

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**CARLOS RODRIGO OZUNA DOS SANTOS**

**ANÁLISE HISTÓRICA, EPISTEMOLÓGICA, CURRICULAR E DIDÁTICA DO  
CONCEITO DE FUNÇÃO**

**Campo Grande – MS  
2022**

**CARLOS RODRIGO OZUNA DOS SANTOS**

**ANÁLISE HISTÓRICA, EPISTEMOLÓGICA, CURRICULAR E DIDÁTICA DO  
CONCEITO DE FUNÇÃO**

**Dissertação de Mestrado apresentada  
ao Curso de Mestrado em Educação  
Matemática da Universidade Federal de  
Mato Grosso do Sul, como requisito  
parcial para a obtenção do título de  
Mestre em Educação Matemática.  
Orientador: Prof. Dr. Mustapha Rachidi**

**Campo Grande – MS**

**2022**

**CARLOS RODRIGO OZUNA DOS SANTOS**

**ANÁLISE HISTÓRICA, EPISTEMOLÓGICA, CURRICULAR E DIDÁTICA DO  
CONCEITO DE FUNÇÃO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Mustapha Rachidi.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Mustapha Rachidi (Orientador)  
UFMS – Campo Grande

---

Profa. Dra. Cintia Melo dos Santos  
UFGD – Dourados

---

Profa. Dra. Sonia Maria Monteiro da Silva  
Burigato  
UFMS – Campo Grande

---

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas  
(Suplente interno)  
UFMS – Campo Grande

---

Prof. Dr. Claudemir Anis (Suplente  
externo)  
UFMS/PROFMAT – Campo Grande

Campo Grande, 06 de setembro de 2022.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, por permitir que eu tivesse vida, saúde, paz e determinação para não desanimar durante a realização desta pesquisa, e para persistir nos momentos de desânimo.

À minha família, que sempre esteve ao meu lado, incentivando nos momentos difíceis e compreendendo minha ausência enquanto eu me dedicava à realização desta pesquisa.

Aos amigos, pela amizade e pelo apoio demonstrado, seja diretamente com auxílios e orientações, seja indiretamente, com o apoio e conselho nos momentos difíceis.

Ao professor Mustapha Rachidi, por ter sido meu orientador e desempenhar essa importante função, agradeço todos os conselhos dados, a ajuda e paciência com a qual me guiou neste momento de grande aprendizado. Saiba que, em cada momento de conversa houve grande aprendizado e, poder ter esses momentos de diálogo com alguém desta envergadura no assunto Função, é algo que me traz muito orgulho e da qual eu jamais me esquecerei. Obrigado por toda sua humildade.

Aos professores que compuseram a banca de qualificação e de defesa, pela disponibilidade e paciência com a qual desempenharam essa função de, avaliar, colaborar e contribuir com a pesquisa, saiba que jamais me esquecerei do comprometimento de vocês. Em especial, agradeço as professoras Sonia Burigato e Cintia Melo, pelas colaborações que deram na qualificação, e ao professor Luiz Carlos Magalhães, que já há algum tempo vem acompanhando e contribuindo brilhantemente com esta pesquisa.

À professora Edilene Simões, que, enquanto coordenadora do curso, em momento de grande lucidez, conversou comigo e me convenceu a continuar no curso, jamais me esquecerei das palavras ditas naquela conversa, e a maneira como conduziu aquele momento de desânimo e desistência de minha parte. Muito obrigado professora Edilene, por acreditar em mim.

Aos professores do PPGEduMat, que contribuíram sobremaneira com minha formação, obrigado por cada aula, cada momento, cada palavra. Tudo foi muito único neste curso, e sou grato a todos vocês.

Aos meus colegas de turma, por todos os momentos de descobertas e aprendizado, e pelo companheirismo ao longo deste percurso.

À todos aqueles que contribuíram, de alguma forma, para a realização desta pesquisa.

## RESUMO

O presente trabalho visa estudar o conceito de Função, passando por seus aspectos históricos, epistemológicos e didáticos. A pesquisa se justifica tanto pelas dificuldades que alunos da educação básica têm com esse conceito fundamental, que acaba por refletir em dificuldades em cálculo diferencial e integral no ensino superior, como também, para o seu ensino e aprendizagem, em que os professores, conscientes da ligação entre o ensino da matemática, a história da matemática e a didática, podem construir uma estratégia para levar seus alunos a adquirir esta noção. Além disso, como a formação do conceito de Função exigiu muito labor e dedicação, o professor que está atento a essa evolução histórica, repleta de obstáculos, poderá construir uma abordagem adequada a partir da história do conceito de Função. Para tanto, nosso aporte teórico e metodológico foi por meio de uma pesquisa bibliográfica, apoiados em Severino, Sousa e outros, sendo desenvolvido uma revisão da literatura de obras já existentes sobre o tema. Para isto, fizemos um trabalho de levantamento de fontes bibliográficas confiáveis, afim de obter os dados necessários ao desenvolvimento da pesquisa e a solução do problema de pesquisa. Posterior, estudamos o conceito de Função no Currículo e nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental e Médio. Em seguida fizemos uma breve abordagem histórica desse conceito em diversos materiais bibliográficos encontrados, físicos e digitalmente, em que foram analisadas em particular, as duas definições do conceito de Função propostas por Euler. Por fim, como aplicação, apresentamos e analisamos algumas atividades para a introdução do conceito de Função tanto na educação básica, quanto na graduação no ensino de matemática.

**Palavras-chaves:** Conceito de Função, Euler, Currículos, Livros Didáticos.

## Abstract

The present work aims to study the concept of Function, going through its historical, epistemological and didactic aspects. The research is justified both by the difficulties that basic education students have with this fundamental concept, which ends up reflecting difficulties in differential and integral calculus in higher education, as well as for their teaching and learning, in which teachers, aware of the link between the teaching of mathematics, the history of mathematics and didactics, can build a strategy to lead their students to acquire this notion. In addition, as the formation of the concept of Function required a lot of work and dedication, the teacher who is aware of this historical evolution, full of obstacles, will be able to build an adequate approach from the history of the concept of Function. Therefore, our theoretical and methodological contribution was through a bibliographic research, supported by Severino, Sousa and others, a literature review of existing works on the subject was developed. For this, we carried out a survey of reliable bibliographic sources, in order to obtain the necessary data for the development of the research and the solution of the research problem. Later, we studied the concept of Function in the Curriculum and Textbooks of Elementary and High Schools. Then we made a brief historical approach of this concept in several bibliographic materials found, physically and digitally, in which the two definitions of the concept of Function proposed by Euler were analyzed in particular. Finally, as an application, we present and analyze some activities to introduce the concept of Function both in basic education and in undergraduate mathematics teaching.

**Keywords:** Concept of function, Euler, Curriculum, textbook

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: A noção de Função .....	29
Figura 2: Definição de Função Afim .....	30
Figura 3: Definição de Função Linear .....	30
Figura 4: Definição de Função Quadrática .....	31
Figura 5: Gráfico da Função Quadrática .....	32
Figura 6: Zeros da Função Quadrática.....	33
Figura 7: Noção de Função como relação entre Conjuntos .....	36
Figura 8: Exemplos de Funções.....	37
Figura 9: Noção de Função por meio de Conjuntos .....	37
Figura 10: Definição de Domínio e Contradomínio.....	38
Figura 11: Definição de Conjunto Imagem .....	39
Figura 12: História da Matemática - O desenvolvimento do conceito de Função.....	40



## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1: Análise das definições de função (1694 - 1927) por Rosane Corsini .....	53
---	----

## **LISTA DE ABREVIACOES**

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

MEC – Ministério da Educao

PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático

PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

SED-MS – Secretaria de Estado de Educao de Mato Grosso do Sul

TAC – Taxas de aberturas de crédito

USP – Universidade de São Paulo

## SUMÁRIO

1 FUNÇÕES NO CURRÍCULO E NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL E ENSINO MÉDIO.....	18
1.1 Conceito de Função no Currículo.....	18
1.1.1 Conceito de Função no Currículo do Ensino Fundamental e seus objetivos .....	19
1.1.2 Conceito de Função no Currículo do Ensino Médio e seus objetivos .....	21
1.1.3 Análise e Discussão.....	25
1.2 Conceito de Função nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental .....	28
1.2.1 Análise de Atividades de introdução do conceito de Função.....	33
1.2.2 Análise da definição .....	34
1.2.3 Comparação do conceito de Função no Currículo e nos Livros Didáticos.....	34
1.3 Conceito de Função nos Livros Didáticos de Ensino Médio .....	35
1.3.1 Análise de Atividades de introdução do conceito de Função.....	41
1.3.2 Análise da definição.....	43
1.3.3 Comparação do conceito de Função no Currículo e nos Livros Didáticos.....	43
1.4 Conclusão .....	45
2 UMA BREVE VISÃO DA EVOLUÇÃO HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA DO CONCEITO DE FUNÇÃO .....	48
2.1 Breve olhar sobre a evolução histórica e epistemológica do conceito de Função .....	49
2.2 Um esboço de análise das dificuldades históricas e epistemológicas do conceito de Função.....	57
2.3 Análise e Discussão.....	62
3 ANÁLISE DA DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO PROPOSTO POR EULER E UM PANORAMA DE SUA EVOLUÇÃO HISTÓRICA .....	64
3.1 Primeira definição de Euler - 1748.....	65
3.2 Análise da definição .....	67
3.3 Como se deu a evolução do Conceito de Função de Euler: Segunda definição .....	68
3.3.1 Problema das cordas vibrantes .....	68
3.3.2 A controvérsia D'Alembert-Euler e a nova definição de Euler .....	69
3.4 Evolução do conceito de Função: Como era antes de Euler .....	70
3.5 Evolução do conceito de Função: Como se tornou depois de Euler .....	72
3.5.1 Observações.....	75

3.6 Conclusão .....	75
4. SOBRE AS DEFINIÇÕES HISTÓRICAS, A DIDÁTICA E O ENSINO .....	76
4.1 Classificação de abordagens históricas .....	77
4.1.1 Observação .....	78
4.2 Estudo da história do conceito de Função e ensino.....	78
4.3 Estudo de história do conceito de Função como cultura geral .....	81
4.3.1 Uma breve observação.....	82
4.4 Algumas considerações didáticas .....	83
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	85
REFERÊNCIAS.....	90
ANEXO.....	93

## INTRODUÇÃO

A construção inicial de um determinado conceito em Matemática nem sempre se dá de forma concreta, devido ao fato de originarem na mente humana, e muitos, de uma maneira totalmente abstrata. Para o conceito de Função, reconhecemos que houve grande evolução, desde os tempos babilônicos até os dias de hoje, seja no conceito em si, seja em seus usos. Por exemplo, para facilitar os cálculos, os babilônios tinham tabelas de valores. Existe uma tabela de valores que dá o comprimento de um lado do triângulo retângulo, conhecendo a hipotenusa e o outro lado. Na ciência europeia do século XIV, as noções de grandezas variáveis e Funções foram expressas pela primeira vez tanto na forma geométrica quanto na mecânica.

São vários casos e, em cada caso concreto, quando há a dependência entre duas quantidades, podemos definir uma descrição verbal ou por meio de um gráfico. Em geral, na época da Idade Média, os objetivos eram de diferentes tipos: facilitar cálculos; construir de triângulos; desenvolver um método confiável para prever eclipses solares ou descrever um fenômeno e suas variações.

Nos tempos modernos, a partir do século XVI até o início do século XVIII, o conceito de Função foi se desenvolvendo constantemente, graças à criação da álgebra literária com Viète e às anotações algébricas de Descartes. Em particular, o estudo dos movimentos foi o assunto mais pesquisado e desenvolvido. Com o nascimento do cálculo diferencial e integral, com Newton e Leibniz, foi possível, por meio de muita dedicação, chegar a uma definição rigorosa do conceito de Função com EULER (1748). Mas até o final do século XVIII, o conceito de Função estava sempre ligado a situações práticas.

As obras dos matemáticos do século XIX, como Cauchy e Weierstrass, levaram à fundação da análise moderna. Pode-se dizer que depois disso, a história da introdução das Funções no ensino começou no início do século XX. Isto é, no início do século XX, a educação secundária da maioria dos países europeus foi alterada por um movimento de reforma educacional, em particular para redefinir os programas de matemática e a também maneira de ensinar matemática. Matemáticos famosos contribuíram para essas reformas dos Currículos de matemática.

Nesta dissertação nos propomos a analisar e estudar o conceito de Função, como ele se desenvolveu, desde seus primeiros registros com os babilônicos, que trabalhavam com tábuas que nos dão uma ideia de Função até a forma como hoje é

apresentado este importante conceito nas salas de aulas. Esta dissertação se baliza sobre a questão: com base no desenvolvimento histórico da definição de Função, comparada com a forma como ela é apresentada nos Currículos atuais e nas definições proposta nos Livros Didáticos, seria esta maneira de apresentação deste conceito atual o modo mais assertivo para trazer entendimento e clareza aos nossos alunos acerca desse conceito?

O objetivo geral desta dissertação é analisar o conceito de Função historicamente, epistemologicamente e didaticamente, por meio da análise do contexto histórico que permeia seu desenvolvimento, os desafios encontrados por matemáticos que se propuseram a pesquisar e estudar profundamente este conceito, até a forma como este conceito é apresentado nos Currículos e Livros Didáticos atuais.

Para atender este objetivo geral, bem como responder a questão de pesquisa, traçamos quatro objetivos específicos. O primeiro objetivo, é analisar o conceito de Função tal qual é apresentado nos Currículos e nos Livros Didáticos, com a finalidade de verificar se a forma como é proposto pelo Currículo nacional, dialoga com a proposta dos Livros Didáticos. O segundo objetivo específico, agora ciente de como é proposto atualmente este conceito, é analisar a evolução histórica e epistemológica do conceito de Função.

O terceiro objetivo específico é analisar o conceito de Função proposto por Euler em 1748, que foi posteriormente modificado por ele em 1755, analisando para além disso, o período pré e pós conceito de Euler. Por fim, o quarto objetivo específico é estabelecer a relevância da história do conceito de Função para o ensino, além de indicar quais as definições deste conceito consideramos as mais assertivas para se trabalhar no ensino deste objeto matemático.

Para alcançar estes objetivos e responder esta questão de pesquisa, optamos por usar uma metodologia de pesquisa bibliográfica, por entender que este tipo de pesquisa auxilia grandemente nas investigações científicas de obras já publicadas. Assim, uma pesquisa baseada nesta metodologia inicia-se por meio de uma revisão da literatura de obras já existentes sobre o tema e que esteja contextualizado com o objeto problema. Para isto, faz-se necessário um trabalho de levantamento de fontes bibliográficas confiáveis, afim de obter os dados necessários ao desenvolvimento da pesquisa e a solução do problema de pesquisa.

Em sua obra, Sousa faz um levantamento dos principais pontos a serem analisados quando um autor decide trabalhar com esta metodologia de pesquisa científica, concluindo que a pesquisa bibliográfica:

É uma importante metodologia no âmbito da educação, a partir de conhecimentos já estudados, o pesquisador busca analisá-los para responder seu problema do objeto de estudar ou comprovar suas hipóteses, adquirindo novos conhecimentos sobre o assunto pesquisado. Para realizar uma pesquisa bibliográfica o pesquisador precisará de tempo e cuidado para analisar os levantamentos das obras publicadas. (SOUSA; OLIVEIRA; ALVES, 2021, p. 81)

Um dos aportes teóricos utilizados por eles nesta pesquisa é Severino (2007), que defende que uma pesquisa bibliográfica deve ser realizada pelo:

[...] registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utilizam-se dados de categorias teóricas já trabalhadas por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir de contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos (SEVERINO, 2007, p. 122).

Para isto realizamos uma extensa busca por livros, revistas, artigos científicos, monografias, dissertações e teses, entre outros, com validações, sejam impressos ou online, que pudessem alicerçar esta dissertação. Esta pesquisa por materiais foi baseada em cada tema proposto para os capítulos, que será brevemente comentado. Com base em nosso referencial teórico metodológico de pesquisa, seguimos os passos necessários até a análise e interpretação dos dados disponíveis, quais sejam, após a escolha do tema e a delimitação do problema, levantamento pela internet e bibliotecas de referenciais bibliográficos que pudessem atender ou ajudar a resolver o problema de pesquisa. Após a análise dos textos, selecionamos aqueles que melhor atenderiam nossa pesquisa, sendo feita, agora com o rigor de uma pesquisa científica, uma leitura, interpretação e análise crítica dos textos.

Vale ressaltar ainda que, para Salomom, esta crítica feita ao texto deve ser dividida em crítica externa e interna, sendo a externa aquela crítica que avalia “[...] o significado, a importância e o valor histórico de um documento, considerado em si mesmo e em função do trabalho que está sendo elaborado” e a interna “[...] é aquela que aprecia o sentido e o valor do conteúdo” (SALOMOM, 1972, p. 256), sendo que elas abrangem:

Crítica externa:

- a) crítica do texto. Averigua se o texto sofreu ou não alterações, interpolações e falsificações ao longo do tempo;
- b) crítica da autenticidade. Determina o autor, o tempo, o lugar e as circunstâncias da composição;
- c) crítica da proveniência. Investiga a proveniência do texto.

Crítica interna:

- a) crítica de interpretação ou hermenêutica. Averigua o sentido exato que o autor quis exprimir. Facilita esse tipo de crítica o conhecimento do vocabulário e da linguagem do autor, das circunstâncias históricas;
- b) crítica do valor interno do conteúdo. Aprecia a obra e forma um juízo sobre a autoridade do autor e o valor que representa o trabalho e as ideias nele contidas (SALOMOM, 1972, p. 256).

A dissertação está dividida em quatro capítulos, afim de que cada capítulo atenda a um objetivo específico, e possamos ao final, atender o objetivo geral desta pesquisa, bem como responder a questão de pesquisa. Em seu primeiro capítulo, tratamos o conceito de Função, a partir da análise desse conceito nos Currículos vigentes no Brasil, seja em nível nacional, por meio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), seja em nível estadual, mais especificamente no Estado de Mato Grosso do Sul, por meio do Currículo de Referência do Mato Grosso do Sul, oferecido pela Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul (SED-MS). Ainda neste capítulo, trazemos como esse conceito é trabalhado nos Livros Didáticos adotados por algumas escolas públicas, no estado de Mato Grosso do Sul, fazendo um estudo sobre até que ponto os Livros Didáticos adotados pelas escolas públicas vinculadas à Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul atendem aos objetivos e competências estabelecidos pelos Currículos nacionais e estaduais.

Para o segundo capítulo, veremos que desde a Idade Média, ou antes até, muitos trabalhos utilizaram esse conceito, implicitamente, o que semeou confusão, pois seus aspectos ainda não haviam sido identificados. Demorou décadas e décadas, portanto, para que surgisse uma definição precisa do conceito de Função, sendo mais precisa a definição proposta por Euler, conceito que será trabalhado com mais cuidado e maiores detalhes no próximo capítulo. A ideia deste capítulo é percorrer a história dessa noção, mostrar os aspectos que afetaram a construção desse conceito, bem como as dificuldades encontradas ao longo do caminho, analisando historicamente algumas das diferentes definições propostas ao longo do tempo por diferentes pensadores, sendo escolhidos os principais, aqueles que apresentaram propostas mais completas e concretas até chegar à definição que entendemos ser a mais geral para este conceito.



No terceiro capítulo, trataremos da definição do conceito de Função proposto por Euler no século XVIII, apresentando uma análise de seu conteúdo e o situando sua definição em seu contexto histórico, apontando o período que antecede a definição, ou seja, como era tratado este conceito até Euler, e o período posterior a definição de Euler.

Por fim, no quarto capítulo, objetiva-se estabelecer a relevância da história do conceito de Função para o ensino deste importante objeto matemático. Analisamos uma série de definições ao longo da história e as comparamos com as definições que consideramos mais relevantes no ensino atual e nos Livros Didáticos. Destacamos também o importante papel da história do conceito de Funções, para uma abordagem didática.

## **1 FUNÇÕES NO CURRÍCULO E NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL E ENSINO MÉDIO**

Neste capítulo analisaremos o conceito de Função com base nos Currículos educacionais e em alguns livros didáticos adotados por algumas escolas da Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul. Este capítulo acompanhará uma mesma dinâmica, trabalhando primeiramente o conceito de Função e os objetivos apresentados pelos Currículos para o Ensino Fundamental e posteriormente para o Ensino Médio, finalizando com algumas considerações e uma discussão acerca do que foi encontrado nos Currículos.

Em seguida, analisaremos os conceitos trabalhados em alguns Livros Didáticos adotados por algumas escolas de Campo Grande, em Mato Grosso do Sul, para alunos do Ensino Fundamental e Médio, sendo que primeiramente analisaremos os livros do Ensino Fundamental, como é apresentado o conceito, quais as atividades introdutórias para se trabalhar com estas definições e posteriormente como esta definição e conceito do Livro Didático dialogam com as definições e conceitos apresentados nos Currículos, repetindo depois os mesmos passos para livros do Ensino Médio. Vale ressaltar que a escolha dos livros didáticos se deu por conta do momento de pandemia que o país viveu no decorrer da escrita desta dissertação, que impediu que tivéssemos acesso a maiores quantidades de livros que nos propiciassem uma escolha mais categorizada, sendo escolhido os livros ao qual conseguimos ter acesso por meio de contato pessoal e amizade com os diretores da escola.

Por fim, concluiremos o capítulo com as impressões que ficaram destas análises do Currículo e sobre como esse conteúdo é apresentado aos alunos por meio dos Livros Didáticos adotados por estas escolas.

### **1.1 Conceito de Função no Currículo**

A proposta deste texto é trazer elementos que nos possibilitem analisar de que forma o conceito de Função vem sendo apresentado pelos órgãos governamentais, por meio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), proposto pelo Ministério da Educação (MEC), e do Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul, proposto pela Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul (SED-MS).

### 1.1.1 Conceito de Função no Currículo do Ensino Fundamental e seus objetivos

A BNCC propõe para o Ensino Fundamental, partindo das Competências Gerais e Específicas, cinco unidades temáticas nomeadas como: 'Números', 'Álgebra', 'Geometria', 'Grandezas e Medidas' e 'Probabilidade e Estatística', as quais apresentam Objetos de Conhecimento e Habilidades a serem desenvolvidos em cada ano do Ensino Fundamental.

O objeto de estudo deste capítulo é apresentado no Ensino Fundamental na unidade temática 'Álgebra'. Se considerarmos as dimensões sugeridas pela BNCC para ensinar álgebra nas escolas de Educação Básica, precisamos permitir que os alunos sejam capazes de construir formulações, relações e generalização neste campo da Matemática. Conforme Ponte (2009) e Van de Walle (2009), um dos objetivos da Álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico por parte dos alunos, pois

[...] inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e Funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas Matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também é o "sentido de símbolo" (symbolsense), como diz Abraham Arcavi, que inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas. (PONTE, 2009, p. 10).

Para Van de Walle (2009), o foco do ensino da Álgebra:

Está em como pensar e raciocinar, de modo que os estudantes pensem matematicamente e consigam relacioná-la com os mais diversos campos da Matemática. Também, afirma que este ramo da Matemática é essencial para inúmeras atividades das práticas sociais, como por exemplo, situações envolvendo a organização de dados em planilhas e a operação com esses dados. (VAN DE WALLE apud SOBRINHO, 2006, p. 07)

Dentro da unidade temática Álgebra, um dos conteúdos trabalhados a partir do 9º ano do Ensino Fundamental é o conceito de Função. Para Gonçalves (2015) este conceito se faz necessário ser trabalhado, pois o mesmo desempenha um importante papel no estudo de muitos fenômenos que envolvem outras diversas áreas do conhecimento, "[...] seja descrevendo, interpretando ou construindo gráficos que

representam esses fenômenos, além de propiciar conexões com a própria Matemática" (GONÇALVES, 2015, p. 21).

Somente no último ano do Ensino Fundamental é que, em sua unidade de álgebra, a BNCC nos apresenta como objeto de conhecimento as “Funções: representações numérica, algébrica e gráfica”, trazendo como habilidades a serem desenvolvidas nestes alunos do 9º ano do Ensino Fundamental o que segue:

Compreender as Funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. (BRASIL, 2017, p. 317)

Para melhor entender o objetivo curricular para este objeto do conhecimento, vamos adicionar nisto as habilidades e sugestões de ações didáticas que o Currículo de referência da SED-MS nos apresenta. Cabe ressaltar aqui que além do que já é apresentado na BNCC, o Currículo de referência da SED-MS sugere um campo com ações didáticas que exemplificam os objetivos propostos por este Currículo. Ou seja, é respeitado o início do conceito de Função apenas no último ano do Ensino Fundamental, assim como na BNCC, porém além do conteúdo e das habilidades, o Currículo estadual sugere uma ação didática, sendo:

Analisar como as grandezas se relacionam é uma prática necessária em diversas situações cotidianas. Explore situações-problema, nas quais os estudantes sejam capazes de identificar a variação entre grandezas  $(x, y)$ , organizando os valores em tabelas segundo uma sentença algébrica e a respectiva representação gráfica da situação. (BRASIL, 2020, p. 582.)

Em seguida o Currículo traz um exemplo de exercício e de sequência didática a ser utilizada, “Uma máquina de embalar alimentos produz 50 pacotes a cada minuto de funcionamento. Observe a tabela abaixo a quantidade de pacotes que essa máquina produz, de acordo com o tempo de operação”, (SED-MS) e em seguida apresenta uma tabela que trabalha com dados da progressão do tempo em minutos em relação à quantidade de pacotes, sugerindo que, partindo disto o professor:

Leve os estudantes a observar que na tabela há a relação de duas grandezas (tempo x quantidade) e que para cada grandeza tempo há uma única medida correspondente à segunda, assim, dizemos que a segunda é Função da primeira. Dessa forma, a quantidade de pacotes embalados é dada em Função do tempo de funcionamento da máquina. Analise o domínio de validade da situação, isto é, podemos ter 50 pacotes e meio? É possível, a partir da tabela, ter 2 minutos e meio? Nessa situação, os valores referentes à quantidade de pacotes embalados são quantidades inteiras e positivas enquanto o tempo não pode ter valores negativos, logo não se terá um valor negativo para a quantidade de pacotes e nem para o tempo. Recorra ao

conhecimento algébrico para encontrar uma representação que expressa essa relação pacotes  $(y) = 50 \cdot \text{tempo } (x)$ . (BRASIL, 2020a, p. 583)

Assim é proposto o Currículo da SED-MS em consonância com a BNCC para o Ensino Fundamental, especificamente para o 9º ano.

### **1.1.2 Conceito de Função no Currículo do Ensino Médio e seus objetivos**

A BNCC propõe nesta etapa do conhecimento que o aluno desenvolva uma visão mais integrada da matemática, mas sem perder o foco na aplicação da matemática à realidade desses alunos. A BNCC para o Ensino Médio não apresenta unidades temáticas, tal como no Ensino Fundamental, mas sim competências a serem desenvolvidas durante o Ensino Médio, porém, afim de ajudar o professor que já se encontra acostumado com a ideia de unidades temáticas, a própria BNCC apresenta pontos das competências que são similares às unidades temáticas, uma vez que os conteúdos e conceitos trabalhados em cada competência podem, e devem, ser trabalhados de forma articulada.

Em sua primeira competência específica, a BNCC propõe o uso de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos que nos possibilite interpretar situações em diversos contextos. Um dos conceitos propostos para se alcançar essa competência é o conceito de Função, mais especificamente na análise gráfica das Funções. Nesta etapa do aprendizado a BNCC vai propor ao professor que trabalhe conteúdos e problemas que levem o aluno a desenvolver a análise crítica ao se deparar com gráficos de Funções, bem como a possibilidade de extrair dados dos gráficos.

Para isto, o Currículo de referência da SED-MS vai trazer como sugestão didática o texto abaixo:

Essa habilidade pode ser desenvolvida por meio de pesquisas sobre gráficos que envolvam, inflação, taxa de juros, investimentos, taxas de desemprego, produto interno bruto (PIB), previdência privada e social, igualdade de gêneros (emprego, salários, cargos, representatividade política e violência), saúde, racismo, saneamento básico, no Mato Grosso do Sul e no Brasil, priorizando gráficos que sejam representados por Funções, analisando os dados com criticidade e criatividade em várias ideias relevantes, inovadoras, originais quanto às representações dos eixos, estudando o comportamento, intervalos de variações e posteriormente, debates, produções de relatórios e dissertações, com diferentes tipos de ideias relevantes, conseguir elaborar suas próprias opiniões,, cooperando uns com os outros nas argumentações, promovendo o engajamento, respeito, autonomia e pensamento crítico. A partir deste contexto o professor poderá exercer a presença pedagógica de

forma construtiva em diversas situações, espaços e tempos da Escola. (BRASIL, 2020a, p. 8)

Na segunda competência específica, a BNCC propõe investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, não sendo proposto para esta competência, nenhuma habilidade ligada ao conceito de Função. Entretanto, para esta competência o Currículo de referência da SED-MS adicionou o objeto de conhecimento Funções, juntamente com os objetos de conhecimento matemática financeira e porcentagens, orientando mais especificamente o estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas, não sugerindo, entretanto, nenhuma situação didática para estes, apenas para o estudo de matemática financeira e porcentagem.

A terceira competência específica, a BNCC propõe o uso de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos que nos possibilite interpretar e construir modelos, além de resolver problemas em diversos contextos. Assim, nesta etapa é proposto um avanço nos trabalhos com o conceito de Função, sendo proposto pela BNCC que os professores possam:

Construir modelos empregando as Funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (...) Resolver e elaborar problemas com Funções Exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. (...) Resolver e elaborar problemas com Funções Logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (BRASIL, 2017, p. 536)

Para que o aluno consiga desenvolver essa habilidade a SED-MS irá propor as seguintes sugestões didáticas para cada tipo de Função:

Um possível modelo a ser construído seria para o salário de um vendedor que ganha uma quantia fixa acrescida de uma comissão em virtude das vendas realizadas. Outra possibilidade, seria a mensuração do custo de consumo de água/energia elétrica, considerando um valor fixo e um valor variável de acordo com a faixa de consumo estabelecida em m<sup>3</sup> ou kWh. Neste contexto, apreciar e usar os conhecimentos empíricos do cotidiano, para perceber e interpretar a realidade, ter curiosidade para aprender, ser aberto ao novo, desenvolver a autoconfiança para ter mentalidade de crescimento e agir de forma proativa, no sentido de colaborar para a (re)construção de saberes da vida em sociedade. Outros modelos seriam situações problemas que envolvam alcance horizontal e vertical da trajetória de um projétil, como por exemplo o lançamento de um foguete, lançamento de uma bola de basquete, cobrança de escanteio, saque no voleibol, de modo que o estudante modele tais trajetórias por meio de álgebra e geometria com o auxílio de tecnologias digitais, analisando e discutindo os resultados encontrados, se possível visando o mundo robótico atual. Neste sentido, desenvolver a imaginação criativa por meio da experimentação, aprendendo

com seus erros, com interesse artístico para avaliar, apreciar design e beleza, no que deve ser experimentado ou expresso em escrita, visualmente, fortalecendo capacidade de gerar novas maneiras de pensar. (BRASIL, 2020b)

É importante lembrar neste ponto, que não existe hierarquia entre as competências específicas, sendo que todos estes conteúdos, apesar de serem apresentados em uma única competência, podem e devem ser ensinados e trabalhados em anos distintos do Ensino Médio.

Ainda nesta competência, o Currículo referencial da SED-MS irá propor relacionar os objetos de conhecimento Juros compostos com Gráficos de Funções de 1º grau e Exponencial, a fim de analisar o (de)crescimento linear ou Exponencial de cada caso. Para isto são oferecidas as seguintes sugestões didáticas:

(...) um possível desenvolvimento em conjunto seria analisar se um banco cobra juros de mora em boleto atrasado no modo simples ou composto construindo o gráfico dos dois tipos de juros em Função dos possíveis dias de atraso. Investigar possibilidades de investimentos e financiamentos analisando taxas de juros, taxas de aberturas de crédito (TAC) e impostos, fazendo simulações em planilha eletrônica. Com isso, desenvolver a autogestão e inteligência emocional no alinhamento das necessidades e objetivos pessoais, com responsabilidade, criticidade, para disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. Compreender a diferença em pagar à vista ou parcelado, estudando tanto casos reais como hipotéticos, julgando, por exemplo, se é melhor comprar um produto que custa R\$ 3.000,00 à vista ou em 5 vezes de R\$ 600,00, de modo a fazer a construção de argumentos matemáticos consistentes com a realidade. Assim, agir com autonomia, determinação, tomando decisões com base em conhecimentos sólidos, investigativo de forma reflexiva, analítica, no sentido de reconhecer e optar pela melhor escolha. (BRASIL, 2020b)

Por fim, o Currículo referencial da SED-MS traz a importância de o aluno compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, entre outros, utilizando-se de conceitos de variação Exponencial e Logarítmica, além de resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como por exemplo as ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros, utilizando-se dos conceitos das Funções trigonométricas.

Por se tratar de conceitos muito abstratos, é interessante que se analise movimentos oscilatórios, como pêndulos, ondas eletromagnéticas, vibrações em instrumentos de corda, dentre outros. Utilizar a criatividade e o pensamento crítico para relacionar os movimentos oscilatórios a fatos e objetos do dia a dia, buscando o autoconhecimento com autonomia e autoria. É possível também plotar um gráfico, partindo de uma tabela que relacione a posição de um ponto fixo em uma roda gigante e a altura deste ponto de acordo com a variação de tempo. Tendo como ponto de partida a diversidade de saberes, e vivências culturais que permitam compreender a situação investigativa, com persistência na superação de obstáculos e finalizar a ação

proposta. Outro exemplo pode ser o estudo do ciclo lunar investigando se a face que se observa em todas as fases é sempre a mesma, o tempo de cada ciclo, e se existe relação com os fenômenos periódicos das marés, com pensamento científico para investigar, elaborar e testar hipóteses, exercitando a curiosidade intelectual para entender e explicar a realidade. Ao utilizar os dados obtidos recomenda-se a construção das Funções seno ou cosseno que modelam essas situações, analisando se descrevem os fenômenos supracitados, nesta perspectiva, o autoestudo, a determinação e persistência são competências fundamentais para o desenvolvimento das tarefas com organização e sucesso. (BRASIL, 2020b)

Na quarta competência específica, a BNCC começa a propor a articulação de diversos conhecimentos matemáticos, propondo mesclar conceitos algébricos, geométricos, estatísticos, computacionais, entre outros, como podemos ver nestas orientações:

Converter representações algébricas de Funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (...) Converter representações algébricas de Funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. (...) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de Funções Exponencial e Logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada Função. (...) Analisar Funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decréscimo, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2017)

Para cada uma dessas habilidades, o Currículo de referência da SED-MS apresenta uma sugestão didática que nos permite trabalhar com cada conceito proposto como objeto do conhecimento, articulado com outros conceitos:

(...) resolver e elaborar situações-problema do cotidiano envolvendo a ideia de Função polinomial do primeiro grau, como por exemplo o salário fixo de um vendedor acrescido de sua comissão em virtude das vendas realizadas e arrecadação de impostos de Mato Grosso do Sul. (...) Utilizar software matemáticos para observar o comportamento da parábola e como as curvas se alteram de acordo com seus coeficientes estudando pontos de máximo ou de mínimo e outros pontos especiais, em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira, Cinemática, dentre outros. (...) estudo que relacione crescimentos populacionais tanto nos municípios quanto no estado de Mato Grosso do Sul, bem como nos outros estados do Brasil, analisando dados do censo, comparando e descrevendo os diferentes crescimentos/decréscimos por meio de tabelas, gráficos, textos, dentre outras representações, fazendo relações com Funções Exponenciais e Logarítmicas, estudando seus domínios, imagens e crescimentos, com ou sem auxílio de tecnologias digitais. (...) Propõe-se pesquisa sobre tarifas de energia elétrica no estado de Mato Grosso do Sul, em relação a preços, tarifas, impostos, tributos e bandeiras tarifárias. (BRASIL, 2020b)



Por fim a BNCC vai propor como sua quinta competência específica, investigar e estabelecer conjecturas que possam ser experimentadas, usando ou não a tecnologia, empregando estratégias e recursos, para observar nessas conjecturas, padrões, conceitos e propriedades diversas da matemática. A BNCC vai propor como habilidade:

Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de Função polinomial de 1º grau. (...) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de Função polinomial de 2º grau do tipo  $y = ax^2$ . (...) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de Funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. \*(...Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a Funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (...) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a Funções Exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (BRASIL, 2017)

Para alcançar essas habilidades o Currículo de referência da SED-MS irá propor como sugestão didática além de outras:

(...) uma possível forma de desenvolvê-la é representar as cidades de Mato Grosso do Sul no plano cartesiano por meio de pontos, utilizando o mapa do estado como plano de fundo, utilizando papel ou software/app. Olhando para o mapa, conjecturar se existem três cidades alinhadas. (...) uma possível investigação seria a análise de tabela contendo pares ordenados  $(x,y)$  e verificar se o quadrado de  $x$  é diretamente proporcional a  $y$ . Por fim, conjecturar o número mínimo de pontos que satisfazem essa proporção para que se tenha uma Função quadrática. (...) um aluno recebe uma mesada de R\$ 50,00 com juro de 10% ao mês sempre sobre o primeiro valor recebido. A partir daí, levantar questões como: Qual o valor recebido no 15º mês? Qual o valor total recebido no 15º mês? Depois de quantos meses o estudante, juntando todo o valor, conseguiria comprar um smartphone de R\$ 1500,00? É possível utilizar tabelas ou planilhas eletrônicas como auxílio para o cálculo de cada valor. (BRASIL, 2020b)

### 1.1.3 Considerações e Discussão

A primeira análise feita com base na BNCC nos apresenta no último ano do Ensino Fundamental, em sua unidade de álgebra o objeto de conhecimento Funções: representações numérica, algébrica e gráfica. Neste objeto de conhecimento a BNCC traz como habilidade a ser desenvolvida nos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, levar este a compreender que as Funções são relações de dependência entre duas

variáveis, além de entender as representações numérica, algébrica e gráfica das Funções e utilizar o conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Ou seja, a BNCC somente nos apresenta o tópico de Função no último ano do Ensino Fundamental, se limitando a conceitua-lo como “relações de dependência unívoca entre duas variáveis”. Apenas para começarmos a pensar, sem abranger demasiadamente o leque da BNCC, ao analisarmos apenas a Unidade Temática Álgebra, nesse nível de aprendizado, o aluno já terá tido contato com a linguagem algébrica sabendo o conceito de variável e incógnita, bem como sua diferenciação, além de compreender as propriedades de equivalência de expressões algébricas. Além disto ele deverá ter aprendido o conceito de equações polinomiais do 1º grau, reduzindo-as à forma de  $ax + b = c$ , além de saber diferenciar as equações das expressões algébricas.

Em sequência, no oitavo ano, o professor introduzirá a ideia de valor numérico das expressões algébricas, para que com isto, o aluno seja capaz de associar uma equação linear de 1º grau com uma reta no plano cartesiano. Seguindo na evolução do conhecimento e no aprofundamento dos conceitos, o aluno aprenderá a resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau. Ainda neste ano, o aluno terá contato com o conceito de equações polinomiais do 2º grau do tipo  $ax^2 = b$ , aprendendo a resolver e a elaborar problemas que possam ser representados esses tipos de equações.

É apenas no nono ano do Ensino Fundamental que será introduzido o conceito de Função, além de que, esta introdução se dá após uma série de contatos com o conceito, propriedades e regras de equações e sistemas de equações, conhecimentos que, embora sejam conhecimentos prévios interessantes e necessários a uma boa aprendizagem do conceito de Função, eles têm causado muitas dúvidas nos alunos, pois embora sejam muito parecidos, eles se diferenciam amplamente nos resultados.

Enquanto as equações possuem como resultado um número, número este que pode ter significado ou não, as Funções não têm tanta preocupação assim com o resultado, ou com os valores das incógnitas, mas sim com a importância de se conhecer a regra que relaciona os elementos dos dois conjuntos, bem como também, com a sua representação gráfica, pois a partir dela é possível ser tomada diversas decisões quando aplicadas à problemas reais do cotidiano.

Após anos lecionando para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, temos a percepção que, quando este aluno chega no conceito de Função, após várias elaborações e resoluções de problemas focadas em equações, fica uma impressão que o aluno acostumou-se tanto a encontrar o valor de  $x$ , que fica obcecado em querer encontrar o resultado da incógnita na Função, como se algo estivesse errado, sendo que em sua grande maioria, isso é o que menos importa no contexto de Função. Esta obsessão por encontrar os resultados ou as respostas tiram o foco daquilo que entendemos ser mais importante quando o assunto é Função, que é a compreensão desta relação de dependência unívoca entre duas variáveis, a fim de usar isto como forma de análise de situações que envolvam essas relações funcionais, conforme já aponta a BNCC.

Para o Ensino Médio podemos ver que a BNCC não faz a divisão por anos, assim como é feita no Ensino Fundamental, antes, ela divide em 5 competências que, ao final, fará com que o aluno tenha contato com diversas Funções ao longo dos três anos. Vale ressaltar que, primeiramente, no Ensino Fundamental existe apenas uma definição genérica para o conceito de Função, limitando-se a conceituá-la como sendo a relação unívoca entre duas variáveis. Logo, ao analisarmos as cinco competências podemos encontrar nelas uma continuidade que, analisaremos mais a frente, se é respeitada pelos Livros Didáticos.

Observamos que, apesar de numerar as cinco competências de um a cinco, não existe nenhuma pretensão de que esta ordem seja obedecida, ficando a cargo dos Currículos estaduais fazer a sua divisão entre os anos letivos do Ensino Médio. Entretanto, ao analisarmos o referencial curricular da SED-MS, percebemos que ela segue à risca a BNCC, se diferenciando apenas pelo fato de trazer algumas sugestões didáticas, mas tal como a BNCC, esse referencial também não faz esta divisão nos anos letivos, ou seja, ele não apresenta qual competência deve ser desenvolvida no 1º ano, no 2º e no 3º, dando a entender que elas devam ser trabalhadas articuladamente.

Isto leva os professores a recorrerem aos Livros Didáticos, para que estes apresentem anualmente, e até bimestralmente, qual conteúdo trabalhar, e com isso fazer os links entre o conteúdo e as competências. Apesar de ser uma boa saída, isto vai depender muito de como os Livros Didáticos apresentam estes objetos do

conhecimento, e ainda, se eles atendem na totalidade os Currículos vigentes na educação, análise esta que faremos nos tópicos a seguir.

## **1.2 Conceito de Função em um Livro Didático do Ensino Fundamental**

Para esta análise, utilizaremos um Livro Didático adotados por algumas escolas da Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul. Vale ressaltar que, no momento de escolha dos livros didáticos, passávamos por uma pandemia no Estado, sendo que todas as escolas, bem como os órgãos públicos se encontravam fechados para atendimento ao público. Logo a escolha destes livros em específico se deu por conta de serem livros utilizados em uma escola específica onde trabalhei e que eu tinha acesso diretor com a direção, que aceitou fornecer uma cópia dos livros de 6º ao 9º ano para realizar a análise, sendo esta coleção adotada pela SED-MS para trabalho nesta e em outras escolas, conforme apurado juntamente com a SED-MS em um contato telefônico.

Um dos livros adotados para a análise foi o “A conquista da Matemática”, da editora FTD, em sua 4ª Edição, São Paulo – 2018, de autoria de José Ruy Giovanni Júnior, professor de matemática em escolas desde 1985, licenciado pela Universidade de São Paulo (USP), e de Benedicto Castrucci, que foi professor de matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e na Universidade de São Paulo (USP), bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP). Este livro é dividido em 9 unidades e cada unidade subdividida em capítulos. Vale ressaltar que o livro adotado por esta escola, embora faça parte do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), ainda não se encontrava em conformidade total com a nova BNCC, que quando da criação do livro, ainda estava em fase de conclusão, entretanto, por ser um livro atualmente utilizado em escolas, se fez necessário analisá-lo para entender como é apresentado o conceito de função nestes livros.

Em um primeiro estudo podemos ver que o Livro Didático atende aos Currículos no quesito da inserção da noção de Função ser apresentada apenas no 9º ano do Ensino Fundamental, trazendo uma noção de Função e não o conceito propriamente dito, ou seja, partindo de problemas e situações do dia a dia, o autor do livro traz para o aluno uma noção do que é Função, apenas uma ideia, mas em momento algum ele introduz uma definição do conceito de Função de acordo com nenhum autor, seja

Euler, Cauchy, Bourbaki, entre tantos outros que definiram este importante conceito. Vale ressaltar que esta noção de Função é apresentada apenas na última unidade do livro, dando a entender que seja uma proposta do livro que este conteúdo seja apresentado apenas no último bimestre do ano letivo, e ele é assim apresentado no primeiro capítulo desta unidade:

Figura 1: A noção de Função


CAPÍTULO

# 1

## A NOÇÃO DE FUNÇÃO

Com bastante frequência, nos deparamos com situações que envolvem relações entre duas grandezas variáveis. Acompanhe algumas dessas situações:

1 Uma peteca custa 30 reais. Se representarmos por  $x$  a quantidade de petecas iguais a essa que Rui, o professor de Educação Física, quer comprar e por  $y$  o preço, em reais, que ele vai pagar, podemos organizar o quadro abaixo.



Quantidade de petecas ( $x$ )	Preço a pagar ( $y$ )
1	$1 \cdot 30 = 30$
2	$2 \cdot 30 = 60$
3	$3 \cdot 30 = 90$
4	$4 \cdot 30 = 120$
$\vdots$	$\vdots$
10	$10 \cdot 30 = 300$
11	$11 \cdot 30 = 330$
$\vdots$	$\vdots$

↪ Peteca.

Observando o quadro, você percebe que o preço  $y$  a pagar depende da quantidade  $x$  de petecas que forem compradas. Entre as grandezas  $y$  e  $x$  existe uma relação expressa pela sentença matemática  $y = x \cdot 30$  ou  $y = 30x$ .

Você também pode notar que:

- A quantidade  $x$  de petecas é uma grandeza que varia de forma independente.
- O preço  $y$  a pagar é uma grandeza que varia de acordo com a grandeza quantidade de petecas.
- A todos os valores de  $x$  estão associados valores de  $y$ .
- Para cada valor de  $x$  está associado um único valor de  $y$ .

Nessas condições, podemos dizer:

O preço  $y$  a pagar é dado em função da quantidade  $x$  de petecas adquiridas, e a sentença  $y = 30x$  é chamada **lei de formação** dessa função.

Neste caso, a variável  $x$  é chamada **variável independente**, e a variável  $y$  é **dependente da variável  $x$** . Uma vez estabelecida a relação entre as grandezas **quantidade de petecas** e **preço a pagar**, podemos responder a questões como:

a) Quanto o professor vai pagar por 50 petecas iguais a essa?  
 $y = 30x \Rightarrow y = 30 \cdot 50 \Rightarrow y = 1500$   
 Logo, o professor vai pagar R\$ 1500,00 por 50 petecas.

b) Se ele tiver R\$ 780,00, quantas dessas petecas poderão ser compradas?  
 $y = 30x \Rightarrow 780 = 30x \Rightarrow x = \frac{780}{30} = 26$   
 Portanto, ele poderá comprar 26 petecas.

Fonte: (GIOVANNI JUNIOR, 2018, p. 248)

Como podemos verificar, com este exemplo prático o livro introduz ideias como a Lei de formação da Função, além de diferenciar as variáveis dependentes e independentes. Na sequência, complementando esta noção de Função, utilizando-se de ideias e exemplos do dia a dia, o autor do livro vai introduzir o conceito de domínio e conjunto imagem de uma Função, dizendo que:

O conjunto de valores que a variável  $x$  pode assumir chama-se **domínio da Função** e é indicado por **D**. O valor da variável  $y$  correspondente a um determinado valor de  $x$  é chamado **imagem** do número  $x$  dado pela Função. O conjunto formado por todos os valores de  $y$  que correspondem a algum  $x$  do domínio é chamado **conjunto imagem da Função** e é indicado por **Im**. (GIOVANNI JÚNIOR e CASTRUCCI, 2018, p. 249)

Dada estas definições genéricas, que permitem aos alunos terem uma noção da ideia de Função, o autor do livro já parte para os casos mais específicos, introduzindo no capítulo 2 a ideia de Função afim, sendo definida pelo autor do livro da seguinte maneira:

**Figura 2: Definição de Função Afim**

Uma função é chamada **função afim** quando é definida pela sentença matemática  $y = ax + b$ , com  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ .

Pela definição, são exemplos de funções afins:

- $y = 3x - 1$
- $y = -6x$
- $y = \frac{1}{2}x + 5$
- $y = \frac{1}{3}x - \sqrt{2}x$
- $y = 7 - 5x$
- $y = 12x$

Fonte: (GIOVANNI JUNIOR, 2018, p. 252)

O autor deixa o conteúdo ainda mais específico ao definir as Funções lineares, definindo como:

**Figura 3: Definição de Função Linear**

## 🌀 Função linear

Em uma função afim dada por  $y = ax + b$  (com  $a \neq 0$ ), os valores  $a$  e  $b$  são os coeficientes da função. Quando  $b = 0$ , a lei da função afim é dada por  $y = ax$  (com  $a \neq 0$ ) e ela é denominada **função linear**.

Como exemplo, consideremos a função definida por  $y = 3x$ .

Nesse caso, os coeficientes são  $a = 3$  e  $b = 0$ , ou seja, a função afim é uma função linear ( $b = 0$ ).

Fonte: GIOVANNI JUNIOR, 2018, p. 253

Finalizando o capítulo, o autor traz duas definições, a do gráfico da Função afim, onde por meio de um exemplo o autor afirmará que “o gráfico de uma Função afim, no plano cartesiano, com  $X \in \mathbb{R}$ , é sempre uma reta”, logo, como toda reta fica determinada por dois pontos, basta definir dois pares ordenados  $(x, y)$ , para definirmos o gráfico de uma Função afim, e definirá o zero da Função afim, como sendo “o valor do número real  $x$ , para o qual se tem  $y = 0$  (ou  $ax + b = 0$ )”.

No capítulo 3, o autor defini a Função quadrática, seguindo basicamente a mesma construção do capítulo anterior. Ele inicia o capítulo com um exemplo prático do dia a dia, para ao final do exercício definir as Funções quadráticas como:

**Figura 4: Definição de Função Quadrática**

De modo geral:

**Função quadrática** é toda função definida pela sentença matemática  $y = ax^2 + bx + c$ , com  $a, b$  e  $c$  números reais e  $a \neq 0$ .

Assim, são exemplos de funções quadráticas:

- $y = x^2 + 2x - 8$
- $y = x^2 - 9$
- $y = -2x^2 + \sqrt{6}$
- $y = -x^2 + 9x - 18$
- $y = 4x^2 - 4x + 1$
- $y = -3x^2 - 2x + 1$

Fonte: (GIOVANNI JUNIOR, 2018, p. 253)

Em seguida, tal qual no capítulo anterior, ele defini o gráfico da Função quadrática, bem como mostra passo a passo como se dá sua construção no plano cartesiano, conforme imagem abaixo:

Figura 5: Gráfico da Função Quadrática

## 🕒 Gráfico da função quadrática

No capítulo anterior, vimos que o gráfico de uma função afim, dada por  $y = ax + b$ , para  $x \in \mathbb{R}$ , é uma reta.

Agora, conheceremos a curva, que representa o gráfico de uma função quadrática. Veja os exemplos:

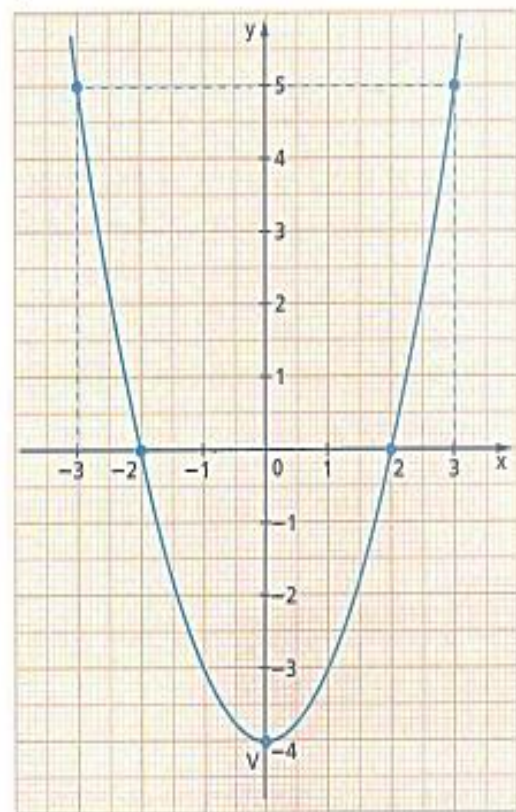
- 1 Construir, no plano cartesiano, o gráfico da função  $y = x^2 - 4$ , sendo  $x$  qualquer número real.

Inicialmente, vamos atribuir alguns valores reais para  $x$ , como os valores  $-3, -2, 0, 2, 3$ . Determinando os pares  $(x, y)$ , temos:

$x$	$y$	$(x, y)$
-3	5	$(-3, 5)$
-2	0	$(-2, 0)$
0	-4	$(0, -4)$
2	0	$(2, 0)$
3	5	$(3, 5)$

O conjunto de todos os pontos  $(x, y)$ , com  $x$  real e  $y = x^2 - 4$ , é o gráfico da função. Esse gráfico é representado por uma curva chamada **parábola**. O ponto  $V$ , que você observa na figura, chama-se **vértice da parábola**.

Agora, precisamos localizar esses pontos no plano cartesiano.



Fonte: (GIOVANNI JUNIOR, 2018, p. 263)

Por fim, o autor traz a mesma ideia de zeros da Função quadrática, usando o conceito aprendido no conteúdo de equações do segundo grau, utilizando-se inclusive da fórmula de Báskara para resolver a equação e chegar na resolução da equação, observe:



Figura 6: Zeros da Função Quadrática

**Zeros da função quadrática**

Dada a função definida por  $y = ax^2 + bx + c$ , os valores reais de  $x$  para os quais se tem  $y = 0$  (ou  $ax^2 + bx + c = 0$ ) são denominados **zeros (ou raízes) da função quadrática**.

Algebricamente, os zeros (ou raízes) da função quadrática são obtidos quando resolvemos a equação do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$ . A quantidade de zeros (ou raízes) da função depende do valor do discriminante ( $\Delta$ ) da equação, assim:

- Quando  $\Delta > 0$ , a função tem dois zeros (ou raízes) reais diferentes.
- Quando  $\Delta = 0$ , a função tem dois zeros (ou raízes) reais iguais.
- Quando  $\Delta < 0$ , a função não tem zeros (ou raízes) reais.

Acompanhe os exemplos a seguir.

**1** Determinar os zeros (ou raízes) da função  $y = x^2 + 2x - 3$ .

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (1)} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x'' &= \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$

Como  $\Delta = 16 > 0$ , a função tem dois zeros (ou raízes) reais, que são os números 1 e -3.

Fonte: (GIOVANNI JUNIOR, 2018, p. 265)

E é com este exemplo que o autor finaliza os conceitos e definições acerca do conteúdo de Função, na unidade nove deste livro, trazendo diversas atividades de fixação e exercícios para colocar em prática o conteúdo aprendido nesta unidade.

### 1.2.1 Análise de Atividades de introdução do conceito de Função

Este Livro Didático não apresenta em momento algum o conceito de Função, e sim uma noção a partir de uma atividade introdutória, usando o exemplo de uma peteca que possui um determinado valor e que, conforme um professor de educação física aumenta ou diminui a quantidade de petecas a comprar, o valor total da compra se altera para mais ou para menos, trazendo com este exemplo a noção de Função, ou seja, ao comprar uma peteca, ele pagará um determinado valor, comprando mais petecas, ele pagará mais caro, mostrando que para cada quantidade  $x$  de petecas que o professor comprar, haverá apenas um único valor  $y$  a pagar.

Em seguida o autor trará uma tabela mostrando os valores a pagar em relação à quantidade comprada e com isto, ele vai mostrar a existência de uma **lei de**

**formação** da Função, além de definir nas variáveis, que sempre teremos uma variável que será independente, e uma segunda que sempre dependerá desta primeira. Posteriormente, o autor vai definir o **domínio** de uma Função, além do **conjunto imagem da Função**, partindo já para exercícios de fixação, e logo depois trazendo já a definição de Função afim, que ele apresenta como uma Função definida por  $y = ax + b$ , com **a** e **b** pertencendo ao conjunto dos números reais, e **b** sendo diferente de zero. Logo podemos verificar que no Livro Didático do 9º ano do Ensino Fundamental, não existe uma preocupação com a definição geral de Função, mas sim com as definições genéricas de cada tipo de Função.

### 1.2.2 Análise da definição

Como vimos no tópico anterior, este livro do Ensino Fundamental não apresenta em seu conteúdo de Função a definição geral de Funções, ficando deste modo prejudicada uma análise da definição partindo do que é apresentado no Livro Didático, pois nele o autor se limita a apresentar uma noção de Função que, ele mesmo trabalha como uma relação entre grandezas por meio de uma sentença, ou de uma lei de formação.

### 1.2.3 Comparação do conceito de Função no Currículo e no Livro Didático

Como vimos na análise curricular, dentre as habilidades propostas para o conteúdo de Funções, está levar os alunos a compreender as Funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numéricas, algébrica e gráfica, além de utilizar esse conceito para analisar situações problemas que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. Embora o autor do Livro Didático não apresente uma definição clara de Função, optando em apresentar apenas uma noção da ideia de Função, pudemos verificar na análise desse livro que, todas as demais habilidades apresentadas pelo Currículo nacional e estadual são atendidas.

O autor do Livro Didático apresenta no capítulo nove do livro do nono ano do Ensino Fundamental, as ideias de Função que ele defende, embasando no Currículo nacional as questões, de acordo com o autor, atenderia corretamente o Currículo, a

própria construção do capítulo já segue as ideias das habilidades propostas, como podemos ver no estudo, o autor primeiramente apresenta a noção de Função, mostrando a relação entre duas grandezas, indiretamente apresenta a ideia de dependência unívoca e, em seguida parte para os conceitos particulares das Funções, afim e quadráticas, apresentando suas formas numéricas, algébricas, gráficas, além de fazer uma ligação entre todos esses conceitos e conteúdo, com ideias e problemas do cotidiano.

Por fim, com base no que é apresentado nesse Livro Didático, entendemos ser possível o aluno finalizar os estudos sobre Função no nono ano do Ensino Fundamental, entendendo qual a ideia que circunda o conceito, além de saber perceber suas representações numéricas, algébricas e gráficas. Ao final, o livro traz ainda problemas para o aluno analisar e tratar as informações, com uso de gráficos e utilizando sempre de problemas do cotidiano.

### **1.3 Conceito de Função em um Livro Didático de Ensino Médio**

Para esta análise, utilizaremos o Livro Didático adotado por algumas escolas da Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul (SED-MS) a pedido de algumas escolas do estado, dentre as quais tivemos acesso. O livro que utilizaremos foi adotado para o triênio de 2018-2020, mas em virtude da pandemia do Coronavírus (COVID-19) que se instalou durante este período, fez-se necessário a prorrogação desta coleção por mais um ano, estendendo-se até o ano de 2021. O livro adotado por algumas escolas foi a série “Matemática, ciência e aplicações”, da editora Saraiva, em sua 9ª Edição, São Paulo – 2016, de autoria do renomado Professor Gelson Iezzi, que deu aulas de matemática em escolas da rede particular de ensino em São Paulo, e Licenciado em Matemática pela USP.

Este livro, tal qual o do Ensino Fundamental, pertence ao PNLD, mas também é anterior a nova BNCC, sendo que a escolha deste livro se deu pelo fato do acesso, visto que estávamos em um ano atípico, por conta da pandemia, e estava muito difícil ter acesso às escolas e secretarias, que se encontravam fechadas para atendimento ao público. Ainda assim, a análise deste livro se fez necessária para entender a forma como este conceito vem sendo apresentado a alunos da educação básica. Esta coleção é dividida em três volumes, uma para cada ano do Ensino Médio, sendo que praticamente todos os conteúdos relativos ao conceito de Função estão no volume 1

(relativo ao 1º ano do Ensino Médio), no volume 2 existe apenas as Funções trigonométricas e, no volume 3 não é tratado este conceito.

O livro relativo ao 1º ano do Ensino Médio é dividido em 13 capítulos, sendo que destes, 6 capítulos tratam apenas de Funções, sendo do capítulo 3 ao capítulo 8 trabalhados respectivamente, Funções (3), Função afim (4), Função quadrática (5), Função definida por várias sentenças (6), Função Exponencial (7) e Função Logarítmica (8), ficando apenas as Funções trigonométricas para o livro 2.

Em relação ao conceito de Função, o autor do livro traz no início do capítulo 3, logo após trabalhar com as noções de conjuntos numéricos, uma noção intuitiva de Função por meio de quatro exemplos. No primeiro exemplo o autor apresenta a relação de interdependência entre as grandezas de tempo e espaço, no segundo exemplo ele aborda as ideias de mercadoria e preço, no terceiro exemplo a relação entre número de passageiro e preço da passagem e, por fim, o clássico exemplo entre tempo e temperatura.

Diferente da noção apresentada no Ensino Fundamental, este autor aborda a noção de Função por meio de conjuntos, conteúdo que o autor trabalha antes de introduzir a noção de intuitiva de Função, como podemos verificar nas imagens a seguir:

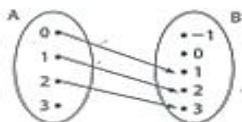
**Figura 7: Noção de Função como relação entre Conjuntos**

**A noção de função como relação entre conjuntos**

Para caracterizar de modo mais preciso a noção de função, devemos recorrer às noções sobre conjuntos.

Vamos considerar, por exemplo, os conjuntos  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$  e observar algumas relações entre elementos de  $A$  e elementos de  $B$ .

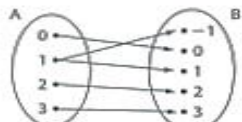
1ª) Vamos associar a cada elemento  $x \in A$  o elemento  $y \in B$  tal que  $y = x + 1$ :



x	y
0	1
1	2
2	3

Para cada elemento  $x \in A$ , com exceção do 3, existe um só elemento  $y \in B$  tal que  $y$  é o correspondente de  $x$ .  
Para o elemento  $3 \in A$  não existe correspondente  $y \in B$ .

2ª) Vamos associar a cada elemento  $x \in A$  o elemento  $y \in B$  tal que  $y^2 = x^2$ :



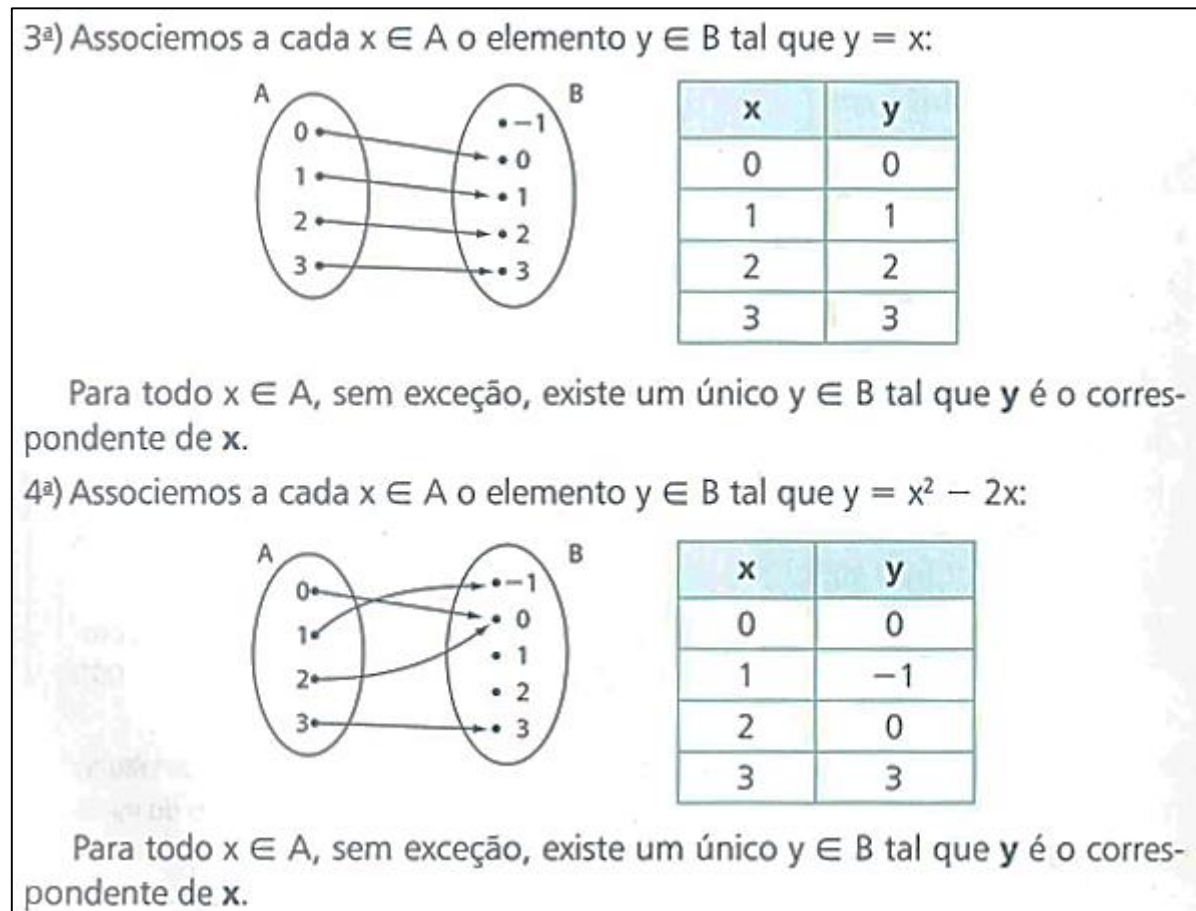
x	y
0	0
1	$\pm 1$
2	2
3	3

Para cada elemento  $x \in A$ , com exceção de 1, existe um só elemento  $y \in B$  tal que  $y$  é o correspondente de  $x$ .  
Para o elemento  $1 \in A$  existem dois elementos correspondentes em  $B$ : o 1 e o  $-1$ .

**PENSE NISTO:**

Você notou que, se  $x$  e  $y$  são números reais e  $y^2 = x^2$ , então  $y = x$  ou  $y = -x$ ?

**Figura 8: Exemplos de Funções**



Fonte: (IEZZI, 2016a, p. 42)

**Figura 9: Noção de Função por meio de Conjuntos**

Nos dois últimos casos, para todo  $x \in A$  existe um só  $y \in B$  tal que  $y$  está associado a  $x$ . Por esse motivo, cada uma dessas relações recebe o nome de **função definida em A com valores em B**.

Dados dois conjuntos não vazios **A** e **B**, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento  $x \in A$  um único elemento  $y \in B$  recebe o nome de **função de A em B**.

Fonte: (IEZZI, 2016a, p. 43)

As imagens acima mostram a preocupação do autor em apresentar relações (ou correspondências) entre elementos dos conjuntos **A** e **B**, diferenciando os casos que são Funções daqueles que não são. Observe então que, no primeiro exemplo, não ocorre a relação de todos os elementos do conjunto **A** com elementos do conjunto

B, ou seja, esta relação não recebe o nome de Função. O mesmo acontece com o exemplo seguinte, que embora ocorra a relação de todos os elementos do conjunto **A**, existe um elemento que se relaciona com dois elementos do conjunto **B**, o que faz com que esta relação também não receba o nome de Função.

Já nos outros dois exemplos, o autor apresenta casos em que todos os elementos do conjunto **A** se relacionam com um único elemento do conjunto **B**, mesmo que sobre elementos em **B** ou que tenham um mesmo elemento em **B** se relacionando com elementos diferentes de **A**, o que torna essa relação uma **Função de A em B**, que ele vai registrar logo na imagem posterior aos exemplos 3 e 4.

Em seguida, após apresentada esta noção de Função, o autor usará os exemplos de conjuntos para trabalhar com a definição de domínio e contradomínio das Funções, seguido do conceito de conjunto imagem da Função.

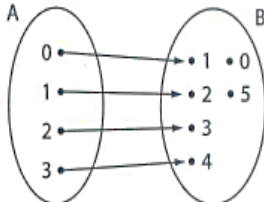
**Figura 10: Definição de Domínio e Contradomínio**

### ▶ Domínio e contradomínio

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.  
 O conjunto **A** é chamado **domínio** de **f**, e o conjunto **B** é chamado **contradomínio** de **f**.  
 Veja os exemplos a seguir.

**EXEMPLO 8**

Seja  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , a função  $f: A \rightarrow B$  tal que  $f(x) = x + 1$  tem domínio **A** e contradomínio **B**.



**EXEMPLO 9**

Seja  $A = \mathbb{Z}$  e  $B = \mathbb{Z}$ , a função  $f: A \rightarrow B$  tal que  $f(x) = 2x$  tem domínio  $\mathbb{Z}$  e contradomínio  $\mathbb{Z}$ .

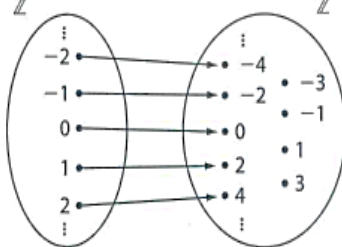


Figura 11: Definição de Conjunto Imagem

**Conjunto imagem**

Se  $f: A \rightarrow B$  é uma função, chama-se **conjunto imagem de  $f$**  (indica-se:  $\text{Im}$ ) o subconjunto do contradomínio constituído pelos elementos  $y$  que são imagens de algum  $x \in A$ . Retomando os exemplos 8, 9 e 10 temos:

**Exemplo 8**  
 $f(x) = x + 1$

$\text{Im} = \{1, 2, 3, 4\}$

**Exemplo 9**  
 $f(x) = 2x$

$\text{Im} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$   
Podemos também escrever:  
 $\text{Im} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = 2z; z \in \mathbb{Z}\}$

**Exemplo 10**  
 $f(x) = 2x + 1$

$\text{Im} = \mathbb{R}$

No exemplo 10, todos os números reais são imagens de algum  $x \in \mathbb{R}$ , do domínio de  $f$ . Com efeito, dado um número real qualquer  $a$ , ele é imagem de  $x = \frac{a-1}{2}$ :

$$f\left(\frac{a-1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{a-1}{2}\right) + 1 = a - 1 + 1 = a, \forall a \in \mathbb{R}$$

É importante destacar que o procedimento apresentado acima não se aplica facilmente a qualquer função. Na maioria das vezes, a determinação do conjunto imagem de uma função será feita por meio da leitura de seu gráfico, como veremos adiante.

**PENSE NISTO**

Note que  $a = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{a-1}{2}$ .

Fonte: (IEZZI, 2016a, p. 48)

Conforme podemos verificar nas imagens apresentadas, o autor apresenta com o uso de diagramas a noção de Domínio e Contradomínio, sendo apresentado por ele os conjuntos **A** e **B**, sendo definido que o domínio de uma **Função de A em B** sempre será o conjunto **A** e o contradomínio o conjunto **B**. Logo em seguida ele já apresenta uma Função que está definida de **Z em Z**, exemplificando casos onde tanto domínio como contradomínio estão definidos dentro dos conjuntos dos números inteiros.

Seguido disto, o autor apresenta a definição de conjunto imagem, como sendo um subconjunto do contradomínio, formado por todos os valores do contradomínio que são imagens de algum elemento do domínio.

Uma importante observação a se fazer é a de que, analisando a forma como é apresentada as noções e conceitos de Funções, encontramos neste livro, em sua primeira unidade um texto denominado “O DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE FUNÇÃO”, que apresenta um breve resumo de como este conceito foi sendo desenvolvido ao longo da história:

**Figura 12: História da Matemática - O desenvolvimento do conceito de Função**



UM POUCO DE HISTÓRIA

### O desenvolvimento do conceito de função

A ideia de função que temos hoje em dia foi sendo construída ao longo do tempo por vários matemáticos. Conheça um pouco dessa longa história.

- Na Antiguidade, a ideia de função aparece, implícita, em algumas informações encontradas em tábuas babilônicas.
- Um importante registro sobre funções aparece, não com este nome, na obra do francês Nicole Oresme (c. 1323-1382), que teve a ideia de construir “um gráfico” ou “uma figura” para representar graficamente uma quantidade variável — no caso, a velocidade de um móvel variando no tempo. Oresme teria usado os termos latitude (para representar a velocidade) e longitude (para representar o tempo) no lugar do que hoje chamamos de ordenada e abscissa — era o primeiro grande passo na representação gráfica das funções.
- O matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) introduziu a palavra **função**, com praticamente o mesmo sentido que conhecemos e usamos hoje.
- A notação  $f(x)$  para indicar “função de  $x$ ” foi introduzida pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).
- O matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) deu uma definição de função muito próxima da que usamos hoje em dia:

*“Se uma variável  $y$  está relacionada com uma variável  $x$  de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a  $x$ , existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor de  $y$ , então se diz que  $y$  é função da variável independente  $x$ .”*

- Por fim, com a criação da teoria dos conjuntos, no fim do século XIX, foi possível definir função como um conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  em que  $x$  é elemento de um conjunto  $A$ ,  $y$  é elemento de um conjunto  $B$  e para todo  $x \in A$  existe um único  $y \in B$  tal que  $(x, y) \in f$ .

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.



A pintura de Jakob Emanuel Handmann, datada dos anos 1753, mostra o matemático suíço Leonhard Euler.



Podemos observar na imagem acima que, neste trecho que conta um pouco do contexto histórico do desenvolvimento deste conceito, que o autor apresenta algumas definições do conceito de Função, abordando uma breve síntese, desde fatos históricos que nos remetem ao que hoje definimos como Função, como por exemplo as tábuas babilônicas e a obra do francês Nicole Oresme (1323-1382) até a definição por meio de conjuntos que hoje o autor do livro adota, passando por autores como Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783) e Dirichlet (1805-1859).

Ao analisarmos os capítulos posteriores, relativos a cada tipo de Função, verificaremos que, quando o conteúdo trazido é em relação às Funções afim, quadrática e as definidas por várias variáveis, o traçado de explanação é quase que idêntico. Primeiramente o autor traz uma introdução sobre a Função específica, seguida do estudo do gráfico desta Função, do cálculo das raízes destas Funções e, por fim, questões relacionadas a inequações. No entanto, ao chegar nas Funções Exponencial e Logarítmica, altera-se a sequência e adiciona-se uma breve revisão sobre Exponenciais, no primeiro caso e sobre logaritmo no segundo.

Primeiramente, na Função Exponencial, o autor faz a introdução seguida de uma revisão sobre potência e radiciação, bem como suas principais propriedades, seguido do gráfico da Função e das equações Exponenciais. Na Função Logarítmica, partindo da introdução, o autor explana as ideias de logarítmico, os sistemas logarítmicos, bem como as suas propriedades operatórias, além da ideia de mudanças de base, para então adentrar nas Funções Logarítmicas, seus estudos dos gráficos e das equações Exponenciais, para no fim, fazer uma relação entre as Funções Exponencial e Logarítmica.

Por fim, no volume dois desta coleção, onde trabalha-se conteúdos relativos ao 2º ano do Ensino Médio, o autor se limita a trabalhar com as Funções Trigonométricas, limitando-se ainda mais em trabalhar com as Funções Seno, Cosseno, seus gráficos e seus períodos. Como dito anteriormente, no volume, unidade que trabalha conteúdos para alunos do 3º ano do Ensino Médio, não é trabalhado o conceito de Função.

### **1.3.1 Análise de Atividades de introdução do conceito de Função**

O livro não traz uma definição explícita de Função, o que os autores trazem é uma noção intuitiva, partindo de exemplos concretos e uma noção partindo da ideia

de conjuntos, conteúdo este que o próprio autor trabalha no capítulo anterior, para fins de reforçar esta ideia de conjuntos e que esta definição ajude o aluno a entender a noção de conjuntos, domínio, contradomínio e imagem de uma Função.

No exemplo do cotidiano, o autor traz tabelas que, ajudam muito o aluno a começar a compreender esta ideia de interdependência, quando o exemplo apresenta o caso de um ciclista que a cada minuto percorre 600 metros de distância, sendo que se estudado cada instante, este apresentará uma única distância percorrida, ou seja, no instante 1 minuto percorre-se 600 metros, no instante 2 minutos percorre-se 1200 metros, e assim sucessivamente, sendo que em momento algum instantes distintos irão apresentar distâncias percorridas iguais.

Em seguida o autor apresenta mais três exemplos parecidos com este, e que apresentam esta mesma ideia, sendo que, para ficar visual, o autor usa ainda a ideia de conjuntos numéricos para apresentar uma noção mais avançada de Função. O autor traz em seguida, dois exemplos de relação entre conjuntos que não representariam uma Função, uma pelo fato de não relacionarem todos os elementos do conjunto **A** (imagem 7), ou seja, no primeiro exemplo o elemento 3 do conjunto **A** não faz relação a nenhum elemento do conjunto **B**. Por outro lado, no outro exemplo, também não representa uma Função, pois neste caso, nós temos um mesmo elemento do conjunto **A** se relacionando a dois elementos distintos do conjunto **B**,

Partindo destes exemplos o autor vai apresentar em seguida, outros dois exemplos que representam a ideia de Função com uma relação entre os conjuntos, exemplos bem claros e didáticos que mostram, visualmente para o aluno, o que deve acontecer para que tenhamos uma Função. Ou seja, no primeiro exemplo nós temos todos os elementos do conjunto **A** se relacionando a um único elemento no conjunto **B**, e no segundo exemplo nós temos novamente todos os elementos do conjunto **A** relacionados a um único elemento do conjunto **B**, o que define, ou caracteriza uma Função, mesmo que tenhamos, como no segundo exemplo, elementos distintos do meu conjunto **A** relacionados ao mesmo elemento do conjunto **B**.

O autor se utiliza dos mesmos exemplos de conjuntos para demonstrar e definir o conceito de domínio, contradomínio e conjunto imagem, ficando bem claro e didático perceber que, se eu tenho uma Função relacionando elementos do conjunto **A** a elementos do conjunto **B**, logo esse meu conjunto **A** é o domínio desta Função e, o conjunto **B** o seu contradomínio. Ainda, se olharmos para o subconjunto deste

contradomínio composto por todos os elementos que são imagens de elementos do conjunto **A**, ou seja, partindo do ponto que estamos diante de uma Função definida, todos os elementos do conjunto **B** (contradomínio) que se relacionam com o conjunto **A** (domínio), este subconjunto formado dentro de **B** será denominado nosso **Conjunto Imagem**.

Por fim, muito interessante perceber a sensibilidade do autor para apresentar no próprio Livro Didático, um breve resumo histórico de como se desenvolveu o conceito de Função, mesmo que em momento algum ele venha a se apropriar de alguma definição em específico. O autor traz algumas definições e obras históricas que, ora definiram o conceito de Função, ora trouxeram uma ideia, visto que à época não existia um conceito definido sobre o tema, do que hoje entendemos como sendo uma Função. O autor usa teóricos como o autor francês Nicole Oresme, o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, o suíço Leonhard Euler e o conterrâneo de Gottfried, o Peter Gustav Lejeune Dirichelet.

### **1.3.2 Análise da definição**

Embora o autor não comece o capítulo apresentando um conceito ou uma definição de Função, ao final do primeiro tópico, ao trazer um breve relato de como o conceito de Função foi surgindo na linha histórica, ele apresenta duas definições que o autor descreve como definições muito próximas da que utilizamos hoje em dia. Uma delas, do matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet e outra apresentada por um dos principais matemáticos que trabalhou com estas definições de Função, o suíço Leonhard Euler, que foi quem indicou a notação  $f(x)$  para indicar Função de  $x$ .

### **1.3.3 Comparação do conceito de Função no Currículo e no Livro Didático**

De acordo com o Currículo nacional, é no Ensino Médio que os conceitos de Função devem ser aprofundados e trabalhados em conjunto com demais conteúdos. Como pudemos ver anteriormente, a BNCC não nos apresenta objetos de conhecimentos divididos por ano letivo, tal qual o faz quando no Ensino Fundamental. Para o Ensino Médio, ela limita-se a apresentar competências mínimas a ser

desenvolvidas nos alunos durante este período letivo, sendo que o professor passa a ter uma certa autonomia na ordem de aplicação destes conteúdos.

De acordo com a BNCC a primeira competência a ser desenvolvida, é a de interpretar situações em diversos contextos e, para isto, um dos conceitos ligados à Função, diz respeito às expressões algébricas e a interpretação de gráficos. Neste ponto o autor do livro atende completamente ao Currículo, sendo que uma das preocupações do autor é a de sempre trabalhar com construção e análise gráficas, e isto se repete em todos os tipos de Função trabalhadas pelo autor durante os dois primeiros livros do Ensino Médio, sendo que, conforme o conceito vai se alterando, de Função afim para quadrática, depois para Exponencial, e assim sucessivamente, isto vai trazendo cada vez mais problemas relacionados ao cotidiano, onde a análise gráfica é fundamental para resolvê-las.

Na segunda competência, vemos que o autor do Livro Didático trabalha já parcialmente em parceria com o Currículo. Este apresenta primeiramente a habilidade de compreender despesa pessoais/familiares, a ideia de renda bruta e líquida, receita e despesa, dentre outros conceitos ligados a matemática financeira e que, é possível enxergar o autor trabalhando juntamente com os conceitos de Função, inclusive com textos explicando o que é a poupança e como ela funciona no Brasil, de modo bem didático e interessante.

A terceira competência é a que, provavelmente se utiliza da maior quantidade possível de conceitos matemáticos ligados à Função, com o objetivo de levar o aluno a interpretar, construir e resolver problemas em diversos contextos. Para isto, o Currículo vai apresentar diversas habilidades a serem trabalhadas com os alunos. Em resumo, pretende-se que nesta competência o aluno trabalhe com gráficos de Funções, todas elas, aprendendo a interpretar os gráficos e construí-los, sempre trabalhando com as ideias de variações de grandezas.

No Livro Didático é possível verificar que todas essas questões vêm sendo trabalhadas, inclusive com muitos problemas do cotidiano envolvendo bastante matemática financeira. Talvez aqui a crítica fique às sugestões didáticas que são dadas nessas competências, e que não devem ter sido levadas em consideração pelos professores, coordenadores e diretores, quando da escolha destes livros por estas escolas. Ele começa sugerindo problemas que relacionem consumo de energia e água, alcance de projéteis, relações entre juros composto e Funções Exponenciais,

mas, ao chegar em Funções trigonométricas, o Currículo propõe que se analise movimentos oscilatórios, como ondas eletromagnéticas, vibrações em instrumentos de corda, o ciclo lunar, o tempo de cada ciclo lunar, se estes ciclos têm relação com os fenômenos periódicos das marés, enfim, começam a traçar diversos objetos do conhecimento, que o autor do livro não acompanha, mesmo este currículo do estado não tendo força normativa, seria interessante que as escolhas dos livros se dessem em atenção à estas sugestões do currículo.

A quarta competência é a que abrange os conceitos mais básicos das Funções, sendo que nas próprias sugestões didáticas da SED-MS eles são chamados de “conceitos tradicionais”, tendo como objetos do conhecimento as Funções, gráficos de Funções, as variações e os estudos das variações das Funções, bem como o crescimento, decrescimento, intervalos, e a taxa de variação. Em alguns casos ainda os pontos de máximo e de mínimo e o comportamento das Funções dentro de um determinado intervalo. Todos esses conceitos foram observados pelo autor do Livro Didáticos e são trabalhados por ele dentro de cada capítulo. Vale ressaltar ainda que o autor faz questão de ligar esses conceitos matemáticos à problemas do cotidiano sugerindo ainda, uso de ferramentas tecnológicas para trabalhar com os alunos dentro da sala de aula.

Por fim, a quinta e última competência sugerida pela BNCC tem ligação com a ideia de investigar e estabelecer conjecturas, sendo que, neste ponto, o autor do Livro Didático deixa um pouco a desejar, ficando clara sua preocupação com os problemas e as resoluções de problemas do cotidiano, sendo talvez, este o motivo para que o mesmo não trabalhe com essa ideia de instigar o aluno a conjecturar, investigar, estabelecer hipóteses, ou seja, o Livro Didático caminha lado a lado com a resolução de problemas, o que faz com que ele atenda a maior parte dos objetivos propostos pelo Currículo, seja nacional ou estadual. Vale lembrar que este livro é anterior à BNCC e por este motivo não atende em sua totalidade.

#### **1.4 Conclusão**

A Base Nacional Comum Curricular possui uma forma distinta de trazer os objetivos de aprendizagem para a educação básica nacional no Brasil. Para o Ensino Fundamental a BNCC apresenta os objetos do conhecimento separados por anos letivos, enquanto que no Ensino Médio ela se limita apenas em separar por

competências, que por sua vez apresentam habilidades a serem desenvolvidas nos alunos neste período de estudo.

Este capítulo se dedicou a analisar o conceito de Função que é trazido pela BNCC e pelo Currículo de Referência da SED-MS, bem como, sobre os objetivos trazidos por estes, ao proporem o estudo de Funções. Diante disto, foi possível perceber que, embora entendamos ser possível a inclusão de um conceito dentre os vários que serão apontados nesta dissertação, o Currículo, seja nacional ou estadual, não apresenta uma definição clara do conceito de Função, abordando diretamente pelas definições das Funções afins, quadráticas e todas as demais estudadas durante a educação básica, mas que, ao analisarmos Função por Função, entendemos o objetivo de se trabalhar com Funções para analisar as variações entre duas variáveis, bem como, utilizar estes conceitos para entender, interpretar, mensura, conjecturar, enfim, se organizar como seres pensantes que observam e entendem os fenômenos do dia a dia.

Em seguida foi feita uma análise do conceito de Função trabalhada nos Livros Didáticos adotados por algumas escolas da Secretaria de Estado de Educação do Mato Grosso do Sul, para alunos do Ensino Fundamental e Médio. Tal qual o Currículo, os autores também fogem de dar uma definição direta para o conceito de Função, limitando-se a trabalharem com uma noção de Função, apresentada a partir de problemas do cotidiano, mas, conforme o livro vai se desenvolvendo, os objetivos do autor também ficam evidenciados, sendo possível verificar que o livro atende, quase que em sua totalidade, os objetivos do Currículo nacional, mas deixa a desejar no que concerne ao Currículo de referência da SED-MS, principalmente em suas sugestões didáticas.

Compreendemos que as sugestões didáticas foram formuladas com base no contexto dos estudantes de Mato Grosso do Sul, e que os Livros Didáticos não têm necessariamente um compromisso com este Currículo Estadual, mas nos faz questionar se seria uma questão de procura das escolas por livros que tentassem contemplar essas sugestões, ou se seria o caso de readequar as sugestões didáticas para aquelas que de fato, pudessem ser contempladas por meio dos Livros Didáticos, pois sabemos que muitos professores seguem fiel e cegamente esse recurso em suas aulas. Ao fim desta dissertação, iremos apresentar algumas sugestões de trabalho,

onde os professores poderão trabalhar com o conceito de função em uma perspectiva histórica com seus alunos, sejam da educação básica, seja da educação superior.

## 2 UMA BREVE VISÃO DA EVOLUÇÃO HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Ao analisarmos a disciplina de Análise Matemática nos cursos de matemática, percebemos que, historicamente, os dois conceitos centrais desta disciplina são Função e limite. O que veremos neste capítulo é que, desde a Idade Média, senão antes, houveram muitos trabalhos que utilizavam este conceito, implicitamente, o que causaram confusão, pois ainda não haviam sido identificados seus aspectos. Foi necessário, portanto, várias décadas para que pudesse surgir uma definição precisa da noção de Função, sendo mais específico, a definição proposta por Euler, conceito este que será trabalhado com mais cuidado e dando maior importância no próximo capítulo.

A ideia deste capítulo é acompanhar a história dessa noção, para mostrar os aspectos que tangenciaram a construção deste conceito, bem como as dificuldades encontradas no decorrer do caminho, analisando historicamente algumas das várias definições propostas ao longo dos anos por diversos pensadores, sendo escolhidos os principais, aqueles que apresentaram propostas mais completas e concretas até chegar na definição que entendemos ser a mais geral para este conceito.

O conceito de Função demorou a ser construído e desenvolvido até assumir a forma, ou as formas, como estudamos ele hoje, nos Livros Didáticos e no Currículo brasileiro, na forma como pudemos encontrar no capítulo anterior. Foram necessários que vários filósofos e cientistas desenvolvessem trabalhos com o objetivo de compreender a cinemática dos corpos, como citaremos mais a frente, o trabalho proposto por Nicole Oresme, que estudou o gráfico da variação da velocidade em Função do tempo de viagem em aceleração uniforme, introduzindo neste estudo as noções de latitudes e longitudes, afim de calcular a distância percorrida em velocidade.

Neste capítulo veremos que, embora o conceito de Função tenha sido esclarecido apenas no século XVII, houveram várias ideias anteriores que estavam relacionadas, como o citado anteriormente, Nicole Oresme, estudante francês, da Universidade de Paris que, apresentou em seu trabalho a ideia de velocidade relacionando a velocidade com o tempo, apresentando um gráfico com linhas na



vertical e na horizontal, perpendiculares entre si, que ele denominou como latitude e longitude.

De fato, o debate sobre este importante conceito não se esgota, sendo que as ideias sobre este conceito continuam a ser discutidas, tanto a nível de Brasil, em dissertações e teses, quanto a nível mundial, a exemplos de grupos de pesquisa formados na França para pesquisar apenas ideias que permeiam o conceito de Função. De outra forma, analisar as diferentes definições que foram surgindo ao longo dos anos, principalmente entre os anos de 1694 e 1927, bem como analisar as diferentes interpretações e formas de representar este conceito, pode contribuir para as reflexões acerca de sua importância no ensino atual.

Ao final deste capítulo, analisaremos mais especificamente alguns conceitos que entendemos ser mais completos que os outros, pois como dito anteriormente, várias foram as contribuições feitas por filósofos e matemáticos ao longo dos anos, sendo que escolheremos aquelas que entendemos ser a que mais contribuíram para esta construção, deixando para estudar mais detalhadamente no próximo capítulo, a definição proposta por Euler, que entendemos ser a primeira definição mais completa sobre Função apresentada neste contexto histórico.

## **2.1 Breve olhar sobre a evolução histórica e epistemológica do conceito de Função**

Conhecer a gênese histórica dos conceitos matemáticos pode ser, em diversos momentos, uma valiosa ferramenta na elaboração da linguagem matemática e na compreensão mais aprofundada desses conceitos. Sabemos que um bom professor deve ter um bom conhecimento da disciplina que leciona, bem como dos conteúdos abrangidos por ela, logo, conhecer a história que envolve o processo de concepção e desenvolvimento desses conceitos pode ajudar na contextualização e, principalmente, auxiliar na compreensão das dificuldades dos alunos em compreender tal conceito.

Em especial, quando viramos nosso olhar para a evolução histórico-epistemológica do conceito de Função, vemos que este apresenta contribuições notórias, que já davam uma ideia do que seria desde os anos 2000 a.C., com os babilônios até o século XX, com contribuições de Bourbaki, e ter conhecimento de toda esta evolução, poderá auxiliar o professor a compreender os motivos de tantas dificuldades dos alunos no entendimento deste conceito, muito utilizado no ensino

superior por diversos cursos, onde os níveis de desistência e reprovação são muito altos.

De início, precisamos entender que para se construir o conceito de Função com o qual se trabalha atualmente, precisou-se de contribuições de vários matemáticos durante séculos de estudos. Nesse período, surgiram conceitos que alicerçaram suas ideias e pensamentos rumo à construção da definição atual de Função e suas implicações. Dividindo-se em períodos ou, como Yuoschkevitch (1976) gosta de chamar, dividindo entre os principais estágios do desenvolvimento estão a Antiguidade, a Idade Média e a Modernidade, visto que o trabalho de Yuoschkevitch (1976) analisou a construção histórica do conceito de Função até metade do século XIX.

Em suma, na Antiguidade, não houve a criação de nenhuma noção geral da ideia de variável ou de Função, mas houveram casos práticos e particulares, principalmente no campo da Astronomia, que foram estudados utilizando-se de métodos quantitativos e com a construção de diversas tabelas que representavam relações entre conjuntos discretos de constantes dadas, uma em Função da outra

Já na Idade Média, especificamente na ciência europeia do séc. XIV, eles se utilizavam de uma descrição verbal ou gráfica, em detrimento do uso de fórmulas, para definir cada caso particular de dependência entre duas quantidades, enquanto que na Modernidade, no final do séc. XVI e, principalmente, durante o séc. XVII, começaram a surgir expressões analíticas de Funções.

A classe analítica de Funções expressas por somas de séries infinitas torna-se a mais usual. Segundo Yuoschkevitch (1976), “foi o método analítico de introdução das Funções que revolucionou a Matemática e, devido a sua grande eficiência, conduziu as Funções a um papel central na área das ciências exatas.” (p.39).

De forma mais aprofundada, a Antiguidade é considerada por Azcárate e Deulofeu (1996) como o período em que estão presentes muitos casos particulares de dependência entre duas quantidades, embora ainda não apareça neste período, noções gerais sobre quantidades variáveis e Funções. Esses autores indicam ainda que os Babilônios possuem dados sobre astronomia interessantíssimos para se entender a origem das Funções.

Outras contribuições para o conceito de Função deste período surgiram na Grécia, em estudos matemáticos e nas ciências naturais. Segundo Eves (2004)

enquanto ainda fazia parte do Império Romano, na Grécia, estudavam-se problemas astronômicos e matemáticos similares aos da análise matemática atual. Funções eram tabuladas por meio do uso de interpolação linear e, em alguns casos simples, até mesmo por meio de limites de proporções de duas quantidades infinitamente pequenas. Outros problemas envolvendo o cálculos de comprimentos, área e volume, também eram resolvidos aplicando-se métodos semelhantes aos do Cálculo Integral e Diferencial.

Entretanto, segundo Yuoschkevitch (1976), o simbolismo na Grécia, até o séc. III d.C. restringia-se apenas a denotar várias quantidades por diferentes letras do alfabeto. Apenas com os trabalhos de Diofanto de Alexandria, que viveu no século III e escreveu Aritmética, obra na qual propõe uma abordagem analítica da teoria algébrica e, possivelmente, de seus predecessores mais próximos, surge os primeiros sinais, como, por exemplo, um sinal de igualdade. Contudo, com a decadência da sociedade antiga, suas notações acabaram não sendo desenvolvidas.

Embora os gregos fossem carentes de um simbolismo mais sofisticado, eles deram grande contribuição para o aumento no número de dependências funcionais utilizadas e os métodos de estudá-la, mas um conceito de Função, nesta época, ainda não existia. De acordo com Yuoschkevitch (1976), era possível verificar no pensamento grego, apenas as ideias de variação quantitativa ou de mudança variável, mas nenhuma dessas foi capaz de gerar um pensamento mais complexo e abstrato que se relacionasse à noção de variabilidade.

Durante o século XIV, após a decadência da cultura antiga, passaram a surgir as primeiras ideias relativas à noção de Função em um campo mais amplo, de forma mais geral e abstrata. Conforme Yuoschkevitch (1976), surgiram nesse período, muitos conceitos de grande importância para a evolução das ciências exatas, como, por exemplo, o conceito de velocidade instantânea, aceleração, quantidade variável, entre outros, que, contribuíram na síntese do pensamento matemático.

No mesmo período foram desenvolvidas uma série de experimentações e observações que, possibilitaram perceber que muitos fenômenos naturais apresentavam significativa regularidade que poderia ser descrita através de leis quantitativas. O principal nome desta época, foi o do matemático Francês, Nicole Oresme (1323-1382), que desenvolveu estudos que possibilitaram introduzir os conceitos de *latitude das formas*. Conforme afirma Yuoschkevitch (1976), essa teoria

foi fundamentada em ideias sobre quantidades variáveis dependentes, que segundo Boyer (1996), “os termos latitude e longitude, que Oresme usou, são equivalentes, num sentido amplo, à nossa ordenada e abscissa, e sua representação gráfica assemelha-se com nossa geometria analítica.” (Boyer, 1996, p.181).

Devido ao desenvolvimento a partir dessa teoria da latitude das formas, por meio de registros e representações gráficas que o estudo das Funções do tempo se desenvolveu. Na Espanha, França, Inglaterra e Itália, durante os dois séculos seguintes, XV e XVI, a teoria da latitude das formas teve enorme prestígio, sendo exposta em universidades e livros publicados, apesar disto, segundo Ponte (1992), o estudo das Funções em Matemática ainda não havia sido alcançado como um conceito e objeto individualizado.

Somente com a álgebra simbólica e com a extensão do conceito numérico que, segundo Yuoschkevitch (1976), foi catalisado o desenvolvimento do conceito de Função, englobando tanto o conjunto dos números reais quanto o conjunto dos números complexos. Foram esses os conceitos matemáticos fundamentais que proporcionaram a introdução do conceito de Função como uma relação entre conjuntos numéricos e como uma expressão analítica das Funções através de fórmulas.

Uma importante ênfase dada pelo autor é a introdução de inúmeros sinais para operações e relações matemáticas, primeiramente adicionando sinais para a adição, subtração, potência e igualdade, principalmente com o surgimento de sinais para quantidades desconhecidas, que começou a ser denotada por Viète em 1591, denotando tais quantidades por vogais A, E, I,... e consoantes B, G, D,... do alfabeto latino. Segundo Yuoschkevitch (1976),

[...] a importância dessa notação, que, pela primeira vez, possibilitou colocar no papel a forma simbólica de equações algébricas e expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários (uma palavra também originada por Viète), dificilmente pode ser estimada. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 51)

Yuoschkevitch (1976) analisou ainda estudos de René Descartes, onde verificou que pela primeira vez é sustentado que uma equação em  $x$  e  $y$  é um meio para introduzir dependência entre quantidades variáveis, e de forma clara era possível verificar a possibilidade de se calcular a partir do valor de uma delas, a outra correspondente. Logo, de início, embora as expressões infinitas fossem conhecidas

já há muito tempo, por meio de progressões geométricas decrescentes e infinitas, apenas na segunda metade do século XVII passou-se a utilizá-las como instrumento de estudo das Funções, atribuindo ao estudo de Funções o papel central na análise matemática, sendo o centro das teorias de Newton e de Leibniz, por meio do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

Verificamos então que, o desenvolvimento do conceito de Funções foi algo que levou muito tempo para ser construído e aperfeiçoado, até chegar no que conhecemos hoje. E após várias evoluções chegou a ser explicitado no século XVIII, mas não deixando de figurar de forma implícita, como vimos anteriormente, em datas anteriores.

A seguir mostraremos uma tabela contendo as principais definições, bem como a interpretação/representação seguidas de algumas observações feitas pela professora e pesquisadora Rosane Corsini, em sua proposta de analisar a evolução histórica do conceito de Função no livro Limite de Funções de uma variável real com valores reais e Generalizações, da Editora UFMS (2020).

Tabela 1: Análise das definições de função (1694 - 1927) por Rosane Corsini

Ano	Autor	Definição	Observação
1694	Leibniz	“Eu chamo Funções todas as porções de linhas retas, que fazemos ao traçar retas indefinidas, que passam por um ponto fixo, e pelos pontos da curva.”	Está aparentemente apoiando-se na característica gráfica da curva que representa a Função.
1718	Bernoulli	“Chamamos Função de uma variável uma quantidade composta de qualquer forma por esta variável e por constantes.” Notação $\phi x$	Contempla a relação de quantidades variáveis em sua definição.
1748	Euler	“Uma quantidade constante é uma quantidade determinada, que ainda conserva o mesmo valor... Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, ou seja, uma quantidade universal que inclui todos os valores determinados... Uma Função de quantidade variável é uma expressão analítica composta, de qualquer maneira, dessa mesma quantidade e de números, ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica, que além da variável $z$ contém quantidades constantes, é uma Função de $z$ . Por exemplo, $a+3z$ ; $az-4zz$ ; $az+b(aa-zz)$ ; $cz$ ; etc., são funções de $z$ . Uma Função de variável é então, também, uma quantidade variável.	Contempla a relação de quantidades variáveis em sua definição e se reporta à expressão analítica da Função. Embora não defina o que significa expressão analítica, segundo Boyer (1991) tinha em mente Funções algébricas e as Funções transcendentais elementares como as trigonométricas, as Exponenciais e as Logarítmicas.
1755	Euler	“Se certas quantidades dependem de outras quantidades de tal modo que se as outras mudam, estas quantidades mudam também, então nós temos o hábito de nomear essas quantidades de Funções dessas últimas. Esta denominação tem a maior abrangência e contém em si todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por consequência, $x$ designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de $x$ de alguma maneira, ou que são determinadas por $x$ , são chamadas de Funções de $x$ .”	Contempla a relação de quantidades variáveis e cita a expressão “Funções de $x$ ”.

Ano	Autor	Definição	Observação
1782	Condorcet	“Suponho que tenho um certo número de quantidades $x, y, z, \dots, F$ ; e que, para cada valor determinado de $x, y, z, \dots$ , etc, $F$ tem um ou vários valores determinados: digo que $F$ é uma Função de $x, y, z, \dots$ . Enfim, eu sei que quando $x, y, z$ serão determinados, $F$ o será também, quando mesmo eu não sabendo nem a maneira de expressar $F$ por meio de $x, y, z$ , nem a forma da equação entre $F$ e $x, y, z$ ; eu saberei que $F$ é Função de $x, y, z$ .”	Contempla a relação de quantidades variáveis e cita a expressão “Funções de $x$ ”.
1797	Lagrange	“Chamamos Função de um ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entram de uma maneira qualquer, imbricadas ou não com outras quantidades que olhamos como tendo valores dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da Função podem receber todos os valores possíveis. Assim nas Funções consideramos apenas as quantidades que supomos variáveis, sem nenhuma subordinação às constantes que podem estar aí imbricadas. Para denominar uma Função de uma só variável com $x$ , nós faremos simplesmente preceder desta variável a letra ou característica $f$ , ou $F$ ; mas quando quisermos designar a Função já composta desta variável, como $x^2$ ou $a + bx$ ou etc., fecharemos esta quantidade entre dois parênteses. Assim $fx$ designará uma Função de $x$ , $f(x^2)$ , $f(a + bx)$ , etc. designarão Funções de $x^2$ , $a + bx$ , etc. Para denotar uma Função de duas variáveis independentes como, $x$ e $y$ , nós escreveremos $(x, y)$ , e também outras.”	Contempla a relação de quantidade variável e também se cita a utilização de expressões analíticas.
1797	Lacroix	“Toda quantidade cujo valor depende de uma ou de várias outras quantidades, é dita Função dessas últimas, quer saibamos ou ignoremos por quais operações é preciso passar para retornar destas à primeira.”	Contempla a relação de quantidades variáveis.

Ano	Autor	Definição	Observação
1821	Cauchy	“Quando quantidades variáveis estão de tal forma ligadas entres elas que, o valor de uma delas sendo dado, possamos determinar o valor de todas as outras, concebemos como ordinárias essas diversas quantidades expressas por meio de uma dentre elas, que recebe então o nome de variável independente e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de Funções desta variável.”	Contempla a relação de quantidades variáveis.
1834	Lobatchevsky	“A concepção geral exige que uma Função de $x$ seja considerada como um número que é dado para cada $x$ e que muda gradualmente ao mesmo tempo que $x$ . O valor da Função pode ser dado seja por uma expressão analítica, seja por uma condição que fornece um meio para testar todos os números e selecionar um dentre eles, ou, finalmente, a dependência pode existir mas permanece desconhecida.”	Refere-se à relação de dependência de $y$ por $x$ , e reporta à utilização de uma expressão analítica para representar uma Função.
1851	Riemann	“Seja $z$ uma quantidade variável, que toma pouco a pouco, todos os valores reais possíveis, então chamamos $w$ uma Função de $z$ , se a cada um desses valores corresponde um único valor da quantidade indefinida $w$ , e se $z$ percorre continuamente todos os valores que se encontram entre dois valores constantes, $w$ muda também continuamente, então chamamos esta Função de contínua.”	Contempla a relação de quantidades variáveis.
1870	Hankel	“Dizemos que $y$ é uma Função de $x$ se a cada valor de $x$ de um certo intervalo corresponde um valor bem definido e sem que isto exija portanto que $y$ seja definido sobre todo o intervalo pela mesma lei em Função de $x$ , nem mesmo que $y$ seja definido por uma expressão matemática explícita de $x$ .”	Contempla a relação de quantidades variáveis e é o primeiro que fornece a noção de domínio e fala sobre o conceito de Função contínua.



Ano	Autor	Definição	Observação
1902	Lebesgue	“Apesar de que, após Dirichlet e Riemann, concordamos geralmente em dizer que existe uma Função quando existe uma correspondência entre um número $y$ e números $x_1, x_2, \dots$ sem nos preocuparmos com o procedimento que ajuda a estabelecer esta correspondência, muitos matemáticos parecem considerar como verdadeiras Funções somente aquelas introduzidas por correspondências analíticas. Podemos pensar que introduzimos talvez assim uma restrição bastante arbitrária; entretanto é certo que isso não restringe praticamente o campo das aplicações, porque sozinhas, as Funções representáveis analiticamente, são efetivamente empregadas até o presente.”	Contempla a relação entre elementos de conjuntos numéricos e também se refere à utilização de expressões analíticas na representação da Função.
1927	Weyl	“Ninguém jamais soube explicar o que é uma Função. Mas uma Função $f$ está definida se por um meio qualquer pudermos associar a um número $a$ , um número $b \dots$ Dizemos então que $b$ é o valor da Função $f$ para o valor $a$ do argumento.”	Contempla a relação entre elementos de conjuntos numéricos e também refere-se à utilização de expressões analíticas na representação da Função.
1939	Bourbaki	“Sejam $E$ e $F$ , dois conjuntos distintos ou não, uma relação entre uma variável $x$ de $E$ e uma variável $y$ de $F$ é dita relação funcional em $y$ ou relação funcional de $E$ em $F$ , se para todo $x$ pertencente a $E$ , existe um só $y$ pertencente a $F$ , que esteja na relação considerada com $x$ . Damos o nome de Função à operação que associa assim a todo elemento $x$ de $E$ , o elemento $y$ em $F$ que se encontra na relação da com $x$ ; dizemos que $y$ é o valor da Função para o elemento $x$ , e que a Função é determinada pela relação funcional considerada.”	Contempla a relação entre elementos de conjuntos numéricos e traz o conceito de domínio bem definido.

Fonte: (RACHIDI, 2020, p. 194-195)

Analisar todas as definições acima, seria além de trabalhoso, desnecessário, uma vez que algumas delas se repetem em outras palavras, mas trazendo na essência o mesmo conceito. Fazendo uma análise superficial, percebemos que as definições mais usuais, ou que mais se aproximam com as definições trabalhadas hoje em dia nos Currículos e nos Livros Didáticos, são as de Hankel e Bourbaki.

Com certeza a mais parecida com as definições apresentadas, seja nos Currículos, seja nos Livros Didáticos, é a definição de Bourbaki (1939) que apresentou a ideia de Função com base nos conjuntos, onde cada elemento de  $x$  pertencente a um conjunto  $A$ , corresponde a um único elemento  $y$ , pertencente a um conjunto  $B$ , além de dar a ideia de domínio, fazendo sua definição de maneira clara, ao especificar o elemento  $x$  pertencendo ao conjunto  $A$ .

Definição muito importante também, inclusive apresentando ideias posteriormente definidas por Bourbaki, foi a definição proposta por Hankel em 1870, que trouxe relevantes contribuições por exemplo, ao informar que  $y$  não precisa necessariamente estar definido sobre todo o intervalo. Além disto, foi Hankel o primeiro a trazer a ideia de domínio da Função, quando o mesmo diz que “dizemos que  $y$  é uma Função de  $x$  se, **a cada valor de  $x$  de um certo intervalo...**” (Hankel, 1870 apud RACHIDI, 2020, p. 55), que posteriormente foi devidamente definida por Bourbaki.

## **2.2 Um esboço de análise das dificuldades históricas e epistemológicas do conceito de Função**

Sabemos que um professor de matemática, para conseguir ensinar um conceito da melhor maneira possível, deve levar em consideração uma gama de conhecimentos para além do conteúdo específico em sua íntegra. Tão importante quanto é conhecer a história que envolveu o processo de desenvolvimento deste conceito. Desse modo, sempre que possível, ele deve conhecer as principais dificuldades enfrentadas neste processo, uma vez que isto pode, de alguma forma, auxiliar na abordagem de dificuldades que os alunos possuem em assimilar estes conceitos.

Brousseau (2008) vai dizer que existem certos ‘conhecimentos’ que, em certos contextos dá resultados corretos ou vantagens observáveis, mas que se revela falso ou totalmente inadequado em contextos novos ou mais amplos. Assim, um ‘novo

conhecimento' precisa ser determinado neste novo contexto, porém esse novo conhecimento não se dá de acordo com o anterior, mas em oposição a ele, não existindo algumas vezes lógicas evidentes que possam permitir facilmente um desacreditar do erro antigo por meio do conhecimento novo, pelo contrário, em primeiro momento o que acontece é uma competição. Vale ressaltar que esses conhecimentos não são construções pessoais, mais sim respostas 'universais' em contextos precisos. A estes conhecimentos, Bachelard vai denominar e, posteriormente Brousseau vai trazer para o contexto da matemática, de obstáculos epistemológicos, dizendo que:

Um obstáculo se manifesta pelos erros, os quais, em um sujeito, estão unidos por uma fonte comum: uma maneira de conhecer; uma concepção característica, coerente, embora incorreta; um conhecimento anterior bem-sucedido na totalidade de um domínio de ações. (BROUSSEAU, 2008, p. 49)

Ele vai continuar nos encorajando a enfrentar esses obstáculos, e não tentar ignorá-lo, uma vez que:

Dessa forma, obstáculo não desaparece com a aprendizagem de um novo conhecimento. Pelo contrário, opõe resistência a sua aquisição, a sua compreensão, retarda sua aplicação, subsiste em estado latente e reaparece de súbito, em especial no contexto anterior, quando as circunstâncias o permitem. Portanto, é inútil ignorar um obstáculo. Deve-se rechaçá-lo de maneira explícita, integrar sua negação à aprendizagem de um conhecimento novo, em particular na forma de contraexemplos. (BROUSSEAU, 2008, p. 50)

Quando falamos de Função, por exemplo, Pires vai dizer que:

[...] as dificuldades apresentadas pelos estudantes com essa noção fica muito evidente, pois na maioria das vezes eles não conseguem fazer ligações entre as diferentes representações de Função: gráfica, algébrica, diagramas, sentenças que descrevem interrelações, como também a interpretação de gráficos e a manipulação de símbolos que descrevem e representam Funções, tais como:  $f(x)$ ,  $x \mapsto y$ ,  $\text{sen}(x + t)$ , etc. (PIRES, 2016, p. 2)

Por mais que pareça ser algo negativo, pois por vezes temos a impressão de que esses obstáculos epistemológicos devem ser evitados no processo de ensino e aprendizado, a presença desses obstáculos é algo natural nesse processo, pois ele faz parte do desenvolvimento do conceito e é papel do professor estar atento a essas dificuldades e pensar em estratégias para lidar com essas situações, quando elas aparecerem.

O conceito de Função teve então um longo processo de formulação de ideias, noções até se tornar um conceito matemático, buscando sempre respaldo no pensamento científico e filosófico. Desde 2000 a.C., os babilônios já se valiam de tábuas sexagesimais de quadrados, que os mesmos utilizavam para realizar seu cálculos, tudo construído de maneira empírica, mas que, posteriormente, se tornaram os fundamentos matemáticos que deram desenvolvimento à Astronomia. Essas tábuas já continham a principal ideia que envolve hoje o conceito de Função, que é a relação funcional entre variáveis

Assim, é possível perceber que, quando analisamos o desenvolvimento da Astronomia na antiguidade, essa ciência já possuía algumas noções de Função, principalmente aquelas que modelavam fenômenos periódicos. Ponte (1992) no entanto, defende que apenas em Oresme (1323 – 1382) que foi possível se chegar a uma formulação moderna de Função de maneira aproximada, pois antes disto, não existia nada que levasse a uma ideia geral da relação funcional.

Oresme desenvolveu a teoria geométrica das latitudes, de acordo com Ponte (1992), ele utilizava as coordenadas para representar velocidade em Função do tempo. De acordo com Pires:

Para traçar o gráfico da velocidade em Função do tempo de um corpo que se move com aceleração constante, ele marcou pontos representando instantes de tempo (longitudes) e, para cada instante, traçou perpendicularmente à reta das longitudes um segmento de reta (latitudes), em que o comprimento denotava a velocidade. (PIRES, 2016, p. 5)

Para a representação de Oresme, a latitude era como uma “quantidade” variável que dependia exclusivamente da longitude. Na linguagem matemática atual, os termos utilizados por Oresme como latitude e longitude equivalem com as ordenas e abscissas, entretanto, ainda não havia registros explícitos de nenhum estudo que fosse voltado exclusivamente para a noção de Função.

Youschkevitch (1981a) vai afirmar que, somente após a criação dos logaritmos é que foi introduzida por método analítico, a Função em fórmulas e equações, que passou a ter destaque em pesquisas teóricas. Assim, a palavra Função aparece pela primeira vez nos escritos de Leibniz, em 1673, que utilizou-se do termo Função para designar de maneira geral uma dependência de quantidades. Foi ele ainda que introduziu nos estudos sobre Função os termos constante, variável e parâmetro.

De acordo com Ponte (1992), Jean Bernoulli, que trocava correspondências com Leibniz, publicou um artigo amplamente divulgado, onde o mesmo colocou sua definição de Função de uma variável. Mais tarde, seu discípulo Leonard Euler fez uma contribuição essencial para a evolução desta definição. Segundo Ponte (1992) a definição de Bernoulli era que Função de uma variável seria uma quantidade composta, de alguma forma a partir de variáveis e constantes, sendo que seu discípulo Euler teria substituído nesta definição a palavra quantidade por expressão analítica. Deve-se a Euler ainda a notação  $f(x)$  para uma Função em  $x$ .

Embora em Euler o conceito de Função tenha tido uma grande evolução, algumas controvérsias passaram a surgir, o que motivou neste período muitas discussões a respeito desse conceito. As primeiras discussões estavam relacionadas com o famoso problema da corda vibrante. De acordo com Youschkevitch (1981a), D'Alembert apresentou uma Função em que  $y$  descreve o deslocamento da posição de equilíbrio, sendo que tal deslocamento depende de  $x$  e  $t$ , onde o  $x$  representava a distância a partir da origem, e, o  $t$ , o tempo. Participaram desta discussão Euler, Lagrange, D'Alembert, Bernoulli, Gaspard, Laplace e Fourier. Essa discussão contribuiu para o desenvolvimento metodológico dos fundamentos de análise matemática.

Ainda segundo Youschkevitch (1981a), tão importante quanto esta anterior, foi a contribuição dada por Fourier, que preocupado com os fluxos de calor nos corpos materiais, criou a equação  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ , onde a temperatura destes corpos estava em Função de duas variáveis, o tempo ( $t$ ) e a espaço ( $x$ ). Com base nesta equação, posteriormente, Dirichlet separou o conceito de Função de sua representação analítica, sendo possível, a partir da definição dele, entender a Função como uma relação entre dois conjuntos, onde para cada valor da variável independente associa-se um único valor da variável dependente.

Com o passar do século, especificamente entre os séculos XIX e XX, estes conceitos de Função passaram por um refinamento, por meio de várias descobertas, como as Funções contínuas, diferenciáveis e descontínuas em determinados pontos. Para esta época Youschkevitch (1981a) vai destacar os trabalhos de Cantor (1845-1918), Hankel (1839-1873) e Lebesgue (1875-1941), dando destaque para Hankel, que em 1870 apresentou a seguinte definição para Função:

Diz-se que  $y$  é uma Função de  $x$  se a cada valor de  $x$ , em um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de  $y$ , sem que isso exija que  $y$  seja definido em todo o intervalo pela mesma lei em Função de  $x$ , nem mesmo que  $y$  seja definido por uma expressão matemática explícita de  $x$  (HANKEL, 1870, apud YOUSCHKEVITCH, 1981a, p. 61).

De acordo com Pires (2016), foi assim que a definição geral de Função foi incluída nos cursos de análise matemática nesta época, sendo ressaltado por Pires que:

A definição dada por Hankel não faz qualquer menção à unicidade de  $y$  para cada valor de  $x$ , pois essa questão da unicidade distingue as Funções unívocas e plurívocas. De maneira simplista, pode-se dizer que as Funções algébricas racionais são unívocas, pois para cada  $x$  existe um único  $y$  correspondente. Já as irracionais de índice par são todas plurívocas, uma vez que os radicais são ambíguos e dão valores aos pares (PIRES, 2016, p. 9).

Isto fez com que, Lebesgue fizesse ainda uma observação acerca da questão analítica das Funções, trazendo essa importância de se entender que, até então, as Funções apenas eram apresentadas analiticamente, conforme ele afirma a seguir:

Embora, desde Dirichlet e Riemann, seja geralmente aceito que há uma Função quando há uma correspondência entre um número e números 1, 2.... sem pensar no processo usado para estabelecer essa correspondência, muitos matemáticos parecem considerar como verdadeiras Funções apenas aquelas que são introduzidas por correspondências analíticas: pode-se pensar que talvez uma restrição bastante arbitrária seja introduzida. É certo que isso não limita praticamente o campo de aplicações, porque somente as Funções que podem ser representadas analiticamente são usadas até agora. (LEBESGUE, 1902).

Algum tempo mais tarde, Cantor introduziria a noção de produto cartesiano  $E \times F$  de dois conjuntos, o que trouxe também uma enorme contribuição para a discussão, que veio a culminar no conceito de Função dado no século XX pelo grupo Bourbaki, organizado em 1935 e composto por matemáticos franceses, dentre eles Dieudonné. Bourbaki publicou em 1939 O livro *Théorie des Ensembles (fascicule de results)*, que acabou se tornando uma coleção e que, continha em si a definição de Função do grupo:

Sejam  $E$  e  $F$ , dois conjuntos distintos ou não, uma relação entre uma variável de  $E$  e uma variável de  $F$  é chamada relação funcional em ou relação funcional de  $E$  a  $F$ , se para todo pertencente a  $E$ , existe somente um pertencente a  $F$ , que está na relação considerada com,

nós damos o nome de Função à operação que assim se associa com todo elemento de  $E$ , o elemento em  $F$  que está na relação dada com  $x$ , dizemos que é o valor da Função para o elemento  $x$  e que a Função é determinada pela relação funcional considerada. (BOURBAKI, 1939).

Esta definição trouxe, além da unicidade de  $y$ , uma distinção entre a relação funcional e Função, sendo que, para Bourbaki, a relação funcional é utilizada para representar essa relação de variação que existe entre cada elemento de dois conjuntos, enquanto que Função determina a operação que vai associar cada elemento de um conjunto com os elementos do segundo conjunto, ou seja, uma Função é determinada pela relação funcional existente entre esses elementos.

Percebemos com estas definições que, desde a antiguidade até esta definição posta pelo grupo Bourbaki, diferentes ideias, noções e concepções de Funções surgiram, muito por conta do olhar de cada pensador, seja pela ciência, física ou matemática, ou seja no modo de utilizar ou enfatizar cada propriedade, contudo, todas essas ideias contribuíram para a evolução deste conceito, desencadeando as definições que utilizamos no dias atuais.

### **2.3 Considerações e Discussão**

Refletindo sobre o processo evolutivo histórico do conceito Função, percebemos que este evoluiu de maneira gradual, não foi, portanto, algo que nasceu pronto, mas sim, foi um conceito que veio sendo ajustado às necessidades da Ciência e da Matemática e que a compreensão do conceito de Função, ou o caminho percorrido para chegar ao entendimento e à definição utilizada hoje foi influenciado pela forma como as relações funcionais são representadas.

Neste decorrer, vemos que os pesquisadores enfrentaram diversas dificuldades para conseguir desenvolver este conceito. O processo começou com os babilônios por volta de 2000 a.C. que desenvolveram tabelas que continham relações entre valores no intuito de entender a volatilidade do sol, lua e planetas. Ou seja, mesmo sem esclarecer o conhecimento sobre o conceito, as Funções de representação que desenvolveram esse conceito estavam presentes nas atividades dos povos antigos, principalmente as relacionadas à astronomia, e foram registradas em tabelas mostrando as relações entre as quantidades.

Já na Idade Média, quando desenvolveu a teoria geométrica das latitudes, segundo Ponte (1992), Oresme apresentou a primeira representação geométrica da relação entre quantidades variáveis, o que permitia representar a relação de três maneiras diferentes até então, por meio de tabelas, descrição verbal e representação gráfica.

Apesar do grande avanço que o conceito de Função introduziu nesse período, a Função ainda não era falada no campo da matemática, os conceitos que se relacionavam com esse conceito serviam apenas para resolver problemas e interpretar situações relacionadas a outras áreas do conhecimento. Assim, o conceito de Função até então era considerado apenas como meio de resolução de problemas e passou a ser objeto de estudo da matemática apenas no final do século XVII.

Os trabalhos publicados por Pierre de Fermat e René Descartes entre os séculos XVI e XVII incluíam a representação analítica (expressões algébricas) como representações de Funções. Este fato proporcionou grande progresso na álgebra, apoiado pela geometria, e também contribuiu para o trabalho de Newton e Leibniz, sendo este último responsável por utilizar pela primeira vez a palavra Função para denotar uma relação entre grandezas.

Apesar dos avanços feitos pela representação algébrica de uma Função no desenvolvimento de tal conceito, ela também contribuiu para uma das mais importantes barreiras epistemológicas inerentes a esse conceito, já que há muito se defende a ideia de que somente relações que podem ser descritas por uma expressão analítica pode ser chamada de Função. Esse obstáculo foi superado pela primeira vez no século XIX, quando Dirichlet separou o conceito de Função de uma expressão analítica e definiu uma Função como uma correspondência arbitrária entre variáveis representando conjuntos numéricos. A definição de Dirichlet deu origem à definição moderna de uma Função usada hoje.

Por fim, analisando os antecedentes históricos apresentados neste relatório de pesquisa, percebemos que o conceito de Função passou por um longo processo de desenvolvimento, caracterizado por formas de representação das relações funcionais que contribuíram para uma compreensão mais ampla do conceito.



### 3 ANÁLISE DA DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO PROPOSTO POR EULER E UM PANORAMA DE SUA EVOLUÇÃO HISTÓRICA

Este capítulo trata da definição do conceito de Função proposto por Euler no século XVIII. Como abordado no capítulo anterior, Euler traz sua primeira definição de Função em 1748, que foi posteriormente modificada por ele mesmo em 1755. Apresentamos uma análise de seu conteúdo e o situaremos em seu contexto histórico.

Conforme dito no capítulo anterior, o conceito de Função demorou a ser construído e desenvolvido até assumir a forma, ou as formas, como estudamos ele hoje, nos Livros Didáticos e no Currículo brasileiro. Vale lembrar que, desde o nascimento deste conceito até os dias atuais, este passou por diferentes formulações. Conforme apresentado por Rachidi (2017), os trabalhos que abordam esta história do conceito de Função, em sua maioria, concordam em apresentar cinco etapas nesta evolução. A primeira etapa é caracterizada pela tabela de valores de uma Função, a segunda é a representação geométrica e mecânica deste conceito, seguido pela representação de uma Função por meio de uma expressão analítica. As duas últimas etapas, mais gerais, são a representação de uma Função como qualquer correspondência e a definição de Função por meio de conjuntos.

Embora os antigos não tenham criado nenhuma noção geral de quantidade variável ou de Função, foi lá que, de acordo com Youschkevitch (1981b), por meio do estudo cinemático dos movimentos retilíneos, no século XIV, começou a surgir este conceito, com o estudo das curvas por meio de tabelas, gráficos e até mesmo verbalmente. Ao final do século XVII, com a descoberta do cálculo infinitesimal por Newton e Leibniz, uma abordagem infinitesimal vai surgir, com isto a análise de Leibniz o levou a usar pela primeira vez o termo "Função" para designar "uma quantidade que varia de um ponto a outro ponto."

Obviamente que, com as discussões e estudos acerca deste conceito, divergências surgiram ao longo dos anos. Euler, no início do século XVIII, utilizou o termo "expressão analítica", que chamou de "Função", e esta definição foi adotada e desenvolvida por seus sucessores. Ainda de acordo com Youschkevitch (1981b), houve uma controvérsia importante entre Euler e d'Alembert, sobre as soluções do problema das cordas vibrantes e seus desenvolvimentos em série, onde D. Bernoulli deu soluções em forma trigonométrica, o que levou diversos pesquisadores do século

XIX a questionar se porventura, podem Funções arbitrárias no sentido de Euler ser representadas por uma série trigonométrica?

O intuito deste capítulo é apresentar um breve panorama do processo histórico que levou ao estabelecimento do conceito de Função, tendo como origem a abordagem desse conceito por Euler. Apresentaremos aqui, frutos da análise das principais etapas de evolução deste conceito de Função e as dificuldades que marcaram esse processo, considerando a definição que foi apresentada por Euler. De fato, foi Euler quem deu a(s) primeira(s) definição(ões) do conceito de Função, e seu trabalho lançará luz sobre os períodos "pré-conceito" e "pós-conceito" deste. Mais especificamente, vamos focar nos períodos que antecederam e que sucederam a definição proposta por Euler, a fim de compreender melhor a evolução histórica do estabelecimento do conceito de Função.

### 3.1 Primeira definição de Euler - 1748

Como vimos no capítulo anterior, ao definir o conceito de Função, o contexto era de muita discussão e debates sobre o assunto. Segundo Youschkevitch (1981b), o primeiro a definir explicitamente Função como uma expressão analítica foi Bernoulli (1667 – 1748), por meio de um artigo intitulado “Remarques sur ce qu’on a trouvé jusqu’ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres” (Mémoires de l’Académie des Sciences, 1718), onde, segundo ele, “chamamos Função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer maneira de grandezas variáveis e de constantes.”

A definição de Bernoulli, entretanto, não traz consigo uma explicação de como seriam formadas as Funções a partir da variável independente pela qual a Função é expressa. Essa precisão foi expressa apenas por Euler em seu artigo “une fonction arbitraire de  $\frac{x}{a} + c$ , onde ele introduz a notação  $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ . Com isto, Euler retoma a definição proposta por Bernoulli, substituindo a “quantidade” por expressão analítica”. Posteriormente, Euler propôs a notação “f(x)”, além de representações por uma ou mais fórmulas.

Uma das defesas de Euler neste artigo, é de que a Análise somente teria seu conhecimento elevado por meio da álgebra. Ele vai além, faz do conceito de Função o objeto essencial da Análise e, para isso, se utiliza da álgebra como ferramenta

fundamental, deixando com isto o conceito de Função livre de considerações cinemáticas e geométricas.

Considerando a definição de Bernoulli (1718): “*Chamamos Função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer maneira de grandezas variáveis e de constantes.*” (*Mémoires de l’Académie des Sciences*, 1718), Euler formulou sua primeira definição do conceito de Função. Os passos seguidos por Euler para chegar em sua definição de Função são, segundo a sua obra “Introdução à análise infinitesimal”:

- 1 – Uma quantidade constante é uma quantidade determinada, que mantém sempre o mesmo valor. (...)
- 2 – Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada ou, se preferir, uma quantidade universal, que inclui todos os valores determinados. (...)
- 3 – Uma quantidade variável torna-se determinada, quando lhe é atribuído qualquer valor determinado. (...)
- 4 – uma Função de quantidade variável é uma **expressão analítica** composta, de qualquer forma, desta mesma quantidade e de números, ou de quantidades constantes. (...)
- 5 – uma Função de uma variável é, portanto, também uma quantidade variável. (...)

(Euler 1748, **Introdução à Análise Infinitesimal**, tradução do latim para o francês, 1796).

Ao final de cada definição, contém um comentário, ou um exemplo afim de detalhar e motivar a definição proposta. Nota-se uma primeira preocupação de Euler em esclarecer a ideia de quantidade constante e quantidade variável, para depois dar sua definição fundamental.

Em seguida, Euler é levado a classificar as Funções em uniformes e multiformes, sendo proposto por ele que, Funções uniformes seriam aquelas que aceitam um único valor para uma determinada variável. Ao contrário das Funções multiformes, que aceitava, à época, vários valores para um certo valor da variável, sendo que hoje, estas já não são mais aceitas como Função.

Nesta definição proposta por Euler, este fornece um elemento que muito nos ajuda a entender suas ideias sobre o conceito de Função, que é a ideia de tempo físico. É possível verificar que, por trás dessa noção de tempo, encontramos a noção de continuidade. O que não encontramos nesta definição proposta por Euler, foi uma noção de domínio, sequer de valores proibidos ou mesmo da notação  $f(x)$ .

Para esclarecer sua definição, Euler distingue as Funções de acordo com a combinação da variável e das quantidades constantes que as constituem. Essa

diferença depende das operações pelas quais as quantidades podem ser compostas e combinadas. As operações consideradas por Euler são essencialmente operações algébricas: adição e subtração, multiplicação e divisão, potência e raízes, assim como a resolução de equações. Além disso, Euler especifica que além das operações algébricas anteriores, existem outras, chamadas transcendentais, como Exponenciais, logaritmos e outras derivadas do cálculo integral.

### 3.2 Análise da definição

Neste tópico iremos trabalhar com esta definição de Euler, dividindo esta análise sob os aspectos teóricos da definição e os aspectos didáticos desta definição. Para tanto, primeiramente vamos retomar o conteúdo da definição anterior, que pode ser reformulado da seguinte forma:

- (1) Uma quantidade constante é uma quantidade determinada, que mantém sempre o mesmo valor.
- (2) Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, ou seja, uma quantidade universal, que inclui todos os valores determinados.
- (3) Uma quantidade variável torna-se determinada, quando é atribuído a ela um valor determinado qualquer.
- (4) Uma Função de quantidade variável é **uma expressão analítica** composta, de qualquer maneira, dessa mesma quantidade e de números ou de quantidades constantes.
- (5) Uma Função de uma variável é portanto também uma quantidade variável.

**1ª Aspecto teórico.** Através da definição de Euler, notamos os seguintes aspectos teóricos:

- Euler tentou esclarecer a ideia de quantidade constante e de quantidade variável.
- Na definição de Euler, existe um elemento que pode nos ajudar a compreender suas ideias sobre o assunto: a ideia do **tempo físico** que pelo menos está implícito na definição: *“que conserva sempre”*.

- A presença do **tempo** na definição de Euler vai ter um papel importante. De fato, nessa última noção, vamos encontrar a noção de continuidade. De fato, o contínuo permanecerá no domínio físico, pois a reta real não existe na forma numérica nos seus trabalhos (a reta numérica acabada é do século XIX século).
- Na definição não existe a noção de domínio de Função, nem de valores interditos ou proibidos, nem mesmo a notação  $f(x)$ .

**2ª Aspecto didático.** Quanto ao aspecto didático da definição de Euler, podemos observar que:

No nível didático, notamos que os exemplos de Funções fornecidos por Euler fazem parte do nosso espectro atual de Funções: “Assim, qualquer expressão analítica, seja da variável  $z$  e contendo quantidades constantes, é uma Função de  $z$ . Por exemplo:  $a + 3z$ ;  $az - 4zz$ ;  $az + b\sqrt{(aa - zz)}$ ;  $cz$  &  $c$ , são Funções de  $z$ ” (Euler, 1796). Em outro lugar, Euler escreve:

[...] Além disso, não é raro encontrar expressões que são apenas Funções aparentes; porque, qualquer que seja o valor que atribuímos à variável, elas sempre mantêm o mesmo valor, como  $z^0$ ;  $1z$ ;  $\frac{(aa - az)}{a - z}$ . Essas expressões, na forma aparente de Funções de variáveis, são realmente quantidades constantes. (Euler, 1796)

Os últimos exemplos e o último ponto, da definição de Euler, resultam na exclusão de Funções constantes: “Funções aparentes que não são Funções” (Euler, 1796). A eliminação de Funções constantes é uma necessidade para Euler, pois, no próximo capítulo, ele trabalhará na composição de Funções.

Em conclusão, podemos dizer que uma Função no sentido de Euler é: “uma Função da variável real, não constante, definida por uma expressão analítica” (Euler, 1796).

### 3.3 Como se deu a evolução do Conceito de Função de Euler: Segunda definição

#### 3.3.1 Problema das cordas vibrantes

Famoso problema das cordas vibrantes, trata-se de uma corda de comprimento  $y$  que é fixada em ambas as extremidades, vibrando sobre um plano. A ideia é estudar os movimentos desta corda, calculando no instante  $t$  a ordenada  $y = y(t, x)$  de um ponto da corda de abcissas  $x$ . D'Alembert mostrou, em 1747, que  $y = y(t, x)$  satisfaz a seguinte equação diferencial parcial,

$$(E) : \partial^2 y / \partial t^2 = a^2 \partial^2 y / \partial x^2 \text{ com } a > 0,$$

De onde d'Alembert determina a solução geral do tipo,

$$y(t, x) = 1/2 [f(at+x)+g(at-x)],$$

Onde  $f$  e  $g$  são Funções duas vezes diferenciáveis, com as condições de contorno:

$$Y(t, 0) = y(t, \ell) = 0 \text{ (extremidades fixas), } y(0, x) = f(x) \text{ (forma inicial da corda).}$$

Para d'Alembert a solução assume a seguinte forma:

$$Y(t, x) = 1/2 [f(at + x) + f(at - x)],$$

Para todo  $x$  pertencente ao intervalo  $[0, \ell]$ , onde  $f$  é uma Função ímpar, com período  $T = 2\ell$  e duas vezes diferenciável (exceto, talvez, em alguns pontos isolados), além de impor restrições à forma inicial da corda.

### 3.3.2 A controvérsia D'Alembert-Euler e a nova definição de Euler

Para a solução das cordas vibrantes, d'Alembert e Euler encontram um problema quanto ao estado das Funções  $f$  e  $g$ . Para d'Alembert, estas Funções deveriam ser analíticas, ou seja, deve ser possível demonstrar por meio de uma fórmula, e D. Bernoulli apresentou inclusive soluções em forma trigonométrica.

Para Euler, entretanto, as Funções  $f$  e  $g$  podem ser arbitrários, o que seria correspondente a curvas desenhadas "à mão livre". Em resposta à d'Alembert, Euler vai dizer que:

A primeira vibração depende do nosso bom prazer, pois podemos, antes de soltar a corda, dar-lhe qualquer forma; o que significa que o movimento vibratório da corda pode variar *ad infinitum*, dependendo se a corda recebe uma ou outra forma no início do movimento. (EULER, 1796, p. 29).

Este posicionamento de Euler, entrou em contradição com a sua definição de 1748, mas ele, percebendo a insuficiência da classe de Funções que havia considerado até o momento, pelo menos ao que se refere à esta representação da

posição inicial das cordas vibrantes. Desta forma, Euler revisou sua primeira definição e propôs em 1755 que:

Se certas quantidades dependem de outras quantidades de tal forma que se estas últimas mudam, as primeiras também mudam, então geralmente chamamos essas quantidades de Funções das últimas; esta denominação tem a maior extensão e contém em si todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outros. Se, portanto,  $x$  denota uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de  $x$  de alguma forma, ou que são determinadas por  $x$ , são chamadas Funções de  $x$ . (EULER, 1796, p. 31, tradução do autor).

Como é possível perceber, como consequência desta nova definição de Euler, ele libera o conceito de Função da expressão “*expressão analítica*” para torná-lo uma relação de dependência entre grandezas variáveis.

É possível destacar ainda que, com Euler, o conceito de Função pode ser dividido em dois períodos, historicamente conhecidos como período *pré-conceitual*, onde predomina o instinto de funcionalidade, e o período *pós-conceitual*, que tem ainda sua subdivisão.

Como o intuito deste capítulo é apresentar o conceito proposto por Euler, além de verificar a sua importância para a construção histórica do conceito de Função, vamos apresentar a seguir, alguns elementos desses dois períodos, como sendo o período que antecede o conceito de Função proposto por Euler e o período após a proposição deste conceito.

### **3.4 Evolução do conceito de Função: Como era antes de Euler**

Como visto no capítulo anterior, podemos destacar alguns pontos de como o conceito de Função foi sendo construído ao longo da história, sendo alguns que podemos destacar, a representação por meio de tabelas de valores, que remonta aos tempos babilônicos, a representação geométrica e mecânica, a partir do século XIV, e a representação de Função por meio de expressões analíticas.

As tabelas de valores usadas antigamente pelos babilônios, continham tabelas de quadrados, cubos, bem como raízes quadradas e cúbicas. Os Pitagóricos utilizavam estas tábuas para estudar as leis que relacionavam as alturas dos sons emitidos pelas cordas e seus comprimentos. Por volta dos anos 500, o matemático

indiano Aryabatha deu as primeiras tabelas de senos, que foram melhoradas e estabelecidas outras por estudiosos árabes-mulçumanos. (ROSHDI et al, 1997)

Na astronomia, várias tabelas de altíssima precisão foram desenvolvidas, como por exemplo as tabelas Hachemita, Toledo e Alphonsines. Com Copérnico (1743-1543) que introduziu o novo sistema mundial, o número de tabelas astronômicas aumentou, sendo apresentado por Copérnico em 1543, uma coleção de tabelas de movimentos celestes, fruto de cerca de trinta anos de estudos e observação.

Na França, em 25 de junho de 1795, a convenção nacional de Bureau de Longitudes perpetuou o uso de tabelas visando:

Resolver os problemas astronômicos relacionados com a determinação da longitude no mar, estratégica na época (daí o seu nome), calcular e publicar as efemérides (Chamadas por continuidade: Conhecimento dos Tempos) e um diretório, ou seja, dizer uma espécie de calendário oficial "adequado para regular os da República", para organizar expedições científicas em áreas vizinhas, como a geofísica e, finalmente, para ser um comitê consultivo para cientistas problemáticos. O observatório de Paris foi colocado sob a supervisão do Bureau des Longitudes de 1795 a 1854. (GRIZE, 1968).

Desde então, as tabelas utilizadas foram concebidas como relações entre conjuntos finitos de quantidades constantes. Nestas tábuas não há ideia de grandezas variáveis, nem mesmo de simbolismo algébrico ou analítico. Alguns falam em "*instinto de funcionalidade*" entre os antigos, mas uma grande diferença entre este instinto e a percepção do conceito de Função, que passa a surgir apenas no século XIV, de acordo com a evolução dos estudos sobre cinemática dos movimentos.

Durante o século XIV, de acordo com Perrin, essa noção de tabela de valores que ligavam duas quantidades começou a mudar de natureza. As escolas de Oxford e Paris deu à matemática o status de "*instrumento de conhecimento dos fenômenos naturais*". Com isso, durante os estudos da cinemática e da mecânica, passou-se a buscar a quantificação de certas quantidades e formas. Logo, enquanto eles buscavam quantificar calor, luz, densidade, distância e velocidade por meio do que eles chamavam de "grau de intensidade", introduziu-se a noção de "variável contínua" entre limites fixos. (PERRIN; PÉNIN, 1999)

Seguindo o raciocínio de Perrin, a cinemática passa a se desenvolver ao longo do século XIV como um ramo da mecânica, permanecendo ainda ligada à geometria. Surgem então os conceitos de velocidade instantânea e aceleração, principalmente nos trabalhos de Roger Bacon, William Heytesburym, Richard Swineshead e Nicole



Oresme. Foram eles que trouxeram em seus estudos a primeira representação gráfica de uma Função, quando utilizavam o grau de intensidade em uma linha vertical e a extensão em uma linha horizontal.

Como vimos no capítulo anterior, Oresme identificou e apresentou pela primeira vez, uma representação gráfica de movimentos retilíneos. Com isto, de acordo com Perrin, entre os séculos XIV e XVI, as formas de se estudar as curvas eram partindo de suas propriedades geométricas, graficamente ou com uso de expressões verbais e tabelas. Os trabalhos de Oresme se tornaram famosos e tiveram grande repercussão durante o século XV e início do século XVI.

Em 1591, Viète vai dar um novo impulso ao conceito de Função, com a criação da álgebra literal simbólica, que vai proporcionar a representação por meio de fórmulas. Sob a influência de Galileu, bem como com o nascimento da geometria analítica de Descartes e Fermat, passou-se a estudar as curvas por meio de cálculos algébricos, substituindo o estudo das figuras, que antes era por meio de propriedades geométricas, pelo estudo por meio dos elementos analíticos. De fato, com Descartes e Fermat, o conceito de Função passou a ser identificado como uma equação de  $x$  e  $y$ .

No século XVII, o conceito de Função sofre novas influências com Mercator, Grégory e Newton, que alargam esse conceito a partir da descoberta do desenvolvimento em toda a série de Funções. Por fim, com o cálculo infinitesimal de Newton e Leibniz, troca-se o objeto de estudo que antes era o número, e passa-se a estudar a lei da variação. Ele chamava de Funções as quantidades geométricas variáveis relacionadas a uma curva, tais como coordenadas, tangentes, subtangentes, normais, raios de curva, etc. Em 1718, Jean Bernoulli vai dar a primeira definição explícita de uma Função como uma expressão analítica, além de introduzir a notação  $fx$ . Finalmente, após Bernoulli, vem o livro de Euler (Euler, 1797) que apresenta pela primeira vez o conceito de Função como base de análise.

### **3.5 Evolução do conceito de Função: Como se tornou depois de Euler**

Começaremos este estudo sobre a evolução do conceito de Função pós Euler, recordando que, por meio da definição proposta por Euler que o conceito de Função foi distanciado da expressão analítica, tornando-se uma relação de dependência entre grandezas variáveis. Sendo mais precisos, descobrimos que o aspecto algébrico e

quantitativo dominante na introdução do conceito de Função em Euler. Ele tinha entretanto, uma concepção sobre continuidade que o impediu de ir para uma generalização da teoria das Funções. Essa generalização será um dos principais assuntos estudados no século XIX.

O conceito de Função foi objeto de inúmeras e intensas discussões desde a metade do século XVI até meados do século XIX. A busca de uma definição adequada e apropriada estará na origem de outras teorias matemáticas em análise. Começamos com a proposta de definição dada por Condorcet (1743-1794) que diz:

Suponho que tenho um certo número de quantidades  $x, y, z, \dots, F$ ; e que, para cada valor determinado de  $x, y, z, \dots$ , etc,  $F$  tem um ou vários valores determinados: digo que  $F$  é uma Função de  $x, y, z, \dots$ . Enfim, eu sei que quando  $x, y, z$  serão determinados,  $F$  o será também, quando mesmo eu não sabendo nem a maneira de expressar  $F$  por meio de  $x, y, z$ , nem a forma da equação entre  $F$  e  $x, y, z$ ; eu saberei que  $F$  é Função de  $x, y, z$  (CONDORCET *apud* RACHIDI, 2017, p. 52)

Desta maneira, percebemos que Condorcet adotou a definição geral proposta por Euler e trouxe uma maior precisão. Para ele, uma Função era vista como uma dependência entre duas ou mais grandezas variáveis, quer saibamos expressar essa dependência explicitamente por uma relação ou não. Em seguida Condorcet classifica as Funções em três categorias: as Funções cuja forma é dada, aquelas Funções que são determinadas por uma equação que as liga e as que são definidas por certas propriedades.

A partir do século XIX, o conceito de Função passa a ser objeto de estudo e de rigorosas pesquisas por matemáticos como Gauss, Cauchy, Riemann, Bolzano, Fourier, Lagrange, Lacroix, Lobachevsky e Abel. Condorcet, Lacroix, Fourier, Lobachevsky e Dirichlet, adotaram a definição mais geral do conceito de Função de Euler, contribuindo para uma melhor compreensão dos fundamentos do cálculo diferencial. Ainda, a definição de Função como uma expressão analítica, cuja forma mais geral é uma série inteira, passa a ser discutida por Lagrange em seu famoso tratado Teoria das Funções Analíticas.

Cauchy (1821), em sua obra percussora do século XIX intitulada *Cours d'analyse* escreveu:

Quando quantidades variáveis estão de tal forma ligadas entre si que, os valores de algumas sendo dados, podemos determinar os valores de todas aquelas outras, imaginamos essas diversas quantidades expressas por meio de algumas dentre elas, as quais recebem então o nome de variáveis independentes; e as quantidades restantes,

expressas por meio das variáveis independentes, são o que chamamos de Funções dessas variáveis. (CAUCHY, 1821, p. 19-20)

Desta forma, mesmo que suprimindo o termo expressões analíticas de sua definição, Cauchy tinha essa noção presente em sua mente, embora nem todas as suas demonstrações e conceitos relacionados a Funções estavam baseados na ideia de expressão analítica, como podemos ver em *As contribuições de Cauchy*.

Lagrange demonstra em seu tratado que, qualquer Função pode ser representada por uma série inteira, exceto, talvez, em valores isolados, onde são utilizadas potências negativas ou fracionárias.

Por fim, com a obra de Condorcet, houve um significativo avanço na concepção da teoria dos conjuntos, trazendo uma melhor noção de Função. Assim, Função tornou-se uma correspondência entre objetos de dois conjuntos. Desta forma, Condorcet foi o primeiro a avaliar a importância da definição geral de uma Função e a desenvolvê-la, tornando seu status com significado de relação entre grandezas variáveis.

Vale destacar também que, desde os trabalhos de Riemann, é aceito que a noção de Função é definida como uma correspondência arbitrária entre os elementos de dois conjuntos. Além disso, foi deixado de lado as classificações de Funções de Euler por meio de expressões analíticas e foi adotada uma classificação por meio de propriedades, a exemplo, as Funções contínuas, Funções diferenciáveis, Funções integráveis, Funções descontínuas, entre outras, conforme propôs Condorcet.

Ao final do século XIX, devido aos trabalhos de Cantor e Dedekind sobre a teoria dos conjuntos, uma gama de sistematizações da noção de Função por meio de conjuntos surgiu. Foi assim que, em 1891, Peano reduziu a definição de uma Função à de “uma relação binária particular da classe  $a$  corresponde um único indivíduo  $y$  da classe  $b$ ”. Em 1911, Peano escreve com mais precisão sua definição de Função: “Uma Função é uma relação  $u$  tal que se dois pares  $(y, x)$  e  $(z, x)$  com o mesmo segundo elemento satisfazem a relação  $u$ , temos necessariamente, qualquer que seja  $x, y, z$ , que  $y=z$ ”. (PEANO *apud* RACHIDI, 2017).

A definição abstrata da noção de Função como uma correspondência entre dois conjuntos teve então um impacto nos matemáticos e no desenvolvimento da matemática nas décadas de 1920 e 1930.

### 3.5.1 Observações

As notações literais de Viète, Stevin, Descartes, reforçam o ponto de vista algébrico, para o qual uma Função geral é uma combinação de Funções de base, obtida a partir desta por meio das quatro operações, a composição, a passagem para o limite ou a uma primitiva ou a soma de séries. É esse ponto de vista que Euler adota, em 1748, na sua obra *Introdução à Análise dos Infinitos*. Assim, podemos dizer que Euler descola o “cálculo infinitesimal” de seu suporte geométrico, ele estuda utilizando expressões analíticas (algébricas) para a noção de Função.

Euler chama de **Função contínua** toda Função que é definida por uma só expressão analítica e **Função mista** aquela que é definida por diferentes expressões analíticas. Esta definição de continuidade será questionada por Cauchy (em 1844), que vai dar um exemplo de Função mista e continua no sentido definido por Euler.

### 3.6 Conclusão

Ao analisarmos a evolução conceitual de Função, percebemos que entre os séculos XIV e XIX, houve uma transição gradual da intuitividade geométrica para o simbolismo analítico e algébrico. Como observado por Jean-Blaise Grize sobre a noção de Função, “[...] podemos caracterizar sumariamente sua evolução dizendo que estamos na presença de uma progressiva liberação de considerações físicas em favor de noções propriamente lógico-matemáticas”. (GRIZE, 1968, p. 171-172). De fato, a liberação de considerações físicas permitiu a introdução formal do conceito de Função, baseando-se na noção central de variável.

Em seguida, o conceito de Função passa a ter definições gerais cada vez mais variadas. Sua primeira expressão por meio de uma fórmula algébrica se deu na primeira metade do século XVII. Após isto, o conceito de Função torna-se uma relação entre quantidades variáveis, cuja lei pode ser conhecida ou desconhecida. Por fim, implementa-se a teoria dos conjuntos, o que trouxe à noção de Função o status quase definitivo de correspondência entre os objetos de dois conjuntos.

#### 4. SOBRE AS DEFINIÇÕES HISTÓRICAS, A DIDÁTICA E O ENSINO

O objetivo deste capítulo é estabelecer a relevância da história do conceito de Função para o ensino desse importante conceito matemático. Analisamos uma série de definições no decorrer da história e comparamos com as definições que entendemos serem as mais relevantes no ensino atual e nos Livros Didáticos. Destacamos também o importante papel da história do conceito de Funções, para uma abordagem didática.

O ensino da matemática formal, de acordo com Sagna (2019), está centrado na memorização e no aprendizado de técnicas, no qual os objetos matemáticos são introduzidos sem que se saiba quais necessidades eles atendem, nem mesmo como são articulados, o que implica em ligações com o mundo real fracas e geralmente muito artificiais. Daí a exigência de esforços de trabalhos pedagógicos e didáticos, a fim de superar esse aspecto tão formal. Ao que parece, a introdução do aspecto histórico no ensino da matemática representa uma das trilhas mais interessantes. Além disso, vários argumentos e justificativas defendem essa perspectiva.

Estudos da literatura das últimas décadas sublinham a importância do uso adequado da história da matemática no ensino, por várias razões, entre outras, pode-se citar que:

Ajuda a aumentar a motivação para aprender; torna a matemática mais humana; mostra aos alunos como os conceitos foram desenvolvidos e ajuda a sua compreensão; ajuda a mudar as percepções dos alunos sobre a matemática; permite comparar métodos antigos com métodos modernos e valoriza estes últimos; ajuda a desenvolver uma abordagem multicultural; ajuda a compreender as dificuldades dos alunos, através dos obstáculos do passado; faz com que os alunos saibam que não são os únicos com dificuldades; ajuda a explicar o papel da matemática na sociedade; torna a matemática menos assustadora; permite trabalho multidisciplinar; dá a oportunidade de fazer pesquisa. (SAGNA, 2019).

Sagna vai citar em sua obra, trechos de Barbin (1997), onde Barbin defenderia que a história da matemática tem:

Uma Função vicária que permite aprender a matemática como atividade e não apenas como corpus escolar. De fato, o conhecimento matemático do professor é geralmente usado para resolver exercícios; o professor raramente tem a oportunidade de ver esse conhecimento em ação, realizar pesquisas matemáticas ou trabalhos de engenharia, ou realizar uma reflexão geral sobre o conhecimento matemático. A

História da Matemática também te dá essa oportunidade” (BARBIN apud SAGNA, 2019).

Um dos principais valores da história, de acordo com Barbin, é mostrar que as noções e conceitos que hoje ensinamos aos nossos alunos, foram inventados para resolver problemas (BARBIN, 2018). Nesse contexto, o objetivo é propor alguns elementos didático-pedagógicos para poder integrar a história do conceito de Função no ensino. Parece-nos que a história do conceito de Função permite explorar o pensamento funcional original, isso também permite destacar e consolidar o conhecimento duradouro dos alunos, que faz parte da base comum do ensino da análise matemática.

O conteúdo deste capítulo está organizado da seguinte forma. Apresentamos primeiro uma classificação em quatro frentes das definições históricas do conceito de Função. Em seguida, analisamos epistemologicamente as definições históricas do conceito de Função e qual foi, ou ainda é, sua relação com a educação. Num terceiro momento, estudamos brevemente a história do conceito de Função como uma cultura geral para o professor, e, por fim, apresentamos algumas considerações didáticas gerais sobre a história do conceito de Função e seu ensino.

#### **4.1 Classificação de abordagens históricas**

Em primeiro lugar, analisaremos a abordagem das definições propostas em nossa lista das definições históricas. Com essa análise, classificaremos cada abordagem conceitual em quatro tipos, sendo a primeira a abordagem do conceito de Função de maneira ‘Geométrica e Mecânica’, depois a abordagem por meio de uma ‘Expressão Analítica’, posteriormente, autores que abordam as Funções como ‘Qualquer correspondência’ e, por fim, aqueles que abordarão este conceito por meio da definição dos conjuntos.

Na primeira abordagem, Geométrica e Mecânica, conseguimos encontrar apenas duas definições que se encaixam neste tipo de abordagem. A definição proposta por Leibniz (1718) e Lagrange (b) (1797). Na segunda abordagem, denominada Expressão Analítica classificamos 6 autores, sendo Bernoulli (1718), Euler (a) (1748), Euler (b) (1755), Lagrange (b) (1797), Fourier (1821) e Lobatchevsky (1834).

Na terceira abordagem, aquelas definições que tratam as Funções como qualquer correspondência, temos outros 10 autores que se encaixaram, são eles Euler (b) (1755), Condorcet (1782), Lagrange (a) (1797), Lacroix (1797), Cauchy (1721), Riemann (1851), Hankel (1870), Lebesgue (1902), Bourbaki (1939), e Weyl (1927). E por fim, classificamos outros 5 autores na última abordagem, que foi denominada Definição com conjuntos, são eles Cauchy (1821), Lobatchevsky (1834), Hankel (1870), Lebesgue (1902) e Bourbaki (1939).

#### **4.1.1 Observação**

Aqui trazemos alguns dos dados mais relevantes relacionados ao conceito de Função. Primeiramente, podemos encontrar algumas representações gráficas do que consideramos Funções já no século XIV, a partir das ideias de Nicole Oresme (1323 – 1382) e de Thomas Bradwardine (1290 – 1349). Outro ponto é que, a noção de Função que possuímos na atualidade surge da necessidade da elaboração de ferramentas matemáticas que possam descrever fenômenos da natureza. Estes estudos se iniciaram com Galileu Galilei (1564 – 1642), Johannes Kepler (1571 – 1630), François Viète (1540 – 1603), René Descartes (1596 – 1650). Por fim, podemos dar um destaque maior aos estudos de Isaac Newton (1642 – 1727), Gottfried Leibniz (1646 – 1716), Johann Bernoulli (1667 – 1748), Leonhard Euler (1707 – 1783), Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) e Jean Baptiste Fourier (1768 – 1830).

#### **4.2 Estudo da história do conceito de Função e ensino**

De acordo com Rachidi (2018), Funções é um conteúdo considerado como um dos mais difíceis de ser ensinado/aprendido, e se torna um grande desafio à educação básica e até mesmo para os acadêmicos de matemática, que no futuro teriam problemas com o mesmo como objeto de ensino. Isto ocorre talvez, porque deste conteúdo acarreta alguns conceitos, como o de infinito, importante conceito em filosofia, ciências e matemática, que dependendo do contexto assume diferentes significados, além do conceito de limite, cuja noção é notavelmente difícil, complexa, típico da natureza do pensamento matemático avançado. Rachidi afirma ainda que Função ocupa uma posição central que permeia toda a análise matemática.

De acordo com Baroni & Otero-Garcia (2013) uma análise histórica e epistemológica pode colaborar na abordagem e desenvolvimento didático, pois esta possibilita que futuros professores, ou professores já em exercício de aula compreendam porque determinado conceito é de difícil compreensão para alguns estudantes (não somente de Função, limite e infinito, mas também de fração, operações com zero, entre vários outros).

O foco histórico até aqui retratado, recai sobre eventos ocorridos em meados do século XIX, representado principalmente como o período compreendido entre a publicação do Cours d'Analyse de Cauchy, em 1821, e da tese de doutorado de Lebesgue, em 1902. Parte de sua apresentação foi dedicada a nos mostrar diferentes conceitos que foram se estabelecendo por meio de grandes matemáticos do século XIX, até chegar em Cauchy, e posteriormente, durante o século XX.

Inicialmente, a Função era entendida de maneira muito algébrica, ou seja, eram fórmulas que descreviam uma relação entre duas variáveis (relações de Euler), e é importante destacar que ainda hoje, ensinamos ela desta forma, conforme podemos verificar na análise dos Livros Didáticos feita no capítulo 1 desta dissertação. De acordo com Baroni & Otero-Garcia (2013) na educação básica este conceito ainda é ensinado como precursor de outros conteúdos que ainda virão, fica o questionamento se este foi devidamente aprendido.

Assim, decidimos escolher algumas definições que entendemos ser adequadas para se ensinar ou para fazer paralelos entre o que está escrito no Livro Didáticos e estas definições. A primeira que nos chama a atenção, é a de Bourbaki (1939). Este faz uma relação com conjuntos e ainda traz a linguagem matemática, ou seja, para Bourbaki (1939), uma Função leva em conta conceitos como conjuntos e uma relação específica na qual cada um dos elementos de um conjunto se relacionam com um único elemento do outro conjunto. O que poderia ser explorado nas séries onde as Funções aparecem no Ensino Médio.

A segunda definição é a de Fourier (1821), uma vez que apresenta já a linguagem  $f(x)$  e ainda traz a série de valores para uma Função, consideramos com isto que esta definição poderia ser trabalhada também no Ensino Médio.

Uma opção para o Ensino Fundamental, mais especificamente, para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, escolhemos Hankel (1870) que apresenta uma definição de forma mais simples de ser entendida e a de Weyl (1927) que apresenta



a relação de “um a para um b”. Temos ainda a definição de Lebesgue (1902), que estabelece Função como a correspondência existente entre um número  $y$  e números  $x_1, x_2, \dots$  entretanto, sem ter necessariamente um procedimento que estabeleça essa relação. A definição de Condorcet (1782), que a muito se assemelha àquela proposta por Lebesgue. Para Condorcet, se para cada valor  $x, y, z, \dots$  há um ou mais valores determinados, então  $F$  é uma Função de  $x, y, z, \dots$ . Ele também não estabelece a necessidade de uma expressão  $F$  em  $x, y, z, \dots$ .

Para finalizar, analisamos essas definições e especificamos algumas explorações possíveis, de um modo linear seria: Weyl (1927) para explorar com os alunos o que poderíamos tirar dessa definição e iniciar com esta para as primeiras observações. Após, trabalhar a definição de Fourier (1821) que pode ser explorada com os alunos no Ensino Médio para apresentar a notação  $f(x)$  e observar a diferença de uma definição para a outra.

Em seguida, traria a definição de Hankel (1870) e buscaríamos trabalhar a linguagem matemática. O intuito seria observar como pode a escrita cotidiana se passar para uma escrita formal matemática, sempre observando diferenças entre as anteriores.

Neste ponto, abordariamos então a primeira definição escolhida acima, sendo a definição de Bourbaki (1939), pois, além de ser muito semelhante com a definição de Função disponível no Livro Didático dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, ele traz essa noção de Função por meio da definição de conjuntos, apresentando uma ideia visual. Assim, como a definição atual de Bourbaki leva em conta valores de determinado conjunto, relacionados cada um com um valor de outro conjunto, é possível demonstrar por meio de diagramas de uma maneira visual e, em alguns casos, até mesmo intuitivo.

A definição de Lagrange (1797) foi por nós escolhida, pois trabalha com a definição de Função composta, outro conteúdo disponível no Livro Didático, porém, do Ensino Médio. Sua definição de Função composta também se assemelha àquela trabalhada atualmente, pois no lugar da variável  $x$ , usa variáveis  $x^2, a + bx, etc.$

Outra definição importante que também pode ser trabalhada é a de Condorcet (1782), pois define Função como uma relação na qual, não importa se conhecemos ou não a equação entre  $f$  e  $x$ . Logo, os dados de um problema podem ser organizados em tabelas ou sequências de desenhos (relação entre número de palitos e figuras

formadas em uma certa sequência), sendo uma maneira alternativa (àquela que usa o conceito de conjunto) de apresentar o conceito de Função. Assim como a definição atual, a de Condorcet diz que para cada  $x, y, z, \dots f$  tem um valor determinado. Condorcet diferencia-se do conceito atual apenas por considerar também como Função, um elemento relacionado a vários, e não a um único elemento

De forma geral o estudo epistemológico e histórico de Funções para a compreensão de suas dificuldades no Ensino e Aprendizagem é muito importante, como apontado pelo autor. Também nos serve para olhar toda a vastidão e longo período ao qual o conceito foi elaborado para refletirmos se de fato faz sentido ele ser trabalhado de maneira tão rápida no Currículo de matemática como está na atualidade.

### **4.3 Estudo de história do conceito de Função como cultura geral**

As ideias apresentadas neste tópico, são uma sugestão de, o que trabalhar com cada definição matemática apresentada, dentre os escolhidos como, importantes definições do conceito de Função.

A definição de Bourbaki (1939): na cultura geral, pode ser usada para trabalhar com a relação entre custo de produção de um produto por uma empresa e a renda obtida, representada por meio de uma Função. Com alunos do Ensino Fundamental, podemos utilizar diagramas e o conceito de conjuntos, e no curso de Licenciatura em Matemática, podemos usar a definição nas aulas de Cálculo ao trabalhar com o conceito de continuidade de Funções.

A definição de Lagrange (1797): na cultura geral, a ideia de definir uma Função por meio de expressões algébricas permite trabalharmos com a relação entre as dimensões de um terreno retangular e sua área, dada por uma expressão algébrica. Com alunos do Ensino Fundamental, podemos focar na representação de uma Função em um gráfico no plano cartesiano, e na disciplina de Álgebra do curso de Licenciatura em Matemática, o foco pode ser dado no conceito de Função composta como operação entre Funções.

A definição de Condorcet (1782): na cultura geral, a definição de uma Função sem preocupação com sua lei permite generalizar a ideia de Funções utilizando elementos que não sejam matemáticos, como associação entre cadeiras e alunos de uma sala de aula. Com alunos do Ensino Fundamental, podemos explorar a definição

de Função com problemas matemáticos envolvendo sequências de figuras e venda de produtos. No curso de Licenciatura em Matemática, a análise de dados obtidos para certo procedimento científico podem ser aproximados de modo que, a relação entre eles seja definida por meio de certa Função matemática.

Por fim, Bourbaki (1939): pode ser explorada na cultura geral como uma relação de conjuntos, com os alunos do Ensino Fundamental pode ser trabalhada por ter uma linguagem matemática mais formal e, no curso de Licenciatura em Matemática, pode ser relacionada aos modos como dois conjuntos se associam, além da linguagem matemática.

#### 4.3.1 Uma breve observação

De acordo com o dicionário, o significado da palavra “Função” é uma relação de correspondência, de correlação entre dois conjuntos que possuem uma variável. Contudo, a palavra apresenta sentido bastante amplo dentro da língua portuguesa, por vezes pode referir-se a um cargo em uma empresa: Função de administrador. Pode também ser o desempenho de uma máquina, por exemplo a de lavar roupas: Função enxaguar. Entretanto, nos voltando ao contexto matemático, em que existe uma regra específica de representar a relação de cada elemento de um conjunto (representado pela variável  $x$ ) a um único elemento de outro conjunto (representado pela variável  $y$ ). Para cada valor de  $x$ , podemos determinar um valor de  $y$ , dizemos então que “ $y$  está em Função de  $x$ ”.

Os usos práticos de uma Função estão muito ligados ao nosso dia a dia, até mesmo a elaboração teórica formal do conceito surgiu a partir desse uso quase sempre ignorado, por exemplo, tendo em vista a tabela de preços de uma loja em que cada produto corresponde a um determinado preço, ou o preço pago em uma conta de luz que depende da quantidade de energia consumida e modelos demográficos, ainda uma corrida de taxi depende de uma Função quase sempre de um preço fixo acrescido de valor por quilômetro corrido, assim como o preço do combustível depende de quantos litros forem comprados.

Os vários significados da palavra “Função” (matemática) de acordo com o seu campo de uso são diversos no qual pode representar variação, descrever momentos, descrever comportamento calórico (decaimento radioativo), modelagem ecológica

(populações) e na economia (taxas e variações), sendo esses somente alguns exemplos nos milhares que esse campo, que é tão imenso, possui.

Outra observação relevante, o matemático Cauchy é considerado o pai da análise matemática moderna, isto porque ele introduziu o conceito de variáveis independentes, além de introduzir a ideia do que hoje em dia chamamos de Função explícita e Função implícita. Fourier formulou uma definição para Função um ano depois das publicações de Cauchy. É neste período que a Função ganha as notações mais semelhantes com as atuais, inicialmente  $fx$ , posteriormente com os parênteses  $f(x)$ .

#### **4.4 Algumas considerações didáticas**

Os elementos do discutido neste capítulo e nos capítulos 2 e 3, mostram que o conceito de Função passou, durante séculos, por várias etapas e encontrou obstáculos epistemológicos e didáticos de vários tipos. Apresentamos os esforços de vários matemáticos, para apresentar e explicar o conceito de Funções. Parece-nos que a história do conceito de Função permite que os professores de matemática aproveitem esse aspecto histórico, a fim de melhorar o ensino desse conceito fundamental de análise.

Com efeito, é bastante claro que a construção do conceito de Função passou por várias etapas, graças a diferentes formulações e generalizações. Parece-nos que aprender e se apropriar desse conceito requer passos progressivos. Por outro lado, o professor deve estar ciente de que, o conceito de Função é novo para os alunos, e que seu aprendizado está repleto de obstáculos epistemológicos e didáticos. Recordemos que, segundo Brousseau, um obstáculo epistemológico são conhecimentos relativos ao próprio conceito, dificuldades encontradas no seu desenvolvimento que precisam ser enfrentadas. (BROUSSEAU, 2008).

Por outro lado, historicamente vimos que o conceito de Função foi declinado em diferentes formas: tabelas numéricas, curvas, ou como uma expressão analítica, ou como uma fórmula algébrica. Na década de 20, o conceito de Função apareceu em uma linguagem definida. É sabido que esses diferentes aspectos estão inter-relacionados. Portanto, seria prudente que os alunos trabalhassem os diferentes registros de representações do conceito de Função, a saber: verbal, numérica, visual e algébrica (STEWART, 2001).

Finalmente, a questão é como integrar a história ao ensino da matemática. Em particular, como integrar a história do conceito de Função no ensino da análise? Vários caminhos e métodos de trabalho têm sido propostos na literatura. Dentre essas propostas, podemos citar a de Barbin (BARBIN, 1997), que se baseia no estudo de textos antigos e no trabalho interdisciplinar, a fim de melhor compreender os papéis da história da matemática e suas diferentes Funções. Dez temas sobre o uso da história no ensino da matemática são propostos no livro “Let History into the Mathematics Classroom” (BARBIN et al., 2018). Segundo Barbin:

A leitura de textos antigos produz um 'choque cultural' que pode satisfazer as Funções vicárias e exóticas da História. Desde que, porém, a leitura não seja teleológica, ou seja, não analisemos os textos apenas de acordo com nossas concepções atuais. Essa leitura pode levar a equívocos. [...] A leitura de textos antigos deve ser contextualizada, ou seja, lida no contexto da época. Isso significa estudar o contexto científico, mas às vezes também filosófico ou social em que o autor escreveu. É preciso lembrar que o autor não se dirige a nós, mas a contemporâneos. (BARBIN, 1997)

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar esta desafiante caminhada de estudo e pesquisa, que culminou na escrita desta dissertação de mestrado, podemos observar e apresentar algumas considerações pertinentes, com o intuito de responder a questão de pesquisa e atender ao objetivo geral desta pesquisa.

Em primeira análise, com olhar sob a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), percebe-se que este curricular apresenta na sua unidade de álgebra, o objeto de conhecimento "**Funções: representações numéricas, algébricas e gráficas**". Neste objeto de conhecimento, a BNCC apresenta como competência, desenvolver nestes alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, nomeadamente:

Entenda as Funções como relações de dependência um-para-um entre duas variáveis e suas representações numéricas, algébricas e gráficas e use esse conceito para analisar situações que envolvem relações funcionais entre duas variáveis. (BRASIL, 2017, p. 317)

Ou seja, percebe-se que a BNCC apresenta este importante conceito sobre as Funções apenas no último ano do Ensino Fundamental, limitando-se a conceituá-lo como "relações unívocas de dependência entre duas variáveis" (BRASIL, 2017). Analisando apenas a álgebra como unidade temática, nesta fase de aprendizagem o aluno já terá tido contato com a linguagem algébrica conhecendo o conceito de variável e incógnita, bem como como sua diferenciação, além de compreender as propriedades de equivalência de expressões algébricas. Além disso, deve ter aprendido o conceito de equações polinomiais de 1º grau, reduzindo-as à forma  $ax + b = c$ , além de saber diferenciar equações de expressões algébricas.

Nos chamou a atenção então, que apenas no nono ano do Ensino Fundamental que se é introduzido o conceito de Função, para além desta, esta introdução ocorre após uma série de contatos com o conceito, as propriedades e as regras de equações e sistemas de equações, sabendo quais, embora sejam conhecimentos prévios interessantes e necessários para um bom aprendizado do conceito de Função, têm levantado muitas dúvidas entre os alunos, pois apesar de serem muito semelhantes, diferem bastante nos resultados. Enquanto as equações resultam em um número, um número que pode ou não fazer sentido, as Funções não se preocupam tanto com o resultado, ou com os valores das incógnitas, mas com a importância de conhecer a regra que liga os elementos de ambos os conjuntos, bem como com a sua

representação gráfica, já que a partir daí é possível tomar várias decisões quando aplicadas a problemas reais da vida cotidiana.

Esta formulação, se não for bem trabalhada pelo professor, pode criar no aluno um desejo de querer sempre encontrar o resultado da incógnita sendo, na maioria das vezes, o que menos importa nas Funções. Essa prática de sempre encontrar o valor de  $x$ , ou encontrar as respostas, desvia a atenção da real preocupação funcional, que é entender a relação de dependência unívoca entre duas variáveis, para usá-la como meio de análise de situações envolvendo essas relações funcionais.

Para o Ensino Médio, percebemos que na BNCC não é dividida em anos, como é feito no Ensino Fundamental, mas sim em cinco competências que, ao final, farão com que o aluno entre em contato com diferentes Funções ao longo dos três anos de estudo. Lembrando que no Ensino Fundamental existe apenas uma definição genérica do conceito de Função, limitando-se a conceituá-lo como a relação unívoca entre duas variáveis.

Constatamos que, apesar da numeração das cinco competências de um a cinco, não há a pretensão de que essa ordem seja respeitada, cabendo aos programas públicos distribuí-las entre os anos letivos do Ensino Médio. Do mesmo modo, quando analisamos a estrutura curricular da Secretaria de Estado e Educação de Mato Grosso do Sul (SED-MS), percebemos que ela segue rigorosamente a BNCC, diferindo apenas por fornecer algumas sugestões didáticas, mas assim como a BNCC, essa estrutura também não contempla mais essa divisão nos anos letivos, ou seja, não apresenta quais conteúdos devem ser desenvolvidas no 1º, 2º e 3º ano, o que implica que elas devem ser trabalhadas de forma articulada.

A problemática percebida nisto é que os professores acabam tendo que recorrer aos Livros Didáticos, para que apresentem anualmente, até bimestralmente, os conteúdos a serem trabalhados, e com isso façam as ligações entre conteúdo e habilidades. Embora esta seja uma boa saída, muito vai depender de como os Livros Didáticos apresentam esses objetos de conhecimento, e também, se conversam plenamente com os Currículos atuais da educação.

Analisando o conceito de Função trabalhado nos Livros Didáticos adotados por algumas escolas do Ensino Fundamental e médio da Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul, percebemos que os autores também evitam dar uma definição direta ao conceito de Função, limitando-se tanto a trabalhar com uma

noção de Função, apresentada a partir de problemas cotidianos, mas, à medida que o livro avança, os objetivos do autor também ficam evidentes, e é possível verificar que o livro responde, em sua quase totalidade, aos objetivos do Currículo nacional, mas deixa a desejar em relação ao Currículo de referência da SED-MS, em especial em suas propostas didáticas.

Refletindo sobre o processo de evolução histórica do conceito de Função, percebemos que ele evoluiu gradativamente, então não foi algo que nasceu da noite para o dia, mas sim um conceito que se adaptava às necessidades da ciência e da matemática e que a compreensão do conceito de Função, ou o caminho percorrido para chegar à compreensão e definição utilizadas hoje, tem sido influenciada pela forma como as relações funcionais são representadas.

Nesse meio tempo, percebemos que os pesquisadores encontraram várias dificuldades no desenvolvimento desse conceito. Processo que começou com os babilônios por volta de 2000 a.C. que desenvolveu tabelas contendo relações entre valores para entender a volatilidade do sol, da lua e dos planetas. Ou seja, mesmo sem esclarecer o conhecimento sobre o conceito, este estava presente nas atividades dos povos antigos, principalmente as relacionadas à astronomia, e eram registradas em tabelas mostrando as relações entre as quantidades.

Posteriormente, já nos séculos XVI e XVII, por meio dos trabalhos publicados por Pierre de Fermat e René Descartes, foi incluída a representação analítica (expressões algébricas) como representações de Funções. Este fato permitiu um grande avanço na álgebra, apoiado pela geometria, e também contribuiu para o trabalho de Newton e Leibniz, sendo este último responsável pela primeira vez que a palavra Função designava uma relação entre grandezas.

Apesar dos avanços feitos pela representação algébrica de uma Função na elaboração de tal conceito, ela também contribuiu para uma das mais importantes barreiras epistemológicas inerentes a esse conceito, pois a ideia de que somente as relações podem ser descritas por uma análise tem muito expressão pode ser chamada de Função. Esse obstáculo foi superado pela primeira vez no século XIX, quando Dirichlet separou o conceito de Função de uma expressão analítica e definiu uma Função como uma correspondência arbitrária entre variáveis representando conjuntos numéricos. A definição de Dirichlet deu origem à definição moderna de uma Função usada hoje.



Por fim, desta análise do contexto histórico, percebemos que o conceito de Função passou por um longo processo de desenvolvimento, caracterizado por formas de representação das relações funcionais que contribuíram para uma compreensão mais ampla do conceito, por meio de um movimento de purificação, contemplando os três níveis indicados por Sierpinski (1992), cujas tentativas de superá-las abriram novas formas de perceber o conhecimento.

Foi ao analisar a evolução conceitual de Função, que percebemos que, entre os séculos XIV e XIX houve uma mudança gradual da intuitividade geométrica para o simbolismo analítico e algébrico. Como observa Jean-Blaise Grize sobre a noção de Função, “[...] podemos caracterizar sumariamente sua evolução dizendo que estamos na presença de uma progressiva liberação de considerações físicas em favor de noções propriamente lógico-matemáticas”. (GRIZE, 1968, p. 171-172). De fato, a liberação das considerações físicas permitiu a introdução formal do conceito de Função, baseado na noção central de variável.

Portanto, com a numeralização da análise, o conceito de Função passa a ter definições gerais cada vez mais variadas. A sua primeira expressão por uma fórmula algébrica ocorreu na primeira metade do século XVII. Depois disso, o conceito de Função torna-se uma relação entre quantidades variáveis, cuja lei pode ser conhecida ou desconhecida. Finalmente, a teoria dos conjuntos é implementada, o que trouxe para a noção de Função o status quase definitivo de correspondência entre os objetos de dois conjuntos.

Assim, ao analisar a forma como esse conceito foi formulado e evoluído ao longo dos anos, mesmo que tenha se firmado como um objeto matemático muito importante, que também funda outros conceitos e funciona como essencial para a compreensão de outros objetos de conhecimento, como por exemplo a análise, e ainda está sempre em constante evolução, sendo objeto de pesquisas e estudos, não nos parece razoável que seja desenvolvida de uma forma tão rasa e superficial como agora observamos nos Currículos e Livros Didáticos.

Sendo assim, propomos algumas maneiras de se trabalhar com a história da matemática, alinhando o conhecimento dessa evolução, fazendo com que o aluno entenda que, a origem desses conceitos surgem da necessidade de resolução de problemas, logo entender os motivos e os desafios enfrentados por pesquisadores no

estudo deste conceito, pode trazer maior significado ao aluno em entender este importante conceito.

Cientes que o conceito de Função esbarrou em obstáculos epistemológicos e didáticos de vários tipos, apresentamos os esforços de vários matemáticos para introduzir e explicar o conceito de Funções. Parece-nos que a história do conceito de Função permite que os professores de matemática aproveitem esse aspecto histórico para melhorar o ensino desse conceito fundamental de análise.

Com efeito, é claro que a construção do conceito de Função passou por várias etapas, graças a diferentes formulações e generalizações. Parece-nos que a aprendizagem e a apropriação deste conceito requerem etapas progressivas. Por outro lado, e o que torna maior o desafio de ensinar Função, o professor deve estar ciente de que o conceito de Função é novo para os alunos e que sua aprendizagem esbarra em obstáculos epistemológicos e didáticos. Lembre-se que, segundo Brousseau, um obstáculo epistemológico são conhecimentos envolvidos no desenvolvimento do conceito, que fizeram parte da sua construção, e que podem surgir no momento em que o aluno precisa lidar com esse novo conceito. (BROUSSEAU, 2008).

Por outro lado, historicamente vimos que o conceito de Função declinou de diferentes maneiras: tabelas numéricas, curvas, seja como expressão analítica ou como fórmula algébrica. Na década de 1920, o conceito de Função apareceu em uma linguagem definida. Sabemos que esses diferentes aspectos são interdependentes. Seria, portanto, prudente que os alunos trabalhassem os diferentes registros de representações do conceito de Função, a saber: verbal, numérica, visual e algébrica (STEWART, 2001).

Finalmente, a questão é como integrar a história ao ensino da matemática. Em particular, como integrar a história do conceito de Função no ensino deste? Diversas formas e métodos de trabalho têm sido propostos na literatura. Dentre essas propostas, podemos citar a de Barbin (BARBIN, 1997), que se baseia no estudo de textos antigos e no trabalho interdisciplinar, para melhor compreender os papéis da história da matemática e suas diferentes Funções. Dez tópicos sobre o uso da história na educação matemática são oferecidos no livro “Let History into the Mathematics Classroom” (BARBIN et al., 2018).

## REFERÊNCIAS

- AZCÁRATE Gimenez, Carmem e DEULOFEU Piquet, Jordi. **Funciones e Graficas**. 1ª reimp. Madrid: Editorial Síntesis, S, A. Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje. 1996.
- BAIR, J.et HENRY, V., Le concept de fonction au fil du temps, Losanges, N°5 (2009), p. 11–20. <https://www.sbpn.be/2009/06/losanges-5/>
- BARBIN, É. *et al.*, Let History into the Mathematics Classroom, Springer, 2018.
- BARBIN, É., (1997), “Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi ? Comment ?”, *bulletin AMQ*, vol. XXXVII, n° 1, pp. 20-25
- BOURBAKI, N.: 1939, **Eléments de Mathématiques**, Livre I, Ch. 2, Hermann, Paris.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: A Secretaria, 2017.
- BRASIL, Secretaria de Estado de Educação de MS (SED). **Currículo de Referência do Ensino Fundamental**. Campo Grande: A Secretaria, 2020a.
- BRASIL, Secretaria de Estado de Educação de MS (SED). **Currículo de Referência do Ensino Médio**. Campo Grande: A Secretaria, 2020b.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: Conteúcos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.
- CAUCHY, A. L., Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique: premier partie, analyse algébrique. Paris, 1821.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- EULER, L., **Introdução à análise infinitesimal**. Elder Barrois, Paris, anos IV-V (1796-1797). tradução francesa de JB Labey; 2 voos. <https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-8612>, Acesso em 09/05/2022 às 14h23.
- GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática**: 9º ano: Ensino Fundamental: anos finais. 4. Ed. São Paulo: FTD, 2018.
- GONÇALVES, Alexsandra Candida. **Aspectos da história do conceito de Funções e suas representações por diagrama, linguagem algébrica e gráficos cartesianos**. 2015. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. doi:10.11606/D.55.2015.tde-01072015-113421. Acesso em: 2021-04-01.

GRIZE, J.B., **Epistemologia e psicologia da Função**, Sob a direção de Jean Piaget, Edição PUF, 1968

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciências e aplicações: Ensino Médio, volume 1.** 9. Ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciências e aplicações: Ensino Médio, volume 2.** 9. Ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciências e aplicações: Ensino Médio, volume 3.** 9. Ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LEBESGUE, H. **Intégrale, Longueur**, Aire. Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de Paris, Paris, 1902.

OTERO-GARCIA, Sílvio César; BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; MARTINES, Paula Taliari. Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 15, n. 3, p. 692-717, 2013.

PIRES, R. F. **O conceito de Função: Uma análise histórico epistemológica**. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. Anais do XII ENEM, 2016. Disponível no link: <[http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6006\\_2426\\_ID.pdf](http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6006_2426_ID.pdf)>, acesso em 12/11/2021.

PERRIN, P. & PÉNIN, J.C., **Seis lições na história da matemática**, Resumos de palestras dadas em 1999. Associação História da Matemática em Champagne Ardenne.

PONTE, J. P. et al, **Álgebra no Ensino Básico. Ministério da Educação de Portugal**; 2009.

PONTE, João Pedro. The history of the concept of function and some educational implications. **Mathematics Educator**, v.3, n.2, p.3-8, 1992.

PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico. Portugal: ME, 2009.** Disponível em :<[http://www.esv.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003\\_Brochura\\_Algebra\\_NPMEB\\_%28Set2009%29.pdf](http://www.esv.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_%28Set2009%29.pdf)>. Acesso em: 01 Abr. 2021.

RACHIDI, M., **Concept de fonction chez Euler et aperçu de son évolution historique**. Comptes rendus du Séminaire d'histoire des mathématiques. V. 3. IREM de Reims, Reims, 2017, p. 43-65.

RACHIDI, M., FREITAS, J. L. M, MONGELLI, M.C.G. **Limite de Funções de uma variável real com valores reais e generalizações**. Campo Grande-MS: Editora da UFMS, 2020. Disponível no link: <<https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/3548>>, acesso em 12/11/2021.

ROSHDI, R. *et al.*, **História das ciências árabes: matemática e física**, Volume 2, Seuil, Paris 1997.

SAGNA, O., *L'Histoire des mathématiques au service d'une nouvelle didactique de la discipline dans les cursus scolaires au Sénégal: approches théoriques et applications*. Thèse de Doctorat, Université Cote d'Azur, 2019.

SALOMOM, D. V. **Como fazer uma monografia: elementos de metodologia do trabalho científico**. Belo Horizonte, MG: Inter livros, 1972.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. São Paulo, SP: Cortez, 2007.

SIERPINSKA, A.; DUBINSKY, E.; HAREL, G. **The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy**, MAA Notes 25, p.25-58, 1992.

SOBRINHO, Andressa Sanches Teixeira. **Desenvolvimento do pensamento algébrico e os softwares de matemática dinâmica: metanálise de produções brasileiras**. Caçapava do Sul, 2006. Disponível em :<[http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/cienciasexatas/files/2014/06/TCCII\\_Andressa\\_-final.pdf](http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/cienciasexatas/files/2014/06/TCCII_Andressa_-final.pdf)>. Acesso em: 01 Abr. 2021.

SOUSA, A. S.; OLIVEIRA, S. O.; ALVES, L. H.. **A PESQUISA BIBLIOGRÁFICA: PRINCÍPIOS E FUNDAMENTOS**. Cadernos da Fucamp, v.20, n.43, p.64-83/2021. Disponível em :<<https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2336>>. Acesso em: 11 Ago. 2022.

STEWARTJ., *Analyse, concepts et contextes*, Vol. 1, De Boeck Université, Bruxelles, 2001.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução: COLONESE, P. H. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. P. 584.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX e siècle. Fragments d'histoire des Mathématiques**. Brochure A.P.M. E. P., n. 41, p. 7-67, 1981a.

YOUSCHKEVITCH, A. P., **O conceito de Função até meados do século XIX** em "Fragmento da história da matemática", Folheto APMEP N° 41, 1981b.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **The concept of function up to the middle of the 19th Century**. Archive for History of Exact Sciences, v.16, n.1, p.37-85, 1976.

ANEXO

# INTRODUCTION

A

## L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

### L I V R E P R E M I E R ,

CONTENANT l'Explication des diverses sortes de Fonctions, leur résolution en Facteurs & leur développement en Séries infinies; avec la théorie des Logarithmes; celle des Arcs de cercle, de leurs Sinus & de leurs Tangentes, & plusieurs autres Questions propres à faciliter l'étude de l'Analyse infinitésimale.

---

### CHAPITRE PREMIER.

#### *Des Fonctions en général.*

1. *Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.*

Tels sont les nombres de toute espèce, qui conservent constamment la valeur qu'ils ont une fois obtenue. Lorsqu'il s'agit de représenter ces sortes de quantités par des caractères, on se sert des premières lettres de l'Alphabet  $a, b, c, &c.$  A la vérité, dans l'Analyse ordinaire qui n'a pour objet que des quantités déterminées, on désigne ordinairement celles qui sont connues par les premières lettres de l'Alphabet, & celles qui ne le sont pas, par les dernières; mais c'est une distinction à laquelle on a moins égard dans la haute Géométrie; on y envisage les quantités sous un autre aspect

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I.

A

2 DES FONCTIONS

particulier, les unes étant considérées comme constantes, & les autres comme variables.

2. *Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

Une valeur déterminée quelconque pouvant être exprimée en nombre, il s'ensuit qu'une quantité variable comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils soient. Il en est de la quantité variable, comme du genre & de l'espece à l'égard des individus; on peut la concevoir comme embrassant toutes les quantités déterminées. Au reste, on a coutume de représenter les quantités variables par les dernières lettres de l'Alphabet  $x, y, z$ , &c.

3. *Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manières, puisqu'on peut lui substituer tous les nombres imaginables. La signification d'une quantité variable ne peut être censée épuisée, qu'autant qu'on aura conçu en sa place toutes les valeurs déterminées. Ainsi une telle quantité comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels & transcendants; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes.*

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable  $x$  contiendra des quantités constantes, est une fonction de  $x$ . Par exemple,  $a + 3x$ ;  $ax - 4xz$ ;  $ax + b\sqrt{aa - xz}$ ;  $cx$ ; &c, sont des fonctions de  $x$ .

5. *Une fonction de variable est, donc aussi une quantité variable.*

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même

## E N G É N É R A L.

3

une infinité de valeurs, & il est impossible d'en concevoir aucune, dont elle ne soit susceptible, puisque la variable comprend même les valeurs imaginaires. Par exemple, quoique cette fonction  $\sqrt{9 - zz}$  ne puisse donner un nombre plus grand que 3, tant qu'on mettra des nombres réels à la place de  $z$ ; cependant, en introduisant pour  $z$  des nombres imaginaires, tels que  $\sqrt{-1}$ , il n'est pas possible d'assigner une valeur déterminée, qui ne puisse être déduite de la formule  $\sqrt{9 - zz}$ . Au reste, il n'est pas rare de rencontrer des expressions qui ne sont que des fonctions apparentes; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conservent toujours la même valeur, comme  $z^0$ ;  $1z$ ;  $\frac{aa - az}{a - z}$ . Ces expressions, sous la forme apparente de fonctions de variables, sont réellement des quantités constantes.

6. *La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de la variable & des quantités constantes, qui les forment.*

Elle dépend donc des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées & combinées entr'elles. Ces opérations sont l'Addition & la Soustraction; la Multiplication & la Division; l'Élévation aux Puissances & l'Extraction des Racines; à quoi il faut ajouter encore la Résolution des Équations. Ou re ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres qu'on nomme transcendentes: comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres sans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

Distinguons cependant certaines espèces de fonctions; savoir, les Multiples  $2z$ ;  $3z$ ;  $\frac{1}{5}z$ ;  $az$ , &c. & les Puissances de  $z$ ; comme  $z^0$ ;  $z^3$ ;  $z^{\frac{1}{2}}$ ;  $z^{-1}$ ; &c, quantités formées par une seule opération, & qui, comme celles qui résultent de la combinaison de plusieurs, ne laissent pas de porter de même le nom de fonctions.

7. *Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendentes; les premières sont formées par des opérations algébriques*

---



#### 4 DES FONCTIONS

seulement, & les dernières supposent pour leur formation des opérations transcendantes.

Les multiples & les puissances de  $\zeta$  sont donc des fonctions algébriques, ainsi que toutes les expressions, qui n'admettent que les opérations algébriques, dont nous avons parlé; telle est la quantité  $\frac{a + b\zeta^n - c\sqrt{(2\zeta - 1)}}{aa\zeta - 3b\zeta^3}$ . Souvent les fonctions algébriques ne peuvent être représentées explicitement; telle seroit la fonction  $Z$  de  $\zeta$ , si elle étoit exprimée par l'équation  $Z^5 = a\zeta\zeta Z^3 - b\zeta^4 Z^2 + c\zeta^3 Z - 1$ . Car, quoique cette équation ne puisse être résolue, il n'en est pas moins certain que  $Z$  est égal à une expression composée de la variable  $\zeta$  & de constantes, & que par conséquent  $Z$  est une fonction quelconque de  $\zeta$ . Pour avoir une fonction transcendante, il ne suffit pas qu'il entre dans son expression une opération transcendante, il faut de plus qu'elle affecte la variable; car si elle n'affectoit que des constantes, la fonction n'en seroit pas moins censée algébrique. Par exemple, si  $c$  désigne la circonférence d'un cercle, dont le rayon = 1, la quantité  $c$  sera bien une quantité transcendante; cependant ces expressions  $c + \zeta$ ;  $c\zeta^2$ ;  $4\zeta^c$ , &c. seront des fonctions algébriques de  $\zeta$ . Car il importe peu de savoir si ces sortes d'expressions  $\zeta^c$  doivent être mises au nombre des fonctions algébriques ou non. Il y a aussi des Géomètres qui ont mieux aimé donner aux puissances de  $\zeta$ , dont les exposans étoient des nombres irrationnels, comme  $\zeta^{\sqrt{2}}$ , le nom de fonctions interscendantes, que celui de fonctions algébriques.

8. *Les fonctions algébriques se subdivisent en rationnelles & en irrationnelles. Dans les dernières la variable est affectée de radicaux, & dans les premières elle n'en est point affectée.*

Par conséquent, les fonctions rationnelles n'admettent pas d'autres opérations que l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division & l'Élévation aux Puissances, dont les exposans sont des nombres entiers; ainsi, les quan-

## E N G É N É R A L.

5

tités  $a + z$ ;  $a - z$ ;  $az$ ;  $\frac{aa + zz}{a + z}$ ,  $az^2 - bz^3$ , &c. sont des fonctions rationnelles de  $z$ ; mais ces expressions  $\sqrt{z}$ ;  $a + \sqrt{aa - zz}$ ;  $\sqrt{a - 2z + zz}$ ;  $\frac{aa - z\sqrt{aa + zz}}{a + z}$  en seront des fonctions irrationnelles.

*Celles-ci se divisent commodément en explicites & en implicites.*

Les explicites sont développées au moyen des radicaux; nous en avons donné des exemples, & les implicites dépendent de la résolution des équations. Ainsi  $Z$  sera une fonction irrationnelle implicite de  $z$ , si elle est représentée par cette équation  $Z^2 = azZ^2 - bz^3$ . En effet, on ne peut en tirer la valeur explicite de  $Z$ , même en admettant les signes radicaux, par la raison que l'Algèbre n'est pas encore parvenue à ce degré de perfection.

9. *Les fonctions rationnelles enfin, se divisent en entières & en fractionnaires.*

Dans celles-là, il n'entre aucune puissance négative de la variable  $z$ , ni aucunes fractions qui renferment cette variable dans leurs dénominateurs; d'où il suit que les fonctions fractionnaires sont celles qui ont des dénominateurs affectés de la variable  $z$ , ou dans lesquelles se rencontrent des exposans négatifs de cette même variable. Ainsi la formule générale des fonctions entières sera  $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \&c.$  Car on ne peut imaginer aucune fonction entière de  $z$ , qui ne soit renfermée dans cette expression. Quant aux fonctions fractionnaires, comme plusieurs fractions peuvent toujours être réduites à une seule, elles seront comprises dans la formule

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \&c.}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \epsilon z^4 + \zeta z^5 + \&c.}$$

Remarquez ici que les quantités constantes  $a, b, c, d, \&c.$   $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$  soit qu'on les suppose positives ou négatives, entières ou fractionnaires, rationnelles ou irrationnelles, &