



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul



Curso de ENGENHARIA FÍSICA

Trabalho de Conclusão de Curso

Comparação entre Controladores \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 Aplicados ao Conversor Boost

Lucas Paixão Benites

Orientador: Prof. Cristiano Quevedo Andrea

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Física do Instituto de Física (INFI), da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS).

Campo Grande – MS

Julho/2025



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul



“If I have ever made any valuable discoveries,
it has been owing more to patient attention,
than to any other talent.”

(Sir Isaac Newton)



AGRADECIMENTOS

De início, agradeço a Deus por tudo que tive, por tudo que pude descobrir ao longo dos anos e por ser meu guia nesta caminhada.

Agradeço ao meu professor Cristiano Quevedo que me acolheu e sempre incentivou seja em disciplinas ou na escrita deste trabalho, o qual sem ele seria impossível.

Dos meus familiares um destaque especial aos meus pais, Cássia Paixão e Daniel Benites, que fizeram do nosso lar um ambiente familiar seguro e confortável que possibilitou meus primeiros passos, minhas primeiras palavras e agora o fim de um ciclo acadêmico. Com certeza novos ciclos virão, e poderei enfrentar sem medo por saber que estarão lá. Agradeço à minha irmã, Amanda Paixão, por ser minha companhia de vida.

Aos amigos Piter e João Victor que enfrentaram comigo os desafios do curso, desejo tudo de melhor que a vida possa oferecer. Também aos amigos Luiz Antônio pelos conselhos, Benzo pelos jogos e nerdolagens, Alek por me defender e Vitória pela companhia. Desejo grandes alegrias e um futuro próspero a todos.

Por fim, agradeço a todos os professores e colaboradores da UFMS que de alguma forma contribuíram nesta jornada. Sobretudo aos professores do INFI, onde passei a maior parte do tempo.



RESUMO

O avanço tecnológico, sobretudo de equipamentos elétricos e de fontes de energia renovável tais como carros elétricos e painéis solares, exige o estudo de técnicas e métodos de controle que garantam estabilidade e eficiência ao sistema empregado. O circuito conversor Boost é amplamente utilizado em sistemas de controle desse contexto. A partir disso, deseja-se comparar os controladores com as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 aplicadas a um conversor Boost. Para esse fim, realiza-se o estudo de um Boost dobrador de tensão via simulação computacional no MATLAB/Simulink. Os projetos dos controladores \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 por realimentação de estados do conversor Boost foram formulados por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs). Desenvolveram-se controladores tanto no domínio de tempo contínuo como no domínio do tempo discreto. Além disso, foram inseridos pesos em frequência com o objetivo de projetar um sistema capaz de rejeitar distúrbios em uma faixa de frequência previamente especificada. Para simular casos particulares, definiram-se distúrbios de tensão de $v_{in} = 2V$ e de corrente de $i_{out} = 250mA$ incidentes sobre o circuito em todos os casos analisados. Os resultados confirmaram bom desempenho dos controladores para a regulação da tensão, sobretudo os controladores \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 com filtro e em tempo discreto, que apresentaram boas correções de tensão, em aproximação da tensão ideal de $24V$ mesmo submetidos aos distúrbios. Portanto, podem ser aplicadas em sistemas de controle em geral e tornam viável a construção de um modelo de controle preditivo aplicado ao Boost.

Palavras-chave: Norma \mathcal{H}_∞ . Norma \mathcal{H}_2 . Conversor Boost. Distúrbio.



ABSTRACT

Technological advancements, particularly in electrical equipment and renewable energy sources such as electric vehicles and solar panels, demand the study of control techniques and methods that ensure stability and efficiency of the employed system. The Boost converter circuit is widely used in control systems within this context. Based on this, the goal is to compare controllers designed under the \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 norms applied to a Boost converter. To this end, a voltage-doubling Boost converter is implemented through computational simulation in MATLAB/Simulink. The design of the \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 state-feedback controllers for the Boost converter was formulated using linear matrix inequalities (LMIs). Controllers were developed in both continuous-time and discrete-time domains. In addition, frequency weights were applied with the objective of designing a system capable of rejecting disturbances within a predefined frequency range. To simulate specific cases, input voltage disturbances of $v_{in} = 2 V$ and output current disturbances of $i_{out} = 250 mA$ were defined and applied to the circuit in all analyzed scenarios. The results confirmed the good performance of the controllers in voltage regulation, especially the discrete-time \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 controllers with filters, which demonstrated effective voltage correction and close approximation to the ideal voltage of $24 V$, even under disturbances. Therefore, these controllers can be applied to control systems in general and enable the development of a predictive control model for the Boost converter.

Keywords: \mathcal{H}_∞ Norm. \mathcal{H}_2 Norm. Boost converter. Disturbance.



Lista de Figuras

1	Conversor Boost, o parâmetro d é a razão cíclica.	11
2	Tensões de Entrada ($12V$) e saída ($24V$) de um Circuito Conversor Boost Dobrador de Tensão (razão cíclica = $0,5$)	13
3	Diagrama de Blocos de um Sistema Genérico com Controlador e Realimentação	19
4	Restrição de polos para o controlador K do conversor Boost	24
5	Representação do sistema com entrada $w(k)$ e saída $z(f)$	26
6	Região de restrição delimitada por α_1 e α_2 no plano complexo.	30
7	Diagrama de blocos do Boost simulado com controlador e realimentação	32
8	Circuito Boost modelado em espaço de estados com realimentação de estados e controladores \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_2	33
9	Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_∞ contínuo sem filtro submetido a distúrbio de tensão de $2V$	34
10	Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_∞ contínuo sem filtro submetido a distúrbio de corrente de $0,25A$	35
11	Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_∞ discreto com filtro submetido a distúrbio de tensão de $2V$	36
12	Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_∞ discreto com filtro submetido a distúrbio de corrente de $0,25A$	37
13	Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_2 contínuo sem filtro submetido a distúrbio de tensão de $2V$	38
14	Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_2 contínuo sem filtro submetido a distúrbio de corrente de $0,25A$	39
15	Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_2 discreto com filtro submetido a distúrbio de tensão de $2V$	40
16	Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_2 discreto com filtro submetido a distúrbio de corrente de $0,25A$	41



Sumário

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Justificativa do Trabalho	9
1.2	Organização do Trabalho	10
2	OBJETIVOS	10
2.1	Objetivos Gerais	10
2.2	Objetivos Específicos	10
3	REVISÃO TEÓRICA	11
3.1	Conversor Boost	11
3.2	Representação em Espaço de Estados	13
3.2.1	Descrição do Boost em Espaço de Estados	16
3.3	LMIs	17
3.3.1	Otimização com Restrições	19
3.3.2	Realimentação de Estados	19
3.3.3	Complemento de Schur e Desigualdade de Riccati	20
3.4	A Norma \mathcal{H}_∞ e projeto do controlador via LMI	21
3.4.1	Para sistemas em espaço de estado contínuo	21
3.4.2	Para sistemas em espaço de estado discreto	25
3.5	A Norma \mathcal{H}_2 via LMI	28
3.5.1	Para sistemas em espaço de espaço contínuo	28
3.5.2	Para sistemas em espaço de estado discreto	30
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	31
4.1	Resultado do Projeto do Controlador \mathcal{H}_∞ Aplicado ao Boost . . .	33
4.1.1	\mathcal{H}_∞ Contínuo Sem Filtro	33
4.1.2	\mathcal{H}_∞ Discreto Com Filtro	35
4.2	Resultado do Projeto do Controlador \mathcal{H}_2 Aplicado ao Boost . . .	37
4.2.1	\mathcal{H}_2 Contínuo Sem Filtro	37
4.2.2	\mathcal{H}_2 Discreto Com Filtro	39
4.3	Comparação dos modelos \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2	41
5	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS	42



1 INTRODUÇÃO

Conforme Nise (2012), a utilização de sistemas de controle data de muito antes do surgimento de uma civilização como conhecemos hoje, sendo parte fundamental em conjuntos biológicos primordiais. De um ponto de vista tecnológico, o primeiro sistema de controle automático criado por James Watt no século XVIII foi um regulador centrífugo, para controlar a velocidade de uma máquina a vapor. Ogata (2003) destaca o desenvolvimento das técnicas e métodos utilizados para controle e sua evolução com o passar das décadas. Esses métodos exigiam complexidade crescente para acompanhar o ritmo dos sistemas modernos de muitas entradas e saídas. Ogata também destaca o crescimento do estudo do controle robusto via norma \mathcal{H}_∞ desde 1980.

Um conversor Boost é um circuito eletrônico do tipo elevador de tensão, ou seja, a tensão de saída é maior que a tensão de entrada. São amplamente utilizados em situações que exigem um controle de tensão de saída constante. Exemplos de aplicações do conversor Boost incluem painéis solares. Sabe-se que tanto a oferta quanto a demanda por fontes de energia renovável aumentou bastante na última década, e hoje os painéis solares representam cerca de 20% da matriz elétrica do Brasil. Com isso, o Boost é utilizado para MPPT (*Maximum Power Point Tracking*), em outras palavras, é utilizado para encontrar o ponto de operação que ofereça a melhor potência para a placa fotovoltaica. No campo de veículos elétricos, outro mercado que está em crescimento acelerado, o Boost é utilizado para obter as altas tensões necessárias de determinados componentes do carro, desde o ar condicionado até mesmo o motor. O Boost pode ser associado a um controlador, para garantir o desempenho e eficiência do sistema.

Um dos primeiros tipos de controladores aplicados ao conversor Boost foi o controlador PID. Guo, Hung e Nelms (2003), descrevem a sintonia de controladores PID utilizando o método do lugar das raízes. No entanto, o controle PID é projetado com base na função de transferência que relaciona a razão cíclica com a saída de tensão do conversor Boost. Para esse sistema, são definidos, por exemplo, parâmetros como o tempo de estabelecimento e o percentual de overshoot. Dessa forma, o projeto do controlador não leva em consideração, de forma explícita, as especificações necessárias para regular a saída em situações em que ocorrem variações na carga ou na tensão de entrada, o qual pode ser atingida se o projeto do controlador abordar a função de transferência entre a entrada de distúrbio e a saída do conversor.

Com os avanços nos sistemas de controle aplicados a conversores CC-CC, passou-



se a utilizar o controle por superfície deslizante (SMC, do inglês Sliding Mode Control). Esse tipo de controle oferece ao conversor em malha fechada uma robustez significativa frente às incertezas paramétricas da planta, conforme Guldemir (2005). No entanto, o fenômeno conhecido como *chattering*, característico do controle por superfície deslizante, resulta em uma oscilação indesejada de alta frequência. Esse efeito ocorre porque o sinal de controle alterna rapidamente entre dois estados para manter o sistema na superfície de deslizamento, devido à natureza descontínua da lógica de controle. Essa oscilação pode comprometer o desempenho do sistema e gerar desgastes em componentes eletrônicos.

Cunha et al. (2019) propõem a utilização do controle preditivo aplicado a geração de energia solar em painéis fotovoltaico. O controle robusto \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 pode ser observado em (KHAYAT et al., 2017), com aplicação em um sistema de microrrede, com apresentação de bons resultados na regulação da tensão de saída contínua do conversor Boost. Também se utiliza sistemas inteligentes no controle do conversor Boost. Demirtas e Ahmad (2023) propõem a aplicação de controlares fuzzy a este conversor. Por meio da utilização desta metodologia, pode-se inserir as incertezas do modelo desta planta no projeto do controlador.

Dessa maneira, a utilização do controle robusto aplicado ao circuito conversor Boost pode oferecer melhorias significativas em diversos campos da eletrônica, proporcionando um controle otimizado e boa eficiência aos dispositivos. Neste trabalho apresenta-se uma comparação do desempenho entre os controladores \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 aplicados ao conversor Boost. Nesse contexto, são considerados projetos tanto no domínio de tempo contínuo quanto no tempo discreto. Além disso, foram incorporados pesos na frequência ao projeto dos controladores, permitindo uma análise dos efeitos da inclusão dessa ferramenta no desempenho dos sistemas. A aplicação de pesos na frequência possibilita o projeto de controladores robustos, otimizados para rejeitar sinais de distúrbio em frequências específicas previamente conhecidas no funcionamento do conversor Boost.

1.1 Justificativa do Trabalho

O trabalho proporciona o estudo de técnicas de controle robusto que garantam estabilidade e desempenho para sistemas que exijam rejeição de distúrbio para sua operação. O sistema em tempo contínuo representa uma descrição natural do conversor e serve para o projeto dos controladores. O estudo do projeto em modelo em espaço de estado é necessário para a implementação das normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 ao Boost. Essas técnicas de controle são amplamente abordadas na literatura. O controle \mathcal{H}_∞ foca na robustez frente a incer-



tezas e rejeição de perturbações, o \mathcal{H}_2 prioriza a otimização de desempenho e minimização da energia associada ao erro de controle.

A comparação entre esses dois controladores aplicados ao conversor Boost, contribui para o avanço teórico de sistemas de controle, mas também proporciona base para escolhas em aplicações industriais e acadêmicas. Este trabalho busca verificar questões relevantes, como a influência de perturbações, variações de parâmetros e eficiência de controle, oferecendo resultados importantes aos projetistas. Também deseja-se utilizar essa comparação para posterior definição da norma a ser utilizada em um modelo preditivo, \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_2 , tema de trabalho futuro.

1.2 Organização do Trabalho

O Capítulo 1 introduz ao tema abordado e aos estudos conhecidos na comunidade acadêmica que levaram a definição do foco do projeto, também são apresentadas motivações e aspirações dos resultados do trabalho. No Capítulo 2 estão os objetivos gerais e específicos do estudo. O Capítulo 3 contém a revisão teórica dos conhecimentos necessários à compreensão do projeto. A metodologia utilizada para construção da simulação se encontra no Capítulo 4. Os resultados obtidos, como também a discussão destes, estão apresentados no Capítulo 5. Por fim, no Capítulo 6 está a conclusão do estudo baseada nos resultados adquiridos.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivos Gerais

Deseja-se comparar modelos de controle robusto \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 em espaço de estados contínuo e discreto, observando os parâmetros de controle via simulação em MATLAB/Simulink, considerando sinais de distúrbio de tensão ou corrente.

2.2 Objetivos Específicos

- Escrever código no MATLAB para definição dos parâmetros e cálculos dos ganhos dos controladores K utilizando as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 como critério de desempenho;
- Modelar, em espaço de estado, circuito conversor Boost a ser simulado;
- Projetar os controladores \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 ;



- Confirmar os resultados obtidos da simulação;
- Comparar os resultados para as duas normas estudadas.

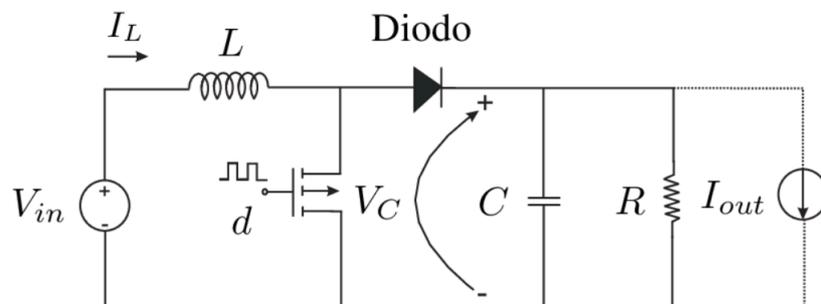
3 REVISÃO TEÓRICA

Circuitos conversores do tipo CC-CC Boost são circuitos em que a tensão contínua de saída é superior a tensão contínua de entrada.

3.1 Conversor Boost

Conforme Bose (2020), o circuito é composto por um indutor (L), um capacitor (C), uma resistência (R), um diodo e um sinal PWM alimentados por uma fonte de tensão contínua (V_{in}) conforme a Figura 1. A chave pode atuar aberta ou fechada.

Figura 1: Conversor Boost, o parâmetro d é a razão cíclica.



Fonte: Quevedo et al. (s.d., p. 2).

Num instante inicial $t = t_0$ a chave é fechada, não há corrente circulante sobre o resistor ou capacitor e estes se encontram em curto. Neste caso, a tensão de entrada V_{in} atua somente sobre o indutor que armazena energia no campo magnético. Pelas Leis de Kirchhoff e segundo Nilsson e Riedel (2015), tem-se a tensão V_L no indutor.

$$V_{in} - V_L = 0 \quad (1)$$

Em um instante posterior $t > t_0$, onde a chave se encontra aberta, há passagem de corrente para o restante do circuito. O diodo ideal é polarizado reversamente, por isso a queda de tensão em seus terminais pode ser desprezada e há passagem de corrente



em único sentido. Uma vez que o indutor tende a se opor a passagem de corrente, a tensão sobre seus terminais é invertida. Com essas informações, e pela Leis de Kirchhoff, obtém-se,

$$V_R - L \frac{di}{dt} = V_{in} \quad (2)$$

$$V_R = V_{in} + L \frac{di}{dt} \quad (3)$$

Nota-se aumento na tensão de saída de um fator $L \frac{di}{dt}$ sobre os terminais do resistor em relação à tensão de entrada. Entretanto, para não violar a Lei de Conservação de Energia, necessita-se que a corrente de saída sofra decréscimo em relação a corrente inicial de tal forma que:

$$\begin{aligned} P_{in} &= P_{out} \\ I_{out} &= \frac{U_{in} I_{in}}{U_{out}} \end{aligned} \quad (4)$$

Supondo que seja um circuito dobrador de tensão, $U_{in} = \frac{U_{out}}{2}$. Logo,

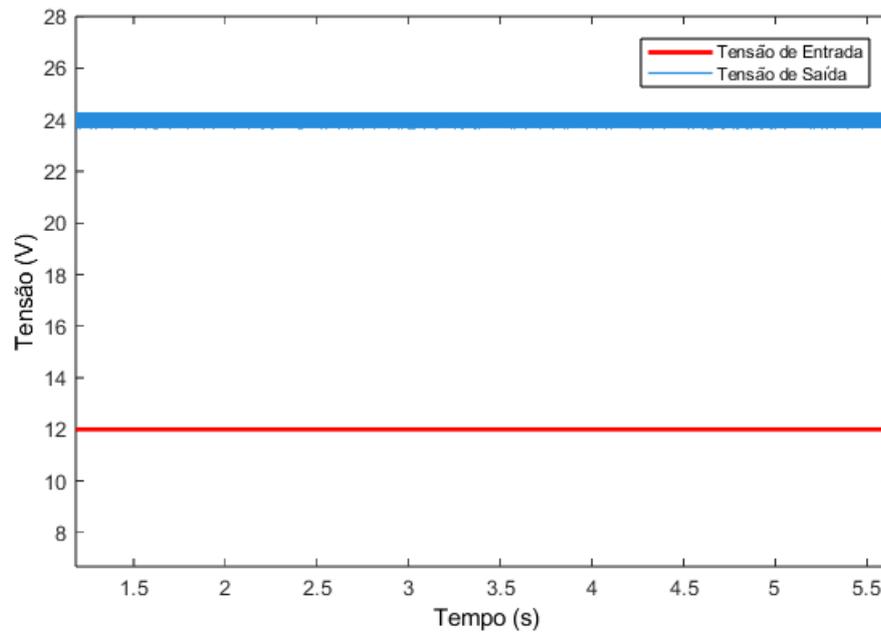
$$I_{out} = \frac{I_{in}}{2} \quad (5)$$

Isso significa que aumentar a tensão ao dobro implica na queda da corrente pela metade.

É possível controlar a tensão de saída alterando o valor da razão cíclica. Na Figura 2 é ilustrada a tensão de entrada e de saída do circuito para uma razão cíclica de 0,5 obtida de uma simulação via Simulink de um circuito Boost ideal conforme na Figura 1.



Figura 2: Tensões de Entrada (12 V) e saída (24 V) de um Circuito Conversor Boost Dobrador de Tensão (razão cíclica = 0,5)



Fonte: Autor (2024).

3.2 Representação em Espaço de Estados

De acordo com Lacerda (2020) a representação em espaço de estados é importante para a definir uma forma matricial para as equações que descrevem o circuito. Considere um sistema de caso próprio onde a derivada da entrada e a derivada da saída do sistema possuem a mesma ordem.

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3u \quad (6)$$

Em que as variáveis de estado x_1 , x_2 e x_3 são dadas a seguir.

$$\begin{cases} x_1 = y - \alpha_1 u \\ x_2 = \dot{y} - \alpha_1 \dot{u} - \alpha_2 u \\ x_3 = \ddot{y} - \alpha_1 \ddot{u} - \alpha_2 \dot{u} - \alpha_3 u \end{cases} \quad (7)$$



Deseja-se escrever uma equação matricial para \dot{x} , tal que:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8)$$

Onde \dot{x} é a derivada dos estados, A é a matriz de estados, x é o vetor de entradas, B a matriz relacionada a contribuição das entradas de estados e u um vetor com n entradas.

Determina-se x_n , o que torna possível escrever \dot{x}_1 e \dot{x}_2 em termos de x_2 e x_3 , respectivamente.

$$x_n = \dot{x}_{n-1} - \alpha_n u \quad (9)$$

Para representação em espaço de estados, necessita-se também de uma expressão para \dot{x}_3 . A partir das Equações 6, 7 e 9 se pode escrever uma expressão para \dot{x}_3 .

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \ddot{y} - \alpha_1 \ddot{u} - \alpha_2 \dot{u} - \alpha_3 u - \alpha_4 u \\ \dot{x}_3 = -a_1 \ddot{y} - a_2 \dot{y} - a_3 y + b_1 \ddot{u} + b_2 \dot{u} + b_3 u + b_4 u - \alpha_1 \ddot{u} - \alpha_2 \dot{u} - \alpha_3 u - \alpha_4 u \end{cases} \quad (10)$$

Então, de (7) é possível encontrar uma representação de y , \dot{y} e \ddot{y} .

$$\begin{cases} y = x_1 + \alpha_1 u \\ \dot{y} = x_2 + \alpha_1 \dot{u} + \alpha_2 u \\ \ddot{y} = x_3 + \alpha_1 \ddot{u} + \alpha_2 \dot{u} + \alpha_3 u \end{cases} \quad (11)$$

Tem-se \dot{x}_3 .

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= (b_1 - \alpha_1) \ddot{u} + (b_2 - \alpha_2 - \alpha_1 a_1) \dot{u} + (b_3 - \alpha_3 - \alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1) u \\ &+ (b_4 - \alpha_1 a_3 - \alpha_2 a_2 - \alpha_3 a_1) u - a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Tomando $\alpha_1 = b_1$, $\alpha_2 = b_2 - a_1 \alpha_1$ e $\alpha_3 = b_3 - a_1 \alpha - a_2 \alpha_1$ se tem a garantia de que a \dot{x}_3 não dependerá das derivadas das entradas e com isso obter sua representação



em espaço de estados.

Vide (9):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \alpha_2 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \alpha_3 u \\ \dot{x}_3 = -a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + \alpha_4 u \end{cases} \quad (13)$$

A representação em espaço de estados fica como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} u \quad (14)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \end{bmatrix} u \quad (15)$$

Logo, uma matriz de caso próprio como em (16), pode ser representada com matrizes em espaço de estado como a seguir.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = b_1 u^{(n)} + b_2 u^{(n-1)} + b_3 u^{(n-2)} + \dots + b_n u \quad (16)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix} u \quad (17)$$

A saída também em espaço de estados é dada por



$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + [\alpha_1] u \quad (18)$$

3.2.1 Descrição do Boost em Espaço de Estados

Após analisar-se o Boost, pode-se por meio de suas descrições em equações diferenciais ordinárias na Seção 3.1, tem-se que o conversor ilustrado na Figura 1 pode ser modelado como:

$$\dot{I}_L = \frac{V_{in} + v_{in}}{L} - \frac{(1-D)V_C}{L} \quad (19)$$

$$\dot{V}_C = \frac{(1-D)I_L}{C} - \frac{(I_{out} + i_{out})}{C} \quad (20)$$

Os parâmetros D , V_{in} , V_C , I_{out} e I_L denotam valores em um dado ponto de operação, enquanto v_{in} , v_C e i_{out} denotam desvios deste ponto de operação.

Substituindo-se a corrente de saída I_{out} que passa pelo resistor por $I_{out} = \frac{V_C}{R}$ em (20), obtém-se:

$$\dot{V}_C = \frac{(1-D)I_L}{C} - \frac{V_C}{RC} - \frac{i_{out}}{C} \quad (21)$$

Então, organizando-se (19) e (21) na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-(1-D)}{L} \\ \frac{(1-D)}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_C(1-D)}{LD} \\ 0 \end{bmatrix} d(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde V_C é a tensão nominal de saída do Boost e $d(t)$ denota desvio do ponto de operação da razão cíclica D aplicada ao conversor, e $0, 1 < D < 1$.

Que resultam em:



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1u + B_2w \\ z = C_1x \end{cases} \quad (23)$$

onde: $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-(1-D)}{L} \\ \frac{(1-D)}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} \frac{V_C(1-D)}{LD} \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix}$.

e u é vetor de controle referente à $d(t)$.

Considerando a representação de espaço de estado do Boost em um dado ponto de operação (I_{Lo}, V_{Co}) :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = Ax_0 + B_2u_0 \\ z_0 = C_1x_0 \end{cases} \quad (24)$$

Subtraindo-se (24) de (23), resulta em:

$$\begin{cases} \dot{x} - \dot{x}_0 = A(x - x_0) + B_2(u - u_0) + B_1w \\ z - z_0 = C_1(x - x_0) \end{cases} \quad (25)$$

Reescrevendo, $x - x_0 = \Delta x$, $z - z_0 = \Delta z$ e $u - u_0 = \Delta u$ em (25) obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A\Delta x + B_2\Delta u + B_1w, \\ \Delta z &= C_1\Delta x \end{aligned} \quad (26)$$

A equação apresentada em (26) representa a descrição do conversor Boost em espaço de estados, a qual é utilizada neste trabalho para o projeto dos controladores \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 , considerando a linearização em torno de um ponto de equilíbrio definido pelos valores de D e V_C .

3.3 LMIs

A seguir, apresenta-se a base teórica a respeito de LMIs. O texto é baseado nas referências (DEZUO, s.d.) e (BOYD et al., 1994).



A LMI (desigualdade matricial linear, em português) é uma ferramenta matemática muito utilizada para a formulação de diversos problemas envolvendo teoria de controle. Com ela é possível solucionar problemas de muitas variáveis matriciais. Uma LMI é descrita pela desigualdade linear dada em (27).

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i > 0 \quad (27)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é a variável e $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{k \times k}$, com i assumindo valores de 0 à n são matrizes simétricas, ou seja $F_i = F_i'$.

Exemplo: dada a matriz (28), $P = P' \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2' \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (28)$$

É possível expressá-la na forma de LMI tomando os parâmetros:

$$x = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, a desigualdade (28) configura uma LMI restrita. Outra solução importante proporcionada pelo uso de LMIs parte da estabilidade quadrática. A condição de estabilidade quadrática do sistema $\dot{x} = Ax$ exige que exista uma matriz simétrica P que satisfaça as condições (30) e (29). Satisfeitas as condições, $v(x) = x'Px$ é função de Lyapunov desse sistema.

$$A'P + PA < 0 \quad (29)$$

$$P > 0 \quad (30)$$

É importante ressaltar que o conjunto de soluções de uma LMI é sempre convexo. Isso garante que encontrar a solução qualquer de uma LMI é o mesmo que encontrar um



elemento qualquer num plano convexo.

3.3.1 Otimização com Restrições

Alguns casos exigem uma solução da LMI que seja ótima segundo um dado critério. Pode-se expressar a otimalidade utilizando uma função linear, que resulta no problema (31).

$$\begin{cases} \min_g c'x \\ F(x) > 0 \end{cases} \quad (31)$$

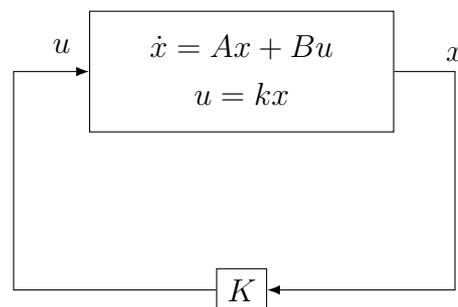
Tem-se que c é o vetor da direção de otimização enquanto $F(x) > 0$ é uma LMI.

A convexidade das soluções de $F(x) > 0$ permite resumir o problema em encontrar uma solução x , com respeito a $F(x) > 0$, que minimize $c'x$. Nessas condições, a solução ótima tende ao limite do conjunto de soluções.

3.3.2 Realimentação de Estados

A teoria de LMIs pode ser utilizada para projetar um controlador de realimentação de estados, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3: Diagrama de Blocos de um Sistema Genérico com Controlador e Realimentação



Fonte: Autor (2024).

O equacionamento do sistema em malha fechada ilustrado na Figura 3 é dado por:

$$\dot{x} = (A + BK)x \quad (32)$$



onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$. $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é o controlador a ser determinado, o qual deve garantir a estabilidade do sistema em malha fechada. Precisa-se encontrar, junto ao controlador K , a matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que resolve a desigualdade (33).

$$(A + BK)'P + P(A + BK) < 0 \quad (33)$$

Entretanto, na equação (33), observa-se a presença de bilinearidades ao se aplicar a propriedade distributiva, em particular no termo PBK , que envolve o produto de duas variáveis em um único termo. Assim, com o objetivo de obter equações na forma de LMIs, realiza-se a seguinte transformação algébrica: $Y = KQ$ e $Q = P^{-1}$. Substituindo essas relações na equação (33), obtém-se:

$$QA' + AQ + Y'B' + BY < 0 \quad (34)$$

Agora (34) é uma LMI com variáveis $Q = Q' > 0$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$. K e Q podem ser recuperados após a resolução da LMI, de forma que $K = YQ^{-1}$.

3.3.3 Complemento de Schur e Desigualdade de Riccati

Desigualdades não lineares e não convexas podem ser transformadas em LMIs por meio do complemento de Schur. Seja $g \in \mathbb{R}^n$ o vetor de parâmetros e $M_1(g)$, $M_2(g)$ e $M_3(g)$ funções afins de g com $M_1(g)$ e $M_2(g)$ simétricas, o complemento de Schur garante que as afirmações (a) e (b) sejam equivalentes.

(a)

$$M_1(g) - M_3(g)'M_2(g)^{-1}M_3(g) > 0 \quad \text{com} \quad M_2(g) > 0;$$

(b)

$$\begin{bmatrix} M_1(g) & M_3(g)' \\ M_3(g) & M_2(g) \end{bmatrix} > 0.$$

Apesar de (a) não ser uma LMI, as desigualdades de (a) equivalem a (b) que é uma LMI.

Desigualdade de Riccati:

A desigualdade de Riccati é uma forma generalizada da equação de Riccati, muito utilizada em áreas como controle ótimo, teoria de sistemas e filtragem. Diferente da



equação, que impõe igualdade, a desigualdade de Riccati estabelece uma relação de desigualdade matricial, geralmente envolvendo uma matriz simétrica desconhecida.

Sejam A, B, C, R matrizes dadas:

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'C < 0, \quad P > 0, R > 0 \quad (35)$$

Necessita-se transformar a desigualdade (35) em uma LMI. Para tanto, adiciona-se um novo parâmetro $S = P^{-1}$ substituído em (35). Dessa forma, obtém-se:

$$S(A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'C)S < 0, \quad S > 0. \quad (36)$$

$$SA' + AS - BR^{-1}B' + SC'CS < 0, \quad S > 0 \quad (37)$$

Pode-se aplicar o complemento de Schur em (37), o resultado é (38), que é uma LMI e pode ser resolvida para obter P .

$$\begin{bmatrix} -SA' - AS + BR^{-1}B' & SC' \\ CS & I \end{bmatrix} > 0, \quad S > 0 \quad (38)$$

3.4 A Norma \mathcal{H}_∞ e projeto do controlador via LMI

3.4.1 Para sistemas em espaço de estado contínuo

Considere um sistema linear descrito em espaço de estado.

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= A_g x_g + B_g w_g, \\ y_g &= C_g x_g + D_g w_g \end{aligned} \quad (39)$$

A norma \mathcal{H}_∞ para o sistema (39) pode ser determinada pela solução do seguinte problema de otimização:

$$\|H\|_\infty^2 = \min u$$



$$\text{s.a } \begin{bmatrix} A'_g P + P A_g & P B_g & C'_g \\ B'_g P & -I & D'_g \\ C_g & D_g & -uI \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0, \quad P = P'. \quad (40)$$

Então, considerando o modelo em espaço de estado para o Boost, que é ilustrado na Figura 1 e modelado na equação (26), pode-se realizar a realimentação de estados com uma lei de controle $u = -K\Delta x$. Assim, obtém-se (41) e (43).

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A\Delta x + B_2(-K\Delta x) + B_1 w \\ \Delta z &= C_1 \Delta x \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= (A - B_2 K)\Delta x + B_1 w \\ \Delta z &= C_1 \Delta x \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A_m \Delta x + B_1 w \\ \Delta z &= C_1 \Delta x \end{aligned} \quad (43)$$

onde $A_m = A - B_2 K$.

Então, para o projeto do controlador \mathcal{H}_∞ de realimentação de estados, substitui-se A_m , B_1 e C_1 no lugar de A_g , B_g e C_g , respectivamente, em (40), com $D_g = 0$. Dessa forma, encontram-se as equações para o projeto do controlador K de realimentação de estados para rejeição do efeito do sinal de descrito na saída do Boost, as quais são descritas a seguir:

$$\|H\|_\infty^2 = \min u$$

$$\text{s.a } \begin{bmatrix} A'_m P + P A_m & P B_1 & C_1 \\ B'_1 P & -I & 0 \\ C_1 & 0 & -uI \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0, \quad P = P' \quad (44)$$

Substituindo-se $A_m = A - B_2 K$ de (43) em (44), obtém-se (45).

$$\|H\|_\infty^2 = \min u$$



$$\text{s.a } \begin{bmatrix} AP - B_2KP + PA' - PK'B'_2 & PB_1 & C_1 \\ & B'_1P & -I & 0 \\ & C_1 & 0 & -uI \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0, \quad P = P' \quad (45)$$

Tomando $Y = PK$ e substituindo em (45), tem-se:

$$\|H\|_{\infty}^2 = \min u$$

$$\text{s.a } \begin{bmatrix} AP + PA' - B_2Y - Y'B'_2 & PB_1 & C_1 \\ & B'_1P & -I & 0 \\ & C_1 & 0 & -uI \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0, \quad P = P' \quad (46)$$

Portanto, obtendo a solução da equação (46) determina-se o controlador $K = P^{-1}Y$.

Contudo, ao projetar sistemas de controle, busca-se incluir o desempenho da resposta do sistema. Com isso, considera-se o potencial de overshoot e o tempo de estabelecimento. Dessa forma, ao empregar projetos via LMI para obtenção de controladores, usa-se restrição para alocação dos polos de malha fechada. Essa restrição para a magnitude da parte real do polo de malha fechada é obtida ao adicionar ao projeto uma LMI, dada em (47), que representa a taxa de decaimento da resposta conforme Boyd et al. (1994).

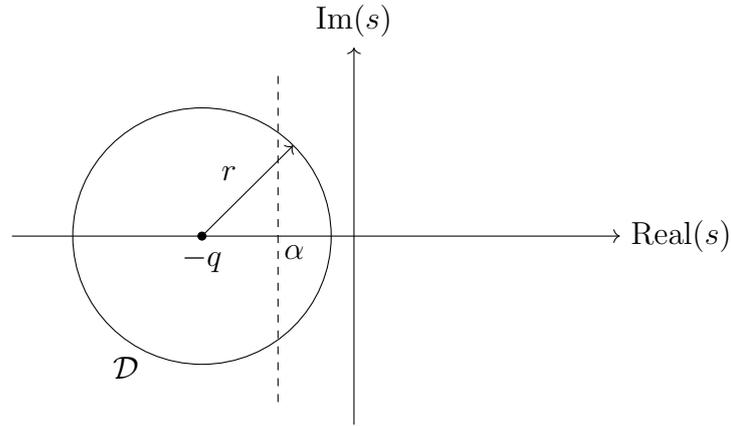
$$A_yP + PA'_y + 2\alpha P < 0 \quad (47)$$

Ainda conforme o projeto do controlador, pode-se delimitar uma região circular que restrinja o posicionamento dos polos de malha fechada resultantes da utilização deste regulador K . Por meio desta restrição, é possível limitar a magnitude do ganho de K , como também controlar a atenuação do efeito de distúrbio na saída do conversor Boost.

A região circular descrita para alocação dos polos de malha fechada com taxa de decaimento é ilustrada na Figura 4.



Figura 4: Restrição de polos para o controlador K do conversor Boost



Fonte: Autor (2024).

A LMI para restrição de círculo é apresentada em (48), conforme Chilali e Gahinet (1996):

$$\begin{bmatrix} -rP & A_y P + qP \\ P A'_y + qP & -rP \end{bmatrix} < 0 \quad (48)$$

Portanto, para inserção dessas restrições nas LMIs relacionadas ao posicionamento de polos de malha fechada do projeto do controlador K , substitui-se A_m dados em (43) em A_y nas LMIs (47) e (48). A partir dessa manipulação algébrica, obtêm-se as LMIs que serão inseridas no projeto de K , as quais são descritas em (49) e (50).

- para α :

$$AP + PA' - B_2 Y - Y' B'_2 + 2\alpha P < 0 \quad (49)$$

- para r e q :

$$\begin{bmatrix} -rP & AP - B_2 Y + qP \\ PA' - Y' B'_2 - qP & -rP \end{bmatrix} < 0 \quad (50)$$

Em que α é o valor da taxa de decaimento, q é o centro e r é o raio da circunferência.



Dessa forma, o projeto do controlador K para rejeição de distúrbios no conversor Boost consiste na resolução das seguintes equações: (51), (52) e (53).

- O valor de K que minimiza a norma \mathcal{H}_∞ de w para z é tal que:

$$\|H\|_\infty^2 = \min u:$$

$$\text{s.a } \begin{bmatrix} AP + PA' - B_2Y - Y'B_2' & P'C_1' & B_1 \\ C_1P & -I & 0 \\ B_1' & 0 & -uI \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0, \quad P = P' \quad (51)$$

$$AP + PA' - B_2Y - Y'B_2' + 2\alpha P > 0 \quad (52)$$

$$\begin{bmatrix} -rP & AP - B_2Y + qP \\ PA' - Y'B_2' - qP & -rP \end{bmatrix} < 0, \quad a > 0. \quad (53)$$

Onde $K = P^{-1}Y$.

3.4.2 Para sistemas em espaço de estado discreto

Considerando-se um sistema discreto, linear e invariante no tempo, define-se a norma \mathcal{H}_∞ como o maior valor de magnitude da resposta em frequência de um dado sistema. Considere o sistema discreto observado em (54), estável, descrito na forma de espaço de estados por:

$$\begin{aligned} \Delta x(k+1) &= A\Delta x(k) + B_2d(k) + B_1w(k) \\ \Delta z(k) &= C_1\Delta x(k) \end{aligned} \quad (54)$$

Sendo $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, B_1 e $B_2 \in \mathcal{R}^{n \times p}$, $C_1 \in \mathcal{R}^{m \times m}$ e $D \in \mathcal{R}^{p \times p}$. O vetor $x(k) \in \mathcal{R}^n$ contém os estados do sistema, $w(k)$ é a entrada exógena e $z(k)$ é a saída medida.

Pode-se realizar a realimentação de estados através de uma lei de controle na qual $d(k) = -K\Delta x(k)$. Dessa maneira, ao substituir $d(k)$ no sistema (54), com $D = 0$, resulta em:



$$\begin{aligned}\Delta x(k+1) &= (A - B_2k)\Delta x(k) + B_1w(k) \\ \Delta z(k) &= C_1\Delta x(k)\end{aligned}\tag{55}$$

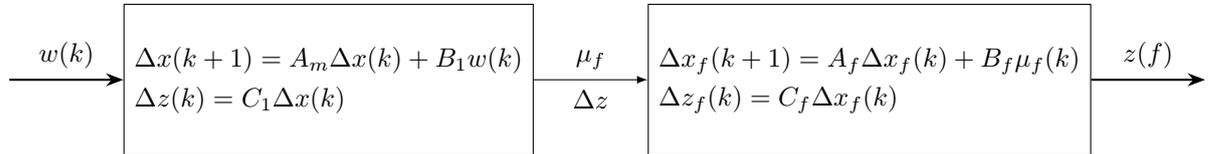
Ou também:

$$\begin{aligned}\Delta x(k+1) &= A_m\Delta x(k) + B_1w(k) \\ \Delta z(k) &= C_1\Delta x(k)\end{aligned}\tag{56}$$

Em que $A_m = A - B_2k$.

Objetivando-se rejeitar o efeito do sinal de distúrbio na saída do Boost para uma faixa de frequência, utiliza-se ponderação frequencial. Na Figura 5 é ilustrado o diagrama de blocos da inserção de tal ponderação no projeto do controlador de realimentação de estados para o Boost modelado na forma discreta.

Figura 5: Representação do sistema com entrada $w(k)$ e saída $z(f)$.



Fonte: Autor (2024).

Tomando a saída do primeiro bloco como entrada do segundo bloco, as equações diferenciais discretas do filtro podem ser descritas como:

$$\begin{aligned}x_f(k+1) &= A_fx_f(k) + B_fC_1\Delta x(k) \\ z(k) &= C_fx_f(k)\end{aligned}\tag{57}$$

Então pode-se organizar o sistema ilustrado na Figura 5 na forma matricial visto em (58).



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ x_f(k+1) \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} A_m & 0 \\ B_f C_1 & A_f \end{bmatrix}}^{A_v} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ x_f(k) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{B_v} w(k) \\ z_f &= \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & C_f \end{bmatrix}}^{C_v} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ x_f(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

A norma \mathcal{H}_∞ de um sistema $\mathcal{H}_j = (A_j, B_j, C_j, D_j)$ é dada pela solução das LMIs descritas em (59) ou pela resolução da forma dual de (59) dada em (60).

$$\|H_j\|_\infty^2 = \min \mu$$

$$\text{s.a } \begin{bmatrix} \hat{P} & 0 & C_j' & A_j' \hat{P} \\ 0 & I & D_j' & B_j' \hat{P} \\ C_j & D_j & \mu I & 0 \\ \hat{P} A_j & \hat{P} B_j & 0 & \hat{P} \end{bmatrix} > 0, \quad \hat{P} = \hat{P}' > 0, \quad \mu > 0, \quad (59)$$

Ou, ainda:

$$\|H_j\|_\infty^2 = \min \mu$$

$$\text{s.a } \begin{bmatrix} \hat{Q} & 0 & B_j & A_j \hat{Q} \\ 0 & I & D_j & C_j \hat{Q} \\ B_j' & D_j' & \mu I & 0 \\ \hat{Q} A_j' & \hat{Q} C_j' & 0 & \hat{Q} \end{bmatrix} > 0, \quad \hat{Q} = \hat{Q}' > 0. \quad (60)$$

Para o projeto do controlador discreto de rejeição de distúrbio aplicado ao Boost considerando peso na frequência, substitui-se A_v , B_v , C_v dado em (58) em (60) tem-se:

$$\|H_j\|_\infty^2 = \min \mu$$



s.a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & 0 & B_1 & Aa_{11} - B_2Y & Aa_{11} - B_2Y \\ a_{11} & a_{22} & 0 & 0 & B_fC_1a_{11} + A_fa_{11} & B_fC_1a_{11} + A_fa_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & C_fa_{11} & C_fa_{22} \\ B'_1 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ a_{11}A' - Y'B'_2 & a_{11}C'_1B'_f + a_{11}A'_f & a_{11}C'_f & 0 & a_{11} & a_{11} \\ a_{11}A' - Y'B'_2 & a_{11}C'_1B'_f + a_{22}A'_f & a_{22}C'_f & 0 & a_{11} & a_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (61)$$

Solucionando (61) obtém-se o controlador fazendo $K = a_{11}^{-1}Y$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{11} & a_{22} \end{bmatrix} > 0. \quad (62)$$

Neste projeto também pode-se adicionar a restrição de alocação de polos em malha fechada por um círculo substituindo A_v , B_v , C_v na equação (48), realizando esse procedimento tem-se a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} A_1a_{11} + a_{11}A' - Y'B'_2 - B_2Y + 2\alpha a_{11} & a_{11}A - B_2Y + a_{11}C'_1B'_fa_{11}A'_f + 2\alpha a_{11} \\ a_{11}A' - Y'B'_2 + B_fC_1a_{11} + A_fa_{11} + 2\alpha a_{11} & a_fC_1a_{11} + a_{11}C'_1B'_f + A_fa_{22} + a_{22}A'_f + 2\alpha a_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (63)$$

Por fim para obter o controlador K com restrição de alocação de polos, deve-se resolver as inequações (61) e (63) simultaneamente.

3.5 A Norma \mathcal{H}_2 via LMI

3.5.1 Para sistemas em espaço de espaço contínuo

Considere o sistema \mathcal{H}_e dado em (64) para a apresentação da norma \mathcal{H}_2 .

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= A_ex(t) + B_e\mu(t) \\ z_e(t) &= C_ex(t) \end{aligned} \quad (64)$$

A norma \mathcal{H}_2 do sistema \mathcal{H}_e pode ser obtida pela solução simultânea das LMIs (65) e (66).



$$\|H_e\|_2^2 = \min \mathbf{Tr}(Z)$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} Z & B_e'P \\ PB_e & P \end{bmatrix} > 0 \quad (65)$$

$$\begin{bmatrix} A_eP + PA_e' & PC_e' \\ C_eP & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (66)$$

Por comparação, pode-se substituir os termos (43) da seguinte forma: $A_e = A_m$, $B_e = B_1$, $C_e = C_1$, e $K = P^{-1}Y$, com $P = P' > 0$, para obter o projeto do controlador aplicado ao Boost visando rejeição do efeito do sinal de distúrbio de w na saída z do conversor. Então, pode-se obter o controlador \mathcal{H}_2 K resolvendo-se simultaneamente as LMIs (67) e (68).

$$\|H_e\|_2^2 = \min \mathbf{Tr}(Z)$$

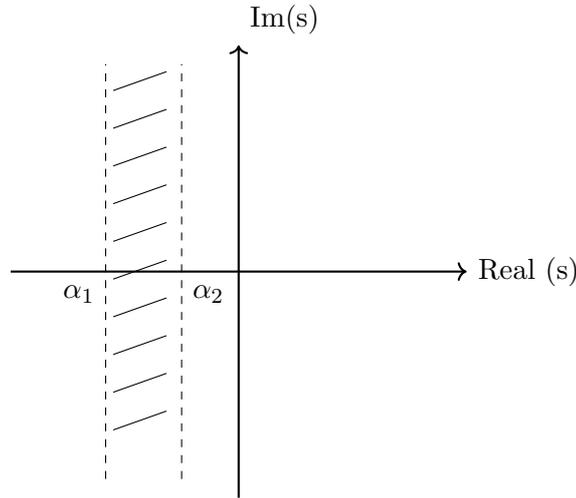
$$\begin{bmatrix} Z & B_1' \\ B_1 & P \end{bmatrix} > 0, \quad P = P' > 0 \quad (67)$$

$$\begin{bmatrix} AP - B_2Y + PA' - B_2'Y' & PC_1' \\ C_1P & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (68)$$

Como nos casos anteriores para o projeto do controlador considerando a norma \mathcal{H}_∞ como critério de desempenho, pode-se restringir a região de alocação dos polos conforme a Figura 6. Para isso, deve-se resolver as LMIs (67) e (68) junto a (69) e (70), que apresentam as desigualdades que restringem os polos. Diferentemente da restrição circular anterior, a restrição na região entre as retas em α_1 e α_2 resultam em um controlador K mais eficiente na rejeição de distúrbio para este modelo de controle, como pode ser visto na seção de resultados.



Figura 6: Região de restrição delimitada por α_1 e α_2 no plano complexo.



Fonte: Autor (2024).

$$AP - B_2YP + PA' - PB_2'Y' + 2\alpha_1P < 0 \quad (69)$$

$$AP - B_2YP + PA' - PB_2Y + 2\alpha_2P > 0 \quad (70)$$

3.5.2 Para sistemas em espaço de estado discreto

Considere o sistema discreto do Boost dado em (54), e considere também um sistema \mathcal{H}_x dado na forma de espaço de estado como:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_x x_x(k+1) + B_x u_x \\ z_x(k) &= C_x x_x(k) \end{aligned} \quad (71)$$

A norma \mathcal{H}_2 discreta para o sistema \mathcal{H}_x é dada pela solução simultânea das LMIs dadas em (72) e (73).

$$\|H_x\|_2^2 = \min \mathbf{Tr}(Z)$$

$$\begin{bmatrix} P & B_1 \\ B_1' & \mu \end{bmatrix} \geq 0 \quad (72)$$



$$\begin{bmatrix} w & wC' & wA'_x \\ Cw & I & 0 \\ A_xw & 0 & w \end{bmatrix} \geq 0 \quad (73)$$

Para o projeto do controlador \mathcal{H}_2 discreto de rejeição de distúrbios aplicado ao conversor Boost, substituem-se as matrizes A_m , B_1 e C_1 , dadas em (56), na formulação apresentada em (73). Além disso, realiza-se a manipulação algébrica $Y = KP$. Dessa forma, obtém-se as seguintes LMIs:

$$\|H_x\|_2^2 = \min \mathbf{Tr}(Z)$$

$$\begin{bmatrix} P & B_1 \\ B_1' & \mu \end{bmatrix} \geq 0 \quad (74)$$

$$\begin{bmatrix} P & PC_1' & PA' - Y'B_2' \\ C_1P & I & 0 \\ AP - B_2Y & 0 & P \end{bmatrix} \geq 0 \quad (75)$$

Adicionando a restrição de uma circunferência para a alocação dos polos, conforme apresentado na Seção 3.4 para o projeto do controlador \mathcal{H}_∞ , tem-se que:

$$\begin{bmatrix} -rP & AP - B_2Y + qP \\ PA' - Y'B_2' + qP & -rP \end{bmatrix} \leq 0 \quad (76)$$

O controlador \mathcal{H}_2 discreto K de rejeição de distúrbio aplicado ao conversor Boost pode ser obtido resolvendo-se simultaneamente as LMIs (74), (75) e (76). O controlador K pode ser obtido multiplicando-se $K = P^{-1}Y$.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O circuito elétrico do conversor Boost ilustrado na Figura 1 foi implementado via simulação no *software* MATLAB/Simulink.

Considere o Boost dado em (26), com os seguintes parâmetros:

- Capacitância de $220 \mu F$;



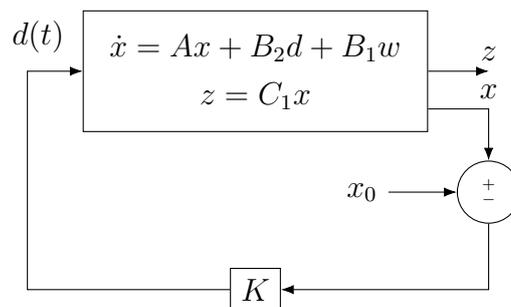
- Indutância de $L = 200 \mu H$;
- Resistência de $R = 48 \Omega$;
- Razão Cíclica de 0,5.

A utilização dos parâmetros acima permite a construção do modelo em espaço de estados representado a seguir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{I}_L(t) \\ \dot{V}_C(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2,5000 \\ 2,2727 & -0,0947 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 120000 \\ 0 \end{bmatrix} d(t) + \begin{bmatrix} 5,0000 & 0 \\ 0 & -4,5455 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (77)$$

Na Figura 7 é apresentado o diagrama de blocos que implementa o sistema dado na equação (26) com realimentação de estados.

Figura 7: Diagrama de blocos do Boost simulado com controlador e realimentação

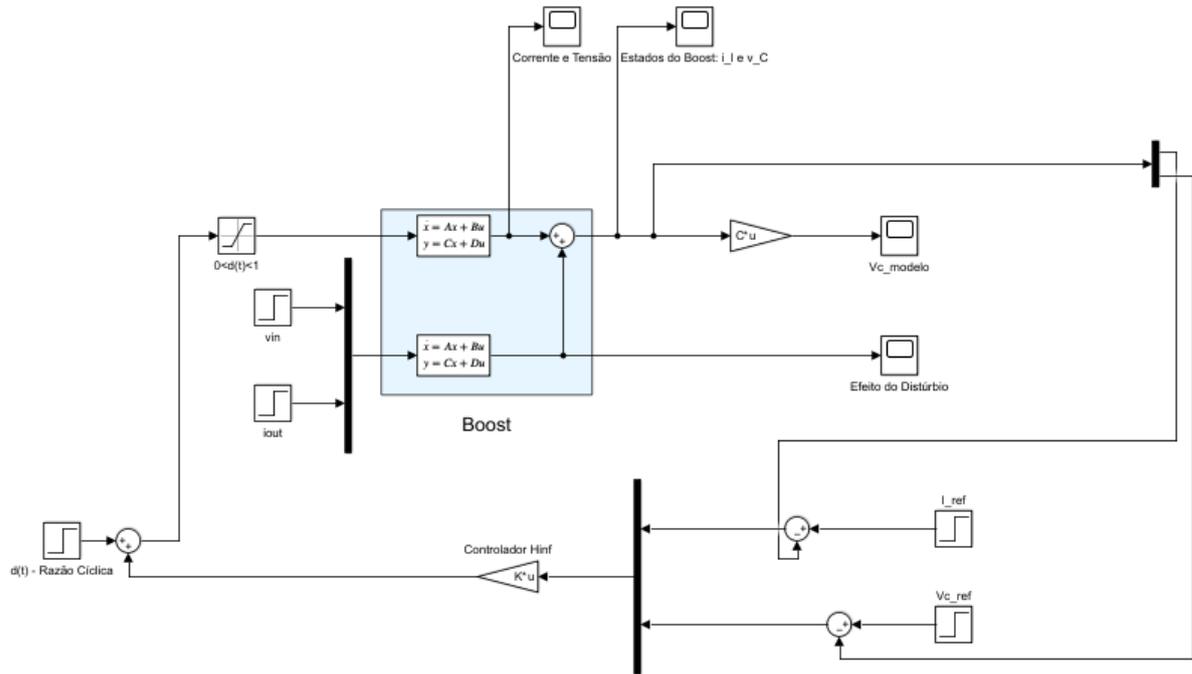


Fonte: Autor (2024).

A implementação desse sistema via MATLAB/Simulink pode ser observada na Figura 8.



Figura 8: Circuito Boost modelado em espaço de estados com realimentação de estados e controladores \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_2



Fonte: Autor (2024).

4.1 Resultado do Projeto do Controlador \mathcal{H}_∞ Aplicado ao Boost

A seguir apresentam-se os resultados obtidos para o controlador \mathcal{H}_∞ em espaço de estado contínuo e discreto (com inserção de peso na frequência). Ambos os casos foram analisados com distúrbios de tensão de 2 V e distúrbios de corrente de 250 mA, utilizando os parâmetros apresentados anteriormente.

4.1.1 \mathcal{H}_∞ Contínuo Sem Filtro

Resolvendo as equações (51), (52) e (53) para o Boost dado em (77), obtém-se o controlador \mathcal{H}_∞ abaixo:

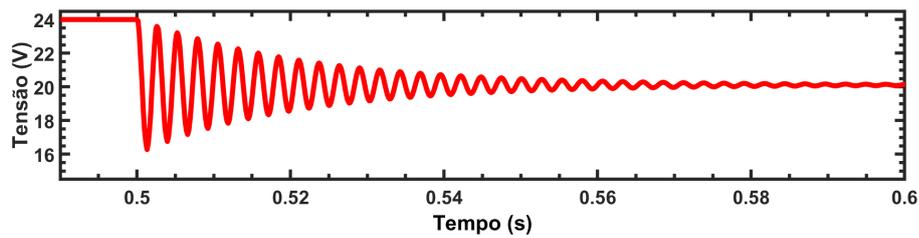
$$K = [0,0025 \quad 0,7124] \quad (78)$$

As Figuras 9a e 9b contém as tensões de saída do Boost modelo sem controlador

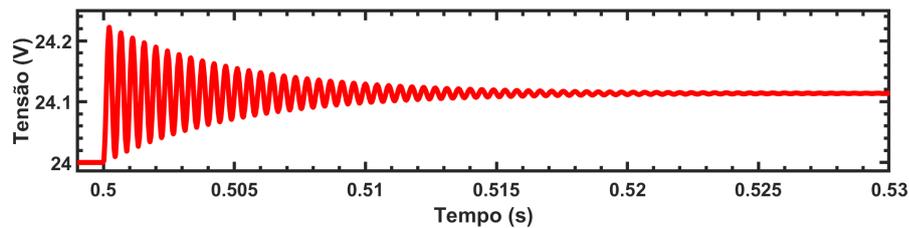


e com controlador \mathcal{H}_∞ para um distúrbio de tensão de $2V$.

Figura 9: Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_∞ contínuo sem filtro submetido a distúrbio de tensão de $2V$



(a) Tensão de saída sem controlador



(b) Tensão de saída com controlador

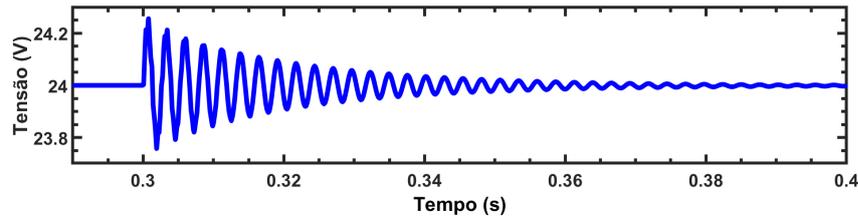
Fonte: Autor (2024).

Observa-se que a tensão de saída após aplicação do controlador \mathcal{H}_∞ varia em torno de $0,1V$, se mantendo próxima de $24,1136V$, o que indica a atenuação do efeito do sinal de distúrbio na saída do conversor.

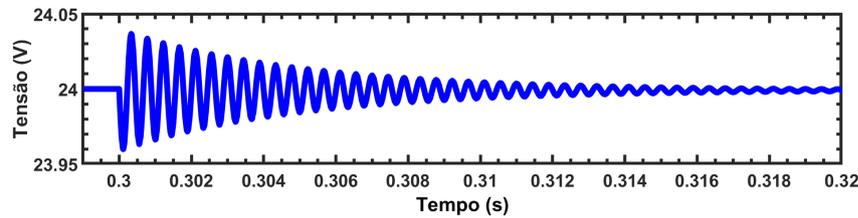
As Figuras 10a e 10b compreendem as tensões de saída do Boost modelo sem controlador e com controlador \mathcal{H}_∞ para um distúrbio de corrente de $250mA$.



Figura 10: Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_∞ contínuo sem filtro submetido a distúrbio de corrente de $0,25 A$



(a) Tensão de saída sem controlador



(b) Tensão de saída com controlador

Fonte: Autor (2024).

Na simulação do conversor boost sujeito a um distúrbio na corrente de carga, nota-se que, em malha aberta, a tensão de saída permanece regulada conforme a equação característica do Boost: $\frac{V_{in}}{(1-D)}$.

Entretanto, para garantir robustez frente a variações na tensão de entrada V_{in} , fecha-se a malha de controle. Nesse contexto, variações na corrente de carga provocam alterações na tensão de saída. Essa situação, bastante comum no controle de conversores Boost, é um cenário em que a aplicação do controlador \mathcal{H}_∞ pode apresentar bons resultados, como ilustrado na Figura 10b em que a tensão de saída do Boost oscila entre $23,8 V$ e $24,2 V$, mas, após aplicação do controlador, a tensão se manteve entre $23,95 V$ e $24,05 V$, com isso o range de oscilação diminuiu de $\pm 0,2 V$ para $\pm 0,05 V$.

4.1.2 \mathcal{H}_∞ Discreto Com Filtro

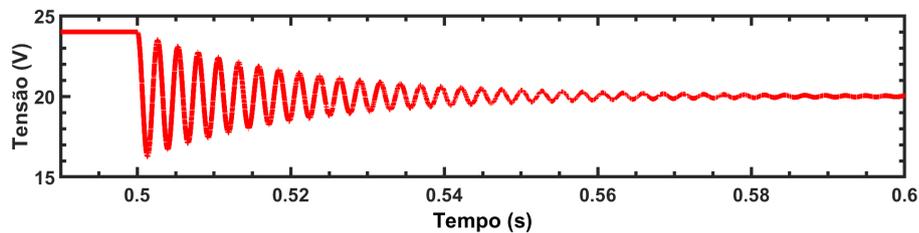
Nesta seção utilizou-se o modelo discretizado do sistema contínuo dado em (77). Para este processo usou-se um período de amostragem de $T_s = 0,001$. No projeto, utilizaram-se as equações (60) e (61), com restrição de raio obtida pela equação (63), para projetar o controlador, o qual é descrito em (79).



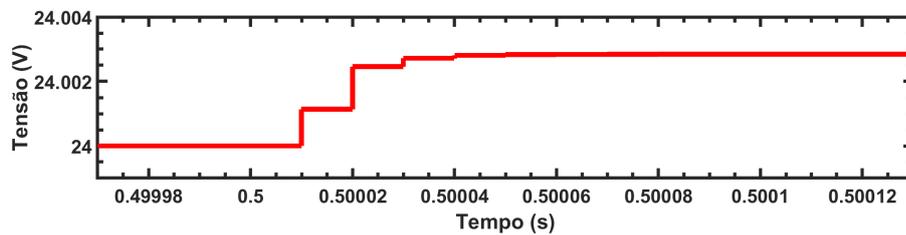
$$K = [1, 1960 \quad 29, 2361] \quad (79)$$

As Figuras 11a e 11b mostram as tensões de saída do Boost sem controlador e com controlador \mathcal{H}_∞ discreto e com filtro para um distúrbio de tensão de $2 V$.

Figura 11: Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_∞ discreto com filtro submetido a distúrbio de tensão de $2 V$



(a) Tensão de saída sem controlador



(b) Tensão de saída com controlador

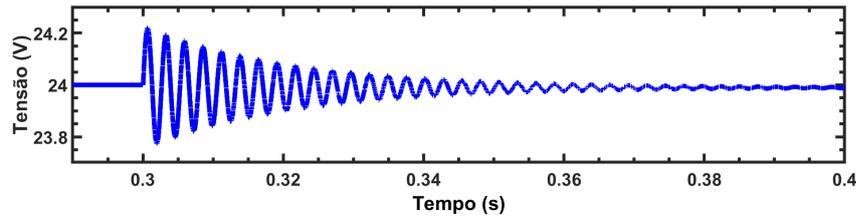
Fonte: Autor (2024).

Com um distúrbio de $2 V$, a tensão em malha aberta caiu para $20 V$, enquanto a saída do conversor em malha fechada operando com o controlador discreto se manteve regulada em $24,0028 V$, o que demonstra a atenuação do efeito do sinal de distúrbio na saída do conversor.

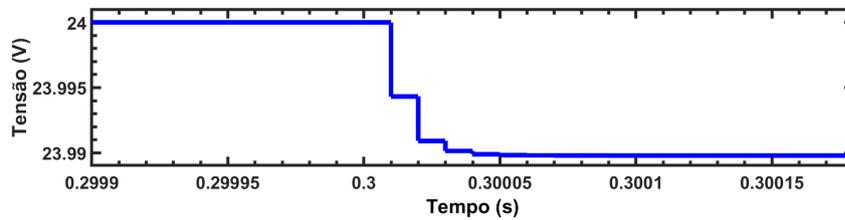
As Figuras 11b e 12b representam o caso do distúrbio de corrente de $250 mA$.



Figura 12: Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_∞ discreto com filtro submetido a distúrbio de corrente de $0,25\text{ A}$



(a) Tensão de saída sem controlador



(b) Tensão de saída com controlador

Fonte: Autor (2024).

Mesmo na presença de um distúrbio de corrente, o sistema consegue regular a tensão de saída em $23,9898\text{ V}$, o que evidencia a atuação eficaz do controlador na manutenção da magnitude da tensão de saída de referência, a qual é de 24 V .

4.2 Resultado do Projeto do Controlador \mathcal{H}_2 Aplicado ao Boost

4.2.1 \mathcal{H}_2 Contínuo Sem Filtro

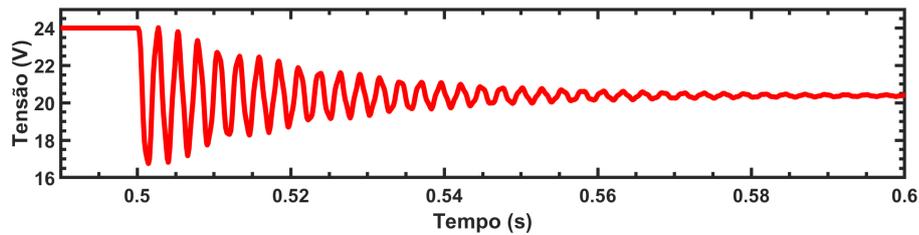
Para o projeto do controlador \mathcal{H}_2 de realimentação de estados com foco na rejeição de distúrbios, utilizaram-se as Equações (67), (68), (69) e (70), que foram resolvidas simultaneamente, resultando no seguinte controlador:

$$K = \begin{bmatrix} -0,0002 & 0,1961 \end{bmatrix} \quad (80)$$

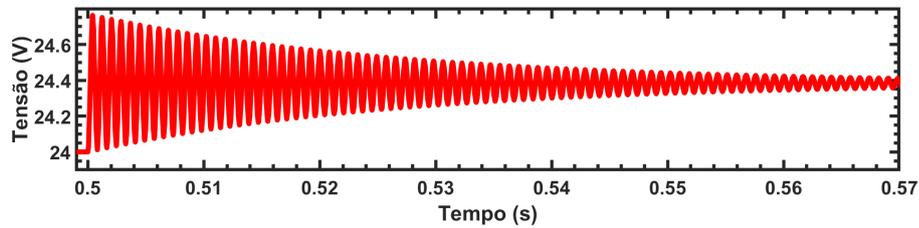
As Figuras 13a e 13b mostram o comportamento da tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_2 , respectivamente.



Figura 13: Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_2 contínuo sem filtro submetido a distúrbio de tensão de 2 V



(a) Tensão de saída sem controlador



(b) Tensão de saída com controlador

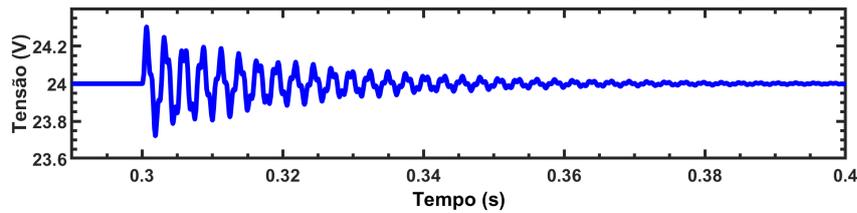
Fonte: Autor (2024).

Com a presença de um distúrbio de 2 V, a tensão em malha aberta caiu para 20 V. Após a aplicação do controlador, a tensão se manteve em aproximadamente 24,3842 V, evidenciando a atenuação do sinal de distúrbio na saída. No entanto, a correção da tensão não foi totalmente satisfatória.

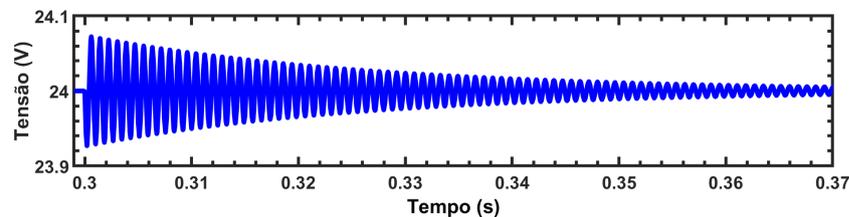
As Figuras 14a e 14b seguintes representam o comportamento da tensão de saída para o caso do distúrbio de corrente de 250 mA.



Figura 14: Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_2 contínuo sem filtro submetido a distúrbio de corrente de $0,25 A$



(a) Tensão de saída sem controlador



(b) Tensão de saída com controlador

Fonte: Autor (2024).

Com a inserção do distúrbio de corrente, a tensão de saída variou $0,1 V$ e se aproximou de $24,0002 V$, o que demonstra a capacidade do controlador de manter a tensão de saída constante. Considerando a irregularidade do sinal, o pode ser considerado aceitável, embora aquém do ideal.

4.2.2 \mathcal{H}_2 Discreto Com Filtro

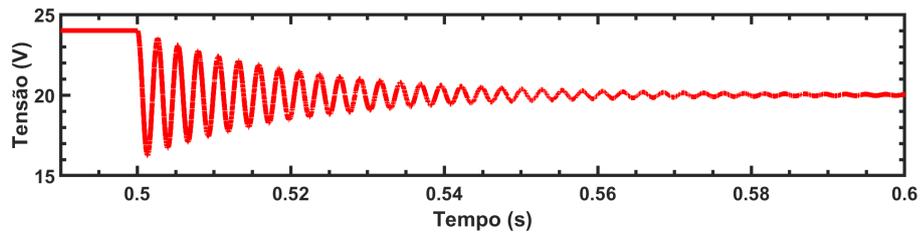
Para o projeto do controlador discreto \mathcal{H}_2 de realimentação de estados com foco na rejeição de distúrbios, utilizaram-se as Equações (74), (75) e (76), que foram resolvidas simultaneamente, resultando no seguinte controlador:

$$K = [1,0373 \quad 14,5047] \quad (81)$$

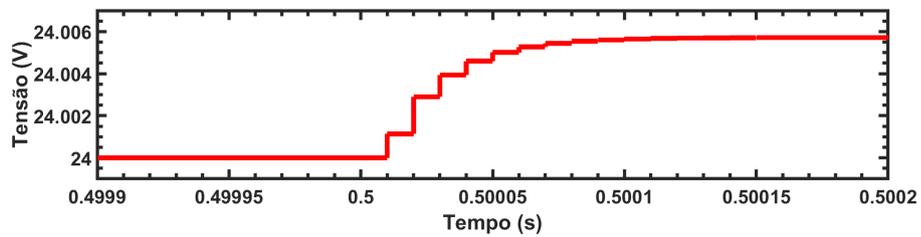
As Figuras 15a e 15b apresentam a tensão de saída do Boost em domínio de tempo discreto com e sem efeito do controlador \mathcal{H}_2 para um distúrbio de tensão de $2 V$.



Figura 15: Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_2 discreto com filtro submetido a distúrbio de tensão de $2V$



(a) Tensão de saída sem controlador



(b) Tensão de saída com controlador

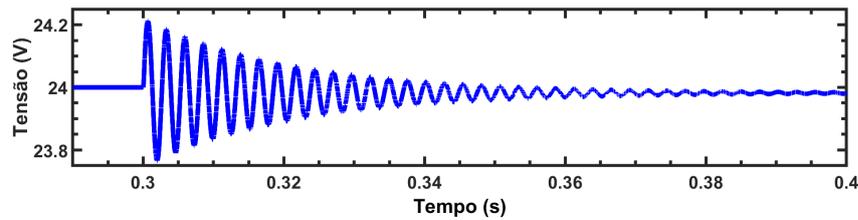
Fonte: Autor (2024).

A tensão de saída é regulada em aproximadamente $24,0057V$, que em comparação à tensão de saída do circuito em malha aberta ($20V$) destaca a rejeição do sinal de distúrbio na saída do sistema.

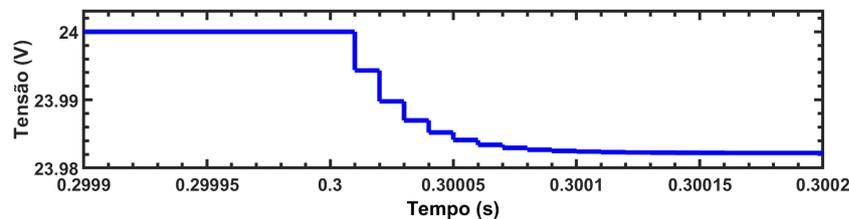
As Figuras a seguir, 16a e 16b apresentam os resultados relativos à tensão de saída do Boost em domínio discreto para um distúrbio de corrente de $250mA$.



Figura 16: Tensão de saída do Boost sem e com controlador \mathcal{H}_2 discreto com filtro submetido a distúrbio de corrente de $0,25\text{ A}$



(a) Tensão de saída sem controlador



(b) Tensão de saída com controlador

Fonte: Autor (2024).

A tensão de saída é de aproximadamente $23,9822\text{ V}$ mesmo com a aplicação do distúrbio de corrente, dessa forma o controlador prova-se eficaz na regulação do sinal de tensão.

4.3 Comparação dos modelos \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2

Todos os modelos apresentaram resultados significativos no controle da tensão de saída tanto para distúrbios de tensão quanto para distúrbios de corrente. Os controladores em sua forma discreta apresentaram ótimo desempenho, evidenciado por um tempo de estabelecimento menor, nesta topologia, em comparação ao sistema de controle contínuo durante o processo de rejeição de distúrbios na saída do conversor.

Com relação às normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 , os principais resultados podem ser subdivididos de acordo com o tipo de distúrbio. Para o distúrbio de tensão, a melhor resposta de tensão de saída controlada foi de $24,0028\text{ V}$ para o modelo baseado na norma \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com ponderação em frequência, e de $24,0057\text{ V}$ para o modelo com norma \mathcal{H}_2 , também em espaço de estado discreto e com ponderação em frequência.

Dessa forma, o projeto do controlador discreto \mathcal{H}_∞ com filtro apresentou resultados satisfatórios. Nesse contexto, a inserção do filtro permite direcionar o projeto para a



rejeição do efeito do sinal de distúrbio na saída do conversor Boost em uma faixa específica de frequência, previamente considerada durante o dimensionamento do controlador.

5 CONCLUSÃO

O estudo viabilizou a implementação de simulações baseadas nas normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 aplicadas ao conversor Boost, tanto em espaço de estados contínuo quanto discreto. Os resultados obtidos foram satisfatórios, com a tensão de saída controlada se aproximando significativamente do valor de referência de 24, V. Destaca-se, em especial, o desempenho do controlador \mathcal{H}_∞ em espaço discreto com ponderação em frequência, que se mostrou a alternativa mais eficaz para o projeto de controle do conversor Boost, ao promover uma correção eficiente da tensão mesmo na presença de distúrbios.

Assim, para a construção de um modelo de regulação de tensão para o conversor Boost, o controlador \mathcal{H}_∞ seria a escolha ideal com base neste estudo.



REFERÊNCIAS

BOSE, B. K. **Power Electronics and Motor Drives: advances and trends**. Academic press, 2020.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. Disponível em: (<https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611970777>).

CHILALI, M.; GAHINET, P. H design with pole placement constraints: an lmi approach. **IEEE Transactions on automatic control**, IEEE, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.

CUNHA, R.; INOMOTO, R.; ALTUNA, J.; COSTA, F.; SANTO, S. D.; FILHO, A. S. **Constant Switching Frequency Finite Control Set Model Predictive Control Applied to The Boost Converter of a Photovoltaic System**. *Solar Energy*, Elsevier, v. 189, p. 57–66, 2019.

DEMIRTAS, M.; AHMAD, F. **Fractional Fuzzy PI Controller Using Particle Swarm Optimization to Improve Power Factor by Boost Converter**. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, 2023.

DEZUO, T. **Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)**. s.d. Acesso em: 29 nov. 2024. Disponível em: (https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id_cpmenu/9599/_Aula_Desigualdades_Matriciais_Lineares_LMIs_17234553864312_9599.pdf).

GULDEMIR, H. **Sliding Mode Control of DC-DC Boost Converter**. *Journal of Applied Sciences*, v. 5, n. 3, p. 588–592, 2005.

GUO, L.; HUNG, J. Y.; NELMS, R. M. **Digital Controller Design for Buck and Boost Converters Using Root Locus Techniques**. In: IEEE. **IECON'03. 29th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IEEE Cat. No. 03CH37468)**. [S.l.], 2003. v. 2, p. 1864–1869.

INC., T. M. **MATLAB version: 24.2 (R2024b)**. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2022. Disponível em: (<https://www.mathworks.com>).

KHAYAT, Y.; NADERI, M.; SHAFIEE, Q.; BATMANI, Y.; FATHI, M.; BEVRANI, H. **Robust control of a DC-DC boost converter: H₂ and H_∞ techniques**. In: **2017 8th Power Electronics, Drive Systems Technologies Conference (PEDSTC)**. [S.l.: s.n.], 2017. p. 407–412.

LACERDA, M. J. **Representação em Espaço de Estados - caso próprio**. 2020. Disponível no YouTube. Acesso em: 29 nov. 2024. Disponível em: (<https://www.youtube.com/watch?v=hhtGfE6OUEE&list=PLA1e0NJR0FbeShDemvuZ5ukO16jmBa8Hj&index=19>).



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul



NILSSON, J.; RIEDEL, S. **Circuitos Elétricos**. PRENTICE HALL BRASIL, 2015. ISBN 9788543004785. Disponível em: (<https://books.google.com.br/books?id=hrpFvgAACAAJ>).

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 6. ed.. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2012.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2003.