



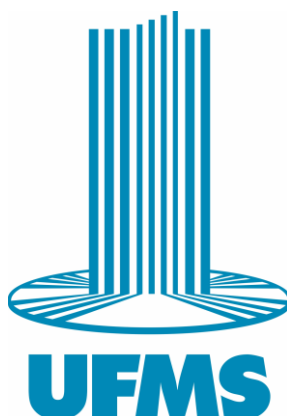
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Leila da Silva Santos

**ESTUDO SOBRE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS, COM EMPREGO DE
MÉTODOS E RECURSOS VARIADOS**

Três Lagoas - MS

2023



Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Leila da Silva Santos

ESTUDO SOBRE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS, COM EMPREGO DE
MÉTODOS E RECURSOS VARIADOS

Orientador Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes da Silva.

Três Lagoas - MS

2023

**ESTUDO SOBRE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS, COM
UTILIZAÇÃO DE MÉTODOS E RECURSOS
VARIADOS**

Leila da Silva Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes da Silva.

Data: 11/09/2023

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes da Silva. (Orientador).

Instituição: UFMS/CPTL

Julgamento:

Prof. Dr. Renato Cesar da Silva

Instituição: UFMS/CPTL

Julgamento:

Profa. Dra. Bruna Silveira Pavlack

Instituição: IFMS/*Campus* Três Lagoas

Julgamento:

`A minha família, meu porto seguro!

“A matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela.”

Albert Einstein

AGRADECIMENTOS

Meu agradecimento...

À minha família

Aos meus pais Antonio Anacleto e Geruza Correia, por todo apoio, incentivo aos estudos e amor incondicional. Obrigada por estarem ao meu lado, em todos os momentos da minha vida! Às minhas irmãs Silvia e Cristiani, que me apoiam e torcem por mim, sempre! Aos meus sobrinhos Guilherme, Tharso e Lívia, que não fazem ideia, mas a presença de cada um, faz toda a diferença na minha vida e, conseqüentemente, me impulsiona. Aos meus cunhados, que sempre estão dispostos a ajudar, parceria total! À Luziane, por estar sempre comigo, me apoiando e me incentivando. Não estaria aqui, sem o seu apoio! Aos meus primos, tios, avós (in memoriam), que completam a minha família, que é a base de tudo.

Ao Prof. Vitor Moretto Fernandes da Silva. (Orientador)

Grata pela confiança depositada, por dedicar inúmeras horas para sanar as minhas questões e me colocar na direção correta. Muito obrigada por todo aprendizado!

Aos colegas de curso

Também agradeço à todos os meus colegas de curso, pela oportunidade do convívio e pela cooperação mútua durante estes anos.

À UFMS, à SBM e ao IFMS

À Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, e todos os seus professores que sempre proporcionaram um ensino de alta qualidade.

Agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional. E por fim, agradeço ao IFMS, por me proporcionar o afastamento para participação em programa de pós-graduação stricto sensu.

RESUMO

Santos, LEILA. Estudo sobre áreas de figuras planas, com emprego de métodos e recursos variados. Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, campus de Três Lagoas, Mato Grosso do Sul, 2023.

O principal objetivo desta dissertação é contribuir para um ensino de qualidade e inclusivo. Essa contribuição será através de um estudo sobre Áreas de Figuras Planas, com a utilização de vários recursos e metodologias. O conceito de área será abordado de maneira concreta, contextualizada e inclusiva. Este trabalho, embora possa parecer, não é sobre inclusão ou como trabalhar determinado conteúdo com estudantes com algum tipo de deficiência. É sobre o estudo de Áreas de Figuras Planas e como ensiná-las, de maneira simples, concreta, em que todos aprendam, possuindo ou não alguma deficiência. Para isso, são apresentadas algumas técnicas para o cálculo de área, que podem ser aprofundadas, de acordo com o avanço de cada turma.

Palavras-chave: Área. Aprendizagem. Figuras Planas. Polígonos. Recursos. Teorema de Pick. Método por Excesso e Falta. Tangram. Decomposição de Polígonos. Método de Gauss. Regra do Cadarço.

ABSTRACT

Santos, Leila. Study on areas of flat figures, using varied methods and resources. Dissertation (PROFESSIONAL MASTER) – Federal University of Mato Grosso do Sul, Três Lagoas campus, Mato Grosso do Sul, 2023.

The main objective of this dissertation is to contribute to a quality and inclusive education. This contribution will be through a study on Areas of Flat Figures, with the use of several resources and methodologies. The concept of area will be addressed in a concrete, contextualized and inclusive way. This work, although it may seem like it, is not about inclusion or how to work on certain content with students with some type of disability. It's about the study of Areas of Plane Figures and how to teach it, in a simple, concrete way, in which everyone learns, whether or not they have a disability. For this, some techniques for area calculation are presented, which can be deepened, according to the progress of each class.

Key words: Area. Learning. Flat Figures. Polygons. Resources. Pick's theorem. Excess and Lack Method. Tangram. Polygon Decomposition. Gauss method. Shoelace Rule.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Polígonos convexos.....	3
Figura 1.2 - Polígonos não convexos.....	4
Figura 1.3 - Polígonos simples.....	4
Figura 1.4 - Polígonos complexos.	4
Figura 1.5 - Pentágono Regular inscrito numa circunferência.....	5
.....	6
Figura 1.6 - Vista aérea do Pentágono (Sede do Departamento de Defesa dos Estados Unidos).	6
Figura 1.7 – Perímetro e Área do Pentágono em função da medida do lado.....	8
Figura 1.8 - Representação grafica variação do perímetro e da área de um Pentágono.	9
Figura 1.9 - Ilustração de um Quadrado.....	10
Figura 1.10 - Ilustração de um Paralelogramo.....	11
Figura 1.11 - Ilustração de um triângulo.	11
Figura 1.12 - Ilustração de um trapézio.....	12
Figura 2.1 - Hexágono na malha quadriculada.	13
Figura 2.2 - Hexágono subdividido em outros polígonos.....	14
Figura 2.3 - TANGRAM.....	15
Figura 2.4 - Figuras construídas com peças do Tangram.....	17
Figura 2.5 - Tangram Online.....	18
Figura 2.6 - Peças do Tangram (Tangram Online).....	18
Figura 2.7 - Cisne (construído com Tangram).....	20
Figura 2.8 - Ilustração do Triângulo ABC.....	21
Figura 2.9 - Ilustração do trapézio DECA.	22
Figura 2.10 - Ilustração do trapézio DFBA e do trapézio FECB.....	22
Figura 2.11 - Diferença entre a área do trapézio DECA e a soma das áreas dos trapézios DFBA e FECB.	22
Figura 2.12 - Triângulo ABC no plano cartesiano.	23
Figura 2.13 - Ilustração do quadrilátero ABCD.....	25
Figura 2.14 - Ilustração do trapézio EFDA e do trapézio FGCD.	25
Figura 2.15 - Ilustração do trapézio EHBA e do trapézio HGCB.	25
Figura 2.16 - Área do quadrilátero ABCD	25

Figura 2.17 - Cálculo da área do quadrilátero ABCD (generalizada).....	27
Figura 2.18 - Ilustração do Pentágono ABCDE.....	28
Figura 2.19 - Ilustração do trapézio FGDE e do trapézio GHCD.....	28
Figura 2.20 - Ilustração do trapézio FGAE e do trapézio GHBA.....	28
Figura 2.21 - Área do Pentágono ABCDE.....	29
Figura 2.22 - Ilustração do Pentágono ABCDE.....	30
Figura 2.23 - Cálculo da área do pentágono ABCDE (generalizada).....	30
Figura 2.24 - Polígonos ABCD e EFGH no plano cartesiano.....	32
Figura 2.25 - Polígono ABCDEFG.....	34
Figura 2.26 - Triângulo ABC no plano cartesiano - Demonstração da Regra do Cadarço.....	36
Figura 2.27 - Triângulo ABC.....	39
Figura 2.28 - Triângulo ABC inserido na malha quadriculada.....	39
Figura 2.29 - Destaque aos quadradinhos internos do triângulo ABC.....	40
Figura 2.30 - Destaque aos quadradinhos que cobrem o triângulo ABC.....	40
Figura 2.31 - Desenho de um coração.....	41
Figura 2.32 - Desenho de um coração na malha quadriculada.....	41
Figura 2.33 - Destaque aos quadradinhos no interior do coração.....	42
Figura 2.34 - Destaque aos quadradinhos que cobrem o coração.....	42
Figura 2.35 - Desenho de um coração na malha quadriculada (quadradinho de área $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$).	43
Figura 2.36 - Destaque aos quadradinhos no interior do coração (quadradinho de área $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$).	43
Figura 2.37 - Destaque aos quadradinhos que cobrem o coração (quadradinho de área $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$).	44
Figura 2.38 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada.....	44
Figura 2.39 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros no interior do círculo).....	45
Figura 2.40 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros no interior do círculo).....	45
Figura 2.41 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros no interior do círculo).....	46
Figura 2.42 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros que cobrem o círculo).....	46

Figura 2.43 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros que cobrem o círculo).....	47
Figura 2.44 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros que cobrem o círculo).....	48
Figura 2.45 - Área sombreada \mathcal{A}	50
Figura 2.46 - Área \mathcal{A} subdividida em 4 partes.	50
Figura 2.47 - Área \mathcal{A} subdividida em 4 partes e seus respectivos retângulos.....	51
Figura 2.48 - Área \mathcal{A} subdividida em 8 partes e seus respectivos retângulos.....	52
Figura 2.49 - Área \mathcal{A} subdividida em 16 partes e seus respectivos retângulos.	53
Figura 2.50 - Área da região \mathcal{A} calculada no Geogebra.....	55
Figura 2.51 - Triângulo ABC.....	56
Figura 2.52 - Triângulo ABC inserido na malha quadriculada.	57
Figura 2.53 - Coordenadas inteiras no interior do triângulo ABC.....	57
Figura 2.54 - Coordenadas inteiras no contorno do triângulo ABC.	57
Figura 2.55 - Prova por absurdo do Teorema	59
Figura 2.56 - Justaposição dos polígonos P_1 e P_2	60
Figura 2.57 - Fórmula de Pick para o triângulo retângulo.....	61
Figura 2.58 - Fórmula de Pick para qualquer triângulo.....	63
Figura 3.1 - Multiplano.....	67
Figura 3.2 - Multiplano Virtual (versão que não teve continuidade).....	68
Figura 3.3 - Desenho de um Geoplano.....	69
Figura 3.4 - Ilustração de alguns Geoplanos.....	69
Figura 3.5 - Geoboard Virtual	70
Figura 3.6 - Ilustração de um trapézio.....	71
Figura 3.7 - Multiplano.....	72
Figura 3.8 - Geoplano	72
Figura 3.9 - Representação do trapézio no Geoboard.....	73
Figura 3.10 - Ilustração de um pentágono irregular.	74
Figura 3.11 - Ilustração de um polígono	74
Figura 3.12 - Representação de um polígono no Multiplano.....	75
Figura 3.13 - Representação de um polígono no Geoplano.....	75
Figura 3.14 - Representação de um polígono no Geoboard.....	76
Figura 3.15 - Ilustração de um hexágono irregular na malha quadriculada.....	76
Figura 3.16 - Ilustração de um hexágono irregular inserido num quadrado.....	77

Figura 3.17 - Hexágono irregular representado no Geoplano.....	77
Figura 3.18 - Hexágono irregular representado no Geoboard.....	78
Figura 3.19 - Ilustração de um hexágono na malha quadriculada, com destaque aos quadrinhos inteiros no seu interior.....	79
Figura 3.20 - Ilustração de um hexágono na malha quadriculada, com destaque aos quadrinhos que cobrem o polígono.....	79
Figura 3.21 - Representação do hexágono no Geoplano (Método de Falta e Excesso).....	80
Figura 3.22 - Representação do hexágono no Geoboard (Método de Falta e Excesso).	80
Figura 3.23 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada.....	81
Figura 3.24 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada, com destaque aos quadrinhos inteiros no seu interior.....	81
Figura 3.25 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada, com destaque aos quadrinhos que cobrem o polígono.....	82
Figura 3.26 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada (destaque aos quadrinhos inteiros no interior do polígono).....	83
Figura 3.27 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada (destaque aos quadrinhos inteiros que cobrem o polígono).....	83
Figura 3.28 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada, com destaque aos quadrinhos inteiros no seu interior.....	84
Figura 3.29 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada, com destaque aos quadrinhos que cobrem o polígono.....	85
Figura 3.30 - Quadrilátero representado no Geoplano.....	86
Figura 3.31 -- Representação do quadrilátero no Geoplano (Método de Falta e Excesso).....	86
Figura 3.32 - Representação do quadrilátero no Geoboard (Método de Falta e Excesso).....	87
Figura 3.33 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada.....	87
Figura 3.34 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada (destaque aos pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e pontos de coordenadas inteiras em suas arestas).	88
Figura 3.35 - Ilustração de um quadrilátero no Geoboard (destaque aos pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e pontos de coordenadas inteiras em suas arestas).....	88
Figura 3.36 - Imagem das 3 (três) lagoas (Três Lagoas/MS).....	89
Figura 3.37 - Imagem da Lagoa Maior (Três Lagoas/MS).....	90
Figura 3.38 - Foto de uma capivara na Lagoa Maior.....	90
Figura 3.39 - Lagoa Maior ou Primeira Lagoa - Três Lagoas/MS (visualização: Google Maps).	

.....	91
Figura 3.40 - Polígono representando a Lagoa Maior - Três Lagoas/MS.	92
Figura 3.41 - Medida da área por falta.	93
Figura 3.42 - Medida da área por excesso.	93
Figura 3.43 - Polígono "Lagoa Maior" representado no Geogebra.	94
Figura 3.44 - Polígono "Lagoa Maior" - Método de Falta e Excesso.	94
Figura 5.1 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 1).	98
Figura 5.2 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 2).	98
Figura 5.3 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 3).	99
Figura 5.4 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 4).	99
Figura 5.5 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 5).	99
Figura 5.6 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 6).	100
Figura 5.7 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 7).	100
Figura 5.8 - Figura planas no Geoplano.	102
Figura 5.9 - Área do triângulo ABC (Atividade 7).	104
Figura 5.10 - Área do pentagono ABCDE (Atividade 7).	104
Figura 5.11 - Área do pentagono ABCDE (Atividade 7), inserido num retângulo.	105
Figura 5.12 - Área do pentagono ABCDE (Atividade 7) - Método "Decomposição do polígono".	105
Figura 5.13 - Triângulo ABC (Atividade 7) na malha quadriculada.	106
Figura 5.14 - Área do triângulo ABC (Atividade 7), inserido num retângulo.	106
Figura 5.15 - Área do triângulo ABC, inserido na malha quadriculada (Atividade 10).	108

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
1 ÁREA DE FIGURAS PLANAS.....	3
1.1 DEFINIÇÃO DE POLÍGONOS.....	3
1.2 DEFINIÇÃO DE ÁREA.....	9
1.3 CÁLCULO DA ÁREA DE ALGUNS POLÍGONOS.....	10
2 ALGUMAS TÉCNICAS PARA O CÁLCULO DA ÁREA DE POLÍGONOS (REGULARES OU IRREGULARES) E/OU FIGURAS IRREGULARES.....	13
2.1 CÁLCULO DE ÁREAS POR MEIO DA DECOMPOSIÇÃO E COMPOSIÇÃO POR POLÍGONOS.....	13
2.1.1 O uso do Tangram para a introdução ao Cálculo de áreas.....	14
2.1.2 Regra do Cadarço ou Fórmula da Área de Gauss para o Cálculo da Área de Polígonos	21
2.2 CÁLCULO APROXIMADO DE ÁREAS DE REGIÕES POLIGONAIS UTILIZANDO O MÉTODO “MEDIDA DA ÁREA POR FALTA E MEDIDA DA ÁREA POR EXCESSO”.....	39
2.2.1 Introdução ao Cálculo da Integral – Cálculo da Area de uma Região.....	48
2.2.1.1 Introdução ao Cálculo da Integral	49
2.2.1.2 A integral Definida.....	54
2.3 CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIÕES POLIGONAIS UTILIZANDO O TEOREMA DE PICK	56
2.3.1 Demonstração do Teorema de Pick.....	58
2.3.2 Propriedade Aditiva da Fórmula de Pick	59
2.3.3 Validade do Teorema de Pick para qualquer triângulo.	61
3 UTILIZAÇÃO DE RECURSOS DIDÁTICOS PARA O CÁLCULO DE ÁREAS.....	64
3.1. MULTIPLANO.....	65
3.1.1 A Importância do uso do Multiplano nas aulas de Matemática.....	66
3.1.2 Multiplano Virtual.....	67
3.2 O GEOPLANO E O GEOBOARD.....	68
3.2.1 Geoplano.....	69
3.2.2 Geoboard	70
3.3 O USO DO MULTIPLANO, DO GEOPLANO E DO GEOBOARD PARA O CÁLCULO DE ÁREAS....	70
3.3.1 Cálculo de áreas de figuras irregulares, por meio da decomposição e composição por polígonos.....	71
3.3.2 Cálculo aproximado de áreas de regiões poligonais utilizando o Método “Medida da Área por Falta e Medida da Área por Excesso”	78

3.3.3 Cálculo de áreas de regiões poligonais utilizando o Teorema de Pick	87
3.4 CÁLCULO APROXIMADO DE ÁREAS DE REGIÕES IRREGULARES UTILIZANDO O GEOGEBRA E O GOOGLE MAPS.....	89
4 CONCLUSÃO.....	96
5 ANEXOS.....	98
5.1 ANEXO 1.....	98
5.2 ANEXO 2.....	101
BIBLIOGRAFIA.....	110
Referências Bibliográficas.....	110
Obras Consultadas.....	111

INTRODUÇÃO

A disciplina de Matemática é vista por grande parte dos estudantes como difícil e muito complexa. Mesmo para aqueles que não possuem deficiência ou necessidade educacional específica. Para um estudante que possui alguma deficiência a dificuldade é ainda maior por diversos motivos. Um deles é o despreparo dos professores em adaptar materiais a sua aula para que os estudantes com algum tipo de deficiência (visual, auditiva, intelectual, entre outras) possam compreender e, por consequência, aprender o conteúdo ensinado.

No ensino da Geometria as dificuldades são enormes, tanto para os estudantes quanto para os docentes, que acabam priorizando Aritmética e Álgebra, deixando Geometria para o último bimestre. Segundo Pavanello (1989), reservar o último bimestre para Geometria, parece indicar, conscientemente ou não, que a falta de tempo é utilizada como desculpa para não trabalhar geometria com os estudantes. Pavanello (1993), ressalta a importância de se trabalhar Aritmética, Álgebra e Geometria de forma integrada e destaca, como exemplo, que o trabalho com a Álgebra (desintegrada da Geometria), pode condicionar o indivíduo a operar sem questionamento sobre regras pré-estabelecidas, a fazer isto ou aquilo, sem questionar sobre o que faz. Se efetuado junto com Geometria, poderia proporcionar o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo.

Os estudantes, em diversos momentos, “decoram” (ou cantam) fórmulas, sem entender necessariamente o que estão fazendo. Uma maneira mecanizada de “reproduzir” o que estudou, mas que não oferece significado e é utilizado apenas para aquele momento e com um único objetivo, conseguir nota e/ou aprovação. Não é diferente quanto ao estudo de áreas. Fórmulas são decoradas, mas sem entendimento do que fazem e sem nenhuma contextualização. Se o professor “ousar” mudar um pouquinho o exercício na prova, é um desastre eminente. Não conseguem relacionar o que estudaram, com aquela nova situação apresentada e alguns reclamam dizendo “Mas, o senhor(a) não ensinou isso!” ou “O professor(a) cobrou na prova o que não foi dado em aula”. Outros reclamam que estudaram tanto, mas que na hora da prova “deu branco”. Tudo isso é consequência de um estudo mecanizado e sem nenhum significado para o estudante, o que torna a aula pouco ou nada interessante.

Sabe-se que a aula deve ser planejada pensando nas diferenças, portanto com diferentes metodologias e estratégias, respeitando as singularidades de cada um e que o conteúdo tenha significado para o estudante. Mas, é importante que essa aprendizagem ocorra de forma coletiva, ou seja, todos trabalhando juntos e aprendendo juntos, claro que respeitando o tempo

de cada um. Incluir um estudante que possua alguma deficiência, não significa trazer material diferente para trabalhar com ele de forma isolada. Isso não é incluir! Incluir é fazer com que o estudante se sinta parte da turma e aprenda junto!

Esse estudo tem o objetivo de inserir o estudo sobre Áreas de Figuras Planas (regulares ou não) no Ensino Médio, de forma concreta, com utilização de recursos educacionais como o Multiplano e/ou o Geoplano que pode ser comprado ou mesmo confeccionado e, com isso, incluir todos os estudantes, independente da deficiência que possuem. Além disso, tem como objetivo mostrar que é possível aprenderem de forma colaborativa, respeitando as diferenças, os limites e o tempo de cada um.

No capítulo 1, estudar-se-á a definição de polígono e sua classificação (convexo ou não convexo, simples ou complexo, regular ou irregular). Em seguida, o estudo será sobre área de figuras planas: conceito de área e cálculo da área de alguns polígonos.

Em seguida, no capítulo 2, serão vistas três técnicas para o cálculo de área de polígonos e/ou outras figuras irregulares. São elas:

- Cálculo de áreas de polígonos por meio da decomposição e composição por polígonos;
- Cálculo aproximado de áreas de regiões poligonais utilizando a Medida da Área por Falta e Medida da Área por Excesso;
- Cálculo de áreas de regiões poligonais utilizando o Teorema de Pick.

No Capítulo 3, serão utilizados alguns recursos didáticos e materiais manipuláveis, para que o estudante explore de forma mais concreta o conteúdo estudado. Além do Multiplano, serão introduzidos o Geoplano e o Geoboard, como recursos didáticos para o ensino de área de figuras planas. Também serão utilizados o software Geogebra e o Google Maps.

Por fim, terão sugestões, com uma sequência de atividades para serem utilizadas no Ensino Médio.

1 ÁREA DE FIGURAS PLANAS

Este capítulo, terá início com a definição de polígono e sua classificação (convexo ou não convexo, simples ou complexo, regular ou irregular). Em seguida, o estudo será sobre área de figuras planas: conceito de área e cálculo da área de alguns polígonos.

1.1 DEFINIÇÃO DE POLÍGONOS

Antes de conceituar a área, é preciso entender o conceito de polígonos (definição, tipos, entre outros).

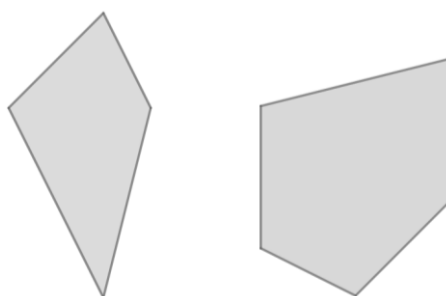
Polígono, segundo Elon (1991), é uma linha poligonal fechada sem auto-interseções, isto é, cada lado tem apenas um ponto comum com o lado anterior e com o seguinte, mas não com os demais.

Definição 1.1 Consideremos a sequência finita de pontos A_1, A_2, \dots, A_n com n natural e maior que dois. Chamamos de polígono $A_1 A_2 \dots A_n$ o conjunto de todos segmentos formados por dois pontos consecutivos, a saber, $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$ onde dois desses segmentos não possuem intersecção além dos vértices e, se consecutivos, não pertencem a mesma reta.

Os polígonos podem ser classificados em convexos ou não convexos (côncavos), simples ou complexos e regulares ou irregulares.

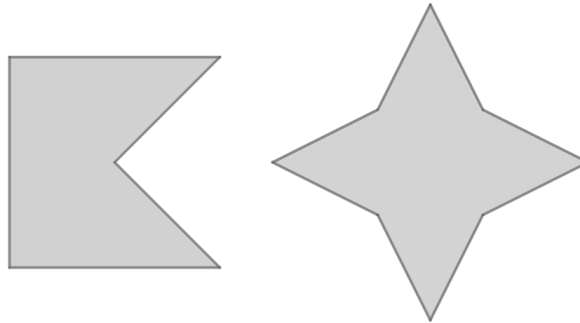
Uma das definições que Elon (1991) nos traz sobre polígono convexo é que “Um polígono diz-se convexo quando a região por ele limitada é uma figura plana convexa. Segue-se desta definição que toda diagonal de um polígono convexo está inteiramente contida na região por ele limitada.” Nos polígonos não convexos, isso não acontece.

Figura 1.1 – Polígonos convexos.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

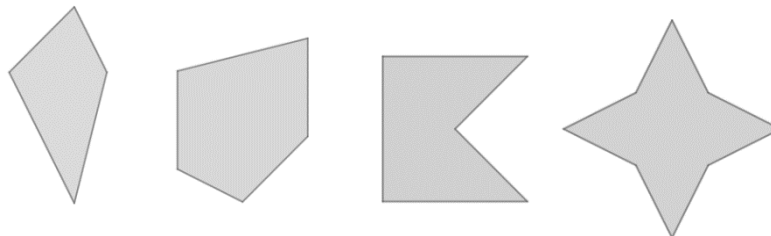
Figura 1.2 - Polígonos não convexos.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

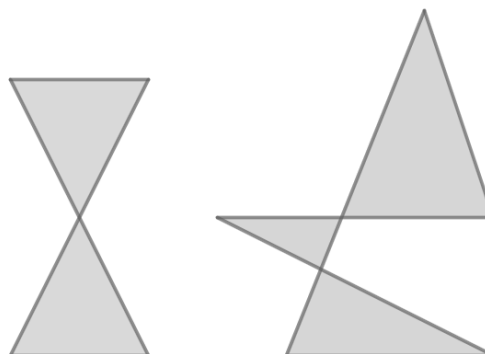
Os polígonos podem ser simples ou complexos. Os polígonos são simples quando seus segmentos consecutivos não são colineares e não se cruzam (tocam-se apenas nas extremidades). Caso haja intersecção entre dois lados não consecutivos, o polígono é chamado de complexo.

Figura 1.3 - Polígonos simples.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Figura 1.4 - Polígonos complexos.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Ainda com relação a polígonos, há a classificação em polígonos regulares e polígonos irregulares. O polígono é regular quando os lados possuem o mesmo comprimento e os ângulos internos possuem a mesma medida. Caso tenha lados com comprimentos diferentes e ângulos

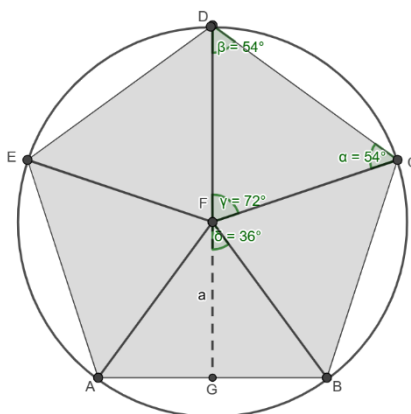
com medidas distintas, o polígono é denominado irregular.

i) Polígono Regular

Como visto anteriormente, um polígono é regular quando é convexo e possui todos os lados e ângulos de mesma medida. Exemplos de polígonos regulares: o quadrado, o triângulo equilátero, entre outros. Veja que, se o polígono possui lados e ângulos com mesma medida, é equilátero. Portanto, um polígono regular é um polígono equilátero.

A área de um polígono regular pode ser obtida por meio da soma das áreas dos triângulos que formam o polígono. O pentágono, por exemplo, é um polígono regular de cinco lados, com mesmo comprimento e ângulos internos com a mesma medida. Para calcular a sua área, basta calcularmos a soma da área dos triângulos que formam o pentágono, formados pelos segmentos de reta que são unidos a partir do centro da circunferência circunscrita ao polígono até os vértices.

Figura 1.5 - Pentágono Regular inscrito numa circunferência.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(36^\circ) &= \frac{\overline{GB}}{a} \\
 \operatorname{tg}(36^\circ) &= \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{a} \\
 \operatorname{tg}(36^\circ) \cdot a &= \frac{\overline{AB}}{2} \\
 a &= \frac{\overline{AB}}{2\operatorname{tg}(36^\circ)}
 \end{aligned}$$

Onde:

$a \rightarrow$ apótema do Pentágono.

$h \rightarrow$ altura do triângulo ABF , de base \overline{AB}

Veja que, $a = h$.

Como $A_{ABF} = \frac{b \cdot h}{2}$, então $A_{ABF} = \frac{\overline{AB} \cdot a}{2}$, ou seja:

$$A_{ABF} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AB}}{2 \cdot 2 \operatorname{tg}(36^\circ)}$$
$$A_{ABF} = \frac{(\overline{AB})^2}{4 \operatorname{tg}(36^\circ)}$$

Como a área de um polígono regular pode ser obtida por meio da soma das áreas dos triângulos que formam o polígono, então a área do pentágono $ABCDE$ é:

$$A_{ABCDE} = 5 \cdot \frac{(\overline{AB})^2}{4 \operatorname{tg}(36^\circ)}, \text{ ou seja } A_{ABCDE} = \frac{5}{4} \cdot \frac{(\overline{AB})^2}{\operatorname{tg}(36^\circ)}.$$

Como \overline{AB} é medida do lado do pentágono, então $A_{ABCDE} = \frac{5}{4} \cdot \frac{L^2}{\operatorname{tg}(36^\circ)}$.

Exemplo 1.1. (Exercício retirado do Caderno do Aluno - 3ª série EM - 1º semestre - Currículo em Ação 2023, página 211 - Secretaria da Educação do Estado de São Paulo). Na 3ª série do EM, na aula de matemática os estudantes foram orientados a realizarem uma maquete que representasse um monumento histórico com formatos geométricos, um dos grupos de estudantes escolheu construir o pentágono, que é o edifício da Sede do Departamento de Defesa dos Estados Unidos e que leva esse nome pois, quando visto de cima, suas partes formam o polígono.

Figura 1.6 - Vista aérea do Pentágono (Sede do Departamento de Defesa dos Estados Unidos).



Fonte: <https://cutt.ly/WBfXCnJ>. Acesso em: 25.jul.2022.

Antes de iniciar a maquete eles fizeram um esboço, com a figura medindo x de lado.

a) A partir dos dados do problema, encontre a expressão algébrica que relaciona a medida do perímetro (P) em função da medida do lado (L) de um pentágono.

Resolução: Sabe-se que o Perímetro é a soma da medida dos lados, portanto, considerando que o lado mede x e o perímetro está em função de x , tem-se que:

$$P(x) = 5x.$$

b) Considere que os estudantes, para verificarem qual pentágono regular teria o tamanho mais adequado, realizaram três esboços, com medidas de lados 5 cm , 7 cm e 8 cm . Considerando as medidas, construa uma tabela relacionando a variação do perímetro e da área com as medidas dos lados do pentágono.

Resolução: Deve ser construída a tabela e realizado os cálculos para preenchê-la corretamente.

Primeiro calcula-se os perímetros, em seguida as áreas e por fim é preenchida a tabela com os dados obtidos.

$$\text{PERÍMETRO} - P(L) = 5L$$

$$\text{Esboço 1:} \quad \text{lado: } 5\text{ cm} \quad P(5) = 5 \cdot 5 = 25\text{ cm}$$

$$\text{Esboço 2:} \quad \text{lado: } 7\text{ cm} \quad P(7) = 5 \cdot 7 = 35\text{ cm}$$

$$\text{Esboço 3:} \quad \text{lado: } 8\text{ cm} \quad P(8) = 5 \cdot 8 = 40\text{ cm}$$

$$\text{ÁREA} - S(L) = 5L - S(L) = \frac{5}{4} \cdot \frac{L^2}{\text{tg}(36^\circ)} \text{ ou } S(L) = \frac{5}{4} \cdot \frac{(L)^2}{\text{tg}(\frac{\pi}{5})}$$

Fazendo $\text{tg}(36^\circ) = 0,7265$, temos:

$$\begin{aligned} \text{Esboço 1:} \quad \text{lado: } 5\text{ cm} \quad S(5) &= \frac{5}{4} \cdot \frac{(5)^2}{\text{tg}(36^\circ)} \\ S(5) &= \frac{5}{4} \cdot \frac{25}{0,7265} \\ S(5) &= \frac{125}{2,906} \cong 43,01\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Esboço 2:} \quad \text{lado: } 7\text{ cm} \quad S(7) &= \frac{5}{4} \cdot \frac{(7)^2}{\text{tg}(36^\circ)} \\ S(7) &= \frac{5}{4} \cdot \frac{49}{0,7265} \\ S(7) &= \frac{245}{2,906} \cong 80,30\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Esboço 3:} \quad \text{lado: } 8\text{ cm} \quad S(8) &= \frac{5}{4} \cdot \frac{(8)^2}{\text{tg}(36^\circ)} \\ S(8) &= \frac{5}{4} \cdot \frac{64}{0,7265} \end{aligned}$$

$$S(8) = \frac{320}{2,906} \cong 110,12 \text{ cm}^2$$

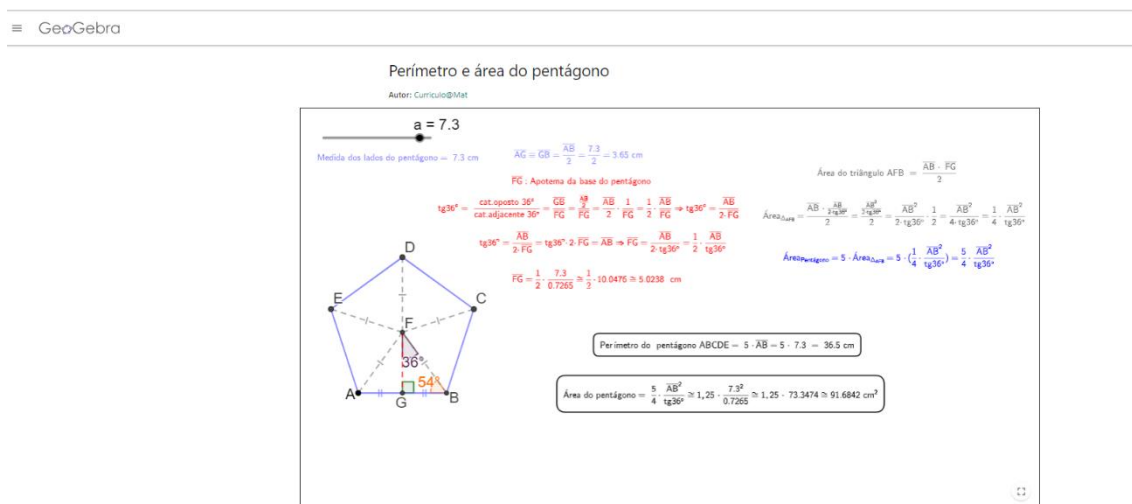
Tabela 1: Perímetro e Área do Pentágono Regular (lados: 5 cm, 7 cm e 8 cm).

Medidas	Esboço 1	Esboço 2	Esboço3
Lado (L)	5 cm	7 cm	8 cm
Perímetro: P(L)	25 cm	35 cm	40 cm
Área: S(L)	$\cong 43,01 \text{ cm}^2$	$\cong 80,30 \text{ cm}^2$	$\cong 110,12 \text{ cm}^2$

Fonte: Secretaria da Educação de São Paulo.

Observação: O estudante pode acessar o link a seguir e, utilizando o controle deslizante, alternar as medidas dos lados do pentágono e conferir a medida do perímetro e da área, em função do lado do pentágono. Disponível em: <https://cutt.ly/SBfX4Tg>. Acesso em: 12 jul. 2022 (Autor:Curriculo@Mat).

Figura 1.7 – Perímetro e Área do Pentágono em função da medida do lado.



Fonte: <https://cutt.ly/SBfX4Tg>. Acesso em: 12 jul. 2022 (Autor:Curriculo@Mat).

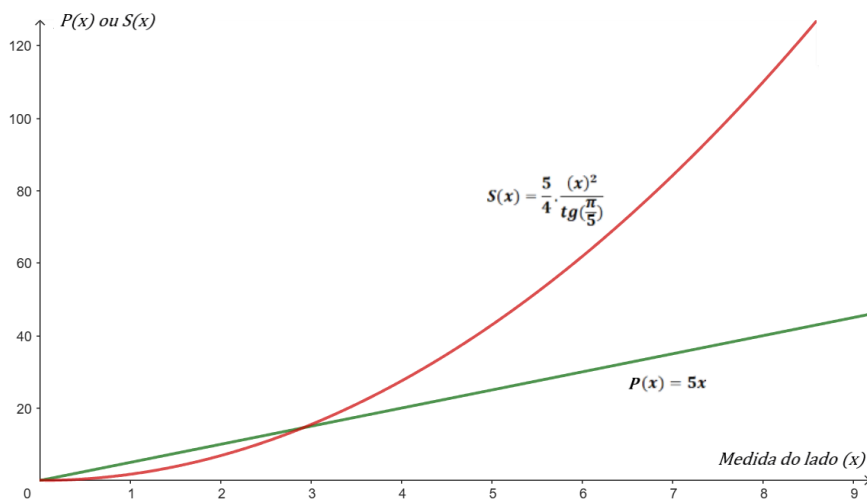
c) Represente graficamente a variação do perímetro e da área das maquetes que representam o esboço dos pentágonos regulares com medidas 5 cm, 7 cm e 8 cm.

O gráfico pode ser feito utilizando o Geogebra.

O Geogebra é um *software* de Geometria Dinâmica, de uso público, utilizado para construção de pontos, segmentos de retas, retas, vetores, figuras geométricas, gráficos de funções, entre outros.

Resolução:

Figura 1.8 - Representação gráfica variação do perímetro e da área de um Pentágono.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Vejam que, da mesma forma que a área do pentágono foi calculada, a área de qualquer polígono regular pode ser obtida por meio da soma das áreas dos triângulos que o formam.

ii) Polígono irregular

Um polígono é chamado irregular quando seus lados não possuem o mesmo comprimento e seus ângulos internos não tem a mesma medida. Há diferentes fórmulas para calcular-se a área de alguns polígonos irregulares, como o retângulo, por exemplo. Para outros polígonos, uma maneira simples para calcular sua área, é dividí-lo em outros polígonos que possuem área fácil de ser calculada (ou que a fórmula da área seja bem conhecida).

1.2 DEFINIÇÃO DE ÁREA

Uma vez definido polígono, inicia-se a definição de área.

“A área de uma região no plano é um número positivo que associamos a mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado” (extraído de Geometria MA 13 – PROFMAT).

Segundo “Os Elementos” de Euclides, a noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas:

Axioma de Área 1: A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.

O número a que se refere este axioma é chamado de área da região.

Axioma de Área 2: Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas

daquelas regiões.

Axioma de Área 3: Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.

Todo polígono simples determina uma região poligonal.

Será utilizado “a área de um quadrado” quando queremos dizer “a área da região poligonal cuja fronteira é um quadrado”, ou seja, falaremos de “área de um dado polígono”, quando queremos nos referir a área da região cuja fronteira é aquele polígono.

Dessa forma, o Axioma de Área 3 poderia ter sido enunciado como: “triângulos congruentes possuem áreas iguais”.

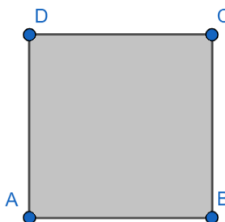
Axioma de Área 4: Se ABCD é um retângulo então sua área é dada pelo produto $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

A partir do conceito de área e dos axiomas acima, pode-se determinar a área das regiões poligonais.

1.3 CÁLCULO DA ÁREA DE ALGUNS POLÍGONOS

- **Área do quadrado:** como a base \overline{AB} e a altura \overline{BC} do quadrado tem o mesmo módulo, tem-se que a área do quadrado (ABCD) é igual a lado vezes lado ($l \cdot l$).

Figura 1.9 - Ilustração de um Quadrado.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

- **Área do paralelogramo:** é o produto do comprimento de um dos lados pelo comprimento da altura relativa a este lado. Portanto, a área do paralelogramo é igual a base vezes a altura ($b \cdot h$).

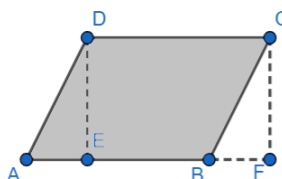
Veja que a área dos triângulos AED e BFC são congruentes (ver figura 1.10), portanto:

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCD) &= \text{Área}(AED) + \text{Área}(EBCD) = \\ &= \text{Área}(EBCD) + \text{Área}(BFC) = \end{aligned}$$

$$= \text{Área}(EFCD) = b \cdot h$$

Veja que EFCD é um retângulo, então sua área é dada pelo produto $\overline{EF} \cdot \overline{FC}$, ou seja $b \cdot h$ (base vezes a altura).

Figura 1.10 - Ilustração de um Paralelogramo.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

- **Área do triângulo:** é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.

Observe que um triângulo é metade de um paralelogramo, portanto sua área será metade da área de um paralelogramo, ou seja, a área de um triângulo é o produto da metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.

Veja que a área dos triângulos ACD e ABC são congruentes (ver figura 1.11), portanto:

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ACD) + \text{Área}(ABC)$$

Como $\text{Área}(ACD) = \text{Área}(ABC)$, então:

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(ABC)$$

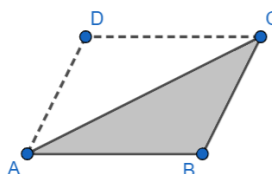
$$\text{Área}(ABCD) = 2 \cdot [\text{Área}(ABC)]$$

$$\frac{\text{Área}(ABCD)}{2} = \text{Área}(ABC)$$

Portanto, tem-se que $\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \text{Área}(ABCD)$, o que nos leva a:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} b \cdot h$$

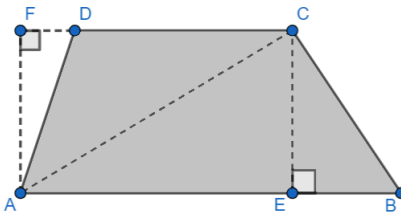
Figura 1.11 - Ilustração de um triângulo.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Área do trapézio: A área de um trapézio é a metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.

Figura 1.12 - Ilustração de um trapézio.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Veja que CE é a altura do triângulo ABC e AF é a altura do triângulo ACD. Como AB e CD são paralelos, tem-se que $\overline{CE} = \overline{AF}$. Logo:

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(ACD)$$

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CE} + \frac{1}{2}\overline{DC} \cdot \overline{AF}$$

Como $\overline{CE} = \overline{AF}$, então:

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CE} + \frac{1}{2}\overline{DC} \cdot \overline{CE}$$

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{CE}$$

Portanto, tem-se que a área do trapézio ABCD é a metade do produto do comprimento de sua altura, pela soma do comprimento de suas bases.

A área de outros polígonos poderão ser calculados seguindo os mesmos axiomas vistos anteriormente e que utiliza-se para calcular a área do quadrado, do triângulo, do paralelogramo e do trapézio.

2 ALGUMAS TÉCNICAS PARA O CÁLCULO DA ÁREA DE POLÍGONOS (REGULARES OU IRREGULARES) E/OU FIGURAS IRREGULARES

Neste capítulo, serão vistas três técnicas para o cálculo de área de polígonos e/ou outras figuras irregulares. São elas:

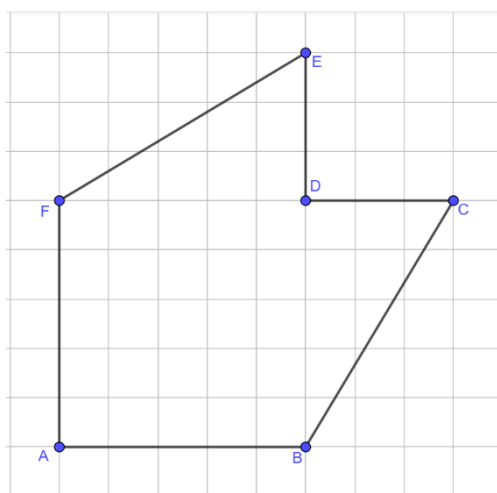
- Cálculo de áreas de polígonos por meio da decomposição e composição por polígonos;
- Cálculo aproximado de áreas de regiões poligonais utilizando a Medida da Área por Falta e Medida da Área por Excesso;
- Cálculo de áreas de regiões poligonais utilizando o Teorema de Pick.

2.1 CÁLCULO DE ÁREAS POR MEIO DA DECOMPOSIÇÃO E COMPOSIÇÃO POR POLÍGONOS

Este método consiste em decompor ou compor o polígono, em outros polígonos mais conhecidos, como o triângulo, o retângulo e o paralelogramo, com o intuito de calcular as áreas desses polígonos separadamente e, no final, fazer a soma total das áreas (em alguns casos, ao invés de somar, é realizado a diferença de área do polígono maior e do menor).

Foi visto, anteriormente, como calcular área de alguns polígonos irregulares mais conhecidos, como o paralelogramo, o trapézio, entre outros. Mas, o método da decomposição e composição por polígonos pode ser utilizado com qualquer polígono irregular, como por exemplo o hexágono a seguir:

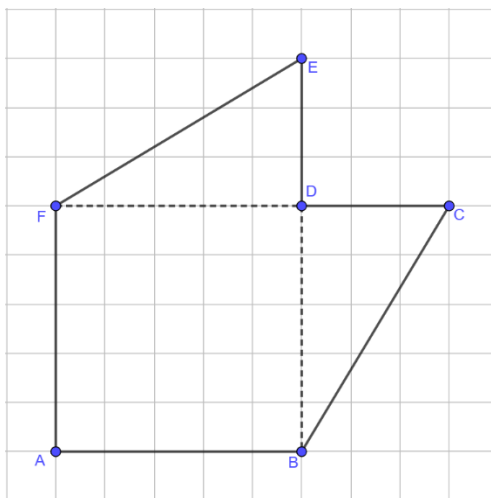
Figura 2.1 - Hexágono na malha quadriculada.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Para calcular a sua área, basta dividi-lo em outros polígonos conhecidos e calcular separadamente suas áreas. A área do hexágono será a soma das área de todos os polígonos que o compõe. Veja:

Figura 2.2 - Hexágono subdividido em outros polígonos



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Observe que o polígono está inserido numa malha quadriculada. A malha quadriculada é formada por pequenos quadrados e cada quadrado são chamados de unidades de área (u.a).

Como o hexágono foi dividido em outros três polígonos: um quadrado e dois triângulos congruentes, a área do polígono ABCDEF será a soma das áreas dos polígonos ABDF, BCD, FDE.

$$A(ABCDEF) = A(ABDF) + A(BCD) + A(FDE)$$

Como,

$$A(ABDF) = 5 \cdot 5 = 25 \text{ u.a.}$$

$$A(BCD) = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ u.a.}$$

$$A(FDE) = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ u.a.}$$

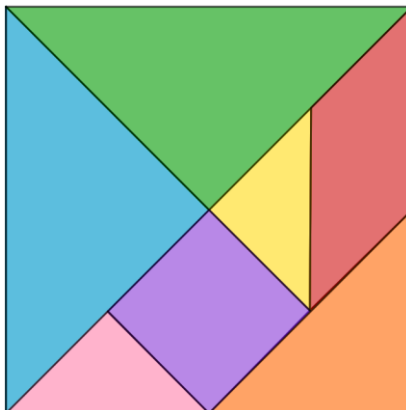
$$\text{Então, } A(ABCDEF) = 25 + 7,5 + 7,5 = 40 \text{ u.a.}$$

2.1.1 O uso do Tangram para a introdução ao Cálculo de áreas

O tangram é um quebra-cabeça chinês, que possui sete peças, que se encaixam sem sobrepor, formando um quadrado. Todas as peças são utilizadas para formar diversas figuras, sem sobreposição, mantendo assim a área inicial do quebra-cabeça.

O Tangram é formado por 7 peças: 2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Veja:

Figura 2.3 - TANGRAM



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Com essas peças (tans), é possível criar diversas formas e figuras.

Além de aguçar a criatividade, o tangram pode ser usado para o estudo de algumas figuras geométricas, para o estudo do cálculo de perímetro, estudo dos ângulos internos dos polígonos, estudo da área, fração, porcentagem, entre outros. Como o nosso estudo é sobre área, o enfoque será direcionado para o estudo de áreas, com a utilização do Tangram.

A seguir um pouco da história do Tangram, através de sua lenda:

"Conta a lenda que um jovem chinês despedia-se de seu mestre, pois iniciara uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou-lhe um espelho de forma quadrada e disse:

- Com esse espelho você registrará tudo que vir durante a viagem, para mostrar-me na volta.

O discípulo, surpreso, indagou:

- Mas mestre, como, com um simples espelho, poderei eu lhe mostrar tudo o que encontrar durante a viagem?

No momento em que fazia esta pergunta, o espelho caiu-lhe das mãos, quebrando-se em sete peças.

Então o mestre disse:

- Agora você poderá, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viu durante a viagem.

*Lendas e histórias sempre cercam objetos ou fatos de cuja origem temos pouco ou nenhum conhecimento, como é o caso do Tangram. Se é ou não verdade, pouco importa: o que vale é a magia, própria dos mitos e lendas."**

*Retirado do livro: Aprender vale a pena. (1998) Módulo 2. Secretaria do Estado de São Paulo.

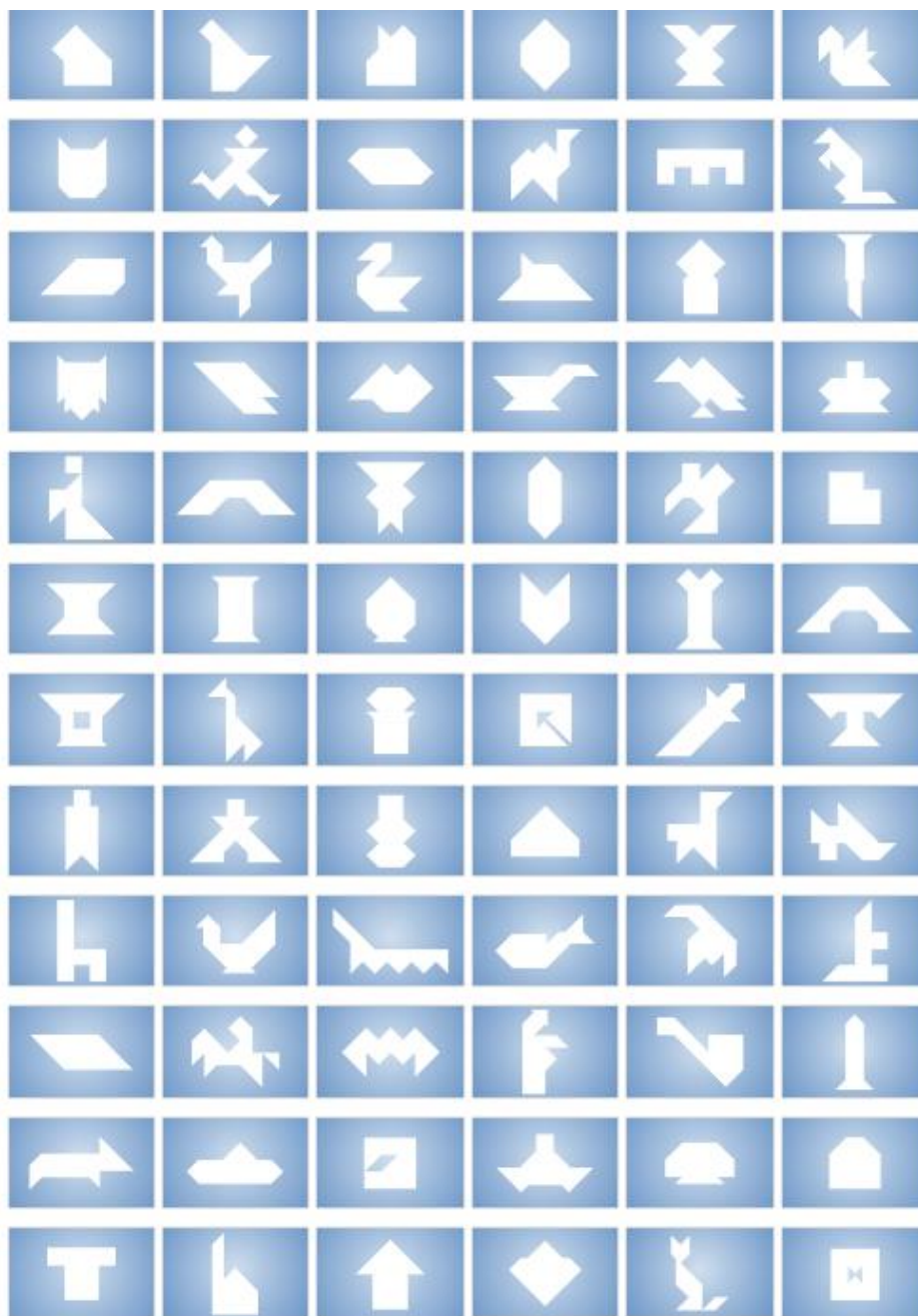
Com o Tangram, após contar sua lenda e os estudantes manipularem livremente as peças (montarem várias figuras utilizando as setes peças), há a possibilidade do ensino de área, através da comparação de área das figuras e da decomposição de um polígono P em n polígonos $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$, de forma que $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$.

Quando o professor apresentar o Tangram para os estudantes, é importante ensiná-los a construí-lo. Há vários sites e vídeos na internet que ensinam a construir um Tangram, como por exemplo, o site Educador Brasil Escola (Canal do Educador).

Durante a construção do Tangram, vários conceitos podem ser ensinados, ou lembrados, como vértices, ponto médio, segmento de reta, paralelismo e perpendicularismo entre retas, lembrar os nomes de alguns polígonos e sua definição, entre outros.

Com o Tangram físico pronto, os estudantes devem ser desafiados a montarem figuras de vários níveis de dificuldades, utilizando as setes peças e sem sobreposição. Lembre-se de perguntar, quando terminarem, a área de cada figura que formaram. É importante que entendam que utilizando as setes peças, sem sobreposição, a área será sempre a mesma, não importa que figura tenha montado. E faça perguntas do tipo, como isso é possível? Por que todas as figuras mantiveram a mesma área?

Figura 2.4 - Figuras construídas com peças do Tangram.



Fonte: <https://rachacuca.com.br/raciocinio/tangram/classicos/>

É importante o Tangram físico, para que o alunos possam manipulá-lo, mas nada impede que, após essa manipulação, o professor apresente o Tangram Online, para que os estudantes possam fazer algumas atividades programadas pelo professor.

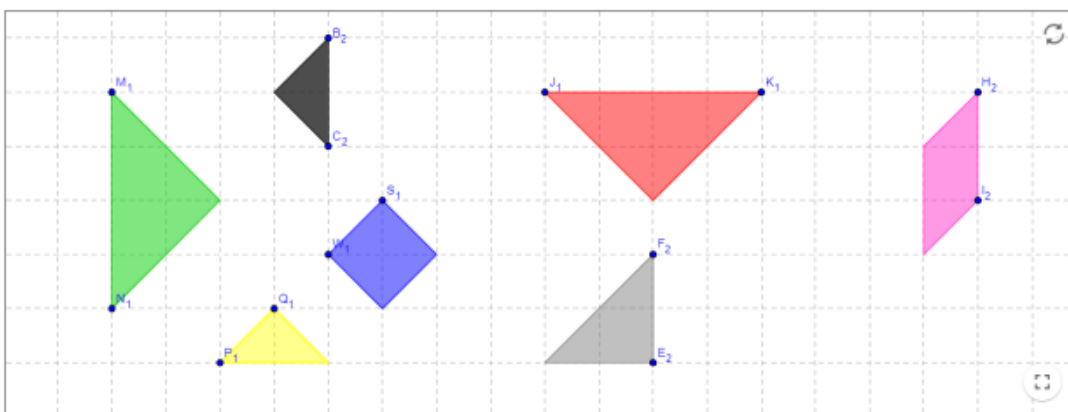
TANGRAM ONLINE

Figura 2.5 - Tangram Online.

Peças do Tangram: conceitos de área e perímetro.

Autor: annapalhano

Tópico: Área



Acesse o link: <http://www.geogebra.org/material/show/id/56393>

Com o Tangram online, também pode ser explorado o conceito de área de outras formas, basta fixar uma das figuras como sendo uma unidade de área e, a partir dela, utilizando sobreposição, calcular quantas unidades de área tem as demais figuras. Caso queira, pode fixar o quadrado da malha quadriculada, que está como pano de fundo, como uma unidade de medida e, dessa forma, verificar a área de cada figura que compõe o tangram online.

Exemplo 2.1. Observe o Tangram online na malha quadriculada.

- a) Considerando que cada quadrado da malha quadriculada representa 1 unidade de área, escreva dentro de cada peça do tangram a sua unidade de área. Faça o cálculo utilizando duas maneiras diferentes, em uma delas deve ser utilizada a fórmula da área.

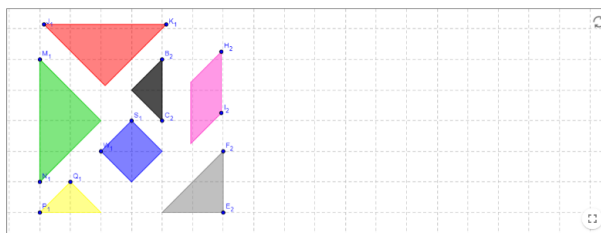
Figura 2.6 - Peças do Tangram (Tangram Online).

≡ GeoGebra

Peças do Tangram: conceitos de área e perímetro.

Autor: annapalhano

Tópico: Área



Fonte: <http://www.geogebra.org/material/show/id/56393>

Resolução:

Maneira 1: Uma das maneiras utilizadas pode ser a contagem dos quadradinhos (unidade de área), que “cabem” em cada figura:

- ✓ Triângulo Grande: 2 quadradinhos e 4 metades de quadradinhos, totalizando 4 unidades de área.
- ✓ Triângulo Médio: 1 quadradinho e 2 metades de quadradinhos, totalizando 2 unidades de área.
- ✓ Triângulo Pequeno: 2 metades de quadradinhos, totalizando 1 unidade de área.
- ✓ Quadrado: 4 metades de quadradinhos, totalizando 2 unidades de área.
- ✓ Paralelogramo: 1 quadradinho e 2 metades de quadradinhos, totalizando 2 unidades de área.

Como são 2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo, a soma das áreas das peças do tangram é: $4 + 4 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2$, totalizando 16 unidades de área.

Maneira 2: Uma outra maneira seria calcular todas as áreas, utilizando a fórmula.

Área do Triângulo Grande:

$$A_{TG} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ u. a.}$$

Área do Triângulo Médio:

$$A_{TM} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ u. a.}$$

Área do Triângulo Pequeno:

$$A_{TP} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ u. a.}$$

Área do Quadrado:

Primeiro é preciso encontrar a medida do lado do quadrado. Observe que o lado do quadrado tem a medida da diagonal do quadradinho da malha quadriculada. Utilizando o Teorema de Pitágoras, encontramos a medida do lado do quadrado do Tangram.

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x = \sqrt{2}$$

Portanto, o lado do quadrado mede $\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

Com posse da medida do lado do quadrado, tem-se que:

$$A_Q = l^2 = (\sqrt{2})^2 = \sqrt{4} = 2 \text{ u. a.}$$

Área do Paralelogramo:

$$A_P = b \cdot h = 2 \cdot 1 = 2 \text{ u. a.}$$

Área Total do Tangram

Como são 2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo, tem-se que a soma das áreas das peças do tangram é:

$$A_{Tangram} = 2A_{TG} + A_{TM} + 2A_P + A_Q + A_P$$

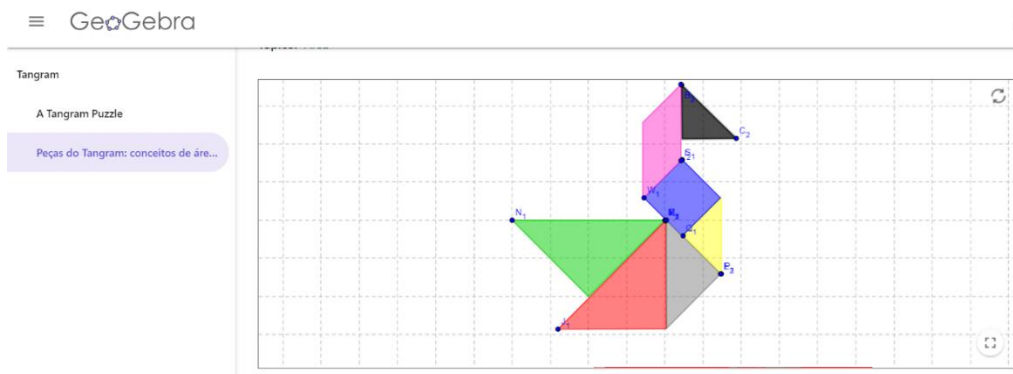
$$A_{Tangram} = 2 \cdot 4 + 2 + 2 \cdot 1 + 2 + 2$$

$$A_{Tangram} = 8 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$A_{Tangram} = 16 \text{ u. a.}$$

Exemplo 2.2. Com todas as peças do Tangram online, monte um cisne e calcule a sua área.

Figura 2.7 - Cisne (construído com Tangram).



Fonte: cisne construído através do Tangram Virtual - link: <http://www.geogebraTube.org/material/show/id/56393>

Observe que, uma vez calculada a área de todas as peças do tangram (estipulado a unidade de medida), qualquer figura que for montada utilizando todas as peças, sem sobreposição, terá a mesma área. Essa área será a soma das áreas de todas as peças do tangram. Portanto, a área do cisne será:

$$\text{Área}_{(cisne)} = 2 \cdot A_{TG} + 1 \cdot A_{TM} + 2 \cdot A_{TP} + 1 \cdot A_Q + 1A_P$$

A_{TG} = Área do Triângulo Grande

A_{TM} = Área do Triângulo Médio

A_{TP} = Área do Triângulo Pequeno

A_Q = Área do Quadrado

A_P = Área do Paralelogramo

Logo:

$$\text{Área}_{(cisne)} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2$$

$$\text{Área}_{(cisne)} = 8 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$\text{Área}_{(cisne)} = 16 \text{ u. a.}$$

Outras figuras devem ser montadas e calculadas as suas áreas, para que o estudante

entenda que, qualquer figura montada com as mesmas peças, sem sobreposição, resultará na mesma medida de área.

2.1.2 Regra do Cadarço ou Fórmula da Área de Gauss para o Cálculo da Área de Polígonos

A Regra do Cadarço ou Fórmula da Área de Gauss é uma outra maneira de calcular a área de um polígono. Esta fórmula pode ser utilizada para o cálculo da medida da área, mas é importante que o estudante, neste momento, já possua clareza sobre a definição de área.

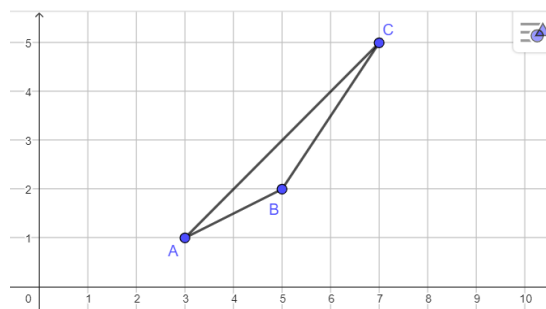
O matemático alemão, Johann Carl Friedrich Gauss, descobriu uma fórmula para calcular a área de um polígono qualquer, utilizando as coordenadas cartesianas dos vértices do polígono. Essa fórmula, conhecida como Fórmula da Área de Gauss ou “Regra do Cadarço”, será abordada neste tópico como mais uma técnica para o cálculo da área de polígonos.

O método de Gauss baseia-se no cálculo da dupla área da poligonal. Para entender exatamente o que é este método e como a área é calculada será realizada algumas demonstrações.

Demonstração da Fórmula de Gauss através do cálculo da área de um Triângulo:

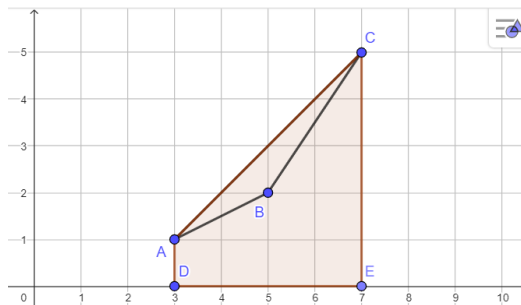
O triângulo ABC, com coordenadas $A = (3,1)$, $B = (5,2)$, $C = (7,5)$ é a área poligonal que será calculada. Para o cálculo da área, será utilizado o método de Gauss, que para calcular a área do Triângulo ABC, irá se basear na soma e na subtração da área de trapézios formados pelos vértices e pelas projeções sobre os eixos x e y. A demonstração será realizada com a base dos trapézios no eixo x.

Figura 2.8 - Ilustração do triângulo ABC.



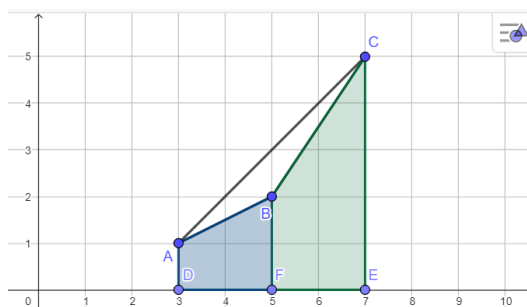
Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Figura 2.9 - Ilustração do trapézio DECA.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

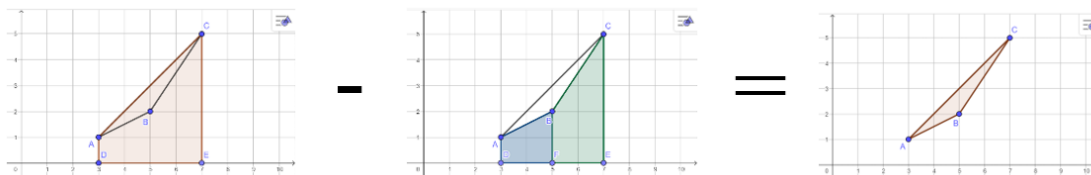
Figura 2.10 - Ilustração do trapézio DFBA e do trapézio FECB.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Observe que a área do triângulo ABC é igual a diferença entre a área do trapézio DECA e a soma das áreas dos trapézios DFBA e FECB.

Figura 2.11 - Diferença entre a área do trapézio DECA e a soma das áreas dos trapézios DFBA e FECB.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Tem-se que:

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(DECA) - [\text{Área}(DFBA) + \text{Área}(FECB)]$$

Como,

$$\text{Área}(DECA) = \frac{(7 - 3) \cdot (5 + 1)}{2} = \frac{7 \cdot 5 + 7 \cdot 1 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 1}{2}$$

$$\text{Área}(DFBA) = \frac{(5-3) \cdot (1+2)}{2} = \frac{5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2}{2}$$

$$\text{Área}(FECE) = \frac{(7-5) \cdot (2+5)}{2} = \frac{7 \cdot 2 + 7 \cdot 5 - 5 \cdot 2 - 5 \cdot 5}{2}$$

Então:

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(DECA) - [\text{Área}(DFBA) + \text{Área}(FECE)]$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}[(7 \cdot 5 + 7 \cdot 1 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 1) - (5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2) - (7 \cdot 2 + 7 \cdot 5 - 5 \cdot 2 - 5 \cdot 5)]$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}[7 \cdot 5 + 7 \cdot 1 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 7 \cdot 2 - 7 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 5]$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}[(7 \cdot 5 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 5) - (3 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 5)]$$

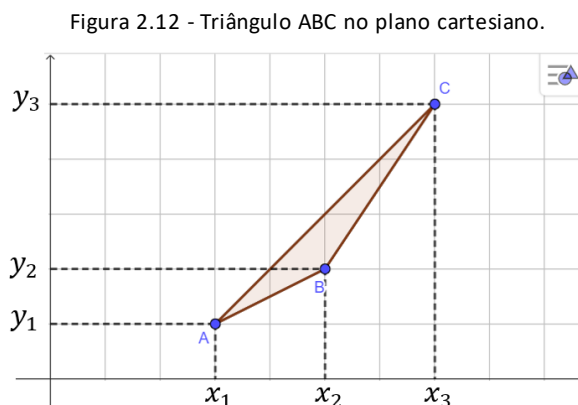
$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}[(35 + 7 + 3 + 6 + 10 + 25) - (15 + 3 + 5 + 10 + 14 + 35)]$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}[86 - 82]$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4$$

$$\text{Área}(ABC) = 2 \text{ u. a.}$$

Generalizando o cálculo da área de qualquer triângulo e considerando os seguintes pontos: $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, tem-se que:



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |[(x_3 - x_1) \cdot (y_3 + y_1) - (x_2 - x_1) \cdot (y_2 + y_1) - (x_3 - x_2) \cdot (y_3 + y_2)]|$$

Como não existe área negativa, o cálculo deve estar entre módulos.

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |[(x_3 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 - x_1 \cdot y_1) - (x_2 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_1) - (x_3 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_2)]|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |[x_3 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1 - x_3 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_2]|$$

Reorganizando, tem-se:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |[(x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_3) - (x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3)]|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |[(x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_1) + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_2) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + (x_3 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_3)]|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |[0 + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + 0 + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + 0]|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |[(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3)]|$$

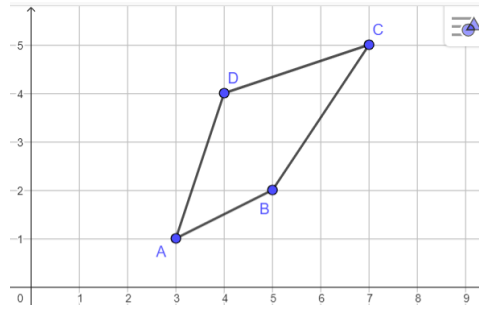
Portanto, a área de triângulo qualquer, pode ser obtida através da fórmula:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |[(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3)]|$$

Demonstração da Fórmula de Gauss através do cálculo da área de um Quadrilátero:

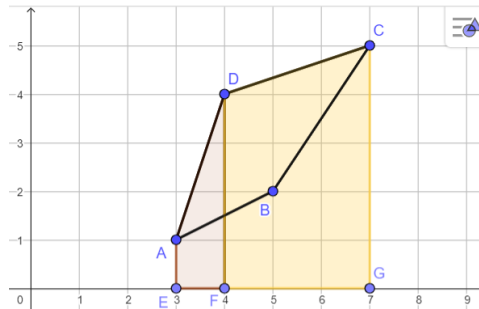
O quadrilátero ABCD, com coordenadas $A = (3,2)$, $B = (5, 1)$, $C = (7,2)$ e $D = (4,4)$ é a área poligonal que será calculada. Para o cálculo da área, será utilizado novamente o método de Gauss, com a soma e a subtração da área de trapézios formados pelos vértices e pelas projeções sobre os eixos x e y. A demonstração será realizada com a base dos trapézios no eixo x.

Figura 2.13 - Ilustração do quadrilátero ABCD.



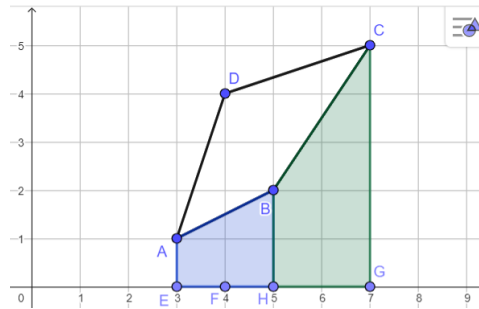
Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Figura 2.14 - Ilustração do trapézio EFDA e do trapézio FGCD.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

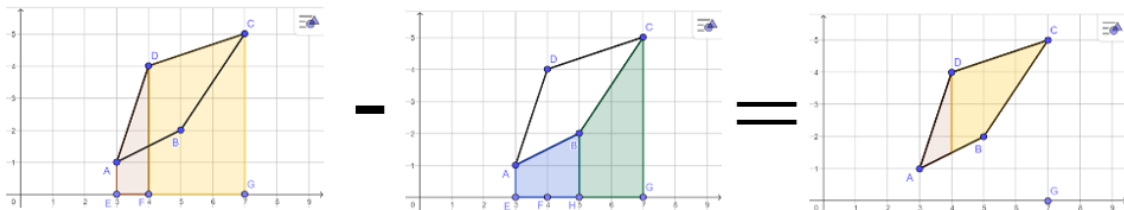
Figura 2.15 - Ilustração do trapézio EHBA e do trapézio HGCB.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Note que a área do quadrilátero ABCD é igual a diferença entre a soma da área dos trapézio EFDA e FGCD e a soma das áreas dos trapézios EHBA e HGCB.

Figura 2.16 - Área do quadrilátero ABCD .



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Tem-se que:

$$\text{Área } (ABCD) = [\text{Área } (EFDA) + \text{Área } (FGCD)] - [\text{Área } (EHBA) + \text{Área } (HGCB)]$$

$$\text{Área } (ABCD) = \text{Área } (EFDA) + \text{Área } (FGCD) - \text{Área } (EHBA) - \text{Área } (HGCB)$$

Como,

$$\text{Área } (EFDA) = \frac{(4-3) \cdot (4+1)}{2} = \frac{4 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 1}{2}$$

$$\text{Área } (FGCD) = \frac{(7-4) \cdot (5+4)}{2} = \frac{7 \cdot 5 + 7 \cdot 4 - 4 \cdot 5 - 4 \cdot 4}{2}$$

$$\text{Área } (EHBA) = \frac{(5-3) \cdot (2+1)}{2} = \frac{5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{2}$$

$$\text{Área } (HGCB) = \frac{(7-5) \cdot (5+2)}{2} = \frac{7 \cdot 5 + 7 \cdot 2 - 5 \cdot 5 - 5 \cdot 2}{2}$$

Então:

$$\text{Área } (ABCD) = \text{Área } (EFDA) + \text{Área } (FGCD) - \text{Área } (EHBA) - \text{Área } (HGCB)$$

$$\text{Área } (ABCD) = \frac{4 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 1}{2} + \frac{7 \cdot 5 + 7 \cdot 4 - 4 \cdot 5 - 4 \cdot 4}{2} - \frac{5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{2} - \frac{7 \cdot 5 + 7 \cdot 2 - 5 \cdot 5 - 5 \cdot 2}{2}$$

$$\text{Área } (ABCD) = \frac{1}{2} [(4 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 1) + (7 \cdot 5 + 7 \cdot 4 - 4 \cdot 5 - 4 \cdot 4) - (5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1) - (7 \cdot 5 + 7 \cdot 2 - 5 \cdot 5 - 5 \cdot 2)]$$

$$\text{Área } (ABCD) = \frac{1}{2} [(16 + 4 - 12 - 3) + (35 + 28 - 20 - 16) - (10 + 5 - 6 - 3) - (35 + 14 - 25 - 10)]$$

$$\text{Área } (ABCD) = \frac{1}{2} [(5) + (27) - (6) - (14)]$$

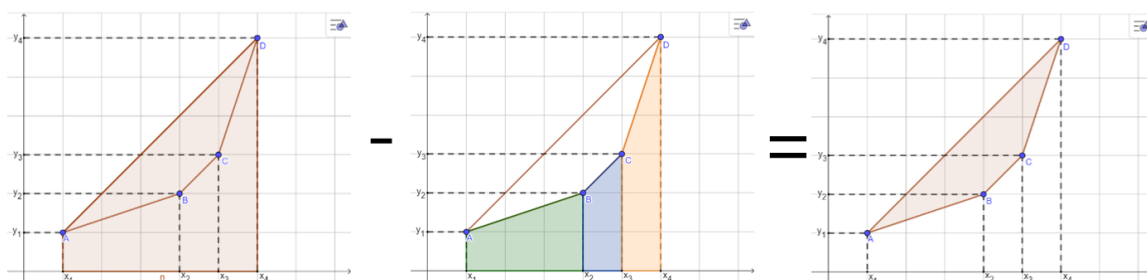
$$\text{Área } (ABCD) = \frac{1}{2} [32 - 20]$$

$$\text{Área } (ABCD) = \frac{1}{2} [12]$$

$$\text{Área}(ABCD) = 6 \text{ u. a.}$$

Generalizando o cálculo da área de qualquer quadrilátero e considerando os pontos: $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$ e $D = (x_4, y_4)$, tem-se que:

Figura 2.17 - Cálculo da área do quadrilátero ABCD (generalizada).



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Como não existe área negativa, o cálculo deve estar entre módulos.

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2} |[(x_4 - x_1) \cdot (y_1 + y_4) - (x_4 - x_3) \cdot (y_3 + y_4) - (x_3 - x_2) \cdot (y_2 + y_3) - (x_2 - x_1) \cdot (y_1 + y_2)]|$$

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2} |[(x_4 \cdot y_1 + x_4 \cdot y_4 - x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) - (x_4 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4 - x_3 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_4) - (x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3) - (x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)]|$$

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2} |[x_4 \cdot y_1 + x_4 \cdot y_4 - x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3 - x_4 \cdot y_4 + x_3 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_4 - x_3 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2]|$$

Reorganizando:

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2} |[(x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_4 + x_4 \cdot y_1 + x_4 \cdot y_4) - (x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_4 + x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4)]|$$

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2} |[(x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_1) + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_2) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_3) + (x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3) + (x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) + (x_4 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_4)]|$$

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2} |[0 + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + 0 + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + 0 + (x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3) + (x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) + 0]|$$

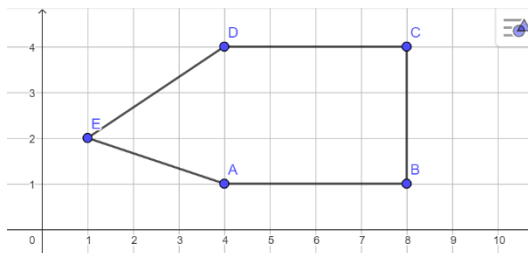
Portanto, a área de um quadrilátero qualquer, pode ser obtida através da fórmula:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} |[(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3) + (x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4)]|$$

Demonstração da Fórmula de Gauss através do cálculo da área de um Pentágono:

O Pentágono ABCDE, com coordenadas $A = (4,1)$, $B = (8,1)$, $C = (8,4)$, $D = (4,4)$ e $E = (1,2)$ é a área poligonal que será calculada. Para o cálculo da área, será utilizado o método de Gauss, que para calcular a área do Pentágono ABCDE, irá se basear na soma e na subtração da área de trapézios formados pelos vértices e pelas projeções sobre os eixos x e y. Essa demonstração será realizada com a base dos trapézios no eixo x.

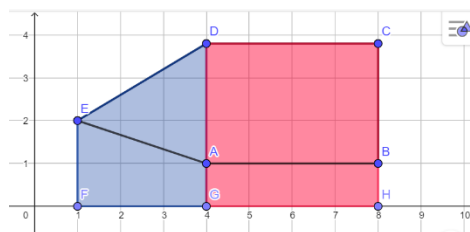
Figura 2.18 - Ilustração do Pentágono ABCDE.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

A área da próxima figura será chamada de Área 2, que é a soma da área do trapézio FGDE com o trapézio GHCD.

Figura 2.19 - Ilustração do trapézio FGDE e do trapézio GHCD.

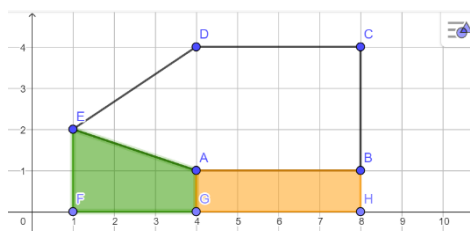


Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Será chamada de área 1 a soma do trapézio FGAE com o trapézio GHBA.

Veja:

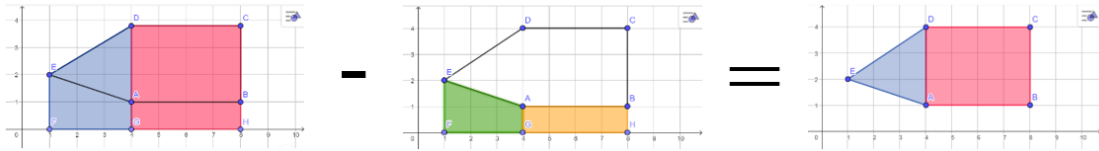
Figura 2.20 - Ilustração do trapézio FGAE e do trapézio GHBA.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Observe que a área do Pentágono ABCDE é a diferença entre a área 2 e área 1.

Figura 2.21 - Área do Pentágono ABCDE.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Ou seja,

$$\text{Área 2} - \text{Área 1} = \text{Área } ABCDE$$

$$(\text{Área } FGDE + \text{Área } GHCD) - (\text{Área } FGAE + \text{Área } GHBA) = \text{Área } ABCDE$$

$$\text{Área } FGDE + \text{Área } GHCD - \text{Área } FGAE - \text{Área } GHBA = \text{Área } ABCDE$$

Como,

$$\text{Área } FGDE = \frac{(4-1) \cdot (4+2)}{2} = \frac{4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2}{2}$$

$$\text{Área } GHCD = \frac{(8-4) \cdot (4+4)}{2} = \frac{8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4}{2}$$

$$\text{Área } FGAE = \frac{(4-1) \cdot (1+2)}{2} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2}$$

$$\text{Área } GHBA = \frac{(8-4) \cdot (1+1)}{2} = \frac{8 \cdot 1 + 8 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1}{2}$$

Tem-se então, que:

$$\text{Área } FGDE + \text{Área } GHCD - \text{Área } FGAE - \text{Área } GHBA = \text{Área } ABCDE$$

$$\begin{aligned} \text{Área } ABCDE &= \frac{1}{2} [(4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2) + (8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4) \\ &\quad - (4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) - (8 \cdot 1 + 8 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área } ABCDE &= \frac{1}{2} [4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &\quad + 1 \cdot 2 - 8 \cdot 1 - 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1] \end{aligned}$$

$$\text{Área } ABCDE = \frac{1}{2}[16 + 8 - 4 - 2 + 32 + 32 - 16 - 16 - 4 - 8 + 1 + 2 - 8 - 8 + 4 + 4]$$

Reorganizando:

$$\text{Área } ABCDE = \frac{1}{2}[(16 + 8 + 32 + 32 + 1 + 2 + 4 + 4) - (4 + 2 + 16 + 16 + 4 + 8 + 8 + 8)]$$

$$\text{Área } ABCDE = \frac{1}{2}[(99) - (66)]$$

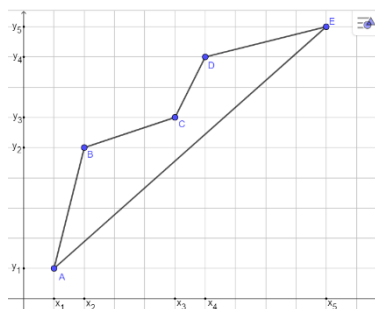
$$\text{Área } ABCDE = \frac{1}{2}[33]$$

$$\text{Área } ABCDE = \frac{33}{2}$$

$$\text{Área } ABCDE = 16,5 \text{ u. a.}$$

Generalizando o cálculo da área de qualquer pentágono e considerando os seguintes pontos: $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3), D = (x_4, y_4)$ e $E = (x_5, y_5)$, tem-se que:

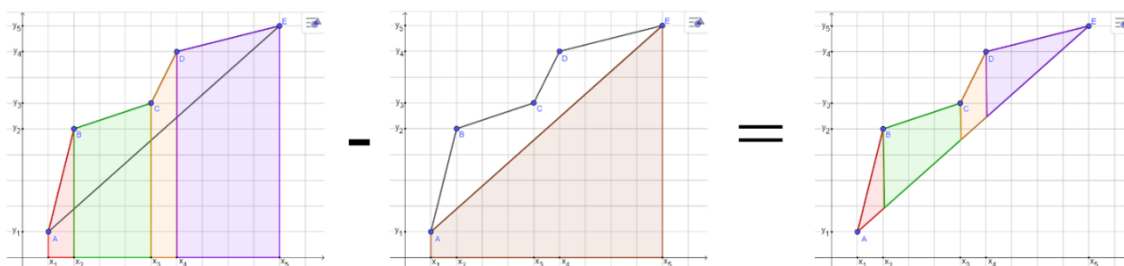
Figura 2.22 - Ilustração do Pentágono ABCDE.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Então:

Figura 2.23 - Cálculo da área do pentágono ABCDE (generalizada).



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Como não existe área negativa, o cálculo deve ser efetuado entre módulos.

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCDE) = \frac{1}{2} & |[(x_2 - x_1) \cdot (y_1 + y_2) + (x_3 - x_2) \cdot (y_2 + y_3) + (x_4 - x_3) \cdot (y_3 + y_4) \\ & + (x_5 - x_4) \cdot (y_4 + y_5) - (x_5 - x_1) \cdot (y_1 + y_5)]| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCDE) = \frac{1}{2} & |[(x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3) \\ & + (x_4 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4 - x_3 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_4) + (x_5 \cdot y_4 + x_5 \cdot y_5 - x_4 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_5) \\ & - (x_5 \cdot y_1 + x_5 \cdot y_5 - x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_5)]| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCDE) = \frac{1}{2} & |[x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_3 \\ & + x_4 \cdot y_4 - x_3 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_4 + x_5 \cdot y_4 + x_5 \cdot y_5 - x_4 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_5 - x_5 \cdot y_1 - x_5 \cdot y_5 \\ & + x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_5]| \end{aligned}$$

Reorganizando, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCDE) = \frac{1}{2} & |[x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_5 + x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4 + x_5 \cdot y_4 \\ & + x_5 \cdot y_5 - x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_5 \\ & - x_5 \cdot y_1 - x_5 \cdot y_5]| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCDE) = \frac{1}{2} & |[(x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_1) + (-x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_2) + (-x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2) \\ & + (x_3 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_3) + (-x_3 \cdot y_4 + x_4 \cdot y_3) + (x_4 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_4) + (-x_4 \cdot y_5 + x_5 \cdot y_4) \\ & + (-x_5 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_5) + (x_5 \cdot y_5 - x_5 \cdot y_5)]| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCDE) = \frac{1}{2} & |[0 + (-x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) + 0 + (-x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2) + 0 + (-x_3 \cdot y_4 \\ & + x_4 \cdot y_3) + 0 + (-x_4 \cdot y_5 + x_5 \cdot y_4) + (-x_5 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_5) + 0]| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCDE) = \frac{1}{2} & |[(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3) + (x_4 \cdot y_5 - x_5 \cdot y_4) \\ & + (x_5 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_5)]| \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCDE) = \frac{1}{2} & |[(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3) + (x_4 \cdot y_5 - x_5 \cdot y_4) \\ & + (x_5 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_5)]| \end{aligned}$$

Portanto, a área de um pentágono qualquer, pode ser obtida através da fórmula:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} |[(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3) + (x_4 \cdot y_5 - x_5 \cdot y_4) + (x_5 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_5)]|$$

O mesmo cálculo realizado para conseguir a área de um triângulo, de um quadrilátero e de um pentágono, pode ser utilizado para conseguir a área de qualquer polígono. Seguindo o mesmo raciocínio, Gauss criou a fórmula que será vista em seguida.

Fórmula de Gauss para o cálculo de área de um polígono:

Dado um polígono $A_1A_2A_3A_4\dots A_n$, no plano cartesiano XOY, tem-se que as coordenadas dos vértices são os pontos $A_i = (x_i, y_i)$, com $1 \leq i \leq n$, onde n é o número de vértices do polígono. Com as coordenadas dos vértices do polígono estudado e aplicando a fórmula a seguir, será encontrada a área do polígono em questão.

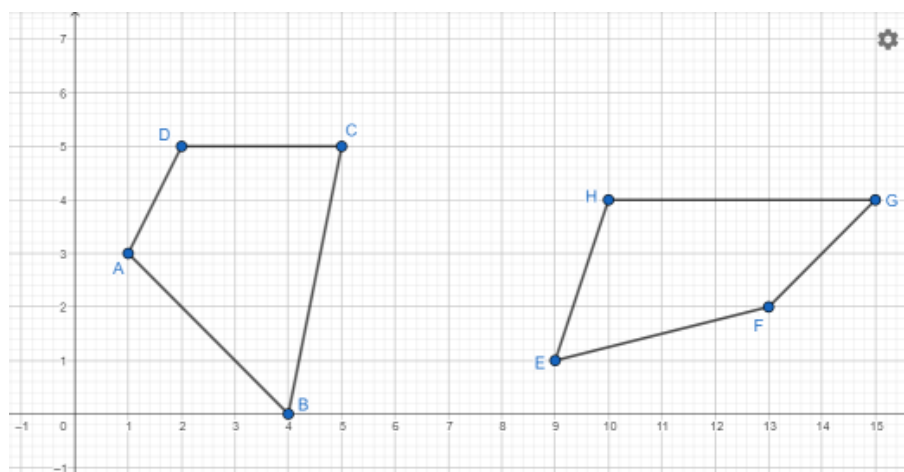
Como já mencionado anteriormente, a Fórmula de Gauss fundamenta-se na soma e na subtração da área de trapézios formados pelos vértices e pelas projeções sobre os eixos x e y . Essa fórmula pode ser expressa por diferentes equações, como a que será vista a seguir:

Fórmula para o cálculo da área de um polígono simples qualquer:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right|$$

Exemplo 2.3. Calcule a área do polígono ABCDE e a área do polígono EFGH e verifique qual possui a maior área.

Figura 2.24 - Polígonos ABCD e EFGH no plano cartesiano.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Resolução:

Utilizando a utilizando a Fórmula de Gauss, primeiro será calculada a área do polígono ABCD.

$$A = (1,3); B = (4,0); C = (5,5); D = (2,5)$$

$$\text{Área } (ABCD) = \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right|$$

$$\text{Área } (ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |(4 \cdot 3 - 1 \cdot 0) + (5 \cdot 0 - 5 \cdot 4) + (2 \cdot 5 - 5 \cdot 5) + (1 \cdot 5 - 3 \cdot 2)|$$

$$\text{Área } (ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |12 - 20 - 15 - 1|$$

$$\text{Área } (ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |12 - 36|$$

$$\text{Área } (ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |-24|$$

$$\text{Área } (ABCD) = 12 \text{ u.a.}$$

Em seguida, será calculada a área do polígono EFGH.

$$\text{Como: } E = (9,1); F = (13,2); G = (15,4); H = (10,4)$$

e

$$\text{Área } (ABCD) = \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right|$$

Então:

$$\text{Área } (EFGH) = \frac{1}{2} \cdot |(13 \cdot 1 - 2 \cdot 9) + (15 \cdot 2 - 4 \cdot 13) + (10 \cdot 4 - 4 \cdot 15) + (9 \cdot 4 - 1 \cdot 10)|$$

$$\text{Área } (EFGH) = \frac{1}{2} \cdot |(13 - 18) + (30 - 52) + (40 - 60) + (36 - 10)|$$

$$\text{Área } (EFGH) = \frac{1}{2} \cdot |-5 - 22 - 20 + 26|$$

$$\text{Área } (EFGH) = \frac{1}{2} \cdot |-47 + 26|$$

$$\text{Área } (EFGH) = \frac{1}{2} \cdot |-21|$$

$$\text{Área } (EFGH) = \frac{1}{2} \cdot 21$$

$$\text{Área } (EFGH) = 10,5 \text{ u.a.}$$

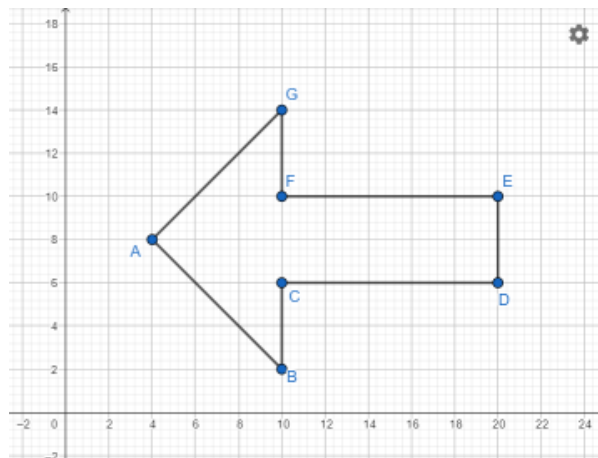
Comparando as áreas dos polígonos:

$$\text{Área}(ABCD) = 12 \text{ u. a. e } \text{Área}(EFGH) = 10,5 \text{ u. a.}$$

Concluí-se que o polígono ABCD tem área maior que o polígono EFGH.

Exemplo 2.4. Calcule a área do polígono ABCDEFG, utilizando a Fórmula da área de Gauss.

Figura 2.25 - Polígono ABCDEFG.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Resolução:

Observe que este exercício é fácil de resolver utilizando apenas a contagem do quadradinhos e multiplicando posteriormente por 4, uma vez que cada quadrado possui 2 unidades de lado, portanto 4 u. a.

São 16 quadradinhos inteiros e 6 metades, totalizando 19 quadradinhos.

Como cada quadradinho tem área 4 u. a. , então:

$$\text{Área}(ABCDEFG) = 4 \cdot 19 = 76 \text{ u. a.}$$

Utilizando a “Fórmula da Área de Gauss”, calcula-se a área do polígono ABCDEFG.

Como os pontos do polígono ABCDEF são:

$$A = (4,8); B = (10,2); C = (10,6); D = (20,6); E = (20,10); F = (10,10); G = (10,14)$$

Utilizando a fórmula da Área de Gauss:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right|$$

Tem-se, que:

$$\begin{aligned} \text{Área } (ABCDEFGG) &= \frac{1}{2} \cdot |(10 \cdot 8 - 4 \cdot 2) + (10 \cdot 2 - 6 \cdot 10) + (20 \cdot 6 - 6 \cdot 10) + \\ &(20 \cdot 6 - 10 \cdot 20) + (10 \cdot 10 - 10 \cdot 20) + (10 \cdot 10 - 14 \cdot 10) + (4 \cdot 14 - 8 \cdot 10)| \end{aligned}$$

$$\text{Área } (ABCDEFGG) = \frac{1}{2} \cdot |72 - 40 + 60 - 80 - 100 - 40 - 24|$$

$$\text{Área } (ABCDEFGG) = \frac{1}{2} \cdot |132 - 284|$$

$$\text{Área } (ABCDEFGG) = \frac{1}{2} \cdot |152|$$

$$\text{Área } (ABCDEFGG) = \frac{1}{2} \cdot 152$$

$$\text{Área } (ABCDEFGG) = 76 \text{ u.a.}$$

A Fórmula de Gauss e a Regra do Cadarço (Shoelace Theorem):

A Regra do Cadarço (ou Teorema do Cadarço) é utilizada para determinar a área de polígonos, inseridos num sistemas de coordenadas cartesianas, através das coordenadas dos seus vértices. É chamada de Regra do Cadarço ou Fórmula do Cadarço, por conta da constante multiplicação cruzada entre as coordenadas dos vértices do polígono. Este método foi exposto por Meister em 1769 e por Gauss em 1795 (Fórmula de Gauss). É aplicada na topografia, na agrimensura, na sivilicultura, entre outros.

A Regra do Cadarço pode ser demonstrada dividindo o polígono em triângulos, em seguida calculando a área de cada triângulos obtido quando o polígono foi dividido e por fim somando essas áreas.

Seja \mathcal{P} um polígono com vértices $(x_1, y_2), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ listados em sentido horário ou anti-horário. Então, a área de \mathcal{P} é:

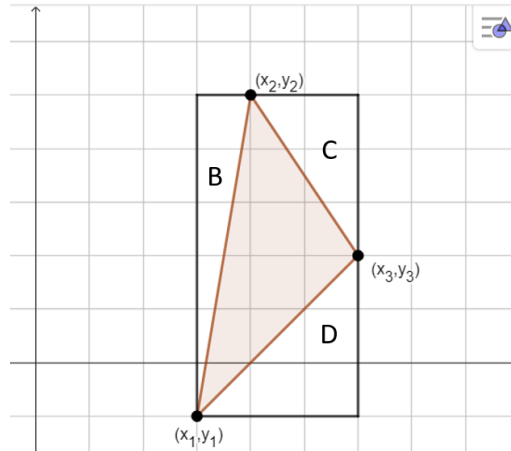
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} |(x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_2 + \dots + x_{n-1} \cdot y_n + x_n \cdot y_1) - (x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_2 + \dots + x_1 \cdot y_n)|$$

Demonstração da Regra do Cadarço para o cálculo da Área de um Triângulo

O triângulo, com coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ é a área poligonal que será calculada.

Seja \mathcal{A} a área do triângulo que deseja-se calcular, R a área do retângulo circunscrito ao triângulo, em que pelo menos um dos vértices do triângulo coincida com um dos vértices do retângulo, como na figura a seguir.

Figura 2.26 - Triângulo ABC no plano cartesiano - Demonstração da Regra do Cadarço.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Veja que, além do triângulo inicial, aparecem outros três que possuem área B, C e D.
Tem-se que:

$$\mathcal{A} = R - B - C - D$$

Como as áreas dos outros três triângulos são:

$$B = \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} [(x_2 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1) - (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)]$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot (x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_3) = \frac{1}{2} [(x_3 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3) - (x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3)]$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot (x_3 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) = \frac{1}{2} [(x_3 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_1) - (x_3 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_3)]$$

E a área do retângulo é:

$$R = (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) = [(x_3 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1) - (x_1 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_1)]$$

Então:

$$\mathcal{A} = R - B - C - D$$

$$\mathcal{A} = [(x_3 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1) - (x_1 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_1)] - \frac{1}{2} [(x_2 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1) - (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)]$$

$$- \frac{1}{2} [(x_3 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3) - (x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3)]$$

$$- \frac{1}{2} [(x_3 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_1) - (x_3 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_3)]$$

$$\mathcal{A} = [(x_3 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1) - (x_1 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_1)] - \frac{1}{2} [(x_2 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1) - (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)]$$

$$- \frac{1}{2} [(x_3 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3) - (x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3)]$$

$$- \frac{1}{2} [(x_3 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_1) - (x_3 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_3)]$$

$$\text{Logo: } \mathcal{A} = \frac{1}{2} |(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1) - (y_1 \cdot x_2 + y_2 \cdot x_3 + y_3 \cdot x_1)|$$

A Regra do Cadarço pode ser generalizada para qualquer polígono, porque todos podem ser decompostos em triângulos. Portanto, a fórmula para o cálculo da área de qualquer polígono é:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right|$$

Observe que chegamos na mesma Fórmula de Gauss.

Fazendo jus ao nome “Regra do Cadarço”

Como mencionado anteriormente, a Regra do Cadarço possui este nome por conta da constante multiplicação cruzada entre as coordenadas dos vértices do polígono, o que lembra quando “trançamos” o cadarço do tênis.

Para utilizar a Regra do Cadarço, primeiro coloca-se os vértices do triângulo numa matriz 4×2 . O número de colunas deve ser 2, com primeira coluna sendo para as abcissas e a segunda coluna para as ordenadas.

Cada linha da matriz deve ser preenchida por um vértice, iniciando por qualquer um, os demais mantendo o sentido anti-horário. A última linha deve ser igual a primeira linha.

Então:

$$A = (1, 2), B = (6, 2) \text{ e } C = (1, 5).$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Utilizando a fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right|$$

Tem-se:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2} \cdot |(6 \cdot 2 - 2 \cdot 1) + (1 \cdot 2 - 6 \cdot 5) + (1 \cdot 5 - 2 \cdot 1)|$$

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2} \cdot |(12 - 2) + (2 - 30) + (5 - 2)|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |(10) + (-28) + (3)|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |10 - 28 + 3|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |13 - 28|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |13 - 28|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |-15|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 15$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{15}{2}$$

$$\text{Área}(ABC) = 7,5 \text{ u.a.}$$

Ou

$$\text{Área}(ABC) = 7,5 \text{ u}^2.$$

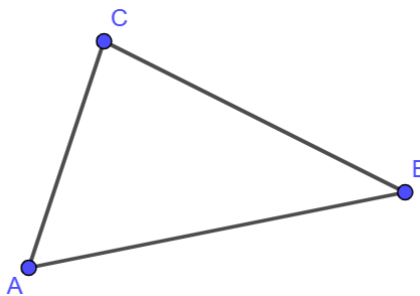
Embora a determinação da área de um polígono nos leve a uma fórmula, é importante que o estudante saiba calcular essas áreas através da composição e decomposição do polígono em outros polígonos, em que o cálculo da área já é conhecido. Se assim fizer, a aprendizagem acontecerá de maneira significativa e o estudante conseguirá aplicar esse conhecimento na determinação da área de qualquer polígono simples. É importante que o professor tenha cuidado com o uso dessas fórmulas, para que o cálculo da área não seja realizado de maneira mecanizada, sem o estudante compreender o que está fazendo.

2.2 CÁLCULO APROXIMADO DE ÁREAS DE REGIÕES POLIGONAIS UTILIZANDO O MÉTODO “MEDIDA DA ÁREA POR FALTA E MEDIDA DA ÁREA POR EXCESSO”.

Um método que pode ser utilizado para obter-se a área aproximada de uma região é o de Medida da Área por Falta ou por Excesso. Neste caso, necessita-se inserir o polígono numa malha quadriculada. Conta-se quantos quadradinhos inteiros há no interior do polígono (área por falta) e quantos quadradinhos inteiros cobrem o polígono (área por excesso). Este método pode ser utilizado não só por polígonos, mas por qualquer figura plana. Além disso, quanto menor forem os quadradinhos da malha em que a figura for inserida, mais preciso será a medida da área.

Exemplo 2.5 Calcule a área aproximada do triângulo ABC, a seguir, utilizando o método “Medida da Área por Falta e Medida da Área por Excesso”.

Figura 2.27 – Triângulo ABC

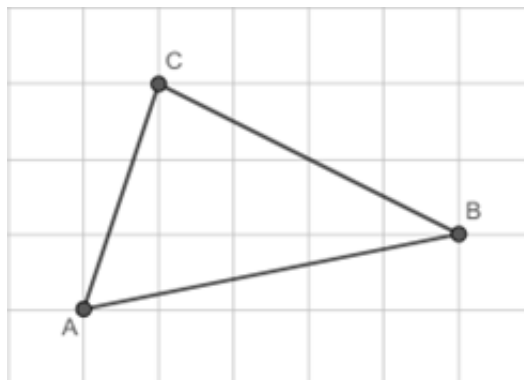


Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Resolução: Este método é utilizado para calcular a área aproximada do polígono por falta ou por excesso.

Primeiro: inserir o triângulo ABC em uma malha quadriculada.

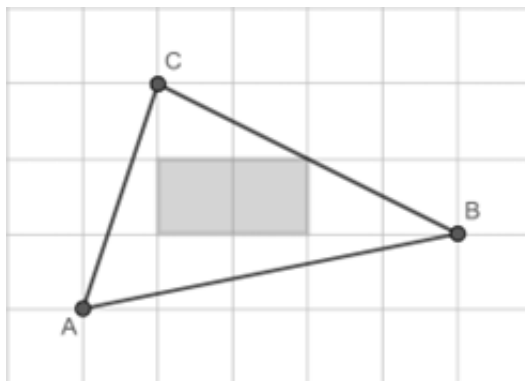
Figura 2.28 - Triângulo ABC inserido na malha quadriculada.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Segundo: contar todos os quadradinhos inteiros, inseridos na figura. Veja que são dois quadradinhos inteiros, no interior da figura:

Figura 2.29 - Destaque aos quadradinhos internos do triângulo ABC.

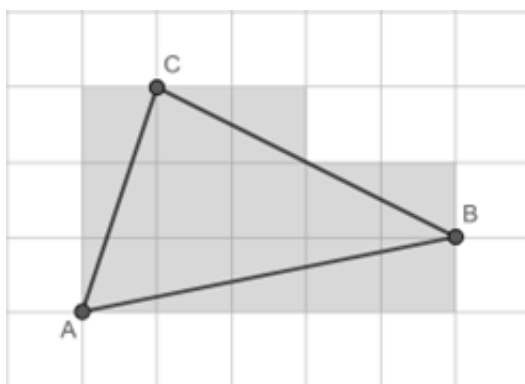


Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Neste caso, a área aproximada do triângulo ABC, por falta, é de $2 u. a.$

Em seguida, são contados os quadradinhos que cobrem a figura (ou pertencem a figura, inteiros ou não). Neste caso, existem treze quadradinhos cobrindo a figura.

Figura 2.30 - Destaque aos quadradinhos que cobrem o triângulo ABC.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Neste caso, a área aproximada do triângulo ABC, por excesso, é de $13 u. a.$

Portanto, a área do triângulo ABC é algo entre $2 u. a.$ e $13 u. a.$

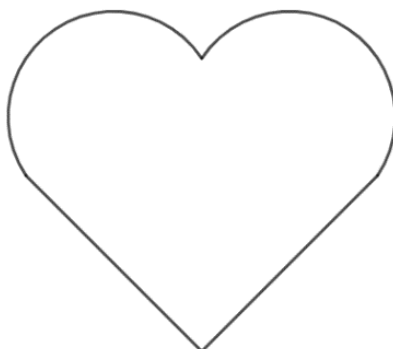
$$2 u. a. < A(ABC) < 13 u. a.$$

Observe que, neste caso, a área do triângulo ABC ficou dentro de um intervalo muito grande. Para conseguir um intervalo menor, o triângulo deve ser inserido numa malha quadriculada com a unidade de medida de área (u.a.) menor (será visto em outros exemplos).

Esse método, pode ser utilizado também para o cálculo aproximado de figuras não regulares, como vê-se no próximo exemplo.

Exemplo 2.6 Calcule a área aproximada da figura a seguir (coração), utilizando o Método da Falta e Excesso.

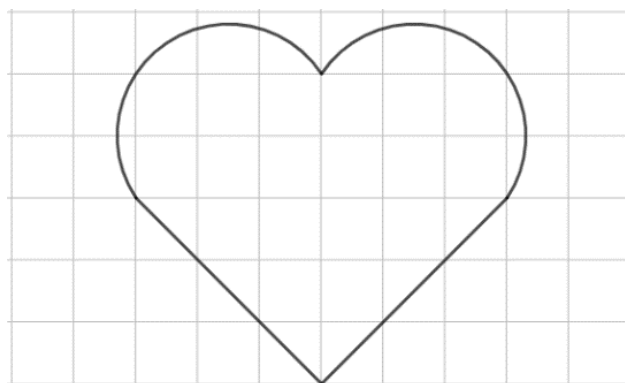
Figura 2.31 - Desenho de um coração.



Fonte: a autora, com utilização do Paint e do Geogebra

Resolução: Primeiro, a figura deve ser inserida numa malha quadriculada, com quadradinhos de 1 *cm* de medida do lado (área 1 *cm*²).

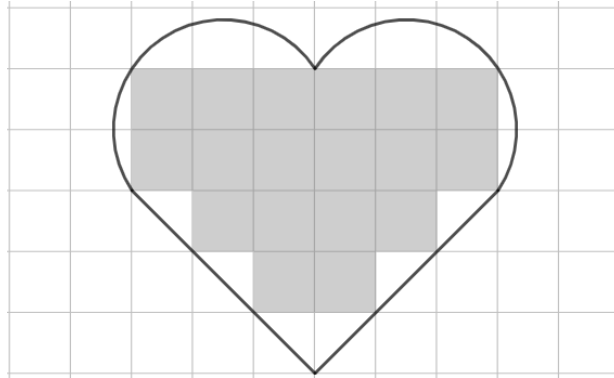
Figura 2.32 - Desenho de um coração na malha quadriculada.



Fonte: a autora, com utilização do Paint e do Geogebra

Segundo, são contados todos os quadradinhos inteiros, inseridos no interior da figura. Observe, que são 18 quadradinhos inteiros no interior da figura.

Figura 2.33 - Destaque aos quadradinhos no interior do coração.

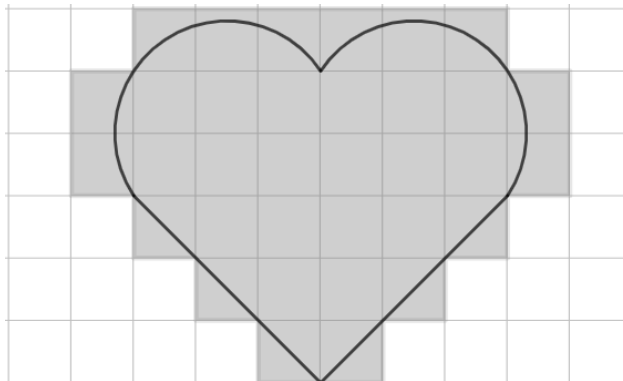


Fonte: a autora, com utilização do Paint e do Geogebra

Neste caso, a área aproximada do coração, por falta, é de 18 u. a.

Em seguida, são contados todos os quadradinhos que cobrem a figura (ou pertencem a figura, totalmente ou não). São 34 quadradinhos cobrindo a figura.

Figura 2.34 - Destaque aos quadradinhos que cobrem o coração.



Fonte: a autora, com utilização do Paint e do Geogebra

Neste caso, a área aproximada do coração, por excesso, é de 34 u. a.

Portanto, a área \mathcal{A} do coração é algo entre 18 u. a. e 34 u. a.

$$18 \text{ u. a.} < \mathcal{A} < 34 \text{ u. a.}$$

Ou, seja

$$18 \text{ cm}^2 < \mathcal{A} < 34 \text{ cm}^2$$

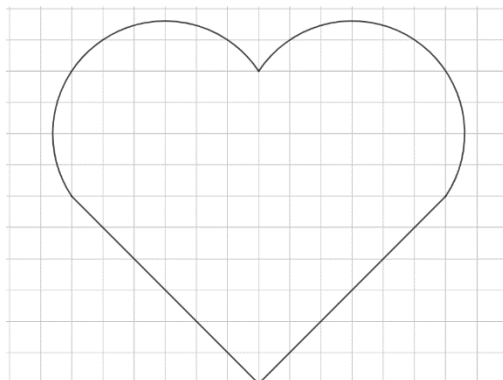
Este método será mais preciso, quanto menor for o quadradinho da malha quadriculada em que a figura for inserida.

Veja:

Para obter-se uma aproximação mais precisa, a figura será inserida em uma malha

quadriculada, com quadradinhos de $\frac{1}{2} \text{ cm}$ de medida do lado (área $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$).

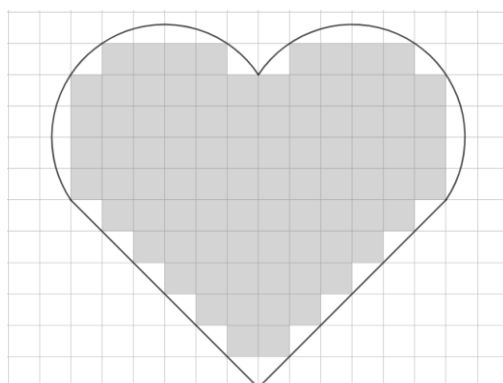
Figura 2.35 - Desenho de um coração na malha quadriculada (quadradinho de área $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$).



Fonte: a autora, com utilização do Paint e do Geogebra

São contados todos os quadradinhos inteiros inseridos no interior da figura (são 86 quadradinhos no interior da figura).

Figura 2.36 - Destaque aos quadradinhos no interior do coração (quadradinho de área $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$).

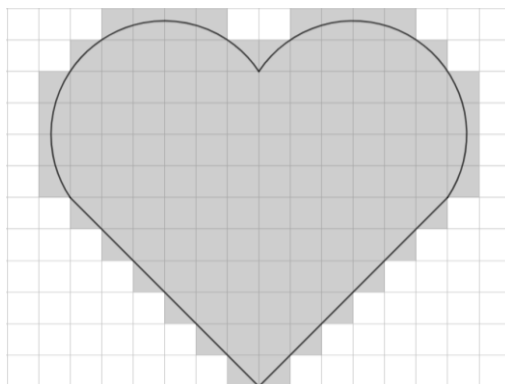


Fonte: a autora, com utilização do Paint e do Geogebra

Neste caso, a área aproximada do coração, por falta, é de 86 *u. a.*

São contados os quadradinhos que cobrem a figura (ou pertencem a figura, totalmente ou não). São 118 quadradinhos cobrindo a figura.

Figura 2.37 - Destaque aos quadradinhos que cobrem o coração(quadradinho de área $\frac{1}{4} cm^2$).



Fonte: a autora, com utilização do Paint e do Geogebra

Neste caso, a área aproximada do coração, por excesso, é de $118 u. a.$

Portanto, a área \mathcal{A} do coração é algo entre $86 u. a.$ e $118 u. a.$

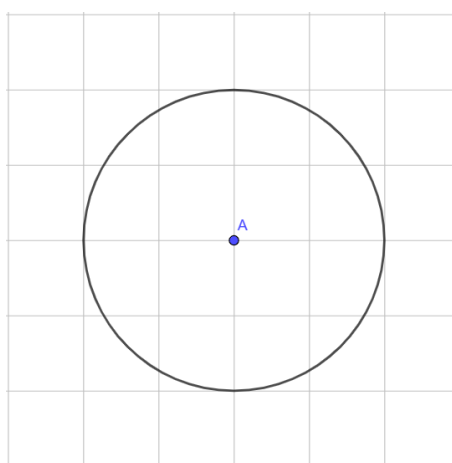
$$86 u. a. < \mathcal{A} < 118 u. a.$$

Ou, seja

$$21,5 cm^2 < \mathcal{A} < 29,5 cm^2$$

Exemplo 2.7 Calcule a área aproximada do círculo com centro em A e raio igual a 2 centímetros.

Figura 2.38 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Resolução:

Observe que essa figura plana, se trata de um círculo de centro no ponto A e raio de 2 centímetros. Sabe-se que o cálculo da área do círculo é da forma: $A_{circulo} = \pi \cdot r^2$.

O raio desse círculo equivale a 2 unidades de lados dos quadradinhos da malha. Se cada

lado do quadradinho mede 1 centímetro, tem-se que a área do círculo é igual a:

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot 2^2 \rightarrow A_{\text{círculo}} = 4\pi$$

Utilizando $\pi = 3,14$, tem-se:

$$A_{\text{círculo}} = 4 \cdot 3,14 \rightarrow A_{\text{círculo}} = 12,56 \text{ cm}^2$$

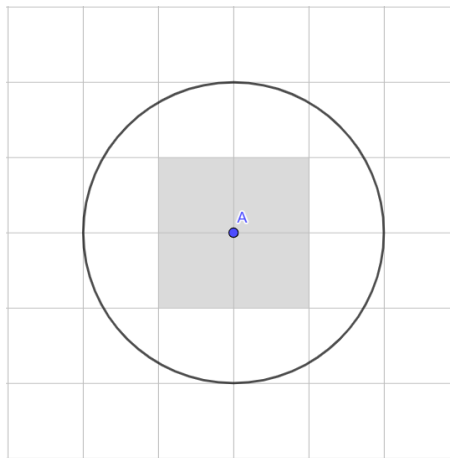
Utilizando outra técnica “Método de Falta e Excesso”:

Fazendo o cálculo utilizando o Método de Falta e Excesso, tem-se:

i) Círculo na malha quadriculada (quadradinhos com 1 cm de lado).

Primeiro, destaca-se os quadradinhos inteiros dentro do círculo.

Figura 2.39 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros no interior do círculo).

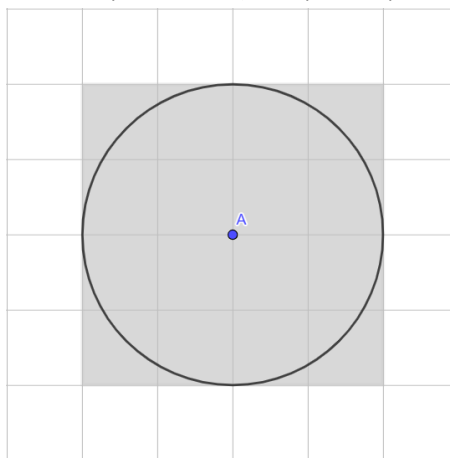


Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

São 4 quadradinhos no interior do círculo (aproximação da área por falta).

Em seguida, cobre-se toda a região do círculo e conta-se. Neste caso 16 quadradinhos inteiros e sem sobreposição, cobrem toda a região do círculo.

Figura 2.40 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros no interior do círculo).



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Portanto, a área do círculo está entre 4 *u. a.* e 16 *u. a.*

$$4 \text{ u. a.} < A_{\text{círculo}} < 16 \text{ u. a.}$$

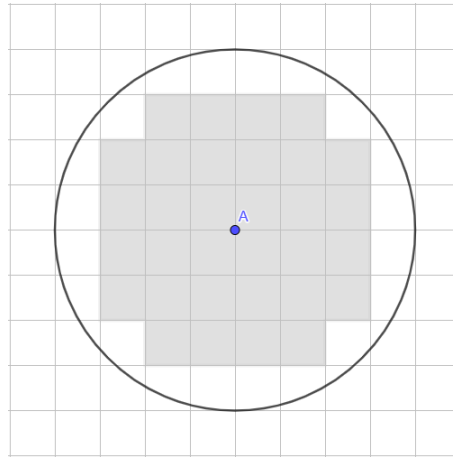
Como a medida do lado do quadrado é igual a 1 centímetro, então:

$$4 \text{ cm}^2 < A_{\text{círculo}} < 16 \text{ cm}^2$$

ii) Círculo na malha quadriculada (quadrados com $\frac{1}{2}$ *cm* de lado).

Inserindo o círculo, numa malha em que os quadrados medem $\frac{1}{2}$ *cm* de lado, tem-se 32 quadrados no interior do círculo (aproximação da área por falta).

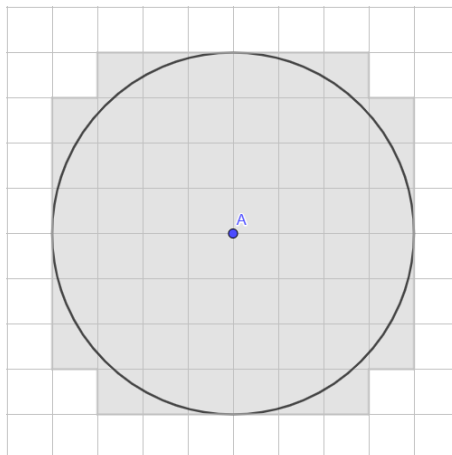
Figura 2.41 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadrados inteiros no interior do círculo).



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Cobrindo toda a região do círculo, são 60 quadrados (aproximação da área por excesso).

Figura 2.42 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadrados inteiros que cobrem o círculo).



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

A área do círculo está entre 32 *u. a.* e 60 *u. a.*

$$32 \text{ u. a.} < A_{\text{círculo}} < 60 \text{ u. a.}$$

Como a medida do lado do quadradinho é igual a $\frac{1}{2} \text{ cm}$, tem-se que a área de cada quadradinho equivale a $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$.

Portanto:

$$8 \text{ cm}^2 < A_{\text{círculo}} < 15 \text{ cm}^2$$

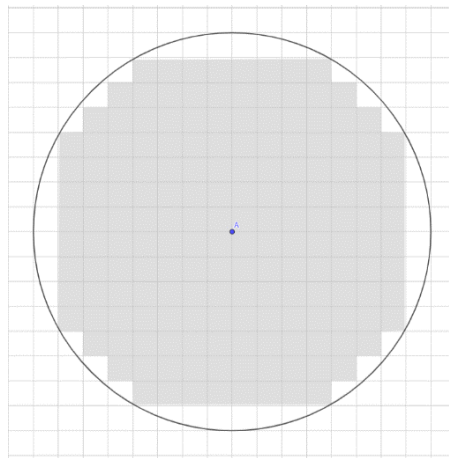
iii) Círculo na malha quadriculada (quadradinhos com $\frac{1}{4} \text{ cm}$ de lado)

Como visto anteriormente, o “Metodo de Falta e Excesso” é um método que calcula a área aproximada, dentro de um intervalo. Neste caso, quanto menor for o quadradinho da malha quadriculada, a aproximação será mais próxima do valor real. A seguir, coloca-se o mesmo círculo, com as mesmas medidas, mas em malha em que o lado de cada quadradinho equivale a $\frac{1}{4} \text{ cm}$. Logo, a área de cada quadradinho passa a ser $\frac{1}{16} \text{ cm}^2$.

Fazendo o cálculo utilizando o Método de Falta e Excesso, tem-se 168 quadradinhos no interior do círculo (medida aproximada da área por falta).

Veja:

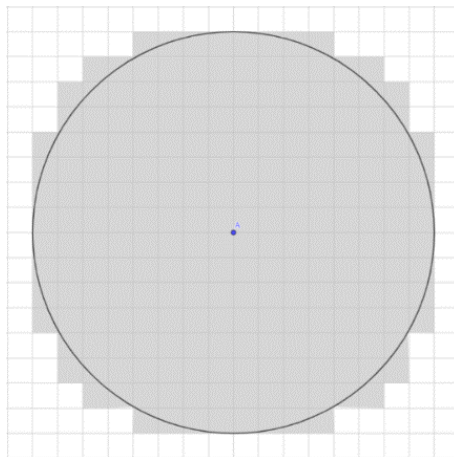
Figura 2.43 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros que cobrem o círculo).



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Cobrindo toda a região do círculo, tem-se:

Figura 2.44 - Ilustração de um círculo na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros que cobrem o círculo).



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

São 224 quadradinhos cobrindo toda a região do círculo (aproximação da área por excesso).

Portanto, a área do círculo está entre 168 *u. a.* e 224 *u. a.*

$$168 \text{ u. a.} < A_{\text{círculo}} < 224 \text{ u. a.}$$

Como a medida cada quadradinho tem lado medindo a $\frac{1}{4} \text{ cm}$ e área igual a $\frac{1}{16} \text{ cm}^2$, tem-se que:

$$10,5 \text{ cm}^2 < A_{\text{círculo}} < 14 \text{ cm}^2$$

Novamente concluí-se que, quanto menor for o “quadradinho” da malha quadriculada, mais preciso será o cálculo da área da figura.

2.2.1 Introdução ao Cálculo da Integral – Cálculo da Area de uma Região

A inclusão deve acontecer, tanto para os estudantes que possuem dificuldade na aprendizagem, quanto para aqueles que possuem habilidades muito bem desenvolvidas (ou altas habilidades) e que acabam necessitando de um aprofundamento maior nos conteúdos, para que não fiquem desestimulados, entediados, porque as aulas não apresentam nada de “novo”.

Dessa forma, para algumas turmas ou grupos de estudantes, pode ser introduzido o Cálculo da integral, para o cálculo de áreas. Óbvio que, a introdução deve ser cuidadosa e seguir uma sequência didática, para introduzir alguns conceitos importantes sobre o Cálculo da Integral.

Como o estudo aqui é o cálculo de área, utilizando o Cálculo da Integral, alguns conceitos elementares do cálculo serão reconhecidos e utilizados, sem uma apresentação nessa dissertação, como os conceitos de limites e derivada de uma função.

2.2.1.1 Introdução ao Cálculo da Integral

Como visto anteriormente, um polígono pode ser decomposto em triângulos e sua área será a soma das áreas dos triângulos que o compõe. No entanto existem figuras não triangularizáveis, como o círculo e setores de curvas cônicas, como a parábola.

Com relação a área do círculo, Arquimedes provou que a área do círculo é igual a área do triângulo, com base igual ao tamanho de sua circunferência e com altura igual ao seu raio. Veja:

$$A_{\text{círculo}} = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$$

$$A_{\text{círculo}} = \frac{2}{2}\pi r^2$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$$

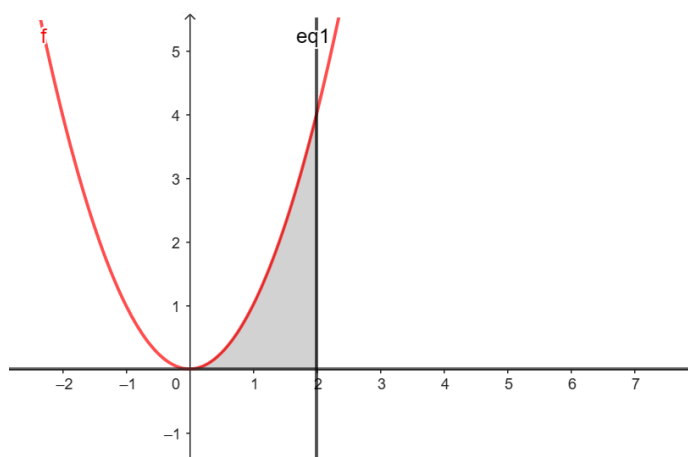
Arquimedes também calculou áreas de setores parabólicos, aproximando a região por regiões triangularizáveis.

Exemplo 2.8. Dada a função $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definida por $f(x) = x^2$ e a equação da reta $x = 2$, calcule a região \mathcal{A} compreendida pelo eixo Ox, pela reta definida pela equação $x = 2$ e pelo trecho da parábola determinada pela função $f(x) = x^2$.

Resolução: A figura a seguir representa a região \mathcal{A} (região sombreada), compreendida pelo eixo Ox, pela reta definida pela equação $x = 2$ e pelo trecho da parábola determinada pela função $f(x) = x^2$.

Observe que essa região não é dada por segmentos de retas, portanto não há como resolver utilizando os métodos anteriores de cálculo de área de polígonos. Serão utilizadas técnicas de aproximação para a área da região sombreada, que será chamada de região \mathcal{A} .

Figura 2.45 - Área sombreada \mathcal{A} .

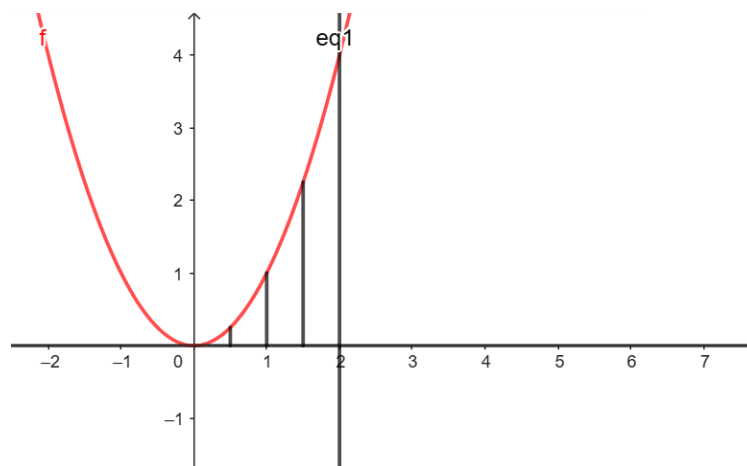


Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

A estratégia que será utilizada é subdividir o intervalo $[0, 2]$, no eixo x , em outros subintervalos, por conveniência.

Primeiro, o intervalo $[0, 2]$ será subdividido em quatro partes, com comprimentos iguais. Em seguida serão construídos os retângulos com base nesses intervalos:

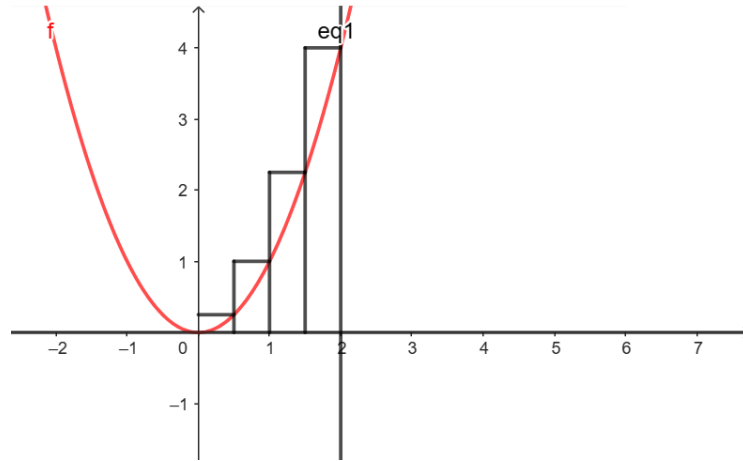
Figura 2.46 - Área \mathcal{A} subdividida em 4 partes.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Cada retângulo deve ter altura igual ao máximo valor da função restrita ao subintervalo base (veja a figura a seguir, com quatro subintervalos e seus correspondentes retângulos).

Figura 2.47 - Área \mathcal{A} subdividida em 4 partes e seus respectivos retângulos.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Como $f(x) = x^2$, então:

$$f(0) = 0; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}; f(1) = 1; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}; f(2) = 4.$$

Logo:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}; \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}; \quad A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{8}; \quad A_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{4}{2} = 2.$$

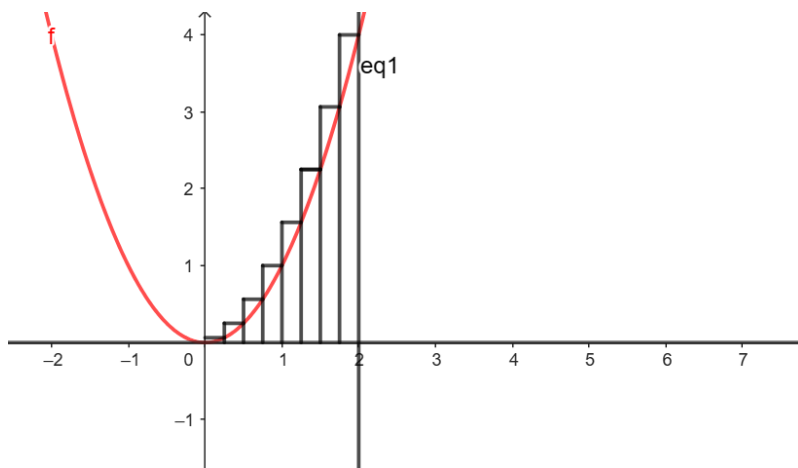
Após calcular a área de cada retângulo, tem-se a soma das áreas, que será uma área aproximada da região \mathcal{A} .

$$\begin{aligned} S(n) &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ S(n) &= \left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{8}\right) + 2 \\ S(n) &= \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{8}{8} + \frac{1}{8}\right) + 2 \\ S(n) &= \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + 1 + \frac{1}{8} + 2 \\ S(n) &= 3 + \frac{6}{8} \\ S(n) &= 3 + \frac{3}{4} \\ S(n) &= 3,75 \end{aligned}$$

Observe que a aproximação da área está muito maior do que a área da região \mathcal{A} . Para minimizar esse problema, o intervalo $[0, 2]$ será subdividido em um número maior de partes

iguais (oito partes), como na figura a seguir.

Figura 2.48 - Área \mathcal{A} subdividida em 8 partes e seus respectivos retângulos.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Novamente, após calcular a área de cada um dos oito retângulos, tem-se a soma das áreas, que será uma nova aproximação da área da região \mathcal{A} . Observe que, essa nova aproximação, está mais próxima do real valor da área da região \mathcal{A} .

Como $f(x) = x^2$, então:

$$\begin{aligned} f(0) = 0; & & f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}; & & f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}; & & f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}; \\ f(1) = 1; & & f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{16}; & & f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}; & & f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{49}{16}; \\ f(2) = 4. & & & & & & \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{64}; & A_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}; & A_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{64}; & A_4 = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}; & A_5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{16} = \frac{25}{64}; \\ A_6 = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{16}; & A_7 = \frac{1}{4} \cdot \frac{49}{16} = \frac{49}{64}; & A_8 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1. & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(n) &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 \\ S(n) &= \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} + \frac{1}{4} + \frac{25}{64} + \frac{9}{16} + \frac{49}{64} + 1 \\ S(n) &= \frac{1}{64} + \frac{4}{64} + \frac{9}{64} + \frac{16}{64} + \frac{25}{64} + \frac{36}{64} + \frac{49}{64} + 1 \\ S(n) &= \frac{140}{64} + 1 \\ S(n) &= 2 + \frac{12}{64} + 1 \end{aligned}$$

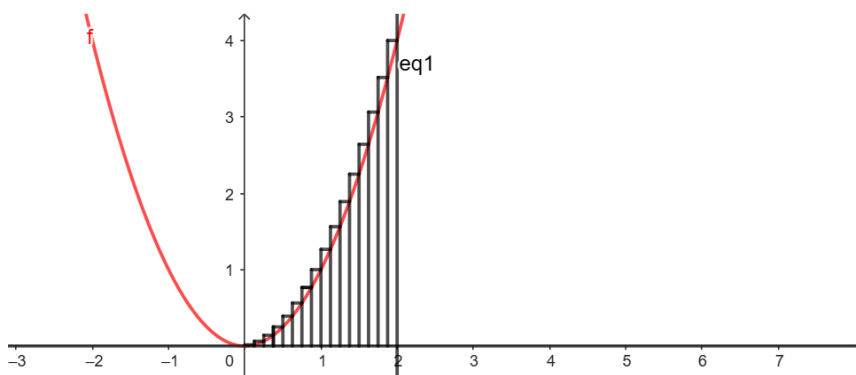
$$S(n) = 3 + \frac{3}{16}$$

$$S(n) = 3 + 0,1875$$

$$S(n) = 3,1875$$

Se o intervalo $[0, 2]$ for subdividido em um 16 partes iguais, como na figura a seguir, teremos uma aproximação ainda maior da área da região \mathcal{A} .

Figura 2.49 - Área \mathcal{A} subdividida em 16 partes e seus respectivos retângulos.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Como $f(x) = x^2$, então:

$f(0) = 0;$	$f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{64};$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16};$	$f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{9}{64};$
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4};$	$f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{64};$	$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16};$	$f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{49}{64};$
$f(1) = 1;$	$f\left(\frac{9}{8}\right) = \frac{81}{64};$	$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{16};$	$f\left(\frac{11}{8}\right) = \frac{121}{64};$
$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4};$	$f\left(\frac{13}{8}\right) = \frac{169}{64};$	$f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{49}{16};$	$f\left(\frac{15}{8}\right) = \frac{225}{64};$
$f(2) = 4.$			

Logo:

$A_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{512};$	$A_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{128};$	$A_3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{64} = \frac{9}{512};$	$A_4 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32};$
$A_5 = \frac{1}{8} \cdot \frac{25}{64} = \frac{25}{512};$	$A_6 = \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{128};$	$A_7 = \frac{1}{8} \cdot \frac{49}{64} = \frac{49}{512};$	$A_8 = \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8};$
$A_9 = \frac{1}{8} \cdot \frac{81}{64} = \frac{81}{512};$	$A_{10} = \frac{1}{8} \cdot \frac{25}{16} = \frac{25}{128};$	$A_{11} = \frac{1}{8} \cdot \frac{121}{64} = \frac{121}{512};$	$A_{12} = \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{32};$
$A_{13} = \frac{1}{8} \cdot \frac{169}{64} = \frac{169}{512};$	$A_{14} = \frac{1}{8} \cdot \frac{49}{16} = \frac{49}{128};$	$A_{15} = \frac{1}{8} \cdot \frac{225}{64} = \frac{225}{512};$	$A_{16} = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};$

$$\begin{aligned}
S(n) &= \frac{1}{512} + \frac{1}{128} + \frac{9}{512} + \frac{1}{32} + \frac{25}{512} + \frac{9}{128} + \frac{49}{512} + \frac{1}{8} + \frac{81}{512} + \frac{25}{128} + \frac{121}{512} + \frac{9}{32} + \frac{169}{512} + \frac{49}{128} \\
&\quad + \frac{225}{512} + \frac{1}{2} \\
S(n) &= \frac{1}{512} + \frac{4}{512} + \frac{9}{512} + \frac{16}{512} + \frac{25}{512} + \frac{36}{512} + \frac{49}{512} + \frac{64}{512} + \frac{81}{512} + \frac{100}{512} + \frac{121}{512} + \frac{144}{512} + \frac{169}{512} \\
&\quad + \frac{196}{512} + \frac{225}{512} + \frac{256}{512} \\
S(n) &= \frac{1496}{512} = 2 + \frac{472}{512} = 2,921875
\end{aligned}$$

Veja que, quanto mais subdividimos o intervalo $[0,2]$, mais nos aproximamos da área real da região \mathcal{A} compreendida pelo eixo Ox, pela reta definida pela equação $x = 2$ e pelo trecho da parábola determinada pela função $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned}
A(i) &= 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot 4 \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{8i^2}{n^3} \\
S(n) &= \sum_{i=1}^n A(i) = \sum_{i=1}^n \frac{8i^2}{n^3} = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
S(n) &= \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Tomando o limite, tem-se:

$$\begin{aligned}
S(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{6} \cdot \frac{2n^2+3n+1}{n^2} \\
S(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{6} \cdot \left(\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) \\
S(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{8}{6} \cdot (2 + 0 + 0) = \frac{16}{6} \cong 2,67
\end{aligned}$$

2.2.1.2 A integral Definida

Seja uma função $f(x)$ definida e contínua num intervalo real $[a, b]$. A integral definida de $f(x)$, de a até b , é um número real, calculada através de:

$$\int_a^b f(x) dx$$

onde:

a é o limite inferior de integração;

b é o limite superior de integração;

$f(x)$ é o integrando.

Exemplo 2.9 Dada a função $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definida por $f(x) = x^2$ e a equação da reta $x = 2$, calcule a região A compreendida pelo eixo Ox , pela reta definida pela equação $x = 2$ e pelo trecho da parábola determinada pela função $f(x) = x^2$.

Resolução 1: Será utilizada a integral definida para encontrar a área da região sombreada, com o auxílio do Geogebra.

Inicia-se o Geogebra inserindo os seguintes comandos:

i) $f(x) = x^2$

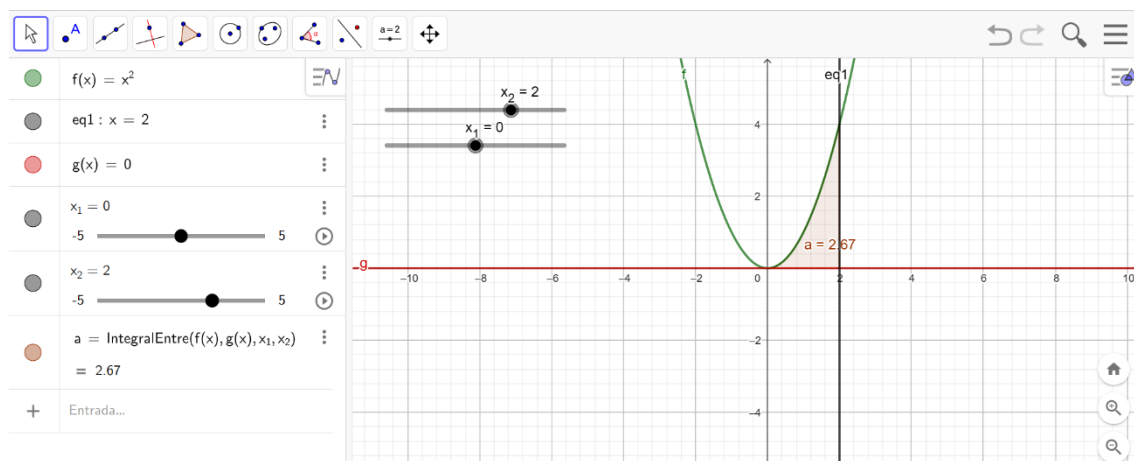
ii) $x = 2$

iii) $g(x) = 0$ (representando o eixo Ox)

Em seguida, inseri-se o comando `IntegralEntre(Função, Função, Valor de x Inicial, Valor de x Final)`, preenchendo da seguinte forma: `IntegralEntre(f(x),g(x),x1,x2)`.

Aparecerá x_1 e x_2 , que deverá ser colocado o limite inferior e o superior, neste caso, tem-se que $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$. Observe que a área ($a = 2,67$) aparecerá calculada, na figura sombreada, conforme a figura a seguir.

Figura 2.50 - Área da região \mathcal{A} calculada no Geogebra.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Resolução 2: Será utilizada a integral definida para encontrar a área da região sombreada, através da fórmula da integral definida $\int_a^b f(x) dx$.

Neste caso, será calculada a integral definida da função $f(x)$, com limite inferior $a = 0$ e limite superior $b = 2$.

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3} \cong 2,67$$

Portanto, tem-se que a área da região compreendida pelo eixo Ox, pela reta definida pela equação $x = 2$ e pelo trecho da parábola determinada pela função $f(x) = x^2$ é de aproximadamente 2,67 unidades de área.

2.3 CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIÕES POLIGONAIS UTILIZANDO O TEOREMA DE PICK

O Teorema de Pick foi formulado em 1899 pelo matemático austríaco George Alexander Pick (1859 a 1942). Este método consiste em calcular a área de um polígono simples, inserido numa malha quadriculada, relacionando o número de “nós” localizados no perímetro deste polígono e o número de “nós” internos a ele.

Teorema 1.3.3.1. Dado um polígono simples P, com vértices de coordenadas inteiras, a área de P será dada por:

$$\text{Área Polígono} = i + \frac{b}{2} - 1,$$

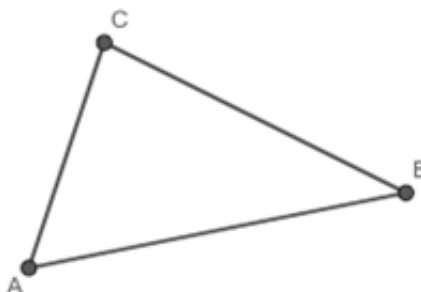
onde $\begin{cases} i: \text{quantidade de coordenadas inteiras, interiores ao polígono;} \\ b: \text{representa a quantidade de coordenadas inteiras dos lados ou contorno do polígono.} \end{cases}$

O Teorema de Pick é válido com polígonos simples, ou seja, polígonos que não possuem nenhum cruzamento entre seus lados (arestas) e não possuem “buracos” em seu interior.

No caso de polígonos complexos, há necessidade de adaptação da fórmula.

Exemplo 2.10 Calcule a área do triângulo ABC, a seguir, utilizando o Teorema de pick.

Figura 2.51 - Triângulo ABC

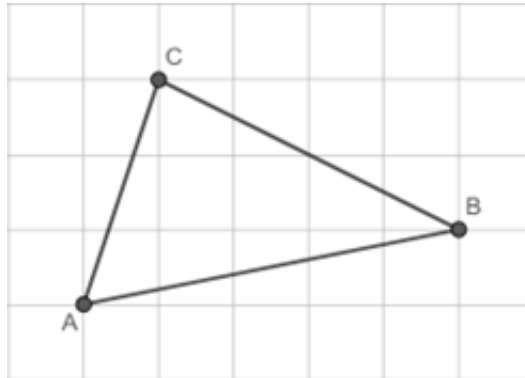


Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Resolução: Primeiro, o triângulo ABC, deve ser inserido em uma malha quadriculada,

de forma que cada vértice seja também vértice de um dos quadradinhos da malha. Ressalta-se a importância de seguir o primeiro passo na íntegra. Caso os vértices do triângulo não seja também vértice de um dos quadradinhos da malha, o método não será preciso.

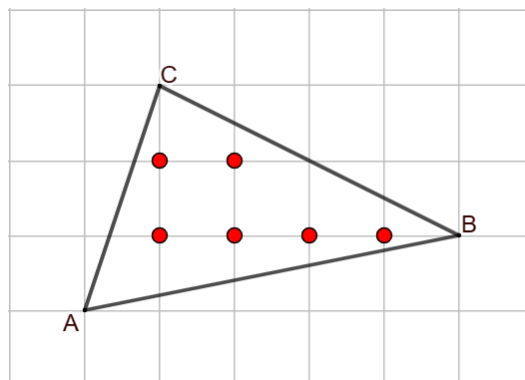
Figura 2.52 - Triângulo ABC inserido na malha quadriculada.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

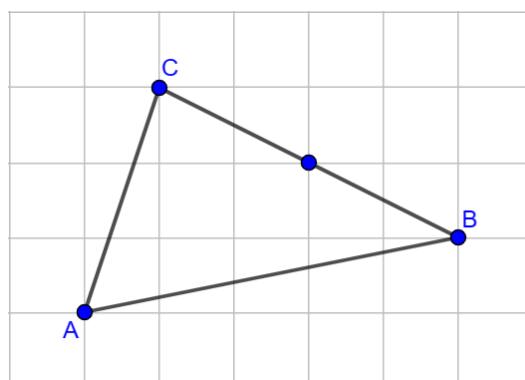
Verifica-se quantas coordenadas inteiras tem no interior do triângulo ABC e quantas coordenadas inteiras tem no contorno do triângulo ABC.

Figura 2.53 - Coordenadas inteiras no interior do triângulo ABC.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Figura 2.54 - Coordenadas inteiras no contorno do triângulo ABC.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Em seguida, utiliza-se o Teorema de Pick:

$$\text{Área Polígono} = i + \frac{b}{2} - 1,$$

onde $\begin{cases} i: \text{quantidade de coordenadas inteiras, interiores ao polígono;} \\ b: \text{representa a quantidade de coordenadas inteiras dos lados ou contorno do polígono.} \end{cases}$

Logo, a área do triângulo ABC será:

$$\text{Área}(ABC) = 6 + \frac{4}{2} - 1$$

$$\text{Área}(ABC) = 6 + 2 - 1$$

$$\text{Área}(ABC) = 7 \text{ u. a.}$$

Portanto, a área do triângulo ABC é igual a 7 unidades de área.

As técnicas para o cálculo da área de polígonos e/ou figuras irregulares serão estudadas mais profundamente nos próximos capítulos. Serão introduzidas outras técnicas e recursos pedagógicos, como o multiplano (ferramenta didática e inclusiva, com metodologia flexível, que auxilia no aprendizado da matemática).

2.3.1 Demonstração do Teorema de Pick

Existem algumas demonstrações do Teorema de Pick: por indução, por justaposição, entre outros. O Teorema de Pick, nesta dissertação, será demonstrado por justaposição de polígonos.

Para essa demonstração é preciso provar que:

- Todo polígono de n lados, podem ser descompostos em $(n - 2)$ triângulos justapostos;
- A Propriedade Aditiva da Fórmula de Pick;
- Validade do Teorema de Pick para qualquer triângulo.

Teorema 1.3.3.2. Todo polígono simples de n lados pode ser decomposto como reunião de $(n - 2)$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.

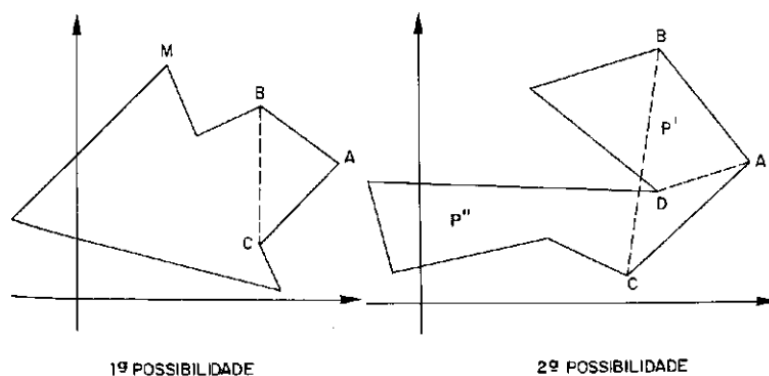
Demonstração:

Supondo, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro, seja n o menor número natural tal que existe um polígono P , com n lados, que não pode ser decomposto conforme estipula o enunciado acima. Tomemos no plano um sistema de coordenadas cartesianas, de modo que nenhum lado do polígono seja paralelo ao eixo das ordenadas. Seja A o ponto de maior abcissa no (bordo do) polígono P . Como nenhum lado de P é vertical, A deve ser um vértice. Sejam B e C os vértices adjacentes a A . Há 2 possibilidades.

Primeira: o triângulo ABC não contém outros vértices de P , além de A, B e C . Neste caso, o polígono P' , obtido de P , quando se substituem os lados AB e AC por BC , tem $n - 1$ lados. Como n é o menor número de lados para o qual o teorema é falso, P' pode ser decomposto em $n - 3$ triângulos na forma do enunciado. Juntando o triângulo ABC a essa decomposição, vemos que o teorema é verdadeiro para P , o que é uma contradição.

Segunda: O triângulo ABC contém, além de A, B e C , algum outro vértice do ponto P . Dentre esses, seja D o mais distante do lado BC . Então, o segmento de reta AD decompõe P em dois polígonos P' e P'' , o primeiro com n' e o segundo com n'' lados, sendo $n' + n'' = n + 2$. Como $n' \geq 3$ e $n'' \geq 3$, vemos que n' e n'' são ambos menores que n . O teorema, então, vale para P' e P'' , que podem ser decompostos, respectivamente, em $n' - 2$ e $n'' - 2$ triângulos, na forma do enunciado. Justapondo essas decomposições, ao longo de AD , obtemos uma decomposição de P em $(n' - 2) + (n'' - 2) = n - 2$ triângulos, o que é uma contradição. Isto completa a demonstração do teorema (LIMA, 1991, p. 109 e 110).

Figura 2.55 - Prova por absurdo do Teorema



Fonte: LIMA, 1991, p. 109.

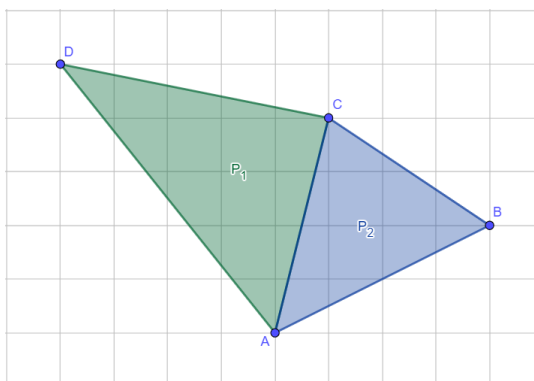
Corolário 1 A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a $(n - 2) \cdot \pi$.

2.3.2 Propriedade Aditiva da Fórmula de Pick

Será verificado se um polígono P pode ser obtido através da justaposição de outros dois polígonos P_1 e P_2 , ao longo de pelo menos uma aresta. Dessa forma, é preciso demonstrar que:

$$A_P = A_{P_1} + A_{P_2}$$

Figura 2.56 - Justaposição dos polígonos P_1 e P_2 .



Fonte: a autora, com utilização do Geoboard.

Os números de coordenadas inteiras no interior do Polígono P pode ser obtido da seguinte forma:

$$i = i_1 + i_2 + v - 2$$

Onde:

- ✓ v é o número de vértices da fronteira comum aos polígonos P_1 e P_2 ;
- ✓ i_1 : número de pontos inteiros no polígono P_1 ;
- ✓ i_2 : número de pontos inteiros no polígono P_2 ;

Os números de coordenadas inteiras que contornam o Polígono P pode ser obtido da seguinte forma:

$$b = b_1 + b_2 - 2v + 2$$

Como:

$$A_P = i + \frac{b}{2} - 1$$

Tem-se que:

$$A_P = i_1 + i_2 + v - 2 + \frac{b_1 + b_2 - 2v + 2}{2} - 1$$

$$A_P = i_1 + i_2 + v - 2 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} - \frac{2v}{2} + \frac{2}{2} - 1$$

$$A_P = i_1 + i_2 + v - 2 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} - v + 1 - 1$$

$$A_P = i_1 + \frac{b_1}{2} + i_2 + \frac{b_2}{2} + v - v - 2 + 1 - 1$$

$$A_P = i_1 + \frac{b_1}{2} + i_2 + \frac{b_2}{2} - 1 - 1$$

$$A_P = i_1 + \frac{b_1}{2} - 1 + i_2 + \frac{b_2}{2} - 1$$

$$A_P = (i_1 + \frac{b_1}{2} - 1) + (i_2 + \frac{b_2}{2} - 1)$$

Portanto:

$$A_P = A_{P_1} + A_{P_2}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

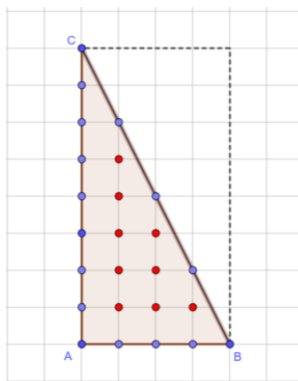
2.3.3 Validade do Teorema de Pick para qualquer triângulo.

Viu-se, anteriormente, que as áreas dos polígonos justapostos são aditivas. Também notou-se que um polígono simples, pode ser descomposto em $(n - 2)$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado. Agora, basta provar que o Teorema de Pick é válido para qualquer triângulo.

Primeiro, prova-se a validade do Teorema de Pick para o triângulo retângulo.

Coloca-se o triângulo retângulo numa malha quadriculada e completa-se com o retângulo, com mesma mesma base do triângulo e mesma altura do triângulo ABC, conforme figura a seguir.

Figura 2.57 - Fórmula de Pick para o triângulo retângulo.



Fonte: a autora, com utilização do Geoboard.

Chama-se de x a medida do cateto AB, de y a medida do cateto AC e de p_h , o número de pontos da hipotenusa, excluindo os pontos que são vértices do triângulo ABC.

Veja que os pontos no interior do retângulo R, pode ser obtido calculando:

$$I_R = (x - 1). (y - 1)$$

Dessa forma, os pontos (i) no interior do triângulo ABC e o número de pontos (b)

situados no contorno do triângulo, podem ser obtidos das seguintes formas:

$$i = \frac{1}{2} \cdot [(x - 1) \cdot (y - 1) - p_h] \quad (i)$$

$$b = x + y + p_h + 1 \quad (ii)$$

Como a Fórmula de Pick é dada por

$$\text{Área Polígono} = i + \frac{b}{2} - 1.$$

Substituindo (i) e (ii) na fórmula de Pick, tem-se:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot [(x - 1) \cdot (y - 1) - p_h] + \frac{1}{2} \cdot (x + y + p_h + 1) - 1$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot [(xy - x - y + 1) - p_h] + \frac{1}{2} \cdot (x + y + p_h + 1) - 1$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot (xy - x - y + 1 - p_h + x + y + p_h + 1) - 1$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot (xy - x + x - y + y - p_h + p_h + 1 + 1) - 1$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot (xy + 2) - 1$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{xy}{2} + \frac{2}{2} - 1$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{xy}{2} + 1 - 1$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{xy}{2}$$

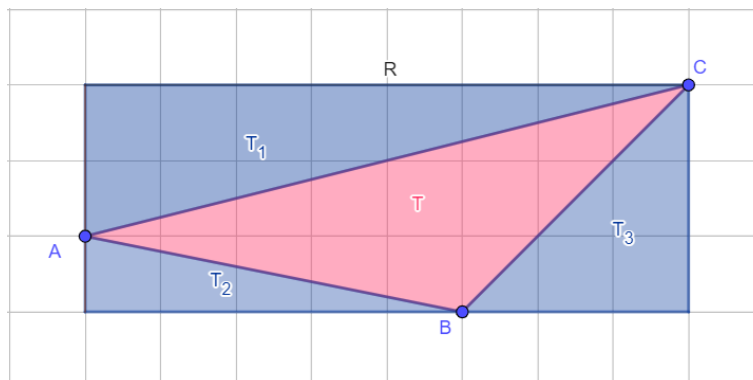
Observe que, aplicando a Fórmula de Pick para o triângulo retângulo, chega-se na fórmula tradicional do cálculo da área do triângulo. Portanto, tem-se que o Teorema de Pick é válido para qualquer triângulo retângulo.

Se o Teorema de Pick vale para o triângulo retângulo, vale também para o retângulo, já que pela aditividade dos polígonos, tem-se que o retângulo é formado por dois triângulos retângulos.

Para provar que o Teorema de Pick vale para qualquer triângulo, basta considerar um

triângulo qualquer T e a ele justapor três triângulos retângulos T_1 , T_2 e T_3 de forma que, juntos formem um retângulo R , conforme a figura a seguir:

Figura 2.58 - Fórmula de Pick para qualquer triângulo.



Fonte: a autora, com utilização do Geoboard.

Dessa forma, a área do triângulo T , pode ser determinada utilizando a fórmula:

$$A_T = A_R - A_{T_1} - A_{T_2} - A_{T_3}$$

Portanto, concluí-se que o Teorema de Pick é válido para o retângulo, para o triângulo retângulo e, conseqüentemente, válido para qualquer triângulo. E como qualquer polígono simples pode ser decomposto em $(n - 2)$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado, tem-se que a área de qualquer polígono simples pode ser determinada utilizando o Teorema de Pick.

O Teorema de Pick voltará a ser utilizado no capítulo 2, aliado ao uso de outros recursos, além da malha quadriculada, como o Geoplano e o Geoboard.

3 UTILIZAÇÃO DE RECURSOS DIDÁTICOS PARA O CÁLCULO DE ÁREAS

Nas escolas, quando o assunto é geometria, geralmente existem muitas lacunas no processo de ensino-aprendizagem. Segundo Fonseca, 2002, os professores do Ensino Fundamental dedicam pouco tempo do trabalho para o ensino de geometria. Os professores não sabem exatamente quais habilidades devem ser desenvolvidas nesse nível de ensino, possuem pouco conhecimento em relação ao conteúdo de geometria e, por conta disso, houve por um tempo um quase total abandono do ensino de Geometria nas escolas. Quando se trata do Ensino Fundamental, os anos iniciais tem uma defasagem ainda maior no ensino de Geometria e um dos motivos é a falta de conhecimento do professor. O professor dos anos iniciais é polivalente e geralmente tem formação plena em pedagogia. Ele não é o especialista de matemática e muitas vezes possui dificuldade no conteúdo de geometria. Essa dificuldade acaba refletindo no processo de ensino-aprendizagem, porque ou o professor repassa, de forma mecânica e muitas vezes com sérios problemas conceituais, ou deixa a geometria para trabalhar no final do semestre, o que nem sempre sobra tempo hábil para desenvolvê-la na íntegra, sem atropelos. Embora o objetivo dessa dissertação não seja, necessariamente, abordar o despreparo dos professores das séries iniciais para o ensino da geometria, é importante ter consciência de que esse despreparo existe e que, conseqüentemente, resulta nessas lacunas no processo de ensino-aprendizagem da geometria.

Para ensinar geometria, principalmente aos estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental, é importante o uso do lúdico e da manipulação de materiais concretos, além do professor ter total domínio sobre o assunto que será abordado. Segundo Santos & Cruz (1997, p. 12):

A ludicidade é uma necessidade do ser humano em qualquer idade e não pode ser vista apenas como diversão. O desenvolvimento do aspecto lúdico facilita a aprendizagem, o desenvolvimento pessoal, social e cultural, colabora para uma boa saúde mental, prepara para um estado interior fértil, facilita os processos de socialização, comunicação, expressão e construção do conhecimento.

O estudante precisa entender o conceito de área e, para que isso ocorra, é necessário que ele tenha contato com diversos recursos, técnicas ou estratégias para o cálculo da área de figuras regulares ou não. A medida que o estudante começa a entender esse conceito, o estudo de áreas pode ser aprofundado. O tangram é um dos recursos que o professor pode utilizar para introdução do ensino de área.

Viu-se no Capítulo 2 algumas técnicas para o cálculo de áreas. No Capítulo 3, serão

utilizados alguns recursos didáticos e materiais manipuláveis, para que o estudante explore de forma mais concreta o conteúdo estudado. Além do Multiplano, serão introduzidos o Geoplano e o Geoboard, como recursos didáticos para o ensino de área de figuras planas. Também serão utilizados o *software* Geogebra e o Google Maps.

3.1. MULTIPLANO

O que é e como surgiu o Multiplano? Qual a necessidade, fez com que alguém o criasse? O multiplano deve ser utilizado apenas com deficientes visuais? Quais conteúdos podem ser introduzidos com o multiplano? Essas serão algumas das perguntas que serão abordadas e respondidas neste capítulo.

O Multiplano foi criado pelo professor Rubens de forma caseira e depois disponibilizado para a comercialização como um recurso didático, com metodologia inclusiva, para o estudo de matemática e estatística.

O professor Ferronato, no ano de 2000, ministrava a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral na União Pan-americana de Ensino – UNIPAN e na turma havia um deficiente visual. O professor, já havia se sentido frustrado em 1998, quando lecionou matemática para um estudante com deficiência visual em uma turma do Ensino Médio. Mesmo tentando fazer a diferença e utilizando metodologia diferente para ensinar a este aluno, sentiu que não foi o suficiente quando o conteúdo era de geometria e trigonometria. Portanto, quando se deparou com mais um estudante com deficiência visual e dessa vez no curso de Engenharia de Computação, prometeu ao estudante um recurso didático que possibilitasse a sua aprendizagem (FERRONATO, 2002).

Procurei metodologias e recursos pedagógicos que pudessem me auxiliar, mas não existiam materiais acessíveis na época. Busquei informações em escolas especializadas, bibliotecas públicas e livrarias, mas sem sucesso. Tudo mudou quando observei em uma loja de material de construção uma placa perfurada. Ela servia para segurar alicates e fios. Imaginei que pudesse utilizá-la para montar um plano cartesiano e efetuar operações matemáticas simples, representando os eixos x e y do plano, sem saber se daria certo. Com uma placa perfurada, elásticos e rebites, montei de forma doméstica a aula inaugural. Inicialmente, apresentei o recurso apenas ao Ivã. Em apenas uma aula, ele já construía retas e funções de 1º grau. Assim, sugeri que ele explicasse o que tinha aprendido aos demais alunos da turma. Foi incrível: ele não só foi capaz de aprender o conteúdo, como ensinar para os outros estudantes. Conforme o tempo foi passando, percebi que o recurso possibilitava a abordagem de inúmeros temas da matemática, estimulava o envolvimento de todos os alunos e também propiciava desenvolvimento educacional.

Rubens Ferronato 10/07/2019 - <https://diversa.org.br/relatos-de-experiencias/professor-cria-multiplano-matematica/>

Com o sucesso alcançado pelo recurso e a metodologia que criou, Ferronato resolveu investir em uma metodologia inclusiva para o ensino da Matemática e da estatística com a

utilização do Multiplano.

O Multiplano é utilizado no ensino de ciências exatas, para a aprendizagem de conteúdos simples e/ou complexos em diversos níveis escolares, do fundamental ao superior. Atualmente, existe uma versão do multiplano com pinos em Braille.

3.1.1 A Importância do uso do Multiplano nas aulas de Matemática

O Multiplano pode ser utilizado para demonstrar frações, figuras geométricas, cálculo de áreas, sólidos geométricos, mosaicos, gráficos de estatística, funções, trigonometria, entre outras aplicações, além de possibilitar o uso contínuo pelos estudantes de todas as séries e níveis de ensino. Também é possível, segundo a descrição do produto pela Tecassistiva, utilizá-lo em outras disciplinas como Física, Geografia, Artes, jogos de tabuleiro, entre outros. É uma metodologia mais dinâmica, onde o sujeito explora o objeto e constrói sua conclusão a partir dessa interação sujeito-objeto, o que não ocorre na metodologia expositiva.

A Metodologia Expositiva, segundo Celso Vasconcellos, ainda tem uma presença muito atuante e pode representar um obstáculo para o educador na concepção de uma nova concepção metodológica. Vasconcellos (1992) argumenta que “o grande problema da metodologia expositiva, do ponto de vista pedagógico, é seu alto risco de não aprendizagem, justamente em função do baixo nível de interação sujeito-objeto de conhecimento, ou seja, o grau de probabilidade de interação significativa é muito baixo”. A probabilidade do estudante ouvir uma exposição e de fato aprender é pequena, quando muito ele apresenta um comportamento condicionado, baseado em memória superficial. Expressões como “Poxa, estudei tanto, mas na hora, deu branco”, é consequência deste tipo de metodologia, em que o estudante apesar de ter estudado, não explorou de fato o objeto estudado (não questionou, não manipulou, não problematizou, não analisou entre outros), apenas “decorou” o que foi explanado em sala de aula, sem entender exatamente o por quê.

Deve ter-se uma interação maior entre sujeito-objeto de conhecimento. É nessa perspectiva, que Vasconcellos fala sobre a Metodologia Dialética, que baseia-se em outra concepção de homem e de conhecimento. O conhecimento, segundo essa concepção, não é “transferido”, nem “depositado” ou “inventado” pelo sujeito, mas construído pelo sujeito em sua relação com o mundo, com as outras pessoas e com o objeto de estudo. O conteúdo apresentado pelo professor, deve ser explorado e refletido pelo estudante, para que em seguida se constitua-se em conhecimento. Para Vasconcellos, apesar da motivação ser condição necessária para a aprendizagem, ela não é suficiente, porque há necessidade da ação do sujeito

sobre o objeto de conhecimento, para que a aprendizagem se torne mais eficaz.

O Multiplano atende plenamente a Metodologia Dialética, com material manipulável, em que o estudante explora de forma mais concreta e menos abstrata, o conteúdo estudado. Antunes (2000), em depoimento sobre o Multiplano, disse que é perguntado com frequência a respeito do que representa o maior avanço contemporâneo na educação e tem dito que, o maior avanço advém do melhor conhecimento do cérebro humano e da compreensão como este pode operar o conhecimento e desenvolver a aprendizagem. Ele conclui que a inteligência humana é estimulável, que temos diversas inteligências e uma delas, a inteligência lógica-matemática, é perfeitamente estimulável, destruindo o tabu de que algumas pessoas não aprendem. Antunes aponta que o obstáculo que antes existia era a ausência de recursos construcionistas, de um material onde o aluno pudesse aprender a matemática usando e experimentando ideias táteis e crê que esse problema começa a desaparecer com o surgimento do Multiplano Pedagógico.

Figura 3.1 - Multiplano



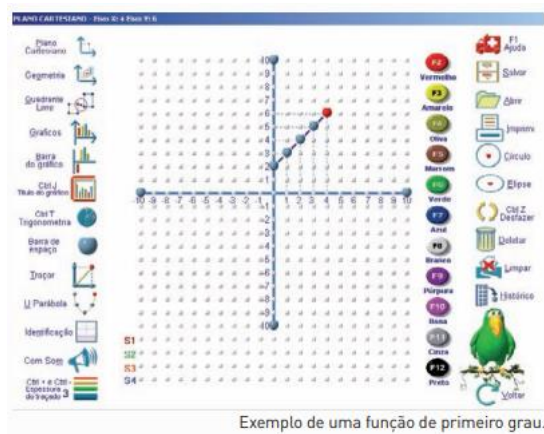
Fonte: Multiplano (<https://multiplano.com.br/produto/kit-multiplano/>)

3.1.2 Multiplano Virtual

Após o sucesso do Multiplano, iniciaram o desenvolvimento do Multiplano Virtual. Inclusive havia menção dele no Guia de Orientações Didáticas que acompanham o Multiplano. Para composição dessa dissertação, a autora entrou em contato com a Tecassistiva | Tecnologia & Acessibilidade, para verificar a possibilidade da aquisição de um Multiplano e perguntou sobre o Multiplano Virtual, porque embora tenha visto várias menções ao Multiplano Virtual, que estaria em desenvolvimento (desde 2012), não viu nenhuma menção ao aplicativo já pronto. Eles responderam que o desenvolvimento do multiplano virtual não teve continuidade

e que por esse motivo não está disponível. Completaram dizendo que o objetivo do multiplano é tangibilizar a matemática, ou seja, é tornar concreto algo abstrato e que ele veio para mudar a forma de ensinar e aprender Matemática de forma simples, tátil, didática, interativa e lúdica.

Figura 3.2 - Multiplano Virtual (versão que não teve continuidade)



Fonte: Manual do Multiplano.

Embora a autora concorde com o objetivo do multiplano, relatado pela Tecassistiva, acredita que uma coisa não invalida a outra. O contato com o Multiplano físico é fundamental, mas, seria interessante o multiplano virtual para aprofundamento de estudos e para aqueles estudantes que são mais tecnológicos. Além disso, a motivação e a forma de aprender, muda de pessoa para pessoa, portanto o Multiplano Virtual, seria mais um recurso de aprendizagem, que poderia servir na aprendizagem de muitos estudantes.

Como o Multiplano Virtual não teve continuidade, foram encontrados alguns aplicativos virtuais que lembram o Multiplano. Esses aplicativos precisam ser melhorados, mas não deixam de ser um importante recurso, em que o estudante pode utilizar os conceitos e todo o aprendizado adquirido no Multiplano concreto com esses aplicativos. Nessa dissertação também será utilizado o aplicativo Geoboard (<https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard>) para o cálculo de área.

3.2 O GEOPLANO E O GEOBOARD

O Geoplano é um importante aliado, como apoio, na aprendizagem de vários conteúdos envolvendo a Geometria Plana. No caso do estudo de Área de Polígonos, o geoplano é bem intuitivo e de fácil manuseio.

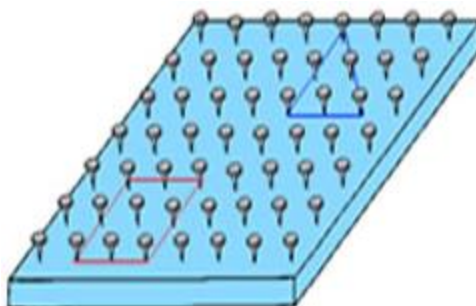
O Geoboard é uma espécie de versão virtual do Geoplano. Ele contém malha

quadriculada, os pinos e os elásticos, que são utilizados para formar as figuras geométricas.

3.2.1 Geoplano

O objeto, inicialmente, era formado por uma placa de madeira onde eram cravados pregos, formando uma malha composta por linhas e colunas dispostas de acordo com a figura a seguir:

Figura 3.3 - Desenho de um Geoplano.



Fonte: [Geoplano - Educador Brasil Escola \(uol.com.br\)](http://educador.brasil.escola.uol.com.br)

Hoje os geoplanos foram comercializados e os pregos foram trocados por pinos, geralmente fixos e com a mesma distância entre esses pinos, tanto na horizontal quanto na vertical. Ele ainda vem acompanhado de peças (quadrado e triângulos) com a mesma medida do quadrado da malha quadriculada, formada pelos pinos. Essas peças, feitas de EVA, são importantes para cobrir a figura geométrica e visualizar de forma concreta, quantos “quadrinhos” compõe determinada figura.

Figura 3.4 - Ilustração de alguns Geoplanos.



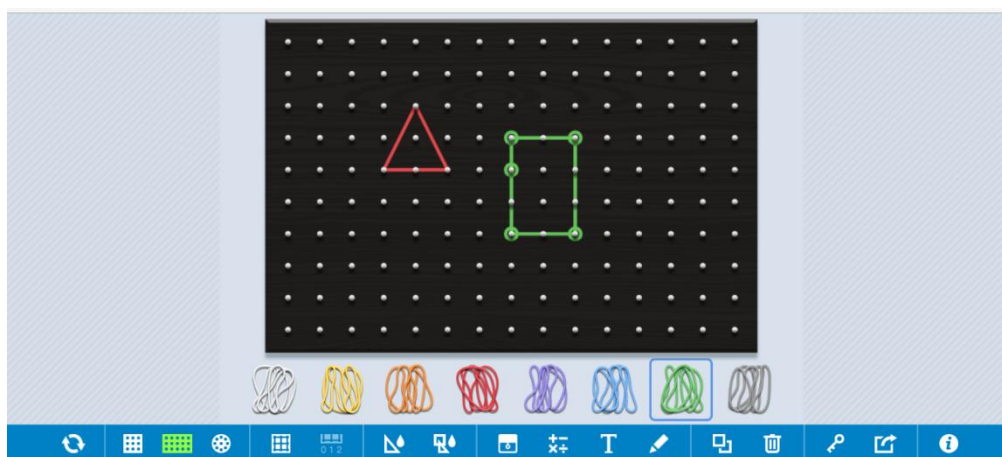
Fonte: abecedariodaeducacao.pt

3.2.2 Geoboard

O Geoboard também é um importante aliado na aprendizagem da Geometria Plana, principalmente para aqueles estudantes que gostam muito de tecnologia. No entanto, é importante que eles tenham contato, primeiramente, com o Geoplano físico.

O Geoboard pode ser instalado no celular, mas também pode ser utilizado sem instalação, diretamente do site <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>

Figura 3.5 - Geoboard Virtual



Fonte: [Geoplano pelo Centro de Aprendizagem de Matemática \(mathlearningcenter.org\)](https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/)

3.3 O USO DO MULTIPLANO, DO GEOPLANO E DO GEOBOARD PARA O CÁLCULO DE ÁREAS

Como já mencionado anteriormente, o Multiplano pode ser utilizado para o ensino/aprendizagem de vários conteúdos de Matemática e Estatística. Nesta dissertação, um dos focos é o estudo do uso do Multiplano ou do Geoplano e a tecnologia do Geoboard, alinhado ao uso de algumas metodologias, para o cálculo de áreas. Para as turmas iniciais, é muito importante a utilização do Geoplano para o estudo de área, por ser bem intuitivo e tátil, de forma que os estudantes podem aprender de maneira concreta e construtiva.

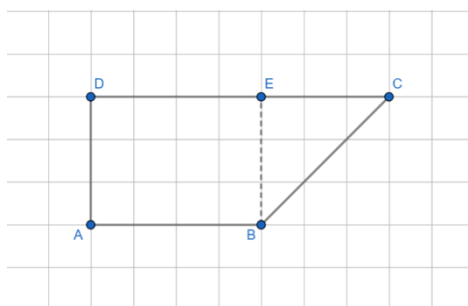
O cálculo de área será realizado utilizando esses recursos didáticos, aliado as várias técnicas e metodologias vistas anteriormente.

3.3.1 Cálculo de áreas de figuras irregulares, por meio da decomposição e composição por polígonos

Será realizado o cálculo de áreas de algumas figuras irregulares, utilizando primeiro a malha quadriculada do geogebra (é interessante utilizar, com os estudantes, primeiro o papel quadriculado).

a) Trapézio

Figura 3.6 - Ilustração de um trapézio.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

A área do trapézio ABCD (figura 3.6) é bem simples de ser calculada e, exatamente por ser de cálculo fácil, começar-se-á por ela. Veja que, pela definição de área “A área de uma região no plano é um número positivo que associa-se à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado”, neste caso, pode-se simplesmente contar quantos quadradinhos da malha preenchem completamente o polígono estudado (no caso, 15 quadradinhos inteiros e 3 metades, totalizando 16,5 *u. a.*).

Observe que o trapézio ABCD da figura 3.6, é composto pelo retângulo ABED e pelo triângulo BCE. Portanto, a área do trapézio ABCD é a soma da área do retângulo ABED com a área do triângulo BCE.

Veja:

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABED) + \text{Área}(BCE) = (4 \cdot 3) + \frac{3 \cdot 3}{2} = 12 + \frac{9}{2} = 12 + 4,5 = 16,5 \text{ u. a.}$$

Utilizando o Multiplano, o Geoplano e o Geoboard

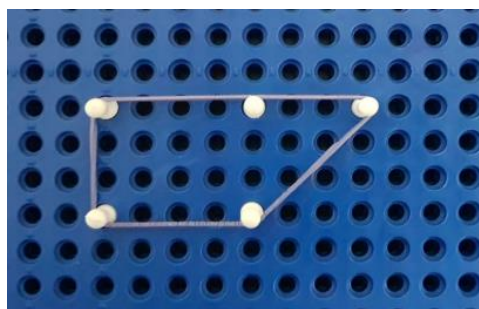
Pode-se utilizar o Multiplano, o Geoplano e/ou o Geoboard para introduzir o cálculo da área de algumas formas geométricas. Neste caso, a figura geométrica será formada,

contornando-a com elástico e utilizando pinos para os vértices. A unidade de medida será o espaço entre os furos e o quadradinho formado por 4 desses furos, formam unidade de área.

Utilizando o Multiplano

A seguir tem-se a figura 3.6 representada no multiplano. Note que o trapézio da figura 3.7 é composta por um retângulo (de base 4 e altura 3) e um triângulo (de base 3 e altura 3). Observe, que o retângulo possui 12 unidades de área, enquanto o triângulo possui 4,5 unidades de área, totalizando 16,5 *u. a.*

Figura 3.7 - Multiplano



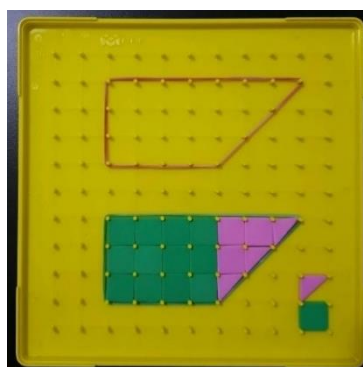
Fonte: Multiplano fotografado pela autora

Utilizando o Geoplano

No Geoplano, a representação da figura 3.6 utilizando o método da decomposição e composição de polígonos, pode ser feita utilizando triângulos e quadradinhos de EVA e o elástico, para o contorno da figura. Cada quadradinho de EVA representa uma unidade de medida da área, enquanto que cada triângulo representa a metade dessa unidade.

Veja, pode-se preencher a figura com os quadradinhos e os triângulos de EVA, o que facilitará o cálculo de sua área.

Figura 3.8 - Geoplano



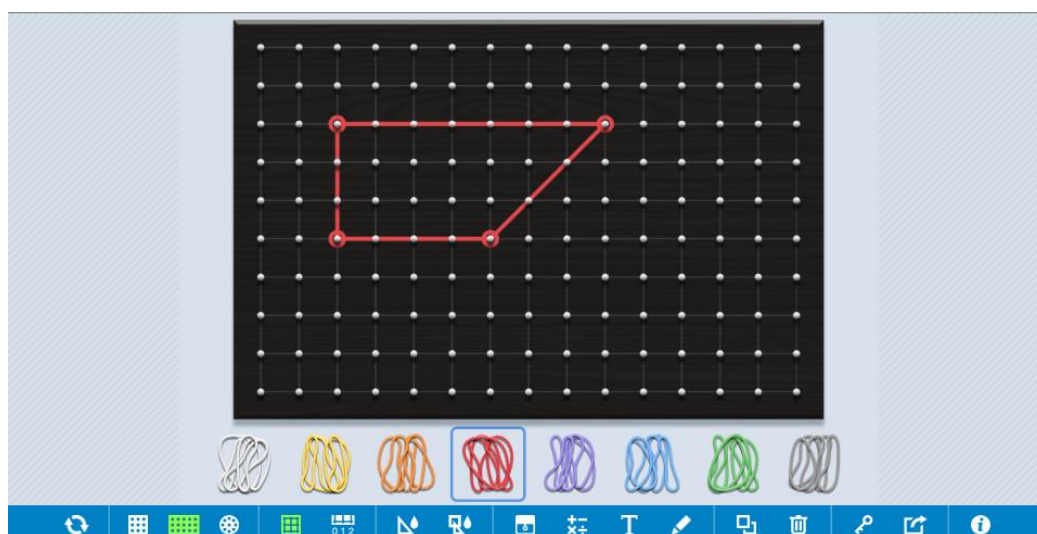
Fonte: Geoplano fotografado pela autora

Note que o trapézio (figura 3.8) é composto por um retângulo (base 4 e altura 3) e um triângulo (base 3 e altura 3). Utilizando o Geoplano, pode-se inclusive identificá-los com cores diferentes, o que é importante para que todos os alunos consigam perceber essa composição. O conteúdo “Área de figuras planas” é abordado em diversos níveis de ensino (do fundamental ao superior) e com diferentes estudantes (estudantes com habilidades matemáticas bem desenvolvidas ou pouco desenvolvidas, com déficit de atenção ou não, com algum tipo de deficiência ou não), portanto com níveis de abstrações diferentes. Sendo assim, é importante a utilização de diferentes recursos e metodologias para que a aprendizagem aconteça de maneira eficiente e uma delas é trabalhar com o concreto, com o manipulável. Neste ponto, o geoplano é um recurso riquíssimo.

Utilizando o Geoboard (aplicativo online)

Representa-se também a figura 3.6 no Geoboard. Neste caso, há a possibilidade de colocar a malha quadriculada, ficando mais visível quantos quadradinhos (unidade de área) preenchem o trapézio (são 15 quadradinhos inteiros e 3 metades, totalizando 16,5 quadradinhos).

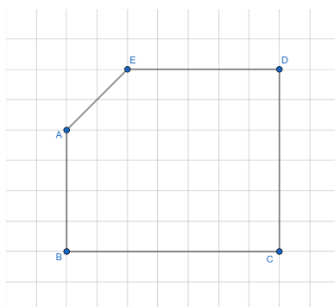
Figura 3.9 - Representação do trapézio no Geoboard.



Fonte: a autora, com utilização do Geoboard

b) Pentágono irregular

Figura 3.10 - Ilustração de um pentágono irregular.

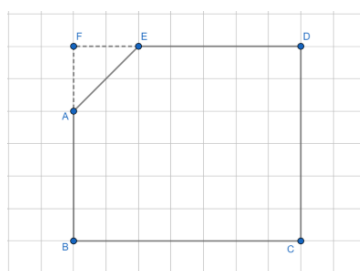


Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

A área da figura 3.10 pode ser calculada contando quantos quadradinhos da malha são necessários para preenchê-la (no caso, são 39 quadradinhos inteiros e 2 metades, totalizando 40 u.a.).

Observe que, neste caso, também pode-se completar o retângulo na figura, calcular sua área e subtrair a área do triângulo que ficou a mais na figura original. Veja:

Figura 3.11 - Ilustração de um polígono

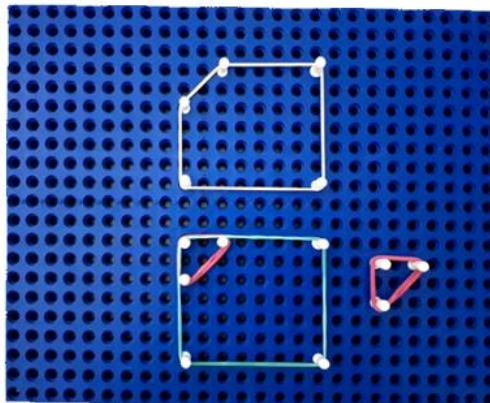


Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

$$\text{Área}(ABCDE) = \text{Área}(BCDF) - \text{Área}(AEF) = (7 \cdot 6) - \frac{2 \cdot 2}{2} = 42 - \frac{4}{2} = 42 - 2 = 40 \text{ u. a.}$$

Utilizando o Multiplano

Figura 3.12 - Representação de um polígono no Multiplano.

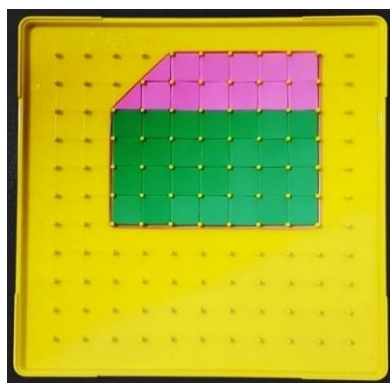


Fonte: a autora, com utilização do Multiplano

$$\mathcal{A} = 42 - \frac{2 \cdot 2}{2} = 42 - \frac{4}{2} = 42 - 2 = 40 \text{ u.a}$$

Utilizando o Geoplano

Figura 3.13 - Representação de um polígono no Geoplano.



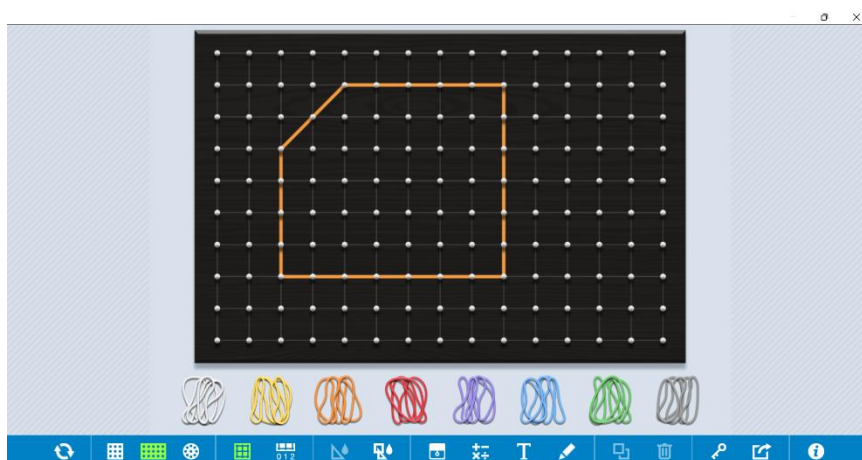
Fonte: Geoplano fotografado pela autora

São 39 quadradinhos inteiros e 2 metades, totalizando 40 quadradinhos, ou 40 *u. a.*

Utilizando o Geoboard

Representando a figura 3.10 no Geoboard, com malha quadriculada, percebe-se que o polígono é formado por 39 quadradinhos inteiros e 2 metades, totalizando 40 quadradinhos.

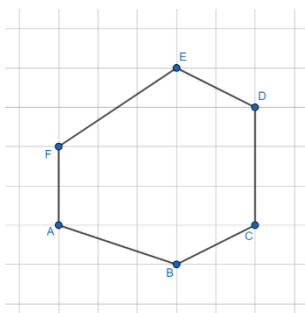
Figura 3.14 - Representação de um polígono no Geoboard.



Fonte: a autora, com utilização do Geoboard

c) Hexágono irregular

Figura 3.15 - Ilustração de um hexágono irregular na malha quadriculada.



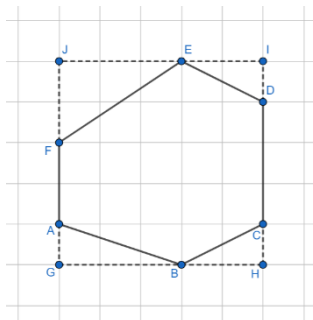
Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

É importante ressaltar a importância de saber utilizar diferentes técnicas para o cálculo de área, porque dependendo do polígono/figura uma técnica pode ser considerada mais fácil ou mais eficiente do que a outra.

No caso da figura 3.15, usar a técnica de contagem dos quadradinhos não é eficiente, uma vez que há quadradinhos inteiros, pela metade e décimos de quadradinhos. Portanto, neste caso, fazer a contagem se torna ineficaz.

Pode-se, completar o quadrado na figura 3.15 (veja figura 3.16), calcular sua área e subtrair as áreas dos triângulos que ficaram a mais na figura original. Veja:

Figura 3.16 - Ilustração de um hexágono irregular inserido num quadrado

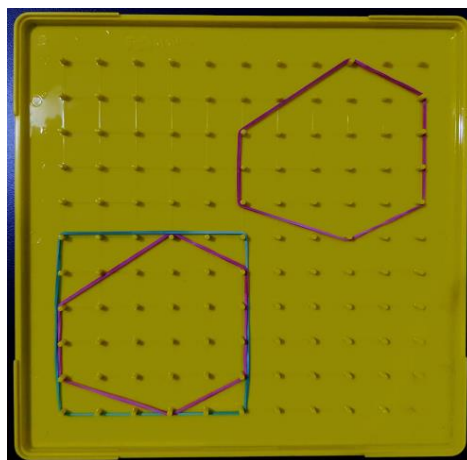


Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCDEF) &= \text{Área}(GHIJ) - \text{Área}(AGB) - \text{Área}(BHC) - \text{Área}(EDI) - \text{Área}(FEJ) = \\ &= (5 \cdot 5) - \frac{3 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} = 25 - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} - \frac{2}{2} - \frac{6}{2} = \\ &= 25 - \frac{3}{2} - 1 - 1 - 3 = 20 - \frac{3}{2} = 20 - 1,5 = 18,5 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Utilizando o Geoplano

Figura 3.17 - Hexágono irregular representado no Geoplano.



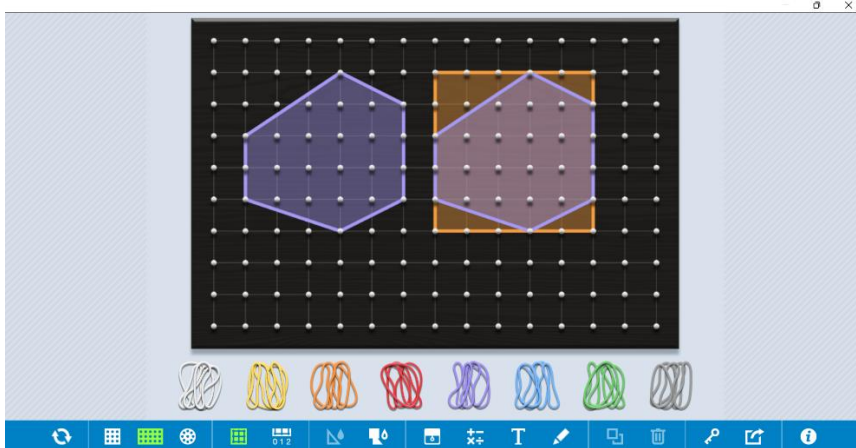
Fonte: Geoplano fotografado pela autora

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 5 \cdot 5 - \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} = 25 - \frac{6}{2} - \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} \\ \mathcal{A} &= 25 - 3 - 1 - 1,5 - 1 = 25 - 6,5 = 18,5 \text{ u.a} \end{aligned}$$

Utilizando o Geoboard

Representando a figura 3.15 no Geoboard, insere-se totalmente o hexágono ABCDEF num quadrado de 5 unidades de comprimento de lado (a área do quadrado, em que o hexágono será inserido é de 25 u. a).

Figura 3.18 - Hexágono irregular representado no Geoboard.



Fonte: a autora, com utilização do Geoboard

Em seguida, subtraí-se a área de cada triângulo, que junto com o hexágono, completa o quadrado. O valor que sobra é exatamente a área do hexágono ABCDEF.

Calculando a área dos triângulos, utilizando a fórmula, tem-se:

$$A_{t1} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3; A_{t2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1; A_{t3} = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1,5; A_{t4} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

Então:

$$\text{Área } (ABCDEF) = A_{\text{quadrado}} - A_{t1} - A_{t2} - A_{t3} - A_{t4}$$

$$\text{Área } (ABCDEF) = 25 - 3 - 1 - 1,5 - 1$$

$$\text{Área } (ABCDEF) = 25 - 6,5$$

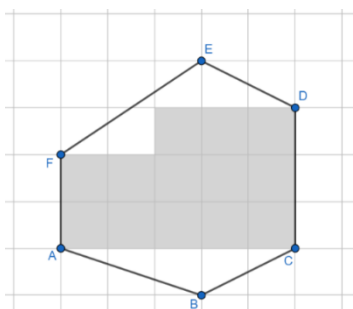
$$\text{Área } (ABCDEF) = 18,5 \text{ u. a.}$$

3.3.2 Cálculo aproximado de áreas de regiões poligonais utilizando o Método “Medida da Área por Falta e Medida da Área por Excesso”.

Novamente, será utilizada a malha quadriculada, que pode ser papel quadriculado ou o geogebra (neste caso será utilizado o geogebra) e o hexágono ABCDEF, utilizado na seção anterior. Após o uso da malha quadriculada, será utilizado o mesmo método, mas com o uso do Multiplano.

Primeiro será utilizada a contagem do número de quadradinhos inteiros no interior da figura do hexágono ABCDEF (medida da área por falta). Neste caso, encontra-se 13 quadradinhos inteiros no interior da figura. Portanto, a medida aproximada da área da figura por falta é de 13 *u. a.*

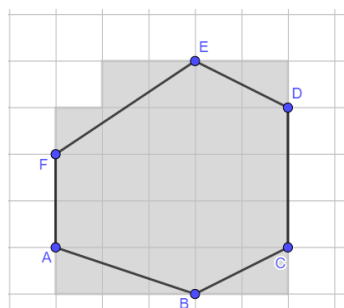
Figura 3.19 - Ilustração de um hexágono na malha quadriculada, com destaque aos quadradinhos inteiros no seu interior.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Segundo, conta-se todos os quadradinhos que cobrem o hexágono ABCDEF (todos, inteiros ou não), o que denomina-se “medida da área por excesso”. Neste caso, encontra-se 24 quadradinhos, portanto a medida da área da figura por excesso é de 24 *u. a.*

Figura 3.20 - Ilustração de um hexágono na malha quadriculada, com destaque aos quadradinhos que cobrem o polígono.



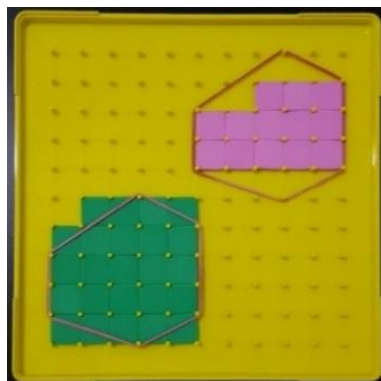
Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Portanto, a área \mathcal{A} do hexágono é um valor entre 13 *u. a.* e 24 *u. a.*

$$13 \text{ u. a.} < \mathcal{A} < 24 \text{ u. a.}$$

Utilizando o Geoplano

Figura 3.21 - Representação do hexágono no Geoplano (Método de Falta e Excesso).



Fonte: Geoplano fotografado pela autora

A área \mathcal{A} do hexágono é um valor entre 13 *u. a.* e 24 *u. a.*

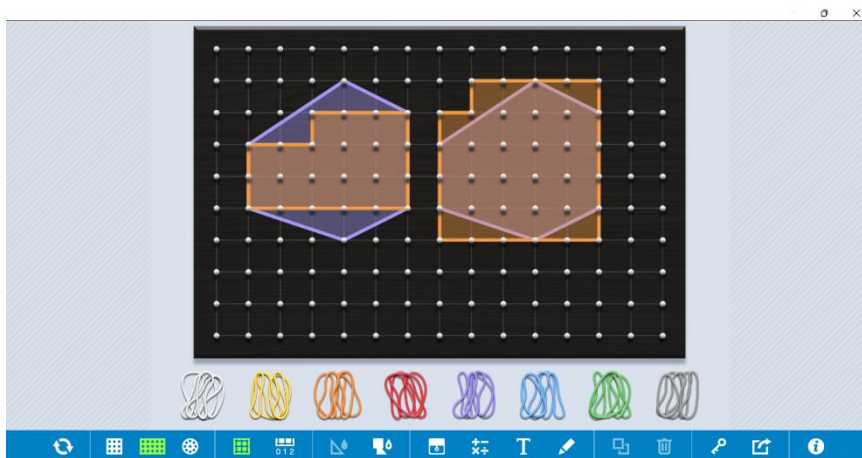
$$13 \text{ u. a.} < \mathcal{A} < 24 \text{ u. a.}$$

Utilizando o Geoboard

Utilizando o Geoboard, a lógica é a mesma. Primeiro realiza-se a contagem do número de quadradinhos inteiros no interior da figura do hexágono (medida da área por falta). Neste caso, são 13 quadradinhos inteiros no interior da figura. Portanto, a medida aproximada da área da figura por falta é de 13 *u. a.*

Em seguida, conta-se todos os quadradinhos que cobrem o hexágono (todos, inteiros ou não), o que denomina-se “medida da área por excesso”. Neste caso, encontra-se 24 quadradinhos, portanto a medida da área da figura por excesso é de 24 *u. a.*

Figura 3.22 - Representação do hexágono no Geoboard (Método de Falta e Excesso).



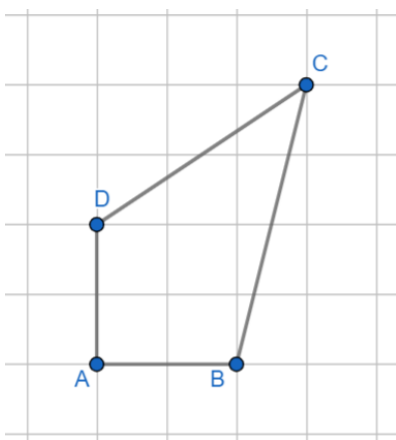
Fonte: a autora, com utilização do Geoboard.

A área \mathcal{A} do hexágono é um valor entre 13 *u.a.* e 24 *u.a.*

$$13 \text{ u.a.} < \mathcal{A} < 24 \text{ u.a.}$$

Exemplo 3.1: Determine a área aproximada da figura a seguir, utilizando o Método “Medida da Área por Falta e Medida da Área por Excesso”.(Utilize a região plana limitada por um quadradinho da malha como unidade de medida da área).

Figura 3.23 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada.



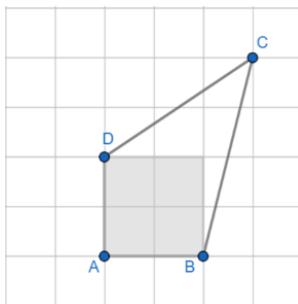
Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Resolução:

Calcula-se a área aproximada do quadrilátero ABCD, utilizando o método de falta e excesso. Como a figura já encontra-se desenhada numa malha quadriculada, realiza-se a contagem do número de quadradinhos inteiros no interior da figura do quadrilátero ABCD (medida da área por falta) e em seguida conta-se todos os quadradinhos que cobrem toda a região do quadrilátero ABCD (medida da área por excesso).

- i) Quadrilátero ABCD na malha quadriculada (quadradinhos com 1 *cm* de lado)

Figura 3.24 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada, com destaque aos quadradinhos inteiros no seu interior.

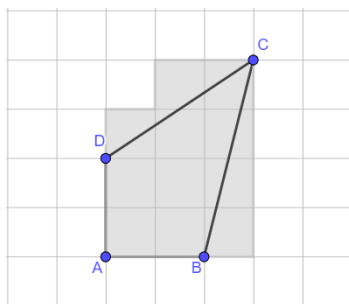


Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Neste caso, encontra-se 4 quadradinhos inteiros no interior da figura. Portanto, a medida aproximada da área da figura por falta é de $4 u. a.$

Em seguida é verificado quantos quadradinhos cobrem toda a região do quadrilátero ABCD.

Figura 3.25 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada, com destaque aos quadradinhos que cobrem o polígono.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Encontram-se 11 quadradinhos que cobrem toda a região do quadrilátero ABCD (medida da área por excesso). Portanto, a medida aproximada da área da figura, por excesso, é de $11 u. a.$

Concluí-se que a área \mathcal{A} do quadrilátero é um valor entre $4 u. a.$ e $11 u. a.$

$$4 u. a. < \mathcal{A} < 11 u. a.$$

Como cada “quadradinho” da malha tem 1 centímetro de lado, então a área \mathcal{A} do quadrilátero é um valor entre $4 cm^2$ e $11 cm^2$.

Portanto:

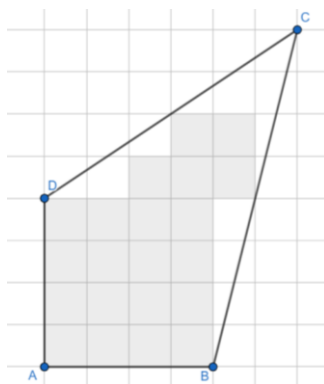
$$4 cm^2 < \mathcal{A} < 11 cm^2$$

ii) Quadrilátero ABCD em malha quadriculada (quadradinhos com $\frac{1}{2} cm$ de lado)

O “Metodo de Falta e Excesso” calcula a área aproximada. Neste caso, quanto menor for o quadradinho da malha quadriculada, a aproximação será mais próxima do valor real. A seguir, coloca-se o mesmo quadrilátero, com as mesmas medidas, mas em malha em que o lado de cada quadradinho equivale a $\frac{1}{2}$ centímetro. Logo, a área de cada quadradinho passa a ser $\frac{1}{4} cm^2$.

Observe:

Figura 3.26 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros no interior do polígono).



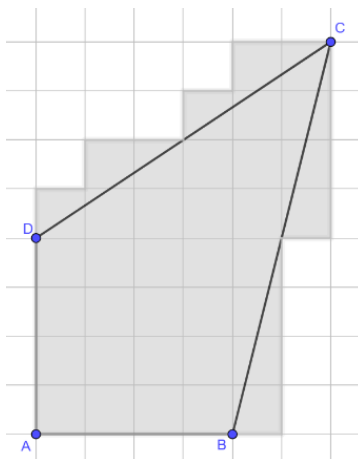
Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

No interior do quadrilátero ABCD há 21 quadradinhos inteiros, com lado igual a $\frac{1}{2}$ cm. Como a área de cada quadradinho é de $\frac{1}{4}$ cm^2 , então a área aproximada do quadrilátero ABCD, por falta, é de $5,25$ cm^2 . Veja:

$$21 \cdot \frac{1}{4} = \frac{21}{4} = 5,25 \text{ cm}^2$$

Em seguida verifica-se quantos quadradinhos cobrem toda a região do quadrilátero ABCD.

Figura 3.27 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada (destaque aos quadradinhos inteiros que cobrem o polígono).



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Encontram-se 36 quadradinhos que cobrem toda a região do quadrilátero ABCD (medida da área por excesso). Portanto, a medida aproximada da área da figura por excesso é de 36 u. a.

Como a área de cada quadradinho é de $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$, então a área aproximada do quadrilátero ABCD, por excesso, é de 9 cm^2 . Veja:

$$36 \cdot \frac{1}{4} = \frac{36}{4} = 9 \text{ cm}^2$$

Concluí-se que a área \mathcal{A} do quadrilátero é um valor entre 21 u. a. e 36 u. a.

$$21 \text{ u. a.} < \mathcal{A} < 36 \text{ u. a.}$$

Como cada “quadradinho” da malha tem $\frac{1}{2}$ centímetro de lado, então a área \mathcal{A} do quadrilátero é um valor entre $5,5 \text{ cm}^2$. e 9 cm^2 .

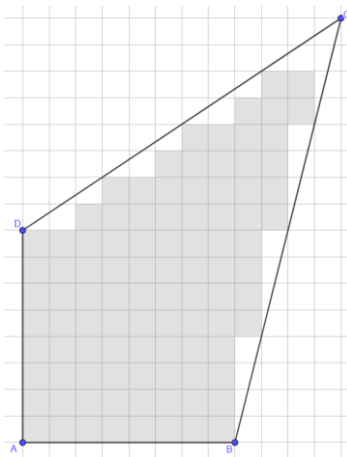
Portanto:

$$5,5 \text{ cm}^2 < \mathcal{A} < 9 \text{ cm}^2$$

iii) Quadrilátero ABCD na malha quadriculada (quadradinhos com $\frac{1}{4} \text{ cm}$ de lado)

Outra vez, coloca-se o mesmo quadrilátero, com as mesmas medidas, mas em malha em que o lado de cada quadradinho equivale a $\frac{1}{4} \text{ cm}$. Logo, a área de cada quadradinho passa a ser $\frac{1}{16} \text{ cm}^2$.

Figura 3.28 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada, com destaque aos quadradinhos inteiros no seu interior.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

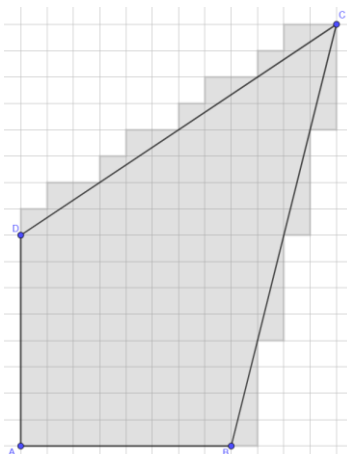
Dessa vez, encontra-se 97 quadradinhos no interior da região do quadrilátero ABCD (medida da área por falta). Portanto, a medida aproximada da área da figura por falta é de 97 u. a. Como a área de cada quadradinho é de $\frac{1}{16} \text{ cm}^2$, tem-se que a área aproximada do quadrilátero ABCD, por falta, é de $6,0625 \text{ cm}^2$.

$$97 \cdot \frac{1}{16} = \frac{97}{16} = 6,0625 \text{ cm}^2$$

Em seguida verifica-se quantos quadradinhos cobrem toda a região do quadrilátero

ABCD.

Figura 3.29 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada, com destaque aos quadradinhos que cobrem o polígono.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Cobrimo toda a região do quadrilátero ABCD, encontram-se 128 quadradinhos (medida da área por excesso). Portanto, a medida aproximada da área da figura por excesso é de 128 *u. a.*

Como a área de cada quadradinho é de $\frac{1}{16} \text{ cm}^2$, tem-se que a área aproximada do quadrilátero ABCD, por excesso é de 8 cm^2 .

Veja:

$$128 \cdot \frac{1}{16} = \frac{128}{16} = 8 \text{ cm}^2$$

Concluí-se que a área \mathcal{A} do quadrilátero é um valor entre 97 *u. a.* e 128 *u. a.*

$$97 \text{ u. a.} < \mathcal{A} < 128 \text{ u. a.}$$

Como cada “quadradinho” da malha tem $\frac{1}{4} \text{ cm}$ de lado, então a área \mathcal{A} do quadrilátero é um valor entre $6,0625 \text{ cm}^2$. e 8 cm^2 .

Portanto:

$$6,0625 \text{ cm}^2 < \mathcal{A} < 8 \text{ cm}^2$$

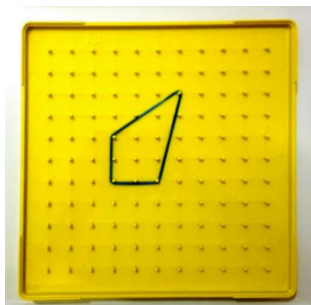
Comparando i), ii) e iii), a aproximação da área é maior em iii), em que o polígono está inserido em malha quadriculada onde os quadradinhos são menores.

Concluí-se que, quanto menor for o “quadradinho” da malha, mais preciso será o valor da área da figura plana obtida através do método de falta e excesso.

Utilizando o Geoplano

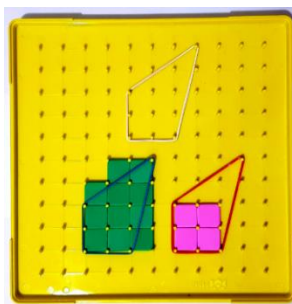
O cálculo da área pelo Método da Falta e Excesso, pode ser realizado utilizando o Geoplano como um forte recurso pedagógico.

Figura 3.30 - Quadrilátero representado no Geoplano.



Fonte: Geoplano fotografado pela autora.

Figura 3.31 -- Representação do quadrilátero no Geoplano (Método de Falta e Excesso).



Fonte: Geoplano fotografado pela autora.

Concluí-se que a área \mathcal{A} do quadrilátero é um valor entre $4 u. a.$ e $11 u. a.$

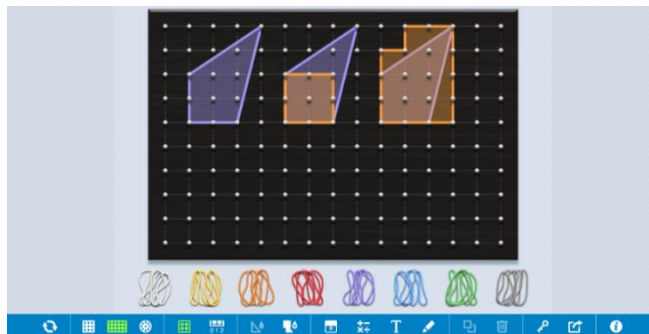
$$4 u. a. < \mathcal{A} < 11 u. a.$$

No Geoplano, não é possível fazer todas as demonstrações que foram realizadas anteriormente (i, ii e iii).

Utilizando o Geoboard

Após representar a figura 3.25 no Geoboard, conta-se os quadradinhos inteiros no interior do quadrilátero e depois conta-se todos os quadradinhos, inteiros ou não, que cobrem todo o quadrilátero.

Figura 3.32 - Representação do quadrilátero no Geoboard (Método de Falta e Excesso).



Fonte: a autora, com utilização do Geoboard.

Concluí-se que a área \mathcal{A} do quadrilátero é um valor entre $4 u. a.$ e $11 u. a.$

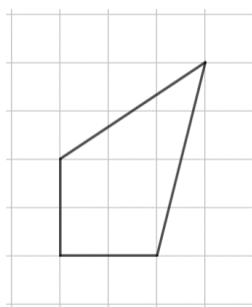
$$4 u. a. < \mathcal{A} < 11 u. a.$$

3.3.3 Cálculo de áreas de regiões poligonais utilizando o Teorema de Pick

O cálculo da área das figuras planas pode também ser obtido utilizando o Teorema de Pick (já mencionado anteriormente). Será utilizada a malha quadriculada, que pode ser o papel quadriculado ou o geogebra (neste caso será utilizado o geogebra). Após o uso da malha quadriculada, utiliza-se o mesmo método, mas com o uso do Multiplano.

Utilizando o Teorema de Pick, determina-se a área da região plana a seguir.

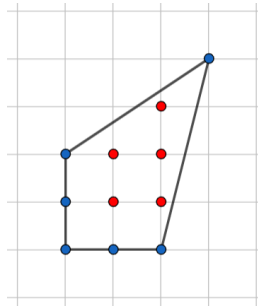
Figura 3.33 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

Como os vértices do quadrilátero (figura 3.23) são pontos do plano com coordenadas inteiras, pode-se aplicar o Teorema de Pick. Observe a Figura 3.34, a seguir, e veja que o quadrilátero apresenta cinco pontos de coordenadas inteiras em seu interior (em vermelho) e seis pontos de coordenadas inteiras em suas arestas (em azul).

Figura 3.34 - Ilustração de um quadrilátero na malha quadriculada (destaque aos pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e pontos de coordenadas inteiras em suas arestas).



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra

A área do quadrilátero (figura 3.34) será calculada utilizando a seguinte fórmula (Teorema de Pick):

$$\text{Área Polígono} = i + \frac{b}{2} - 1,$$

onde $\left\{ \begin{array}{l} i: \text{quantidade de coordenadas inteiras, interiores ao polígono;} \\ b: \text{representa a quantidade de coordenadas inteiras dos lados ou contorno do polígono.} \end{array} \right.$

$$\text{Área Polígono} = 5 + \frac{6}{2} - 1$$

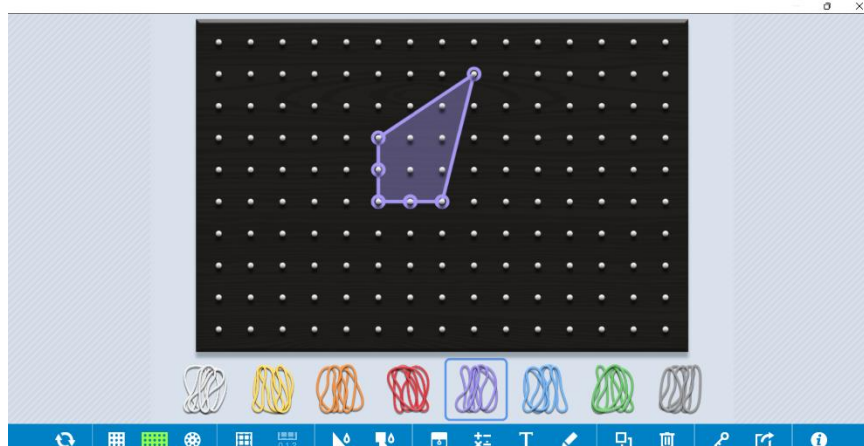
$$\text{Área Polígono} = 5 + 3 - 1$$

$$\text{Área Polígono} = 7 \text{ u. a.}$$

Utilizando o Geoboard

Utilizando o Geoboard, destaca-se as 06 coordenadas inteiras dos lados ou contorno do quadrilátero e contam-se 05 coordenadas inteiras no seu interior. Em seguida, utiliza-se o Teorema de Pick, para o cálculo da área.

Figura 3.35 - Ilustração de um quadrilátero no Geoboard (destaque aos pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e pontos de coordenadas inteiras em suas arestas).



Fonte: a autora, com utilização do Geoboard

$$\text{Área Polígono} = i + \frac{b}{2} - 1$$

$$\text{Área Polígono} = 5 + \frac{6}{2} - 1$$

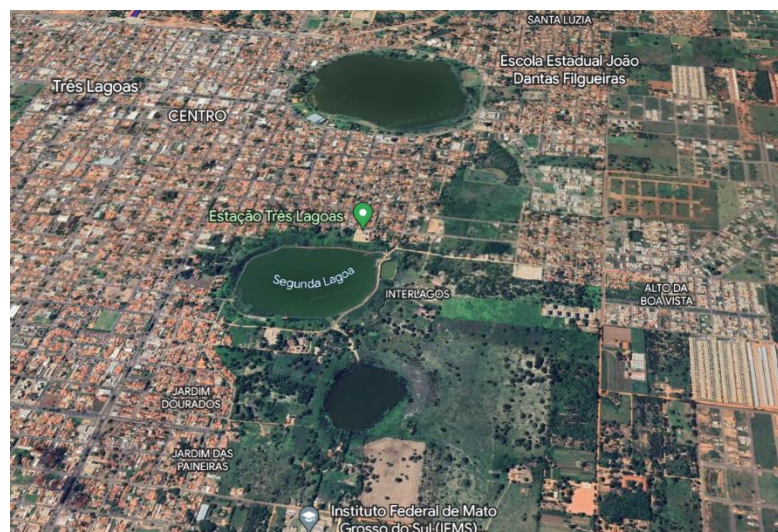
3.4 CÁLCULO APROXIMADO DE ÁREAS DE REGIÕES IRREGULARES UTILIZANDO O GEOGEBRA E O GOOGLE MAPS

O Geogebra, já mencionado anteriormente, é um *software* de Geometria Dinâmica e também será utilizado para o ensino de cálculo de áreas.

O Google Maps é uma ferramenta de GPS, que mostra rotas, informação de trânsitos, tudo em tempo real, para melhorar o trajeto do motorista até o destino final. É possível visualizar mapas e imagens, enviadas de um satélite da Terra. Será utilizado o recurso do Google Maps, aliado as funções do Geogebra, para o cálculo de áreas.

Será utilizado um exemplo de como determinar a área, de lugares localizados pelo Google Maps, através do recurso “Medir Distância” (recurso do Google Maps). O Geogebra também será utilizado para o cálculo da área da mesma região, localizada pelo Google Maps, através do teorema de Pick e o Método de Falta e Excesso. O local escolhido, é um dos cartões postais da cidade de Três Lagoas, a Lagoa Maior. É a terceira e a maior das 3 (três) lagoas que dão nome ao município e possui uma área de 418 000 m^2 . A lagoa é habitada por animais da fauna pantaneira, como araras, tuiuiús e capivaras, que convivem harmoniosamente com os moradores que habitam o local.

Figura 3.36 - Imagem das 3 (três) lagoas (Três Lagoas/MS)



Fonte: Imagem extraída do *Software* Google Earth em 2 de setembro de 2023.

Figura 3.37 - Imagem da Lagoa Maior (Três Lagoas/MS)



Fonte: Imagem extraída do *Software* Google Earth em 2 de setembro de 2023.

Figura 3.38 - Foto de uma capivara na Lagoa Maior.



Fonte: Foto extraída do *Software* Google Earth em 2 de setembro de 2023.

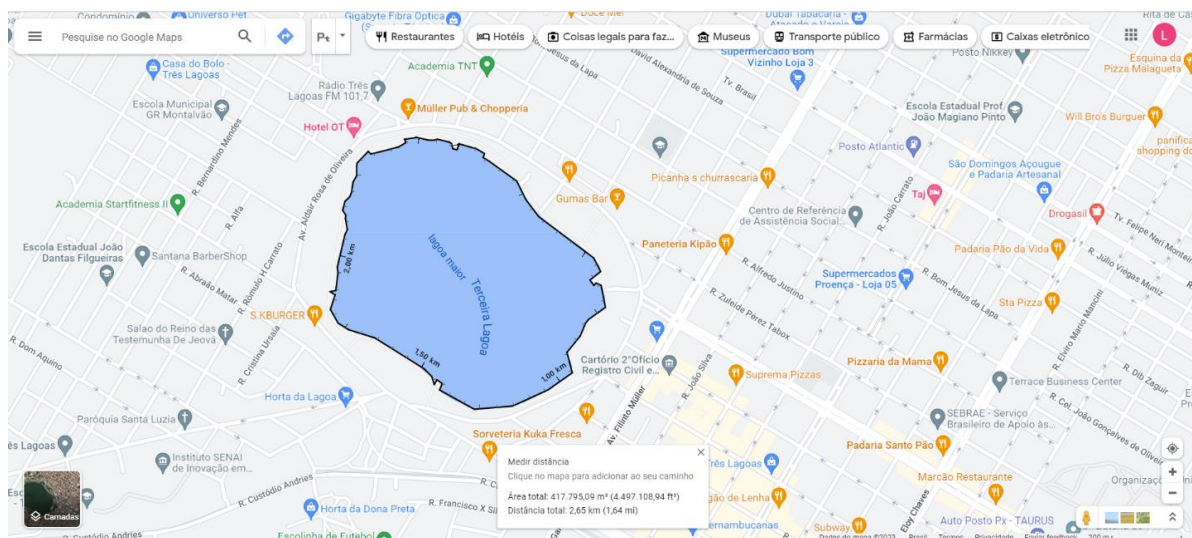
É importante que o professor escolha um local no Google Maps, que seja significativo para a população da região em que os estudantes habitam. Inclusive, pode escolher o local em comum acordo com os estudantes.

Exemplo 3.2: Determine a área aproximada da Lagoa Maior (a terceira lagoa de Três Lagoas/MS), utilizando os seguintes métodos:

- a) Utilizar o Google Maps para localizar a Lagoa Maior, contorná-la, utilizando o recurso “medir distância”, para que o Google Maps possa calcular a área da lagoa.

Resolução:

Figura 3.39 - Lagoa Maior ou Primeira Lagoa - Três Lagoas/MS (visualização: Google Maps).



Fonte: Google Maps (contorno da lagoa realizada pela autora, o que resultou na medida da distância total do contorno da Lagoa Maior e de sua área total)

Para encontrar a medida do contorno da lagoa (ou distância percorrida), foi utilizado o recurso Medir distância (ajuda do Google Maps).

Para medir a distância percorrida:

- No computador, abra o Google Maps.
- Clique com o botão direito do mouse no ponto de partida.
- Selecione Medir distância.
- Para criar um caminho para medir, clique em qualquer lugar do mapa. Para adicionar outro ponto, clique em qualquer lugar no mapa.
- Na parte inferior, você encontra a distância total em milhas (mi) e quilômetros (km).

Dica: para mover um ponto ou caminho, clique e arraste. Para remover um ponto, clique nele.

Quando terminar, clique em “Fechar” no card que fica na parte inferior.

Ao contornar toda a lagoa, o google maps também indicará a área da lagoa:

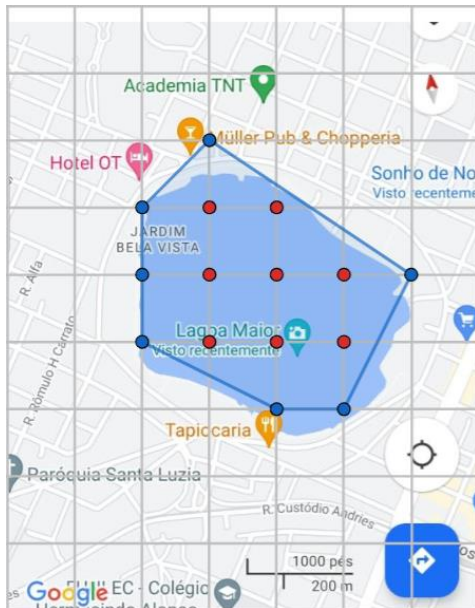
Área total: $417.795,09 \text{ m}^2$ ($4.497.108,94 \text{ ft}^2$).

Distância total: $2,65 \text{ km}$ ($1,64 \text{ mi}$).

b) Utilizar o Teorema de Pick, para obter a área aproximada da Lagoa Maior (lembre-se que o Teorema de Pick é utilizado com polígonos, portanto, deve-se construir um polígono P,

cuja a área se aproxime da área da lagoa, numa malha quadriculada em que os vértices do polígono fique sobre os “nós da malha”).

Figura 3.40 - Polígono representando a Lagoa Maior - Três Lagoas/MS.



Fonte: Lagoa Maior retirada pelo Google Maps e inserida no Geogebra, pela autora.

Resolução: Primeiro localiza-se a Lagoa Maior pelo Google Maps (situada na cidade de Três Lagoas/MS), em seguida printa-se a tela e inserimos no Geogebra, com malha quadriculada, com quadradinhos de 1 centímetro de lado. Como será utilizado o Teorema de Pick para o cálculo aproximado de área, construí-se em torno da lagoa, um polígono P , com os vértices sobre os “nós” da malha quadriculada.

Como os vértices do polígono P são pontos do plano com coordenadas inteiras, pode-se aplicar o Teorema de Pick. Observe que o polígono P apresenta oito pontos de coordenadas inteiras em seu interior (em vermelho) e sete pontos de coordenadas inteiras em suas arestas (em azul).

$$\text{Área Polígono } (P) = i + \frac{b}{2} - 1$$

$$\text{Área Polígono } (P) = 8 + \frac{7}{2} - 1$$

$$\text{Área Polígono } (P) = 8 + 3,5 - 1$$

$$\text{Área Polígono } (P) = 10,5 \text{ u.a.}$$

Como a escala no google maps é 1: 20000 (cada lado do quadradinho da malha mede 1 cm, que equivale a 20 000 cm de medida real). Assim, cada quadradinho da malha tem área

de 1 cm^2 e equivale a $400\,000\,000 \text{ cm}^2$ (medida real) que é o mesmo que $40\,000 \text{ m}^2$.

Logo:

$$\text{Área Polígono } (P) = 10,5 \cdot 40\,000$$

$$\text{Área Polígono } (P) = 420\,000 \text{ m}^2$$

Portanto, a área aproximada da Lagoa Maior (Três Lagoas/MS) é de $420\,000 \text{ m}^2$.

É importante ressaltar que o Teorema de Pick é utilizado com polígonos, por isso foi construído um polígono P , com área próxima a área da lagoa. Portanto, o resultado obtido, é uma aproximação da área pretendida.

c) Utilizar o “Método de Falta e Excesso”, para obter a área aproximada da Lagoa Maior.

Figura 3.41 - Medida da área por falta.

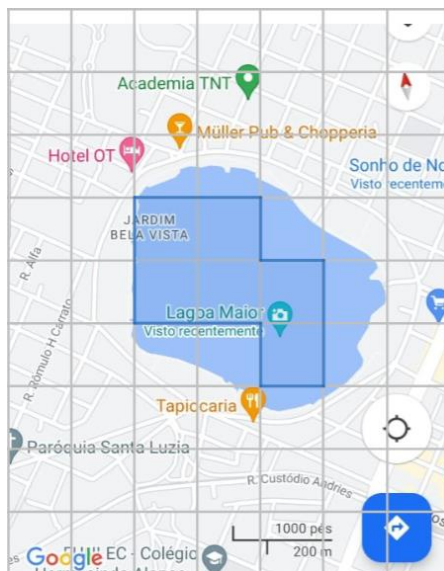
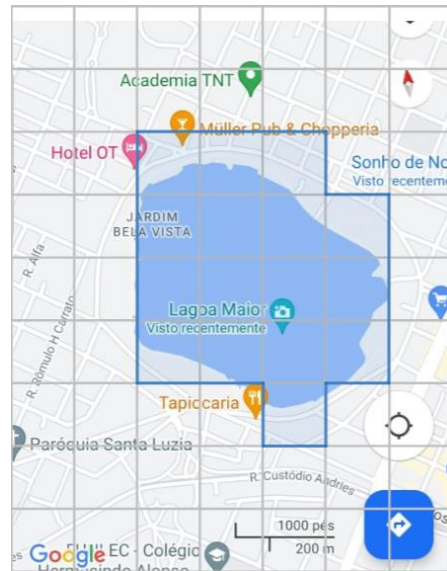


Figura 3.42 - Medida da área por excesso.



Fonte: Lagoa Maior retirada pelo Google Maps e inserida no Geogebra, pela autora.

Considerando que cada quadradinho da malha representa uma unidade de área (neste caso 1 cm^2 de área), tem-se que a medida da área por excesso é de 16 cm^2 e a medida da área por falta é de 6 cm^2 . Portanto, a área do polígono, que representa a Lagoa Maior, está entre 6 cm^2 e 16 cm^2 .

Como a escala no google maps é 1:20000 (cada lado do quadradinho da malha tem 1 cm, que equivale a 200 m de medida real), tem-se que cada quadradinho mede 1 cm^2 de área, ou seja, cada quadradinho na malha equivale $400\,000\,000 \text{ cm}^2$ de área da medida real, que é o mesmo que $40\,000 \text{ m}^2$.

Então, a área \mathcal{A} da Lagoa Maior está entre $240\,000\text{ m}^2$ e $640\,000\text{ m}^2$.

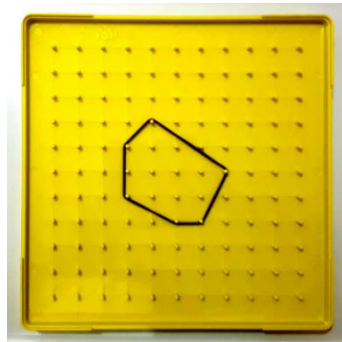
$$240\,000 < \mathcal{A} < 640\,000\text{ m}^2$$

Como já mencionado anteriormente o cálculo aproximado da área, utilizando o método de falta e excesso, será mais preciso quanto menor for o quadradinho da malha quadriculada, na qual o polígono foi inserido.

Utilizando o Geoplano

Representa-se a Lagoa Maior através de um polígono (o mais próximo possível da figura original) e calcula-se a sua área, utilizando o “Método de Falta e Excesso”.

Figura 3.43 - Polígono "Lagoa Maior" representado no Geogebra.

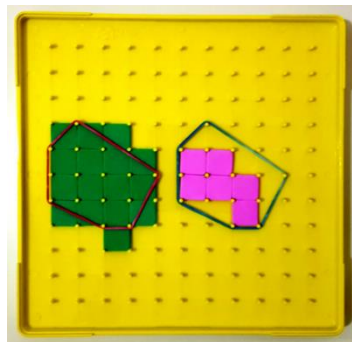


Fonte: Geoplano fotografado pela autora

Considerando que cada quadradinho do Geogebra representa uma unidade de área (neste caso 1 cm^2 de área), tem-se que a medida da área por excesso é de 16 u. a. ou 16 cm^2 e a medida da área por falta é de 6 u. a. ou 6 cm^2 . Portanto, a área do polígono \mathcal{P} , que representa a Lagoa Maior, está entre 6 cm^2 e 16 cm^2 . Ou seja,

$$6\text{ cm}^2 < \mathcal{P} < 16\text{ cm}^2$$

Figura 3.44 - Polígono "Lagoa Maior" - Método de Falta e Excesso.



Fonte: Geoplano fotografado pela autora

Como visto anteriormente, a escala no google maps é 1: 20000 (cada lado do quadrado equivale a 200 metros de medida real). Então, tem-se que a área \mathcal{A} da Lagoa Maior está entre $240\ 000\ m^2$ e $640\ 000\ m^2$.

$$240\ 000\ m^2 < \mathcal{A} < 640\ 000\ m^2$$

Assim foram utilizadas diversas estratégias e recursos para o cálculo de área da Lagoa Maior, situada na cidade de Três Lagoas, no estado de Mato Grosso do Sul. A Lagoa Maior é a maior, entre as três lagoas, que juntas dão o nome à cidade. Essa mesma estratégia pode ser utilizada para o cálculo da área da sala de aula, da escola, da casa do estudante, do mapa da cidade, entre outros.

4 CONCLUSÃO

Com base no que foi apresentado, sobre o ensino de áreas de figuras planas, com a utilização de recursos variados, nossos estudantes da Educação Básica poderão desenvolver competências e habilidades específicas da matemática e suas tecnologias, para a resolução de situações-problemas envolvendo o cálculo de área de figuras planas. Observe que o estudo de áreas inicia-se no Ensino Fundamental (séries iniciais), passa pelo Ensino Médio e é visto também em algumas graduações, como Licenciatura Plena em Matemática ou até em outros cursos, como bacharelado nas Engenharias. Claro que, em cada nível de ensino, há o aprofundamento necessário e são utilizados métodos um pouco mais complexos para os cálculos. No entanto, qualquer que seja o nível de ensino, é importante que o estudante tenha bem claro a definição de área e, para que isso aconteça, é necessário que os docentes utilizem técnicas, recursos e métodos adequados, para que a aprendizagem aconteça de forma significativa. Portanto, mesmo no nível de graduação, se o professor verificar que há necessidade de um enfoque mais “concreto”, com utilização de recursos como o geoplano, multiplanos entre outros, é importante que esse enfoque aconteça, em sala de aula, nas aulas destinadas a unidade curricular ministrada pelo professor, ou em Projetos de Ensino, Cursos de Extensão, entre outros.

Nesta dissertação, percebe-se também que é possível introduzir o Cálculo de Integral para os estudantes do Ensino Médio, através do cálculo de área de figuras irregulares.

O Geogebra e a malha quadriculada (alinhado com o Método de Composição e Decomposição de Polígonos, Teorema de Pick e Medida da Área por Falta e por Excesso) foram utilizados pela autora com estudantes do Ensino Médio e os resultados foram excelentes. Outros recursos pedagógicos, como o Google Maps e o Geoplano, foram aplicados em sala de aula em período anterior a escrita dessa dissertação, também obtendo resultados favoráveis.

Contar com esses excelentes recursos, torna a aula mais dinâmica e participativa, colaborando com o desenvolvimento de competências e habilidades para a resolução de situações-problemas envolvendo o cálculo de área de figuras planas. Além disso, tudo está de acordo com as habilidades presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (veja a habilidade EM13MAT307 da BNCC):

EM13MAT307 Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Finalizando, a autora pretende com essa dissertação, aplicá-la com seus alunos de diferentes níveis escolares, além de contribuir para o trabalho dos docentes da Educação Básica, que poderão utilizar esses recursos tanto para o ensino de áreas de figuras planas, quanto para outros conteúdos da Geometria Plana, como distância entre dois pontos. O fundamental é que todos percebam a importância de utilizar metodologias dinâmicas e recursos variados, para que a aprendizagem realmente aconteça.

Segundo, Dias

É preciso considerar que muitas vezes, o aluno se vê à frente de regras superficiais e de símbolos desconhecidos, o que faz com que copie passivamente sem utilizar a sua capacidade de raciocínio. Portanto, é necessário promover atividades desafiadoras que despertem no aluno a curiosidade e o prazer de aprender. (DIAS, 2013, p. 16)

O professor tem um importante papel na vida dos estudantes e precisa propiciar meios para que a aprendizagem significativa realmente aconteça, com atividades desafiadoras, prazerosas, que utilize e desenvolva o raciocínio lógico, propiciando que o estudante levante hipóteses, conclua e tenha melhor desempenho na realização das atividades.

Para trabalhos futuros, temos o desenvolvimento do Multiplano Virtual, como um importante recurso para o ensino de diversos conteúdos da matemática.

5 ANEXOS

5.1 ANEXO 1

Fotos retiradas de estudantes (Ensino Médio) determinando áreas de figuras planas, utilizando a malha quadriculada (turma do segundo ano do Ensino Médio).

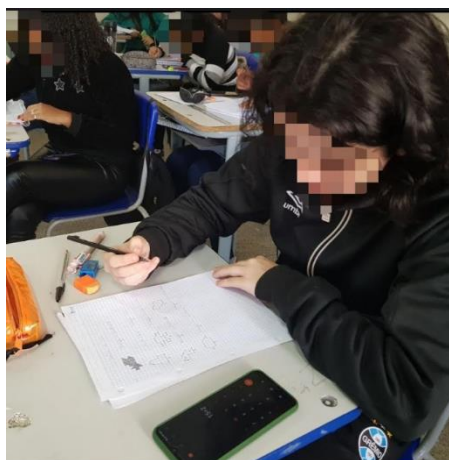
A professora projetou algumas figuras poligonais na televisão e solicitou que os estudantes as reproduzissem na malha quadriculada (entregue pela professora). Após reproduzirem, eles deveriam determinar a área de cada figura, utilizando dois métodos/estratégias diferentes. A maioria utilizou o Teorema de Pick e a decomposição de polígonos em outros, cujas fórmulas são conhecidas.

Figura 5.1 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 1).



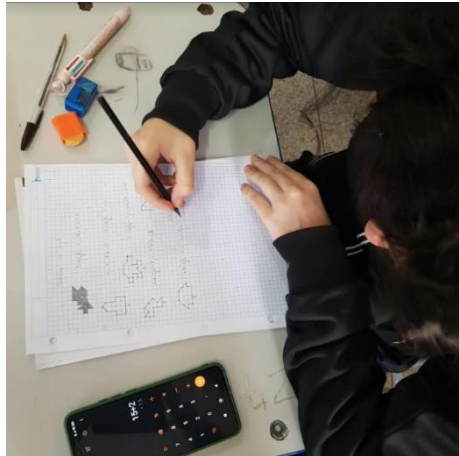
Fonte: a autora.

Figura 5.2 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 2).



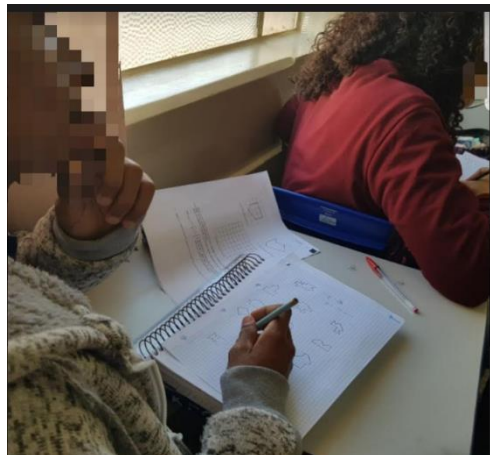
Fonte: a autora.

Figura 5.3 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 3).



Fonte: a autora.

Figura 5.4 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 4).



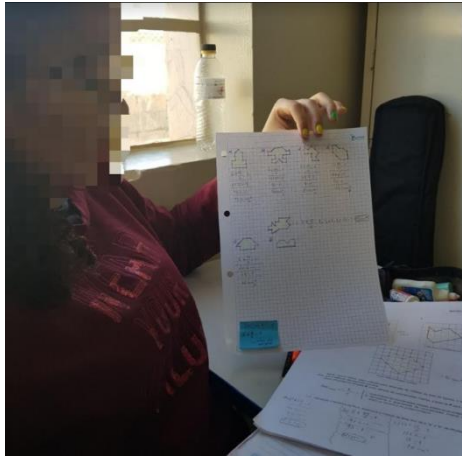
Fonte: a autora.

Figura 5.5 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 5).



Fonte: a autora.

Figura 5.6 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 6).



Fonte: a autora.

Figura 5.7 - Alunos determinando áreas de figuras planas (foto 7).



Fonte: a autora.

5.2 ANEXO 2

SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA SER APLICADA NO ENSINO MÉDIO (EM GRUPO)

HABILIDADE: EM13MAT307 Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

OBJETIVO:

- Compreender o conceito de área;
- Encontrar a área de uma figura plana, utilizando a malha quadriculada, o Geogebra, o Geoplano (ou o Geoboard) e/ou o multiplano como recurso.
- Explorar diversas figuras planas, comparando as medidas de superfície;
- Utilizar diversas técnicas (Teorema de Pick, Método de Falta e Excesso, Composição e Decomposição de Polígonos, entre outros).

É importante que, a cada atividade desenvolvida, o professor assuma a postura de mediador e facilitador do processo Ensino Aprendizagem, orientando os estudantes no processo de construção de suas próprias aprendizagens.

A mediação é um fator humanizador de transmissão cultural. O homem tem como fonte de mudança a cultura e os meios de informação. O mediador se interpõe entre os estímulos ou a informação exterior para interpretá-los e avaliá-los. Assim, o estímulo muda de significado, adquire um valor concreto e cria no indivíduo atitudes e críticas flexíveis. A explicação do mediador amplia o campo de compreensão de um dado ou de uma experiência, gera disposições novas no organismo e produz uma constante retroalimentação informativa (feedback). Trata-se de iluminar a partir de diferentes pontos um mesmo objeto do nosso olhar. (TÉBAR, 2011, p. 77).

Atividades 1 a 6.

Duração: 2 aulas.

Atividade 1 – É possível duas figuras diferentes possuírem áreas iguais? Se a resposta for sim, necessariamente os perímetros precisam ser iguais?

Espera-se que os estudantes respondam que sim, é possível duas figuras diferentes possuírem áreas com mesma medida e que os perímetros não precisam ter a mesma medida para que isso aconteça.

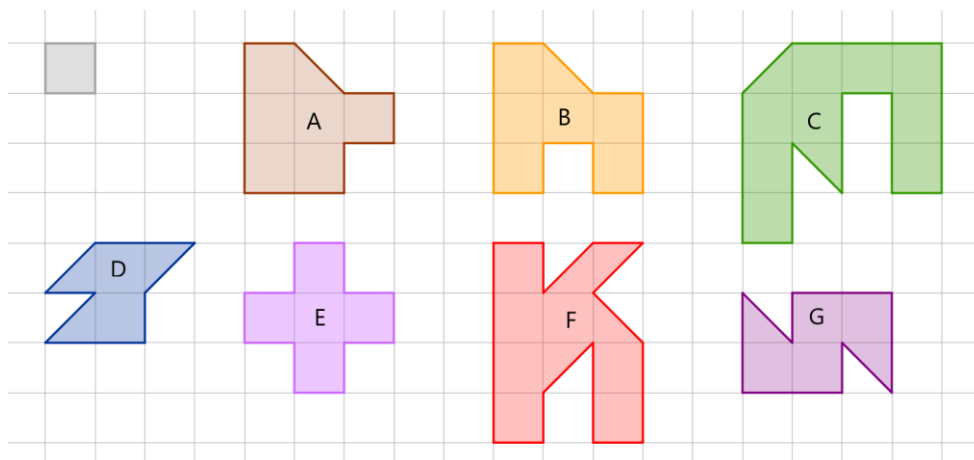
Podem complementar, dizendo que também é possível duas figuras terem o mesmo

perímetro e áreas diferentes.

Caso algum estudante ainda tenha dúvidas, a próxima atividade possibilitará com que ele entenda melhor.

Atividade 2 – Construa no Geoplano as figuras a seguir:

Figura 5.8 - Figura planas no Geoplano.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Essas figuras podem ser entregues aos estudantes em folha sulfite, ou projetadas para que os alunos possam reproduzi-las no Geoplano.

Atividade 3 – Calcule o perímetro e a área de cada figura que foi construída no Geoplano.

O professor, caso queira, pode introduzir um quadro, para que os estudantes possam preencher.

Figuras	Perímetros (unidade de comprimento)	Áreas (unidade de área)
A	$10 + \sqrt{2}$	6,5
B	$12 + \sqrt{2}$	6,5
C	$18 + 2\sqrt{2}$	10
D	$6 + 3\sqrt{2}$	3,5
E	12	5
F	$14 + 4\sqrt{2}$	9
G	$10 + 2\sqrt{2}$	5

Atenção: Pode ser que algum estudante conte a diagonal do quadradinho, como sendo uma unidade de lado. Professor precisará lembrá-los (através de cálculo, por exemplo), que a

diagonal do quadrado equivale a $\sqrt{2}$ u. a.

A técnica utilizada pelos estudantes para o cálculo da área, provavelmente, será a contagem de quadrados. Essa atividade é importante, para que consigam entender melhor o conceito de área.

Atividade 4 – Quais figuras possuem a mesma área?

As figuras que possuem a mesma área, são: A e B; E e G.

Se algum estudante ficou em dúvida, na atividade 1, este é um bom momento para que ela seja sanada.

Atividade 5 – Construa, no Geoplano, figuras com áreas 2,5; 4,5; 8,5 e 11,5.

É interessante que os grupos socializem as imagens e a estratégia utilizada para construção dessas figuras.

Atividade 6 – Construa, no Geoplano:

- a) duas figuras com áreas iguais e perímetros diferentes.
- b) duas figuras com perímetros iguais e áreas diferentes.
- c) um triângulo isósceles cuja altura, seja o triplo da base (calcule a área do triângulo construído).
- d) um losango cuja diagonal maior seja o dobro da diagonal menor (calcule a área do triângulo construído).

As atividades acima farão os estudantes perceberem que figuras com perímetros diferentes, não implica em áreas também diferentes e figuras com perímetros iguais não implicam em áreas iguais.

Após aplicação das atividades 1 ao 6, é importante inserir figuras em que o cálculo da área não seja tão simples como as anteriores, em que as figuras eram formadas apenas com quadrados inteiros ou metades.

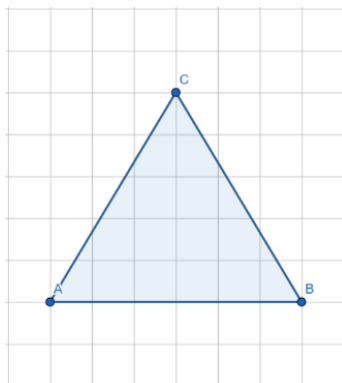
Atividades 7 a 9

Duração: 2 aulas.

Atividade 7 – Construa, no Geoplano, as figuras a seguir e calcule a área de cada uma (anote a estratégia utilizada):

a)

Figura 5.9 - Área do triângulo ABC (Atividade 7).



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Estratégia 1: Usando a fórmula da área do triângulo.

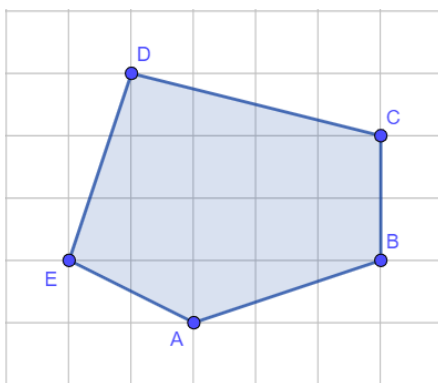
$$A(ABC) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ u.a.}$$

Estratégia 2 : Perceber que a área triângulo ABC equivale a área de um retângulo de base 6 e altura 5.

$$A(ABC) = 6 \cdot 5 = 30 \text{ u.a.}$$

b)

Figura 5.10 - Área do pentágono ABCDE (Atividade 7).



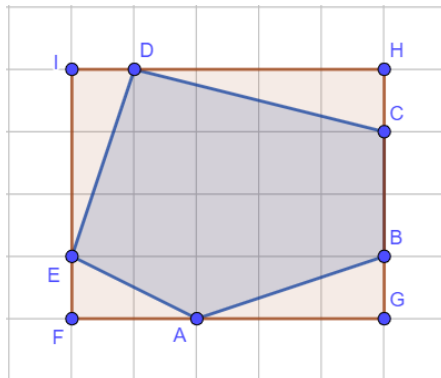
Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Estratégia 1:

Construir a figura no Geoplano ou desenhá-la na malha quadriculada. Em seguida, completa-se a figura de forma a obter um retângulo (cada vértice do pentágono deve estar em

um dos lados do retângulo), como na figura a seguir:

Figura 5.11 - Área do pentágono ABCDE (Atividade 7), inserido num retângulo.



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Para calcular a área do pentágono ABCDE, basta calcular a área do retângulo FGHI e dele subtrair a área dos triângulos retângulos FAE, AGB, CHD e EDI.

Veja:

$$A(ABCDE) = A(FGHI) - A(FAE) - A(AGB) - A(CHD) - A(EDI)$$

$$A(ABCDE) = 5 \cdot 4 - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2}$$

$$A(ABCDE) = 20 - \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{4}{2} - \frac{3}{2}$$

$$A(ABCDE) = 20 - \frac{12}{2}$$

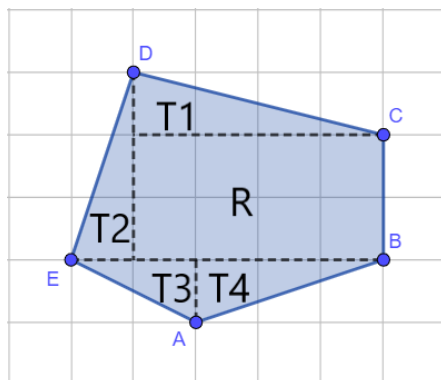
$$A(ABCDE) = 20 - 6$$

$$A(ABCDE) = 14 \text{ u.a.}$$

Estratégia 2:

Construir a figura no Geoplano ou desenhá-la na malha quadriculada. Em seguida, decompor o pentágono ABCDE em outros polígonos, em que o cálculo da área é conhecido.

Figura 5.12 - Área do pentágono ABCDE (Atividade 7) - Método "Decomposição do polígono".



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Neste caso, o pentágono foi decomposto em outros cinco polígonos: um retângulo R e quatro triângulos retângulos (T_1 , T_2 , T_3 e T_4).

A área do pentágono $ABCDE$ será a soma da área do retângulo R com os triângulos T_1 , T_2 , T_3 e T_4 .

$$\begin{aligned}A(ABCDE) &= A_R + A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3} + A_{T_4} \\A(ABCDE) &= 4 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 1}{2} \\A(ABCDE) &= 8 + \frac{4}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \\A(ABCDE) &= 8 + \frac{4 + 3 + 2 + 3}{2} \\A(ABCDE) &= 8 + \frac{12}{2} \\A(ABCDE) &= 8 + 6 \\A(ABCDE) &= 14\end{aligned}$$

c)

Figura 5.13 - Triângulo ABC (Atividade 7) na malha quadriculada.

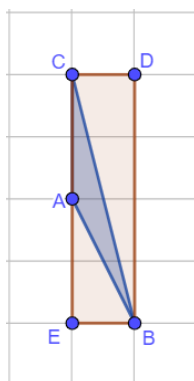


Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Uma estratégia:

Construir a figura no Geoplano ou desenhá-la na malha quadriculada. Em seguida, completa-se a figura de forma a obter um retângulo (cada vértice do triângulo deve estar em um dos lados do retângulo), como na figura a seguir:

Figura 5.14 - Área do triângulo ABC (Atividade 7), inserido num retângulo.



Para calcular a área do triângulo ABC, basta calcular a área do retângulo EBDC e dele subtrair a área dos triângulos retângulos EBA e BDC.

$$A(ABC) = A(EBDC) - A(EBA) - A(BDC)$$

$$A(ABCDE) = 1 \cdot 4 - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 4}{2}$$

$$A(ABCDE) = 4 - \frac{2}{2} - \frac{4}{2}$$

$$A(ABCDE) = 4 - 1 - 2$$

$$A(ABCDE) = 1 \text{ u. a.}$$

Importante que cada grupo exponha a estratégia utilizada. Lembrando que a estratégia de contagem dos quadradinhos não é eficiente nesta atividade.

Atividade 8 – Construa, na malha quadriculada, algumas figuras poligonais e troque com outro grupo, para que determinem a área de todas figuras construídas.

Importante que cada grupo exponha a estratégia utilizada.

Atividade 9 – Depois da utilização do Geoplano, em um outro momento (outra aula), o professor pode trazer outras figuras, para que determinem a sua área, mas agora utilizando apenas a malha quadriculada e de forma individual.

É importante que o professor reserve, para os estudantes, momentos em grupos ou duplas e também momentos individuais.

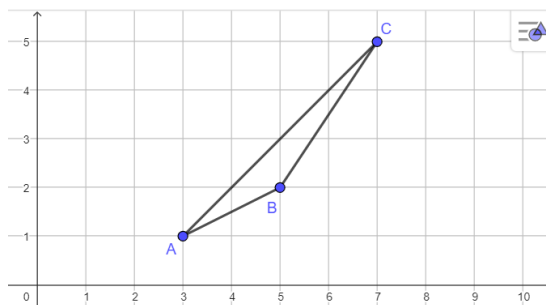
Atividades 10 e 11

Duração: 4 aulas.

Atividade 10 – Solicitar que calculem a área do triângulo ABC, inserido no plano cartesiano e

que anotem as estratégias utilizadas (folhas entregues individualmente, mas pode colocá-los em duplas ou em grupos com 4 membros).

Figura 5.15 - Área do triângulo ABC, inserido na malha quadriculada (Atividade 10)



Fonte: a autora, com utilização do Geogebra.

Um momento para a socialização das estratégias utilizadas. Verificar se algum grupo (ou dupla) utilizou o Método de Gauss. Se utilizou ou não, de qualquer forma, é um bom momento para introduzi-la.

O professor pode dizer que para o cálculo da área do triângulo ABC, utilizará o método de Gauss, que para calcular a área, irá se basear na soma e na subtração da área de trapézios formados pelos vértices e pelas projeções sobre os eixos x e y (a demonstração será realizada com a base dos trapézios no eixo x)

Os estudantes, neste momento, devem ter claro como se faz para determinar a área do trapézio.

Trazer outras figuras poligonais, inseridas no plano cartesiano e solicitar que os estudantes calculem a área, utilizando o Método de Gauss.

Atividade 11 - Inserir o Teorema de Pick e solicitar que refaçam a atividade 7, mas agora utilizando o Teorema de Pick e comparem os resultados.

Professor, traga mais figuras poligonais para que os estudantes calculem a área em grupo e/ou individual.

Atividade 12 - Aplicar ou adaptar a atividade do exemplo 3.2 (o professor pode adaptar, conforme a região em que habitam, utilizando áreas locais, importantes do município ou estado).

Determine a área aproximada da Lagoa Maior (a terceira lagoa de Três Lagoas/MS),

utilizando os seguintes métodos:

a) Utiliza o Google Maps para localizar a Lagoa Maior, contorná-la, utilizando o recurso “medir distância”, para que o Google Maps possa calcular a área da lagoa.

(ver exemplo 3.2)

b) Utilizar o Teorema de Pick, para obter a área aproximada da Lagoa Maior (lembre-se que o Teorema de Pick é utilizado com polígonos, portanto, deve-se construir um polígono P, cuja a área se aproxime da área da lagoa, numa malha quadriculada em que os vértices do polígono fique sobre os “nós da malha”).

(ver exemplo 3.2)

c) Utilizar o “**Método de Falta e Excesso**”, para obter a área aproximada da Lagoa Maior.

(ver exemplo 3.2)

BIBLIOGRAFIA

Referências Bibliográficas

- [1] ABECEDÁRIO DA EDUCAÇÃO. **Explorar Perímetros e Áreas com um Geoplano**. Disponível em: <https://www.abecedariodaeducacao.pt/2020/02/13/explorar-perimetros-e-areas-com-um-geoplano/>. Acesso em: 17 jan. 2023.
- [2] ANTUNES, C. **Depoimento de Celso Antunes em relação ao multiplano**. 2000. Disponível em: <https://youtu.be/WAINZpUQOaU> Acesso em: 09 Jan 2023.
- [3] DIAS, M. D. A. **Experiências Matemáticas no Geoplano**. In: VI CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, Canoas: ULBRA, 6, p. 1-17, 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1145/439>. Acesso em: 20 jan. 2023.
- [4] DIVERSA. **Professor cria material pedagógico inclusivo para auxiliar na aprendizagem de matemática e estatística**. Disponível em: <https://diversa.org.br/relatos-de-experiencias/professor-criamultiplano-matematica/>. Acesso em: 13 dez. 2022.
- [5] EDUCADOR BRASIL ESCOLA. **Como construir o Tangram**. Disponível em: <https://educador.brasilecola.uol.com.br/estrategias-ensino/como-construir-tangram.htm>. Acesso em: 6 mar. 2023.
- [6] EDUCADOR BRASIL ESCOLA. **Geoplano**. Disponível em: <https://educador.brasilecola.uol.com.br/estrategias-ensino/geoplano.htm>. Acesso em: 10 jan. 2013.
- [7] PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono de ensino de geometria: uma visão histórica**. 1989. 196f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1576649>. Acesso em: 08 jul. 2023.
- [8] PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. Zetetiké: Revista de Educação Matemática, v. 1, n. 1, p. 7-17. 1993.
- [9] FONSECA, A. C. F. R.; LOPES, M. P.; BARBOSA, M. G. G.; GOMES, M. L. M.

- DAYRELL, M. M. S. S. **O Ensino de Geometria na Escola Fundamental**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- [10] GEOBOARD. **Geoboard by The Math Learning Center**. Disponível em: <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>. Acesso em: 10 fev. 2023.
- [11] GEOGEBRA. **Peças do Tangram: conceitos de área e perímetro**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/material/show/id/56393>. Acesso em: 24 mai. 2023.
- [12] GOOGLE EARTH - MAPAS. Disponível em: <http://earth.google.com>. Acesso em: 2 set. 2023.
- [13] LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- [14] LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro. RJ. 1991.
- [15] LIMA, E. L.. **Qual é mesmo a definição de polígono convexo?** Revista do Professor de Matemática, 21, 1991.
- [16] SANTOS, Santa Marli Pires dos (org.). **Brinquedoteca: a criança, o adulto e o lúdico**. Petrópolis: Vozes, 2000.
- [17] SECRETARIA DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Aprender vale a pena**. Módulo 2, 1998.
- [18] SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Currículo em Ação**. Terceira Série do Ensino Médio. Caderno do Estudante. 1º Semestre. IMESP, 2023.
- [19] TÉBAR, L. **O perfil do professor mediador: pedagogia da mediação**. Trad. Priscila Pereira Mota. São Paulo: Editora SENAC, São Paulo, 2011.
- [20] VASCONCELLOS, Celso dos S. **Metodologia Dialética em Sala de Aula**. In: Revista de Educação AEC. Brasília: abril de 1992 (n. 83).

Obras Consultadas

- [1] ABREU, RENATA DA COSTA. **Teorema de Pick: uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos simples**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2015.

- [2] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- [3] CORDEIRO NETO, ALYRIO ALVES. **Cálculo Integral para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2019.
- [4] DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – UEM – **Áreas: das noções intuitivas ao Teorema de Pick**. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit/formulla-de-pick/formula-de-pick.pdf>. Acesso: 03 abr. 2023.
- [5] GOMIDES, Amanda Figueiredo; FERREIRA, G. C. G. **De Pick a Euler: exemplos e demonstrações**. Revista de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, v. 4, n. 04, p. 1-24, out./2022. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6347>. Acesso em: 13 jul. 2023.
- [6] LIMA JUNIOR, José Valdeci de Santana. **O teorema de Pick no ensino fundamental: uma abordagem com o uso do geogebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual de Feira de Santana. Feira de Santana, 2022.
- [7] PEREIRA DA SILVA, ANDERSON. **A fórmula do cadarço**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do ABC. Santo André, 2022.
- [8] PERFIL NEWS. **Lagoa Maior: Um pedaço do Pantanal no centro de Três Lagoas**. Disponível em: <https://www.perfilnews.com.br/lagoa-maior-um-pedaco-do-pantanal-no-centro-de-tres-lagoas/>. Acesso em: 10 abr. 2023.
- [9] SANTOS, LUIZ CARLOS DANTAS. **Um breve estudo sobre o conceito e o cálculo de áreas de figuras planas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Sergipe, 2019.