FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE
FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática - INMA

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Lara Nicoletti Sotoma

Uma Conexão Didática entre Sistemas de Equações Lineares de ordem 2 e a Sequência de Fibonacci

Campo Grande - MS

01 de agosto de 2025

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE
FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática - INMA

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Lara Nicoletti Sotoma

Orientadora: Prof.ª Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/ UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campo Grande - MS

01 de agosto de 2025

Lara Nicoletti Sotoma

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Banca examinadora:

Prof.ª Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico.
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS.

Prof.ª Dra. Rubia Mara de Oliveira Santos.
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS.

Prof. Dr. Cosme Eustaquio Rubio Mercedes.
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul- UEMS.

Campo Grande - MS, 01 de agosto de 2025.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida, e por suas graças e bênçãos.

Ao meu esposo, Vitor, pelo apoio constante, pelo companheirismo, pela compreensão, pelo amor e pelo cuidado com que me acompanha em cada passo.

Aos meus pais, Irineu e Rosimeire, por me criarem com amor, por me educarem na fé, por investirem na minha formação, por acompanharem cada etapa do meu caminho e por todo o cuidado incansável ao longo da vida.

Aos meus irmãos, por estarem sempre comigo.

À minha orientadora, a professora Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico, pelo apoio, disponibilidade, generosidade e conhecimento compartilhado comigo.

À todos os professores que tive, que contribuíram para minha formação.

Resumo

Na análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), percebe-se que os termos "matriz"ou "representação matricial"não são mencionados de forma explícita como conteúdos específicos na área de Matemática. No entanto, considerando o contexto atual, fortemente influenciado pelo uso de dados e tecnologias, torna-se claro que a habilidade de interpretar, organizar e operar tabelas de valores é fundamental para a formação dos estudantes. Este trabalho tem como objetivo discutir uma maneira de ensinar matrizes e determinantes através de conhecimentos previstos na BNCC. São eles: sistemas de equações lineares de ordem 2 e sequências numéricas. Para integrar os conceitos, nós propomos uma aplicação a códigos lineares corretores de erros usando a sequência de Fibonacci. Essa interdisciplinariedade entre os conceitos matemáticos apresentados nessa dissertação contempla várias habilidades da BNCC de maneira simples e eficaz.
Palavras-chave: Sistemas Lineares, Matrizes, Determinantes, Seqüência de Fibonacci, Códigos Lineares.

Abstract

When analyzing the National Common Curricular Base (BNCC), it is clear that the terms “matrix” or “matrix representation” are not explicitly considered as specific content in the Mathematics area. However, considering the current context, strongly influenced by the use of data and technologies, it becomes clear that the ability to interpret, organize and operate tables of values is fundamental for the education of students. This work aims to discuss a way to teach matrices and determinants through knowledge provided in the BNCC. These are: systems of linear equations of order 2 and numerical sequences. We propose an application to error-correcting linear codes using the Fibonacci sequence. This interdisciplinarity between the mathematical concepts presented in this dissertation contemplates several BNCC skills in a simple and effective way.

Keywords: Linear Systems, Matrices, Determinants, Fibonacci Sequence, Linear Codes.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento essencial para a educação brasileira, pois define os objetivos de aprendizagem que todos os estudantes devem atingir ao longo da educação básica. Elaborada em consonância com a Constituição Federal de 1988 e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), a BNCC busca assegurar uma educação de qualidade, equitativa e inclusiva em todo o território nacional, [4, 5].

O documento estabelece as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos alunos em cada etapa da educação básica — que inclui a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Essas competências abrangem diversas áreas do conhecimento, como Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas. Além disso, a BNCC valoriza o desenvolvimento de competências socioemocionais e habilidades transversais, como pensamento crítico, criatividade, trabalho em equipe e responsabilidade social.

Entre os principais propósitos da BNCC está a promoção da equidade no ensino, garantindo que todos os estudantes tenham acesso às mesmas oportunidades de aprendizagem, independentemente de sua condição socioeconômica, origem geográfica ou identidade cultural. Para isso, a BNCC propõe um conjunto comum de conhecimentos e competências, ao mesmo tempo em que respeita e valoriza a diversidade cultural e regional do Brasil.

Um ponto relevante da BNCC é sua ênfase no ensino por competências, priorizando não apenas o conteúdo que os estudantes devem aprender, mas também sua capacidade de aplicar esse conhecimento em diferentes contextos. Isso reforça uma abordagem educacional voltada para o desenvolvimento de habilidades cognitivas, socioemocionais e práticas, fundamentais para a vida pessoal, acadêmica e profissional.

Em uma análise direta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), observa-se que os termos matriz ou representação matricial não são explicitamente mencionados como conteúdos específicos no eixo de Matemática. No entanto, é evidente que atualmente o domínio de comandos e operações básicas sobre tabelas de valores tornou-se uma habilidade essencial. A compreensão e manipulação de informações organizadas em estruturas tabulares — muitas vezes associadas ao conceito de matrizes — são fundamentais para a atuação crítica e competente na sociedade contemporânea, ainda que esse conhecimento não esteja formalmente destacado na BNCC.

Sobre esse contexto, temos a resolução de sistemas lineares que está ligado e é usado como o assunto de conexão à introdução das matrizes no Ensino Médio. Atualmente, na rede pública do Estado do Mato Grosso do Sul, os estudantes do Ensino Médio devem adquirir a habilidade de resolver um sistema de equações lineares de ordem 2. Sendo assim, essa dissertação é uma resposta ao fato de que não conseguirmos prosseguir esse conteúdo e de como podemos utilizar as matrizes de forma a ter o desenvolvimento desses estudantes.

Para isso vamos utilizar uma conexão com sequências numéricas e o pensamento computacional. A BNCC propõe que, já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, as crianças sejam incentivadas a identificar, continuar e criar sequências numéricas, tanto simples, como contagens e progressões regulares, quanto mais complexas, incluindo padrões que envolvem operações como adição, subtração, multiplicação e divisão. O trabalho com sequências estimula a observação, a análise e a capacidade de generalizar regras, competências fundamentais para a aprendizagem da Matemática.

O ensino de sequências numéricas, conforme orientado pela BNCC, contribui para o desenvolvimento de habilidades como a resolução de problemas cotidianos, a interpretação de gráficos e tabelas, e a construção de modelos matemáticos. Ao explorar diferentes tipos de sequências, os estudantes aprendem a compreender os números no mundo ao seu redor, preparando-se para estudos mais avançados e para situações práticas da vida diária.

Entre as sequências mais conhecidas está a sequência de Fibonacci. Essa sequência aparece nas mais diversas áreas e resolve um problema que pode ser ensinado de forma simples, o Problema dos Coelhos, [11].

O pensamento computacional é uma habilidade fundamental no mundo contemporâneo, que vai muito além da simples programação de computadores. Ele envolve a capacidade de resolver problemas de forma lógica, criativa e eficiente, utilizando conceitos como decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos. Essa forma de pensar permite que os alunos desenvolvam estratégias para enfrentar desafios complexos em diversas áreas do conhecimento e no cotidiano. Na BNCC, o pensamento computacional aparece especialmente no componente de Tecnologia e Matemática, mas também está conectado às competências gerais da Educação, como a resolução de problemas, o pensamento crítico, a criatividade e a comunicação. Ela propõe que os alunos sejam expostos a situações que envolvam algoritmos, sequências lógicas, identificação de padrões e análise de dados, sempre de forma contextualizada e alinhada com a realidade dos estudantes. A proposta não é ensinar apenas linguagens de programação, mas promover a compreensão dos processos de construção de soluções estruturadas e eficientes.

Esse trabalho tem como objetivo mostrar uma conexão entre as sequências de inteiros e os códigos lineares, a fim de determinar uma nova perspectiva de ensino envolvendo a resolução de sistemas lineares, através de sua representação matricial e determinantes. Mais especificamente, nosso objetivo é mostrar uma sequência didática que envolve a sequência numérica de Fibonacci, sistemas lineares e os códigos lineares.

No Capítulo 2 introduzimos os sistemas de equações lineares de ordem 2, assim como os métodos de resolução apresentados no Ensino Básico: Substituição, Adição e Comparação. Também nesse capítulo, através do conhecimento epistemológico-matemático, apresentamos a representação matricial de um sistema de equações lineares de ordem 2 e o estudo do determinante.

No Capítulo 3 introduzimos as sequências de Fibonacci e descrevemos a importância dessa sequência, tanto como conteúdo a ser visto de acordo com a BNCC, quanto suas aplicações e aparições no mundo natural.

Por fim, no Capítulo 4 mostramos como conectar os conceitos de sistemas lineares, matrizes e sequências através de uma aplicação: os códigos corretores de erros. Essa aplicação é feita matematicamente e posteriormente apresentada de forma que possibilite a se tornar uma sequência didática pelo professor.

Capítulo 2

Sistemas de Equações Lineares

Por muito tempo, sistemas lineares, bem como matrizes e determinantes foram tópicos presentes no Ensino Médio. Embora ainda apareçam em diversas provas de vestibulares do país, apenas sistemas lineares é contemplado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que surgiu para unificar o Ensino Básico. A habilidade que contempla sistemas lineares é:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Esta habilidade está relacionada a seguinte competência:

Competência Específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Esta habilidade, de acordo com o Organizador Curricular de Mato Grosso do Sul - Ensino Médio, tem como objetos de conhecimento:

- Sistemas de equações lineares.
- Gráficos de funções lineares com uma ou duas variáveis.
- Resolver e elaborar problemas em diversos contextos, que envolvem sistemas de equações lineares, bem como sua resolução, por exemplo, mix de produtos em uma loja, mistura de líquidos, entre outros.

Neste capítulo, iremos introduzir os conceitos de sistemas de equações lineares de ordem 2, matrizes e determinantes. Faremos de forma detalhada cada método de resolução. Para confecção deste capítulo foram utilizados os títulos [6, 7, 8, 10, 14, 15].

2.1 Sistemas de Equações Lineares de ordem 2

Nesta seção descrevemos os métodos existentes para determinar uma solução de um sistema de equações lineares de ordem 2 que são apresentados no ensino básico: substituição, adição e comparação.

Um sistema de equações lineares de ordem 2 pode ser escrito, de forma geral, nas incógnitas x e y, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, a e c, e b e d não ambos nulos, como:

$$\begin{cases} ax + by & = e \\ cx + dy & = f \end{cases}.$$

Determinar a solução é encontrar o par ordenado (x, y) que satisfaz o sistema S, e o conjunto solução tem a forma $S = \{(x, y)\}$.

O método da substituição consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e realizar a substituição na outra equação. Isolaremos então a incógnita x na primeira equação. Observe:

$$\begin{aligned} ax &= e - by, \\ x &= \frac{e - by}{a}, sea \neq 0. \end{aligned}$$

Agora, tendo x em função de y, substituímos na segunda equação $cx + dy = f$:

$$\begin{aligned} c \cdot {\color{red}\frac{e - by}{a}} + dy &= f \\ \frac{ce - cby}{a} + dy &= f \\ \frac{ce - cby + ady}{a} &= f \\ ce - cby + ady &= af \\ ady - cby &= af - ce \\ (ad - bc)y &= af - ce \\ y &= \frac{af - ce}{ad - bc}, \end{aligned}$$

com $ad - bc \neq 0$.

Tendo obtido o valor de y, voltamos na equação em que x está em função de y,

$x = \dfrac{e - by}{a}$, para determiná-lo:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{e - b \cdot \dfrac{af - ce}{ad - bc}}{a} \\
&= \frac{\dfrac{e \cdot (ad - bc) - b \cdot (af - ce)}{ad - bc}}{a} \\
&= \frac{e \cdot (ad - bc) - b \cdot (af - ce)}{a \cdot (ad - bc)} \\
&= \frac{ead - ebc - baf + bce}{a \cdot (ad - bc)} \\
&= \frac{ade - abf}{a \cdot (ad - bc)} \\
&= \frac{a \cdot (de - bf)}{a \cdot (ad - bc)} \\
&= \frac{de - bf}{ad - bc}.
\end{aligned}$$

Desse modo, a solução do sistema quando $ad - bc \neq 0$ é o par ordenado $(\frac{de-bf}{ad-bc}, \frac{af-ce}{ad-bc})$.

Observação 1: No caso em que $a = 0$, $y = e/b$, e no caso em que $c = 0$, $y = f/d$, mas não podemos ter ambos nulos, pois então teríamos um sistema de duas equações e uma incógnita. O mesmo ocorre se b e d forem ambos iguais a zero. E ainda, se apenas $b = 0$, $x = e/a$ e, se apenas $d = 0$, $x = f/c$.

Observação 2: Note que não nos preocupamos com a ordem das letras em uma multiplicação já que $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, e isso também ocorrerá nos demais métodos. Vejamos um exemplo de sua aplicação.

Exemplo 1 *Considere o seguinte sistema de equações lineares:*

$$\begin{cases} x + 3y &= 10 \\ 2x - y &= -1 \end{cases}.$$

Observe que na primeira equação a incógnita x pode ser facilmente isolada, gerando o sistema

$$\begin{cases} 10 - 3y = x \\ 2x - y = -1 \end{cases}.$$

Substituindo o valor de x da primeira equação $x = 10 - 3y$ na segunda $2x - y = -1$, *obtemos:*

$$
\begin{aligned}
2 \cdot (10 - 3y) - y &= -1, \\
20 - 6y - y &= -1, \\
-7y &= -21, \\
y &= 3.
\end{aligned}
$$

E, substituindo esse valor de y na primeira equação $x = 10 - 3y$,

$$
\begin{aligned}
x &= 10 - 3 \cdot 3 \\
&= 10 - 9 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Assim, o par ordenado $(1, 3)$ é solução desse sistema, e o conjunto solução é $S = \{(1, 3)\}$.

O método da adição consiste em eliminar uma das incógnitas somando as equações (originais ou múltiplas), membro a membro. Considere o sistema de equações lineares de ordem 2, nas incógnitas x e y, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, a e c, e b e d não ambos nulos:

$$
\begin{cases}
ax + by = e \\
cx + dy = f
\end{cases}.
$$

No método da adição devemos cancelar uma das incógnitas através de uma soma ou subtração das equações. Precisamos então que os números que acompanham a incógnita que iremos eliminar sejam opostos nas equações para somarmos e resultar em zero. Neste caso, multiplicaremos a primeira equação por c e a segunda equação por $-a$, a fim de eliminar x pela soma dessas equações. Observe:

$$
\begin{cases}
\quad acx + bcy = ce \\
-acx - ady = -af
\end{cases}
$$

Somando essas equações, obtemos:

$$
\begin{aligned}
acx - acx + bcy - ady &= ce - af \\
(bc - ad)y &= ce - af \\
y &= \frac{ce - af}{bc - ad},
\end{aligned}
$$

com $bc - ad \neq 0$.

Substituindo esse valor de y na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned}
ax + b \cdot \frac{ce - af}{bc - ad} &= e,\\
ax + \frac{bce - abf}{bc - ad} &= e,\\
ax &= e - \frac{bce - abf}{bc - ad},\\
ax &= \frac{e(bc - ad) - (bce - abf)}{bc - ad},\\
ax &= \frac{bce - ade - bce + abf}{bc - ad},\\
ax &= \frac{-ade + abf}{bc - ad},\\
ax &= \frac{a(bf - de)}{bc - ad},\\
x &= \frac{bf - de}{bc - ad}.
\end{aligned}$$

Logo, a solução do sistema quando $bc - ad \neq 0$ é o par ordenado $(\frac{bf-de}{bc-ad}, \frac{ce-af}{bc-ad})$. Note que é a mesma solução obtida pelo método da substituição:

$$\begin{aligned}
\frac{bf - de}{bc - ad} &= \frac{-(de - bf)}{-(ad - bc)} = \frac{de - bf}{ad - bc},\\
\frac{ce - af}{bc - ad} &= \frac{-(af - ce)}{-(ad - bc)} = \frac{af - ce}{ad - bc}.
\end{aligned}$$

Observe o exemplo 2, que resolveremos pelo método da adição.

Exemplo 2 *Para resolver o sistema*

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$$

pelo método da adição, primeiro multiplicamos a primeira equação $x - y = 2$ por -2, que gera o sistema equivalente:

$$\begin{cases} -2x + 2y = -4 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}.$$

Agora, somando as equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
-2x + 2x + 2y - 3y &= -4 + 9,\\
-y &= 5,\\
y &= -5,
\end{aligned}$$

que substituindo na primeira equação do sistema $x - y = 2$,

$$x - (-5) = 2,$$
$$x + 5 = 2,$$
$$x = -3.$$

Portanto, o par ordenado $(-3, -5)$ *é solução desse sistema, e o conjunto solução é* $S = \{(-3, -5)\}$.

Por fim, o método da comparação consiste em isolar uma mesma incógnita nas duas linhas do sistema e assim igualá-las para obter o valor da outra incógnita.

Considere o sistema de equações lineares de ordem 2, nas incógnitas x e y, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, a e c, e b e d não ambos nulos:.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}.$$

No método da comparação devemos isolar uma das incógnitas nas duas equações. Isolaremos primeiro a incógnita x na primeira equação. Observe:

$$ax = e - by,$$
$$x = \frac{e - by}{a}.$$

Isolaremos então, agora a incógnita x na segunda equação $cx + dy = f$.

$$cx = f - dy,$$
$$x = \frac{f - dy}{c}.$$

Temos agora o sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{e - by}{a} \\ x = \dfrac{f - dy}{c} \end{cases}.$$

Igualando os valores de x, obtemos:

$$\frac{e - by}{a} = \frac{f - dy}{c},$$
$$ce - bcy = af - ady,$$
$$ady - bcy = af - ce,$$
$$(ad - bc)y = af - ce,$$
$$y = \frac{af - ce}{ad - bc},$$

com $ad - bc \neq 0$.

A partir do valor de y, basta voltar em uma das equações para obter o valor de x. Usando a primeira delas, temos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{e - b \cdot \frac{af-ce}{ad-bc}}{a} \\
&= \frac{\frac{e\cdot(ad-bc)-b\cdot(af-ce)}{ad-bc}}{a} \\
&= \frac{e \cdot (ad-bc) - b \cdot (af-ce)}{a \cdot (ad-bc)} \\
&= \frac{ead - ebc - baf + bce}{a \cdot (ad-bc)} \\
&= \frac{ade - abf}{a \cdot (ad-bc)} \\
&= \frac{a \cdot (de - bf)}{a \cdot (ad-bc)} \\
x &= \frac{de-bf}{ad-bc}.
\end{aligned}$$

Assim, a solução do sistema quando $ad - bc \neq 0$ é o par ordenado $(\frac{de-bf}{ad-bc}, \frac{af-ce}{ad-bc})$.

Este método é ideal para encontrar o ponto de interseção entre duas retas que tem a forma $y = ax + b$, como mostramos no exemplo 3.

Exemplo 3 *Considere as retas $y = 2x + 1$ e $y = -3x + 6$. O ponto de interseção entre elas é a solução do sistema:*

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -3x + 6 \end{cases}.$$

Como y já encontra-se isolado nas duas linhas, basta igualar seus valores para obter x:

$$2x + 1 = -3x + 6$$

$$2x + 3x = 6 - 1$$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

E, substituindo na primeira equação $y = 2x + 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot 1 + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Portanto, o par ordenado $(1, 3)$ é solução desse sistema, e o conjunto solução é $S = \{(1, 3)\}$. E ainda, o ponto de interseção entre as retas é $(1, 3)$, e também pode ser visto através da representação gráfica da Figura 2.1.

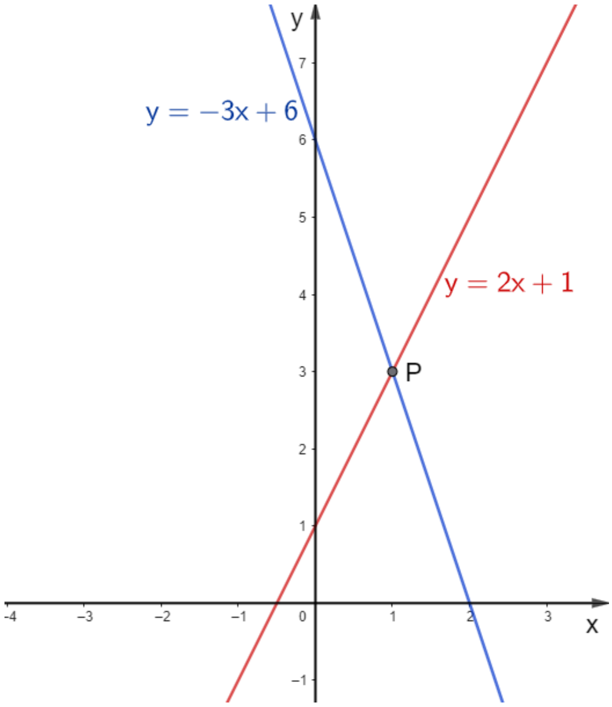

Figura 2.1: Representação gráfica

2.2 Matrizes como conhecimento epistemológico-matemático

O conceito de matrizes e determinantes tem indícios de surgimento no século IV aC [14]. Muitas dessas evidências indicam que o estudo da representação matricial, não como conhecemos hoje, surgiu juntamente com o estudo de sistemas de equações lineares. Essa hipótese surge pois existem alguns problemas babilônicos preservados em tábuas de argila. Esse problema data de 300 aC:

Há dois campos cuja área total é de 1800 jardas quadradas. O primeiro campo produz grãos a uma taxa de $\frac{2}{3}$ de um alqueire por jarda quadrada, enquanto o segundo campo produz grãos a uma taxa de $\frac{1}{2}$ de um alqueire por jarda quadrada. Se o rendimento total é de 1100 alqueires, qual é o tamanho de cada campo? (tradução do autor,[14])

Os historiadores datam o primeiro exemplo com a representação matricial e o seu método entre 200 aC. a 100 aC., visto no texto chinês da Dinastia Han, *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*. O problema proposto foi similar ao babilônico, dado por:

Existem três tipos de milho, dos quais três feixes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro perfazem 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro *perfazem 34 compassos. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro perfazem 26 compassos. Quantas medidas de milho cabem em um feixe de cada tipo? (tradução do autor,[14])*

Para solucionar, o autor usou o que chamou tábua de valores, e que hoje pode ser visto como uma matriz:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}.$$

O autor ainda instrui o leitor a multiplicar a coluna do meio por 3 e subtrair a coluna da direita tantas vezes quanto possível, o mesmo é feito subtraindo a coluna da direita tantas vezes quanto possível de 3 vezes a primeira coluna. E isso é o que conhecemos hoje como o método de Eliminação de Gauss, que se tornou conhecido somente no início do século XIX.

Neste trabalho temos o foco em sistemas de equações lineares de ordem 2. Para representá-los de forma matricial, precisamos de matrizes de ordem 2, e do tipo 2×1, as quais definimos a seguir.

Definição 1 *Uma matriz real A de ordem 2, ou do tipo 2×2, é uma tabela de números reais, chamados de elementos da matriz, com duas linhas e duas colunas:*

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

em que a, b, c e d são números reais.

Definição 2 *Uma matriz real B coluna é uma tabela com uma coluna. No caso em que B tem duas linhas, B é do tipo 2×1:*

$$B_{2,1} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

em que e e f são números reais.

A multiplicação entre duas matrizes reais tem como resultado uma matriz real. Para que seja possível efetuar a multiplicação, é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual o número de linhas da segunda matriz, e a matriz real resultante do produto terá o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz. Neste trabalho detalharemos a multiplicação de duas matrizes do tipo 2×2 e de uma matriz do tipo 2×2 por uma matriz do tipo 2×1.

Considere as matrizes reais A, B e C dadas por:

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B_{2,1} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, C_{2,2} = \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix}.$$

Multiplicando as matrizes A e C obtemos a matriz:

$$\begin{aligned} M_{2,2} &= A_{2,2} \cdot C_{2,2} \\ M_{2,2} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot g + b \cdot i & a \cdot h + b \cdot j \\ c \cdot g + d \cdot i & c \cdot h + d \cdot j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplicando as matrizes A e B obtemos a matriz:

$$\begin{aligned} P_{2,1} &= A_{2,2} \cdot B_{2,1} \\ P_{2,1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot f \\ c \cdot e + d \cdot f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em 1545, Cardan publicou em seu trabalho *Ars Magna*, uma regra para resolver um sistema de duas equações lineares. Essencialmente, as regras de Cardan, também chamadas de *regras de mãe*, nada mais são do que a regra de Cramer para resolver um sistema linear de duas equações. No entanto, Cardan não chegou ao conhecimento de determinante.

Vamos representar um sistema de equações lineares de ordem 2 na forma matricial. Considere então o sistema de equações lineares de ordem 2, nas incógnitas x e y, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, a e c, e b e d não ambos nulos.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}.$$

Sua representação matricial será:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

A matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ é a matriz dos termos independentes, e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ é a matriz das incógnitas.

Definição 3 *A matriz identidade de ordem 2 é a matriz $I_{2,2}$ ou I_2, ou simplesmente I, dada por:*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 4 *A matriz A, de ordem 2, tem como matriz inversa, caso exista, a matriz A^{-1}, também de ordem 2, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.*

Definição 5 *A potência da matriz real A, de ordem 2, é a matriz de ordem 2: $A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$, com n fatores, $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

Propriedade Dado uma matriz quadrada A, tem-se $A^{-n} = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Perceba que o sistema de equações lineares de ordem 2 representado na forma matricial pode ser resolvido também através da multiplicação pela matriz inversa dos coeficientes, à esquerda, dos dois lados.

2.3 Determinantes de matrizes de ordem 2

Definição 6 *Dada uma matriz real A, de ordem 2:*

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

em que a, b, c e d são números reais. O determinante da matriz real A é um número real, e é representado por

$$det_A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

obtido pela operação:

$$det_A = ad - bc.$$

Exemplo 4 *Considere a matriz A dada por:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

O determinante de A é o número:

$$det_A = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3$$
$$det_A = 5 - 6 = -1.$$

Teorema 1 *O determinante do produto de duas matrizes reais de ordem 2 é o produto dos determinantes de cada matriz.*

Demonstração: Considere as matrizes A e B, de ordem 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix},$$

em que $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$. Assim, temos que a matriz produto $A \cdot B$ é:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ae + bf & ag + bh \\ ce + df & cg + dh \end{pmatrix}.$$

E, ainda,

$$det_A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$det_B = \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = eh - fg,$$

$$det_{A \cdot B} = \begin{vmatrix} ae + bf & ag + bh \\ ce + df & cg + dh \end{vmatrix} = (ae + bf)(cg + dh) - (ag + bh)(ce + df).$$

Agora, observe que:

$$\begin{aligned}
det_{A\cdot B} &= (ae + bf)(cg + dh) - (ag + bh)(ce + df)\\
&= aecg + aedh + bfcg + bfdh - agce - agdf - bhce - bhdf\\
&= (aecg - agce) + aedh + bfcg + (bfdh - bhdf) - agdf - bhce\\
&= aedh + bfcg - agdf - bhce\\
&= adeh - adfg + bcfg - bceh\\
&= ad(eh - fg) - bc(eh - fg)\\
&= (ad - bc)(eh - fg)\\
&= det_A \cdot det_B.
\end{aligned}$$

■

A seguir apresentamos o teorema que utiliza determinantes para resolver um sistema linear, adaptado para sistemas de equações lineares de ordem 2.

Teorema 2 *[Teorema de Cramer]. Considere o sistema de equações lineares de ordem 2, nas incógnitas x e y, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, a e c, e b e d não ambos nulos, dado por:*

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}.$$

Seja D, D_1 e D_2 os determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}.$$

Se $D \neq 0$, esse sistema possui uma única solução, e os valores das incógnitas x e y podem ser obtidos através de:

$$x = \frac{D_1}{D},$$
$$y = \frac{D_2}{D}.$$

Observação 3: A solução obtida pelo Teorema 2 é exatamente a mesma obtida pelos outros três métodos descritos, uma vez que, calculando os determinantes D, D_1 e D_2, obtemos:

$$D = ad - bc,$$

$$D_1 = de - bf,$$

$$D_2 = af - ce.$$

Desse modo, quando $D \neq 0$, isto é, $ad - bc \neq 0$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_1}{D} \\ x &= \frac{de - bf}{ad - bc}, \\ y &= \frac{D_2}{D} \\ y &= \frac{af - ce}{ad - bc}. \end{aligned}$$

Veja agora, um sistema de equações lineares de ordem 2 resolvido aplicando o Teorema 2 .

Exemplo 5 *Considere o sistema de equações lineares:*

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -5x - 2y = 2 \end{cases}.$$

Temos a matriz dos coeficientes:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculando os determinantes obtemos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-5) \cdot 1 = -4 + 5 = 1.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = 0 - 2 = -2.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-5) \cdot 0 = 4 + 0 = 4.$$

Assim, como $D \neq 0$, pelo Teorema 2,

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_1}{D} = \frac{-2}{1} = -2, \\ y &= \frac{D_2}{D} = \frac{4}{1} = 4. \end{aligned}$$

E, portanto, o par ordenado $(-2, 4)$ é solução desse sistema, e o conjunto solução é $S = \{(-2, 4)\}$.

Capítulo 3

A sequência de Fibonacci e a BNCC

Neste capítulo faremos a introdução da sequência de Fibonacci e evidenciaremos sua importância como objeto de ensino. Para isso iremos introduzir todas as habilidades da BNCC relacionadas a padrões e sequências. Para a confecção desde capítulo utilizamos as referências [1, 3, 4, 11, 12, 17].

3.0.1 Padrões e Sequências na BNCC

Diferente de sistemas de equações lineares, padrões e sequências são bastante presentes na BNCC. Existem habilidades relacionadas a este tópico desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. As habilidades do Ensino Fundamental são: EF01MA09, EF01MA10, EF02MA09, EF02MA10, EF02MA11, EF03MA10, EF04MA11, EF04MA12, EF07MA14, EF07MA15, EF07MA16, EF08MA10 e EF08MA11, todas pertencentes à unidade temática Álgebra.

A seguir, listamos as habilidades do Ensino Médio relacionadas a padrões e sequências. Essas habilidades estão ligadas a uma competência, como descrito, retiradas da BNCC. Nesta listagem também aparece o objetos do conhecimento relacionados a essas habilidades. Essas informações complementares foram retiradas do Organizador Curricular de Mato Grosso do Sul - Ensino Médio.

1. **Habilidade:** (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

   Competência específica 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Objetos do Conhecimento: Funções afins e Sequências numéricas: progressões aritméticas (P.A.).

2. **Habilidade:** (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

   Competência específica 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

   Objetos do Conhecimento: Função exponencial: sequências numéricas (progressões geométricas).

Observe que a sequência de Fibonacci contempla todas as habilidades citadas e portanto, constitui um eficaz objeto de ensino.

3.0.2 Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci ficou conhecida através de um problema matemático publicado pelo italiano Leonardo de Pisa (1180-1250), também conhecido como Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo, Leonardo Fibonacci, ou ainda, simplesmente Fibonacci, que significa filho de Bonaccio. Fibonacci, após retornar de viagens pelo norte da África, publicou o famoso livro Liber Abaci (Livro do Ábaco) em 1202, um problema que gerou a famosa sequência foi descrito da seguinte forma:

O problema da reprodução dos coelhos. "Um homem colocou um par de filhotes de coelhos num lugar cercado. Quantos pares de coelho podem ser gerados a partir desse par em um ano se, em todo mês cada par gera um novo par de filhotes que se tornam adultos e férteis a partir do segundo mês de vida, considerando que nenhum coelho morre?"

Observe que no primeiro mês temos então um par de coelhos filhotes. No segundo mês, temos um par de coelhos adultos, que se reproduz, e assim, temos dois pares de coelhos no terceiro mês (um par de coelhos adultos e um par de filhotes). No quarto mês o primeiro par de coelhos se reproduz novamente, e o casal de filhotes se tornam adultos, logo temos três pares de coelhos (dois pares adultos e um par de filhotes). No quinto mês, teremos cinco pares de coelhos (três pares adultos e dois pares de filhotes). Este padrão se mantém até o último mês, gerando a sequência: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots)$.

Em termos de sequência recorrente temos a seguinte definição.

Definição 7 *Chama-se sequência de Fibonacci a sequência* $(f_n)_{n\geq 0}$ *em que os dois primeiros termos são 1 e os demais são obtidos pela soma dos dois termos anteriores, isto é:*

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

A sequência de Fibonacci, pode ser observada na natureza, como por exemplo na formação dos galhos de determinadas árvores, como mostra a Figura 3.1:

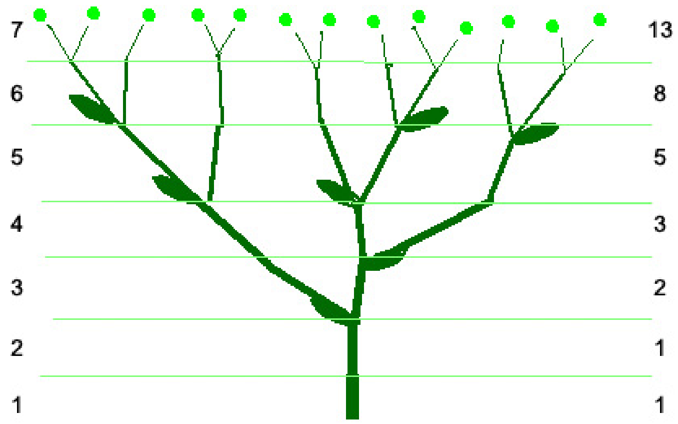

Figura 3.1: Formação de galhos

Fonte: https://fractalfoundation.org/OFC/OFC-11-1.html

Se tomarmos elementos da sequência de Fibonacci e dividirmos pelo respectivo termo anterior, obtemos: $\frac{1}{1} = 1, \frac{2}{1} = 2, \frac{3}{2} = 1,5, \frac{5}{3} = 1,666..., \frac{8}{5} = 1,6, \frac{13}{8} = 1,625, \frac{21}{13} = 1,61538..., \frac{34}{21} = 1,61904..., \frac{55}{34} = 1,61764..., \frac{89}{55} = 1,61818..., \frac{144}{89} = 1,61797..., \frac{233}{144} = 1,61805..., \frac{377}{233} = 1,61802....$ Podemos perceber que esses números se aproximam de um número, chamado número de ouro, o qual iremos obter pela razão áurea.

Definição 8 *Dizemos que um ponto C divide um segmento AB em média e extrema razão se a medida do mais longo dos segmentos é a média geométrica entre as medidas do menor* *e do segmento todo, isto é, considerando AC o mais longo dos segmentos, se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Definição 9 *Um segmento AB, com C dividindo AB em média e extrema razão, é denominado segmento áureo.*

Considere, então, um segmento áureo AB, de comprimento $a+b$, com C dividindo AB em média e extrema razão, como representado na Figura 3.2, com $\overline{AC}$, de comprimento a, sendo o mais longo dos segmentos.

Figura 3.2: Segmento Áureo

Desse modo, temos:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b},$$
$$a^2 = ab + b^2,$$
$$a^2 - ab - b^2 = 0.$$

Resolvendo essa equação quadrática na variável a, obtemos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2}, \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} b. \end{aligned}$$

Assim, encontramos dois valores para a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. O valor positivo é chamado de ϕ e é conhecido como número de ouro, e o negativo é chamado de ψ:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343656 4...,$$
$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,61803398874989484820458683436564....$$

Podemos observar que a parte decimal de ϕ e de ψ são iguais, e ainda, que $\psi = 1 - \phi$.

Definição 10 *O retângulo áureo é todo retângulo com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado cujo lado tem a medida do seu menor lado, o retângulo restante será semelhante ao original.*

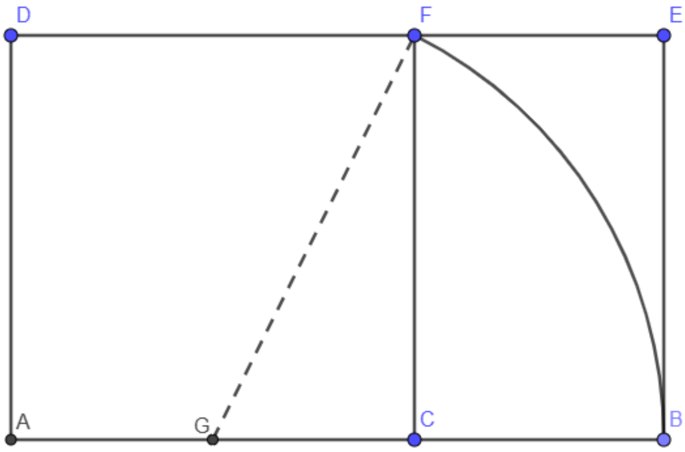

Figura 3.3: Retângulo Áureo

O retângulo áureo, como mostra a Figura 3.3, pode ser construído com os seguintes passos:

1. Construa um quadrado qualquer $ACFD$;
2. Marque o ponto G, ponto médio de AC;
3. Prolongue os segmentos AC e DF;
4. Com centro em G e raio GF, trace um arco de circunferência e marque o ponto B na sua interseção com o prolongamento de AC;
5. Trace um reta perpendicular a AB, passando por B, e marque o ponto E na interseção com o prolongamento de DF;
6. O retângulo $ABED$ é um retângulo áureo.

Podemos ainda construir a espiral Fibonacci, representada na Figura 3.4, a partir do retângulo áureo. Ao suprimir um quadrado cujo lado tem a medida do lado menor do retângulo áureo, o novo retângulo formado também é áureo. Repetindo o processo e traçando arcos de 90° nos quadrados de cada retângulo áureo, obtém-se a espiral.

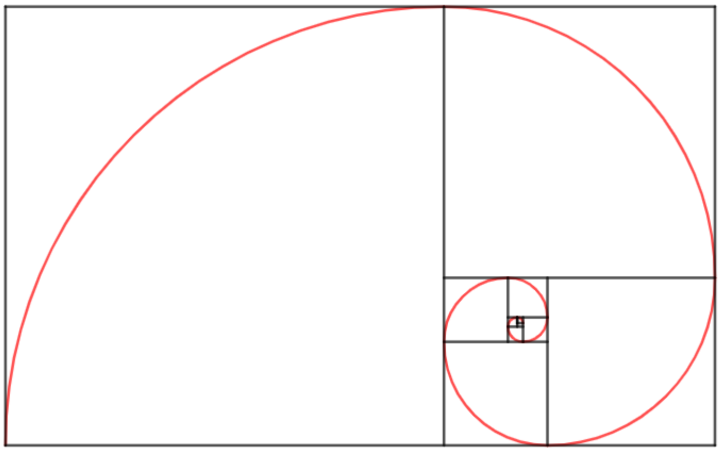

Figura 3.4: Espiral Fibonacci

Além de tudo isso, podemos observar uma relação entre as potências do número de ouro ϕ e a sequência de Fibonacci:

- $\phi^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi = f_1 + f_2 \cdot \phi$
- $\phi^3 = \phi^2 \cdot \phi = (1+\phi) \cdot \phi = \phi + \phi^2 = \phi + 1 + \phi = 1 + 2\phi = f_2 + f_3 \cdot \phi$
- $\phi^4 = \phi^3 \cdot \phi = (1+2\phi) \cdot \phi = \phi + 2\phi^2 = \phi + 2 + 2\phi = 2 + 3\phi = f_3 + f_4 \cdot \phi$
- $\phi^5 = \phi^4 \cdot \phi = (2+3\phi) \cdot \phi = 2\phi + 3\phi^2 = 2\phi + 3 + 3\phi = 3 + 5\phi = f_4 + f_5 \cdot \phi$
- $\phi^6 = \phi^5 \cdot \phi = (3+5\phi) \cdot \phi = 3\phi + 5\phi^2 = 3\phi + 5 + 5\phi = 5 + 8\phi = f_5 + f_6 \cdot \phi$

Esta relação pode ser estabelecida através do resultado a seguir.

Teorema 3 *Para qualquer $n \geq 2$, vale a igualdade:*

$$\phi^n = f_{n-1} + f_n \cdot \phi,$$

em que $f_i, i = 1, 2, 3, ...$ é o i-ésimo número de Fibonacci.

Demonstração: A prova deste teorema faremos por indução sobre n. Para $n = 2$, temos $\phi^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi = f_1 + f_2 \cdot \phi$. Suponhamos agora que vale para $n = k$, isto é, $\phi^k = f_{k-1} + f_k \cdot \phi$ e mostraremos que vale também para $n = k + 1$:

$\phi^{k+1} = \phi^k \cdot \phi = (f_{k-1} + f_k \cdot \phi) \cdot \phi = f_{k-1} \cdot \phi + f_k \cdot \phi^2 = f_{k-1} \cdot \phi + f_k + f_k \cdot \phi = f_k + (f_{k-1} + f_k) \cdot \phi = f_k + f_{k+1} \cdot \phi$. ∎

Observe o que acontece quando elevamos um número de Fibonacci ao quadrado e subtraímos pelo resultado da multiplicação de seus adjacentes:

- $1^2 - 1 \cdot 2 = 1 - 2 = -1$
- $2^2 - 1 \cdot 3 = 4 - 3 = 1$
- $3^2 - 2 \cdot 5 = 9 - 10 = -1$
- $5^2 - 3 \cdot 8 = 25 - 24 = 1$
- $8^2 - 5 \cdot 13 = 64 - 65 = -1$
- $13^2 - 8 \cdot 21 = 169 - 168 = 1$

Perceba que iniciamos por $f_2 = 1$, mas poderíamos ter iniciado por $f_1 = 1$, considerando $f_0 = 0$, conveniência esta que será adotada em outras ocasiões. Esse padrão que podemos notar pode ser expresso de forma geral através da Identidade de Cassini [17], que leva este nome em homenagem a Giovanni Domenico Cassini (1625-1712), e que enunciamos a seguir.

Teorema 4 *Identidade de Cassini. A diferença entre o quadrado de qualquer número de Fibonacci f_n e o produto de seus dois números adjacentes f_{n-1} e f_{n+1} é sempre 1 ou -1. O sinal depende do índice n do número f_n. Se n é par, o sinal é negativo, e se n é ímpar, positivo, isto é:*

$$f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Demonstração: A demonstração deste teorema será feita por indução sobre n. Para $n = 1$, temos: $f_1^2 - f_{1-1} \cdot f_{1+1} = f_1^2 - f_0 \cdot f_2 = 1^2 - 0 \cdot 1 = 1 = (-1)^{1+1}$. Suponhamos válida para $n = k$, isto é, $f_k^2 - f_{k-1} \cdot f_{k+1} = (-1)^{k+1}$. Para $n = k + 1$, temos:

$$\begin{aligned}
f_{k+1}^2 - f_{k+1-1} \cdot f_{k+1+1} =& f_{k+1}^2 - f_k \cdot f_{k+2} \\
=& f_{k+1}^2 - f_k \cdot (f_k + f_{k+1}) \\
=& f_{k+1}^2 - f_k^2 - f_k \cdot f_{k+1} \\
=& f_{k+1} \cdot (f_{k+1} - f_k) - f_k^2 \\
=& f_{k+1} \cdot (f_{k-1} + f_k - f_k) - f_k^2 \\
=& f_{k+1} \cdot f_{k-1} - f_k^2 \\
=& (-1) \cdot (f_k^2 - f_{k-1} \cdot f_{k+1}) = (-1) \cdot (-1)^{k+1} = (-1)^{(k+1)+1},
\end{aligned}$$

Logo a igualdade é válida para todo n.

■

Observe que a identidade de Cassini é o determinante,

$$\begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n-1} & f_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}.$$

Desta forma, identidades para sequências podem ser procuradas através do estudo matricial.

Os números de Fibonacci também satisfazem outras identidades, a Identidade de Catalan, a Identidade de d'Ocagne, e a Identidade de Honsberger, em homenagem respectivamente a Eugène Charles Catalan (1814-1894), a Philbert Maurice d'Ocagne (1862-1938) e a Ross Honsberger (1929-2016), veja mais em [1].

Teorema 5 *Identidade de Catalan. Generalização da Identidade de Cassini para* $n \geq r \geq 1$*:*

$$f_n^2 - f_{n+r} \cdot f_{n-r} = (-1)^{n-r} \cdot f_r^2.$$

Teorema 6 *Identidade de d'Ocagne. Generalização da Identidade de Cassini para* $m \geq n \geq 1$*:*

$$f_{m+1} \cdot f_n - f_m \cdot f_{n+1} = (-1)^m \cdot f_{n-m}.$$

Teorema 7 *Identidade de Honsberger. Para* $m, n \geq 1$*:*

$$f_{n+m+1} = f_{n+1} \cdot f_{m+1} + f_n \cdot f_m.$$

Demonstração: A prova desta identidade faremos por indução sobre n. Para $n = 1$, temos:

$$\begin{aligned} f_{n+1} \cdot f_{m+1} + f_n \cdot f_m &= f_2 \cdot f_{m+1} + f_1 \cdot f_m \\ &= 1 \cdot f_{m+1} + 1 \cdot f_m \\ &= f_{m+2} \\ &= f_{n+m+1}, \forall m \geq 1. \end{aligned}$$

E, para $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} f_{n+1} \cdot f_{m+1} + f_n \cdot f_m =& f_3 \cdot f_{m+1} + f_2 \cdot f_m \\ =& 2 \cdot f_{m+1} + 1 \cdot f_m \\ =& f_{m+1} + f_{m+1} + f_m \\ =& f_{m+1} + f_{m+2} \\ =& f_{m+3} \\ =& f_{n+m+1}, \forall m \geq 1. \end{aligned}$$

Suponhamos agora, que a identidade é válida para $n = k - 1$ e para $n = k$, isto é: $f_{k+m} = f_k \cdot f_{m+1} + f_{k-1} \cdot f_m, \forall m \geq 1$, e $f_{k+m+1} = f_{k+1} \cdot f_{m+1} + f_k \cdot f_m, \forall m \geq 1$. Assim, para $n = k + 1$, temos:

$$\begin{aligned} f_{n+1} \cdot f_{m+1} + f_n \cdot f_m =& f_{k+2} \cdot f_{m+1} + f_{k+1} \cdot f_m \\ =& (f_{k+1} + f_k) \cdot f_{m+1} + (f_{k-1} + f_k) \cdot f_m \\ =& f_{k+1} \cdot f_{m+1} + f_k \cdot f_{m+1} + f_{k-1} \cdot f_m + f_k \cdot f_m \\ =& (f_k \cdot f_{m+1} + f_{k-1} \cdot f_m) + (f_{k+1} \cdot f_{m+1} + f_k \cdot f_m) \\ =& f_{k+m} + f_{k+m+1} \\ =& f_{k+m+2} \\ =& f_{n+m+1}, \forall m \geq 1. \end{aligned}$$

Portanto, uma vez que vale para $n = k+1$, pelo Princípio de Indução, segue que $f_{n+m+1} = f_{n+1} \cdot f_{m+1} + f_n \cdot f_m, \forall m, m \geq 1$.

■

Existem inúmeras identidades e generalizações para os números de Fibonacci (veja mais em [11, 20]).

3.0.3 A sequência de Fibonacci como objeto de ensino

A humanidade procura padrões e formas para descrever seu meio. Nesse contexto, o ser humano ao observar um fenômeno tenta descrevê-lo dentro de algum padrão já existente. Historicamente, a sequência de Fibonacci é a solução para o primeiro modelo discreto populacional existente. Este fato faz com que essa sequência pode ser levada a sala de aula sem muitas complicações pois sua problemática é simples e sua solução matemática é palpável. Do estudo dessa sequência podemos desenvolver vários objetos de ensino como o pensamento computacional, uso de fluxogramas, interpretações via ladrilhamento [11, 20, 22]. Para o pensamento computacional, a sequência recorrente pode ser facilmente trabalhada via excel ou linguagem de programação.

Veja na Figura 3.5 como descrever a sequência via excel.

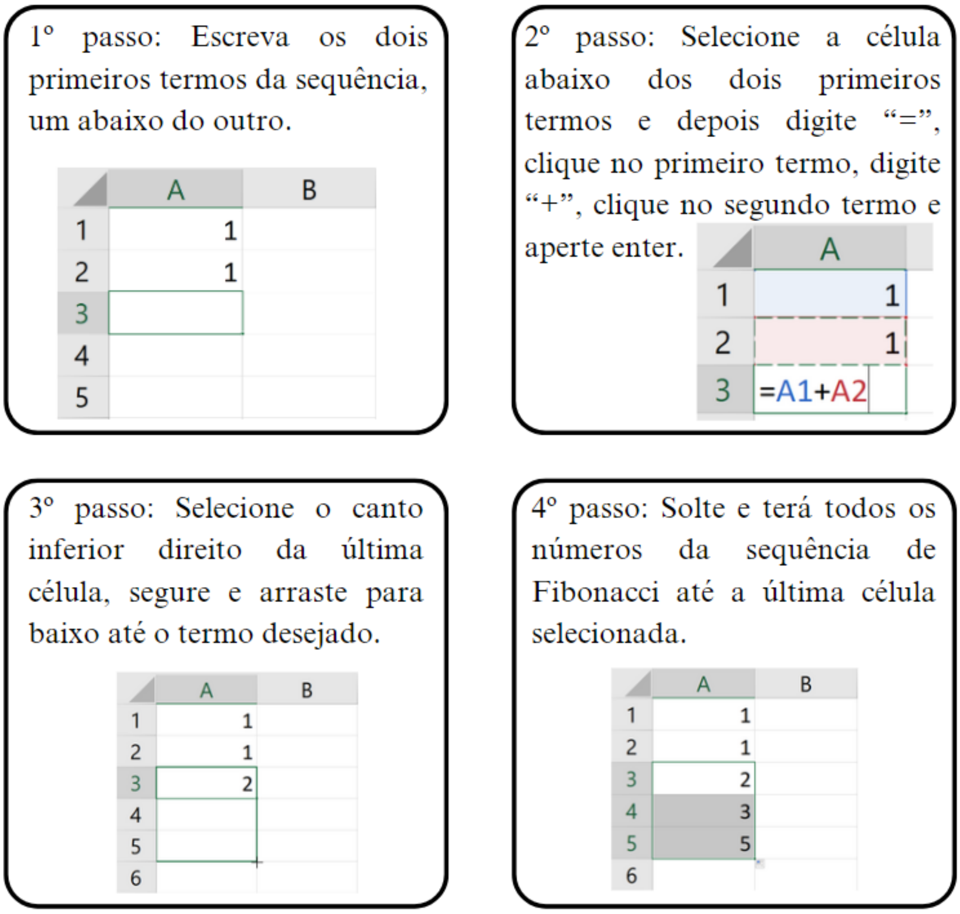

Figura 3.5: Sequência de Fibonacci via excel

Através destes passos, é possível, por exemplo, determinar, de forma rápida, F_{50}, como mostra a Figura 3.6.

	A
46	1836311903
47	2971215073
48	4807526976
49	7778742049
50	12586269025
51	20365011074

Figura 3.6: F_{50} via excel

Ao utilizar essa ferramenta em sala de aula, seguindo os passos, os estudantes podem observar o fato de que para obter o enésimo número de Fibonacci ou de qualquer outra sequência recorrente, se n for muito grande, demanda saber seus termos anteriores e portanto, pode ser difícil até para um computador. Assim, determinar fórmulas fechadas e identidades facilitam o trabalho.

Capítulo 4

Uma aplicação: Códigos de Fibonacci

Neste capítulo iremos apresentar uma aplicação que conecta sistemas de equações lineares, matrizes e determinantes, com a sequência de Fibonacci. Essa conexão será feita através dos códigos de Fibonacci. Para a confecção deste capítulo utilizamos as referências [2, 9, 21].

4.1 Um pouco sobre Códigos Corretores de Erros

O esquema representado na Figura 4.1 mostra como funciona um sistema de comunicação.

Figura 4.1: Sistema de comunicação

Percebemos que a mensagem percorre diversos caminhos, e por isso, há a possibilidade de que a mensagem enviada não seja a mesma mensagem recebida. Em alguns casos o receptor conseguirá identificar e corrigir os erros da mensagem, em outros, conseguirá apenas identificar, e em outros ainda, não perceberá erros.

Ao ir ao supermercado, os operadores de caixa normalmente solicitam que você diga ou digite seu CPF (Cadastro de Pessoas Físicas) para a nota fiscal eletrônica. Algumas vezes, você ou o operador comete um erro, e lhe é solicitado que refaça o processo. Já se perguntou por que a máquina sabe que este não é o seu CPF, ou melhor, por que o número digitado não é um CPF? Isto acontece pois o CPF não é um simples número aleatório de

11 dígitos, é um código com várias informações inseridas nele, de modo que determinados números de 11 dígitos não sejam CPFs. Os últimos dois dígitos servem inclusive para verificar se não há erros. Veja mais em [16]. Outro exemplo de códigos que são capazes de identificar erros são os códigos de barras.

A Teoria dos Códigos Corretores de Erros busca códigos que são capazes de detectar e corrigir erros de forma econômica. Apresentamos os códigos de Fibonacci.

4.2 Códigos de Fibonacci

Nesta seção apresentamos os códigos de Fibonacci, começando pela matriz de Fibonacci, que será fundamental para a codificação, sua inversa para a decodificação, entre outros conceitos, seguindo para o método de codificação e de decodificação de Fibonacci, e finalizando com a correção de erros.

4.2.1 Matriz de Fibonacci

Definição 11 *A partir da sequência de Fibonacci, definida por $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall n \geq 1$, com $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, tem-se a matriz de Fibonacci:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desse modo,

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix}.$$

E ainda,

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 8 *A potência da matriz de Fibonacci M é:*

$$M^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \geq 1,$$

e seu determinante é $det_{M^n} = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$.

Demonstração: A prova da primeira parte deste teorema faremos por indução sobre n. A segunda parte (determinante) segue do Teorema 4 (Identidade de Cassini). Para $n = 1$, temos:

$$M^1 = \begin{pmatrix} f_{1+1} & f_1 \\ f_1 & f_{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que seja válida para $n = k$, isto é:

$$M^k = \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Para $n = k + 1$, temos:

$$M^k \cdot M = \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+1} + f_k & f_{k+1} \\ f_k + f_{k-1} & f_k \end{pmatrix}.$$

Pela definição da sequência de Fibonacci, segue que:

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} + f_k & f_{k+1} \\ f_k + f_{k-1} & f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{(k+1)+1} & f_{(k+1)} \\ f_{(k+1)} & f_{(k+1)-1} \end{pmatrix} = M^{k+1}.$$

Portanto, $\forall n \geq 1$,

$$M^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

■

Definição 12 *Chama-se sequência de negaFibonacci a extensão da sequência de Fibonacci para índices negativos pela relação:* $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n, n \geq 1$, *de modo que* $f_{-(n+1)} = -f_{-n} + f_{-(n-1)}, \forall n \geq 1$. $f_{-1} = 1$, $f_{-2} = -1$, $f_{-3} = 2$, $f_{-4} = -3$, $f_{-5} = 5$, $f_{-6} = -8$, $f_{-7} = 13$, $f_{-8} = 21, \ldots$

Definição 13 *A partir da sequência de negaFibonacci, tem-se a matriz de negaFibonacci:*

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 9 *A potência da matriz de negaFibonacci N é:*

$$N^n = \begin{pmatrix} f_{-(n+1)} & f_{-n} \\ f_{-n} & f_{-(n-1)} \end{pmatrix}, \forall n \geq 1,$$

e seu determinante é $det_{N^n} = f_{-(n+1)} f_{-(n-1)} - f_{-n}^2 = (-1)^n$.

A demonstração é análoga a do Teorema 8.

Teorema 10 *A potência da matriz M de Fibonacci, para expoente negativo é:*

- *Se $n > 0$ é par, então*

$$M^{-n} = \begin{pmatrix} f_{n-1} & -f_n \\ -f_n & f_{n+1} \end{pmatrix};$$

- *Se $n > 0$ é ímpar, então*

$$M^{-n} = \begin{pmatrix} -f_{n-1} & f_n \\ f_n & -f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Seja M^{-n} a matriz:

$$M^{-n} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Aplicando a propriedade de potência da matriz inversa, em que $A^{-n} = (A^n)^{-1}$, e a definição de matriz inversa, segue que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a \cdot f_{n+1} + b \cdot f_n = 1 \\ a \cdot f_n + b \cdot f_{n-1} = 0 \\ c \cdot f_{n+1} + d \cdot f_n = 0 \\ c \cdot f_n + d \cdot f_{n-1} = 1 \end{cases}.$$

A partir da Identidade de Cassini, $f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (-1)^{n+1}$, temos:

- se n é par, $1 = f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2$. Logo, $a = f_{n-1}$ e $b = -f_n$ satisfazem as duas primeiras equações do sistema, e $c = -f_n$ e $d = f_{n+1}$ satisfazem as duas últimas equações, e então:

$$M^{-n} = \begin{pmatrix} f_{n-1} & -f_n \\ -f_n & f_{n+1} \end{pmatrix};$$

- se n é ímpar, $1 = f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1}$. Logo, $a = -f_{n-1}$ e $b = f_n$ satisfazem as duas primeiras equações do sistema, e $c = f_n$ e $d = -f_{n+1}$ satisfazem as duas últimas equações, e então:
$$M^{-n} = \begin{pmatrix} -f_{n-1} & f_n \\ f_n & -f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

∎

As matrizes M^n e M^{-n} são essenciais para o método de codificação e decodificação de Fibonacci que apresentamos a seguir.

4.2.2 Método de Codificação e Decodificação de Fibonacci

Considere uma mensagem dada em uma matriz B de ordem 2, com entradas inteiras positivas:
$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$
O processo de codificação é dado por $C = B \cdot M^n$, em que M^n é a potência da matriz de Fibonacci, e C é a matriz código. Assim,
$$C = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$
e o processo de decodificação é dado por $B = C \cdot M^{-n}$, isto é:
$$B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \cdot M^{-n}.$$
Desse modo, o processo de decodificação se divide em dois casos, um para n par e outro para n ímpar.

- n par:
$$B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n-1} & -f_n \\ -f_n & f_{n+1} \end{pmatrix},$$
ou ainda,
$$\begin{cases} b_1 = c_1 \cdot f_{n-1} - c_2 \cdot f_n \\ b_2 = -c_1 \cdot f_n + c_2 \cdot f_{n+1} \\ b_3 = c_3 \cdot f_{n-1} - c_4 \cdot f_n \\ b_4 = -c_3 \cdot f_n + c_4 \cdot f_{n+1} \end{cases}.$$

Como os elementos da matriz B são inteiros positivos,

$$\begin{cases} b_1 = c_1 \cdot f_{n-1} - c_2 \cdot f_n > 0 \\ b_2 = -c_1 \cdot f_n + c_2 \cdot f_{n+1} > 0 \\ b_3 = c_3 \cdot f_{n-1} - c_4 \cdot f_n > 0 \\ b_4 = -c_3 \cdot f_n + c_4 \cdot f_{n+1} > 0 \end{cases}.$$

A partir da primeira equação do sistema $c_1 \cdot f_{n-1} - c_2 \cdot f_n > 0$, temos:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot f_{n-1} - c_2 \cdot f_n &> 0 \\ c_1 \cdot f_{n-1} &> c_2 \cdot f_n \\ c_1 &> c_2 \cdot \frac{f_n}{f_{n-1}} \end{aligned}.$$

E, da segunda equação $-c_1 \cdot f_n + c_2 \cdot f_{n+1} > 0$, segue:

$$\begin{aligned} -c_1 \cdot f_n + c_2 \cdot f_{n+1} &> 0 \\ c_2 \cdot f_{n+1} &> c_1 \cdot f_n. \\ c_2 \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n} &> c_1 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} c_2 \cdot \frac{f_n}{f_{n-1}} < c_1 < c_2 \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n} \\ \frac{f_n}{f_{n-1}} < \frac{c_1}{c_2} < \frac{f_{n+1}}{f_n} \end{aligned}.$$

De forma análoga, da terceira e da quarta equação segue que

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} < \frac{c_3}{c_4} < \frac{f_{n+1}}{f_n}.$$

E, como a razão entre um número de Fibonacci e seu antecessor converge para ϕ, segue que $c_1 \approx \phi c_2$ e $c_3 \approx \phi c_4$.

- n ímpar:

$$B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -f_{n-1} & f_n \\ f_n & -f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Como os elementos da matriz B são inteiros positivos, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} b_1 = -c_1 \cdot f_{n-1} + c_2 \cdot f_n > 0 \\ b_2 = c_1 \cdot f_n - c_2 \cdot f_{n+1} > 0 \\ b_3 = -c_3 \cdot f_{n-1} + c_4 \cdot f_n > 0 \\ b_4 = c_3 \cdot f_n - c_4 \cdot f_{n+1} > 0 \end{cases}.$$

De forma análoga ao caso n par, segue das duas primeiras linhas:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} < \frac{c_1}{c_2} < \frac{f_n}{f_{n-1}},$$

e das duas últimas linhas:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} < \frac{c_3}{c_4} < \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

E então, $c_1 \approx \phi c_2$ e $c_3 \approx \phi c_4$.

Observe que as aproximações $c_1 \approx \phi c_2$ e $c_3 \approx \phi c_4$, dependem de n. Portanto, quanto maior o valor de n, o quociente $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ tem maior aproximação de ϕ (aproximado por mais casas decimais) e portanto melhor será as aproximações $c_1 \approx \phi c_2$ e $c_3 \approx \phi c_4$.

4.2.3 Correção de Erros

Vamos agora mostrar como verificar e corrigir erros dos códigos de Fibonacci. A verificação será feita através do determinante, pelo Teorema 1. Assim, no caso em que não há erros, deve ocorrer $det_C = det_{M^n} \cdot det_B$, isto é, pela Identidade de Cassini (Teorema 4), $det_C = (-1)^n \cdot det_B$. Considere a possibilidade de erro em uma das entradas da matriz código C. Temos então quatro possibilidades:

$$\begin{pmatrix} x & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & y \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ z & c_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & w \end{pmatrix},$$

em que x, y, z, w representam os erros. Assim,

$$\begin{cases} xc_4 - c_2c_3 = (-1)^n \cdot det_B \\ c_1c_4 - yc_3 = (-1)^n \cdot det_B \\ c_1c_4 - c_2z = (-1)^n \cdot det_B \\ c_1w - c_2c_3 = (-1)^n \cdot det_B \end{cases},$$

de modo que x, y, z, w podem ser determinados por:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(-1)^n \cdot det_B + c_2c_3}{c_4} \\ y = \dfrac{-(-1)^n \cdot det_B + c_1c_4}{c_3} \\ z = \dfrac{-(-1)^n \cdot det_B + c_1c_4}{c_2} \\ w = \dfrac{(-1)^n \cdot det_B + c_2c_3}{c_1} \end{cases}.$$

Agora, temos seis possibilidades para o caso em que a matriz código apresenta erro em duas de suas entradas, observe:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ z & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & c_2 \\ z & c_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & y \\ c_3 & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & c_2 \\ c_3 & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & y \\ z & c_4 \end{pmatrix},$$

em que x, y, z, w representam os erros.

Essas seis possibilidades podem ainda ser separadas em dois grupos:

i. Erros na mesma linha:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ z & w \end{pmatrix}.$$

Nestas duas possibilidades, ao calcular o determinante, obtemos:

$$\begin{cases} xc_4 - yc_3 = (-1)^n \cdot det_B, \\ c_1w - c_2z = (-1)^n \cdot det_B, \end{cases}$$

que são equações com infinitas soluções. Para determinar os elementos x, y, z, w, utilizamos então as relações $c_1 \approx \phi c_2$ e $c_3 \approx \phi c_4$, que nos dá $x \approx \phi y$ e $z \approx \phi w$. Consideramos também que os elementos da matriz código são números inteiros.

ii. Erros em linhas distintas:

$$\begin{pmatrix} x & c_2 \\ z & c_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & y \\ c_3 & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & c_2 \\ c_3 & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & y \\ z & c_4 \end{pmatrix}.$$

Em todos esses, basta considerar que $c_1 \approx \phi c_2$ e $c_3 \approx \phi c_4$, e que os elementos c_1, c_2, c_3, c_4 são números inteiros.

Considerando agora o caso em que a matriz código apresenta três erros, temos quatro possibilidades:

$$\begin{pmatrix} c_1 & y \\ z & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & c_2 \\ z & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ c_3 & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & c_4 \end{pmatrix}.$$

Em todas essas possibilidades, utilizamos a relação $c_1 \approx \phi c_2$, ou a relação $c_3 \approx \phi c_4$, junto do fato de que os elementos da matriz código são números inteiros para determinar o elemento que está na mesma linha do elemento sem erro. Em seguida, a matriz passa a ser do grupo (i) anterior.

Por fim, o caso em que a matriz apresenta erro em todas as entradas é incorrigível. Desse modo, dos 15 erros possíveis, sendo 4 simples, 6 duplos, 4 triplos, e 1 total, 14 podem ser corrigidos.

Embora possíveis de serem corrigidos, os erros duplos e triplos demandam de vários processos para localizar as coordenadas com erro para então corrigi-las. Assim, apresentamos na Figura 4.2 um fluxograma que mostra como detectar e corrigir apenas erros simples, seguido de exemplos de sua aplicação.

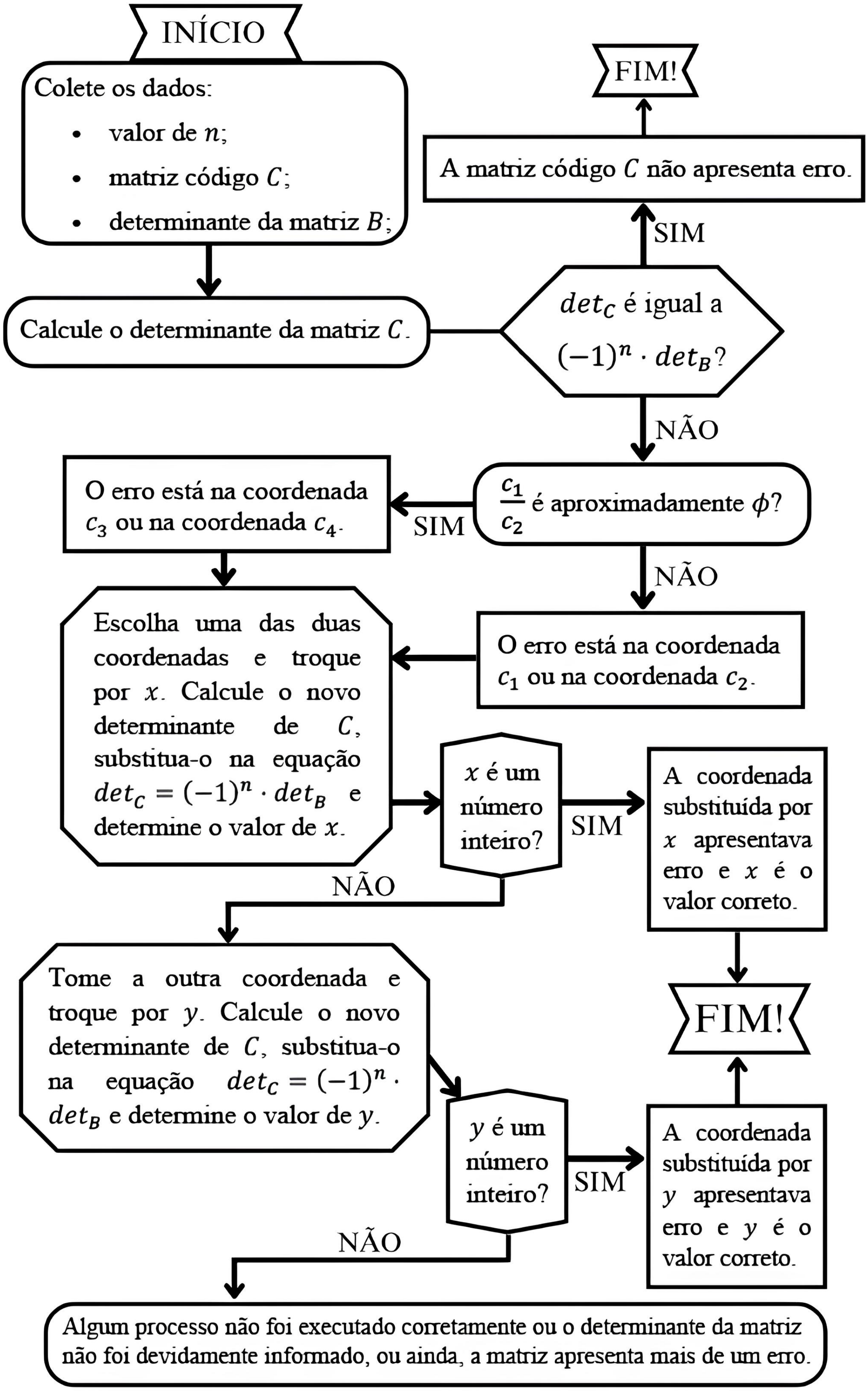

Figura 4.2: Fluxograma

Exemplo 6 *Considere uma mensagem dada em uma matriz B, de coordenadas inteiras, codificada pelos códigos de Fibonacci de $n = 15$. O determinante de B é $det_B = 2$ e a matriz código recebida C é dada por:*

$$C = \begin{pmatrix} 26018 & 16080 \\ 29822 & 18431 \end{pmatrix}.$$

A partir desses dados podemos verificar se a matriz código apresenta erros calculando seu determinante, observe:

$$det_C = 26018 \cdot 18431 - 29822 \cdot 16080$$

$$det_C = 479537758 - 479537760 = -2.$$

Como $det_C = (-1)^{15} \cdot det_B$, a matriz código não apresenta erros.

Exemplo 7 *Considere uma mensagem dada em uma matriz B, de coordenadas inteiras, codificada pelos códigos de Fibonacci de $n = 10$. O determinante de B é $det_B = -6$ e a matriz código recebida C é dada por:*

$$C = \begin{pmatrix} 288 & 178 \\ 400 & 254 \end{pmatrix}.$$

A partir desses dados podemos verificar se a matriz código apresenta erros calculando seu determinante, observe:

$$det_C = 288 \cdot 254 - 400 \cdot 178$$

$$det_C = 73152 - 71200 = 1952.$$

Como $det_C \neq (-1)^{10} \cdot det_B$, a matriz código apresenta erro.

Vamos agora verificar se a matriz C apresenta erro na primeira linha. Temos então, $\frac{288}{178} = 1,6179...$, que é bem próximo de ϕ, o que indica que o erro está na segunda linha. Desse modo, vamos trocar a coordenada c_3 por x e calcular o novo determinante de C, *para então determinar o valor de x pela igualdade $det_C = (-1)^n \cdot det_B$. Seja:*

$$C = \begin{pmatrix} 288 & 178 \\ x & 254 \end{pmatrix}.$$

$$det_C = 288 \cdot 254 - x \cdot 178$$

$$det_C = 73152 - 178x$$

$$det_C = (-1)^{10} \cdot det_B$$

$$73152 - 178x = -6$$

$$73152 + 6 = 178x$$

$$x = \frac{73158}{178} = 411.$$

Como o valor de x é um número inteiro, o erro estava na coordenada c_3 e deve ser corrigido por x.

Exemplo 8 *Considere uma mensagem dada em uma matriz B, de coordenadas inteiras, codificada pelos códigos de Fibonacci de $n = 12$. O determinante de B é $det_B = 26$ e a matriz código recebida C é dada por:*

$$C = \begin{pmatrix} 3304 & 2024 \\ 23183 & 14328 \end{pmatrix}.$$

A partir desses dados podemos verificar se a matriz código apresenta erros calculando seu determinante. Observe:

$$det_C = 3304 \cdot 14328 - 23183 \cdot 2024$$

$$det_C = 47339712 - 46922392 = 417320.$$

Como $det_C \neq (-1)^{12} \cdot det_B$, a matriz código apresenta erro.

Vamos agora verificar se a matriz C apresenta erro na primeira linha. Temos então para $n = 12$, o quociente $\frac{f_{13}}{f_{12}} = 1,61805$ tem aproximação de 4 casas decimais, logo, $\frac{3304}{2024} = 1,6324...$, que não é tão próximo de ϕ, indica que o erro está nesta linha. Desse modo, vamos trocar a coordenada c_1 por x e calcular o novo determinante de C, para *então determinar o valor de x pela igualdade $det_C = (-1)^n \cdot det_B$. Seja:*

$$C = \begin{pmatrix} x & 2024 \\ 23183 & 14328 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} det_C &= x \cdot 14328 - 23183 \cdot 2024 \\ det_C &= 14328x - 46922392 \\ det_C &= (-1)^{12} \cdot det_B \\ 14328x - 46922392 &= 26 \\ 14328x &= 26 + 46922392 \\ x &= \frac{46922418}{14328} \\ x &= 3274,8756.... \end{aligned}$$

Como o valor de x não é um número inteiro, o erro deve estar na coordenada c_2, logo devemos trocar c_2 por y e repetir o processo. Considere:

$$C = \begin{pmatrix} 3304 & y \\ 23183 & 14328 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} det_C &= 3304 \cdot 14328 - 23183 \cdot y \\ det_C &= 47339712 - 23183y \\ det_C &= (-1)^{12} \cdot det_B \\ 47339712 - 23183y &= 26 \\ 47339712 - 26 &= 23183y \\ y &= \frac{47339686}{23183} \\ y &= 2042. \end{aligned}$$

E, como o valor de y é um número inteiro, o erro estava na coordenada c_2 e deve ser corrigido por y.

4.3 Sugestões e possibilidades

Os códigos de Fibonacci podem ser apresentados mesmo no Ensino Médio. Sugere-se que se inicie através da sequência de Fibonacci ao trabalhar as habilidades da BNCC envolvendo padrões e sequências, e isso pode ser feito até mesmo nos anos finais do

Ensino Fundamental. Sua introdução pode ser feita através do problema da reprodução dos coelhos apresentado no capítulo 3.

Além disso, é importante destacar que a sequência de Fibonacci não é uma sequência finita, e isso pode ficar claro ao se utilizar do Excel, de modo que ao fazer como mostra o passo a passo (Figura 3.5) pois será sempre possível determinar linhas mais abaixo. Esse passo a passo pode também ser adaptado para outras sequências, principalmente para as progressões aritméticas e geométricas que são objetos de conhecimento que estão diretamente relacionados às habilidades que envolvem padrões e sequências no Ensino Médio.

Uma vez tendo o conhecimento da sequência de Fibonacci, ao trabalhar a habilidade que tem sistemas de equações lineares de ordem 2 como objeto de conhecimento, o estudo pode ser estendido para matrizes e determinantes e então pode ser desenvolvido uma atividade envolvendo os códigos de Fibonacci. O fluxograma da Figura 4.2 pode inclusive servir como material de apoio, assim como os exemplos que os segue. Vale ressaltar que o processo de codificação pode ser feito com qualquer potência da matriz de Fibonacci, mas quanto maior o valor de n, o quociente $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ tem maior aproximação de ϕ e portanto melhor será as aproximações $c_1 \approx \phi c_2$ e $c_3 \approx \phi c_4$. Assim, o ideal é que se use $n \geq 10$.

Capítulo 5

Conclusão

Este trabalho apresentou uma aplicação de códigos lineares corretores de erros usando a sequência de Fibonacci, unindo sistemas de equações lineares de ordem 2 e sequências numéricas.

No Capítulo 2 introduzimos os sistemas de equações lineares de ordem 2, apresentando, de forma didática, três de seus métodos de resolução: Substituição, Adição e Comparação. Além disso, utilizando um pouco de História da Matemática, introduzimos o conceito de representação matricial e determinante associados ao sistema de equações lineares de ordem 2.

No Capítulo 3 introduzimos as sequências de Fibonacci e descrevemos essa sequência como um objeto de ensino alinhado às competências e habilidades presentes na BNCC.

O Capítulo 4 apresenta uma aplicação: os códigos corretores de erros com sequências numéricas. Essa aplicação pode ser trabalhada no Ensino Médio, como mostra a seção 4.3. A aplicação apresentada pode ser estendida e trabalhada várias sequências numéricas [19].

Temos uma possibilidade para o ensino de matrizes e determinantes como um aprofundamento da habilidade EM13MAT301. Esperamos que este trabalho promova uma reflexão sobre a necessidade de se propor o ensino destes objetos do conhecimento importantes para a área de exatas como um todo.

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, F.R.V., OLIVEIRA, R.R. *Sobre o modelo de Fibonacci na variável complexa: identidades generalizadas*, Revista eletrônica Paulista de Matemática, 2017. Disponível em: `https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v11a08-sobre-o-modelo-de-fibonacci---francisco.pdf`. Acesso em 24 jan. 2025.

[2] ANDRADE A. A., FERRARI, A. J., Codigos lineares via sequências de Fibonacci, Anais do SBRT 2017 – Simpósio Brasileiro de Radiofrequência e Telecomunicações, São Pedro, SP, disponível em `https://www.sbrt.org.br/sbrt2017/anais/4_antonio_palazzo.pdf`. Acesso em 14 out. 2024.

[3] ÁVILA, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci . Revista do Professor de Matemática, São Paulo v. 6, n. 9-14, 1985.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, 2018.

[5] BRASIL ESCOLA. Disponível em: `https://brasilescola.uol.com.br/matematica/sistemas-lineares.htm`. Acesso em: 13 ago. 2024.

[6] CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. *Álgebra Linear e Aplicações.* 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1990.

[7] COELHO, Flávio U.; LOURENÇO, Mary L. *Um curso de álgebra linear.* 2. ed. rev. e ampl., 4. reimpr. São Paulo: EDUSP, 2018.

[8] HEFEZ, Abramo.; FERNANDEZ, Cecília. S. *Introdução à Álgebra Linear.* Coleção PROFMAT. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

[9] HEFEZ, Abramo.; VILLELA, Maria Lúcia T. *Códigos Corretores de Erros.* Coleção Matemática e Aplicações. 2. ed. IMPA, 2017.

[10] IEZZI, Gelson.; HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas.* 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[11] KOSHY, Thomas. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.* Wiley-Interscience, 2001.

[12] MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, Paulo C. P. *Matemática discreta.* Coleção PROFMAT. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[13] MUNIZ NETO, Antonio C. *Tópicos de Matemática Elementar: números reais.* vol. 1. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[14] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Matrices and Determinants. *The MacTutor History of Mathematics Archive*, University of St Andrews, 1996. Disponível em: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants/`. Acesso em: 3 dez. 2024.

[15] SANTOS, Ildálio Aguiar de Souza. *Ensino e Aplicações de Matrizes.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2013.

[16] SERASA. Disponível em: `https://www.serasa.com.br/blog/o-que-e-cpf/`. Acesso em: 20 mai. 2025.

[17] SILVA, B. A., *Números de Fibonacci e números de Lucas*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de São Paulo, 2017. Disponível em: `https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-03032017-143706/publico/BrunoAstrolinoeSilva_revisada.pdf`. Acesso em: 24 jan. 2025.

[18] SMOLE, Kátia C. S.; DINIZ, Maria I. S. V. *Matemática: ensino médio.* vol. 3. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[19] SOTOMA, L.N., SPREAFICO, M.V.P and SPREAFICO, E.V.P., *An application in linear codes relating numerical sequences of order 2 and matrices*, submitted.

[20] BENJAMIN, A.T., QUINN, J.J. *Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof.* Dolciani Mathematical Expositions, vol. 27. Mathematical Association of America, 2003.

[21] TRIANA, Juan. *Negafibonacci Numbers via Matrices*. Bulletin of TICMI, 2019. Disponível em: https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/journals/TICMI/vol23_1/3_triana.pdf. Acesso em: 4 jun. 2025.

[22] BARICHELLO, Leonardo *Pensamento Computacional*. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS), 2021. Disponível em: https://pt.scribd.com/document/538327707/Pensamento-Computacional.