Fundamentos de Projeto de Compensadores via LMIs

Guilherme Coelho Bogado

***Resumo* - Este relatório refere-se ao estudo orientado sobre Projeto de Compensadores via LMIs, no qual é introduzido fundamentos de sistemas de controle. O s resultados foram obtidas a partir de simulações realizadas no sofwtare MATLAB, utilizando o Yalmip como suporte do solver SeDuMi.**

I. Introdução

EM sistemas de controle linear é estudado abordagens para controlar sistema dinâmicos, onde as relações de entrada e saída são representadas por equações diferencias lineares, nas quais as mudanças em varíaveis de estado ou saída são proporcionais às mudanças na entrada, sendo o espaço de estado um espaço vetorial onde cada ponto cada ponto representa um estado possível do sistema. As variáveis de estado são as coordenadas desse espaço e descrevem completamente o estado do sistema a qualquer instante de tempo. Considere uma planta de um SLIT-C modelada no espaço de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{1}$$

Onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, que contém as variáveis de estado do sistema., u(t) e y são vetores, sendo de entrada e saída respcetivamente. $A \in \mathbb{R}^{nXn}$ é a matriz de estado, que descreve a dinâmica interna do sistema , $B \in \mathbb{R}^{nX1}$ é a matriz de entrada, que descreve como as entradas influenciam o estado, $C \in \mathbb{R}^{1Xn}$ é a matriz de saída, que descreve como o estado é mapeado para as saídas e $D \in \mathbb{R}$ é a matriz de transmissão direta, que descreve a influência direta das entradas nas saídas. O objetivo é obter estabilidade para este sistema de malha fechada, portanto deve-se ler através de sensores as variáveis de estado do sistema e determnar o valor da entrada a cada instante de tempo. As variáveis do sistam estão em $x \in \mathbb{R}^n$, assim o sinal de controle escolhido será $u = Kx$, $K \in \mathbb{R}^{1Xn}$. Supondo que n = 2, teríamos $u = h_1 \cdot x_1 + h_2 \cdot x_2$. Com isto, o sistema em malha fechada fica:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x \\ y = (C + DK)x \end{cases} \tag{2}$$

[1]

A. Estabilidade Assintótica Contínua

O sistema referente a (14) é dito assintoticamente estável se, para $u \equiv 0$ e $x(0) = x_0$ arbitrário tem-se que $x(t) \longrightarrow 0$, para $t \longrightarrow \infty$. Afirmamos também que, caso todos os autovalores de $A+BK$ estiverem no semiplano complexo esquerdo o sistema é assintoticamente estável. Ambas afirmações implicam que, qualquer solução para o sistema que inicia suficientemente perto do ponto de equilíbrio, que seria o ponto no qual o sistema não muda, tende a este ponto a medida que o tempo tende ao infinito. Para verificarmos este fato projetamos K e utilizamos o teorema de Lyapunov, que afirma para todo SLIT-C é assintoticamente estável se, e somente se existir $P \in \mathbb{R}^{nXn}$, $P = P'$, tal que:

$$\begin{aligned} P \succ 0 \\ A'P + PA \prec 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Aplicando a realimentação de estado, tem-se que devemos encontrar $P \succ 0$, tal que:

$$(A + BK)'P + P(A + BK) \prec 0 \tag{4}$$

É um fato que, se P existir, P será invertível, e seja $Q = P^{-1}$, sendo Q simétrico. Também, afirma-se que, caso Q seja invertível, então $Q'RQ \prec 0 \iff R \prec 0$. Então:

$$\begin{aligned} &(A + BK)'P + P(A + BK) \prec 0 \iff \\ &\qquad Q[(A + BK)'P + P(A + BK)]Q \prec 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Logo, obtemos:

$$QA' + QK'B + AQ + BKQ \prec 0 \tag{6}$$

Como deve-se manter a equação linear, fazemos $W = KQ = KP^{-1}$, assim, tem-se:

$$AQ + QA' + BW + W'B \prec 0 \tag{7}$$

Assim, o problema da realimentação de estado estará resolvido se encontrarmos soluções para a LMI

$$\begin{cases} Q \succ 0 \\ AQ + QA' + BW + W'B \prec 0 \end{cases}$$

[2]

B. Estabilidade Assintótica Discreto

Para casos discretos, o sistema $x(k+1) = Ax(k)$ sendo $A \in \mathbb{R}^{nXn}$ é assintoticamente estável se qualquer uma das condições forem verdadeiras., para $k \equiv 0$ e $x(0) = x_0$ arbitrário tem-se que $x(k) \longrightarrow 0$, para $k \longrightarrow \infty$ ou se o maior autovalor de A possui valor absoluto meno que 1. Tal estabilidade pode ser verificada por uma função Lyapunov v(x), assim, para que o sistema seja assintoticamente estável, duas condições devem ser verificadas:

$$\begin{cases} v(x) \succ 0, \forall x \neq 0 \\ v(x(k+1)) - v(x(k)) \prec 0, \forall x \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

Como $v(x) = x'Px$ pela função de Lyapunov, substituindo v(x) para a primeira condição:

$$x'Px \succ 0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow P \succ 0 \quad (10)$$

E para a segunda condição:

$$x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) = \\ x(k)'(A'PA - P)x(k) \prec 0 \Leftrightarrow A'PA - P \prec 0 \quad (11)$$

No fim, para determinar se A é assintoticamente estável, deve-se achar soluções para a LMI abaixo:

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ A'PA - P \prec 0 \end{cases} \quad (12)$$

Reescrevendo a segunda condição como $P - AP'P^{-1}PA \succ 0$ e escrevendo em forma de matriz, tem-se:

$$\begin{bmatrix} P & PA \\ A'P & P \end{bmatrix} \succ 0$$

A partir do sistema discreto em malha fechada $x = (A + BK)x$, substituimos na matriz e aplicamos o complemento de Schur, obtendo:

$$\begin{bmatrix} P & P(A+BK) \\ (A+BK)'P & P \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} I & A+BK \\ P^{-1}(A+BK)'P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & (A+BK)P^{-1} \\ P^{-1}(A+BK)' & P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0$$

Considerando $P^{-1} = Q$ e $KQ = W$, temos:

$$\begin{bmatrix} Q & AQ + BW \\ QA' + W'B' & Q \end{bmatrix} \succ 0$$

Assim, conseguimos substituir as duas condições anteriores por:

$$\begin{cases} Q \succ 0 \\ QA + W'B' + AQ + BW \prec 0 \end{cases} \quad (13)$$

[3]

C. Norma H_∞

Supondo o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ y = Cx + Dw \end{cases} \quad (14)$$

No qual w é uma entrada exógena em relação ao sistema, sendo fisicamente o ruído., y é a saída e x representa o estado. A matriz de transferência de w para y é definida como:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (15)$$

E a norma H_∞ é definida como:

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} \delta_{max}(H(j\omega)) \quad (16)$$

Sendo $\delta os valores singulares de$(H(j$\omega$)) dados por:

$$\delta_i = \sqrt{\lambda(H(j\omega)) * (H(j\omega))} \quad (17)$$

Esta equação define que a norma H_∞ é o maior valor singular da matrix $H(j\omega)$, o que, num sistema SISO, implica ao máximo do diagrama de magnitude de Bode. Fisicamente, representa o maior ruído possível do sistema, consequentemente é o pior caso de ganho. Tal norma pode ser caracterzida pelo menor valor de γ que:

$$\|y(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2 \quad (18)$$

De modo equivalente, tem:

$$\|H(s)\|_\infty < \gamma \iff y(t)'y(t) < \gamma^2 w(t)'w(t) \quad (19)$$

Com isso, conseguimos caracterizar $\|H(s)\|_\infty$ por meio da função Lyapunov, obtendo $\dot{v} + y'y - \gamma^2 w'w < 0$ A partir disso, define-se o ("Bounded real lemma") que diz, A é assintoticamente estável e $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{nXn}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0$$

[3]

II. Procedimento Experimental

Para exemplificar a teoria apresentada na introdução, foi feito exemplos de LMIs no software MATLAB utilizando o YALMIP como suporte e o SeDuMi de solver. Em todas as simulações foram criados as matrizes A e B, também foi criado as matrizes P e W como incógnitas utilizando o comando sdpvar. Então, cria-se a LMI e encontra as soluções utilizando o comando optimize, por fim determina os autovalores de P e de A' * P + P * A + B * W + W' * B'.

A. Simulação 1

Segue o script da primeira simulação:

```
A = [1  2;  3  4]
B = [1;  -1]
P = sdpvar(2,2)
W = sdpvar(1,2)
LMI = [
P >= 0
A' * P + P * A + B * W + W' * B' <= 0
]
optimize(LMI, [])
eig(P)
eig(A' * P + P * A + B * W + W' * B')
```

Com isso, obtemos os autovalores de P, sendo eles [0.014394,2.2633] e de A' * P + P * A + B * W + W' * B', sendo eles [-1,-0.72227].

B. Simualação 2

Segue o script da segunda simulação:

```
A = [3 2 1; 6 5 4; 9 8 7]
B = [1; −1; 2]
P = sdpvar(3,3)
W = sdpvar(1,3)
LMI = [
P >= 0
A' * P + P * A + B * W + W' * B' <= 0
]
optimize(LMI, [])
eig(P)
eig(A' * P + P * A + B * W + W' * B')
```

Com isso, obtemos os autovalores de P, sendo eles [0.07818,3.6906] e de A' * P + P * A + B * W + W' * B', sendo eles [-0.99971,-0.11147]

C. Simulação 3

```
A = [1 4 5 2; 7 8 1 3; 4 3 9 10; 11 9 7 1]
B = [1; 4; −1; 2]
P = sdpvar(4,4)
W = sdpvar(1,4)
LMI = [
P >= 0
A' * P + P * A + B * W + W' * B' <= 0
]
optimize(LMI, [])
eig(P)
eig(A' * P + P * A + B * W + W' * B')
```

Com isso, obtemos os autovalores de P, sendo eles [0.036076,2.6126] e de A' * P + P * A + B * W + W' * B', sendo eles [-1.6045,-0.63957]

III. Análise dos Dados

Em relação aos dados obtidos nas simulações, podemos perceber que nas três os autovalores de P são positivos e os autovalores da equação $A' * P + P * A + B * W + W' * B'$ são negativos, com isso podemos afirmar que os três sistemas testados são assintoticamente estáveis, mesmo com eles sendo de dimensões diferentes.

IV. Referências Bibliográficas

[1] [2] [3]

[1] B. P. Lathi and R. A. Green, *Linear systems and signals*. Oxford University Press New York, 2005, vol. 2.

[2] K. Ogata *et al.*, *Modern control engineering*. Prentice Hall India, 2009.

[3] P. L. D. Peres, "Análise e controle de sistemas lineares por desigualdades matriciais lineares (lmis)," https://www.fee.unicamp.br/profs/ricfow/IA892/ia892.htm, accessed: 2010-09-30.