



2023

Análise da deflexão de vigas de concreto armado via resultados experimentais e segundo método de Branson

Filipe de Lima Queiroz ^a; Sidiclei Formagini ^b

^a Aluno de Graduação em Engenharia Civil, queirozlimafilipe@gmail.com

^b Professor Orientador, sidiclei.formagini@ufms.br

Faculdade de Engenharias, Arquitetura e Urbanismo e Geografia. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Av. Costa e Silva, s/nº | Bairro Universitário | 79070-900 | Campo Grande, MS, Brasil.

RESUMO

O concreto armado é amplamente utilizado na construção civil, dessa forma, se torna indispensável o conhecimento de suas características para que se possam fazer boas previsões de seu comportamento em estruturas, tais como vigas de concreto armado submetidas à esforços de flexão. No estudo de flechas imediatas a NBR 6118:2014 recomenda o uso do método de Branson (1965), este método calcula o momento de inércia efetivo do elemento estrutural de uma viga quando esta já ultrapassou o momento de fissuração (M_r), ou seja, apresenta comportamento não linear e é simplificada utilizando a rigidez equivalente. Neste estudo foram analisados os resultados do ensaio de nove vigas de concreto armado submetidas à esforços de flexão (*four point test*) no laboratório de materiais de construção civil da UFMS (LMCC-UFMS). Posteriormente, esses dados foram analisados confrontando-os com os resultados de deflexão previstos de acordo com a norma supracitada, os resultados apresentaram algumas inconsistências, como já havia previsto Kalkan (2013) que em seu trabalho apontou que o método adotado pela normativa brasileira se mostra ineficiente para seções com taxa de armadura inferior a 1%. Além disso, outro aspecto comparado foi o momento de fissuração obtido via regressão linear dos gráficos momento – deflexão dos ensaios de laboratório que apresentaram resultados satisfatórios no geral apontando para a eficiência do tratamento de dados.

Palavras-chave: Concreto Armado; Branson; Deflexão; Flexão; Momento de Fissuração.

ABSTRACT

Reinforced concrete is widely used in civil construction, so it is essential to know its characteristics to make good predictions of its behavior in structures, such as reinforced concrete beams subjected to bending stresses. In the study of immediate deflections, NBR 6118:2014 recommends the use of Branson's method (1965), this method calculates the effective moment of inertia of the structural element of a beam when it has already exceeded the cracking moment, i. e. has non-linear behavior and the equivalent stiffness is used in a simplified way. In this study, the test results of nine reinforced concrete beams subjected to bending stresses were analyzed in the laboratory of civil construction materials of UFMS (LMCC-UFMS). Afterwards, these data were analyzed by comparing them with the predicted deflection results according to the above-mentioned standard, the results presented some inconsistencies, as already predicted by Kalkan (2013), who in his work pointed out that the method adopted by the Brazilian normative proves to be inefficient for sections with reinforcement rate lower than 1%. In addition, another aspect compared was the cracking moment obtained via linear-regression of the moment-deflection graphs of the laboratory tests that presented satisfactory results in general, pointing to the efficiency of the data treatment.

Keywords: Reinforced Beam; Branson, Deflection, Flection, Cracking Moment.

1. INTRODUÇÃO

O conhecimento do módulo de elasticidade de uma estrutura de concreto armado se faz necessário no dimensionamento de estruturas. Tal característica se apresenta como determinante na amplitude da deformação de elementos desse tipo quando submetidos à flexão. Segundo Carvalho e Figueiredo, (2014, p.185), “a deformação da estrutura depende [...] do processo construtivo e das propriedades dos materiais no momento de sua sollicitação”.

São diversos os fatores que interferem nesse parâmetro do concreto armado (BARBOSA, 2009), como o tipo de agregado utilizado, a relação água/cimento, teor de argamassa, dimensão do corpo de prova, tipo de ensaio, processos de moldagem, dentre outros (ARAÚJO; GUIMARÃES; GEYER, 2012).

A expressão “módulo de elasticidade” apresenta controvérsias em sua aplicação, segundo Vasconcelos e Giamusso (2009) “Se [...] o diagrama for retilíneo, o material é elástico linear. Somente neste caso é que se pode falar de módulo de elasticidade”. O gráfico tensão – deformação do concreto armado submetido à flexão apresenta a região elástica linear muito pequena, por esse motivo Vasconcelos e Giamusso (2009) apresentam que a denominação mais correta a ser utilizada para esses casos é o de “módulo de deformação”.

O momento de inércia é outro ponto determinante no comportamento de uma viga, visto que à medida que a tensão de flexão é aumentada começam a surgir microfissuras e fissuras, respectivamente, na região tracionada do concreto, ocasionando redução da resistência à flexão da viga como um todo e um aumento de sua deflexão ao longo do processo de carregamento.

A rigidez de uma viga é o produto dessas duas variáveis, o módulo de elasticidade (E) e o momento de inércia (I), ambos variam a depender do carregamento ao qual a viga está submetida. A variação do módulo de elasticidade é causada pelo comportamento inelástico da viga ao entrar no estágio II de deformação (KALKAN, 2013).

À medida que o momento fletor aumenta e atinge o momento de fissuração (M_r) começam a surgir fissuras na região abaixo da linha neutra da seção, marcando o final do comportamento elástico da viga (estádio I) e o início do comportamento do estágio II.

O comportamento gráfico da viga quando submetido à flexão é conhecido, possuindo uma região no estágio

I, em que o concreto atua no equilíbrio da estrutura à tração, e o estágio II em que o concreto da parcela da seção tracionada (abaixo da linha neutra) da viga já não pode mais ser considerada nos cálculos de acordo com a NBR 6118:2014 por estar fissurada, sendo considerada para essa região apenas a área de aço.

Outro fator importante nesse contexto é a utilização do aço, que visa suprimir a característica do concreto que apresenta ineficiência em sua região tracionada, por essa apresentar fissuras. De acordo com Delalibera e Pituba (2014) “A existência de fissuras provoca diminuição da inércia, contribuindo para a perda de resistência ao movimento da flexão, onde teoricamente apenas o aço resiste às tensões de tração”.

Desta forma nota-se a pluralidade de variáveis que podem ser determinantes no comportamento da viga submetida à esforços de flexão, tornando a sua previsão um tanto complexa.

Neste trabalho serão analisados a deflexão de vigas submetidas ao *four point test* de acordo com o modelo de Branson (1965) sugerido pela NBR 6118:2014 e confrontados com os valores reais obtidos nos ensaios do Laboratório de Materiais da Construção Civil (LMCC) da UFMS. Outro aspecto que terá seus resultados experimentais comparados com a NBR 6118:2014 será o momento de fissuração (M_r) das vigas.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Módulo de elasticidade

Por definição o módulo de elasticidade relaciona a tensão aplicada em um corpo pela deformação que este sofre. Dessa forma, o conhecimento deste parâmetro é indispensável para a caracterização de estruturas de concreto armado.

2.1.1 Módulo de elasticidade tangente inicial

De acordo com a NBR 8522-1:2021 o módulo de elasticidade tangente inicial E_{ci} obtido por meio de ensaios é dado pelo coeficiente angular da reta tangente à curva tensão x deformação na origem, considerando o concreto ainda no regime elástico linear. Quando não forem realizados ensaios o E_{ci} pode ser estimado de acordo com a NBR 6118:2014 pela equação 1, nesse caso o seu valor final muda de acordo com o agregado utilizado, podendo ser majorado pelo coeficiente α_e em 20% no caso dos agregados basalto e diabásio, em 10% para calcários.

Se mantem com o uso de granito e gnaiss. Reduz-se em 10% no uso de agregado calcário, e em 30% para arenito.

$$E_{ci} = \alpha_e \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (1)$$

2.1.2 Módulo de elasticidade secante

É determinado experimentalmente pela reta secante à curva tensão x deformação do concreto, e na falta de experimentos pode ser estimado de acordo com a NBR 6118:2014 pela equação 3:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (2)$$

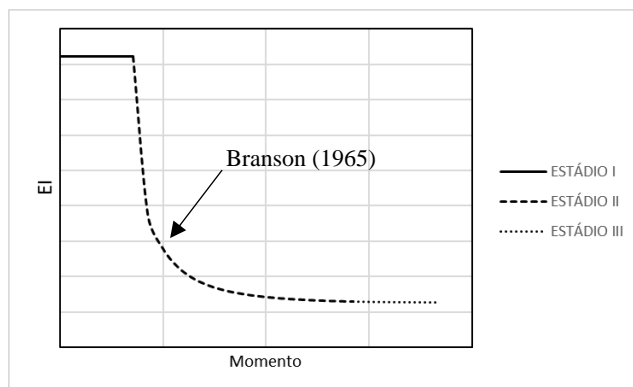
Para equação 2 o E_{cs} representa o módulo de elasticidade secante, E_{ci} é o módulo de elasticidade tangente inicial e o α_i é determinado pela equação 3:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (3)$$

2.2 Rigidez equivalente

A rigidez é alterada uma vez que quando a flexão na viga passa a ocorrer no estágio II, a curva tensão deformação passa para o regime não linear devido ao surgimento de fissuras na região tracionada, provocando a alteração da rigidez para cada incremento de carga aplicado. Essa característica é estimada com o modelo proposto por Branson (1965) (figura 1) e indicado pela NBR 6118:2014.

Figura 1 – Estimativa da rigidez pelo método de Branson



O método de Branson “baseia-se em um método semiprobabilístico, no qual se toma a variação da

tensão ao longo da seção transversal e ao longo do comprimento de uma maneira simplificada, utilizando expressões empíricas que fornecem valores médios da inércia.” (CARVALHO E FIGUEIREDO, 2019, pg. 197).

$$EI_{eq} = E_{cs} \cdot \left[\left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \left(1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right) \cdot I_{II} \right] \quad (4)$$

Em que EI_{eq} é a rigidez equivalente, E_{cs} representa o módulo de elasticidade secante, M_r é o momento de fissuração, M_a é o momento fletor crítico da seção, I_c é o momento de inércia da seção íntegra, I_{II} é o momento de inércia considerando para a região tracionada apenas a área de aço.

2.3 Momento de fissuração

A separação entre o comportamento do estágio I em que o concreto resiste à tração e o estágio II em que se encontra fissurado é definida pelo Momento de fissuração (M_r) conforme NBR 6118:2014.

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} \quad (5)$$

Onde: α representa o fator que correlaciona de modo aproximado a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta, podendo ser 1,2 para seções T e duplo T, 1,3 para seções I ou T invertido e 1,5 para seções retangulares. f_{ct} representa a resistência à tração direta no concreto. I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto e y_t é a distância da fibra mais tracionada ao centro de gravidade da seção de concreto.

3. METODOLOGIA

3.1 – Moldagem das vigas

Nove vigas foram produzidas e testadas no laboratório de materiais de construção civil (LMCC) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Elas foram separadas em dois grupos, vigas enumeradas de 1 a 7 cuja armadura negativa possui diâmetro de 5 mm ($\emptyset_{neg} = 5 \text{ mm}$), e grupo das vigas enumeradas de 8 e 9, com armaduras negativas de diâmetro igual a 6,3 mm ($\emptyset_{neg} = 6,3 \text{ mm}$), conforme elencado na tabela 1. A taxa de armadura ($\rho(\%)$) é determinada pela razão entre a área da seção das armaduras positivas pela área

da seção da viga. O arranjo das armaduras e especificações das vigas estão representados nas figuras 1 e 2.

Tabela 1 – Traço de concreto e diâmetro de armadura utilizado em cada viga

Viga	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cimento [kg]	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Areia [kg]	1,4	1,4	2,1	2,1	2,1	2,15	2,3	2,2	2,2
Brita 1 [kg]	2,11	2,11	3,8	2,85	2,85	1,81	1,21	3,9	3,9
Brita 0 [kg]	-	-	-	0,95	0,95	0,9	0,82	-	-
Água [kg]	0,61	0,48	0,58	0,58	0,58	0,55	0,51	0,5	0,65
ϕ_{pos} [mm]	10	10	10	10	10	10	10	10	10
ϕ_{neg} [mm]	5	5	5	5	5	5	5	6,3	6,3
ρ [%]	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,37	0,37

Figura 2 – Arranjo da armadura das vigas 1 a 7

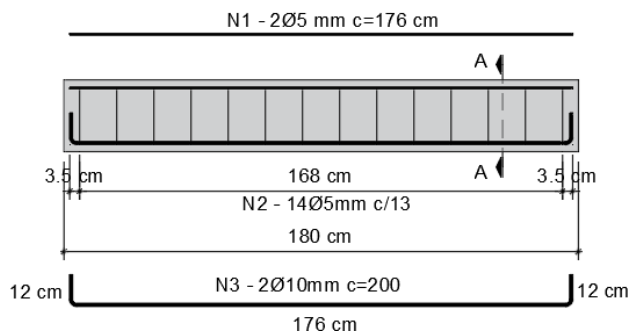


Figura 3 – Seção AA

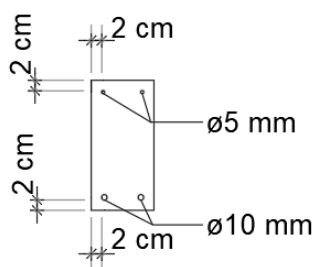


Figura 4 – Arranjo da armadura das vigas 8 e 9

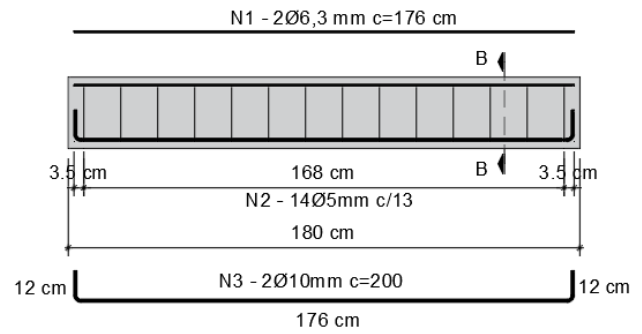
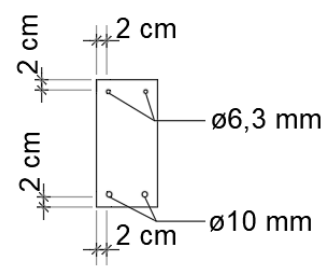


Figura 5 – Seção BB



A dimensão da seção de todas as vigas utilizadas neste estudo foi de 12 x 25 x 180 cm.

Ao todo foram utilizadas duas taxas de armadura (ρ (%)) e para cada viga utilizou-se um traço específico, demonstrado na tabela 1.

É importante descrever também a data de moldagem de cada viga.

Tabela 2 – Data de moldagem

Viga	Data de moldagem
1	27/01/2017
2	10/02/2017
3	24/11/2017
4	08/06/2022
5	25/06/2022
6	27/10/2022
7	09/11/2022
8	03/07/2017
9	08/07/2017

3.2 – Ensaio de resistência à compressão, módulo de elasticidade e resistência à tração do concreto

Para cada viga foram moldados corpos de prova cilíndricos com 10 cm de diâmetro e 20 cm de altura para ensaios de obtenção do módulo de elasticidade tangente inicial (E_{ci}) de acordo com a NBR 8522:2021.

Para obtenção da resistência à compressão do concreto (f_c), realizou-se ensaios seguindo a NBR 5739:2018.

No levantamento da resistência à tração do concreto utilizou-se do experimento de tração por compressão diametral (figura 6), também chamado de resistência à tração indireta ($f_{ct,sp}$) observando-se a NBR 7222:2011. Para os cálculos que necessitavam da resistência à tração direta (f_{ct}), utilizou-se o valor de $f_{ct,sp}$ minorado para 90% (equação 6) (NBR 6118:2014).

$$f_{ct} = 0,9 \cdot f_{ct,sp} \quad (6)$$

Todos os corpos de prova utilizados eram cilíndricos e foram mantidos em câmara úmida durante o processo de cura até a data dos ensaios.

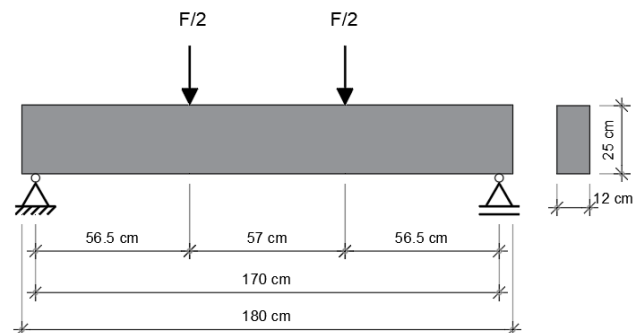
Figura 6 – Ensaio de compressão diametral



3.3 – Ensaio de flexão das vigas

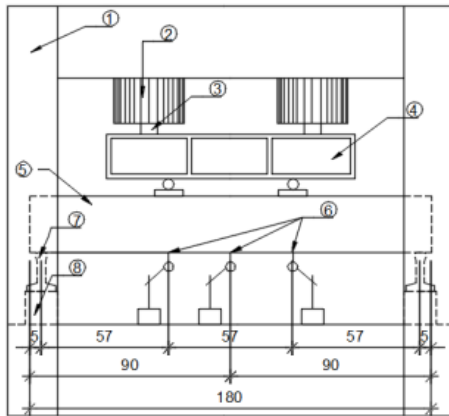
Todas as vigas foram ensaiadas na configuração biapoiada com quatro pontos de carga, equidistantes ao centro. Para isso fora desconsiderado 10 cm (5 cm em cada extremidade) e considerado um comprimento de 170 cm devido às regiões que ficavam fora do apoio, esse ensaio é denominado como *four point test* (figura 7).

Figura 7 – Esquema de aplicação das cargas concentradas



Foi utilizado um pórtico dotado de cilindros hidráulicos responsáveis por exercer o carregamento sobre a viga, sua esquematização é descrita conforme figura 8. Além disso, utilizou-se relógios comparadores de deslocamento dos quais se retiravam os valores de deflexão das vigas em milímetro com precisão de duas casas decimais para cada incremento de carga (figura 9).

Figura 8 – Esquemática de pórtico para o carregamento (medidas em cm)



- LEGENDA:
 1 - PÓRTICO
 2 - CILINDRO HIDRÁULICO
 3 - CALÇO
 4 - VIGA METÁLICA
 5 - VIGA DE CONCRETO
 6 - RELÓGIO COMPARADORES
 7 - APOIO
 8 - SUPORTE

Figura 9 – Viga com relógios medidores de deslocamento.



Visando a preservação dos equipamentos, os relógios medidores eram retirados e os ensaios eram interrompidos quando os indícios de fissuras fossem próximos a 2/3 da altura da seção, posteriormente eram anotados os valores finais e considerados como a carga última da viga.

A figura 10 apresenta a viga com fissuras expressivas na região central, além de uma curvatura acentuada.

Figura 10 – Rupturas expressivas na viga.



3.4 – Tratamento de dados

Os dados obtidos nos ensaios foram digitalizados e trabalhado via software Microsoft Excel. Para o momento de fissuração (M_r) responsável por determinar o limite entre o estágio I e II. Considerou-se o deslocamento obtido na região central da viga, para todos os casos observou-se o início do estágio II aos 20% da parcela máxima de carregamento que a viga suportou, e o estágio III iniciando-se a partir de 80%.

Para a identificação gráfica do M_r , fora realizado três regressões lineares em cada gráfico momento - deflexão, uma para cada estágio, e anotado o valor da intersecção entre as retas correspondentes ao estágio I e II para análise. Para efeito de comparação a figura 11 apresenta um exemplo de gráfico experimental dos ensaios e a figura 12 a sua regressão linear.

Figura 11 – Exemplo de gráfico experimental.

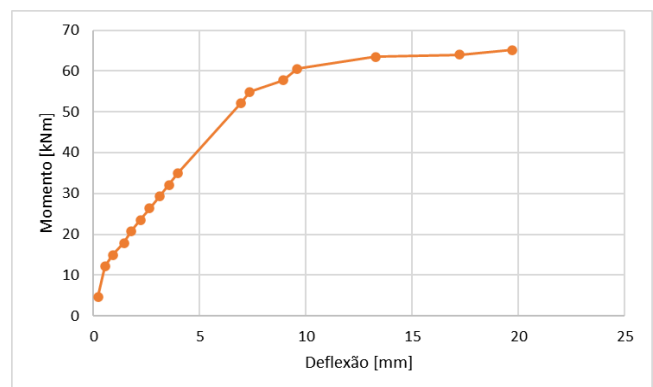


Figura 12 – Exemplo de regressão linear

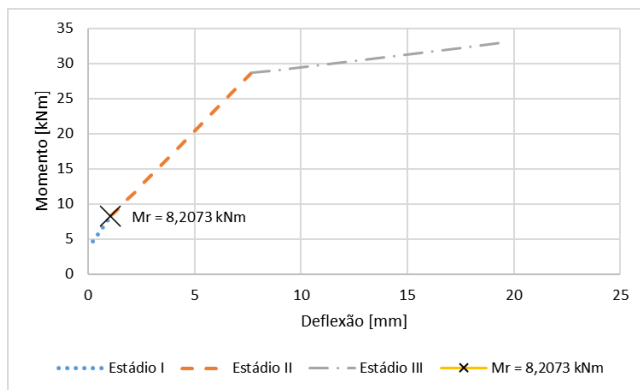
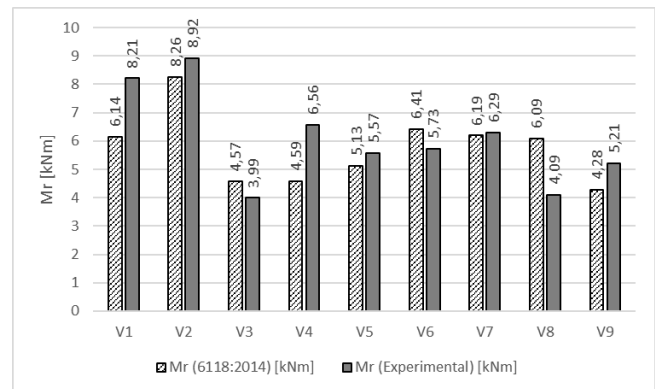


Figura 13 – Comparação entre o momento de fissuração experimental e teórico (NBR 6118:2014)



4. RESULTADOS

4.1 – Momento de fissuração do concreto

Houve uma baixa variação do momento de fissuração (M_r) obtido via metodologia experimental frente a adquirida de forma teórica pela equação 5 (figura 13).

4.2 – Caracterização mecânica do concreto

A partir dos ensaios com os corpos de prova foram extraídos os valores médios da caracterização mecânica dos concretos utilizados nas vigas que são apresentados na tabela 3, tomando como base a idade de 28 dias do concreto para todos os dados. Os momentos de fissuração das vigas apresentaram pouca variação frente ao cálculo sugerido pela NBR 6118:2014, observando-se as maiores variações para as maiores resistências.

Tabela 3 – Propriedades mecânicas do concreto aos 28 dias

Propriedade mecânica	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_c médio [MPa]	36,1	39,4	22,2	33,3	20,0	29,2	28,3	24,3	24,3
$f_{ct.sp}$ médio [MPa]	3,64	4,89	2,71	2,72	3,03	3,8	3,67	3,61	2,53
f_{ct} médio [MPa]	3,28	4,40	2,44	2,45	2,73	3,42	3,30	3,25	2,28
E_{CS} [GPa]	33,2	30,0	26,0	28,9	24,7	21,7	22,5	26,3	27,2
M_r (NBR 6118:2014) [kNm]	6,14	8,26	4,57	4,59	5,13	6,41	6,19	6,09	4,28
M_r (Experimental) [kNm]	8,21	8,92	3,99	6,56	5,57	5,73	6,29	4,09	5,21
$ \Delta M_r $ [kNm]	2,07	0,66	0,58	1,97	0,44	0,68	0,1	2	0,93

4.2 – Deflexão das vigas

A deflexão estimada pelo método de Branson (1965) indicado pela NBR 6118:2014 é comparado com os valores de deflexão obtidos em laboratório via ensaio de flexão *four-point test*.

Figura 14 – Deflexão Viga 1

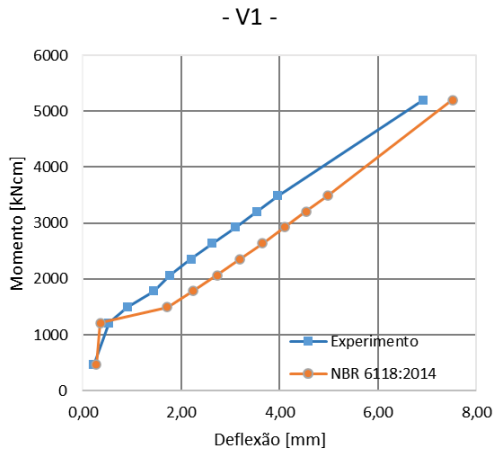


Figura 15 – Deflexão viga 2

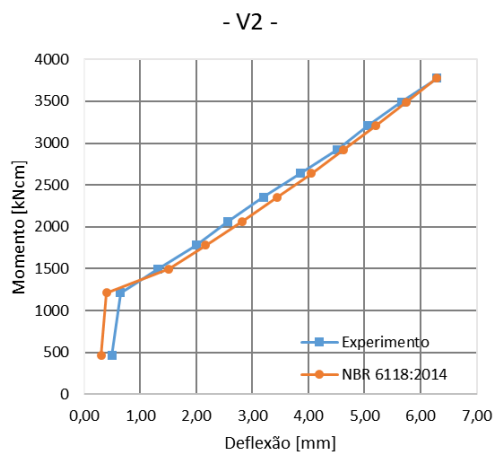


Figura 16 - Deflexão viga 3

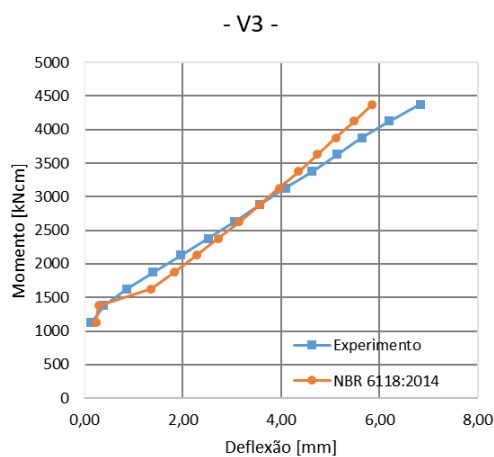


Figura 17 - Deflexão viga 4

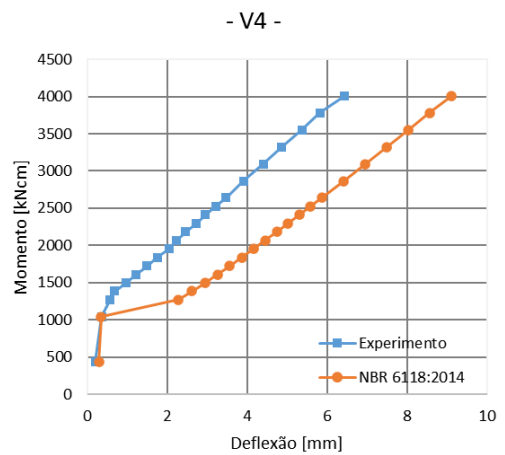


Figura 18 - Deflexão viga 5

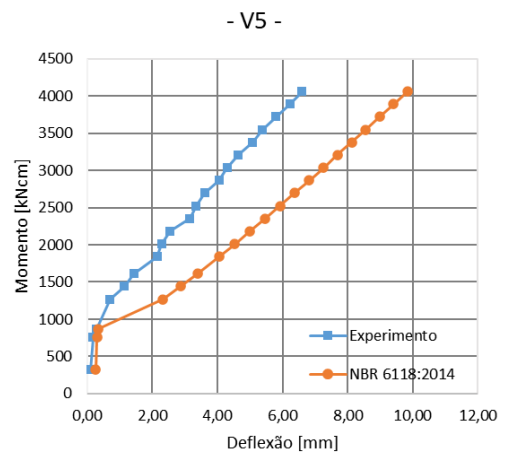


Figura 19 - Deflexão viga 6

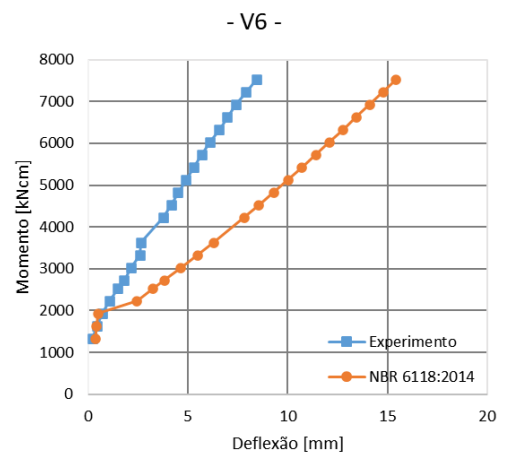
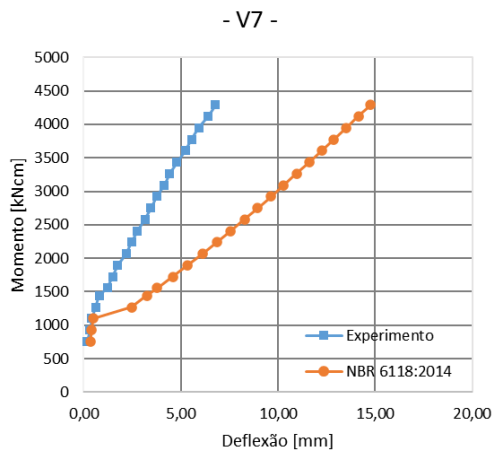
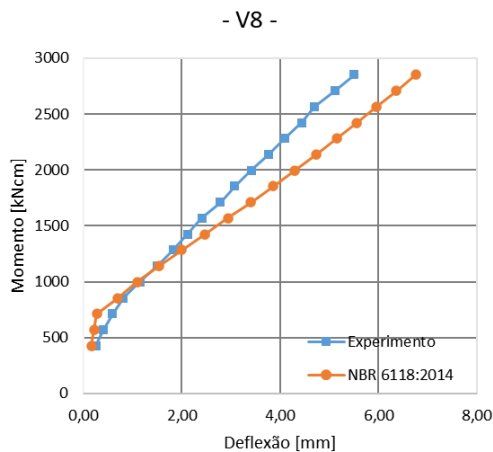
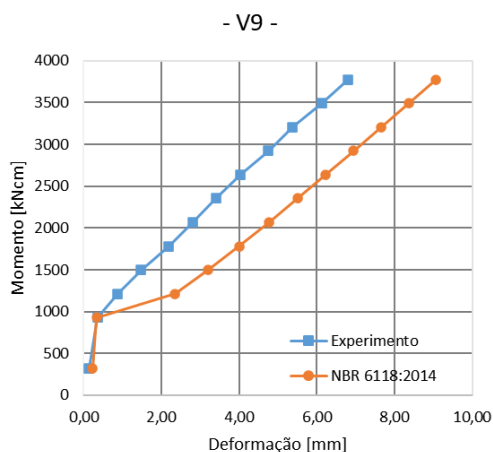


Figura 20 - Deflexão viga 7**Figura 21 - Deflexão viga 8****Figura 22 - Deflexão viga 9**

Para as vigas 1, 2, 3 e 8 observa-se curvas coerentes entre a previsão proposta pela norma e os resultados obtidos via ensaio laboratorial.

Apesar dos resultados não terem sido coincidentes para as vigas 4, 5, 8 e 9, as inclinações após o momento de fissuração são similares. Para as

amostras 6 e 7 nota-se divergência significativa na inclinação das curvas

Observando-se que tanto as britas quanto a areia utilizada em cada uma das moldagens são de uma mesma região (Campo Grande – MS), a divergência que foi apresentada nos resultados das vigas 6 e 7 pode estar relacionada à variabilidade da composição cimentícia, único elemento industrializado.

Os resultados aqui apresentados corroboram com os apresentados por Kalkan (2013), em que se observa falta de precisão na previsão do comportamento gráfico de uma viga para seções com taxa de armadura inferior a 1% ($\rho < 1\%$).

Outro ponto a ser observado é a baixa variação do momento de fissuração (M_r) encontrado por meio dos ensaios se comparado ao extraído do gráfico via regressão linear, sendo este uma importante variável que influencia diretamente nos resultados da equação de Branson (1965) adotado pela NBR 6118:2014.

5. CONCLUSÕES

As principais conclusões são:

- Observou-se que para concretos com f_{ck} superior a 30 MPa as previsões pelo método apresentaram uma tendência de maior coerência com os experimentos laboratoriais.
- O momento de inércia da seção da viga de concreto armado é altamente dependente do quão fissurada está a viga, pois analisando os gráficos percebe-se divergência na maioria deles.
- Algumas limitações foram encontradas, como a variabilidade do intervalo de aquisição de dados de incremento de carga dos ensaios o que pode ter gerado inconsistência nos resultados do momento de fissuração. O ideal é que as leituras sejam feitas em intervalos menores.

6. AGRADECIMENTOS

Acima de tudo à Deus, meu senhor e salvador. À minha amada esposa indispensável a mim nessa reta final. Aos meus pais e minha irmã que sempre me deram todo suporte nessa jornada. Ao meu orientador, professor Dr. Sidiclei, que mostrou o caminho correto a seguir com esse trabalho. Ao professor Dr. Andrés pelos incansáveis conselhos acerca do assunto. Aos

colaboradores do LMCC que auxiliaram nos experimentos. Por fim, à UFMS que proporcionou a mim todo o conhecimento responsável por me trazer até aqui.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, S. S.; GUIMARÃES, G. N.; GEYER, A. L. B. Influence of the type of measuring device in determining the static modulus of elasticity of concrete. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 5, n. 5, p. 555–575, out. 2012.

BARBOSA, Isa Lorena Silva. **Influência dos agregados graúdos da região de Goiânia no módulo de deformação tangente inicial do concreto** - 2009. 133 f.: il., figs, tabs. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil, 2009. Orientador: Prof. Dr. André Bortolacci Geyer.

BRANSON, Dan E.. **INSTANTANEOUS AND TIME-DEPENDENT DEFLECTIONS OF SIMPLE AND CONTINUOUS REINFORCED CONCRETE BEAMS**. Alabama Highway Research, Auburn, v. 75, n. 7, p. 1-78, 1965.

DELALIBERA, R. G.; PITUBA, J. J. C. Avaliação de deflexões em estruturas de concreto armado utilizando mecânica do dano. **Revista IBRACON de estruturas e materiais**, [S. l.], p. 68-69, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 5739**: Concreto - Ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2018.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118**: Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7222**: Concreto e argamassa - Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 8522-1**: Concreto endurecido - Determinação dos módulos de elasticidade e de deformação Parte 1: Módulos estáticos à compressão. Rio de Janeiro, 2021.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO, J. R. F. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. São Carlos – EdUFSCar, 2014 p. 197-198.

KALKAN, I. **Deflection Prediction for Reinforced Concrete Beams Through Different Effective Moment of Inertia Expressions**. Kirikkale – Turquia: Kirikkale University, 2013.

VASCONCELOS, Augusto C.; **O misterioso módulo de elasticidade**. Disponível em: <https://docs.tqs.com.br/Docs/Details?id=3338>. Acesso em: 09 ago. 2023.