# Estudando e Entendo Limite de Funções

Andressa Nascimento Martins Sanches *, Bruna da Cunha Ferreira†,
Marcela Frabryellen Oliveira Santos ‡, Maynara Lima Alves dos Santos §

2023

## Resumo

Este trabalho refere-se ao estudo realizado nas Atividades Orientadas de Ensino que são obrigatórias para a integralização do Curso de Matemática da UFMS- Campus de Aquidauana. O conteúdo geral abordado foi Limite de Funções por meio de estudo bibliográfico, grupos de estudos e seminários. Para o estudo bibliográfico usamos como referências (STEWART, 2006), (GUIDORIZZI, 2013) e (LEITHOLD, 1994).

**Palavras-chaves**: funções. cáculo diferencial, limite.

## Introdução

A Matemática surgiu no Antigo Egito e no Império Babilônico, por volta de 3500 a.C, mas nosso ancestrais da pré-história já utilizavam os conceitos de contar e medir. Assim, a Matemática não foi inventada por uma só pessoa, mas criada a partir da necessidade humana de medir e contar coisas e objetos. Na Matemática temos alguns ramos sendo o Cálculo Diferencial e Integral um dos mais importantes, cujo desenvolvimento deve-se a Isacc Newton e Gottfried Wihelm Leibniz.

Cronologicamente o conceito de integral surgiu antes do de diferenciação. A integral foi criada através de problemas relacionados com comprimentos, áreas e volumes e a diferenciação através dos problemas de tangentes de curvas. Talvez seja por esse motivo a necessidade cotidiana da sociedade, que a integral tenha sido desenvolvida primeiramente, visto que muitas vezes era necessário calcular a área de terrenos com formas irregulares. Muitos anos após a criação da integração e diferenciação foram relacionar ambas como operações inversas. Nesse trabalho apresentamos um estudo sobre limite de funções por meio da ideia intuitiva, definição formal e resultados relacionados.

*sanches.andressa@gmail.com
†brunacf2014@gmail.com
‡marcela_f@ufms.br
§maynarasantos617@gmail.com

# 1 Ideia Intuitiva de Limite de Funções

Para podermos entender e aprofundarmos o conceito de limite no Cálculo Diferencial vamos iniciar com um problema.

Consideremos o problema de determinar a reta tangente $t$ a uma curva $y = f(x)$ em um dado ponto $P$ ou seja, a reta que toca a curva em $P$. Uma vez que sabemos ser $P$ um ponto sobre a reta tangente, podemos encontrar a equação de $t$ se conhecermos sua inclinação $m$.

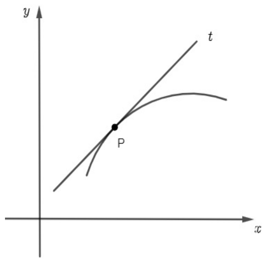



Figura 1 – Reta tangente a $P$

O problema está no fato de que para computar a inclinação é necessário o conhecimento de dois pontos e sobre $t$ temos somente o ponto $P$. Para contornar esse problema determinados primeiro uma aproximação para $m$, tomando sobre a curva um ponto próximo $Q$ e computando a inclinação $m_{PQ}$ da reta secante $PQ$. Da Figura 2 temos que

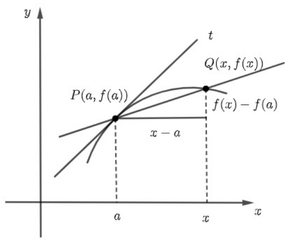



Figura 2 – Reta secante $PQ$

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1}$$

Agora, imaginemos que o ponto $Q$ mova-se sobre a curva em direção a $P$.

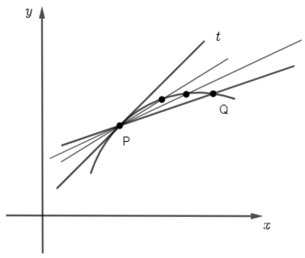



Figura 3 – Reta secante aproximando da reta tangente

Podemos ver que a reta secante gira e aproxima-se da reta com sua posição limite. Isso significa que a inclinação $m_{PQ}$ da reta secante fica cada vez mais próxima da inclinação $m$ da reta tangente. Denotaremos esse fato por

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ} \tag{2}$$

e dizemos que $m$ é o limite de $m_{PQ}$ quando $Q$ tende ao ponto $P$ ao longo da curva. Umas vez que $x$ tende a $a$ quando $Q$ tende a $P$, também podemos usar a Equação (1) para escrever

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3}$$

## 2 Limite de Funções

Vimos na seção anterior que o conceito de limite originou-se da busca da reta tangente a uma curva. Assim, vamos ver a definição de limite e como calculá-lo. Vamos investigar o comportamento da função $f$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$ para valores de $x$ próximos de 4. Vejamos na tabela abaixo os valores de $f(x)$ para valores de $x$ próximos de 4, mas não iguais a 4. Da tabela e do gráfico de $f$ vemos que quando $x$ estiver próximo de

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 5 | 6 |
| 3,5 | 0,75 | 4,5 | 3,75 |
| 3,9 | 1,71 | 4,1 | 2,31 |
| 3,99 | 1,9701 | 4,01 | 2,0301 |
| 3,999 | 1,997001 | 4,01 | 2,003001 |

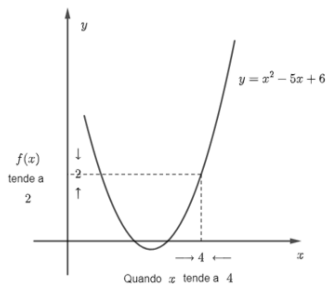



Figura 4 – Valores de $f(x)$ quando $x$ tende a 4

4, de qualquer lado de 4, $f(x)$ estará próximo de 2. Vemos que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 2 quanto quisermos tornando $x$ muito próximo de 4. Esse fato expressamos dizendo que *o limite da função* $f(x) = x^2 - 5x + 6$ *quando* $x$ *tende a* 4 *é igual a* 2. A notação para isso é

$$\lim_{x \to 4} (x^2 - 5x + 6) = 4 \tag{4}$$

**Definição 2.1** *Escrevemos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{5}$$

*e dizemos "o limite de $f(x)$, quando $x$ tende a $a$, é igual a $L$"se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de $L$ (tão próximos de $L$ quanto quisermos), tornando $x$ suficientemente próximo de $a$ (por ambos os lados de $a$) mas não igual a $a$.*

Informalmente, isso significa que podemos tornar $f(x)$ tão próximo de $L$ quanto se queira desde que tomemos $x$ suficientemente próximo de $a$, mas diferente.

Na Definição 2.1 temos que $x \neq a$, isso significa que ao procuramos o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$, não consideramos $x = a$. Na verdade, $f(x)$ não precisa estar definida quando $x = a$. O que importa é o comportamento de $f(x)$ quanto $f$ está definida próxima de $a$.

**Exemplo 2.2** *Estimar o valor de* $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$.

A função $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ não está definida quando $a = 3$, mas isso não importa, pois devemos considerar valores de $x$ que estão próximos de $a$, mas não iguais a $a$. Na tabelas abaixo temos os valores de $f(x)$ para os valores de $x$ que tendem a 3. Com base nesses valores,

| $x < 3$ | $f(x)$ | $x > 3$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| $2,5$ | $0,181818$ | $3,5$ | $0,153846$ |
| $2,9$ | $0,169491$ | $3,1$ | $0,163934$ |
| $2,99$ | $0,166944$ | $3,01$ | $0,166389$ |
| $2,999$ | $0,166694$ | $3,001$ | $0,166638$ |

podemos conjecturar que

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}$$

**Exemplo 2.3** *Estimar o valor de* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x}$.

A função $f(x) = \frac{sen\ x}{x}$ não está definida quando $x = 0$. Construímos a tabela abaixo para valores de $x$ próximos de 0 e visualizamos o comportamento de $f(x)$.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $\pm 1,0$ | $0,84147098$ |
| $\pm 0,5$ | $0,95885108$ |
| $\pm 0,4$ | $0,99735458$ |
| $\pm 0,1$ | $0,99833417$ |
| $\pm 0,01$ | $0,99998333$ |
| $\pm 0,0001$ | $0,99999983$ |

Assim, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x} = 1$.

## 3 Limite Laterais de Funções

Considere a função Heaviside, $H$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{6}$$

cujo gráfico é apresentado abaixo.

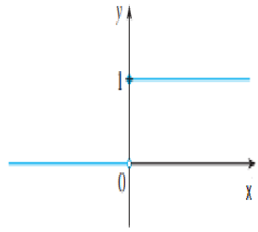



Figura 5 – Gráfico da função Heaviside

Quando $x$ tende a 0 pela esquerda, $H(x)$ tende a 0. Quando $x$ tende a 0 pela direita, $H(x)$ tende a 1. notemos que não existe um número único para o qual $H(x)$ tende quando $x$ tende a 0. Portanto, não existe $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$ não existe.

Indicamos essa situação simbolicamente escrevendo

$$\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^+} H(x) = 1.$$

**Definição 3.1** *Escrevemos*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \tag{7}$$

*e dizemos que o limite à esquerda de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ (ou o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ pela esquerda) é igual a $L$ se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de $L$, para $x$ suficientemente próximo de $a$ e $x$ menor que $a$.*

Da mesma forma temos a definição abaixo.

**Definição 3.2** *Escrevemos*

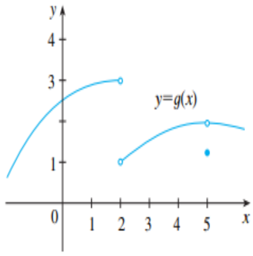
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \tag{8}$$

*e dizemos que o limite à direita de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ (ou o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ pela direita) é igual a $L$ se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de $L$, para $x$ suficientemente próximo de $a$ e $x$ maiores que $a$.*

Comparando a Definição 2.1 com as Definições 3.1 e 3.2 obtemos a seguinte consequência:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ se, e somente se, } \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \tag{9}$$

**Exemplo 3.3** *De acordo com o gráfico da função $g$*




*temos que*

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = 1 \qquad e \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = \nexists$$

$$\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 5^+} g(x) = 2 \qquad e \qquad \lim_{x\to 5} g(x) = 2.$$

## 4 Propriedades de Limite de Funções

Nas seções anteriores para estimar o $\lim_{x\to a} f(x)$ construímos tabelas e observamos o comportamento de $f(x)$ para valores de $x$ próximos de $a$, com $x \neq a$. Veremos propriedades que facilitaram o cálculo de $\lim_{x\to a} f(x)$.

**Proposição 4.1** *Supondo que $c$ seja uma constante e os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existam, então*

$$(i)\ \lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) \tag{10}$$

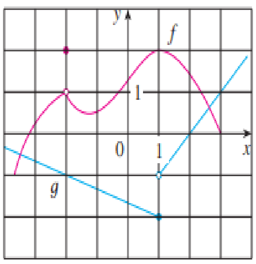
$$(ii)\ \lim_{x\to a}[cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x) \tag{11}$$

$$(iii)\ \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) \tag{12}$$

$$(iv)\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \tag{13}$$

Notemos que a Proposição 4.1 também é válida para os limites laterais.

**Exemplo 4.2** *De acordo com o gráfico das função $f$ e $g$*




*temos que*

$$\lim_{x\to -2}[f(x) + 5g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + 5 \lim_{x\to -2} g(x) = 1 + 5\cdot(-1) = 1 - 5 = -4,$$

$$\lim_{x \to 1^+} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to 1^+} f(x) \cdot \lim_{x \to 1^+} g(x) = 2 \cdot (-1) = -2$$

*e*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to 1^-} f(x)}{\lim_{x \to 1^-} g(x)} = \frac{2}{-2} = -1.$$

**Proposição 4.3** *Supondo que exista* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *então para todo* $n$ *inteiro positivo temos*

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \to a} f(x) \right]^n \tag{14}$$

Para algumas propriedades a seguir vamos considerar os dois limites abaixo, sendo $c$ uma constante e $a$ um número real qualquer temos

$$\lim_{x \to a} c = c \qquad e \qquad \lim_{x \to a} x = a. \tag{15}$$

**Corolário 4.4** *Para todo* $n$ *inteiro positivo e* $a$ *um número real temos*

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n \tag{16}$$

**Corolário 4.5** *Para todo* $n$ *inteiro positivo,* $a$ *um número real temos*

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad (\textit{se } n \textit{ par, supomos que } a > 0). \tag{17}$$

**Proposição 4.6** *Para todo* $n$ *inteiro positivo,* $a$ *um número real temos*

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \quad (\textit{se } n \textit{ par, supomos que } a > 0). \tag{18}$$

**Exemplo 4.7** *Usando os resultados anteriores vamos calcular* $\lim\limits_{x \to 4} (3x^2 - 2x + 5)$ *e* $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x^2 + 2}{3 - 5x}$. *Então,*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} (3x^2 - 2x + 5) &= \lim_{x \to 4} (3x^2) - \lim_{x \to 4} (2x) + \lim_{x \to 4} 5 \\
&= 3 \lim_{x \to 4} x^2 - 2 \lim_{x \to 4} x + 5 \\
&= 3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 5 = 48 - 8 + 5 = 45
\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - x^2 + 2}{3 - 5x} &= \frac{\lim\limits_{x \to -1} x^3 - x^2 + 2}{\lim\limits_{x \to -1} 3 - 5x} \\
&= \frac{\lim\limits_{x \to -1} x^3 - \lim\limits_{x \to -1} x^2 + \lim\limits_{x \to -1} 2}{\lim\limits_{x \to -1} 3 - 5 \lim\limits_{x \to -1} x} \\
&= \frac{(-1)^3 - (-1)^2 + 2}{3 - 5 \cdot (-1)} = \frac{-1 - 1 + 2}{3 + 5} = \frac{0}{8} = 0.
\end{aligned}$$

**Proposição 4.8** *Se $f$ for uma função polinomial ou racional e $a$ estiver no domínio de $f$, então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{19}$$

Abaixo, temos um relação entre o $\lim_{x\to a} f(x)$ e os limites laterais $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$

**Teorema 4.9**

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ se, e somente se, } \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x) \tag{20}$$

**Exemplo 4.10** *Vamos verificar que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.*

*De fato, notemos que*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

*Assim,*

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

*e*

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

*. Portanto, do Teorema 4.9 obtemos que*

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

**Exemplo 4.11** *Vamos verificar que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.*

*De fato, temos que*

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

*e*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

*Como os limites laterais são diferentes temos que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.*

Abaixo temos dois resultados que apresentam relação entre as imagens de funções e seus limites.

**Teorema 4.12** *Se $f(x) \leq g(x)$ quando $x$ está próximo de $a$ (exceto possivelmente em $a$) e os limites de $f$ e $g$ existem quando $x$ tende $a$ então*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x). \tag{21}$$

**Teorema 4.13** *(Teorema do Confronto) Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ quando $x$ está próximo de $a$ (exceto possivelmente em $a$) e $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$ então $\lim_{x\to a} h(x) = L$.*

## 5 Definição Formal de Limite de Funções

A definição intuitiva de limite é inapropriada para alguns propósitos, pois frases como "$x$ está próximo de $a$" e "$f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L" são vagas.

Para sermos capazes de demonstrar conclusivamente que, por exemplo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$

devemos tornar precisa a definição de limite.

Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases} \tag{22}$$

Vemos claramente que quando $x$ está próximo de 2, mas $x \neq 2$, então $f(x)$ está próximo de 7 e, assim, $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$.

Para termos mais detalhes de como $f(x)$ se comporta quando $x$ está próximo de 2, devemos nos perguntar: Quão próximo $x$ deverá estar de 2 para que $f(x)$ seja divirja de 7 menos que $0,1$?

Pela definição de valor absoluto temos que a distância de $x$ a 3 é $|x-3|$ e a distância entre $f(x)$ e 7 é $|f(x)-7|$, logo para respondermos a pergunta precisamos encontrar um número $\delta$ tal que

$$|f(x)-7| < 0,1 \text{ se } 0 < |x-2| < \delta. \tag{23}$$

Notemos que se, $0 < |x-2| < 0,1/3$, então

$$|f(x)-7| = |3x+1-7| = |3x-6| = 3|x-2| < 3 \cdot \frac{0,1}{3} = 0,01$$

isto é,

$$|f(x)-7| < 0,1 \text{ se } 0 < |x-2| < \frac{0,1}{3}.$$

Assim, uma resposta para o problema é dada por $\delta = 0,1/3$; isto é, se $x$ estiver a uma distância de no máximo $0,1/3$ de 2, então $f(x)$ estará a uma distância de no máximo $0,1$ de 7.

Se mudarmos o número $0,1$ em nosso problema para o número menor $0,01$, então, usando o mesmo método, achamos que $f(x)$ diferirá de 7 por menos que $0,01$, desde que $x$ difira de 2 por menos que $(0,01)/3$:

$$|f(x)-7| < 0,01 \text{ se } 0 < |x-2| < \frac{0,01}{3}.$$

E assim por diante.

**Definição 5.1** *Seja $f$ uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número $a$, exceto possivelmente no próprio $a$. Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ é $L$, e escrevemos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

*se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$\textit{se } 0 < |x-a| < \delta \textit{ então } |f(x)-L| < \epsilon.$$

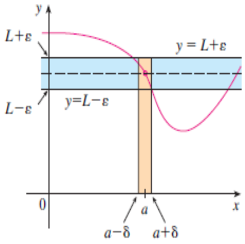



Figura 6 – Ilustração da definição formal de limite

Geometricamente, temos a seguinte representação para a Definição 5.1:

**Exemplo 5.2** *Prove que* $\lim_{x \to 2}(5x - 4) = 6$. *Devemos mostrar que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $0 < |x - 2| < \delta$ *então* $|(5x - 4) - 6| < \epsilon$. *Notemos que, (??)*

$$|(5x - 4) - 6| < \epsilon \Leftrightarrow |5x - 10| < \epsilon \Leftrightarrow 5|x - 2| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{5}$$

.

*Assim, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ *tal que se*

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(5x - 4) - 6| = |5x - 10| = 5|x - 2| < 5 \cdot \delta = 5 \cdot \frac{\epsilon}{5} = \epsilon.$$

As definições de intuitivas de limites laterais também possuem suas definições precisas.

**Definição 5.3** *Temos que* $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ *se para todo* $\epsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \epsilon$ *sempre que* $a - \delta < x < a$.

**Definição 5.4** *Temos que* $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ *se para todo* $\epsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \epsilon$ *sempre que* $a < x < a + \delta$.

# 6 Conclusão

Neste trabalho, que foi o produto final do estudo desenvolvido nas Atividades Orientadas de Ensino que são obrigatórias para a integralização do Curso de Matemática da UFMS- Campus de Aquidauana, foi apresentado um estudo intuitivo e formal do Limite de um Função. Foi abordado a ideia intuitiva para entender o significado de limite de uma função, depois a definição formal, alguns resultados de manipulação de limites e exemplos.

# Referências

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo, Volume 1*. 5. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1*. 3. ed. [S.l.]: São Paulo: Harbra ltda, 1994.

STEWART, J. *Cálculo, Volume I*. 5. ed. [S.l.]: São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.