UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BEATRIZ FERNANDA MANTOVANI DA ROCHA

BIANCA SILVA BRAGA

Geometria Espacial: Poliedros e Sólidos de Revolução.

TRÊS LAGOAS – MS

2023

1. Introdução

O presente trabalho tem como tema "Geometria Espacial: Poliedros e Sólidos de Revolução" e faz parte da disciplina Geometria II, da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFMS, tendo como objetivo abordar a importância do ensino de Geometria.

A trajetória histórica da geometria dos poliedros e dos sólidos de revolução é uma jornada fascinante que remonta a milhares de anos, repleta de marcos significativos, que moldaram não apenas o desenvolvimento da matemática, mas também tiveram um impacto substancial em diversas disciplinas, como engenharia e física.

Sendo assim, na Grécia Antiga, matemáticos como Euclides, no século III a.C., estabeleceram os fundamentos da geometria euclidiana, incluindo a classificação e estudo dos poliedros regulares em sua obra "Os Elementos". Esses poliedros regulares, como o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, desempenharam um papel essencial na compreensão das formas tridimensionais, e suas propriedades continuam a ser estudadas e aplicadas na matemática moderna.

No campo da engenharia, a compreensão dos poliedros tornou-se crucial em estruturas arquitetônicas e de engenharia civil. Por exemplo, o estudo de poliedros é relevante na análise de estruturas cristalinas em materiais, que é fundamental para a engenharia de materiais. Além disso, as propriedades dos poliedros são usadas na otimização de formas de objetos e na geometria descritiva, que é essencial para a representação de objetos tridimensionais em desenho técnico.

Os sólidos de revolução, por sua vez, desempenharam um papel importante na física e na engenharia. A revolução de uma figura plana em torno de um eixo gerou sólidos como cilindros, cones e esferas, que possuem aplicações em áreas tão diversas quanto a dinâmica de fluidos, termodinâmica e mecânica. Por exemplo, o estudo dos sólidos de revolução é fundamental na análise de rotação de objetos em movimento, como rodas e engrenagens.

Neste contexto, este trabalho explora a trajetória histórica da geometria dos poliedros e dos sólidos de revolução, destacando marcos importantes ao longo do caminho e o impacto dessas descobertas em diversas disciplinas, da matemática à engenharia e à física. Em seguida, será introduzido uma definição sobre Poliedros e Sólidos de Revolução, bem como características importantes, sendo elas: classificações, teoremas, cálculo de áreas e volumes. Por fim, apontaremos sobre a importância do ensino da Geometria Espacial.

2. Referencial teórico

A trajetória histórica da geometria dos Poliedros e dos Sólidos de Revolução

A trajetória histórica da geometria dos poliedros e dos sólidos de revolução remonta a períodos antigos da civilização humana. Desde as culturas antigas, como a egípcia e a grega, a geometria desempenhou um papel essencial no entendimento e na descrição das formas tridimensionais.

Na Antiguidade, os gregos, notavelmente Euclides, contribuíram significativamente para o desenvolvimento da geometria, estabelecendo os fundamentos da geometria euclidiana, que incluía estudos sobre poliedros regulares e suas propriedades. No entanto, é importante mencionar que outras culturas, como a chinesa e a indiana, também fizeram contribuições valiosas para a geometria nesse período.

Durante a Idade Média, o conhecimento geométrico foi preservado e transmitido principalmente pelos estudiosos árabes. No Renascimento, o ressurgimento do interesse pelas obras clássicas gregas e romanas levou a um redescobrimento da geometria, com figuras proeminentes como Leonardo da Vinci e Luca Pacioli explorando e ampliando os estudos sobre poliedros.

No século XIX, a geometria dos sólidos de revolução foi aprimorada com os avanços matemáticos. Matemáticos como Gauss e Riemann contribuíram para uma compreensão mais abstrata e formal da geometria, ampliando o escopo dos estudos sobre sólidos tridimensionais.

No século XX, com o advento da geometria descritiva e a ascensão da geometria computacional, a abordagem para estudar e representar poliedros e sólidos de revolução evoluiu. A geometria tornou-se uma ferramenta crucial em diversas disciplinas, incluindo a matemática aplicada, a física e a engenharia.

Poliedros e Sólidos de Revolução

Nesta seção apresentaremos sobre os sólidos geométricos que são formas tridimensionais que possuem comprimento, largura e altura. Além disso, eles se caracterizam por suas faces, arestas e vértices, e cada um dos elementos desempenha papel importante na definição e identificação de cada um desses sólidos.

Sendo assim, os sólidos geométricos podem ser classificados em poliedros e corpos redondos. A palavra poliedro vem do grego, poly, que significa muitos ou vários e edro, que significa face, ou seja, muitas faces, sendo classificados em poliedros convexos e côncavos, tomando como ênfase nessa pesquisa os convexos.

Os poliedros regulares são conhecidos como "sólidos platônicos" ou "corpos cósmicos" (cubo ou hexaedro, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), sendo associado à Terra ao tetraedro, o fogo ao octaedro, o ar ao icosaedro e ao dodecaedro o Universo.

Além disso, enfatizamos que antes de apresentar uma definição sobre os poliedros, é necessário definirmos o que é polígono, bem como algumas propriedades para, por último definirmos o que significa um polígono ser convexo, já que estes termos aparecem frequentemente nas definições de poliedros.

2.1 Polígonos

Nesta seção apresentaremos algumas definições básicas sobre polígonos. Estas figuras têm inúmeras propriedades e aplicações por servirem de base para a construção e estudo de outras figuras geométricas complexas, tanto do plano quanto do espaço.

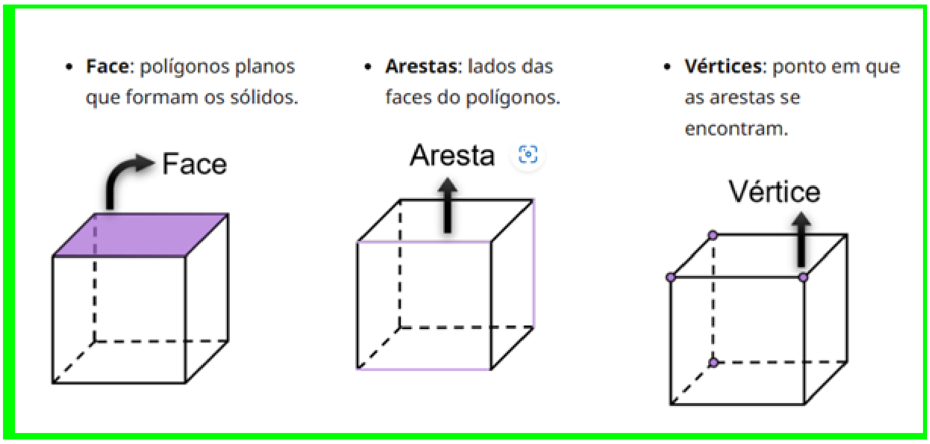
Copiar do livro – Elementos de Geometria & Desenho Geométrico (páginas 37, 38, 39, 40, 41 e 42).

Com base nestas propriedades e definições básicas sobre polígonos podemos partir para o estudo dos poliedros. Assim, para o estudo que desenvolvemos nesta pesquisa adotamos a formulação abaixo para definição de poliedro. Essa definição é simples, concisa, adotada pela maioria dos autores e não permite grandes liberdades.

2.2 Poliedros

Definição: Poliedro é um sólido geométrico, isto é, uma figura geométrica tridimensional limitada por um número finito de polígonos convexos, que são suas faces, ou seja, superfícies planas, não curvas.

Um poliedro possui **três elementos** básicos, sendo eles:



- Os polígonos que limitam o poliedro são denominados de faces do poliedro.

- Existem faces que se interceptam segundo um segmento de reta e cada um desses segmentos é chamado de aresta do poliedro, ou seja, são os lados do polígono.

- Existem grupos de três ou mais arestas que se interceptam em um ponto, e cada um desses pontos é chamado de vértice do poliedro.

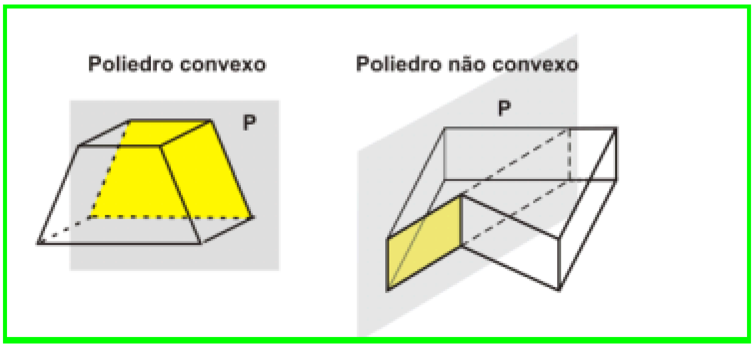
Os poliedros podem ser nomeados, ou seja, classificados de acordo com o seu número de faces. Sendo assim, teremos:

Número de Faces	Nome do poliedro
4	Tetraedro
6	Hexaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
13	Tridecaedro
14	Tetradecaedro
15	Pentadecaedro
20	Icosaedro

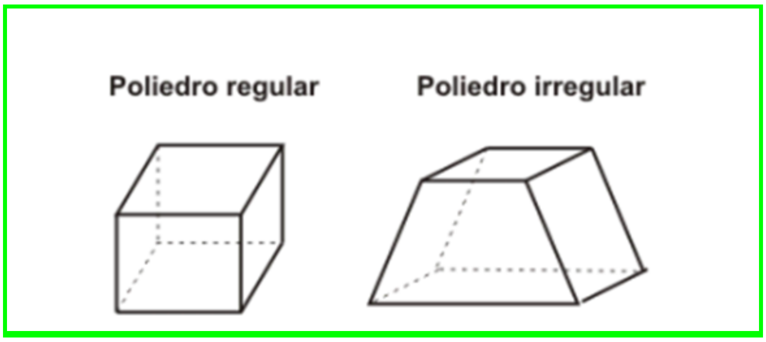
Observação: Há poliedros que são simplesmente nomeados pelo número de suas faces, por exemplo: um poliedro de 32 faces.

Classificação:

Os poliedros podem ser convexos ou não convexos. Um plano divide o espaço em duas partes (semiespaços). Se o plano que compreende cada face deixar todo o poliedro em um mesmo semiespaço, este poliedro é convexo. No caso em que o plano de pelo menos uma face dividir o poliedro em duas ou mais partes (pertencentes a semiespaços distintos) o poliedro é não convexo.



Um poliedro pode, também, ser classificado como regular ou não regular. É poliedro regular aquele que tem todas as faces como polígonos regulares idênticos e que apresenta todos os ângulos poliédricos (bicos) idênticos entre si.



Teorema de Euler

Leonhard Euler (1707-1783) foi um matemático suíço que deixou um legado duradouro na história da matemática. Ele é amplamente considerado um dos matemáticos mais prolíficos e influentes de todos os tempos, pois fez contribuições significativas em uma ampla gama de áreas matemáticas, incluindo análise matemática, teoria dos números, geometria, teoria dos grafos e mecânica. Além de contribuir para áreas da ótica e astronomia.

Na geometria, Euler contribuiu dentre os **poliedros convexos** e estabeleceu uma relação denominada por **relação de Euler**, cujo o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) é expressa da seguinte maneira:

$$V + F = A + 2$$

Definição: Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados de **poliedros Eulerianos.**

"Todo poliedro convexo é Euleriano, mas nem todo poliedro Euleriano é convexo."

Poliedros de Platão ou Platônicos

Definição: Um poliedro é chamado poliedro de Platão, se e somente se, satisfaz as seguintes condições:

a) todas as suas faces são polígonos com o mesmo número (n) de lados;

b) todos os seus vértices são vértices de ângulos poliédri cos com o mesmo número (m) de arestas;

c) é euleriano, ou seja, obdece à relação de Euler: $V - A + F = 2$.

Propriedade: Existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

Prova:

Seja um poliedro de Platão com: F faces, cada uma com n lados ($n > 2$); V vértices, sendo que cada um dos ângulos poliédricos tem m arestas ($m > 2$) e A arestas.

Logo, temos:

(1) $V - A + F = 2$ (pois é euleriano);

(2) $nF = 2A$ (pois cada uma das F faces tem n arestas e cada aresta está em duas faces);

(3) $mV = 2A$ (pois cada vértice V tem m arestas e cada aresta tem dois vértices como extremidades).

Substituindo (2) e (3) em (1) temos: $\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$

Dividindo por 2A temos: $\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$. Devemos verificar as condições de que $n > 2$ e $m > 2$.

Como A é o número de arestas, devemos ter, portanto: $\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} > 0$

Logo para cada n teremos valores para m, ou seja,

a) $n = 3 \Rightarrow$ faces triangulares

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} > 0 \Rightarrow m < 6,$$

assim, $m = 3$; 4; ou 5 (pois $m > 2$ e inteiro)

b) $n = 4 \Rightarrow$ faces quadrangulares

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow m < 4,$$

assim, $m = 3$

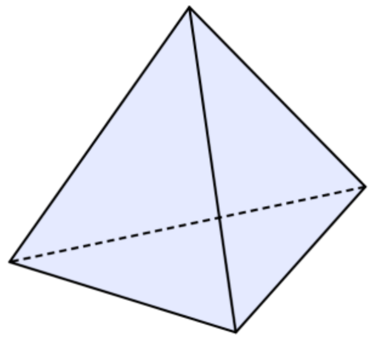
c) $n = 5 \Rightarrow$ faces pentagonais

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{3}{10} > 0 \Rightarrow m < \frac{10}{3} \cong 3{,}333,$$

assim $m = 3$

d) Para $n \geq 6$ obtemos m sempre menor que 3, o que contradiz a condição inicial.

Há portanto, cinco classes de poliedros de Platão, são elas:



<u>Primeira Classe</u>: n = 3 e m = 3

Como $\frac{1}{m}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{A}$ então substituindo n = 3 e m = 3 temos A = 6. Como n.F = 2A, temos F = 4 e como m.V = 2A, temos V = 4.

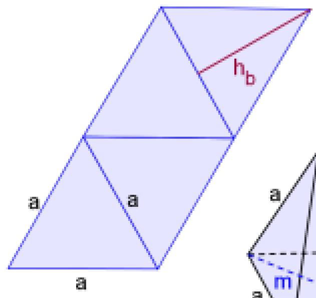
Esta classe de poliedros de Platão inclui os poliedros que possuem quatro faces triangulares, conhecidos como tetraedros ("quatro faces", em grego).

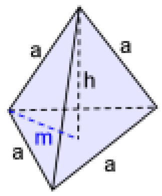
2) Tetraedro Regular

a) área da base

É a área do triângulo equilátero de lado a.

$$A_b = \frac{a.h_b}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$





b) área total

$$A_t = 4.A_b = a^2\sqrt{3}$$

c) volume

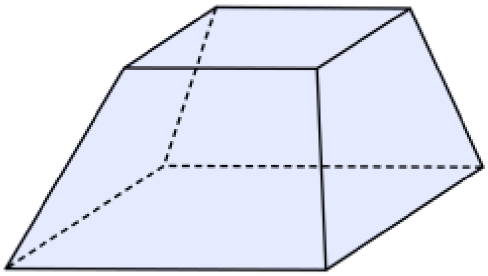
$$V = \frac{1}{3}A_b.h$$

$$h^2 = a^2 - m^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}h_b\right)^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

$$\therefore\ h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore\ V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Segunda Classe: n = 4 e m = 3



Analogamente, temos $\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$, o que implica em A = 12, n.F = 2A $\therefore$ F = 6 e m.V = 2A, ou seja, V = 8.

Esta classe de poliedros de Platão inclui os poliedros que possuem seis faces quadrangulares, conhecidos como hexaedros ("seis faces").

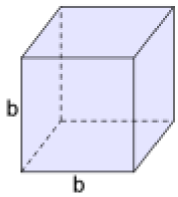
3) Prisma Regular Quadrangular (Hexaedro Regular)

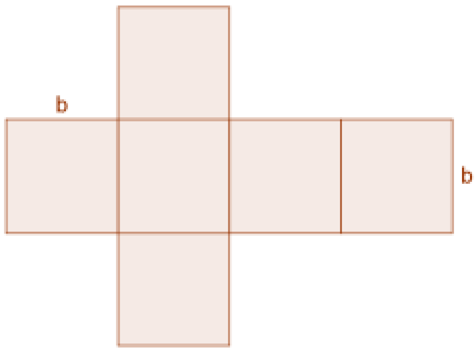
a) área da base

É a área do quadrado de lado b.

$A_b = b^2$

b) área total





$A_t = A_l + 2A_b$

$At = 4.b^2 + 2.b^2 = 6.b^2$

c) volume

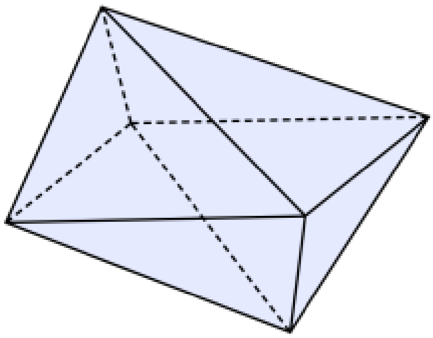
$V = A_b.h = A_b.b$

$V = b^2.b = b^3$

Terceira Classe: n = 3 e m = 4

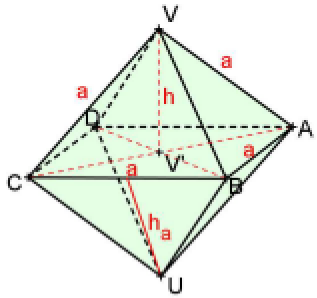
$\frac{1}{m}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{A}$, então A = 12, n.F = 2A ∴ F = 8 e como m.V = 2A, temos V = 6.

Esta classe de poliedros de Platão inclui os poliedros que possuem oito faces triangulares, conhecidos como octaedros ("oito faces").



7.4. Estudo do Octaedro Regular

Definição: A seção equatorial de um octaedro regular é definida pelo quadrado que divide o octaedro em duas pirâmides congruentes.



Exemplo: O quadrado ABCD divide o octaedro regular nas pirâmides V-ABCD e U-ABCD.

a) área de uma face

É a área do triângulo equilátero de lado a.

$$A_b=\frac{a.h_a}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

b) área total

$$A_t=8.A_b=2a^2\sqrt{3}$$

c) volume

A altura das pirâmides definidas pela seção equatorial ABCD é dada por:

$$h^2=a^2-\overline{V'C}^2=a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=a^2-\frac{2a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$$

$$\therefore\ h=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

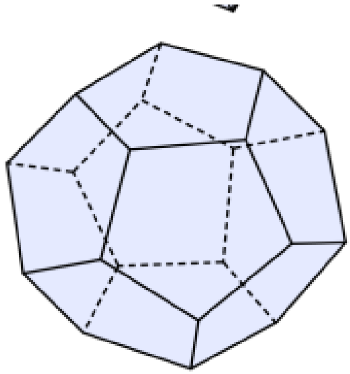
Portanto, o volume do octaedro é dado por:

$$V=2.\frac{1}{3}A_{ABCD}.h=\frac{2}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

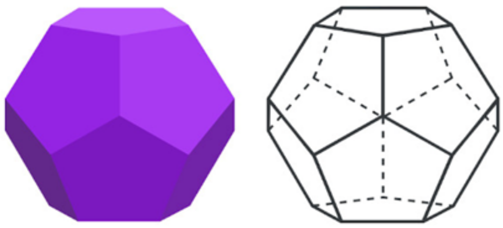
Quarta Classe: n = 5 e m = 3

$\frac{1}{m}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{A}$, então A = 30, e n.F = 2A $\therefore$ F = 12 e como m.V = 2A temos V = 20.

Esta classe de poliedros de Platão inclui os poliedros que possuem doze faces pentagonais, conhecidos como dodecaedros ("doze faces").



DODECAEDRO

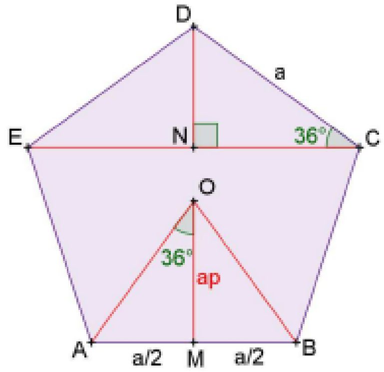


7.6. Estudo do Dodecaedro Regular

a) <u>área de uma face</u>

É a área do pentágono regular de lado a.

$$A_f = 5.A_{AOB} = 5.\frac{a.ap}{2}$$



Temos que $\overline{EC} \parallel \overline{AB}$, e $\overline{AB}$ é o segmento áureo de $\overline{EC}$.

Logo, $\overline{EC} = \overline{AB}\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$\therefore\ \frac{\overline{EC}}{2} = \overline{NC} = \overline{AB}\frac{\sqrt{5}+1}{4} = a\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\therefore\ \overline{DN}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{NC}^2 = a^2 - \left(a\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$$

$$\therefore\ \overline{DN} = \frac{a}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Como $\Delta CND \sim \Delta OMA$, então temos: $\dfrac{ap}{\overline{NC}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{DN}}$, ou seja, $\dfrac{ap}{a\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}} = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{a\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$.

$$\therefore\ ap = a\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{6\sqrt{5}-10}$$

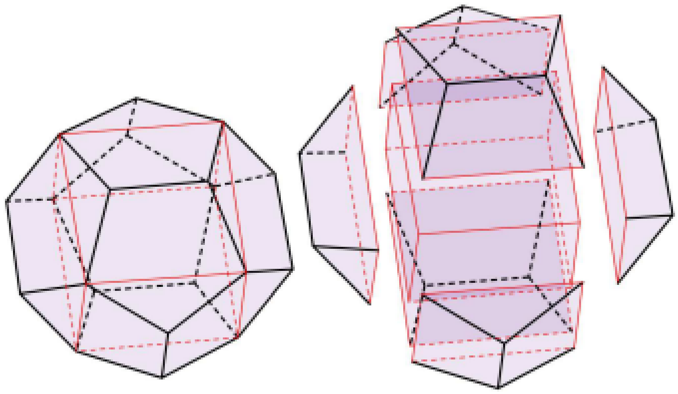
Logo, $A_f = 5.\dfrac{a.ap}{2} = 5a^2\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{12\sqrt{5}-20}$.

b) <u>área total</u>

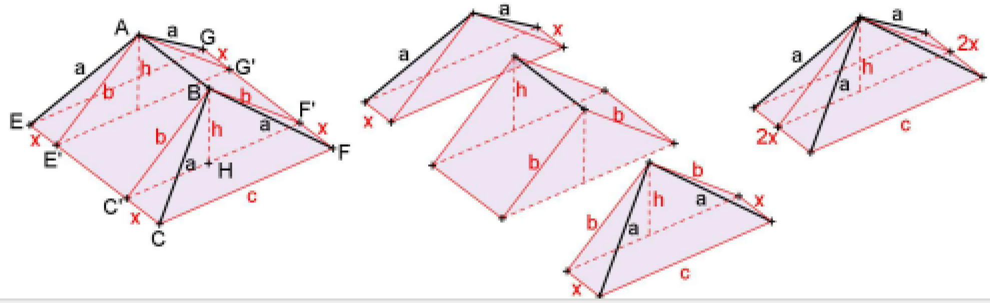
$$A_t = 12.A_f = 12.5a^2\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{12\sqrt{5}-20} = 15a^2\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3\sqrt{5}-5}.$$

c) <u>volume</u>

O dodecaedro pode ser decomposto em um hexaedro regular, e outros seis sólidos, como mostra a figura abaixo.



A aresta do hexaedro tem tamanho igual à diagonal do pentágono regular, ou seja, $c = a\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Considere um dos 6 sólidos formados EGCFBA. Este sólido pode ser decomposto em um prisma AE'G'-BC'F' e duas pirâmides de bases quadrangulares B-CC'F'F e A-EE'G'G. Estas pirâmides podem ser agrupadas, formando uma pirâmide com base quadrangular de medidas c e 2x.



Temos que $\overline{E'C'} = \overline{AB} = a$, logo $x = \dfrac{c-a}{2}$. Analisando os triângulos retângulos $\Delta BCC'$ e $\Delta BHC'$, temos:

$$b^2 = a^2 - x^2 = a^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 \text{ (1) e } b^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{c^2}{4} \text{ (2).}$$

Igualando (1) e (2) temos:

$$a^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{c^2}{4}$$

$$\therefore\ h^2 = a^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore\ h = \frac{a}{2}.$$

Logo, o volume do prisma AE'G'-BC'F' é dado por:

$$V_1 = \frac{c.a.h}{2} = a\frac{\sqrt{5}+1}{2}\frac{a}{2}.a = \frac{a^3}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

O volume da pirâmide de base quadrangular de lados 2x e c é dado por:

$$V_2 = \frac{c.(c-a).h}{3} = a\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(a\frac{\sqrt{5}+1}{2} - a\right)\frac{a}{6}.$$

Logo, $V_1 + V_2 = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{24}a^3$

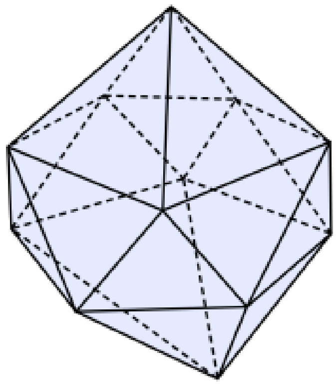
Portanto, o volume do dodecaedro é dado por:

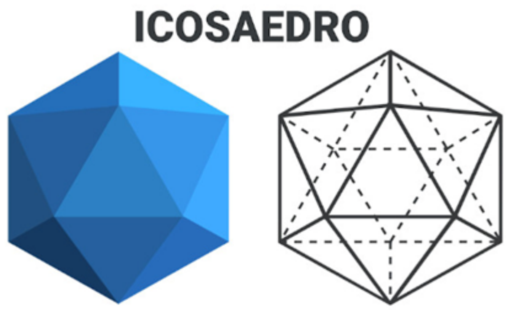
$$V = 6.(V_1 + V_2) + c^3 = 6.\frac{7+3\sqrt{5}}{24}a^3 + \left(a\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3.$$

Quinta Classe: n = 3 e m = 5

$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$, então A = 30, n.F = 2A ∴ F = 20, e como m.V = 2A temos V = 12.

Esta classe de poliedros de Platão inclui os poliedros que possuem vinte faces triangulares, conhecidos como icosaedros ("vinte faces").





7.5. Estudo do Icosaedro Regular

a) área de uma face

É a área do triângulo equilátero de lado a.

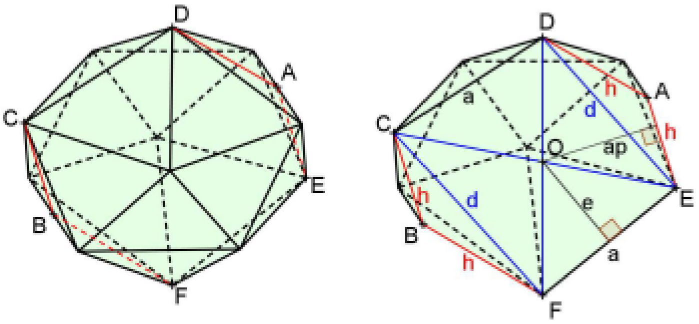
$$A_f = \frac{a.h}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

b) <u>área total</u>

$A_t = 20.A_f = 5a^2\sqrt{3}$

c) <u>volume</u>

Considere uma seção transversal do icosaedro regular passando por duas arestas opostas $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$, e pelos pontos médios A e B de outras arestas opostas. Desta forma, temos um retângulo CDEF com lados a e d.



Como d é a diagonal do pentágono regular de lado a, temos que $d = a\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Como $\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{BF} = \overline{BC} = h$, alturas das faces do icosaedro, temos que $h = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Do triângulo retângulo de catetos e e $\dfrac{a}{2}$ temos: $\overline{OE}^2 = e^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ (1).

Do triângulo retângulo de catetos ap e $\dfrac{2}{3}h$ temos: $\overline{OE}^2 = ap^2 + \left(\dfrac{2}{3}a\right)^2$ (2).

Igualando (1) e (2), encontramos o apótema do icosaedro:

$$ap = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)^2 + \frac{4a^2}{9}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}a$$

Portanto, o volume do icosadro regular será igual à soma do volume das 20 pirâmides

Portanto, o volume do icosadro regular será igual à soma do volume das 20 pirâmides com bases iguais às faces do icosaedro, e cujas alturas são iguais ao apótema ap. Esta ideia é a mesma que utilizamos para calcular a área de um polígono regular de n lados, na página 121.

$V = 20.\dfrac{1}{3}A_f.ap = \dfrac{5a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$.

2. **Sólidos de Revolução

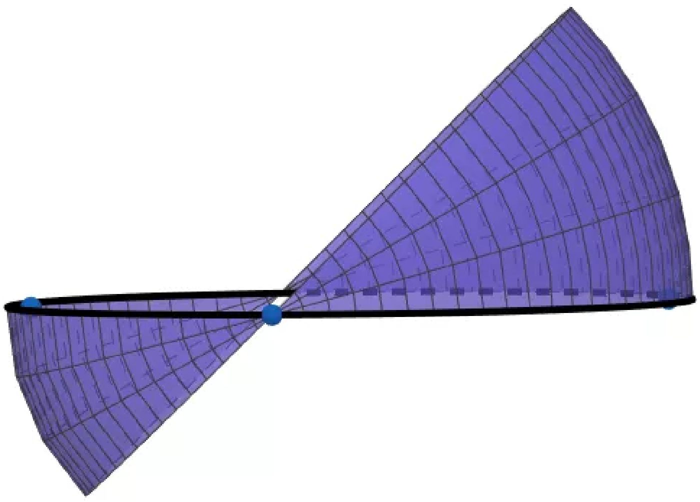
Definição

Para entendermos o que representa Sólidos de Revolução, em uma linguagem informal dizemos que um corpo geométrico pode ser rotacionado sobre uma superfície plana em torno de um eixo e ainda uma figura geométrica que possui 3 dimensões, ou seja, chamamos isso de tridimensional, sendo essas: altura, largura e profundidade.
Segundo LIMA, et al em [5], página 275. Em um plano, contendo uma reta E que é denominada como eixo e uma linha L, que não corta E, imaginemos que L rotaciona em torno de E.
Desta forma,

> cada ponto $P \in L$ percorre então uma circunferência cujo raio é a sua distância ao eixo e a reunião de todas essas circunferências é chamada uma *superfície de revolução*. Se essa linha L for fechada ou se dois de seus extremos pertencerem ao eixo, a superfície de revolução delimita um sólido chamado *sólido de revolução*.

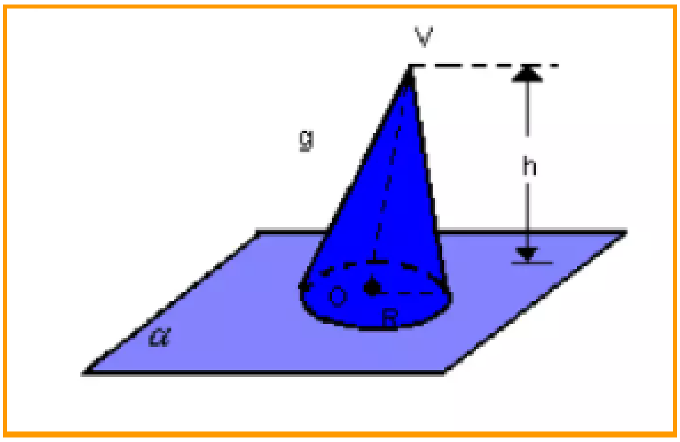
Classificação

Podemos criar um sólido de revolução tendo apenas uma superfície plana e um eixo, pois assim, rotacionando o eixo, temos um sólido formado. Observe:

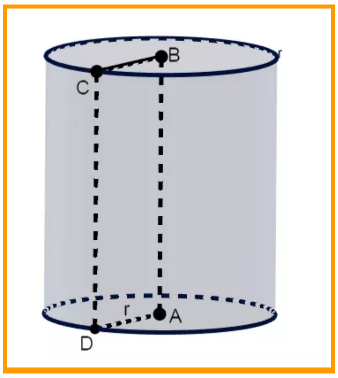


Alguns sólidos mais conhecidos e já formados, são:

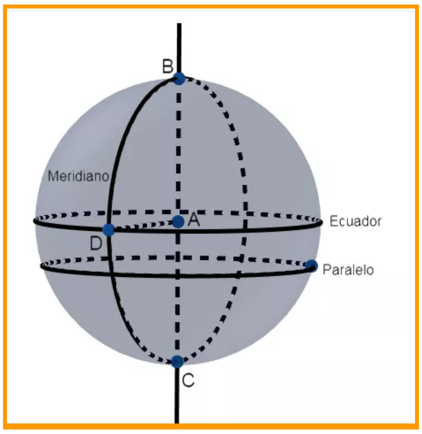
O **Cone** é uma figura que possui face de um triângulo retângulo e rotacionado por um de seus catetos.



O **Cilindro** é definido pela rotação de um retângulo em torno de um eixo.

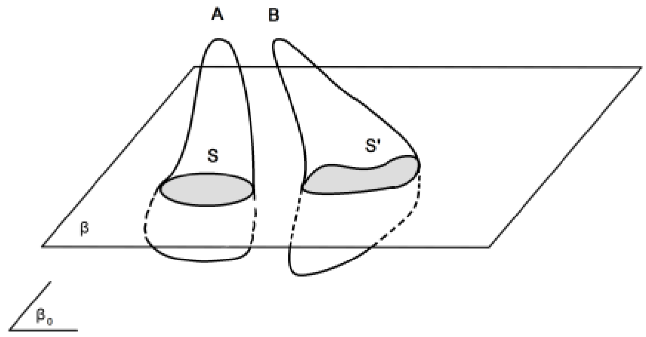


A **Esfera** é obtida através de um semi circulo com rotação em torno de um eixo.



2. **Teoremas, Definições e Axiomas**

Axioma (Princípio de Cavalieri)
São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.



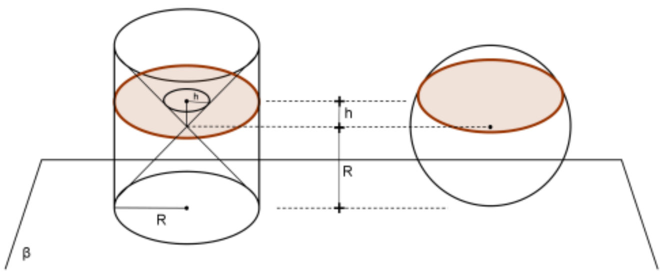


Figura 23 – Ilustração do Princípio de Cavalieri com Esfera

Demonstração:

Princípio de Cavalieri para volumes Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$ e seja P um sólido finito delimitado por, $z = 0, z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$ seja P_t a intersecção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido finito delimitado por $z = 0, z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$ seja Q_t a intersecção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $a(P_t) = ka(Q_t)$ para todo t, onde a representa a área das secções planas. Então $v(P) = kv(Q)$, onde v representa o volume dos sólidos.

Da teoria da integração de funções reais, temos:

$$\begin{aligned} v(P) &= \iiint_P dxdydz \\ &= \int_0^c \left[\iint_{P_z} dxdy\right] dz \\ &= \int_0^c a(P_z)dz \\ &= \int_0^c ka(Q_z)dz \\ &= k\int_0^c a(Q_z)dz \\ &= \ldots \\ &= kv(Q), \end{aligned}$$

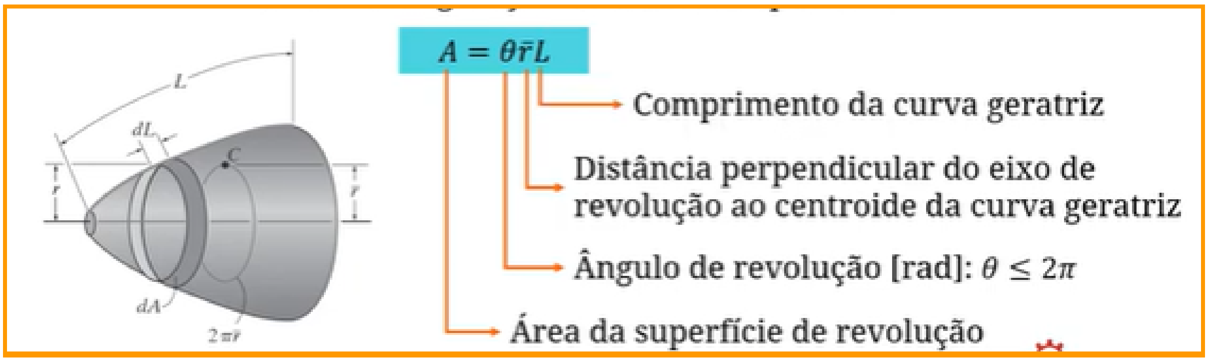
o que demonstra a afirmação.

Definição

Sejam dados uma reta “E” chamada de eixo de rotação e uma linha simples (linha que não se cruza) L, de comprimento finito, chamada de geratriz. Se esta linha for fechada ou se seus extremos pertencem ao eixo, formando uma região plana, ao fazê-la girar em torno do eixo, ou seja, ao fazer cada ponto de L descrever uma circunferência em um plano perpendicular a E e com centro sobre E, forma-se um corpo chamado sólido de revolução.

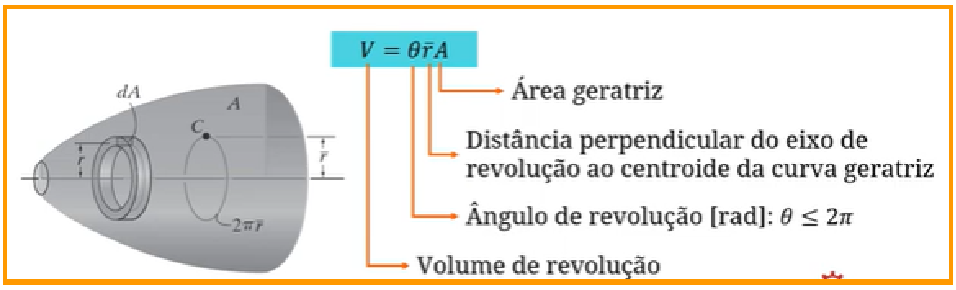
Primeiro Teorema (Pappus Guldinus)

A área de uma superfície de revolução é igual ao produto do comprimento da curva geratriz pela distância trafegada pelo centróide da curva na geração da área da superfície .
Demonstração:



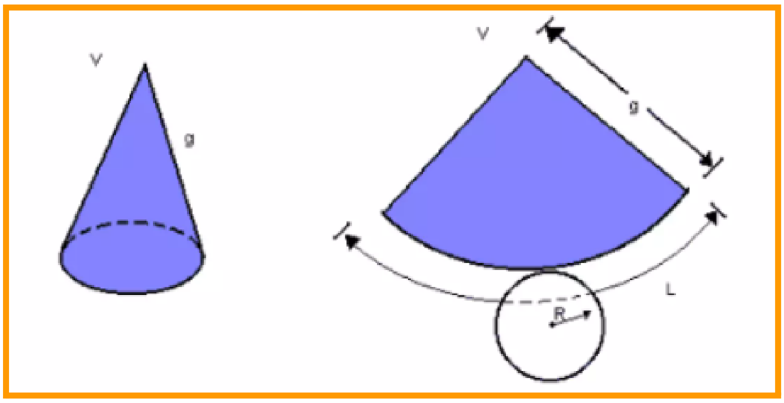
Segundo Teorema (Pappus Guldinus)

O volume de um corpo de revolução é igual ao produto da área geratriz pela distância trafegada pelo centróide da área na geração do volume.



Cálculo de Áreas

Cone
Desenvolvendo a superfície lateral do **Cone**, obtemos um setor circular de raio r e comprimento c= 2.pi.r



Obtendo assim as áreas:

a) área lateral (A_L): área do setor circular

$$A_L = \frac{gl}{2} = \frac{g.2\pi R}{2} \Rightarrow A_L = \pi R g$$

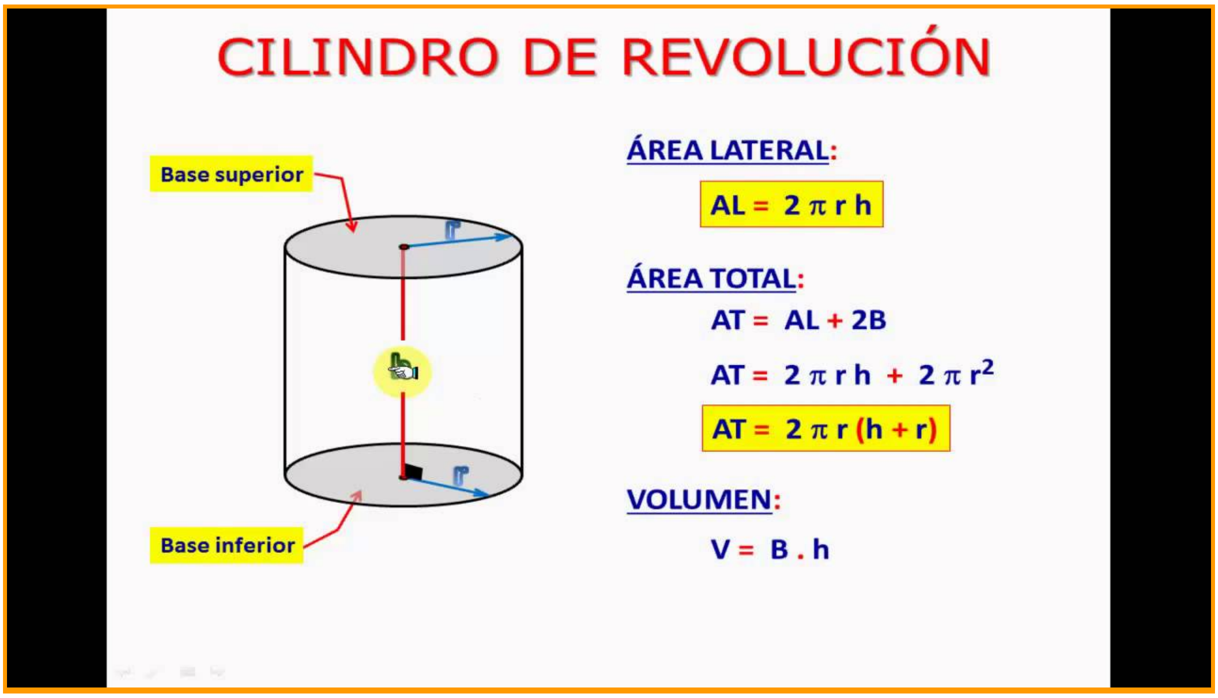
b) área da base (A_B): área do circulo do raio **R**

$$A_B = \pi R^2$$

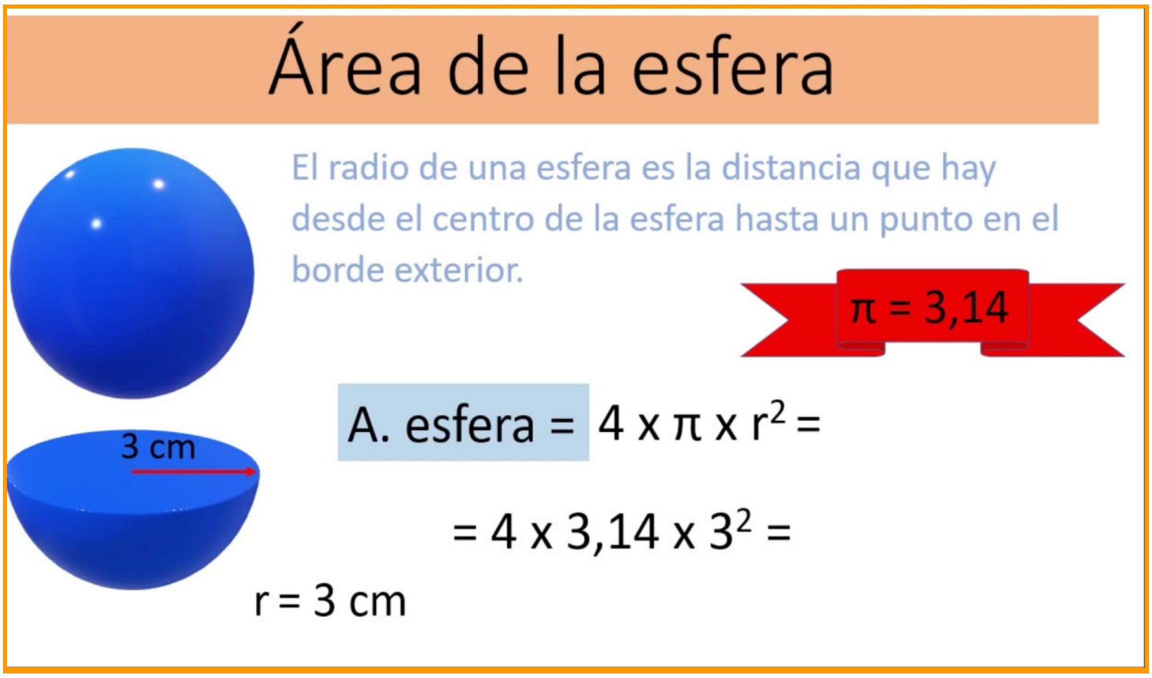
c) área total (A_T): soma da área lateral com a área da base

$$A_T = A_L + A_B = \pi\, Rg + \pi\, R^2 \Rightarrow A_T = \pi R(g + R)$$

Cilindro



Esfera



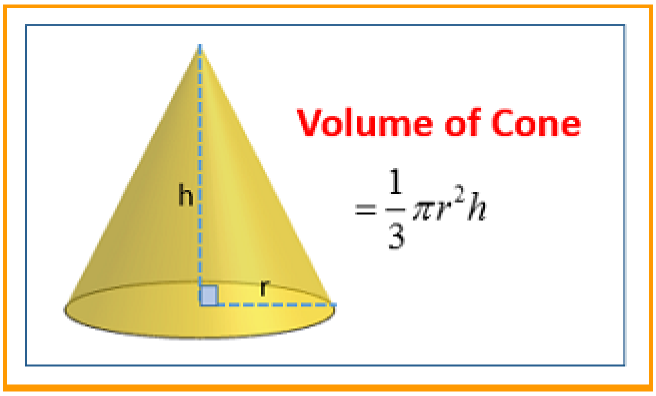
Cálculo de Volumes

Definição 3.2.1 (Volume do Sólido de Revolução) *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. O volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x da região delimitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é*

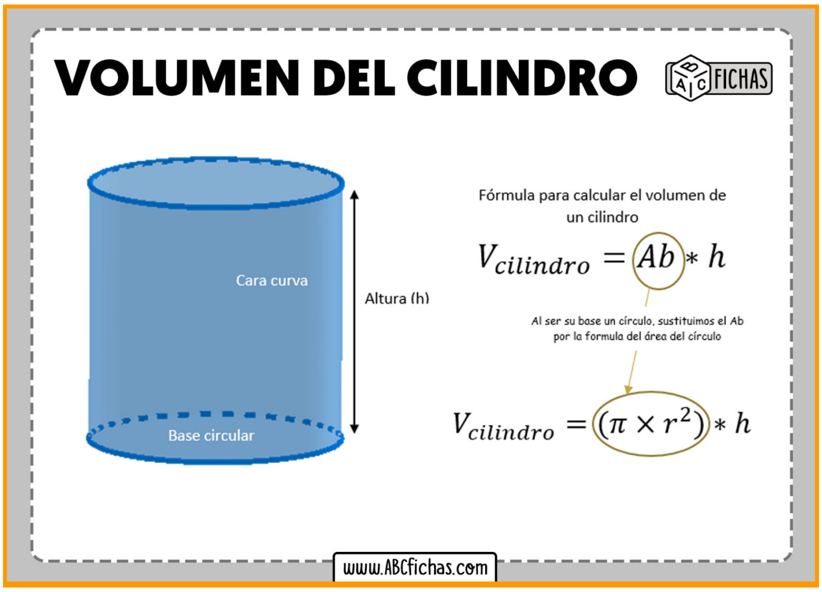
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i^*)]^2 \Delta x = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

Através do Principio de Cavalieri, podemos garantir que o Volume do Cone será igual ao Volume da Pirâmide.

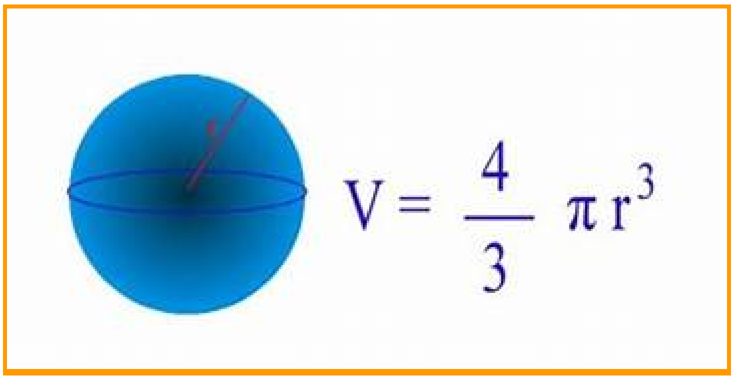
3.5.1. Cone



3.5.2. Cilindro


VOLUMEN DEL CILINDRO
FICHAS
Cara curva
Altura (h)
Base circular
Fórmula para calcular el volumen de un cilindro
$V_{cilindro} = Ab * h$
Al ser su base un círculo, sustituimos el Ab por la formula del área del círculo
$V_{cilindro} = (\pi \times r^2) * h$
www.ABCfichas.com

Esfera


r
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

4. Considerações Finais

A busca por entender o mundo ao nosso redor, identificar a existência de objetos e figuras e as relações entre essas formas no espaço real faz da Geometria um objeto de conhecimento relevante e motivador. Em particular, a Geometria Espacial pode ser vista como uma ferramenta que descreve e exerce uma interação matemática com o mundo, por ser ao mesmo tempo intuitiva, concreta e ligada à realidade.

Assim, o trabalho com a geometria tridimensional possibilita o desenvolvimento da criatividade, da percepção espacial e do raciocínio hipotético-dedutivo, além de ativar as estruturas mentais, possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas, contribuindo desta maneira, para a formação de um cidadão com pensamento crítico e autônomo.

Sendo assim, o papel da escola vai além de simplesmente abordar a teoria; também visa desenvolver no aluno a habilidade de questionar aquilo que aprende. Portanto, o objetivo desta intervenção é superar as dificuldades em conceitos matemáticos, de modo que o aluno não apenas os compreenda para realizar avaliações, mas também os reconheça em sua realidade. Isso porque o ensino da matemática desempenha um papel crucial na integração do aluno em seu ambiente. Conforme mencionado por Bassanezi (2010, p.17),"[...] é necessário buscar estratégias e alternativas de ensino e aprendizagem que facilitem sua compreensão e utilização".

Dessa maneira, a matemática emerge como uma ferramenta essencial na educação do aluno, capacitando-o a interpretar a linguagem matemática subjacente às figuras e relacionando-a ao seu contexto social, conforme evidenciado por Almeida e Dias (2004).

> Não é mais suficiente o aluno aprender Matemática e saber utilizá-la para resolver problemas cotidianos. Além desses saberes, é necessário que o aluno seja capaz de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela Matemática Almeida e Dias (2004, p.6)

Assim, ao ensinar Geometria, devemos considerar o mundo ao nosso redor, tendo em vista que habitamos um mundo repleto de formas geométricas, especialmente as espaciais, presentes tanto na natureza quanto no ambiente doméstico. Em outras palavras, a geometria plana serve como alicerce para a compreensão da geometria espacial, sendo essencial para que o aluno possa dar forma e adquirir uma visão do mundo em relação aos objetos que o cercam.

Com isso, a conexão entre teoria e prática desempenha um papel fundamental no processo de aprendizagem, permitindo aos estudantes familiarizar-se com diversos elementos fundamentais da geometria. Denominada como a ciência do espaço, a geometria proporciona noções essenciais que servirão como base para explorar, de maneira cada vez mais aprofundada, tanto as figuras geométricamente quanto algebricamente.

Logo, é perceptível que a presença da Geometria permeia tudo o que observamos ao nosso redor. Desde casas até construções arquitetônicas, prédios, templos, monumentos e cenários históricos, pois a Geometria desempenha um papel crucial e é uma área fascinante da Matemática dedicada ao estudo das formas e das relações no espaço tridimensional. Suas aplicações cotidianas são amplas e notáveis, abrangendo vários aspectos de nossa vida.

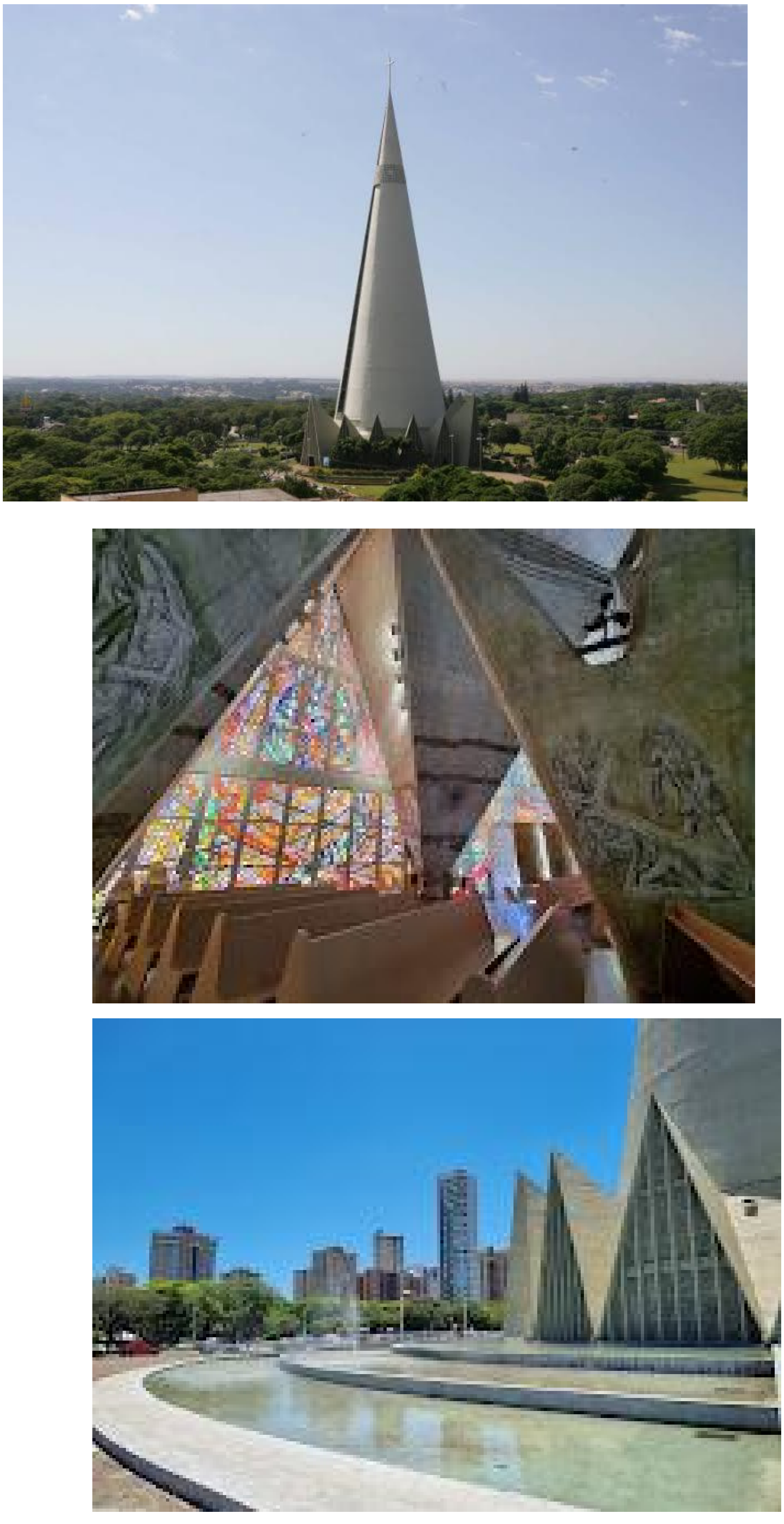
Figura 1: Oscar Niemeyer Sphere (Leipzig, Alemanha)

Fonte: INBEC

Figura 2: Centro Heydar Aliyev (Centro cultural de Baku, Azerbaijão)

Fonte: Ana Luiza 2014

Figura 4: Catedral Metropolitana Basílica Menor Nossa Senhora da Glória de Maringá (Paraná)



Fonte: Gazeta do Povo

5. Referências

[1]. ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; DIAS, Michele Regiane.Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. BOLEMA, ano 12, nº 22, pp.19-36.2004.

[2]. BASSANEZI, R. C. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.Editora Contexto, São Paulo, 2010.

[3]. Construções em formato de esfera - Resultados Yahoo Search da busca de imagens. Disponível em: <https://br.images.search.yahoo.com/search/images>. Acesso em 26/10/2023 às 21:57.

[4]. DE LIMA MADEIRA, L.; DA COSTA MELO, S. C. Sólidos de Revolução: Uma Proposta de Estudo. [s.l.] Universidade Federal de Juiz de Fora, 3 2014. Acesso em 22/10/2023 as 14:58

[5]. Didático C, Espacial G, Professora E, Chiapinotto M, Lutz. UNIVERSIDADE FEDERAL de SANTA MARIA Colégio Técnico Industrial de Santa Maria.; 2020. Accessed October 13, 2023.https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/705096/2/1%20SIII%20Geometria%20Espacial.pdf

[6]. LIMA, E. L. et al. A Matemática do Ensino Médio. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v.2. (Coleção do Professor de Matemática). Acesso em 22 de outubro de 2023.

[7]. Sólido de revolução - O que é, definição e conceito - 2021. Disponível em: <https://pt.economy-pedia.com/11036237-solid-of-revolution>. Acesso em: 22 out. 2023.

[8]. Sólidos de revolução. Disponível em: <https://pt.slideshare.net/wsalves/slidos-de-revoluo-5878789>..Acesso em 22/10/2023 as 17:07

[9]. *UNIVERSIDADE DO FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -PROFMAT THIAGO LOPES NASCIMENTO SANTIAGO O ENSINO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: Um Estudo Utilizando a Modelagem Matemática*.; 2018. https://portais.univasf.edu.br/profmat/thiago-lopes-nascimento-santiago_turma_2015.pdf