UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DO PANTANAL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

LUCCAS VINICIUS DA SILVA ARAÚJO

APROXIMAÇÃO GEOMÉTRICA DE ÁREAS SOB CURVAS UTILIZANDO O GEOGEBRA: UMA PROPOSTA ENVOLVENDO FUNÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

Corumbá, MS
Dezembro de 2024

LUCCAS VINICIUS DA SILVA ARAÚJO

APROXIMAÇÃO GEOMÉTRICA DE ÁREAS SOB CURVAS UTILIZANDO O GEOGEBRA: UMA PROPOSTA ENVOLVENDO FUNÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Campus do Pantanal.

Orientador: Dr. Osmar do Nascimento Souza
Coorientador: Dr. Wellington Piveta de Oliveira

Corumbá - MS
Dezembro de 2024

RESUMO

Este trabalho propõe uma abordagem inovadora para o ensino do cálculo de áreas sob curvas no Ensino Médio, sem recorrer diretamente à teoria de integral. A proposta utiliza métodos geométricos de aproximação, como o uso de retângulos e trapézios, e recursos tecnológicos, com o apoio do software GeoGebrapara obter as aproximações da área abaixo da curva $y = f(x)$. A presente proposta apresenta as funções $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$, definidas num intervalo $[a, b]$, cujo cálculo de áreas é feito por aproximação, por meio de divisões do intervalo em n subintervalos, permitindo que os alunos visualizem e discutam os possíveis erros envolvidos. A metodologia combina atividades práticas de cálculo manual com o GeoGebra, proporcionando uma análise comparativa entre os métodos de aproximação. Os alunos são incentivados a refletirem sobre a precisão das aproximações, vislumbrando por meio da abordagem que, quanto maior o número de número de divisões em retângulos e trapézios da área a ser calculada, mais próxima será a medida da área estimada por meio do ferramental tecnológico. Este trabalho não apenas desenvolve o raciocínio matemático, mas também estimula o uso de tecnologias no ensino de matemática, tornando o processo de aprendizagem mais dinâmico e engajador. A conclusão destaca a importância das aproximações geométricas no cálculo de áreas, introduzindo os alunos para o estudo de somas de Riemann e integrais em etapas avançadas do processo de formação.

Palavras Chaves: Métodos de aproximação; GeoGebra; Ensino de Matemática; Cálculo de área.

ABSTRACT

This work proposes an innovative approach to teaching the calculation of areas under curves in high school without directly resorting to integral theory. The proposal uses geometric approximation methods, such as rectangles and trapezoids, along with technological resources supported by the GeoGebra software to obtain approximations of the area below the curve $y = f(x)$. The present proposal introduces the functions $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, and $f(x) = x^3$, defined over an interval $[a, b]$, where the area calculation is performed through approximation by dividing the interval into n subintervals. This allows students to visualize and discuss the potential errors involved. The methodology combines practical manual calculation activities with GeoGebra, providing a comparative analysis of approximation methods. Students are encouraged to reflect on the accuracy of the approximations, recognizing through this approach that the greater the number of divisions into rectangles and trapezoids of the area to be calculated, the closer the estimated area will be to the true value as calculated by technological tools. This work not only develops mathematical reasoning but also promotes the use of technologies in teaching mathematics, making the learning process more dynamic and engaging. The conclusion highlights the importance of geometric approximations in area calculation, introducing students to the study of Riemann sums and integrals in advanced stages of their education.

Keywords: Approximation Methods; GeoGebra; Mathematics Teaching; Area Calculation.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O cálculo de áreas sob curvas é essencial em várias disciplinas científicas e tecnológicas, sendo amplamente utilizado na física para medir trabalho e deslocamento, e na economia para avaliar crescimento acumulado ou lucro ao longo do tempo. Além dessas aplicações, o conceito de área é a base para o cálculo integral, fundamental em áreas como Engenharia e Ciência da Computação. Ensinar esse conceito no Ensino Médio, sem o uso diretamente de integrais, contribui significativamente para a formação dos alunos, introduzindo-os a ideias que poderão ser aprofundadas em estudos futuros.

Um dos grandes desafios no ensino de cálculo de áreas para alunos que ainda não aprenderam integração é encontrar abordagens que favoreçam a essência do conceito de área de forma acessível. Métodos geométricos simples, como a decomposição de áreas em formas familiares como retângulos e trapézios, são modos eficazes de apresentar esses conteúdos. Esse processo gradual ajuda os alunos a construíram uma compreensão sólida dos conceitos envolvidos, sem exigir as abstrações matemáticas antes de cálcular a Integral formalmente.

Os métodos geométricos usados para calcular áreas sem o uso do Cálculo Integral incluem a aproximação por retângulos e trapézios. O método dos retângulos, por exemplo, consiste em subdividir a região sob a curva em pequenos retângulos, somando suas áreas para obter uma estimativa do valor total da área. Já o método dos trapézios, que leva em consideração a inclinação da curva, proporciona uma aproximação mais precisa, o que torna a análise dos erros mais interessante e significativa para os alunos. Lopes (2013) destacou como essa aproximação, aplicada junto ao GeoGebra, pode ajudar os estudantes a desenvolverem uma intuição mais apurada sobre a relação entre a geometria e os números envolvidos.

O uso de ferramentas tecnológicas como o GeoGebra facilita esse processo ao permitir uma visualização dinâmica das aproximações, ajudando os alunos a melhor compreenderem como os diferentes métodos (retângulos e trapézios) se comportam. Conforme enfatizado por Lopes (2013), o GeoGebra oferece uma plataforma interativa em que os estudantes podem manipular gráficos e ajustar parâmetros em tempo real, permitindo-lhes observar os impactos das mudanças na precisão dos cálculos. Esse tipo de interação ajuda a consolidar o aprendizado, tornando o processo mais envolvente e promovendo uma reflexão mais profunda sobre os conceitos.

A proposta de aula apresentada neste trabalho busca explorar essas ideias de forma prática, com o objetivo de fornecer aos alunos uma compreensão inicial dos métodos geométricos para o cálculo de áreas sob curvas, utilizando as funções $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$. Ao aplicar os métodos de retângulos e trapézios no intervalo $[0, 1]$, os alunos serão incentivados a refletir sobre a precisão das aproximações, tanto manualmente quanto com o auxílio do GeoGebra. Como destacado por Sousa (2014), essa abordagem permite que os alunos compreendam a importância das aproximações geométricas no cálculo, preparando-os para conceitos mais avançados como a integral de Riemann.

Ao comparar a precisão dos diferentes métodos geométricos, os alunos desenvolvem o raciocínio crítico, aprendendo que nem sempre é possível encontrar, de imediato, um valor que representa a área calculada. O aumento do número de subdivisões refina as aproximações e aproxima o resultado da Soma de Riemann do valor da área, o que os ajuda a entender melhor a relação entre erros e precisão. Essa reflexão sobre os métodos geométricos, como o uso de retângulos e trapézios, prepara os alunos para o estudo das somas de Riemann e integrais definidas, conforme argumentado em estudos como os de Sousa (2014) e Lopes (2013), que mostram a relevância dessa abordagem para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

1.1 Objetivo Geral

Introduzir conceitos fundamentais de cálculo de áreas sob curvas por meio de abordagens geométricas e numéricas, sem o uso direto de métodos de integração, desenvolvendo a capacidade de visualização gráfica e análise de funções em estudantes, utilizando ferramentas tecnológicas como o GeoGebra para facilitar o entendimento dos conceitos.

1.2 Objetivos Específicos

Refletir sobre o ensino de cálculo de áreas a partir de algumas pesquisas.

Apresentar os métodos geométrico e tecnológicos para o cálculo de área

Desenvolver habilidades em ferramentas digitais ao usar o GeoGebra para verificar e comparar as aproximações de área, promovendo o uso de tecnologia no ensino de matemática.

CAPÍTULO 2

REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Ensino de Matemática por meio de Tecnologia Digitais

O uso de Tecnologias Digitais (TD) no ensino de matemática tem transformado significativamente o ambiente educacional. A integração de recursos digitais facilita a construção de conhecimento, promovendo uma aprendizagem mais interativa e significativa. O uso de ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra e quizzes interativos como o Kahoot, não apenas auxilia na compreensão dos conceitos matemáticos, mas também motiva os alunos, tornando as aulas mais dinâmicas e envolventes, Zanella (2019). A aplicação dessas tecnologias permite que os estudantes visualizem graficamente os conceitos e participem de atividades colaborativas, como a construção de gráficos de funções.

Outro aspecto relevante sobre o uso das TD é a capacidade de oferecer uma experiência de aprendizado adaptada às necessidades individuais dos alunos. A pesquisa de Zanella (2019) revela que, ao utilizar ferramentas como o GeoGebra, os estudantes conseguem visualizar de maneira mais clara o comportamento das funções estudadas em sala, o que os ajuda a relacionar os conceitos com as situações-problema discutidas anteriormente. Essa personalização do ensino não só melhora a compreensão dos conteúdos, mas também estimula a autonomia dos alunos, que podem explorar os recursos tecnológicos por conta própria.

O uso de recursos tecnológicos no ensino de matemática, porém, não está isento de desafios. Como ressaltado por Santos e Bittencourt (2018), apesar do crescente interesse por integrar tecnologia à sala de aula, muitos professores ainda enfrentam dificuldades em adaptar suas metodologias tradicionais. A simples inserção de ferramentas digitais não garante automaticamente uma mudança na prática docente. É necessário um planejamento cuidadoso e capacitação contínua dos professores para que as TD possam ser utilizadas de forma eficaz (Pereira, 2019).

Além disso, o uso de TD oferece oportunidades para criar ambientes de aprendizagem mais inclusivos e colaborativos. A implementação de tecnologias permite que os alunos se tornem protagonistas do seu processo de aprendizagem, promovendo a alfabetização científica e tecnológica. Dessa forma, a tecnologia vai além de ser apenas um recurso auxiliar, transformando-se em uma ferramenta que reestrutura o processo de ensino e aprendizagem de forma a integrar conhecimentos científicos, éticos e práticos.

No entanto, é fundamental que os professores sejam apoiados para superar os desafios técnicos e pedagógicos associados ao uso de TD. O uso eficaz dessas tecnologias no ensino de matemática está relacionado não apenas ao domínio das ferramentas, mas também à adoção de práticas pedagógicas que favorecem a construção ativa do conhecimento pelos alunos. As pesquisas apontam que atividades investigativas potencializam essas abordagens, incentivando os estudantes a explorar, questionar e compreender os conceitos matemáticos de forma mais autônoma e significativa. Nesse contexto, o papel do professor é o de mediador e facilitador, promovendo situações de aprendizagem em que as tecnologias sejam integradas de maneira colaborativa e alinhadas aos objetivos educacionais.

2.2 O software matemático GeoGebra

O GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica, desenvolvido originalmente por Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburg em 2001, e atualmente mantido pela GeoGebra GmbH. Ele foi projetado para integrar geometria, álgebra e cálculo em uma única plataforma, oferecendo recursos interativos que tornam o ensino e a aprendizagem de matemática mais acessíveis e dinâmicos (figura 2.1).

Figura 2.1: Tela inicial do software GeoGebra.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Neste trabalho, será utilizada a versão 6.0.803, que possui todas as funcionalidades necessárias para desenvolver as atividades propostas. A versão online do GeoGebra, disponível diretamente no navegador, também oferece suporte para as ferramentas essenciais, como construção de gráficos, cálculo de áreas aproximadas e manipulação de funções (figura 2.2). Essa flexibilidade permite que o software seja acessado de qualquer dispositivo com conexão à internet.

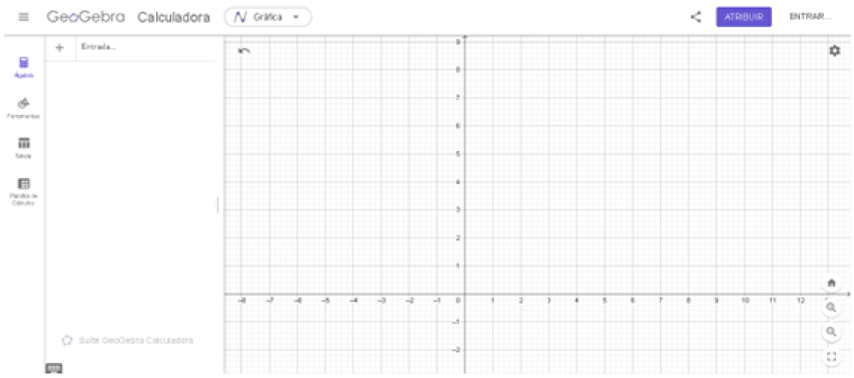

Figura 2.2: Interface do software GeoGebra online.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Além de seu grande potencial pedagógico, o GeoGebra se destaca como uma ferramenta eficaz na criação de ilustrações profissionais, podendo ser utilizado para produzir gráficos e figuras para documentos em Microsoft Word, Open Office ou LaTeX (Nascimento, 2012).

O GeoGebra pode ser baixado gratuitamente em seu site oficial (www.geogebra.org), disponível para sistemas operacionais como Windows, MacOS, Linux e também para dispositivos móveis (iOS e Android). Essa acessibilidade amplia seu potencial pedagógico, possibilitando sua utilização em sala de aula e em atividades remotas.

Ao utilizar o GeoGebra, os alunos têm a oportunidade de interagir de forma autônoma com os conteúdos abordados, promovendo um aprendizado mais visual e dinâmico. Essa interação favorece a experimentação de diferentes abordagens para resolver problemas, o que contribui para uma compreensão mais profunda dos conceitos. A manipulação visual dos elementos permite que os estudantes construam o conhecimento de maneira significativa e colaborativa, desenvolvendo, assim, habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas.

2.3 A Soma de Riemann

O somatório é uma notação matemática usada para representar a soma sucessiva de termos em uma sequência ou conjunto. Representado pelo símbolo $\sum$ (sigma, a 18ª letra do alfabeto grego), ele serve para simplificar a escrita de expressões matemáticas que envolvem somas repetitivas e permite que sejam expressas de forma compacta e padronizada. Em vez de listar cada termo individualmente, o somatório permite indicar uma soma de maneira geral, especialmente útil quando estamos lidando com grandes conjuntos de dados ou séries numéricas. Mais formalmente, define-se Somatório

$$\sum_{k=i}^{n} x_k = x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_{n-1} + x_n,$$

em que $i, n \in \mathbf{N}$, k é o índice do somatório, x_k é uma variável indexada que representa cada termo da soma, i é o limitante inferior e n é o limitante superior. A expressão "$k = i$" sob o símbolo de somatório indica que o índice k inicia com o valor i. Em seguida, o índice k é aumentado em uma unidade a cada termo seguinte, até atingir $k = n$. Quando o símbolo ∞ aparece acima do $\sum$, isso indica que os termos continuam infinitamente. (Finney et. al., 2002) Vejamos alguns exemplos na tabela 2.1.

A soma em notação sigma	A soma escrita	O valor da soma
$\sum_{k=1}^{6} k$	$1+2+3+4+5+6$	21
$\sum_{k=1}^{2} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2)$	$-1+2=1$
$\sum_{k=1}^{3} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=2}^{3} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{2^2}{2-1} + \frac{3^2}{3-1}$	$\frac{4}{1} + \frac{9}{2} = \frac{17}{2}$

Tabela 2.1: Exemplos de Notação Sigma

As somas de Riemann são construídas de um modo particular, em que desejamos encontrar uma área de uma região S, em que iniciamos traçando uma função contínua arbitrária $f(x)$ definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Em seguida dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos escolhendo $n - 1$ pontos, que podemos denotá-los por $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$, entre a e b, sujeitos apenas a condições de que

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b,$$

(Finney et. al., 2002). A partir desses subintervalos, podemos construir figuras geométricas, como retângulos e trapézios, que se ajustam à curva da função $f(x)$. Inicialmente, utilizaremos a aproximação por retângulos. Para isso, delimitamos a função em um intervalo específico e dividimos a área S desse intervalo em n retângulos de tamanho determinado. O exemplo a seguir foi fundamentado em Stewart (2006) em que demonstra esse procedimento.

Exemplo 1. *Use os retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de $x = 0$ até $x = 1$ (a região parabólica S ilustrada na Figura 2.3).*

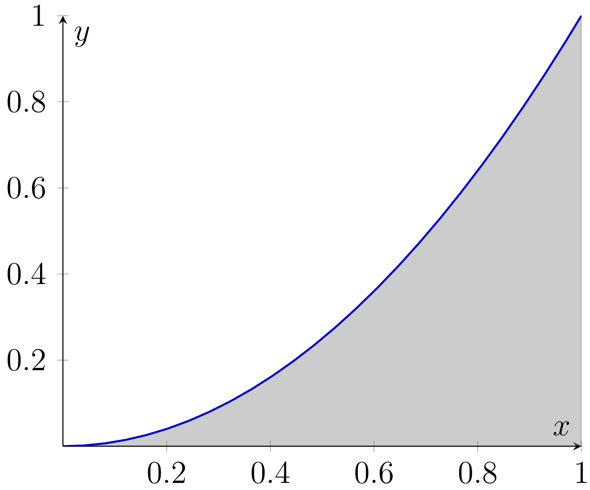

Figura 2.3: Gráfico da função $f(x) = x^2$ com a região destacada no intervalo $[0, 1]$.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Solução. *Primeiramente, observamos que a área da região S está compreendida no intervalo entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado de lado 1. No entanto, é possível obter uma estimativa mais precisa. Para isso, dividimos S em 5 sub-regiões, S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5, traçando as retas verticais nos pontos $x = \frac{1}{5}, x = \frac{2}{5}, x = \frac{3}{5}$ e $x = \frac{4}{5}$ conforme ilustrado na figura 2.4.*

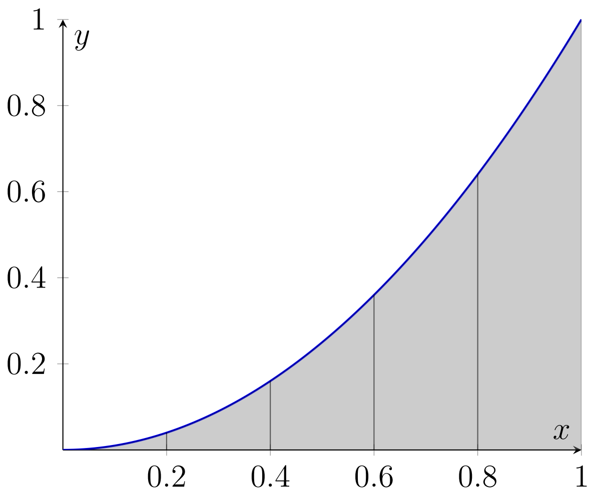

Figura 2.4: Gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$ dividida em 5 subintervalos.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa (Figura 2.5). Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nos extremos direitos dos subintervalos $\left[0, \frac{1}{5}\right]$, $\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$, $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$ e $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

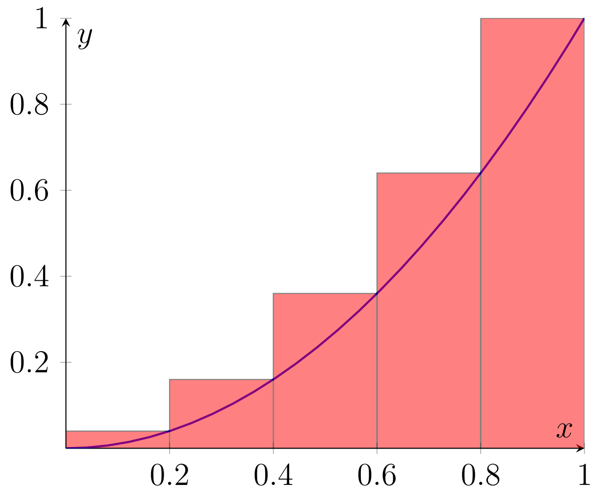

Figura 2.5: Gráfico da função $f(x) = x^2$ separada em 5 retângulos.
Fonte: Próprio Autor,2024.

Cada um dos retângulos tem largura Δ_x*, que corresponde a* $\dfrac{b-a}{n}$ *em que* a *e* b *são as extremidades do nosso intervalo e* n *a quantidade de subintervalos, neste caso* $\Delta_x = \dfrac{1}{5}$*. E as alturas são os valores que* $f(x_k)$ *assume quando* $x_k = a + k \cdot \Delta_x$*, em que* k *corresponde ao subintervalo escolhido e* $k < n$*, neste caso as alturas são* $\left(\frac{1}{5}\right)^2$*,* $\left(\frac{2}{5}\right)^2$*,* $\left(\frac{3}{5}\right)^2$*,* $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ *e* 1^2*.*

Seja A *a soma das áreas desses retângulos aproximantes; obteremos*

$$A = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot 1^2 = \frac{11}{25} = 0,44,$$

porém esta área não equivale à área de S*, pois aproxima dela superiormente. Alterando as alturas para que a aproximação seja inferior, obtemos um resultado bem diferente*

$$B = \frac{1}{5} \cdot (0)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{6}{25} = 0,24.$$

Assim obtivemos estimativas inferior e superior para a área da região S*:*

$$0,24 < S < 0,44$$

Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas. A tabela 2.2 mostra os resultados de cálculos similares usando n *retângulos cujas alturas são encontradas superiormente* A *e inferiormente* B*. Uma melhor estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números:* $S \approx 0,3333335$*.*

Definição 2.1. *A área* A *da região* S *que está sob o gráfico de uma função* f *definida no intervalo* $[a, b]$ *é o limite da soma das áreas*

$$A = \lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta_x$$

com $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}, x_k = a + k \cdot \Delta_x$

n	A	B
10	$0,2850000$	$0,3850000$
50	$0,3234000$	$0,3434000$
100	$0,3283500$	$0,3383500$
1000	$0,3328335$	$0,3338335$

Tabela 2.2: Aproximações da área de S

2.4 Área sob uma curva por meio de Trapézios

Um dos objetivos deste trabalho é apresentar o valor da área do intervalo de determinada região sob uma curva por um meio pouco utilizado, a aproximação por meio de trapézios. Neste subtópico iremos expor como foi o estudo sobre este método desde como encontrar a forma geral até exemplo de aplicação. Iniciamos com o que são áreas sob curvas, seguindo a Definição 2.1.

Já vimos como determinar a área da região R que está abaixo da curva $y = f(x)$ com $a \leq x \leq b$, então iremos encontrar agora um termo geral para a área.

Exemplo 2. *Vamos determinar a área abaixo da parabola $y = x^2$, para $x = 0$ até $x = 1$, calculando a soma da área de n retângulos.*

Iniciemos com $n = 3$, como mostrado na figura 2.6.

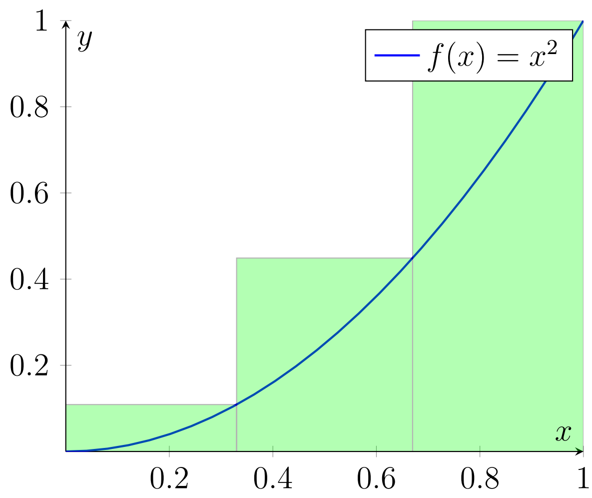

Figura 2.6: Gráfico da função $f(x) = x^2$ com $n = 3$ retângulos.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Como mostrado no tópico anterior, a aproximação por meio de retângulos é feita utilizando uma soma sucessiva desses retângulos pela fórmula da área $A = b \cdot h$, em que b é *o tamanho do subintervalo, neste caso* $\frac{1}{3}$*, e h são os pontos de* $f(x)$ *quando o* $x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3}$ *e* $x = \frac{3}{3}$.

$$\begin{aligned} Área &\approx \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{3}{3}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{1^2}{3^2} + \tfrac{2^2}{3^2} + \tfrac{3^2}{3^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{3^3} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) \\ &= \tfrac{1}{27} \cdot 14 \\ &= \tfrac{14}{27} \\ &= 0,52 \end{aligned}$$

Agora utilizando $n = 4$ *(figura 2.7).*

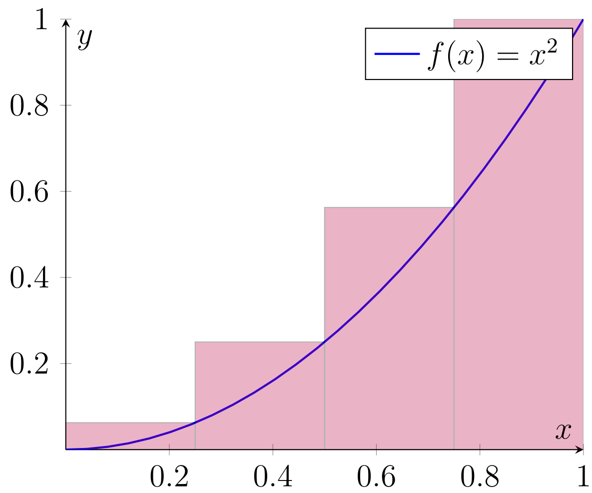

Figura 2.7: Gráfico da função $f(x) = x^2$ com $n = 4$ retângulos.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Para o caso de $n = 4$*, a nossa base ou subintervalo corresponde a* $\frac{1}{4}$ *e as alturas dos retângulos são os pontos de* $f(x)$ *quando* $x = \frac{1}{4}, x = \frac{2}{4}, x = \frac{3}{4}$ *e* $x = \frac{4}{4}$.

$$\begin{aligned} Área &\approx \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{2}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{4}{4}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1^2}{4^2} + \tfrac{2^2}{4^2} + \tfrac{3^2}{4^2} + \tfrac{4^2}{4^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{4^3} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right) \\ &= \tfrac{1}{64} \cdot 30 \\ &= \tfrac{30}{64} \\ &= 0,47 \end{aligned}$$

Observando o comportamento dos cálculos é possível visualizar um padrão, em que o valor da base é isolado $\frac{1}{n}$*, também é possível isolar o denominador ao quadrado das alturas* $\frac{1}{n^2}$ *e por fim é isolado a soma dos n primeiros termos ao quadrado, com* $n \in \mathbb{N}$*,*

$[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2]$.

Vejamos agora como se comporta com quando o nosso $n = 8$ retângulos (figura 2.8).

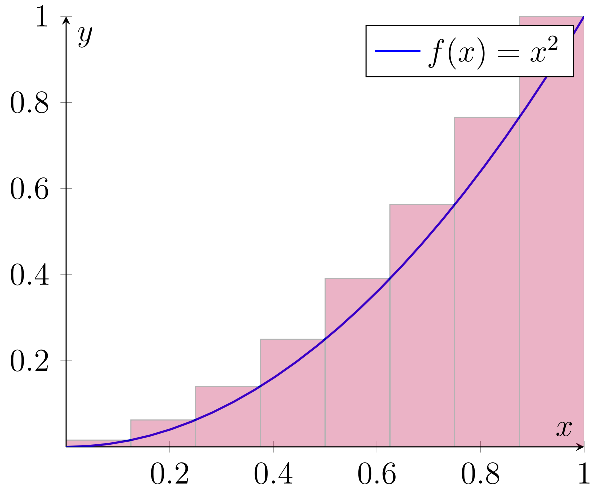

Figura 2.8: Gráfico da função $f(x) = x^2$ com $n = 8$ retângulos.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

$$\begin{aligned}
\text{Área} &\approx \tfrac{1}{8}\cdot\left(\tfrac{1}{8}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\cdot\left(\tfrac{2}{8}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\cdot\left(\tfrac{3}{8}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\cdot\left(\tfrac{4}{8}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\cdot\left(\tfrac{5}{8}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\cdot\left(\tfrac{6}{8}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\cdot\left(\tfrac{7}{8}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\cdot\left(\tfrac{8}{8}\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{8^3}\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2)
\end{aligned}$$

Sabendo que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$ *é igual a soma dos n primeiros termos ao quadrado, podemos fazer a substituição:*

$$\begin{aligned}
\text{Área} &\approx \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1),\ \textit{para}\ n = 8 \\
&= \frac{1}{8^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot 8\cdot(8+1)\cdot(2\cdot(8)+1) \\
&= \frac{1}{8^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 17 \\
&= \frac{153}{384} \\
&= 0,4
\end{aligned}$$

Agora, podemos utilizar essa fórmula geral para de um jeito mais simples encontrar valores mais altos para n retângulos.

Para $n = 16$ *retângulos:* $A \approx \frac{1}{16^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 17\cdot 33 \approx 0,37$.

Para $n = 32$ *retângulos:* $A \approx \frac{1}{32^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 33\cdot 65 \approx 0,35$.

Para $n = 64$ *retângulos:* $A \approx \frac{1}{64^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 65\cdot 129 \approx 0,34$.

Podemos simplificar a fórmula da área:

$$\begin{aligned} Área &\approx \tfrac{1}{n^2} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \\ &= \tfrac{1}{n^2} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot n \cdot \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \cdot n \cdot \left(2 + \tfrac{1}{n}\right) \\ &= \tfrac{1}{6} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \tfrac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos a área exata, abaixo da curva $y = x^2$ de $x = 0$ até $x = 1$.

$$Área = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

pois quanto mais n se aproxima do infinito, $\dfrac{1}{n}$ tende a 0.

A aproximação da área pela regra do trapézio, como a aproximação por meio de retângulos, é um método numérico utilizado para calcular a área da região sob o gráfico da função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$. O trapézio é uma figura geométrica com dois lados paralelos (a_1 e a_2) e uma altura h. No caso deste cálculo, os dois lados paralelos são os valores da função $f(x)$ em dois pontos consecutivos, e a altura é o tamanho do subintervalo h.

Vejamos como se comporta no exemplo anterior.

Exemplo 3. *Use os trapézios para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 e 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 2.9).*

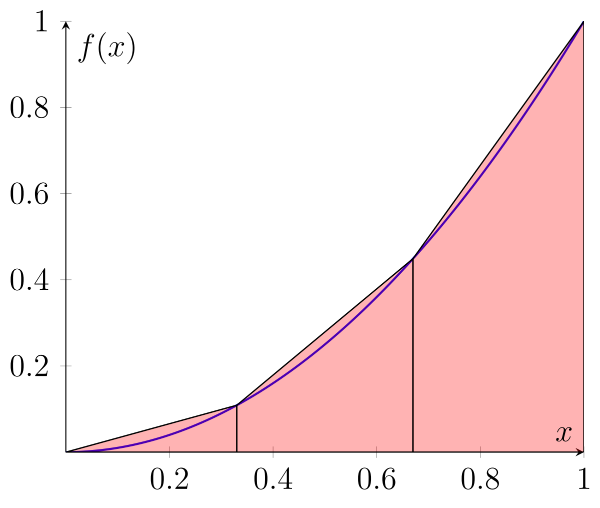

Figura 2.9: Gráfico da função $f(x) = x^2$ com $n = 3$ trapézios.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Para sabermos a área aproximada desta região por meio de trapézio, como em retângulos faremos uma soma sucessiva desses trapézios pela fórmula da área que é a média das bases multiplicada pela altura $\left(A = \dfrac{(B+b)}{2} \cdot h\right)$, em que h é o tamanho do subintervalo, b são os pontos de $f(x_i)$, B são os pontos de $f(x_{i+1})$, sendo i a posição do subintervalo do ponto.

$$\begin{aligned}
\text{Área} &\approx \left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{0^2}{3^2}+\tfrac{1^2}{3^2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)\right]+\left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1^2}{3^2}+\tfrac{2^2}{3^2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)\right]+\left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{2^2}{3^2}+\tfrac{3^2}{3^2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)\right]\\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\left[\left(\tfrac{0^2}{3^2}+\tfrac{1^2}{3^2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1^2}{3^2}+\tfrac{2^2}{3^2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{2^2}{3^2}+\tfrac{3^2}{3^2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)\right]\\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\left[\left(\tfrac{0^2}{3^2}+\tfrac{1^2}{3^2}\right)+\left(\tfrac{1^2}{3^2}+\tfrac{2^2}{3^2}\right)+\left(\tfrac{2^2}{3^2}+\tfrac{3^2}{3^2}\right)\right]\\
&= \tfrac{1}{6}\cdot\left(\tfrac{1}{9}+\tfrac{5}{9}+\tfrac{13}{9}\right)\\
&= \tfrac{19}{54}\\
&= 0,35
\end{aligned}$$

Ao compararmos o valor da aproximação por meio de trapézios com a por meio de retângulos, verificamos que, de início, para apenas 3 *trapézios a diferença é de* $0,17$ *para a mesma quantidade de retângulos. Vejamos, na figura 2.10, para* $n = 4$ *trapézios, para podermos comparar melhor.*

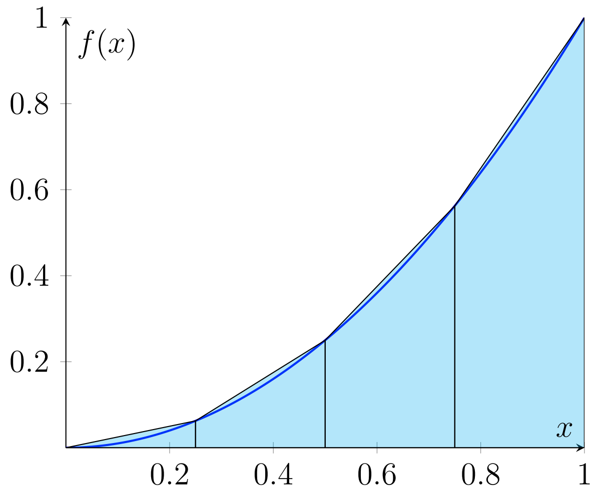

Figura 2.10: Gráfico da função $f(x) = x^2$ com $n = 4$ trapézios.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

$$\begin{aligned}
\text{Área} &\approx \tfrac{1}{2}\cdot\left[\left(\tfrac{0^2}{4^2}+\tfrac{1^2}{4^2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1^2}{4^2}+\tfrac{2^2}{4^2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{2^2}{4^2}+\tfrac{3^2}{4^2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{3^2}{4^2}+\tfrac{4^2}{4^2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)\right]\\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\left[\left(\tfrac{0^2}{4^2}+\tfrac{1^2}{4^2}\right)+\left(\tfrac{1^2}{4^2}+\tfrac{2^2}{4^2}\right)+\left(\tfrac{2^2}{4^2}+\tfrac{3^2}{4^2}\right)+\left(\tfrac{3^2}{4^2}+\tfrac{4^2}{4^2}\right)\right]\\
&= \tfrac{1}{8}\cdot\left(\tfrac{1}{16}+\tfrac{5}{16}+\tfrac{13}{16}+\tfrac{25}{16}\right)\\
&= \tfrac{31}{128}\\
&= 0,343
\end{aligned}$$

Observando o comportamento destes cálculos é possível notar outro padrão, em que o valor da média das bases é isolado $\dfrac{1}{2}$*, além da própria altura* $\dfrac{1}{n}$*. Notemos também que é possível encontrar novamente o somatório já citado* $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\right)$ *porém agora limitado superiormente não por* n*, mas sim por* $n-1$*.*

Vejamos, na figura 2.11, para $n = 8$ trapézios.

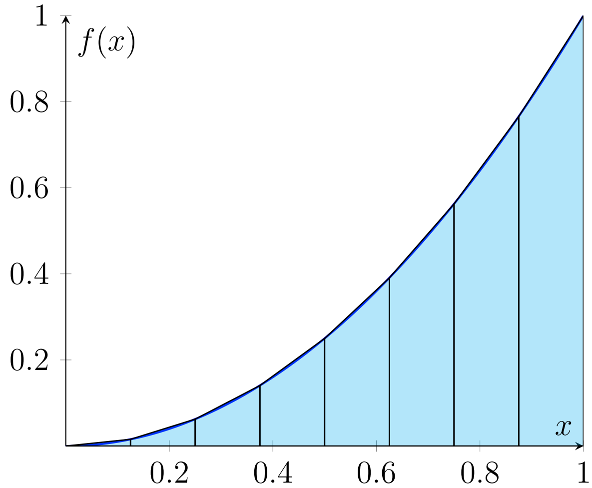

Figura 2.11: Gráfico da função $f(x) = x^2$ com $n = 8$ trapézios.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

$$
\begin{aligned}
\acute{A}rea &\approx \tfrac{1}{2n} \cdot \Big[f(x_0) + 2 \cdot (f(x_1)) + 2 \cdot (f(x_2)) + \cdots + 2 \cdot (f(x_{n-1})) + f(x_n)\Big] \\
&= \tfrac{1}{2\cdot 8} \cdot \Big[2 \cdot \Big(\tfrac{1^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{2^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{3^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{4^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{5^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{6^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{7^2}{8^2}\Big) + \tfrac{8^2}{8^2}\Big] \\
&= \tfrac{1}{16} \cdot \Big[2 \cdot \Big(\tfrac{1^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{2^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{3^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{4^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{5^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{6^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{7^2}{8^2}\Big) + 1\Big] \\
&= \tfrac{1}{16} \cdot \Big[2 \cdot \Big(\tfrac{1^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{2^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{3^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{4^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{5^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{6^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{7^2}{8^2}\Big)\Big] + \tfrac{1}{16}
\end{aligned}
$$

Podemos fazer a mesma substituição que já utilizamos anteriormente, isto é $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)$ *é igual a soma dos n primeiros termos ao quadrado, e obtemos para $n = 8$:*

$$
\begin{aligned}
\acute{A}rea &\approx \tfrac{1}{2\cdot 8} \cdot \Big[2 \cdot \Big(\tfrac{1^2}{8^2}\Big) + 2 \cdot \Big(\tfrac{2^2}{8^2}\Big) + \cdots + 2 \cdot \Big(\tfrac{(8-1)^2}{8^2}\Big)\Big] + \tfrac{1}{2\cdot 8} \\
&= \tfrac{1}{2\cdot 8} \cdot \tfrac{2}{8^2} \cdot \Big[1^2 + 2^2 + \cdots + (8-1)^2\Big] + \tfrac{1}{2\cdot 8} \\
&= \tfrac{1}{8^2} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \Big(8-1\Big) \cdot \Big(2 \cdot 8 - 1\Big) + \tfrac{1}{2\cdot 8} \\
&= \tfrac{1}{64} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot 7 \cdot 15 + \tfrac{1}{16} \\
&= \tfrac{35}{128} + \tfrac{1}{16} \\
&= \tfrac{43}{128} \\
&= 0,34
\end{aligned}
$$

Podemos aplicar essa fórmula geral para obtermos valores mais precisos para n trapézios:

Para $n = 16$ trapézios: Área $\approx \frac{1}{6\cdot 16^2} \cdot 15 \cdot 31 + \frac{1}{32} \approx 0.334$.

Para $n = 32$ trapézios: Área $\approx \frac{1}{6\cdot 32^2} \cdot 31 \cdot 63 + \frac{1}{64} \approx 0.333$.

Para $n = 64$ trapézios: Área $\approx \frac{1}{6\cdot 64^2} \cdot 63 \cdot 127 + \frac{1}{128} \approx 0.333$.

Em geral,para uma quantidade n qualquer de trapézios, obtemos a fórmula do cálculo da *área:*

$$\begin{aligned} \acute{A}rea &\approx \tfrac{1}{n^2}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\Big(n-1\Big)\cdot\Big(2n-1\Big)+\tfrac{1}{2n} \\ &= \tfrac{1}{n^2}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot n\cdot\Big(1-\tfrac{1}{n}\Big)\cdot n\cdot\Big(2-\tfrac{1}{n}\Big)+\tfrac{1}{2n} \\ &= \tfrac{1}{6}\cdot\Big(1-\tfrac{1}{n}\Big)\cdot\Big(2-\tfrac{1}{n}\Big)+\tfrac{1}{2n} \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos a área exata abaixo da curva $y = x^2$ de $x = 0$ até $x = 1$:

$$\acute{A}rea = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\cdot\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdot\Big(2-\frac{1}{n}\Big)+\frac{1}{2n} = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

pois quanto mais n se aproxima do infinito, a fração $\dfrac{1}{n}$ tende a 0, ou seja, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Podemos retornar à Tabela 2.2 e fazermos a comparação dos valores obtidos calculando as duas aproximações por meio de retângulos, tanto a superior quanto a inferior, com os valores encontrados com a aproximação por meio de trapézios. Além disso para que possamos entender melhor a aproximação por meio de retângulos podemos fazer a média dos valores encontrados como mostra a tabela 2.3 abaixo.

n	A	B	*Média*	*Trapézio*
10	$0,2850000$	$0,3850000$	$0,3350$	$0,3350$
50	$0,3234000$	$0,3434000$	$0,3334$	$0,3334$
100	$0,3283500$	$0,3383500$	$0,3333$	$0,3333$
1000	$0,3328335$	$0,3338335$	$0,3333$	$0,3333$

Tabela 2.3: Comparações das aproximações da área de S

Observemos que tanto a aproximação superior quanto a inferior por meio de retângulos com o intervalo n sendo igual a 10 ainda se distancia do valor exato da área sob a curva, de modo que para obter um valor mais aproximado precisamos calcular a média entre os valores. Já a aproximação por meio do trapézio fornece um valor próximo ao da área com $n = 10$. Retornando ao desenvolvimento do exemplo, vemos que a aproximação por meio de trapézios nos da o valor de $0,35$, bem próximo à área exata com $n = 3$ subintervalos.

Definição 2.2. *A área A sob o gráfico de uma função f, definida no intervalo $[a, b]$, pode ser aproximada pela soma das áreas dos trapézios formados pela divisão do intervalo em n partes de mesma largura. A fórmula para a Regra do Trapézio é dada por:*

$$A \approx \tfrac{b-a}{2\cdot n}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

sendo $x_0 = a$ e $x_n = b$ extremidades do intervalo; $x_0, x_1, \cdots, x_n$ pontos de divisão do intervalo; e $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ valores da função nos subintervalos.

Exemplo 4. *Uma fábrica está construindo uma peça com um design especial, e o volume de um material é calculado pela área da base que varia ao longo do comprimento da peça. O formato da área da base em cada ponto é modelado por* $f(x) = x^3$*, em que* x *é o comprimento em metros, no intervalo* $[0,2]$ *(figura 2.12).*

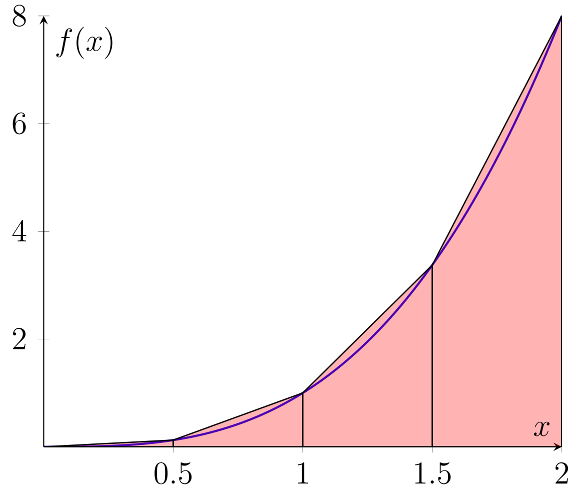

Figura 2.12: Gráfico da função $f(x) = x^3$ com a região destacada no intervalo $[0,2]$.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Aplicando a fórmula geral dada na definição 2.2, temos:

$$\begin{aligned}
Área &\approx \frac{2}{2\cdot 4}\cdot\left[0+2\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^3+2\cdot\left(\frac{4}{4}\right)^3+2\cdot\left(\frac{6}{4}\right)^3+\left(\frac{8}{4}\right)^3\right]\\
&= \frac{1}{4^4}\cdot\left(2\cdot 2^3+2\cdot 4^3+2\cdot 6^3+8^3\right)\\
&= \frac{1}{256}\cdot(16+128+432+512)\\
&= \frac{1088}{256}\\
&= \frac{17}{4}\\
&= 4,25
\end{aligned}$$

Ao analisar o comportamento desses cálculos, percebe-se novamente a identificação de um padrão. Observa-se que, assim como no caso anterior, é possível isolar o valor da média das bases e a altura. Além disso, nota-se que o somatório do cubo dos k *primeiros termos segue a relação* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$*. Nesse contexto, o limitante superior dessa relação não é dado por* n *mas sim por* $n-1$*, o que reforça o padrão previamente identificado.*

Assim podemos chegar à $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$.

Também é possível observar que ao dobrarmos o intervalo de $[0,1]$ *para* $[0,2]$ *os subintervalos de* $x_i = \frac{i}{n}$*, com* $i = 1,2,3,\cdots,n$*, é dobrado para* $2x_i = \frac{2i}{n}$*, com* $i =$

$1, 2, 3, \cdots, n$. *Então agora faremos a simplificação da fórmula da área para o intervalo* $[0, 2]$, *com* $f(x_i) = \left(\frac{2i}{n}\right)^3$*:*

$$
\begin{aligned}
\acute{A}rea &\approx \frac{b-a}{2n} \cdot \Big[f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big] \\
&= \frac{2}{2n} \cdot \Big[\frac{2^3 \cdot 0^3}{n^3} + 2 \cdot \frac{2^3 \cdot 1^3}{n^3} + 2 \cdot \frac{2^3 \cdot 2^3}{n^3} + \cdots + 2 \cdot \frac{2^3 \cdot (n-1)^3}{n^3} + \frac{2^3 \cdot n^3}{n^3}\Big] \\
&= \frac{1}{n} \cdot 2^3 \cdot \Big[0 + 2 \cdot \frac{1^3}{n^3} + 2 \cdot \frac{2^3}{n^3} + \cdots + 2 \cdot \frac{(n-1)^3}{n^3} + \frac{n^3}{n^3}\Big] \\
&= \frac{8}{n} \cdot \frac{2}{n^3} \cdot \Big[1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-2)^3 + (n-1)^3\Big] + \frac{8}{n} \\
&= \frac{16}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + \frac{8}{n} \\
&= \frac{16}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{4} + \frac{8}{n} \\
&= \frac{4}{n^2} \cdot (n-1)(n-1) + \frac{8}{n} \\
&= \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot n \cdot \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \frac{8}{n} \\
&= 4 \cdot \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \frac{8}{n}
\end{aligned}
$$

Fazendo $n \to \infty$, *obtemos a área exata abaixo da curva* $y = x^3$ *de* $x = 0$ *até* $x = 2$*:*

$$\acute{A}rea = \lim_{n \to \infty} 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{8}{n} = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

visto que quanto mais n *se aproxima do infinito,* $\dfrac{1}{n}$ *tende a* 0.

2.5 Trabalhos Relacionados

2.5.1 Cálculo: Uma Proposta para o Ensino Médio

Este trabalho é uma dissertação de mestrado produzida pela mestranda Kélia Rodrigues de Queiroz Souza, e publicado pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProfMat) da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) no ano de 2014. O mesmo, apresenta uma proposta de que é possível preparar o aluno do ensino médio das escolas públicas para o cálculo Integral por meio da introdução das ideias intuitivas de cálculo (Sousa, 2014).

O estudo considera que, embora o cálculo seja essencial em várias áreas do conhecimento científico e tecnológico, ele raramente é abordado em profundidade no ensino médio, o que pode causar lacunas na formação dos alunos ao ingressarem em cursos superiores. A autora do trabalho explora tópicos como limites, derivadas e integrais, destacando sua importância para a compreensão de fenômenos naturais e para a formação de habilidades matemáticas essenciais. O objetivo é permitir que os alunos desenvolvam uma base de conhecimento sólida, familiarizando-se com as noções e aplicações práticas do cálculo, o que pode facilitar o aprendizado em etapas mais avançadas e reduzir a taxa de evasão nos cursos de exatas no ensino superior.

O trabalho discute também o uso de recursos pedagógicos e a adequação dos conteúdos para essa faixa etária, propondo estratégias para tornar o ensino de cálculo mais acessível e engajante no contexto do ensino médio.

2.5.2 Aplicação no Ensino Médio da Soma de Riemann no Cálculo de Áreas

Este trabalho consiste na aplicação da proposta do cálculo de áreas sob curvas no ensino médio por meio da Soma de Riemann, voltado para uma turma do 2º ano. O objetivo da pesquisa é ensinar aos alunos a noção do conceito de área abaixo de uma curva e sua relevância nos estudos de matemática, introduzindo-os aos conceitos de limite e integral de forma acessível e prática, sem recorrer ao formalismo do cálculo integral.

O método de ensino é estruturado em etapas que promovem a construção gradual do conhecimento. A proposta inicia com uma revisão do cálculo de áreas de figuras planas, relembrando fórmulas básicas para que os alunos possam conectar o conteúdo novo a conceitos familiares (figura 2.13). Mais a diante, o foco se desloca para o cálculo de áreas delimitadas por gráficos de funções, utilizando a decomposição em retângulos como um método de aproximação, introduzindo assim a Soma de Riemann.

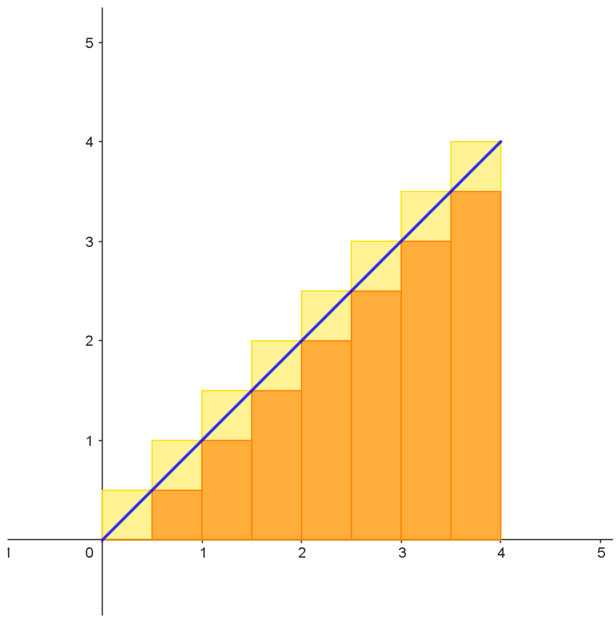

Figura 2.13: Aproximação por meio de retângulos de $f(x) = x$ no intervalo de [0,4] .
Fonte: Alves, S. B., 2013

Para tornar o processo mais dinâmico, o software GeoGebra é incorporado à proposta. Ele permite que os alunos visualizem a aproximação da área sob a curva e ajustem os retângulos que representam as subdivisões, facilitando a compreensão dos conceitos. Essa etapa com o GeoGebra facilita a compreensão dos conceitos, promovendo um aprendizado mais interativo e atraente.

Os resultados apontam que os alunos conseguiram compreender melhor o conceito de área sob curvas por meio dos métodos visuais e práticos, embora alguns tivessem dificuldades devido à falta de uma base sólida em matemática.

CAPÍTULO 3

ENCAMINHAMENTOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA PROPOSTA

Este trabalho apresenta uma proposta teórica de aula voltada para o ensino do cálculo de áreas sob curvas no ensino médio. O objetivo principal é explorar métodos geométricos para esse cálculo, sem recorrer a técnicas de integração formais. A proposta utiliza ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, e abordagens manuais, buscando promover a reflexão sobre a precisão dos diferentes métodos de aproximação. Além disso, incentiva o desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático por meio da análise comparativa de erros. A estrutura da proposta é dividida em etapas práticas e teóricas, visando proporcionar uma compreensão sólida dos conceitos trabalhados.

3.1 Primeira Etapa da proposta: Introdução

A primeira etapa da atividade será uma introdução ao conceito de cálculo de áreas sob curvas, sem utilizar métodos de integração. O objetivo é estimular o raciocínio dos alunos, levando-os a refletir sobre como podem abordar o problema usando ferramentas geométricas e métodos de aproximação.

A aula começará com uma breve explicação sobre a importância de calcular a área de região sob curvas $y = f(x)$ definidas em um intervalo $[a, b]$. Será destacado que esse cálculo é frequentemente utilizado para representar situações práticas, como a determinação de deslocamento em função da velocidade, o cálculo de trabalho em física, a análise de distribuições de probabilidade em estatística, e a avaliação de taxas de crescimento ou decrescimento em biologia e economia. Além disso, será discutido o que esse cálculo representa, enfatizando que ele fornece uma medida acumulada de valores ao longo de um intervalo, o que é essencial para compreender fenômenos contínuos em diferentes campos do conhecimento.. Serão apresentadas três funções: $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$, cujos gráficos serão construídos no quadro para promover a discussão. Os alunos serão desafiados a refletir sobre como essas áreas podem ser calculadas no intervalo $[0, 1]$, incentivando a identificação de aproximações baseadas em figuras geométricas elementares, como retângulos e trapézios.

Ao longo da aula, os alunos terão a oportunidade de experimentar e comparar as aproximações geométricas, discutindo como cada método se aproxima do valor real e quais são as limitações de cada abordagem. A ideia central é promover uma análise crítica, em que o erro será parte do processo de aprendizado, preparando os alunos para a introdução futura de métodos mais sofisticados de cálculo de áreas, como a soma de Riemann e a integral.

3.2 Segunda Etapa da proposta: função $f(x) = x$

A segunda etapa da atividade tem como objetivo demonstrar que a área sob a curva da função linear $f(x) = x$, no intervalo $[0, 1]$, pode ser calculada de forma direta utilizando a fórmula da área de um triângulo.

Essa função será apresentada aos alunos, que serão guiados a reconhecerem que sua área corresponde à de um triângulo, reforçando a decomposição em formas geométricas conhecidas. Esse exemplo inicial servirá para consolidar o conceito de decomposição de áreas e preparar os alunos para áreas delimitadas por funções mais sofisticadas.

Em seguida, será levantado o questionamento qual é a base e a altura desse triângulo formado pelo gráfico da função no intervalo, também será explicado que o tamanho desses valores dependerá do ponto em que é nos dado a função, e em sequência utilizar a fórmula da área do triângulo $\left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$, para calcular essa área, com base 1 e altura 1.

Podemos deduzir a fórmula da área de um triângulo do seguinte modo, dada a região triangular ABC, cuja área queremos determinar, traçamos paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, determinando o ponto D e a região limitada pelo paralelogramo $ABCD$ (figura 3.1). Consideremos a altura $\overline{AE}$ de medida h desse paralelogramo.

Se a medida de $\overline{BC}$ é b, então a área da região limitada pelo paralelogramo é bh. Mas as regiões triangulares ABC e ADC são congruentes. Logo, essas regiões triangulares têm áreas iguais.

Assim:

$$\text{área da região } ABCD = 2 \cdot (\text{área da região triangular } ABC)$$

ou

$$b \cdot h = 2 \cdot (\text{área da região triangular } ABC)$$

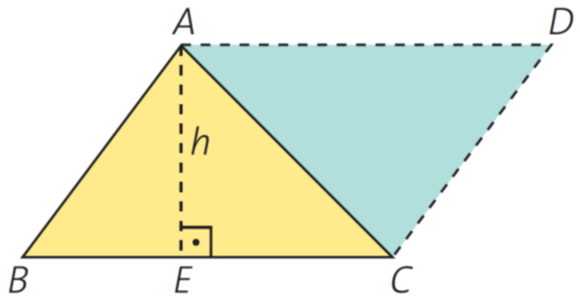

Figura 3.1: Paralelogramo $ABCD$
Fonte: Dante. L. R., 2013.

Portanto, área da região triangular $ABC = \dfrac{b \cdot h}{2}$.

A simplicidade do cálculo da área abaixo da curva da função $f(x) = x$ é um exemplo ideal para iniciar a aula, pois ajuda os alunos a se familiarizarem com a ideia de calcular áreas sob curvas usando métodos geométricos, sem recorrer à integral.

3.3 Terceira Etapa da proposta: função $f(x) = x^2$

Nesta etapa, a atividade pretende levar os alunos a compreender que o cálculo da área sob a curva de $f(x) = x^2$, no intervalo $[0, 1]$, não pode ser realizado diretamente por decomposição em figuras geométricas simples. Para estimular uma abordagem mais investigativa, será solicitado aos alunos que, com base no gráfico da função apresentado no quadro, reflitam e proponham métodos que possam aproximar essa área. Durante a discussão, eles serão incentivados a testar suas ideias e verificar os resultados obtidos. Caso necessário, o professor poderá intervir para orientar o raciocínio, introduzindo conceitos de aproximações utilizando retângulos e trapézios como ferramentas práticas para o cálculo.

Para que fique mais visível para os alunos como é feito esse cálculo, iremos iniciar uma atividade prática utilizando o GeoGebra, em que os alunos utilizarão a sequência de passos (Apêndice A) para construção da função no GeoGebra, do valor exato da integral, da aproximação por retângulos, além do erro desse cálculo, e começando com 3 retângulos (figura 3.2). Eles serão convidados a calcularem a área aproximada e anotar o erro em relação ao valor real da área sob a curva.

Após essa primeira tentativa, os alunos serão questionados sobre o que acontece com o erro se aumentarem o número de retângulos. Essa reflexão ajudará a consolidar a compreensão de que o aumento na quantidade de retângulos pode melhorar a precisão da aproximação.

Em seguida, será apresentada a utilização de retângulos para calcular a área aproximada manualmente, como mostrado anteriormente na definição 2.2, com 4 e 5 retângulos. Os alunos realizarão esses cálculos e compararão os resultados obtidos, discutindo as diferenças entre as aproximações e a área real. O foco da discussão será a análise dos erros em cada abordagem, permitindo que os alunos reflitam sobre a importância de aumentar o número de divisões para melhorar a precisão das aproximações.

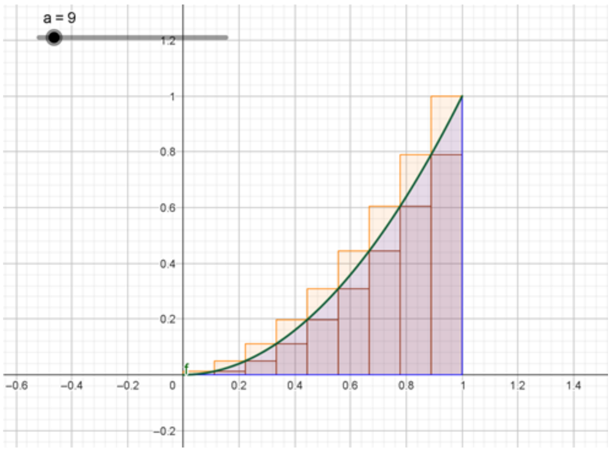

Figura 3.2: Aproximação por meio de retângulos da função $f(x) = x^2$, com $n = 9$ retângulos, pelo software GeoGebra.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Na sequência apresentaremos outro método para a aproximação utilizando os trapézios para calcular a área abaixo da curva (figura 3.3). Os alunos usarão novamente o GeoGebra para comparar a aproximação por trapézios como foi feito a por retângulos (Apêndice A). Também, como no método de aproximação por retângulos, faremos o cálculo manual pelo método de trapézios como apresentado no item 2.4, com 4 e 5 trapézios. Os alunos realizarão esses cálculos e compararão os resultados obtidos, discutindo as diferenças entre as aproximações e a área real.

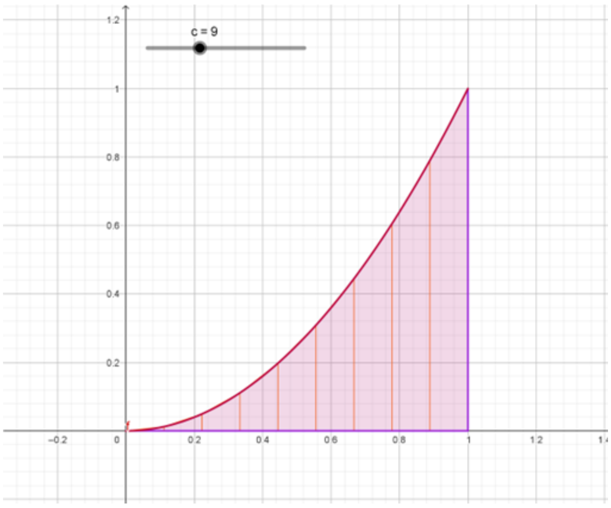

Figura 3.3: Aproximação por meio de trapézios da função $f(x) = x^2$, com $n = 9$ trapézios, pelo software GeoGebra.
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Ao final, a discussão será direcionada para a análise dos erros em cada abordagem, permitindo que os alunos reflitam sobre a importância de aumentar o número de divisões, seja com retângulos ou trapézios, para melhorar a precisão das aproximações.

3.4 Quarta Etapa da proposta: função $f(x) = x^3$

O objetivo desta etapa é propor aos alunos o cálculo da área sob a curva da função cúbica $f(x) = x^3$, com $0 \leq x \leq 1$ utilizando os métodos de retângulos e trapézios, com o auxílio do GeoGebra, e analisar os erros associados a cada método.

Para iniciar, retornaremos no gráfico da função $f(x) = x^3$ no intervalo $[0, 1]$, desenhado no início da atividade. Novamente realizaremos uma atividade prática no Geogebra, em que os alunos construirão, seguindo a sequência de passos (Apêndice B), o gráfico da função, a aproximação por meio de retângulos (figura 3.4) e também aproximação por meio de trapézios (figura 3.5), além do erro dessa aproximação. O valor exato da integral será informado aos alunos para que possam compará-lo com as aproximações obtidas. Durante essa atividade, será questionado aos alunos se o erro obtido nessa aproximação é maior ou menor do que no caso da função quadrática discutida anteriormente.

Figura 3.4: Aproximação por meio de retângulos da função $f(x) = x^3$ pelo software GeoGebra.

Fonte: Próprio Autor, 2024.

Após essa primeira análise, os alunos aplicarão o método dos trapézios para calcular a área sob a curva. Eles anotarão os resultados obtidos com este método e compararão os erros entre as aproximações feitas com retângulos e trapézios. Essa comparação permitirá que os alunos reflitam sobre qual dos dois métodos parece ser mais eficiente para a função cúbica.

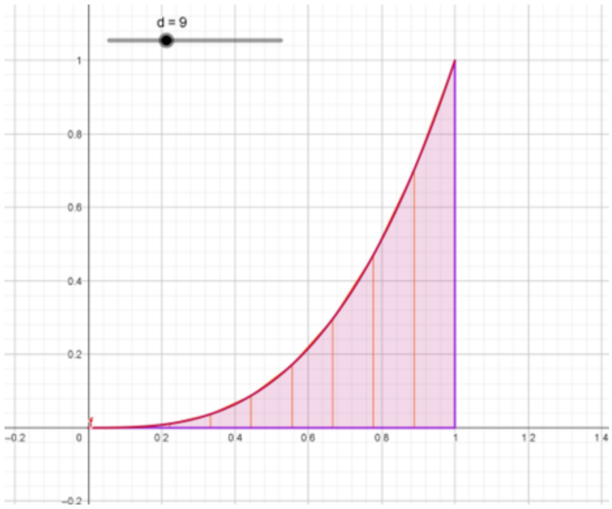

Figura 3.5: Aproximação por meio de trapézios da função $f(x) = x^3$ pelo software GeoGebra

Fonte: Próprio Autor, 2024.

Ao final, os alunos serão questionados sobre qual método (retângulos ou trapézios) melhor se aproxima do valor correto para essa função e por que isso acontece. Essa discussão final será crucial para consolidar o aprendizado, pois os alunos poderão analisar como as características da função cúbica impactam a precisão das diferentes aproximações e a importância de aumentar o número de divisões para reduzir os erros.

3.5 Quinta Etapa da proposta: Cálculo Manual com Somatório

A quinta etapa da atividade tem como objetivo aplicar a fórmula do trapézio manualmente, utilizando 4 e 5 trapézios, para demonstrar como esse método pode aproximar a área real sob uma curva. Para iniciar, será retomado o gráfico da função $f(x) = x^3$ no intervalo $[0, 1]$.

Será explicado aos estudantes que, após utilizarem o GeoGebra para visualizar a área sob a curva, agora trabalharão com o cálculo manual. Nesse contexto, a proposta é aplicar a fórmula do trapézio, como mostrada no item 2.4, para calcular a área, dividindo o intervalo $[0, 1]$ em 4 e 5 trapézios. A fórmula da área do trapézio será apresentada no quadro, a qual foi mostrada na Definição 2.2.

Os alunos começarão desenvolvendo o cálculo manual com 4 trapézios, dividindo o intervalo em três partes iguais e calculando as áreas dos trapézios correspondentes. Em seguida, repetir-se-á o cálculo com 5 trapézios, permitindo que os alunos comparem os resultados obtidos nas duas tentativas. Durante essa análise, serão questionados sobre o que podem observar em relação à precisão ao aumentar o número de trapézios, levando-os à conclusão de que quanto mais divisões, mais próximo do valor exato da área.

Ao final, a discussão será direcionada para a análise dos erros em cada abordagem, permitindo que os alunos reflitam sobre a importância de aumentar o número de divisões, seja com retângulos ou trapézios, para melhorar os resultados das aproximações.

3.6 Sexta Etapa da Proposta: Avaliação

A etapa final da atividade visa consolidar o aprendizado e discutir os principais conceitos abordados ao longo das aulas. Para isso, os resultados obtidos para as três funções trabalhadas serão resumidos, permitindo que os alunos façam uma revisão do que aprenderam.

Os alunos serão incentivados a refletir sobre os erros dos métodos utilizados e a precisão das aproximações realizadas. Para estimular essa reflexão, será proposto um questionário (Apêndice C) com perguntas que provoquem a discussão, como: "Qual método apresentou maior precisão nos cálculos: retângulos ou trapézios? Explique com base nos exemplos vistos em sala".

Essa atividade final será fundamental para garantir que os alunos internalizem o conteúdo aprendido e desenvolvam uma compreensão mais profunda das técnicas de cálculo de áreas sob curvas.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta uma proposta teórica inovadora para o ensino de áreas sob curvas no ensino médio, combinando métodos geométricos e tecnologias educacionais, como o GeoGebra. A proposta foi desenvolvida para abordar conceitos fundamentais, como a Soma de Riemann, de forma acessível e interativa, utilizando funções elementares, a saber $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, como base para um aprendizado gradativo. Essa abordagem permite aos alunos explorar a relação entre subdivisões e precisão, além de comparar erros nos métodos de aproximação por retângulos e trapézios.

Embora teórica, a proposta reflete um planejamento detalhado, com potencial para implementação em contextos escolares, ampliando a compreensão visual dos alunos e tornando o aprendizado mais significativo. O uso do GeoGebra se destaca como uma ferramenta essencial, promovendo dinamicidade e facilitando a visualização de conceitos abstratos. A proposta também incentiva a capacitação de professores no uso de tecnologias educacionais, evidenciando a necessidade de integrar práticas inovadoras ao currículo escolar.

O trabalho reforça a relevância de preparar os alunos para tópicos mais avançados, como integrais, de forma gradual e contextualizada, contribuindo para a construção de um ensino de matemática mais envolvente e alinhado às demandas contemporâneas. Além disso, destaca-se como uma contribuição relevante para tornar o ensino de conceitos matemáticos complexos mais acessível e eficiente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 ALVES, S. B., **Aplicação no Ensino Médio da Soma de Riemann no Cálculo de Áreas. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática)** - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2019.

2 DANTE, L. R., **Matemática: contexto e aplicações. 2. ed.** - Ática, São Paulo, 2013.

3 FINNEY, R. L.; WEIR, M. D.; GIORDANO, F. R., **Cálculo de George B. Thomas Jr. volume 1. 10 ed.** - Pearson Addison Wesley, São Paulo, 2002.

4 LOPES, C. L. M., **A Aprendizagem de Perímetros e Áreas com Geogebra: Uma Experiência de Ensino. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação)** - Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa, 2013.

5 NASCIMENTO, E. G. A., **Avaliação do uso do software Geogebra no ensino de Geometria: Reflexão da prática na escola.** - Actos de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra, Uruguai, 2012.

6 PEREIRA, B. T., **O uso das Tecnologias da Informação e Comunicação na Prática Pedagógica da Escola** - Universidade Federal do Paraná, 2018.

7 SANTOS, W. O.; BITTENCOURT, I. I., **Tecnologias no Ensino de Matemática: Uma Revisão Sistemática da Literatura** - Rede de Inovação para a Educação Brasileira, 2018.

8 SOUSA, K. R. Q., **Cálculo: uma proposta possível para o ensino médio. 2014. 97f. Dissertação (Mestrado em Matemática)** - Universidade Federal de Mato Grosso, Barra das Garças, 2014.

9 STEWART, J., **Cálculo, volume I. 5. ed.** - Thomson Learning, São Paulo, 2006.

10 ZANELLA, L., **O uso de Recursos Tecnológicos para o Ensino de Matemática** - Instituto Federal de Santa Catarina, São Miguel do Oeste, 2019.

APÊNDICE A

SEQUÊNCIA DE PASSOS NO GEOGEBRA PARA $f(x) = x^2$

Aproximação por retângulos

1. Acessar a parte da **calculadora** do GeoGebra (figura A.1)

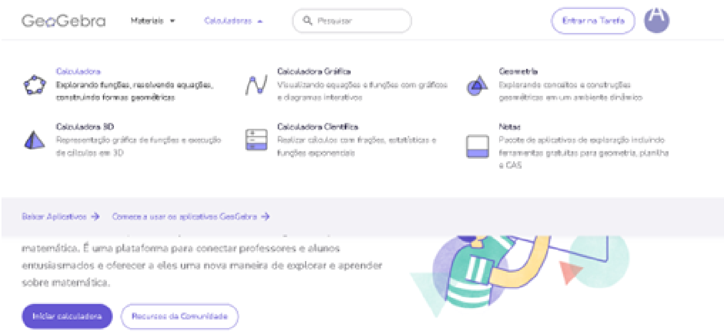

Figura A.1: Calculadora do software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Figura A.2: Função $f(x) = x^2$ no software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

2. Clicar na opção **Entrada** e digitar o comando: $f(x) = x^2$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ e clicando em enter (figura A.2).

3. Após obter o intervalo da função, clicar na opção **Entrada**, digitando a letra a e clicando em enter, criando assim um **controle deslizante**. Clicar com o botão direito no controle deslizante criado e acessar o ícone de configurações do controle deslizante, na aba **Controle Deslizante**, alterar o valor mínimo (min) para 3 e o valor máximo (max) para 100 (figura A.3).

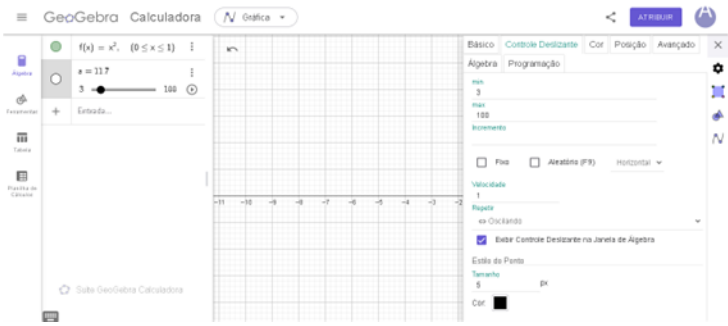

Figura A.3: Controle deslizante no software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

4. Clicar na opção **Entrada** novamente e digitar o seguinte comando: $sup =$ `SomadeRiemannSuperior` $(f, 0, 1, a)$ e clicar enter. Sendo f a função já criada, 0 e 1 os extremos do intervalo que informamos anteriormente e a nosso controle deslizante.

5. Clicar na opção **Entrada** novamente e digitar o seguinte comando: $si =$ `SomadeRiemannInferior` $(f, 0, 1, a)$ e clicar enter. Sendo f a função já criada, 0 e 1 os extremos do intervalo que informamos anteriormente e a nosso controle deslizante (figura A.4).

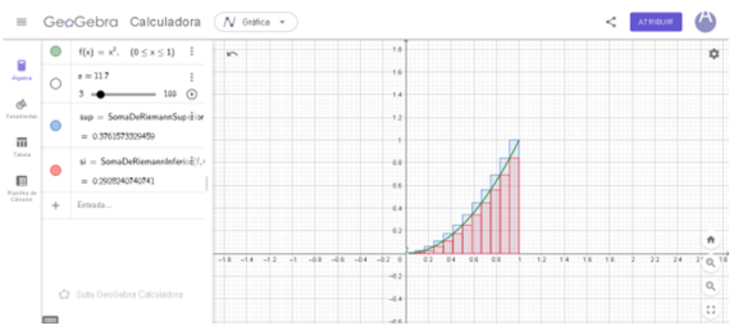

Figura A.4: Aproximação por meio retângulos no software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

6. Para calcular o valor exato da área, é preciso inserir na opção **Entrada** com o comando $b =$ `integral`$(f, 0, 1)$ e clicar enter. Onde será informada a função $f(x)$ e o intervalo $[0, 1]$.

7. Clicar na opção **Entrada** com o comando: $md = \dfrac{(\texttt{sup+si})}{2}$ e clicar enter. Será calculada a média das aproximações da Soma de Riemann.

8. Clicar na opção **Entrada** com o comando: $\texttt{Erro} = \texttt{md} - b$ e clicar enter (figura A.5).

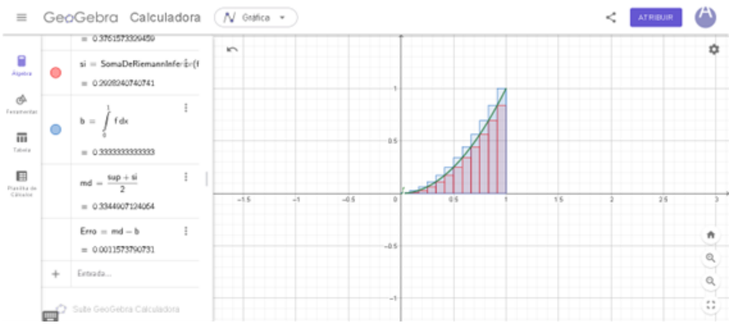

Figura A.5: Erro na aproximação pelo software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Aproximação por trapézios

1. Acessar a parte da **calculadora** do GeoGebra (figura A.1).

2. Clicar na opção **Entrada** e digitar o comando: $f(x) = x^2$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ e clicar em enter (figura A.2) .

3. Após obtermos o intervalo da função, clicar na opção **Entrada**, digitando a letra a e clicando em enter, criando um **controle deslizante**. Clicar com o botão direito o controle deslizante criado e acessar o ícone de configurações do controle deslizante, na aba **Controle Deslizante**, alterar o valor mínimo (min) para 3 e o valor máximo (max) para 25 (figura A.3).

4. Clicar na opção **Entrada** novamente e digitar o seguinte comando: $tra = \texttt{SomaTrapezoidal}(f, 0$ e clicar enter. Sendo f a funão já criada, 0 e 1 os extremos do intervalo que informamos anteriormente e a nosso controle deslizante (figura A.6).

5. Para calcular o valor exato da área, é preciso inserir na opção **Entrada** com o comando $b = integral(f, 0, 1)$ e clicar enter. Onde será informada a função $f(x)$ e o intervalo $[0, 1]$.

6. Clicar na opção `Entrada` com o comando: $\texttt{Erro} = \texttt{tra} - b$ (figura A.7).

Figura A.6: Aproximação por meio de trapézios pelo software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Figura A.7: Erro na aproximação pelo software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

APÊNDICE B

SEQUÊNCIA DE PASSOS NO GEOGEBRA PARA $f(x) = x^3$

Aproximação por retângulos

1. Acessar a parte da **calculadora** do GeoGebra.

2. Clicar na opção **Entrada** e digitar o comando: $f(x) = x^3$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ e clicando em enter.

3. Após obter o intervalo da função, clicar na opção **Entrada**, digitando a letra a e clicando em enter, criando assim um **controle deslizante**. Clicar com o botão direito no controle deslizante criado e acessar o ícone de configurações do controle deslizante, na aba **Controle Deslizante**, alterar o valor mínimo (min) para 3 e o valor máximo (max) para 100 (figura B.1).

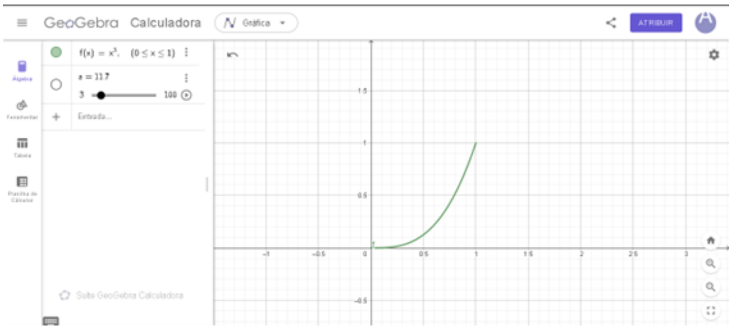

Figura B.1: Controle deslizante no software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

4. Clicar na opção **Entrada** novamente e digitar o seguinte comando: $sup =$ `SomadeRiemannSuperior` $(f, 0, 1, a)$ e clicar enter. Sendo f a função já criada, 0 e 1 os extremos do intervalo que informamos anteriormente e a nosso controle deslizante.

5. Clicar na opção **Entrada** novamente e digitar o seguinte comando: $si =$ `SomadeRiemannInferior` $(f, 0, 1, a)$ e clicar enter. Sendo f a função já criada, 0 e 1 os extremos do intervalo que informamos anteriormente e a nosso controle deslizante (figura B.2).

Figura B.2: Aproximação por meio retângulos no software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

6. Para calcular o valor exato da área, é preciso inserir na opção **Entrada** com o comando $b =$ `integral`$(f, 0, 1)$ e clicar enter. Onde será informada a função $f(x)$ e o intervalo $[0, 1]$.

7. Clicar na opção **Entrada** com o comando: $md = \dfrac{(\texttt{sup+si})}{2}$ e clicar enter. Será calculada a média das aproximações da Soma de Riemann.

8. Clicar na opção **Entrada** com o comando: `Erro` $=$ `md` $- b$ e clicar enter (figura B.3).

Figura B.3: Erro na aproximação pelo software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

Aproximação por trapézios

1. Acessar a parte da **calculadora** do GeoGebra.

2. Clicar na opção **Entrada** e digitar o comando: $f(x) = x^3$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ e clicar em enter.

3. Após obtermos o intervalo da função, clicar na opção **Entrada**, digitando a letra a e clicando em enter, criando um **controle deslizante**. Clicar com o botão direito o controle deslizante criado e acessar o ícone de configurações do controle deslizante, na aba **Controle Deslizante**, alterar o valor mínimo (min) para 3 e o valor máximo (max) para 25.

4. Clicar na opção **Entrada** novamente e digitar o seguinte comando: $tra =$ `SomaTrapezoidal`$(f, 0, 1, a)$ e clicar enter. Sendo f a funão já criada, 0 e 1 os extremos do intervalo que informamos anteriormente e a nosso controle deslizante (figura B.4).

Figura B.4: Aproximação por meio de trapézios pelo software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

5. Para calcular o valor exato da área, é preciso inserir na opção **Entrada** com o comando $b = integral(f, 0, 1)$ e clicar enter. Onde será informada a função $f(x)$ e o intervalo $[0, 1]$.

6. Clicar na opção `Entrada` com o comando: `Erro` $=$ `tra` $- b$ (figura B.5).

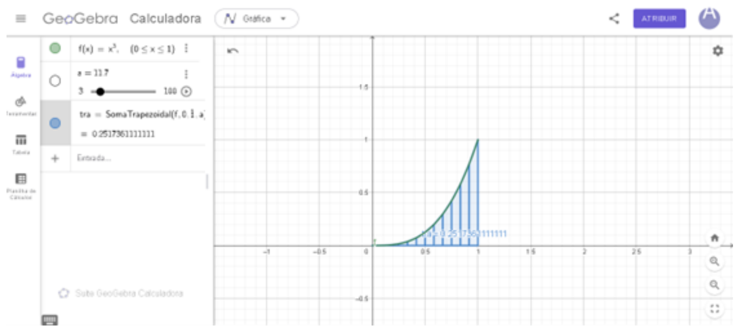

Figura B.5: Erro na aproximação pelo software GeoGebra
Fonte: Próprio Autor, 2024.

APÊNDICE C

ATIVIDADE FINAL

1. Resuma os métodos utilizados para calcular áreas sob as curvas das funções $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, e $f(x) = x^3$. O que essas funções têm em comum e em que diferem no cálculo de áreas?

2. Por que é importante considerar os erros associados aos métodos de aproximação?

3. Qual método apresentou maior precisão nos cálculos: retângulos ou trapézios? Explique com base nos exemplos vistos em sala.

4. Como o número de divisões no intervalo influencia os resultados dos métodos geométricos? Use exemplos para justificar sua resposta.

5. De que forma os métodos geométricos aprendidos poderiam ser adaptados para calcular áreas de curvas mais complexas, como funções exponenciais ou logarítmicas?

6. Como você acha que esses métodos podem ser aplicados fora da sala de aula, em problemas reais?

7. O que você aprendeu com a prática de calcular áreas sob curvas usando GeoGebra? Foi útil para sua compreensão? Justifique.

8. Sugira uma melhoria ou alteração na aula para que outros alunos possam aproveitar melhor os conteúdos trabalhados.