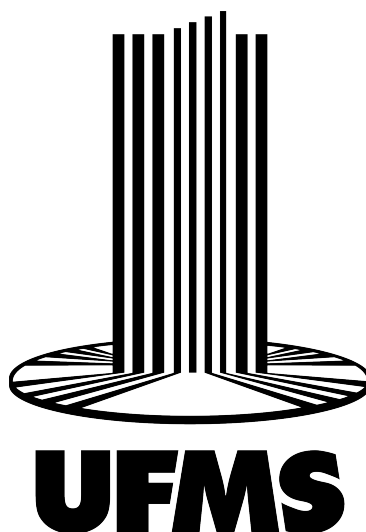


symbols letters  
[,left]1 1



---

2024

|                       |                                                     |
|-----------------------|-----------------------------------------------------|
| <b>Student Name:</b>  | Jonatas Santos Galvão                               |
| <b>Student ID:</b>    | 202019050185                                        |
| <b>Project Title:</b> | Fundamentos de Projeto de<br>Compensadores via LMIs |
| <b>Supervisor:</b>    | Victor Leonardo Yoshimura                           |

---

# COLLEGE OF COMPUTING

Federal University of Mato Grosso do Sul

# 1 Introduction

## Equações Diferenciais em SLIT-Cs

Nos SLIT-Cs, o comportamento do sistema pode ser descrito por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Essas equações relacionam a entrada do sistema  $x(t)$  com a saída  $y(t)$  e suas respectivas derivadas.

### Forma Geral da Equação Diferencial

A forma geral de uma equação diferencial que descreve um SLIT-C é:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (1)$$

onde:

- $y(t)$  é a saída do sistema.
- $x(t)$  é a entrada do sistema.
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  são os coeficientes da saída.
- $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$  são os coeficientes da entrada.
- $n$  e  $m$  são os maiores graus das derivadas da saída e da entrada, respectivamente.

Para garantir a causalidade, onde a saída em qualquer instante depende apenas da entrada presente e passada (e não da futura), é necessário que  $n \geq m$ . Isso implica que o grau do polinômio que representa a derivada da saída deve ser maior ou igual ao grau do polinômio que representa a derivada da entrada. Dessa forma, a função pode ser representada na forma de somatório:

$$\sum_{n=0}^i a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^j b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} \quad (2)$$

Nesta equação:

- $y(t)$  representa a saída do sistema, que é a função que queremos determinar.
- $u(t)$  representa a entrada do sistema, que é a função que excita ou controla o sistema.
- $\frac{d^k y(t)}{dt^k}$  são as derivadas de  $y(t)$  em relação ao tempo até a ordem  $n$ .
- $\frac{d^m u(t)}{dt^m}$  são as derivadas de  $u(t)$  em relação ao tempo até a ordem  $m$ .
- $a_k$  e  $b_m$  são coeficientes que podem depender do tempo  $t$ , da saída  $y(t)$  e da entrada  $u(t)$ .

A representação no espaço de estado é uma abordagem alternativa e poderosa para analisar e projetar Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT-Cs). Enquanto a representação por equações diferenciais e a função de transferência são úteis, a representação no espaço de estado oferece uma visão mais geral e pode lidar com sistemas de ordem superior de forma mais eficiente, além de ser mais adequada para análise e controle de sistemas multivariáveis (MIMO - Multiple Input Multiple Output).

## Representação no Espaço de Estado

Na representação no espaço de estado, um sistema SLIT-C é descrito por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. A dinâmica do sistema é capturada por duas equações:

### Equações do Espaço de Estado

Para um sistema com estado  $\mathbf{x}(t)$ , entrada  $\mathbf{u}(t)$  e saída  $\mathbf{y}(t)$ , as equações do espaço de estado são:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4)$$

onde:

- $\mathbf{x}(t)$  é o vetor de estado.
- $\mathbf{u}(t)$  é o vetor de entrada.
- $\mathbf{y}(t)$  é o vetor de saída.
- $\mathbf{A}$  é a matriz de estado.
- $\mathbf{B}$  é a matriz de entrada.
- $\mathbf{C}$  é a matriz de saída.
- $\mathbf{D}$  é a matriz de transmissão direta.

A representação no espaço de estado oferece uma maneira compacta e poderosa de modelar sistemas dinâmicos, especialmente aqueles que são de ordem superior (ou seja, com muitas variáveis de estado). Ela facilita a análise de estabilidade, controlabilidade e observabilidade do sistema. Aqui estão algumas propriedades importantes:

- **Controlabilidade:** Um sistema é controlável se, para qualquer estado inicial  $\mathbf{x}(0)$  e qualquer estado final desejado  $\mathbf{x}(t_f)$ , existe uma entrada  $\mathbf{u}(t)$  que leva o sistema de  $\mathbf{x}(0)$  a  $\mathbf{x}(t_f)$  em um tempo finito  $t_f$ .
- **Observabilidade:** Um sistema é observável se, a partir das saídas  $\mathbf{y}(t)$  ao longo do tempo, é possível determinar o estado interno  $\mathbf{x}(t)$ .

Essas propriedades são essenciais para a síntese de controladores e observadores, que são usados para regular o comportamento do sistema e estimar estados não medidos, respectivamente.

#### Exemplo:

Considere um sistema de segunda ordem, como um massa-mola-amortecedor:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = u(t) \quad (5)$$

Podemos representá-lo no espaço de estado como:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Então, as equações de estado e saída seriam:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (7)$$

Neste exemplo,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = [1 \ 0]$  e  $\mathbf{D} = 0$ .

## Estabilidade de SLIT-Cs por Lyapunov

A estabilidade em SLIT-Cs pode ser analisada utilizando o critério de estabilidade de Lyapunov. A teoria de Lyapunov fornece uma poderosa ferramenta para verificar a estabilidade de sistemas dinâmicos sem a necessidade de resolver explicitamente as equações diferenciais do sistema [3].

### Estabilidade de Lyapunov para SLIT-Cs

Considere um sistema linear invariante no tempo descrito no espaço de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (8)$$

### Função de Lyapunov

Para analisar a estabilidade deste sistema, definimos uma função de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$ , que é uma função escalar positiva definida e candidata a representar a "energia" do sistema. Uma função comum utilizada para sistemas lineares é a função quadrática:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (9)$$

onde  $\mathbf{P}$  é uma matriz simétrica positiva definida ( $\mathbf{P} \succ 0$ ).

### Critério de Estabilidade de Lyapunov

Para que o sistema seja estável por Lyapunov, a derivada de  $V(\mathbf{x})$  em relação ao tempo deve ser negativa definida ( $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ ). Calculamos a derivada total de  $V(\mathbf{x})$  ao longo do sistema:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \quad (10)$$

Substituindo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  na equação acima:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (11)$$

Simplificando, obtemos:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \quad (12)$$

Para que  $\dot{V}(\mathbf{x})$  seja negativa definida, a matriz  $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$  deve ser negativa definida ( $\mathbf{Q} < 0$ ).

## Resumo dos Passos

1. **Escolha de  $\mathbf{P}$ :** Selecione uma matriz simétrica positiva definida  $\mathbf{P}$ .
2. **Verificação de  $\mathbf{Q}$ :** Calcule  $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$ .
3. **Condição de Negatividade:** Verifique se  $\mathbf{Q}$  é negativa definida.

## Exemplo

Considere o sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Escolhemos  $\mathbf{P}$  como a matriz identidade para simplificação ( $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ ).

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

Para  $\mathbf{Q}$  ser negativa definida, seus autovalores devem ser negativos. Calculamos os autovalores de  $\mathbf{Q}$ :

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 1$$

As raízes desta equação quadrática fornecem os autovalores. Podemos verificar se eles são negativos usando o discriminante ( $b^2 - 4ac$ ):

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 36 - 4 = 32$$

Os autovalores são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = -3 \pm \sqrt{8}$$

Como ambos os autovalores têm partes reais negativas,  $\mathbf{Q}$  é negativa definida, indicando que o sistema é estável no sentido de Lyapunov.[2]

```
1 % Inclua os caminhos para YALMIP e SeDuMi
2 addpath('/path/to/yalmip');
3 addpath('/path/to/sedumi');
4
5 % Definindo parametros do sistema
6 m = 1;
7 c = 2;
8 k = 3;
9
10 % Matriz A do sistema massa-mola-amortecedor
11 A = [0 1; -k/m -c/m];
12
13 % Variavel de decisao P (matriz simetrica positiva definida)
```

```

14 P = sdpvar(2, 2);
15
16 % Restricao de Lyapunov: A'P + PA < 0
17 LMI = A'*P + P*A < 0;
18
19 % Restrições adicionais (P positivo definido)
20 F = [LMI, P > 0];
21
22 % Opções do solver
23 options = sdpsettings('solver', 'sedumi');
24
25 % Solução do problema
26 sol = optimize(F, [], options);
27
28 % Verificação da solução
29 if sol.problem == 0
30     disp('A matriz P encontrada :');
31     value(P)
32 else
33     disp('Problema na solução:');
34     sol.info
35 end

```

Listing 1: Exemplo por Lyapunov

## Controle via Realimentação de Estado

Para usar a teoria de Lyapunov na análise da estabilidade de um sistema realimentado, considera-se uma função de Lyapunov  $V(x)$ , que é uma função escalar de  $x$  com as seguintes propriedades[3]:

- $V(x)$  é positiva definida, ou seja,  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$  e  $V(0) = 0$ .
- A derivada de  $V(x)$  ao longo das trajetórias do sistema,  $\dot{V}(x)$ , é negativa definida, ou seja,  $\dot{V}(x) < 0$  para todo  $x \neq 0$ .

Uma escolha comum para a função de Lyapunov é uma função quadrática:

$$V(x) = x^T P x \quad (14)$$

onde  $P$  é uma matriz simétrica positiva definida. Agora, suponha que todos os elementos de  $X$  sejam lidos por sensores. O sinal de realimentação a ser usado será:

$$\mathbf{u} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = \mathbf{K}x \quad (15)$$

Sendo  $\mathbf{K}$  a determinar. Voltando ao Espaço de Estados tomando a equação (3), temos:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)\mathbf{K} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x}(t). \quad (16)$$

Com  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ , aplicando o método de Lyapunov, devemos encontrar uma matriz  $\mathbf{P} \succ 0$ , tal que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \prec 0 \quad (17)$$

para um cálculo ruim, temos:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} \prec 0 \quad (18)$$

cujos termos  $\mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}$  e  $\mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K}$  são produtos de variáveis, e, portanto, são termos não lineares. Logo, não se trata de uma **LMI**. Para realizar um cálculo adequado, usando o critério de Lyapunov e considerando (16), e levando em conta a comutatividade dos termos,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \prec 0$$

$$\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^T + \mathbf{P} \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \prec 0 \quad (19)$$

usando mudança de variável  $\mathbf{K} \mathbf{P} = \mathbf{W}$ . Note que,  $\mathbf{W}^T = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}^T = \mathbf{P} \mathbf{K}^T$ . Portanto (20) é linear.

$$\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{B}^T \prec 0 \quad (20)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

com  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ . Na realimentação de estados, isso implica projetar uma lei de controle da forma:

$$u(t) = \mathbf{K} x(t) \quad (23)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de ganho de realimentação de estado. A escolha apropriada de  $\mathbf{K}$  pode estabilizar o sistema. Portanto do cálculo ruim:

$$\begin{cases} \mathbf{P} \succ 0 \\ \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} \prec 0 \end{cases} \quad (24)$$

**Fato:** Toda matriz definida positiva é invertível. Além disso, é possível admitir que a inversa de uma matriz simétrica também é simétrica. Portanto, supondo a existência de  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{P}$  sendo simétrica, então  $\mathbf{P}^T$  também existe. Assumindo  $T = \mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{P}^{-1})^T$ , obtém-se:

$$\mathbf{P}^{-1} \underbrace{[\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K}]}_Q \mathbf{P}^{-1} \prec 0 \quad (25)$$

a expressão (25) não é uma *Lmi*, necessitando do seguinte tratamento matemático,

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \underbrace{\mathbf{P} \mathbf{P}^{-1}}_{\text{Identidade}} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \underbrace{\mathbf{P} \mathbf{P}^{-1}}_{\text{Identidade}} + \underbrace{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}}_{\text{Identidade}} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} + \underbrace{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}}_{\text{Identidade}} \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1} \prec 0$$

$$AP^{-1} + AP^{-1} + P^{-1}K^TB^T + BKP^{-1} \prec 0$$

definindo a mudança de variável em (26) e (27), temos,

$$P^{-1} = Q \quad (26)$$

$$KP^{-1} = KQ = WK = WQ^{-1} \quad (27)$$

**fato:** Sejam A e B matrizes de dimensões compatíveis, então  $(AB)^T = B^TA^T$ , com isto,  $(KP^{-1})^T = (P^{-1})^TK^T = P^{-1}K^T$ , assim:

$$P^{-1}A^T + AP^{-1} + W^TB^T + BW \prec 0 \quad (28)$$

Portanto, temos (29) como *LMIs*.

$$\begin{cases} Q \succ 0 \\ QA^T + AQ + W^TB^T + BW \prec 0 \end{cases} \quad (29)$$

```

1
2 % Inclua os caminhos para YALMIP e SeDuMi
3 addpath(genpath('C:\Users\jonat\Downloads\YALMIP-master'));
4 addpath('C:\Users\jonat\Downloads\sedumi-1.3.5');
5
6
7 % Definindo par metros do sistema
8 m = 1;
9 c = 2;
10 k = 3;
11
12 % Matriz A do sistema massa-mola-amortecedor
13 A = [0 1; -k/m -c/m];
14 B = [0; 1/m];
15
16 % Pequena tolerancia para simular inequa es estritas
17 epsilon = 1e-6;
18
19 % Vari veis de decis o
20 Q = sdpvar(2, 2);
21 W = sdpvar(1, 2);
22
23 % Restri es de Lyapunov para o sistema com realimenta o de
    estados
24 LMI = [Q >= 0
25 Q * A' + A * Q + W' * B' + B * W <= 0]
26
27 % Solu o do problema
28 sol = optimize(LMI, trace(Q));

```



```

29 % Verifica o da solu o
30 if sol.problem == 0
31     % Valores de Q e W encontrados
32     Q_value = value(Q)
33     W_value = value(W)
34
35     % Calculando P e K
36     P = inv(Q_value)
37     K = W_value * Q_value
38
39     disp('A matriz P encontrada :');
40     disp(P);
41     disp('O controlador K encontrado :');
42     disp(K);
43 else
44     disp('Problema na solu o:');
45     sol.info
46 end

```

Listing 2: Exemplo por Realimentação de Estados

cujo o resultado encontrado como mostrado abaixo:

```

1  1 :  -1.24E-01  3.21E+00  0.000  0.1900  0.9000  0.9000   1.67  1  1
2    2.1E+00
3  2 :  -3.75E-03  1.67E-01  0.000  0.0521  0.9900  0.9900   1.42  1  1
4    6.2E-01
5  3 :  -3.71E-05  1.67E-03  0.000  0.0100  0.9990  0.9990   1.02  1  1
6    2.1E-02
7  4 :  -3.46E-07  1.56E-05  0.000  0.0093  0.9990  0.9990   1.00  1  1
8    2.0E-04
9  5 :  -3.23E-09  1.46E-07  0.000  0.0093  0.9990  0.9990   1.00  1  1
10   1.8E-06
11  6 :  -3.01E-11  1.36E-09  0.000  0.0093  0.9990  0.9990   1.00  1  1
12   1.7E-08
13  7 :  -2.80E-13  1.27E-11  0.000  0.0093  0.9990  0.9990   1.00  1  1
14   1.6E-10
15
16 iter seconds digits          c*x          b*y
17 7         0.0  12.0  0.0000000000e+00 -2.7989507534e-13
18 |Ax-b| = 5.3e-12, [Ay-c]_+ = 1.9E-13, |x|= 1.6e+00, |y|= 2.8e
19 -01
20
21 Detailed timing (sec)
22 Pre IPM Post
23 1.283E-02 1.117E-01 2.615E-03
24 Max-norms: ||b||=1, ||c|| = 0,

```

```

17 Cholesky |add|=0, |skip| = 0, ||L.L|| = 1.0552.
18 Q_value =
19
20     1.3988e-13   -3.3118e-13
21    -3.3118e-13    1.4001e-13
22
23 W_value =
24
25    -3.8252e-13   -2.7833e-01
26
27 P =
28
29    -1.5540e+12   -3.6759e+12
30    -3.6759e+12   -1.5526e+12
31
32 K =
33
34     9.2179e-14   -3.8970e-14
35
36 A matriz P encontrada :
37    -1.5540e+12   -3.6759e+12
38    -3.6759e+12   -1.5526e+12
39 O controlador K encontrado :
40     9.2179e-14   -3.8970e-14
41 >>

```

## Análise de Estabilidade com Realimentação de Estado

**Lyapunov Discreta:**  $\overset{+}{x} = Ax$  é assintoticamente estável se  $\exists P \succ 0$ , tal que,

$$A^T P A - P \prec 0$$

$$P - A^T P A \succ 0$$

$$P - A^T P P^{-1} P A \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} P & PA \\ A^T P & P \end{bmatrix} \succ 0 \quad (30)$$

Neste contexto, como  $\overset{+}{x} = Ax + Bu$ ,  $u = Kx$ , então,  $\overset{+}{x} = (A + BK)x$ . Por Lyapunov temos  $P \succ 0$ , tal que,

$$(A + BK)^T P (A + BK) - P \prec 0$$

$$(A^T + K^T B^T) (PA + PBK) - P \prec 0$$

$$A^T PA + A^T PBK + K^T B^T PA + K^T B^T PBK - P \prec 0$$

partindo das seguintes observações iniciais:  $T = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$ ,  $P^{-1} = Q$ ,  $KQ = W$  e  $K = WQ^{-1}$ , com isso, podemos estabelecer que  $\begin{bmatrix} Q & AQ + BW \\ QA^T + W^T B^T & Q \end{bmatrix} \succ 0$ . Com essas ferramentas em mãos. Tomando (??) por complemento de Schur, temos:

$$\begin{bmatrix} P & P(A + BK) \\ (A + BK)^T P & P \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} I & A + BK \\ P^{-1}(A + BK)^T P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & (A + BK)P^{-1} \\ P^{-1}(A + BK)^T & P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0$$

Uma outra forma de garantir a estabilidade na equação de estado (??), bastando substituir a lei de controle  $u(t) = -Kx(t)$  [1], obtemos o sistema fechado:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (31)$$

precisamos encontrar uma matriz  $K$  tal que a matriz  $A - BK$  torne o sistema estável. Usando a função de Lyapunov, a derivada de (??) ao longo das trajetórias do sistema é:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} (x^T P x) = x^T \left( P(A - BK) + (A - BK)^T P \right) x \quad (32)$$

Para que o sistema seja estável, precisamos que  $\dot{V}(x)$  seja negativa definida. Isso implica que:

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P < 0 \quad (33)$$

Se for possível encontrar uma matriz  $P$  simétrica positiva definida que satisfaça essa equação para uma dada matriz  $K$ , então o sistema fechado é estável.

## 1.1 LMIs por Complemento de Schur

## 2 Norma $H_\infty$

A norma  $H_\infty$  é um conceito fundamental no controle de sistemas lineares, especialmente na teoria de robustez e na síntese de controladores robustos. Ela é usada para medir a resposta máxima de um sistema a entradas persistentes, sendo particularmente útil para analisar e projetar sistemas que devem manter desempenho adequado sob perturbações e incertezas.

## Definição de Norma $H_\infty$

Para um sistema linear invariante no tempo (LTI) descrito pela função de transferência  $G(s)$ , a norma  $H_\infty$  é definida como:

$$\|G\|_{H_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(G(j\omega)) \quad (34)$$

onde:

- $G(j\omega)$  é a função de transferência avaliada na frequência.
- $j\omega$  (frequência imaginária pura).
- $\sigma_{\max}(G(j\omega))$  é o maior valor singular de  $G(j\omega)$  para a frequência  $\omega$ .

## Interpretação Física

A norma  $H_\infty$  quantifica o ganho máximo do sistema, ou seja, ela mede o pior caso da amplificação de um sinal de entrada para um sinal de saída. Se considerarmos um sistema sujeito a uma entrada senoidal  $u(t) = A \sin(\omega t)$ , a norma  $H_\infty$  dá a amplificação máxima do sinal de saída em relação ao sinal de entrada para qualquer frequência  $\omega$ .

## Importância no Controle de Sistemas

1. **Robustez:** A norma  $H_\infty$  é crucial no design de controladores robustos, pois ela fornece uma medida para garantir que o sistema mantenha desempenho desejado mesmo na presença de incertezas ou perturbações.
2. **Desempenho:** No contexto de desempenho, minimizar a norma  $H_\infty$  implica em limitar a resposta do sistema às perturbações externas, melhorando assim a estabilidade e a performance do sistema controlado.
3. **Critério de Estabilidade:** Em muitos problemas de controle robusto, o critério de estabilidade e desempenho pode ser formulado em termos de minimizar a norma  $H_\infty$  de uma função de transferência fechada do sistema.

## Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

As LMIs são ferramentas matemáticas poderosas usadas para resolver problemas de otimização em controle, incluindo a minimização da norma  $H_\infty$ . A síntese de controladores  $H_\infty$  muitas vezes pode ser formulada como um problema de otimização sujeito a LMIs, que podem ser resolvidas eficientemente usando métodos numéricos.[4]

## Sistema Linear Invariante no Tempo (LTI)

Considere um sistema LTI descrito pelas equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2w(t) \\ y(t) = Cx(t) + D_1u(t) + D_2w(t) \end{cases} \quad (35)$$

onde:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado.
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saída.
- $A, B, C, D$  são matrizes de dimensões apropriadas.
- $u(t)$  entrada de controle.
- $w(t)$  entrada de perturbação.

A função de transferência  $G(s)$  do sistema é dada por:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (36)$$

Um operador  $\mathbf{X}$  em um espaço vetorial é *diagonalizável* se, e somente se, existe uma matriz invertível  $\mathbf{T}$ , tal que,

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T} \quad (37)$$

onde  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal cujas entradas são os autovalores de  $\mathbf{X}$ . Em alguns casos especiais, como em matrizes simétricas, pode-se ter

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}^T\mathbf{D}\mathbf{T}, \quad (38)$$

onde  $\mathbf{T}$  é uma matriz ortogonal ( $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ ).

Em  $(H_\infty)$ , consideramos a norma  $(H_\infty)$  da função de transferência do sistema, que é uma medida do pior ganho entre a entrada e a saída do sistema. Para uma matriz  $\mathbf{X}$  associada ao sistema, a decomposição em valores singulares (SVD) é dada por:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad (39)$$

onde:

- $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz ortogonal,
- $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz ortogonal,
- $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz diagonal cujas entradas  $\sigma_i$  são os valores singulares de  $\mathbf{X}$ .

consideremos a seguinte expressão:

$$x = L \sum m, \quad (40)$$

onde  $L$  representa a matriz  $\mathbf{\Sigma}$  dos valores singulares de (39) e a somatório se refere aos valores singulares de  $\mathbf{X}$ . Podemos reinterpretar essa expressão com mais clareza. Se  $L = \mathbf{\Sigma}$  e a soma  $\sum m$  representa a soma dos valores singulares  $\sigma_i$ , então (40) pode ser escrita como:

$$x = \sum_i \sigma_i, \quad (41)$$

onde  $\sigma_i$  são os valores singulares de  $\mathbf{X}$ .

Essa soma dos valores singulares pode estar relacionada à análise de desempenho do sistema no contexto de controle  $H_\infty$ . Portanto,  $\mathbf{X}$  é diagonalizável se existe uma matriz  $\mathbf{T}$  tal que  $\mathbf{X} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}$

(ou  $X = T^T D T$  para matrizes simétricas), onde  $D$  é diagonal. Em  $H_\infty$ , a decomposição em valores singulares de  $\mathbf{X}$  é  $X = U \Sigma V^T$ , e a soma dos valores singulares  $\sum_i \sigma_i$  pode representar uma medida de desempenho do sistema. Aplicando realimentação de estado, ( $u = Kx$ ) e considerando  $\sigma_1(w), \sigma_2(w), \sigma_3(w), \dots, \sigma_n(w)$ , temos,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_1 K) x(t) + B_2 w(t) \\ y(t) = (C + D_1 K) x(t) + D_2 w(t) \end{cases} \quad (42)$$

logo temos, as equações de estado por realimentação,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B_1 u(t) + B_2 w(t) \\ y(t) = C x(t) + D_1 u(t) + D_2 w(t) \end{cases} \quad (43)$$

e por fim, considerando a expressão,

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ A^T P + P A \prec 0 \end{cases}$$

podemos chegar a (??) que caracteriza melhor o vetor de estado.

$$\dot{v} + y^T y - \gamma^2 w^T w \prec 0 \quad (44)$$

Se  $\mathbf{X}$  em blocos e negativo definido, então  $\mathbf{X}_{1,1} \prec 0$ ,

$$A^T P + P A + C^T C \prec 0$$

$$C^T C \succeq 0$$

$$A^T P + P A \prec -C^T C \preceq 0 \rightarrow A^T P + P A \prec 0$$

$$-\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\underbrace{-\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix}}_{A_{schur}} - \underbrace{\begin{bmatrix} -C^T \\ -D^T \end{bmatrix}}_{B_{schur}} \underbrace{\mathbf{I}}_{C^T_{schur}} \begin{bmatrix} -C & -D \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} (+) A^T P + P A & (+) P B & (+) C^T \\ (+) B^T P & (-) \gamma^2 I & D^T \\ (+) C & (+) D & (-) I \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$$

## 2.1 Realimentação de Estado e $H_\infty$

Supondo inexistência de transmissão direta na planta ( $D_1 = 0$ ), faremos a transformação de congruência  $\text{diag}(P^{-1}, I, I)$ . Quando consideramos a inexistência de transmissão direta na planta, estamos assumindo que não há uma ligação direta entre a entrada de controle  $u(t)$  e a saída  $y(t)$ . Isso simplifica a análise do sistema. Usando a transformação de congruência que é uma técnica usada para manipular desigualdades matriciais lineares (LMIs) preservando a positividade definida das matrizes envolvidas. Consideremos uma transformação de congruência da forma  $\text{diag}(P^{-1}, I, I)$ , onde  $P$  é uma matriz de transformação e  $I$  é a matriz identidade.

Suponhamos que temos uma LMI genérica na forma  $X \succ 0$ :

Para aplicar a transformação de congruência, fazemos:

$$\text{diag}(P^{-1}, I, I) \begin{bmatrix} X & * & * \\ * & I & * \\ * & * & I \end{bmatrix} \text{diag}(P, I, I) \quad (45)$$

Esta transformação preserva a positividade definida da matriz  $X$ .

No contexto do controle  $H_\infty$ , frequentemente lidamos com sistemas lineares invariantes no tempo (LTI) descritos pelas equações de estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \quad (46)$$

$$z(t) = C_z x(t) + D_z u(t) + D_{zw} w(t) \quad (47)$$

- $x(t)$  é o vetor de estado,
- $u(t)$  é o vetor de controle,
- $w(t)$  é o vetor de distúrbios,
- $z(t)$  é o vetor de saídas de desempenho.

As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_w$ ,  $C_z$ ,  $D_z$ , e  $D_{zw}$  têm dimensões apropriadas. Aplicando realimentação de estados ( $u = kx$ ), temos,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{(A + BK)}_A x(t) + \underbrace{B_w}_B w(t) \\ y(t) = \underbrace{(C + D_z K)}_C x(t) + \underbrace{D_{zw}}_D w(t) \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + P A & * & * \\ B_w^T P & -I & * \\ C & D & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0 \end{cases}$$

substituindo,

$$\begin{bmatrix} (A + BK)^T P + P(A + BK) & * & * \\ B_w^T P & -I & * \\ (C + D_z K) & D_{zw} & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0$$

voltando a (??), temos,

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A+BK)^T P + P(A+BK) & * & * \\ B_w^T P & -I & * \\ C_z & D_{zw} & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \prec 0$$

por fim,

$$\begin{bmatrix} P^{-1}(A+BK)^T P + (A+BK) & B_w & P^{-1}C^T \\ B_w^T P & -I & D_{zw} \\ C_z & D_{zw} & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1}(A+BK)^T + (A+BK)P^{-1} & B_w & P^{-1}C^T \\ B_w^T P & -I & D_{zw} \\ C_z P^{-1} & D_{zw} & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0$$

### Aplicação no Controle $H_\infty$

No contexto do controle  $H_\infty$ , queremos encontrar uma matriz de ganho  $K$  que minimize o ganho  $H_\infty$  da função de transferência  $T_{zw}(s)$ , garantindo que:

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma \quad (49)$$

onde  $\gamma$  é um valor escalar especificado. A transformação de congruência é usada para simplificar as LMIs envolvidas na formulação desse problema. Para todas as frequências  $\omega$ :

$$\sigma_{\max}(G(j\omega)) < \gamma$$

ou equivalentemente:

$$G(j\omega)^* G(j\omega) < \gamma^2 I$$

### Derivação (outro método de formulação)

Para um sistema LTI, a função de transferência é:

$$G(s) = C(sI - A)^T B + D$$

Seja  $x(t)$  o vetor de estado do sistema. Consideramos a função de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$  onde  $P > 0$  é uma matriz positiva definida.

Para garantir a estabilidade e o desempenho  $H_\infty$ , precisamos que a derivada de  $V(x)$  ao longo das trajetórias do sistema seja negativa. A derivada de  $V(x)$  é dada por:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(x^T P x) = x^T \dot{P} x + 2x^T P \dot{x}$$

Substituindo  $\dot{x} = Ax + Bu$ :

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA)x + 2x^T P Bu$$



Queremos que  $\dot{V}(x)$  seja negativa e que a energia da saída  $y$  seja menor que  $\gamma$  vezes a energia da entrada  $u$ . Consideramos a seguinte inequação:

$$[\dot{V}(x) - \gamma^2 u^T u + y^T y] < 0$$

Substituindo  $y = Cx + Du$ :

$$[x^T(A^T P + PA)x + 2x^T P Bu - \gamma^2 u^T u + (Cx + Du)^T(Cx + Du)] < 0$$

Agrupando termos e escrevendo em forma matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & -\gamma^2 I + D^T D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} < 0$$

Esta desigualdade deve ser válida para todos os  $x$  e  $u$ , o que leva à LMI final:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & -\gamma^2 I + D^T D \end{bmatrix} < 0$$

Redefinindo  $\gamma$  como  $\gamma$  obtemos:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

## Solução

Para encontrar  $P$  e minimizar  $\gamma$ , usamos métodos numéricos de otimização de LMIs. Esta LMI pode ser resolvida utilizando pacotes de software como **Octave** como YALMIP ou SeDuMi, que são projetados para resolver problemas de otimização com LMIs.

## References

- [1] S. Boyd et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [2] R. J. Caverly and J. R. Forbes. *LMI Properties and Applications in Systems, Stability, and Control Theory*.
- [3] Pedro L. D. Peres and Ricardo C. L. F. Oliveira. *Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)*. 2024.
- [4] K. Zhou and J. C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. New York: Prentice Hall, 1998.