação

Fonte: elaborada pelo autor.

Durante as atividades, os alunos realizaram medições, realizaram os despejos dos sólidos menores nos maiores e discutiram em grupo suas observações. Um dos integrantes ficou responsável pelo preenchimento do roteiro com as respostas discutidas coletivamente.

A Figura 19 apresenta as respostas construídas pelos grupos durante as atividades realizadas na Estação 1.

Figura 19 – Registros de algumas respostas dos estudantes



1. Quantas vezes encheu a pirâmide ou cone para conseguir encher o prisma ou cilindro ?
Todos usaram 3
2. Qual a relação dessa quantidade de vezes com as formulas de volume estudadas em classe
Porque sempre o cone é $\frac{1}{3}$ do cilindro

Quantas vezes encheu a pirâmide ou cone para conseguir encher o prisma ou cilindro ?
foram necessário 3 cones para encher o cilindro, foram necessaria 3 prisma de base hexagonal para encher o prisma de base hexagonal.

Qual a relação dessa quantidade de vezes com as formulas de volume estudadas em classe?
Você faz o volume x altura da mesma forma porem você divide por tres para dar o valor certo do prisma completo.

Fonte: elaborada pelo autor.

Como evidenciado nas respostas apresentadas figura 19, os grupos conseguiram compreender e explicar, com suas próprias palavras, a relação entre os sólidos observados e a fórmula de volume estudada em sala. Chegaram à conclusão de que o volume da pirâmide corresponde a um terço do volume do prisma de mesma base e altura, assim como o cone em relação ao cilindro, validando de forma prática o conteúdo teórico previamente trabalhado.

Apesar da falta de rigor de alguns estudantes nas respostas dadas, ficou evidenciado o entendimento, ao perceber que foi necessário usar três pirâmides para encher um prisma de mesma base e altura. Percebemos que ficou clara a ideia de capacidade ligada à de volume, sendo compreendida como: um terço da capacidade do prisma é a capacidade de uma pirâmide de mesma base e altura, ele se reflete no cone e cilindro.

Essa diversidade de registros evidencia a apropriação gradual do conteúdo e demonstra como a prática pode superar dificuldades conceituais, promovendo uma compreensão mais sólida e integrada entre teoria e experiência. Isso reforça a visão de Lorenzato (2006, p. 19), ao afirmar que “é pela prática, pela experimentação, que o estudante tem a oportunidade de construir significados para os conceitos matemáticos, relacionando-os com situações reais e concretas”

Segunda estação: Nesta estação, o foco foi o desenvolvimento da habilidade de relacionar os conceitos de volume e capacidade. O experimento proposto consistiu na medição de prismas, pirâmides e cilindros para o cálculo do volume e, posteriormente, na comparação com sua capacidade real, utilizando água e copos medidores graduados em mililitros (ml) e litros (l), a figura 20 traz o funcionamento da estação:

Figura 20- Estação para comparar capacidade com ml e litros

Fonte: Elaborado pelo autor

Conforme mostramos na Figura 20, os objetos utilizados incluíram caixas vazias de leite, potes cilíndricos de creme para cabelo, embalagens reutilizadas e poliedros confeccionados com pastas de arquivo recicladas. Os estudantes, organizados em grupos, puderam escolher livremente os sólidos para a atividade. Em seguida, mediram suas dimensões com régua e calcularam o volume de cada figura, aplicando as fórmulas aprendidas em sala.

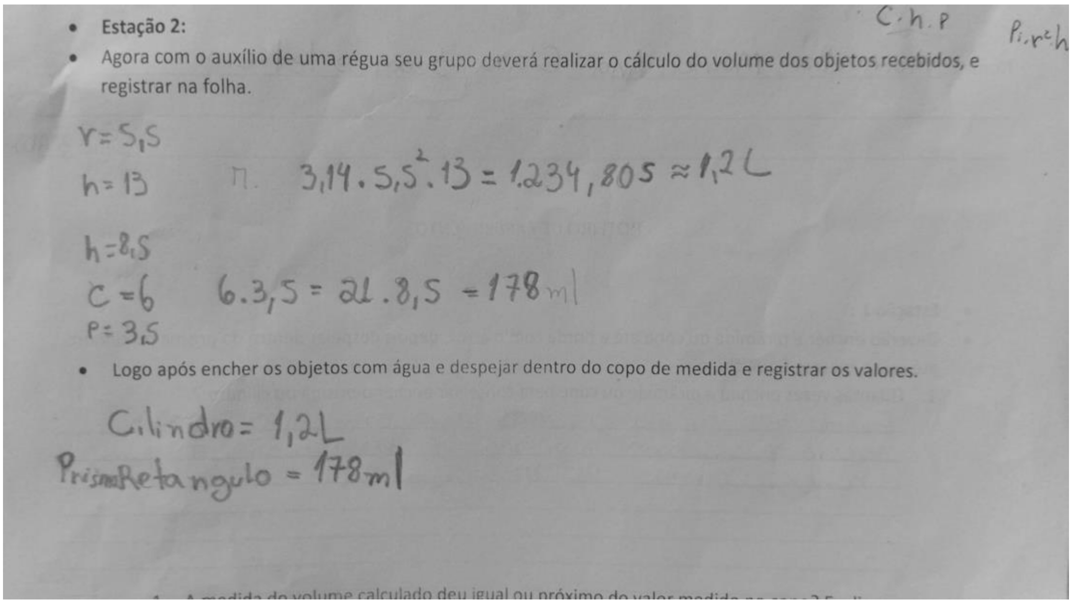
Após o cálculo do volume teórico (em centímetros cúbicos), os sólidos ocos foram preenchidos com água e o conteúdo foi transferido para copos medidores, isso possibilitou a verificação prática da correspondência entre os valores calculados e os volumes reais, considerando que 1 cm³ equivale a 1 ml.

Um integrante de cada grupo, previamente designado, ficou responsável por registrar no roteiro as respostas às seguintes questões:

1. A medida do volume calculado deu igual ou próximo do valor medido no copo? Explique.
2. Quais as conclusões do grupo?

Mas antes de responder as questões apresentadas os estudantes precisavam calcular no papel do roteiro de experimentos o volume e comparar com a medição nos copos medidores, a figura 21 traz o cálculo efetuado por um grupo de estudantes:

A figura 21 - Cálculo de um grupo de estudantes

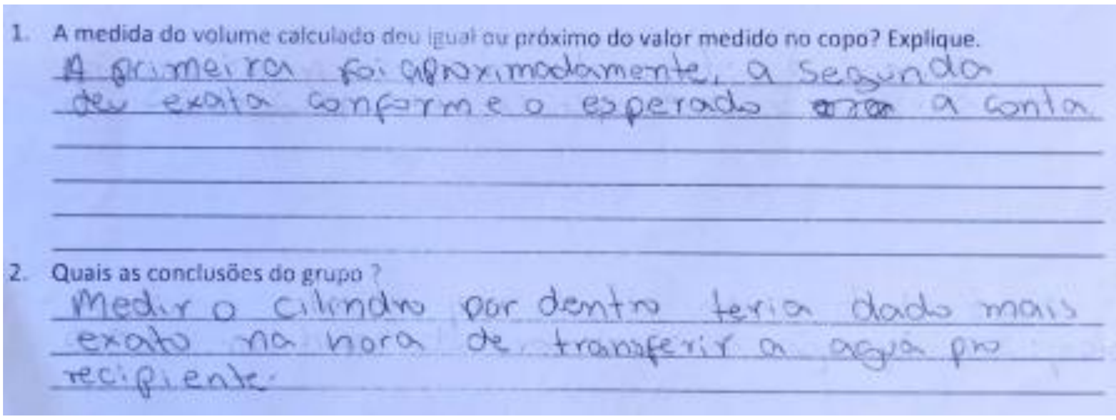


Fonte: Elabora pelo autor.

Conforme observamos na Figura 21, os estudantes conseguiram calcular corretamente os volumes e comparar com a capacidade medida. Obtiveram o volume de um cilindro de 1.234,80 cm³. Ao medir a capacidade com o copo graduado, verificaram que o resultado foi de aproximadamente 1,2 litros, evidenciando coerência entre os dados. O mesmo grupo realizou um segundo experimento com um prisma reto retângulo de dimensões 8,5 cm × 6 cm × 3,5 cm, obtendo 178 cm³, o que correspondeu exatamente a 178 ml de água.

Com esses resultados responderam as duas perguntas sugeridas no roteiro, que estão na figura 22:

Figura 22- Respostas no roteiro de atividade


1. A medida do volume calculado deu igual ou próximo do valor medido no copo? Explique.
A primeira foi aproximadamente, a segunda deu exata conforme o esperado ~~[illegible]~~ a conta

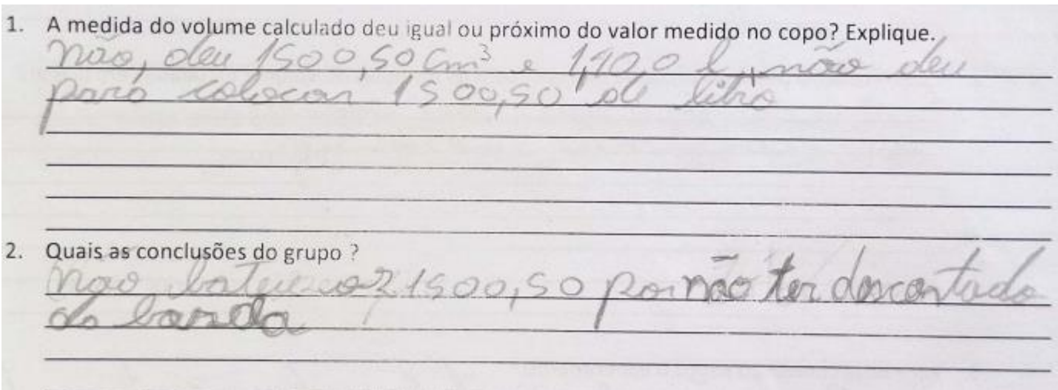
2. Quais as conclusões do grupo ?
Medir o cilindro por dentro teria dado mais exato na hora de transferir a água pro recipiente.

Fonte: Elabora pelo autor.

Durante o preenchimento do roteiro perceberam de forma investigativa que a medição interna do cilindro poderia gerar um resultado mais exato. Essa observação evidenciando o empenho dos estudantes e desejo de compreender o experimento com profundidade. Apesar de pequenas variações, os resultados obtidos foram bastante aproximados, validando, de forma prática, os conceitos estudados em sala de aula.

Estendemos essa análise para os demais estudantes do outro grupo participante, tiveram respostas bem aproximadas de seus cálculos, alguns com margens maiores de erro como:

Figura 23 – Respostas de outro grupo


1. A medida do volume calculado deu igual ou próximo do valor medido no copo? Explique.
não, deu 1500,50 cm³ e 1,40 l, não deu para colocar 1500,50 de litro

2. Quais as conclusões do grupo ?
não bateu os 1.500,50 por não ter decantado da borda

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 23, observamos que o grupo em questão calculou o volume de um sólido como sendo 1.500,50 cm³, mas ao realizar a medição prática com água, obteve um valor de apenas 1,4 litros. Em sua conclusão, os estudantes identificaram que o erro poderia estar relacionado ao fato de não terem descontado o volume ocupado pelas bordas internas do recipiente. Essa reflexão demonstra, mais uma vez, o desenvolvimento do pensamento investigativo promovido pela metodologia ativa adotada, que incentivou os estudantes a buscarem explicações para as discrepâncias encontradas, fortalecendo sua compreensão dos conceitos de volume e capacidade.

Os estudantes apresentaram diversas dificuldades nessa estação, principalmente nas medições realizadas. Alguns demonstraram dificuldade na movimentação e no manuseio dos objetos, assim como em identificar os valores nos recipientes medidores. No entanto, apesar dessas dificuldades, a maior parte dos estudantes mostrou versatilidade e interesse, além de se empolgar quando os cálculos realizados por eles coincidiram com a capacidade medida, o que gerou comemorações e maior empenho para que o experimento fosse realizado com sucesso.

Terceira estação: Nessa estação aplicamos a plataforma intitulada "Kahoot!", ela é uma plataforma de aprendizagem baseada em quiz de perguntas e respostas, com intuito de engajar estudantes e verificar a compreensão de forma interativa e dinâmica. Essencialmente, funcionando como um sistema de quiz, onde é previamente elaborada perguntas, que podem incluir texto, imagens ou vídeos, os estudantes respondem em dispositivos individuais como: smartphones, tablets ou computadores, a partir de um código de acesso. As respostas são cronometradas e pontuadas, criando um ambiente competitivo e divertido que incentiva a participação ativa. Ao final de cada questão e do quiz, a plataforma exibe um *ranking,* o que estimula o engajamento e oferece *feedback* imediato tanto para o aluno quanto para o professor sobre o nível de acerto da turma.

Os grupos participantes, utilizaram *notebooks*, para responderem em um quiz previamente preparado na plataforma, abordando conceitos básicos de área e questões aplicadas sobre volume e capacidade. Na Figura 24, é possível visualizar um exemplo de questão utilizada no quiz.

Figura 24 – Exemplo de questão do quiz aplicado na plataforma Kahoot!

Fonte: elaborado pelo autor.

Questão adaptada do Enem que demonstra conceitos simples de volume, que foi demonstrada por experimentos nas estações anteriores e estudada em aulas anteriores, a figura 25 ilustra o funcionamento da estação 3.

Figura 25 - Estação 3 – Quiz no Kahoot!

Fonte: elaborado pelo autor.

Com o intuito de estimular a competitividade e trazer problemas aplicados fora do usual de costume em sala de aula, como lápis e papel, essa estação serviu como um fechamento do experimento. Com os resultados obtidos vai ser possível analisar os principais conceitos de entendimento dos estudantes e ajudar a chegar em uma conclusão sobre a metodologia aplicada.

4.2 Olhar geral sobre a aplicação

A aplicação da rotação por estações foi realizada com uma sala da terceira série do ensino médio, onde pelo número reduzido de estudantes, a turma foi organizada em dois grupos: um composto por seis estudantes e outro por cinco. Enquanto um dos grupos realizava as atividades da primeira estação, o outro grupo participava simultaneamente da segunda estação.

A terceira estação onde foi aplicado o quiz com os notebooks disponíveis na escola. Nessa etapa, foi aplicado o quiz elaborado na plataforma *Kahoot*!, com questões voltadas aos conceitos abordados ao longo do experimento. Por se tratar de uma atividade interativa e individual, não foi necessário manter a divisão em grupos, o que facilita a coleta dos dados.

Todos os onze estudantes participaram das três estações, onde demonstraram empenho e interesse pelo que foi proposto, como a organização foi feita em pequenos grupos, facilitou o acompanhamento do trabalho dos estudantes e permitiu observar mais de perto a prática e a colaboração entre os participantes de cada grupo durante o desenvolvimento das estações.

No próximo capítulo, apresentaremos os resultados obtidos nas três estações das quais os estudantes participaram. Serão expostos os percentuais de acertos nas questões da Estação 3, bem como os relatos registrados nos roteiros de atividade, os quais descrevem as experiências vivenciadas pelos estudantes e as conclusões às quais chegaram ao final das atividades.

Capítulo 5

RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados obtidos foram coletados das três estações com respostas já comentadas dos estudantes, mas em especial da estação 3 onde foi utilizada o *Kahoot!*, pois com ela é possível quantificar acertos de questões em porcentagem de erros e acertos.

5.1 Resultados obtidos na estação 3

Os estudantes participaram de um quiz na plataforma *Kahoot!,* elaborado com base nos conceitos trabalhados anteriormente em aulas e aprofundados de maneira prática nas estações da rotação. A plataforma permitiu o registro automático do desempenho por questão, tornando possível a análise quantitativa e qualitativa de acertos e erros.

Nesta turma, que é composta de onze estudantes presentes para o experimento, na última estação do quiz na plataforma, as porcentagens de acertos estão descritos na figura 26 a seguir:

Figura 26 - porcentagem de acertos no total nas questões:

Fonte: Elaborado pelo autor.

Embora a média de acertos no quiz tenha sido de apenas 43%, esse resultado não deve ser interpretado como um fracasso, mas como um indicativo de que o processo de ensino-aprendizagem está em construção, é importante destacar que o quiz fez parte da própria metodologia ativa adotada, funcionando como uma ferramenta formativa e diagnóstica. Os erros observados, portanto, não representam necessariamente algo mal sucedido, mas pontos de atenção que podem ser trabalhados em etapas posteriores, é importante reforçar que a forma de coleta de dados foi feita em forma de quiz, onde há um tempo pré-estabelecido de até um minuto e meio para resolver as questões, isso faz com que alguns estudantes com mais dificuldades em cálculos simples mentais e a mão, acabem tendo mais dificuldades para resolvê-los.

Analisamos as questões de formas individuais como na figura 27, onde estão as onzes questões com maior porcentagem de acertos:

Figura 27 – Questões com maiores percentuais de acerto

12	Qual a área de um quadrado com um lado de 10 cm?	Quiz	36%
13	Qual é a área de um retângulo com 5 metros de largura e 8 metros de comprimento? Expresse o ...	Quiz	36%
1	Qual é volume de um cubo com arestas de cinco centímetros	Quiz	45%
5	(Enem-2010 - Adaptada) Uma fábrica produz barras de chocolate no formato de paralelepípedos, ...	Quiz	55%
11	Calcule a área de um trapézio cujas bases medem 6 cm e 8 cm e cuja altura mede 4 cm. Use a fór...	Quiz	55%
10	Calcule a área de um circulo cujo o raio mede 2 cm. Use π=3,14	Quiz	55%
16	Observe o aquário de Sabino e suas seguintes dimensões. Qual volume total em litros de água p...	Quiz	64%
6	Qual é o volume de um prisma retangular com o comprimento de 8 cm, 4 cm de largura e 12 cm ...	Quiz	64%
15	Um tanque d´água possui as seguintes dimensões conforme a figura abaixo. O volume total em ...	Quiz	73%
9	Calcule o volume de uma caixa de fósforos cujas dimensões são de 4,8 cm, 1,5 cm e 3, 4	Quiz	73%
8	Qual é a área de uma praça retangular, em que o comprimento é igual 70 m e sua altura 35,6m?	Quiz	91%

Fonte: Elaborada pelo autor

Observamos que os maiores percentuais de acertos ocorreram em perguntas que envolviam o cálculo de áreas e volumes com dados diretos, principalmente relacionadas a figuras geométricas mais familiares, como prismas e paralelepípedos. Por exemplo, a questão que pedia o cálculo do volume de um prisma retangular apresentou 73% de acerto, assim como o cálculo do volume de um tanque e de uma caixa de fósforos. A questão com maior acerto (91%) foi sobre a área de uma praça retangular, demonstrando que situações mais concretas e contextualizadas favorecem a compreensão dos estudantes.

Na figura 28, estão as cinco questões com os maiores percentuais de erros:

Figura 28 – Questões com maiores percentuais de erros

4	Numa cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será ap...	Quiz	0%
14	Um recipiente no formato de um cone, com raio 9cm. Qual a medida do volume desse recipiente ...	Quiz	0%
2	Qual é o volume de cubo com arestas de 4 cm?	Quiz	9%
7	A base de um triângulo mede 6 cm e a sua altura 8 cm. Calcule a área desse triângulo	Quiz	9%
3	Qual o volume de um cilindro com raio de base 6 metros e altura de 10 metros? Use π=3,1	Quiz	18%

Fonte: Elaborada pelo autor

Essas questões com maior índice de erro envolveram sólidos como o cone, pirâmides e cilindro, cujas fórmulas são menos utilizadas e exigem maior abstração. As duas questões com 0% de acerto, por exemplo, abordavam o volume de um cone e um problema contextualizado que exigia vários conceitos matemáticos prévios. Além disso, algumas questões com baixo desempenho envolviam mais etapas de cálculo ou textos mais longos, o que pode ter influenciado negativamente o desempenho dos estudantes, no tempo estipulado.

Organizados os dados por tipo de figura geométrica, percebemos que:

Prismas e paralelepípedos: apresentaram um melhor desempenho, com acertos entre 55% e 73%.

Cilindros e cones: foram os conteúdos com maior índice de erro, com acertos entre 0% e 18%.

Cubos: tiveram desempenho intermediário, com variações entre 9% e 45%.

Figuras planas: como quadrado, retângulo e trapézio, apresentaram resultados diversos, sendo o destaque a área de uma praça com 91% de acertos.

Questões contextualizadas com situações do cotidiano, como tanques, caixas e aquários, tiveram bons índices, demonstrando que os estudantes respondem melhor quando os conceitos são aplicados de forma prática.

Os resultados obtidos nessa estação revelam tanto os avanços quanto as lacunas de aprendizagem. Eles reforçam a importância de seguir investindo em metodologias ativas com problemas contextualizados.

5.2 Resultados obtidos nas outras estações

As outras estações também possuem uma contribuição importante para a observação do processo ensino-aprendizagem, observamos que os estudantes participaram de forma colaborativa e investigativa dos conceitos previamente estudados em sala de aula, realizando medições e explorando situações que envolviam diretamente as metodologias que foram propostas na pesquisa e se engajavam para chegar em resultados satisfatórios, promovendo discussões sobre o conteúdo.

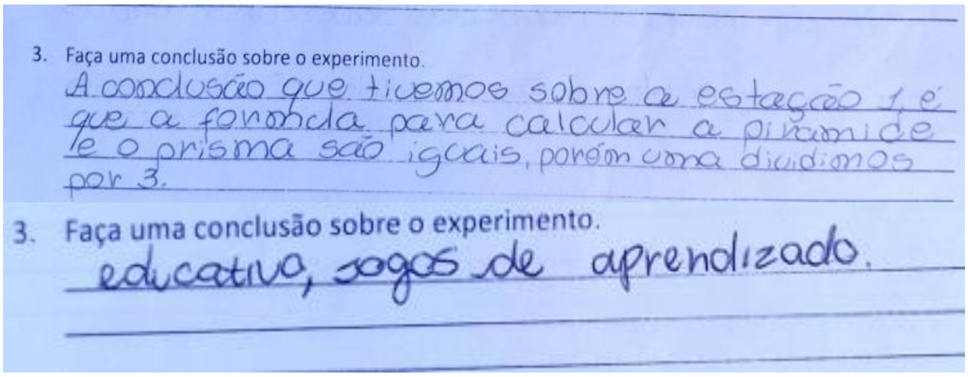
Na estação 1 onde o objetivo era que os estudantes chegassem à conclusão que o volume de uma pirâmide ou de um cone fosse exatamente um terço do volume de um prisma de mesma base ou de um cilindro de mesma base, todos os estudantes participantes chegaram a uma conclusão satisfatória.

Na estação 2 os estudantes chegaram em valores próximos ou em alguns casos até exatos nas medições de capacidade dos objetos fornecidos, aplicando as fórmulas de volume de maneira correta para que se fosse possível chegar a um resultado, quando não se tinha resultados próximos aos exatos, souberam justificar de forma coerente o erro nas medições ou até mesmo os valores obtidos por aproximações.

Os resultados observados nas estações 1 e 2, embora não quantificáveis como no quiz da estação 3, fornecem evidências importantes sobre o processo de construção do conhecimento. O ambiente de troca, manipulação e resolução de problemas práticos possibilitou aos estudantes a vivência de situações significativas, favorecendo a compreensão dos conceitos de forma mais aplicada. Esses momentos também serviram como base preparatória para a etapa final da sequência, na qual os conhecimentos foram postos à prova de forma mais objetiva, com os dados analisados no tópico anterior.

Uma forma de analisarmos também os resultados nas estações são as conclusões às quais os grupos chegaram, as conclusões da estação 1 dos estudantes estão na figura 29:

Figura 29 – Conclusão dos estudantes referente a estação 1


3. Faça uma conclusão sobre o experimento.
A conclusão que tivemos sobre a estação 1, é que a formula para calcular a piramide e o prisma são iguais, porém uma dividimos por 3.

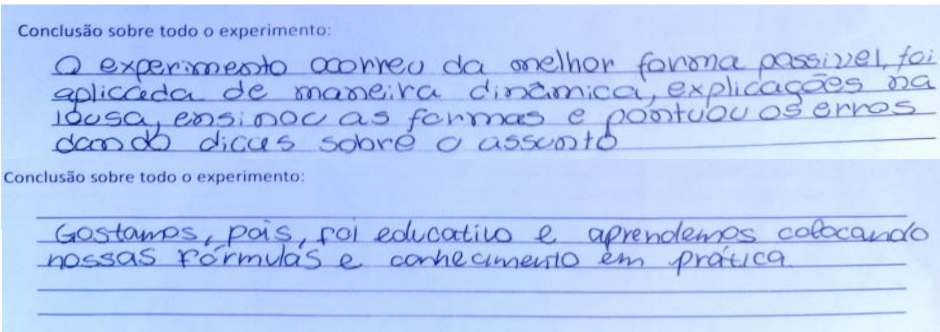
3. Faça uma conclusão sobre o experimento.
educativo, sogos de aprendizado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Conferimos que um dos grupos conseguiu identificar corretamente a relação entre as fórmulas de volume da pirâmide e do prisma, destacando que a fórmula é a mesma, mas dividida por 3 no caso da pirâmide. Já o outro grupo ressaltou o caráter educativo da atividade, reconhecendo que foi uma oportunidade significativa de aprendizado.

A figura 30 ilustra a conclusão geral dos estudantes sobre o experimento completo, envolvendo as três estações:

Figura 30 – Conclusão dos estudantes referente as três estações


Conclusão sobre todo o experimento:
O experimento ocorreu da melhor forma possivel, foi aplicada de maneira dinâmica, explicações na lousa, ensinando as formas e pontuou os erros dando dicas sobre o assunto

Conclusão sobre todo o experimento:
Gostamos, pois, foi educativo e aprendemos colocando nossas fórmulas e conhecimento em prática.

Fonte: Elaborada pelo autor

As conclusões apresentadas pelos grupos demonstram um engajamento com a atividade, mostrando a compreensão dos conceitos trabalhados e a aplicação prática das fórmulas estudadas previamente, relacionando teoria com a prática, reconhecendo a importância da metodologia ativa para o aprendizado.

Esse retorno positivo reforça o êxito das atividades propostas ao promover o interesse, a participação em grupo, a aplicação de conceitos e a manipulação de materiais concretos, contribuindo para o desenvolvimento da autonomia e do raciocínio matemático.

Um olhar mais quantitativo, com base em números concretos provenientes de resoluções de questões de avaliações externas, vestibulares e similares, não pôde ser adotado nesta pesquisa. Isso se deve à extensão do currículo, que contempla diversas habilidades e conteúdos matemáticos a serem resgatados em um tempo muitas vezes reduzido.

Entretanto, foi possível alcançar o principal resultado esperado: o engajamento e a participação ativa de todos os estudantes durante a realização das atividades propostas.

As considerações finais, a seguir, evidenciam os resultados obtidos ao longo da sequência didática e apresentam as reflexões e conclusões alcançadas com base em toda a experiência desenvolvida.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho consideramos que os estudantes se mostraram mais participativos e colaborativos nas atividades propostas. Podemos notar que, com a aplicação das metodologias ativas, estudantes que anteriormente demonstravam pouco engajamento e desmotivação passaram a apresentar atitudes mais positivas diante dos conceitos concretos e do trabalho em grupo. As atividades, sempre voltadas à investigação e à experimentação, resultaram em melhorias significativas no empenho e na participação dos estudantes.

A partir da fundamentação teórica, da revisão de literatura, da análise dos documentos curriculares (especialmente a BNCC) e da realização de atividades práticas com estudantes, constatamos que o uso de metodologias como a rotação por estações, oficinas práticas e o agrupamento produtivo contribuem de forma efetiva para o desenvolvimento do pensamento geométrico, da autonomia estudantil e da articulação entre teoria e prática.

Comprovamos, por meio da pesquisa, que ao envolver os estudantes em atividades investigativas, manipulativas e colaborativas, é possível superar parte das dificuldades historicamente presentes no ensino da geometria espacial, especialmente aquelas relacionadas à visualização e à compreensão conceitual de volume e capacidade. O uso de materiais concretos e de recursos tecnológicos também se mostrou essencial para ampliar as possibilidades de exploração e representação dos sólidos geométricos, favorecendo a construção de significados mais profundos e duradouros.

Observamos, com base nos dados obtidos nas estações e no quiz da plataforma Kahoot!, tanto avanços quanto lacunas no processo de aprendizagem. Apesar de o desempenho médio ter sido moderado, o objetivo de trazer engajamento, participação ativa e reflexões significativas por parte dos estudantes foi alcançado. As observações qualitativas demonstraram que compreenderam conceitos-chave, relacionaram teoria e prática e desenvolveram maior interesse pela matemática.

Ao longo da minha experiência profissional de mais de nove anos como professor do estado de São Paulo, comparando aulas ministradas de forma tradicional, onde são apenas expositivas, há pouca participação ativa, o engajamento dos estudantes é consideravelmente menor, e muitos se mostram desmotivados.

Com essa pesquisa, compreendemos a importância de romper com práticas tradicionalmente transmissivas, que ainda prevalecem em muitas salas de aula, e de investir na formação continuada dos professores, para que possam planejar, executar e refletir sobre propostas didáticas inovadoras, ancoradas na realidade dos estudantes e em seus contextos socioculturais. A aplicação das metodologias ativas exigiu um exercício constante de escuta, mediação e análise crítica, ampliando a compreensão sobre o papel docente e sobre o processo de ensino-aprendizagem em Matemática.

Concluímos, portanto, que as metodologias ativas aplicadas ao ensino da geometria espacial, com foco em volume e capacidade, apresentam grande potencial para tornar a matemática mais envolvente, compreensível e próxima da realidade dos estudantes. Essa experiência reforça a importância de um ensino centrado no estudante, que valoriza a experimentação, o diálogo e a construção coletiva do conhecimento. Esperamos que este trabalho possa contribuir com outros educadores na busca por práticas pedagógicas mais inovadoras, equitativas e eficazes.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO FILHO, Manoel Ferreira de. **Geometria euclidiana espacial**. 3. ed. Fortaleza: EdUECE, 2015.

BARBOSA, José de Souza. **Elementos de geometria**. São Paulo: Editora Moderna, 1994.

BARROWS, Howard S.; TAMBLYN, Robyn M**. Problem-based learning: an approach to medical education.** New York: Springer Publishing Company, 1980.

BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron**. Flip your classroom: reaching every student in every class every day**. Washington: International Society for Technology in Education, 2012.

BICUDO, Waldyr. **Os Elementos de Euclides: tradução e comentários**. São Paulo: EDUSP, 2009.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

BORBA, Marcelo C.; VILLARREAL, Mônica E**. *Educação matemática e tecnologias: repensando o currículo*.** Porto Alegre: Artmed, 2005.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular. Brasília**, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 18 de Abril. 2025.

CARMO, Regina Célia Grando do; MARTINEZ, Sônia Aparecida; MARTINEZ, Cláudia Lisete Oliveira Groenwald**. Educação matemática na escola básica: práticas e reflexões para a sala de aula.** Porto Alegre: Penso, 2024.

COSTA, Ana Cristina**. Aprendizagem ativa e oficinas pedagógicas**. Campinas: Papirus, 2020.

CURY, Helena N. **Geometria: do concreto ao simbólico**. São Paulo: Atual, 2005.

D'AMBROSIO, Ubiratan**. Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

DUVAL, Raymond. **Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagem intelectual**. Campinas: Papirus, 2003.

EUCLIDES. **Os Elementos. Tradução de Waldyr Bicudo**. São Paulo: EDUSP, 2009.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1997.

HORN, Michael B.; STAKER, Heather. **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na sala de aula.** Tradução de Daniel Lühmann. Porto Alegre: Penso, 2015.

LIMA, Osvaldo; CARVALHO, Benedito**. Geometria plana e espacial.** Rio de Janeiro: Ática, 1990.

LINS, Lúcia; GIMENEZ, Silvia. **Geometria no ensino básico: fundamentos e práticas.** Porto Alegre: Artmed, 1997.

LORENZATO, Sérgio. **O uso de materiais manipulativos no ensino da matemática.** Campinas: Autores Associados, 2006.

NASCIMENTO, A. P. **GeoGebra 3D e aprendizagem de geometria espacial: um estudo de caso.** Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Piauí, 2019.

NÓVOA, António Sampaio da. **Os professores e as reformas de ensino na viragem do século 1886-1906**. Lisboa: Educa, 1993.

OLIVEIRA, Rute; MIORIM, Maria Angela. **Geometria e tecnologias digitais: possibilidades de ensino e aprendizagem**. In: Revista Zetetiké, Campinas, v. 20, n. 1, p. 133–152, 2012.

PERRONNOUD, Charles. **Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PIAGET, Jean. **A formação do símbolo na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Marta; OLIVEIRA, Helena**. Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

SAVERY, John R. **Overview of problem-based learning: definitions and distinctions. The Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning**, v. 1, n. 1, p. 9-20, 2006. Disponível em: https://doi.org/10.7771/1541-5015.1002. Acesso em: 03 jun. 2025.

SÃO PAULO (Estado). **Resolução SEDUC nº 84**, de 25 de abril de 2024. Dispõe sobre a organização curricular da parte diversificada no Ensino Médio da Rede Estadual de Ensino. Disponível em: https://www.educacao.sp.gov.br/. Acesso em: 13 jul. 2025.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Unidades de medida**. São Paulo, 2024. Disponível em: https://acervocmsp.educacao.sp.gov.br/109114/695286.pdf. Acesso em: 03 jun. 2025.

SOUZA, S. R. de; DOURADO, L. F. **Ensino por investigação e metodologias ativas**. Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, v. 10, n. 1, p. 34-56, 2015.

VALENTE, José Armando. **Educação matemática: um enfoque construtivista**. São Paulo: Editora Cortez, 2014.

VAN DE WALLE, John A.; KARP, Karen S.; BAY-WILLIAMS, Jennifer M. **Elementos da matemática para o ensino fundamental: desenvolvendo o raciocínio e a compreensão.** Porto Alegre: Artmed, 2010.

VAN HIELE, Pierre e Dina**. *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*.** Academic Press, 1986. – Os níveis de conhecimentos geométricos os alunos do ensino médio – Francisco EF de Oliveira e Luciana de O. S, Mendonça – 2016

VELHO, Cecília Martinez. **Metodologias ativas no ensino de sistemas lineares no ensino fundamental.** 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2023.

VYGOTSKY, Lev S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores.** São Paulo: Martins Fontes, 1998.