FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE
FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática - INMA

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Braz Teodoro Jiménez Martins

Matemática Financeira: uma perspectiva usando recorrências lineares

Campo Grande - MS

14 de setembro de 2023

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática - INMA

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Braz Teodoro Jiménez Martins

Orientadora: Prof.ª Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/ UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campo Grande - MS

14 de setembro de 2023

Matemática Financeira: uma perspectiva usando recorrências lineares

Braz Teodoro Jiménez Martins

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Banca examinadora:

Prof.ª Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico.
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS.

Prof.ª Dra. Rubia Mara de Oliveira Santos.
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS.

Prof.ª Dra. Irene Magalhães Craveiro.
Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD.

Campo Grande - MS, 14 de setembro de 2023.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente, à Deus, pelo dom da vida, por me guiar e sustentar em cada etapa até aqui, a Ele seja toda honra e toda glória.

À minha amada esposa, Ana Carolina, por todo companheirismo, compreensão, amor e cuidado que sempre teve comigo.

Aos meus pais Olavo e Norma, por toda provisão e educação que moldaram meu caráter, serei eternamente grato aos senhores.

À minha irmã Antonia, sangue do meu sangue, por sempre acreditar em mim.

À minha orientadora, professora Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico pelo apoio, disponibilidade e conhecimento compartilhado comigo durante todo o processo de construção deste trabalho.

À minha amiga, professora Ma. Aline Mota Oliveira Amaral cujo nossas discussões foram fundamentais para a conclusão da parte pedagógica deste trabalho.

Ao meu colega de curso, Jucelino Rodrigues Macina Junior que se tornou um grande amigo, por toda parceria no decorrer do PROFMAT.

Ao meu grande amigo, Lucas Vinicius Ajpert Cosmo, que mesmo sem querer deu a ideia inicial desta dissertação.

À minha primeira professora de matemática, Euraides Maria Macedo Resigno por seu empenho e dedicação, que foram determinantes para despertar em mim, a paixão por essa ciência que tanto amo.

À todos bons professores que tive nesses anos, pois contribuíram para minha formação. Me espelho em vocês para ser um profissional melhor a cada dia.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar e relacionar as recorrências lineares com a matemática financeira. Para tal, inicialmente foi feito um estudo detalhado de recorrências de primeira e segunda ordem. Foi discutido sobre a Educação Financeira na BNCC e apresentadas as deduções de fórmulas de juros compostos e sistemas de amortização Price e SAC, por recorrências lineares. Em seguida, foram feitas conexões entre recorrências lineares e conceitos de álgebra linear como: espaço vetorial, base e dimensão, concluindo que o conjunto das soluções de uma recorrência é um espaço vetorial. Além disso, foi apresentado alguns modelos econômicos que podem ser estudados por equações de recorrências. Por fim, apresentamos algumas situações problemas da matemática financeira que podem ser trabalhados em sala de aula, como juros compostos, amortização e aplicações financeiras com aportes mensais.

Palavras-chave: Recorrências Lineares de Primeira e Segunda Ordem, Educação Financeira, Matemática Financeira, Modelos Econômicos.

Abstract

The main objective of this work is to study and link the linear recurrences with the financial math. For such, initially a detailed study of the recurrences of first and second order has been made. Financial Education at BNCC has been discussed about and the deductions of formulas of composed interests, Price Amortization System and Constant Amortization System (SAC), for linear recurrences. Besides, connections between linear recurrences and concepts of linear algebra, such as: vectorial space, basis and dimension, concluding that the set of solutions of a recurrence is a vectorial space. Besides, some economic models that have been presented may be studied by recurrence equations. At last, we have presented some problematic situations of financial mathematics that may be worked in the classroom, like composed interests, amortization and financial applications with monthly reports.
Keywords: Linear Recurrences of First and Second Order, Financial Education, Financial Math, Economic Models.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

É de conhecimento dos profissionais de Educação Básica do Brasil, que um dos documentos mais importantes da Educação Brasileira é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) pois, como o próprio nome diz, ela desempenha a função de base, sendo utilizada como referência para todos os currículos do país. Neste documento a Educação Financeira é tratada como um dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs).

Ainda de acordo com a BNCC, as temáticas devem ser trabalhadas de forma interdisciplinar e contextualizada ao longo da Educação Básica pois, possuem extrema relevância para a formação dos estudantes. No componente curricular de Matemática para o Ensino Fundamental, a BNCC [6] diz:

> Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática [Números] é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. (BRASIL, 2018, p. 269)

Observe que, a BNCC diz que os estudantes devem conseguir discutir a respeito de problemas simples que tratam de uma aplicação financeira, sendo um de seus questionamentos a rentabilidade de seus investimentos. Apenas com as ferramentas disponíveis no Ensino Fundamental não é possível que o aluno encontre a rentabilidade de uma operação caso ela seja feita com aportes mensais, nem tampouco com os recursos matemáticos do Ensino Médio, sendo assim uma solução para essa problemática seria o conhecimento sobre recorrências.

Desse modo, a proposta do trabalho em questão é ser uma fonte para professores que desejam trabalhar com a matemática financeira no Ensino Médio de uma forma diferente, sob a ótica das Recorrências Lineares, por ser uma poderosa ferramenta matemática para discutir e resolver modelos oriundos da economia. Cabe ressaltar que o estudo de resolução de recorrências não é um conteúdo que está contemplado na BNCC, mas a proposta do trabalho em questão é mostrar que é possível a sua aplicação em turmas de eletiva como aprofundamento de área do conhecimento.

O trabalho foi estruturado da seguinte forma: o segundo capítulo, contempla o embasamento teórico com um estudo geral de recorrências lineares de primeira e segunda ordem, homogêneas e não homogêneas, enunciando e demonstrando seus principais teoremas de forma detalhada. Serão apresentados alguns exemplos clássicos, que são vistos no Ensino Fundamental e Médio, como progressões aritméticas e geométricas e a conhecida sequência de Fibonacci, sendo desenvolvidos a partir do conceito de recorrência.

O terceiro capítulo, apresenta uma breve discussão a respeito da importância da educação financeira na vida cotidiana dos estudantes e familiares. Serão listadas algumas habilidades e competências que estão relacionadas à Educação Financeira na BNCC, começando pelos os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Por outro lado, serão desenvolvidos os conceitos de Juros Composto e os Sistemas de Amortizações, em particular, os dois mais utilizados no Brasil: o Sistema Price e SAC. Esses conceitos são apresentados juntamente com a dedução de suas fórmulas a partir dos conhecimentos de recorrência de primeira ordem.

O quarto capítulo é de aprofundamento para o professor, onde é detalhado a relação entre as soluções das recorrências de primeira ordem (podendo ser expandido para ordem k) e a álgebra linear, para tal é feito uma breve revisão dos tópicos necessários de álgebra linear, e após isso adaptando-os para recorrências. Em seguida, serão discutidos e apresentados três modelos econômicos de primeira ordem e um modelo econômico de segunda ordem. Estes modelos podem ser comentados em linhas gerais com os estudantes, mas envolvem conceitos mais avançados do que os propostos no terceiro capítulo.

O quinto capítulo trata da parte prática do trabalho. São apresentados problemas resolvidos de forma detalhada, como sugestão para atividades em sala com os alunos, sobre investimentos com aportes mensais, juros compostos e sistemas de amortização. E por fim, o sexto capítulo a conclusão da trabalho em questão, bem como a sugestão de tema de pesquisa para um trabalho futuro.

Capítulo 2

Resolução de Recorrências Lineares de Primeira e Segunda Ordem

Neste capítulo será feito um estudo detalhado sobre recorrências lineares de primeira e segunda ordem, que servirá como base para que então, possamos relacioná-los com problemas de Matemática Financeira. Porém para a plena compreensão de recorrências, se faz necessários o conhecimento prévio de outros conteúdos matemáticos vistos no Ensino Fundamental e Médio: equações do 2º grau, sequências numéricas, progressões aritméticas e geométricas, função, fatorial, sistema linear, determinante, além do extinto **números complexos** que por muitos anos foi estudado no 3º ano do Ensino Médio, e ainda presente em diversos vestibulares pelo país. Estes assuntos matemáticos serão comentados e aplicados no decorrer do capítulo a medida que surgir a necessidade.

Inicialmente, serão definidos alguns conceitos básicos sobre sequências numéricas, definição de recorrências lineares e não lineares, homogêneas e não homogêneas, em seguida a resolução de recorrências. Para a elaboração deste capítulo, foram utilizadas as referências [5, 9, 10, 18, 19, 20, 24, 25, 26, 28, 32].

Definição 1 *Uma sequência de números reais é uma função* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *associa um número* a_n *pertencente aos reais chamado n-ésimo termo.*

Definição 2 *Uma* ***relação de recorrência*** *ou, como também é chamada, uma* ***equação de recorrência****, é uma relação que determina cada termo de uma dada sequência em função dos termos anteriores.*

Alguns exemplos de sequências numéricas, estudadas no Ensino Fundamental II e Ensino Médio, e que são recorrências, são as famosas *Progressões Aritméticas e Geométricas*, que podem ser estudadas de forma detalhada, em qualquer coleção de livros didáticos de matemática, dessas etapas da Educação Básica citadas anteriormente. Veremos, cinco exemplos que servirão como base para continuarmos nossos estudos.

Exemplo 1 *A sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dos números naturais pares não nulos* $(2, 4, 6, 8, ...)$ *pode ser definida pela recorrência* $x_{n+1} = x_n + 2$ *com* $n \geq 1$*, e* $x_1 = 2$*.*

Exemplo 2 *A sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *formada pelos elementos de uma progressão aritmética de razão* r *e primeiro termo* a *é definida pela recorrência* $x_{n+1} = x_n + r$ *com* $n \geq 1$*, e* $x_1 = a$*.*

Exemplo 3 *A sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *formada pelos elementos de uma progressão geométrica de razão* q *e primeiro termo* a *é definida pela recorrência* $x_{n+1} = q \cdot x_n$ *com* $n \geq 1$*, e* $x_1 = a$*.*

Exemplo 4 *A sequência* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, dita de Fibonacci, cujos os primeiros termos são 1, 1, 2, 3, 5, ... e na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *com* $n \geq 0$*, e* $F_2 = F_1 = 1$*.*

Nos Exemplos 1 e 2 há infinitas sequências numéricas que satisfazem tais condições pois, o termo inicial é a, ou seja, para cada $a \in \mathbb{R}$ temos uma sequência diferente. Logo, para que a sequência esteja bem definida, precisamos dos valores iniciais fixos.

Além disso, nos Exemplos 1, 2 e 3, cada uma das sequências recorrem apenas a *um termo anterior*, quando isso acontece, dizemos que a recorrência é de *primeira ordem*. Por outro lado, no Exemplo 4, temos uma sequência que recorre aos *dois termos anteriores*, e quando isso ocorre, dizemos que se trata de uma recorrência de *segunda ordem*.

Definição 3 *Uma recorrência de primeira ordem expressa* x_{n+1} *em função de* x_n*. É dita linear se, e somente se, essa função for do primeiro grau.*

Exemplo 5 *As recorrências* $x_{n+1} = 2x_n - n^2$ *e* $x_{n+1} = nx_n$ *são lineares e a recorrência* $x_{n+1} = x_n^2$ ***não é linear****. As duas últimas são ditas* ***homogêneas****, por não possuírem termo independente de* x_n*.*

2.1 Recorrências lineares homogêneas e não homogêneas de primeira ordem

De agora em diante, vamos nos concentrar em resolver recorrências de primeira ordem, iniciando pelo caso mais simples, quando ela é do tipo homogênea com coeficiente constante.

Exemplo 6 *Considere a recorrência* $x_{n+1} = \phi x_n$, *com* $\phi \neq 0$, *constante.*
Note que:

$$x_1 = \phi x_0,$$

$$x_2 = \phi x_1 = \phi^2 x_0,$$

$$\vdots$$

$$x_n = \phi x_{n-1} = \phi^n x_0.$$

Tomando $x_0 = c,\ c \in R$, *então* $x_n = \phi^n c$, *que é a solução geral da recorrência homogênea linear de primeira ordem. Ou seja, que dado um parâmetro* $c \in \mathbb{R}$, *conseguimos encontrar a solução particular de qualquer recorrência desse tipo.*

Vamos resolver uma recorrência homogênea de primeira ordem, porém com coeficiente não constante e condição inicial x_1. Considere o seguinte exemplo.

Exemplo 7 *Seja a recorrência* $x_{n+1} = nx_n, x_1 = 1$.
Note que, podemos colocar cada termo da recorrência de forma explícita, dependendo apenas do termo anterior:

$$x_2 = 1x_1$$

$$x_3 = 2x_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = (n-1)x_{n-1}$$

Podemos simplesmente multiplicar todas as equações membro a membro, resultando

$$x_2 \cdot x_3 \cdots x_n = 1 \cdot 2 \cdot \cdots (n-1) \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1}.$$

Como $x_n \neq 0$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$, *obtemos*

$$x_n = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot x_1.$$

Mas $1 \cdot 2 \cdots (n-1) = (n-1)!$ *e* $x_1 = 1$*, portanto*

$$x_n = (n-1)!.$$

De modo geral, todas as recorrências homogêneas de primeira ordem podem ser resolvidas utilizando essas estratégias utilizadas nos exemplos anteriores. No Exemplo 6, resolvemos uma recorrência sem valor inicial e com coeficiente constante, já no Exemplo 7, uma recorrência com valor inicial, mas onde o coeficiente variava em função de n. Observe que os processos de resolução são relativamente simples.

Veremos, duas formas de resolver recorrências lineares não homogêneas de primeira ordem, a primeira para recorrências do tipo $x_{n+1} = x_n + f(n)$, onde $f(n)$ é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, e a segunda resolve qualquer recorrência linear não homogênea de primeira ordem, pois a transforma em uma recorrência do tipo $x_{n+1} = x_n + f(n)$ e assim retornando ao caso anterior. Isso ficará mais claro no Teorema 1 e Exemplo 11.

Exemplo 8 ***(Caso Geral):*** *Considere a recorrência* $x_{n+1} = x_n + f(n)$*.*
Note que podemos explicitar os termos dessa recorrência, como segue

$$x_2 = x_1 + f(1),$$

$$x_3 = x_2 + f(2),$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + f(n-1).$$

Agora nossa estratégia de resolução será diferente, basta somar todas as equações membro a membro, resultando em

$$x_2 + x_3 + \cdots + x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n = x_1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1).$$

Colocando na notação de somatório, obtemos

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Observação 1 *É comum que essa função* $f(n)$ *com domínio em* $\mathbb{N}$*, seja uma função afim (e consequentemente uma progressão aritmética) ou uma função exponencial (e consequentemente uma progressão geométrica). Além disso, como visto no Exemplo 8, os* *termos de $f(n)$ tornam-se uma soma. Logo, antes de continuar com os estudos de recorrências, é necessário encontrar uma fórmula para calcular a soma dos termos de uma P.A e de uma P.G, para assim conseguirmos resolver recorrências desse tipo.*

Proposição 1 ***(Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A.)*** *Seja $(a_1, a_2, a_3, ...)$ uma P.A de razão r, e S_n a soma dos n primeiros termos dessa P.A., vale a seguinte igualdade:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Demonstração: Temos que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Escrevendo esta soma de trás para frente obtemos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1.$$

Somando as equações de forma conveniente, temos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Note que

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_{n-1} = a_1 + a_n,$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2r + a_{n-2} = a_1 + a_n,$$

$$\vdots$$

e assim por diante, logo, todas as n parcelas em parênteses são iguais a $a_1 + a_n$, ou seja,

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Portanto:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

■

Exemplo 9 *Considere a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2n$.*
Explicitando os termos obtemos

$$x_2 = x_1 + 2 \cdot 1 \Rightarrow x_2 = x_1 + 2,$$

$$x_3 = x_2 + 2 \cdot 2 \Rightarrow x_3 = x_2 + 4,$$

$$x_4 = x_3 + 2 \cdot 3 \Rightarrow x_4 = x_3 + 6,$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + 2 \cdot (n-1).$$

Utilizando a mesma estratégia do Exemplo 8, e somando todas as equações membro a membro temos

$$x_n = x_1 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2 \cdot (n-1).$$

Note que a sequência $(2, 4, 6, ..., 2 \cdot (n-1))$ *trata-se de uma P.A (progressão aritmética), de razão 2 e seu primeiro termo é* $a_1 = 2$*. Logo, pela Proposição 1:*

$$x_n = x_1 + \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2},$$

$$x_n = x_1 + \frac{(2 + 2 \cdot (n-1)) \cdot (n-1)}{2},$$

$$x_n = x_1 + \frac{2n \cdot (n-1)}{2},$$

$$x_n = x_1 + n \cdot (n-1).$$

Portanto, $x_n = x_1 + n \cdot (n-1)$ *é a solução geral da recorrência.*

Proposição 2 ***(Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G.)*** *Seja* $(a_1, a_2, a_3, ...)$ *uma P.G de razão* $q \neq 1$*, e* S_n *a soma dos* n *primeiros termos dessa P.G. Então vale a seguinte igualdade:*

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right).$$

Demonstração: Por hipótese, temos que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{2.1}$$

Se multiplicarmos pela razão q em ambos os membros da Equação 2.1, obtemos

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \cdots + a_n \cdot q.$$

Mas, dada uma P.G, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se multiplicarmos um termo qualquer da P.G pela razão q esse novo termo é seu sucessor imediato. Com isso

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}. \tag{2.2}$$

Subtraindo esta Equação 2.2 de 2.1, temos

$$S_n \cdot q - S_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} - a_1 - a_2 - \cdots - a_n.$$

$$(q-1) \cdot S_n = a_{n+1} - a_1.$$

Porém, pela fórmula do termo geral da P.G $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$, tem-se

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1},$$

Ou ainda

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right), \qquad q \neq 1$$

■

Observação 2 *Nas progressões geométricas em que a razão* $|q| < 1$*, ou seja,* $-1 < q < 1$*, a soma dos n primeiros termos da P.G tem limite quando* $n \to \infty$ *(lê-se n tende ao infinito) e é um valor finito, ou seja, uma constante. Observe um exemplo numérico a seguir, considere* $q = \frac{1}{2}$*, vejamos o que ocorre para* $q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *variando o valor de n.*

Se $n = 1$ *então* $q^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0,5.$

Se $n = 2$ *então* $q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25.$

Se $n = 3$ *então* $q^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125.$

Note que o valor de q^n *está diminuindo a medida que n vai aumentando e se aproximando cada vez mais de zero, logo se* $n \to \infty$ *é bastante razoável dizer que* $q^n \to 0$*. Portanto, nesse caso*

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0.$$

Essa observação, por hora não será utilizada, mas será extremamente útil quando começarmos a investigar os modelos econômicos envolvendo recorrências. Por hora, usaremos apenas a fórmula da soma dos n primeiros termos, quando n for um valor finito.

Exemplo 10 *Considere a recorrência* $x_{n+1} = x_n + 3^n$*,* $x_1 = \frac{3}{2}$*.*
Explicitando os termos

$$x_2 = x_1 + 3,$$

$$x_3 = x_2 + 3^2,$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + 3^{n-1}.$$

Somando membro a membro, obtemos

$$x_2 + x_3 + \cdots + x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1},$$

$$x_n = x_1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

Utilizando a fórmula da soma dos n primeiros termos da P.G temos

$$x_n = x_1 + 3 \cdot \left(\frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}\right),$$

$$x_n = x_1 + \frac{3^n}{2} - \frac{3}{2}.$$

Como, $x_1 = \frac{3}{2}$*, logo* $x_n = \frac{3^n}{2}$.

Por fim, para ser possível resolver qualquer recorrência de primeira ordem, será enunciado e demonstrado o teorema que transforma recorrências lineares não homogênea de primeira ordem em recorrências da forma

$$x_{n+1} = x_n + f(n).$$

Teorema 1 *Se* a_n *é uma solução não nula da recorrência* $x_{n+1} = g(n)x_n$*, então a substituição* $x_n = a_n y_n$ *transforma a recorrência* $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ *em*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}.$$

Demonstração: Considere a recorrência

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n). \tag{2.3}$$

Seja $a_n \neq 0$ uma solução da recorrência 2.3, ou seja,

$$a_{n+1} = g(n)a_n. \tag{2.4}$$

Fazendo a substituição $x_n = a_n y_n$ na recorrência (2.3), obtemos

$$a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Mas pela equação (2.4), temos

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Logo, como $g(n) \neq 0$ e a_n é não nulo, concluímos que

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}.$$

■

O que o Teorema 1 nos diz? Que toda recorrência linear não homogênea de primeira ordem pode ser transformada em uma recorrência semelhante a do Exemplo 8, e com isso, utilizaremos a mesma estratégia de resolução. Veremos agora o último exemplo de recorrência de primeira ordem.

Exemplo 11 *Considere a recorrência* $x_{n+1} = (n+1)x_n + n$, $x_1 = 1$.
Seja $x_{n+1} = (n+1)x_n$ *a recorrência homogênea relacionada, iremos encontrar uma solução* $a_n \neq 0$. *Explicitando os termos, segue que*

$$x_2 = 2x_1,$$

$$x_3 = 3x_2,$$

$$\vdots$$

$$x_n = nx_{n-1}.$$

Multiplicando as equações membro a membro, obtemos

$$x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1},$$

$$x_n = n! \cdot x_1.$$

Logo, $a_n = n!$, *é solução da recorrência homogênea. Fazendo a substituição* $x_n = a_n y_n$ *na recorrência que deve ser resolvida:*

$$a_{n+1}y_{n+1} = (n+1)a_n y_n + n,$$

$$(n+1)! \cdot y_{n+1} = (n+1) \cdot n! \cdot y_n + n,$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{n}{(n+1)!}.$$

Explicitando os termos dessa nova recorrência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{1}{2!},\\
y_3 &= y_2 + \frac{2}{3!},\\
&\vdots\\
y_n &= y_{n-1} + \frac{n-1}{n!}.
\end{aligned}$$

Somando membro a membro:

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!},$$

$$y_n = y_1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}. \tag{2.5}$$

Mas,

$$\frac{n-1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}. \tag{2.6}$$

Dessa forma, substituindo 2.6 em 2.5

$$y_n = y_1 + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right).$$

Cancelando os termos opostos obtemos

$$y_n = y_1 + 1 - \frac{1}{n!}.$$

Porém, $x_1 = a_1 y_1 \Rightarrow 1 = 1! \cdot y_1 \Rightarrow y_1 = 1$*, logo*

$$y_n = 2 - \frac{1}{n!}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
x_n &= a_n y_n,\\
x_n &= n! \cdot \left(2 - \frac{1}{n!}\right),\\
x_n &= 2n! - 1.
\end{aligned}$$

Observação 3 *A equação* $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$ *vista no Exemplo 11 é um caso particular de um tipo de soma especial, conhecida como* ***soma telescópica****. Neste caso, a soma de várias parcelas, foi resumida a uma simples subtração de dois elementos.*

> A ideia por trás do nome é a seguinte: assim como olhando num telescópio encurtamos a imensa distância de um corpo celeste a nossos olhos, a propriedade telescópica encurta o caminho entre a soma inicial de muitas parcelas e o cálculo do resultado da mesma. (CAMINHA, 2013, p.115)

2.2 Recorrências lineares homogêneas e não homogêneas de segunda ordem

Nessa seção iremos resolver recorrências lineares de segunda ordem, mas diferente do caso das recorrências de primeira ordem, concentraremos nossos estudos apenas nos casos onde os coeficientes são constantes e reais. Iniciaremos com o caso homogêneo, ou seja, recorrências do tipo

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Note que, $q \neq 0$, pois caso contrário, se $q = 0$, a recorrência transformaria-se em uma recorrência de primeira ordem ($x_{n+2}+px_{n+1} = 0$), ou seja, dependeria apenas de um termo anterior. Além disso, anteriormente, escrevemos as recorrências lineares homogêneas de primeira ordem, com coeficientes constantes, da seguinte forma

$$x_{n+1} = \phi x_n, \qquad \phi \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, uma pergunta bem justa por parte do leitor, seria: Por que na recorrência linear homogênea de segunda ordem (2.7), a equação foi igualada a zero? Apesar de ambas equações serem equivalentes, uma foi apresentada de uma maneira diferente da outra. Esse questionamento será respondido agora, ao relacionar a cada recorrência linear homogênea de segunda ordem (2.7), a uma equação do segundo grau, a qual chamaremos de **equação característica** relacionada a recorrência

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Essa equação é fundamental para encontrarmos a solução geral das recorrências de segunda ordem. E, para encontrar as raízes desse tipo de equação comumente a igualamos a zero. Além disso, para não gerar qualquer dúvida e identificar com certa facilidade qual é a equação característica relacionada a cada uma das recorrência, a apresentaremos como na Equação (2.7).

Por outro lado, cabe ressaltar que as raízes da equação característica sempre serão diferentes de zero, pois $q \neq 0$. Enunciaremos o primeiro resultado que relaciona a recorrência linear homogênea de segunda ordem, com coeficientes constantes, com sua equação característica.

Proposição 3 *Se λ é raiz da equação $r^2 + pr + q = 0$, então $a_n = \lambda^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.*

Demonstração: De fato, note que se $a_n = \lambda^n$, então

$$a_{n+2} = \lambda^{n+2} \quad e \quad a_{n+1} = \lambda^{n+1}.$$

Substituindo na recorrência, temos

$$\lambda^{n+2} + p\lambda^{n+1} + q\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 + p\lambda + q).$$

Mas, por hipótese, $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, pois λ é raiz da equação característica, logo

$$\lambda^{n+2} + p\lambda^{n+1} + q\lambda^n = \lambda^n \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $a_n = \lambda^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. ■

Observe que, na Proposição 3 citamos apenas uma raiz λ da equação do 2º grau. Porém, esse tipo de equação não possui apenas uma raiz, na verdade há três possibilidades. São elas:

1) Ter duas raízes reais distintas ($r_1 \neq r_2$, quando $\Delta > 0$);

2) Ter duas raízes complexas conjugadas ($r_1 = a + bi, r_2 = a - bi,\ \ a, b \in R$, quando $\Delta < 0$);

3) Ter duas raízes reais iguais ($r_1 = r_2$, quando $\Delta = 0$).

Em uma equação do 2º grau genérica ($ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in R, a \neq 0$), o valor de Δ é dado pela equação $\Delta = b^2 - 4ac$. Porém, como a equação característica nesse caso é $r^2 + pr + q = 0$, valor de Δ será

$$\Delta = p^2 - 4q.$$

Observação 4 *A segunda possibilidade que envolve o* ***conjunto dos números complexos*** *será melhor definida e explicada adiante, quando necessário para encontrar a solução geral da recorrência de segunda ordem e $\Delta < 0$.*

Observação 5 *Neste trabalho, não será visto as demonstrações e toda a teoria relacionada a equações do 2º grau, pois este é um conteúdo de Ensino Fundamental, já os números complexos serão apresentadas as definições e teoremas úteis para resolver* ***Recorrências de segunda ordem****, porém sem nenhum tipo de demonstração. Caso seja de interesse do leitor, a pesquisa pode ser feita em [18] e [20].*

Assim, será estudado o que ocorre em cada um desses casos, ou seja, qual será o comportamento da solução geral da recorrência (2.7) à depender das raízes da equação característica relacionada. O próximos teoremas vão mostrar que se $r_1 \neq r_2$ são raízes da equação característica (ou seja, as duas primeiras possibilidades), então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ será solução da recorrência, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Mais do que isso, que todas as soluções são dessa forma (unicidade).

Observação 6 *A sequência $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é uma **combinação linear**, de r_1^n e r_2^n, este conceito é da **álgebra linear**, e será definido no próximo capítulo, assim como suas implicações para o estudo de recorrências e matemática financeira.*

Teorema 2 *Se as raízes de $r^2+pr-q=0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração: De fato, se $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, então

$$a_{n+2} = C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} \quad e \quad a_{n+1} = C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}.$$

Substituindo na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, temos

$$C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) = C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q).$$

Por hipótese, $r_1^2 + pr_1 + q = 0$ e $r_2^2 + pr_2 + q = 0$, pois r_1 e r_2 são raízes da equação característica, logo

$$C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) = C_1 r_1^n \cdot 0 + C_2 r_2^n \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. ∎

Exemplo 12 *Determine uma família de soluções para a recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} - 21x_n$. Note que a equação característica relacionada a recorrência é*

$$r^2 - 4r - 21 = 0.$$

Resolvendo a equação, obtemos

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2 \cdot 1} \Rightarrow r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-21)}}{2} \Rightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} \Rightarrow r = \frac{4 \pm 10}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{4+10}{2} \Rightarrow r_1 = 7 \qquad e \qquad r_2 = \frac{4-10}{2} \Rightarrow r_2 = -3.$$

Pelo Teorema 2, as sequências $a_n = C_1 7^n + C_2(-3)^n$ formam uma família de soluções.

Finalmente, o foco deve ser mostrar que essa família de soluções na verdade é única, ou seja, que todas as soluções da recorrência quando $r_1 \neq r_2$ são dessa forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$. E isto será feito enunciando o Teorema 3, a seguir.

Teorema 3 ***(Unicidade)*** *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então* ***todas*** *as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração: Seja a_n uma solução qualquer da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Deve-se determinar os valores de C_1 e C_2 em função das raízes da equação característica tais que:

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = a_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = a_2 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema de equações, lembrando que como $q \neq 0 \Rightarrow r_1, r_2 \neq 0$, pois como comentado no início dessa seção, se assim não fosse, a recorrência seria de primeira ordem. Com base nisto,

$$det \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{pmatrix} \neq 0 \iff$$

$$r_1 r_2^2 - r_1^2 r_2 \neq 0 \iff$$

$$r_1 r_2 (r_2 - r_1) \neq 0 \iff$$

$$r_1 \cdot r_2 \neq 0 \quad e \quad r_2 - r_1 \neq 0 \iff$$

$$r_1 \neq 0, \; r_2 \neq 0 \quad e \quad r_1 \neq r_2.$$

O que de fato é verdade, por hipótese. Sendo assim, o sistema sempre possuí solução única. Por indução sobre n, será demonstrado que $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ e $n = 2$ a afirmativa é verdadeira, pois a solução foi construída dessa forma, de modo que é necessário encontrar C_1 e C_2 resolvendo o sistema.

Suponha que a afirmação também é válida para os naturais n e $n + 1$. Ou seja

$$a_{n+1} = C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1} \quad e \quad a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &+ px_{n+1} + qx_n = 0 \iff \\
a_{n+2} &= -px_{n+1} - qx_n \iff \\
a_{n+2} &= -p(C_1r_1^{n+1} + C_2r_2^{n+1}) - q(C_1r_1^n + C_2r_2^n) \iff \\
a_{n+2} &= C_1r_1^n(-pr_1 - q) + C_2r_2^n(-pr_2 - q) \iff \\
a_{n+2} &= C_1r_1^n \cdot r_1^2 + C_2r_2^n \cdot r_2^2 \iff \\
a_{n+2} &= C_1r_1^{n+2} + C_2r_2^{n+2}.
\end{aligned}$$

Pois, por hipótese, como r_1 e r_2 são raízes da equação característica segue que $r^2+pr+q = 0$ e $r^2 = -pr - q$.
Logo a afirmação também é válida para $n+2$. Portanto, por indução segue que:

$$a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Com isso pode-se afirmar que a solução encontrada no **Exemplo 12 é única**. Mas, de que maneira, consegue-se determinar esses valores C_1 e C_2? Eles dependem das condições iniciais da recorrência, no caso das recorrências de 2ª ordem se faz necessária duas condições iniciais. Vamos exemplificar isto agora, resolvendo um problema muito famoso, a recorrência linear relacionada com a **Sequência de Fibonacci**.

Exemplo 13 ***(Sequência de Fibonacci)*** *Determine o número de Fibonacci F_n definido por*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ com \quad F_0 = 0 \quad e \quad F_1 = 1.$$

Inicialmente, note que

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0.$$

Desse modo, a equação característica relacionada a essa recorrência é

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Resolvendo-a

$$= \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2 \cdot 1} \Rightarrow r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad e \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Então, pelo Teorema 3

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Utilizando as condições iniciais $F_0 = 0$ *e* $F_1 = 1$*, obtemos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} C_0 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0 \\ C_0 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 + C_1 = 0 \\ C_0 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema linear, temos

$$\begin{cases} -C_0 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \\ C_0 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_1 \cdot \left(\frac{-1-\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \Rightarrow C_1 \cdot \left(\frac{-2\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Logo,

$$C_0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_0 - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow C_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Portanto, concluímos que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Observação 7 *Um questionamento que pode surgir por parte do leitor, é o porque utilizar* $F_0 = 0$ *como primeiro termo e não o* $F_1 = 1$*, como é de costume na sequência de Fibonacci. A verdade é que para encontrar a solução é conveniente utilizar* $F_0 = 0$*, para evitar que o sistema tenha uma equação de grau 2, facilitando assim sua resolução. Além disso, cabe ressaltar que utilizar* $F_0 = 0$ *em nada muda o comportamento da sequência.*

Vamos explorar o que ocorre quando as raízes da equação característica são números complexos, ou seja, se $\Delta < 0$. Mas antes disso, alguns conceitos importantes devem ser definidos, como a forma algébrica e a trigonométrica de um número complexo, o seu módulo e conjugado, a operação de potência (1ª fórmula de Moivre), esses resultados contribuirão para a plena compreensão da solução complexa da recorrência de segunda ordem.

Definição 4 ***(Forma algébrica)*** *Todo número complexo z pode ser escrito de maneira única na forma*

$$z = a + bi \ (a, b \in R \ e \ i^2 = -1).$$

Definição 5 ***(Conjugado)*** *O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é o número $\bar{z} = a - bi$.*

Definição 6 ***(Módulo)*** *Dado um número complexo $z = a + bi$, chama-se módulo de z e indica-se por ρ o número real positivo ou nulo dado por*

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Definição 7 ***(Forma trigonométrica)*** *A forma trigonométrica (ou forma polar) de um número complexo $z = a + bi$, é dada por*

$$z = \rho \cdot (cos \ \theta + i \cdot sen \ \theta).$$

Onde o ângulo θ é chamado de argumento de z $(0 \leq \theta < 2\pi)$.

Teorema 4 ***(Primeira Fórmula de Moivre)*** *Dado o número complexo $z = \rho \cdot (cos \ \theta + i \cdot sen \ \theta)$, não nulo, e $n \in \mathbb{Z}$, a potência z^n é dada por*

$$z^n = \rho^n \cdot (cos \ n\theta + i \cdot sen \ n\theta).$$

Teorema 5 ***(Raízes conjugadas)*** *Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, então o complexo conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.*

Os Teoremas 4 e 5 não serão demonstrados neste trabalho, pois nosso objetivo é apenas utiliza-los para resolver recorrências lineares de segunda ordem, porém suas demonstrações podem ser consultadas em [20].

O Teorema 5, nos dá um resultado interessante, sempre que as raízes da equação característica forem complexas, elas serão conjugadas. Ou seja, se $r_1 = a + bi$ for raiz de $r^2 + pr + q = 0 \Rightarrow r_2 = a - bi$ será a outra raiz da equação, em particular, como a equação característica é de grau 2, significa que todas as raízes desse polinômio são complexas e conjugadas.

Observação 8 *No conjunto dos números complexos i é chamado de unidade imaginária, tal que*

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}.$$

Porém, em matemática financeira é comum chamarmos i de taxa percentual. Como este trabalho está diretamente ligado a matemática financeira, cabe ressaltar que i será a unidade imaginária apenas quando tratarmos de números complexos, no mais, será a taxa percentual.

Por fim, com todas as definições e teoremas que nos dão base em relação aos números complexos, finalmente será enunciado o corolário que mostra a forma de escrever a solução da recorrência de segunda ordem, quando as raízes da recorrência forem números complexos.

Corolário 1 *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = \rho^n[C_1 cos\ n\theta + C_2 sen\ n\theta]$.*

Demonstração: Seja $r_1 = a + bi, a, b \in R$ raiz da equação $r^2 + pr + q = 0$, logo pelo Teorema 5, $r_2 = a - bi$ também será raiz da equação. Escrevendo tais números na forma trigonométrica, obtemos:

$$r_1 = \rho \cdot (cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta) \qquad e \qquad r_2 = \rho \cdot (cos\ \theta - i \cdot sen\ \theta).$$

Assim, pelo Teorema 3 como $r_1 \neq r_2$ segue que a solução geral da recorrência é da forma

$$a_n = K_1 r_1^n + K_2 r_2^n.$$

com K_1 e K_2 constantes (apenas mudamos as letras das constantes de "C"para "K"). Pela 1ª fórmula de Moivre, temos que

$$r_1^n = \rho^n \cdot (cos\ n\theta + i \cdot sen\ n\theta) \qquad e \qquad r_2^n = \rho^n \cdot (cos\ n\theta - i \cdot sen\ n\theta).$$

Substituindo r_1^n e r_2^n na solução geral:

$$\begin{aligned} a_n &= K_1 \cdot \rho^n \cdot (cos\ n\theta + i \cdot sen\ n\theta) + K_2 \cdot \rho^n \cdot (cos\ n\theta - i \cdot sen\ n\theta), \\ &= \rho^n[(K_1 + K_2) cos\ n\theta + i(K_1 - K_2) sen\ n\theta]. \end{aligned}$$

Como i, K_1 e K_2 são constantes, segue que,

$$a_n = \rho^n[C_1 cos\ n\theta + C_2 sen\ n\theta],$$

onde $C_1 = K_1 + K_2$ e $C_2 = i(K_1 - K_2)$. ■

Exemplo 14 *Determine a solução geral da recorrência* $x_{n+2} - 2\sqrt{3}x_{n+1} + 4x_n = 0$.

Note que a equação característica relacionada a recorrência é

$$r^2 - 2\sqrt{3}r + 4 = 0.$$

Resolvendo a equação $r^2 - 2\sqrt{3}r + 4 = 0$, *obtemos*

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow r = \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 4}}{2} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{4 \cdot 3 - 16}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} \Rightarrow r = \sqrt{3} \pm i \Rightarrow r_1 = \sqrt{3} + i \quad e \quad r_2 = \sqrt{3} - i.$$

Observe que r_1 *e* r_2 *estão na forma algébrica, nosso objetivo agora será converte-los para a forma trigonométrica. Para tal, vamos encontrar o valor de* ρ *(módulo do número complexo) e o valor de* θ *(argumento). Utilizando* r_1 *como referência, pois como* r_2 *é o seu conjugado a forma trigonométrica será análogo, mudando apenas um sinal da segunda parcela. Por definição,*

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{3 + 1} \Rightarrow \rho = \sqrt{4} \Rightarrow \rho = 2.$$

Por outro lado, note que:

$$\begin{aligned} r = a + bi &= \rho \cdot (cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta) \Rightarrow \\ \sqrt{3} + 1 \cdot i &= 2 \cdot (cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta) \Rightarrow \\ \frac{\sqrt{3} + 1 \cdot i}{2} &= cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta. \end{aligned}$$

Comparando parte real com parte real, e parte imaginária com parte imaginária

$$cos\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad e \qquad sen\ \theta = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\theta = \frac{\pi}{6}$. *Dessa forma,* $r_1 = 2 \cdot \left(cos\ \frac{\pi}{6} + i \cdot sen\ \frac{\pi}{6}\right)$ *e* $r_2 = 2 \cdot \left(cos\ \frac{\pi}{6} - i \cdot sen\ \frac{\pi}{6}\right)$.

Pelo Corolário 1 a solução geral é da forma

$$a_n = \rho^n[C_1 cos\ n\theta + C_2 sen\ n\theta].$$

Portanto,

$$a_n = 2^n\left[C_1 cos\ \frac{n\pi}{6} + C_2 sen\ \frac{n\pi}{6}\right].$$

Com isso, foi esgotados os dois primeiros casos, quando as raízes reais e distintas e quando as raízes são complexas. Resta estudar o que ocorre, quando as raízes são iguais, ou seja, $r_1 = r_2$. Os dois próximos teoremas irão resolver esse problema, assim como no caso onde as raízes eram distintas o primeiro teorema a seguir, nos mostrará a existência de uma família de soluções para a recorrência quando $r_1 = r_2 = r$, já o segundo teorema, mostrará a unicidade, ou seja, que esta família de soluções é única, o que quer dizer que todas as soluções pertencem a essa família de soluções.

Observação 9 *Observe que quando as raízes da equação característica são complexas, elas também são distintas. Logo os Teoremas 2 e 3 também podem ser utilizados.*

Observação 10 *Se as raízes da equação* $r^2 + pr + q = 0$ *são iguais, ou seja,* $r_1 = r_2 = r$, *temos que* $r = -\dfrac{p}{2}$, *pois*

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Logo as somas das raízes $r_1 + r_2$ *seria da forma:*

$$r_1 + r_2 = \left(\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right) + \left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right).$$

Mas, por hipótese, $r_1 = r_2 = r$, *logo*

$$r + r = \left(\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right) + \left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right) \Rightarrow 2r = \frac{-2p}{2} \Rightarrow r = -\frac{p}{2}.$$

Este resultado é importante para os Teoremas 6 e 7.

Teorema 6 *Se as raízes de* $r^2 + pr + q = 0$ *são iguais,* $r_1 = r_2 = r$, *então,* $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ *é solução da recorrência* $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$, *quaisquer que sejam os valores das constantes* C_1 *e* C_2.

Demonstração: Note que se $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$, então

$$a_{n+2} = C_1 r^{n+2} + C_2 (n+2) r^{n+2} \quad e \quad a_{n+1} = C_1 r^{n+1} + C_2 (n+1) r^{n+1}.$$

Substituindo na recorrência, temos

$$\begin{aligned} x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n &= C_1 r^{n+2} + C_2 (n+2) r^{n+2} + p(C_1 r^{n+1} + C_2 (n+1) r^{n+1}) + q(C_1 r^n + C_2 n r^n), \\ &= C_1 r^n (r^2 + pr + q) + C_2 n r^n (r^2 + pr + q) + C_2 n r^n (2r^2 + pr). \end{aligned}$$

Mas, por hipótese, $r^2 + pr + q = 0$, pois r é raiz da equação característica. Além disso, pela Observação 10, $r = -\dfrac{p}{2}$, logo

$$\begin{aligned}
x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= C_1 r^n \cdot 0 + C_2 n r^n \cdot 0 + C_2 n r^n \left[2\left(-\frac{p}{2} \right)^2 + p \cdot \left(-\frac{p}{2} \right) \right], \\
&= 2\left(\frac{p^2}{4} \right) - \frac{p^2}{2}, \\
&= \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{2}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. ■

Teorema 7 ***(Unicidade)*** *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração: De forma análoga, à demonstração do Teorema 3. Seja a_n uma solução qualquer da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinando os valores C_1 e C_2 em função das raízes da equação característica:

$$\begin{cases} C_1 r + C_2 \cdot 1 \cdot r = a_1, \\ C_1 r^2 + C_2 \cdot 2 \cdot r^2 = a_2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, lembre-se que $q \neq 0 \Rightarrow r \neq 0$, pois caso contrário, a recorrência seria de primeira ordem. Logo,

$$det \begin{pmatrix} r & r \\ r^2 & 2r^2 \end{pmatrix} \neq 0 \iff$$

$$r \cdot 2r^2 - r^2 \cdot r \neq 0 \iff$$

$$2r^3 - r^3 \neq 0 \iff$$

$$r^3 \neq 0 \iff$$

$$r \neq 0.$$

O que por hipótese é verdade. Sendo assim, o sistema sempre possuí solução única. Por indução sobre n, será demonstrado que $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ e $n = 2$ a afirmativa é verdadeira, pois a solução foi construída dessa forma, de modo que é necessário encontrar C_1 e C_2 resolvendo o sistema.

Suponha que a afirmação também é válida para os naturais n e $n+1$. Ou seja

$$a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n \quad e \quad a_{n+1} = C_1 r^{n+1} + C_2(n+1)r^{n+1}.$$

Desse modo

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &+ px_{n+1} + qx_n = 0 \iff \\
a_{n+2} &= -px_{n+1} - qx_n \iff \\
a_{n+2} &= -p(C_1 r^{n+1} + C_2(n+1)r^{n+1}) - q(C_1 r^n + C_2 n r^n) \iff \\
a_{n+2} &= C_1 r^n(-pr - q) + C_2 r^n(n(-pr - q) - pr) \iff \\
a_{n+2} &= C_1 r^n \cdot r^2 + C_2 r^n(n \cdot r^2 + \left(-\frac{p}{2}\right) \cdot 2r) \iff \\
a_{n+2} &= C_1 r^{n+2} + C_2 r^n(n \cdot r^2 + r \cdot 2r) \iff \\
a_{n+2} &= C_1 r^{n+2} + C_2 r^n(n+2) \cdot r^2 \iff \\
a_{n+2} &= C_1 r^{n+2} + C_2(n+2)r^{n+2}.
\end{aligned}$$

Pois, por hipótese, como r é raiz da equação característica segue que $r^2 = -pr - q$ e pela Observação 10, $r = -\dfrac{p}{2}$.

Logo a afirmação também é válida para $n+2$. Portanto, por indução segue que:

$$a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Exemplo 15 *Determine a solução geral da recorrência* $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$

Note que a equação característica relacionada a recorrência é

$$r^2 - 6r + 9 = 0.$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow r = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9}}{2} \Rightarrow r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} \Rightarrow r = \frac{6}{2} \Rightarrow r = 3.$$

Logo, $r_1 = r_2 = r = 3$ *e pelo Teorema 7 a solução geral da recorrência é*

$$a_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n.$$

Teorema 8 *Se a_n é uma solução da recorrência não homogênea*

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$$

então toda solução da recorrência é da forma $x_n = a_n + y_n$, onde y_n é uma solução da recorrência homogênea $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

Demonstração: Seja x_n uma solução da recorrência. Dessa forma, por hipótese

$$\begin{cases} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n), \\ a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n). \end{cases}$$

Subtraindo as equações, obtemos

$$\begin{aligned} (x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n) - (a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) &= f(n) - f(n), \\ (x_{n+2} - a_{n+2}) + p(x_{n+1} - a_{n+1}) + q(x_n - a_n) &= 0. \end{aligned}$$

Tomando $y_n = x_n - a_n$, segue que $y_{n+2} = x_{n+2} - a_{n+2}$ e $y_{n+1} = x_{n+1} - a_{n+1}$. Logo

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

Que é uma recorrência homogênea, a qual sabemos resolver. Além disso, como tomamos $y_n = x_n - a_n$, segue que

$$x_n = a_n + y_n.$$

Onde y_n é solução da recorrência homogênea. ■

Mas, na prática o que isso significa? E como esse teorema pode ser útil? Para encontrarmos a solução geral de uma recorrência não homogênea de segunda ordem, inicialmente deve-se encontrar a **solução geral** da recorrência homogênea relacionada, ou seja, y_n que pode ser encontrada utilizando o Teorema 3, Corolário 1 ou Teorema 7 a depender se do tipo de raízes da equação característica. Após isso, "chutar" soluções particulares para a recorrência não homogênea, mas esses "chutes" devem ser feitos de forma consciente. Por exemplo, se $f(n)$ for um polinômio de grau 2, o que faz mais sentido? Supor que seja um polinômio de grau 2, porém de forma genérica, ou seja, $An^2 + Bn + C$, onde A, B, C são constantes que devem ser determinadas (Veja Tabela 2.1).

Este modo de resolver recorrências não homogêneas de segunda ordem, é bem semelhante (para não dizer igual), ao **Método de Coeficientes a Determinar (ou Indeterminados)** utilizado para resolver **Equações Diferenciais** de ordem maior ou igual a 2 com coeficientes constantes. Caso seja de interesse do leitor, o mesmo é convidado a estudar com maior riqueza de detalhes em [5] e [32], por aqui utilizaremos apenas uma tabela semelhante de possíveis tentativas de soluções particulares da recorrência não homogênea.

$f(n)$	Forma de a_n
1 (ou qualquer constante)	A
$k_1x + k_0$ (polinômio do 1ºgrau)	$Ax + B$
$k_2x^2 + k_1x + k_0$ (polinômio do 2ºgrau)	$Ax^2 + Bx + C$
$\vdots$	$\vdots$
$k_nx^n + \cdots + k_1x + k_0$ (polinômio de grau n)	$A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0$
k^n ($k \in R$, exponencial)	$A \cdot k^n$
$sen\ n\theta$	$A \cdot cos\ n\theta + B \cdot sen\ n\theta$
$cos\ n\theta$	$A \cdot cos\ n\theta + B \cdot sen\ n\theta$
$(k_nx^n + \cdots + k_1x + k_0) + k^n$	$(A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0) + A_{n+1}k^n$
$(k_1x + k_0)k^n$	$(Ax + B)k^n$
$(k_nx^n + \cdots + k_1x + k_0)k^n$	$(A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0)k^n$
$k^n \cdot sen\ n\theta$	$A \cdot k^n cos\ n\theta + B \cdot k^n sen\ n\theta$
$k^n \cdot cos\ n\theta$	$A \cdot k^n cos\ n\theta + B \cdot k^n sen\ n\theta$

Tabela 2.1: Tentativas de Soluções Particulares

A lista poderia continuar, com os casos onde há multiplicação e ou soma entre possíveis $f(n)$ citados, mas o padrão em si de possíveis palpites de soluções particulares de modo geral são esses, um exemplo numérico será feito para facilitar a compreensão.

Exemplo 16 *Encontre a solução geral da recorrência*

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2 + 6 \cdot 5^n.$$

É necessário encontrar duas parcelas, uma referente a recorrência homogênea relacionada e a outra uma solução qualquer da recorrência não homogênea (solução particular). Primeiramente, será encontrada a que é teoricamente mais simples, ou seja, a solução da recorrência homogênea.
Note que, a equação característica da recorrência homogênea relacionada é

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Resolvendo-a

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow r = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2} \Rightarrow r = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow r = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 = 2 \quad e \quad r_2 = 3.$$

Logo, pelo Teorema 3, segue que a solução da recorrência homogênea é

$$y_n = C_1 2^n + C_2 3^n.$$

Resta agora, encontrar uma solução da recorrência não homogênea. Observe que $f(n) = 2 + 4 \cdot 5^n$ *logo pela Tabela 2.1, a primeira tentativa de solução particular deve ser na forma*

$$a_n = A + B \cdot 5^n.$$

E, se assim for:

$$a_{n+2} = A + B \cdot 5^{n+2} \qquad e \qquad a_{n+1} = A + B \cdot 5^{n+1}.$$

Substituindo na recorrência:

$$(A + B \cdot 5^{n+2}) - 5(A + B \cdot 5^{n+1}) + 6(A + B \cdot 5^n) = 2 + 6 \cdot 5^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A + B \cdot 25 \cdot 5^n) - 5(A + B \cdot 5 \cdot 5^n) + 6(A + B \cdot 5^n) = 2 + 6 \cdot 5^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - 5A + 6A) + (25B - 25B + 6B)5^n = 2 + 6 \cdot 5^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A + 6B \cdot 5^n = 2 + 6 \cdot 5^n,$$

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ 6B = 6 \end{cases} \Rightarrow \quad A = 1 \quad e \quad B = 1.$$

Logo, $a_n = 1 + 1 \cdot 5^n \Rightarrow a_n = 1 + 5^n$, *ou seja, esta de fato é uma solução particular da recorrência não homogênea.*

Portanto, pelo Teorema 8, a solução geral da recorrência é

$$x_n = 1 + 5^n + C_1 2^n + C_2 3^n.$$

Observação 11 *Um questionamento que pode surgir por parte do leitor é se sempre a solução particular é da forma sugerida na Tabela 2.1, e a resposta é não, porém ainda nesses casos ela continua sendo útil. Quando a solução* y_n, *que pode ser encontrada resolvendo a equação característica da recorrência homogênea relacionada, possui em uma* *de suas parcelas algum termo semelhante aos de $f(n)$, devemos usar a tentativa de solução da tabela 2.1 e multiplicar esse parcela semelhante por n, assim como é feito quando as raízes da equação característica são iguais ($a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$). Mas e se ainda assim, y_n possuir outra parcela com algum termo semelhante a $f(n)$? Se isso ocorrer, devemos multiplicar por n^2, e assim por diante. Os casos de recorrência de segunda ordem, se esgotam com n^2, pois y_n possui apenas duas parcelas, mas em recorrências de ordem superior esse recurso pode ser necessário, ou seja, multiplicar algum termo semelhante por n^3, n^4, etc.*

Para finalizar esse capítulo, e com objetivo de exemplificar o que foi comentado na Observação 11, o item **(b)** de um problema proposto no ENQ (Exame Nacional de Qualificação - PROFMAT), será resolvido.

Exemplo 17 ***(ENQ - 2019.1)*** *Resolva a seguinte recorrência:*
(b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4an = 2^n,\ a_0 = -1,\ a_1 = 6.$
Inicialmente, resolve-se a recorrência homogênea $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$, para tal é necessário encontrar as raízes da equação característica $r^2 - 4r + 4 = 0$. Dessa forma

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} \Rightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} \Rightarrow r = \frac{4}{2} \Rightarrow r = 2.$$

Logo, a equação característica possui duas raízes iguais, ou seja, $r_1 = r_2 = r$, pelo Teorema 7 a solução da recorrência homogênea é da forma

$$y_n = C_1 r^n + C_2 n r^n \Rightarrow y_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n.$$

Agora, note que a parte não homogênea corresponde a $f(n) = 2^n$, logo pela Tabela 2.1 a primeira tentativa seria $t_n = A2^n$, mas note que y_n possui em uma das suas parcelas justamente esse termo. Dessa forma, devemos multiplicar essa tentativa por n, ou seja, $t_n = An2^n$, mas novamente, essa segunda tentativa agora faz parte da outra parcela, logo é preciso multiplicar a sugestão de solução da Tabela 2.1 por n^2. Por fim, $t_n = An^2 2^n$ será a tentativa. Então

$$t_{n+1} = A(n+1)^2 2^{n+1} \Rightarrow t_{n+1} = A(n^2 + 2n + 1)2 \cdot 2^n \Rightarrow t_{n+1} = (2An^2 + 4An + 2A)2^n,$$

$$t_{n+2} = A(n+2)^2 2^{n+2} \Rightarrow t_{n+2} = A(n^2 + 4n + 4)2^2 \cdot 2^n \Rightarrow t_{n+2} = (4An^2 + 16An + 16A)2^n.$$

Substituindo na recorrência original, obtém-se

$$(4An^2 + 16An + 16A)2^n - 4[(2An^2 + 4An + 2A)2^n] + 4An^2 2^n = 2^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(4A - 8A + 4A)n^2 + (16A - 16A)n + (16A - 8A)]2^n = 2^n \Rightarrow$$

$$8A2^n = 2^n \Rightarrow 8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8}.$$

Logo, $t_n = \frac{1}{8} \cdot n^2 2^n$*. Pelo Teorema 8* $a_n = t_n + y_n$*, ou seja,*

$$a_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + \frac{1}{8} \cdot n^2 2^n.$$

Além disso, por hipótese $a_0 = -1$ *e* $a_1 = 6$*, o que nos permite encontrar os valores de* C_1 *e* C_2*, pois*

$$\begin{cases} a_0 = C_1 2^0 + C_2 0 \cdot 2^0 + \frac{1}{8} \cdot 0^2 2^0 \\ a_1 = C_1 2^1 + C_2 1 \cdot 2^1 + \frac{1}{8} \cdot 1^2 2^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = C_1 \cdot 1 \\ 6 = 2C_1 + 2C_2 + \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 2, \end{cases}$$

$$C_1 = -1.$$

Substituindo C_1 *na equação:*

$$6 = 2 \cdot (-1) + 2C_2 + \frac{1}{4} \Rightarrow 6 = -2 + 2C_2 + \frac{1}{4} \Rightarrow 6 + 2 - \frac{1}{4} = 2C_2 \Rightarrow \frac{32 - 1}{4} = 2C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{31}{8}.$$

Portanto, a solução geral da recorrência é

$$a_n = -2^n + \frac{31}{8} \cdot n \cdot 2^n + \frac{1}{8} \cdot n^2 \cdot 2^n.$$

Capítulo 3

Relação entre Recorrências e Matemática Financeira no Ensino Médio

Neste capítulo será feita uma breve análise da Educação Financeira com base nos dados apresentados pelo PISA (Programme for International Student Assessment - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) e pelo CNC (Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo), bem como apresentação do conteúdo da BNCC sobre Educação/Matemática Financeira a partir da exposição das habilidades que devem ser trabalhadas na Educação Básica. Isso se faz necessário uma vez que toda educação é formulada a partir desse documento e para que o professor tenha clareza de como aplicar o conteúdo desse trabalho em sala de aula.

Em seguida, será apresentada a teoria, a dedução da fórmula de juros compostos, por meio dos métodos de recorrências de primeira ordem, estudados no Capítulo 2. Após isso, será feito uma discussão a respeito de Sistemas de Amortização, em particular, de dois tipos de sistemas, o Sistema SAC e o Price. Cabe ressaltar que tais discussões são aplicáveis em sala de aula, e essenciais, pois o juro composto é o juro do dia a dia de modo geral, já os sistemas de amortização são aplicáveis em financiamento de imóveis e carros, por exemplo. Para a elaboração deste capítulo, foram utilizadas as referências [1, 2, 3, 6, 13, 16, 21, 22, 24, 26, 27, 29, 30].

3.1 Educação Financeira na BNCC

É indiscutível que a matemática, sobretudo a matemática financeira, faz parte do cotidiano de todo cidadão. Mesmo aqueles que nunca tiveram a oportunidade de estudar precisam de conhecimentos básicos para o seu dia a dia. O exemplo mais simples que podemos destacar é a realização de compras e até mesmo o recebimento de uma prestação de serviço. Por isso, é importante que esse conceito seja explorado de uma forma mais eficaz desde os anos iniciais de ensino, partindo de situações simples até situações que envolvam conceitos mais aprimorados da matemática.

O desenvolvimento econômico de um país depende, do nível de instrução de seus habitantes em relação à educação financeira. Quanto mais conhecimento prático se tem sobre finanças, mais habilidades se desenvolve para tomadas de decisões nessa área. De acordo com a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), a educação financeira é:

> [...] o processo pelo qual consumidores/investidores financeiros aprimoram sua compreensão sobre produtos, conceitos e riscos financeiros e, por meio de informação, instrução e/ou aconselhamento objetivo, desenvolvem as habilidades e a confiança para se tornarem mais conscientes de riscos e oportunidades financeiras, a fazer escolhas informadas, a saber onde buscar ajuda, e a tomar outras medidas efetivas para melhorar seu bem-estar financeiro. (OCDE, 2005, p.5)

O PISA (Programme for International Student Assessment - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) é um sistema de avaliação realizado com estudantes de 15 anos de diversos países pelo mundo. O principal objetivo desse programa é medir a qualidade da educação dessas nações, comparando-os entre eles, com base em três domínios: leitura, matemática e ciências. Além dos domínios básicos, há outros que são opcionais, sendo eles conhecidos como inovadores, entre estes está o letramento financeiro, que engloba: dinheiro e transações financeiras, planejamento e manejo das finanças, risco e recompensa e aplicação e entendimento de conceitos.

Em 2015, o Brasil participou pela primeira vez dessa avaliação de letramento financeiro, e ficou na última posição entre os 15 países com uma nota de 393, sendo o esperado pelo programa uma nota entre 400 e 600 pontos. Em 2018, participou novamente nesse mesmo domínio, obtendo a nota de 420, o que pode ser considerado um avanço, mas ainda distante da média dos países avaliados (505), ficando assim na 17º posição em relação aos 20 países avaliados. Esses dados nos mostram que o país tem um longo caminho a ser percorrido para melhorar no letramento financeiro.

Em abril de 2023, em uma pesquisa divulgada pela Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC) mostrou que 78,3% das famílias brasileiras estavam endividadas e 29,1% inadimplentes (dívidas em atraso). O endividamento por si só não é algo totalmente negativo, desde que seja de forma planejada e consciente, pois caso seja exagerado irá gerar atrasos, e como consequência incidência de juros e por fim pode ocasionar a inadimplência, o que prejudicará tanto o indivíduo como a economia de modo geral. Logo, a falta de planejamento financeiro irá impactar diretamente na qualidade de vida da família, podendo gerar conflitos familiares e em alguns casos perdas de patrimônio.

Diante desse cenário, um questionamento que surge é, será que há alguma relação entre os índices divulgados pelo PISA e pela CNC? Embora não seja possível afirmar algo baseado apenas nesses dados, pois há muitas variáveis envolvidas, os baixos índices de educação financeira evidenciados no PISA, indicam que os brasileiros, de modo geral, não dominam conceitos financeiros básicos, entre eles alguns relacionados com juros, o endividamento e a inadimplência.

Assim, diante dessas informações, podemos concluir que a educação financeira é extremamente relevante para a vida, e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), corrobora com isso ao tratá-la como um dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs). Apesar da BNCC não ser o currículo propriamente dito, ela norteia todos os currículos do país, definindo quais são as aprendizagens essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica.

> Entendemos que tratar os TCTs de forma contextualizada significa afirmar que suas abordagens devem acontecer de forma transversal às diversas áreas do conhecimento, que o ensino seja um ponto de encontro e de diálogo entre os diversos campos de saberes e das diferentes ciências e que as discussões contribuam para a realidade social dos estudantes. (DE MELO, VIEIRA, AZEVEDO, PESSOA, 2021, p.2-3)

Por fim, segue algumas habilidades que tratam da Educação/Matemática Financeira na BNCC [6], com suas devidas unidades temáticas e objeto do conhecimento para o Ensino Fundamental e com suas competências para o Ensino Médio:

1. Anos iniciais do Ensino Fundamental:

Unidade Temática: Grandezas e medidas.

Objeto de conhecimento: Sistema monetário brasileiro: reconhecimento de cédulas e moedas.

(EF01MA19) Reconhecer e relacionar valores de moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações simples do cotidiano do estudante.

Unidade Temática: Grandezas e medidas.

Objeto de conhecimento: Sistema monetário brasileiro: reconhecimento de cédulas e moedas e equivalência de valores.

(EF02MA20) Estabelecer a equivalência de valores entre moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações cotidianas.

Unidade Temática: Grandezas e medidas.

Objeto de conhecimento: Sistema monetário brasileiro: estabelecimento de equivalências de um mesmo valor na utilização de diferentes cédulas e moedas.

(EF03MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam a comparação e a equivalência de valores monetários do sistema brasileiro em situações de compra, venda e troca.

Unidade Temática: Números.

Objeto de conhecimento: Números racionais: representação decimal para escrever valores do sistema monetário brasileiro.

(EF04MA10) Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.

Unidade Temática: Grandezas e medidas.

Objeto de conhecimento: Problemas utilizando o sistema monetário brasileiro

(EF04MA25) Resolver e elaborar problemas que envolvam situações de compra e venda e formas de pagamento, utilizando termos como troco e desconto, enfatizando o consumo ético, consciente e responsável.

Unidade Temática: Números.

Objeto de conhecimento: Cálculo de porcentagens e representação fracionária.

(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

2. Anos finais do Ensino Fundamental:

Unidade Temática: Números.

Objeto de conhecimento: Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três".

(**EF06MA13**) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Unidade Temática: Probabilidade e estatística.

Objeto de conhecimento: Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas.

(EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.

Unidade Temática: Números.

Objeto de conhecimento: Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples.

(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.

Unidade Temática: Números.

Objeto de conhecimento: Porcentagens.

(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.

Unidade Temática: Números.

Objeto de conhecimento: Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos.

(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

3. Ensino Médio:

Competência específica 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.

Habilidades:

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Competência específica 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Habilidades:

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidades:

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

Competência específica 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Com foco nas habilidades de Matemática Financeira para o Ensino Médio, nas próximas seções veremos Juros Compostos e os Sistemas de Amortização Price e SAC.

3.2 Juros Compostos como Recorrência de Primeira Ordem

Imagine a seguinte situação, uma instituição financeira, com objetivo em multiplicar seu capital, disponibiliza uma linha de crédito para seus clientes, como por exemplo, o empréstimo. Desse modo, ela cede a alguém um capital C por um período de tempo t, e espera que após esse período, receba de volta o valor emprestado, somado de uma compensação financeira em dinheiro J, a qual chamamos de juro. O pagamento total desse dívida, ou seja, $C + J$ chamaremos de montante, e naturalmente será representado por M. Resta definir, a taxa de juros que é representado pela letra i, e é uma porcentagem do capital. Cabe ressaltar que ela deve estar relacionada a uma unidade de tempo: ao dia (a.a), ao mês (a,m), ao ano (a.a), etc. Para facilitar a compreensão, observe o exemplo a seguir.

Exemplo 18 *João tomou um empréstimo de R\$ 10.000,00 (capital) de um banco, ele fez o compromisso de quitar essa dívida após um mês. A taxa de juros oferecida por esse banco é de 3% ao mês. Logo, como o juro é 3% do capital emprestado, e* $3\% = \dfrac{3}{100} = 0,03$

segue que:

$$J = Ci \Rightarrow J = 3\% \cdot 10.000 \Rightarrow J = 0,03 \cdot 10.000 \Rightarrow J = 300.$$

Com isso, o montante M à receber pelo banco após 1 mês, é de

$$M = C + J \Rightarrow M = 1.000 + 30 \Rightarrow M = 10.300.$$

Suponha que João não conseguiu honrar seu compromisso com o banco no prazo previamente estipulado, e precisou renegociar sua dívida. Ficou combinado que taxa de juros seria a mesma, mas agora pagaria após 4 meses, em relação ao data que efetuou o empréstimo. Note que agora a dívida não é mais de R$10.000,00, mas de R$10.300,00, pois este é valor que deveria ser pago. então esse caso, o capital será o montante encontrado no período anterior. Assim:

$$J = Ci \Rightarrow J = 3\% \cdot 10.300 \Rightarrow J = 0,03 \cdot 10.300 \Rightarrow J = 309.$$

Para não gerar qualquer tipo de dúvida, considere M_t o montante no período t. Logo o montante M_2 a ser pago após 2 meses deve ser:

$$M_2 = C + J \Rightarrow M_2 = 1.030 + 30,90 \Rightarrow M_2 = 10.609.$$

Considerando tal notação, temos que $M_1 = 10.300$.

Para facilitar a visualização da dívida de João, colocaremos esses dados na Tabela 3.1, até o quarto período (mês).

Período	Capital Inicial	Juros no período	Montante a ser pago
1º mês	10.000,00	$0,03 \cdot 10.000 = 300$	$M_1 = 10.000 + 300 = 10.300,00$
2º mês	10.300,00	$0,03 \cdot 10.300 = 309$	$M_2 = 10.300 + 309 = 10.609,00$
3º mês	10.609,00	$0,03 \cdot 10.609 = 318,27$	$M_3 = 10.609 + 318,27 = 10.927,27$
4º mês	10.927,27	$0,03 \cdot 10.927,27 = 327,82$	$M_4 = 10.927,27 + 327,82 = 11.255,09$

Tabela 3.1: Juros Compostos

Observe que, resolvendo o problema dessa forma, dá um certo trabalho, pois para encontrar o montante após 4 meses tivemos que descobrir todos os montantes anteriores e os juros de cada período. Agora imagine se a dívida se estender por um período muito superior a 4 meses, como por exemplo 20 anos, utilizando essa estratégia seria extremamente trabalhoso e demorado. Logo, devemos encontrar uma maneira mais simples de fazer isso. Pela Tabela 3.1, podemos tirar algumas conclusões:

$$M_1 = C + iC \Rightarrow M_1 = C(1+i),$$

$$M_2 = M_1 + iM_1 \Rightarrow M_2 = M_1(1+i),$$

$$M_3 = M_2 + iM_2 \Rightarrow M_3 = M_2(1+i),$$

$$M_4 = M_3 + iM_3 \Rightarrow M_4 = M_3(1+i).$$

Novamente, para ficar algo mais visual, colocaremos essas equações na Tabela 3.2:

Período	C. Inicial	Juros	Montante a ser pago
1º mês	C	$i \cdot C$	$M_1 = C + iC = C(1+i)$
2º mês	M_1	$i \cdot M_1$	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$
3º mês	M_2	$i \cdot M_2$	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$
4º mês	M_3	$i \cdot M_3$	$M_4 = M_3 + iM_3 = M_3(1+i) = C(1+i)^3(1+i) = C(1+i)^4$

Tabela 3.2: Juros Compostos 2

Generalizando as equações da Tabela 3.2 para o período t qualquer, podemos afirmar que esse padrão irá se repetir, a medida que o tempo aumentar, logo

$$M_t = M_{t-1}(1+i), \tag{3.1}$$

que é uma recorrência de primeira ordem homogênea. Assim, podemos utilizar os métodos já vistos previamente para resolvê-la e encontrar $M_t, \forall t \in \mathbb{N}$. Explicitando os termos da recorrência, obtemos:

$$M_2 = M_1(1+i),$$

$$M_3 = M_2(1+i),$$

$$\vdots$$

$$M_t = M_{t-1}(1-i).$$

Multiplicando as equações membro a membro

$$M_2 \cdot M_3 \cdot ... \cdot M_t = M_1 \cdot M_2 \cdot ... \cdot M_{t-1} \cdot (1+i)(1+i)\cdots(1+i).$$

Cancelando os termos semelhantes, concluímos que

$$M_t = M_1(1+i)^{t-1}. \tag{3.2}$$

Como temos a condição inicial que $M_1 = C(1+i)$, substituindo em (3.2) obtemos

$$M_t = C(1+i)(1+i)^{t-1},$$

$$M_t = C(1+i)^t, \qquad \forall t \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Portanto, para encontrar o montante em qualquer período, não é mais necessário calcular todos os termos anteriores, apenas ter informações como o capital inicial C, a taxa de juros i e o tempo t. A Equação 3.3 é a conhecida fórmula de **Juros Compostos**. No Capítulo 5, serão propostos problemas resolvidos que podem ser aplicados em sala de aula sobre a temática de Juros Compostos.

Observação 12 *Há outra maneira de calcular juro de um capital, que é chamado de **Juros Simples**, onde basicamente o juro é sempre o mesmo, independente do quanto o montante cresce com o tempo, ou seja, uma constante, esse tipo de juro é utilizado apenas em casos bem específicos, como em prazos pequenos (inferior a 1 período), por exemplo, se a taxa de juro é mensal e o atraso é inferior a 30 dias, contudo ele não será abordado neste trabalho.*

3.3 Sistemas de Amortização como Recorrência de Primeira Ordem

Nessa seção será estudado uma situação muito comum da vida adulta, e que provavelmente no mínimo, os estudantes pensarão a respeito num futuro próximo, quando deseja-se adquirir um bem de custo relativamente alto para a média da população, como por exemplo, motos, carros, terrenos, casas, apartamento, etc. De modo geral, busca-se empréstimos ou financiamentos em instituições financeiras para viabilizar esse objetivo ou necessidade. Porém, como essa transação é de alto custo, ela costuma ser paga em parcelas e periodicamente, ou seja, períodos de tempo constante, normalmente mensais. Desse modo, como trata-se de uma dívida de longo prazo, o juros adotado é o composto. Considere as seguintes variáveis:

D_t: Dívida no início do período t,

P_t: Valor da parcela paga no início do período t.

Neste caso específico, onde é de interesse do contratante liquidar a dívida após um período de tempo finito, o valor de cada parcela é constituído duas parte: a primeira é o juro calculado sobre o saldo devedor e o restante é abatido do capital. Assim, concluímos que a dívida pode ser expressa pela seguinte recorrência de primeira ordem não homogênea:

$$D_{t+1} = D_t + iD_t - P_t \Rightarrow D_{t+1} = (1+i)D_t - P_t, \tag{3.4}$$

onde i é a taxa de juros combinada a cada período, que como comentado anteriormente costuma ser mensal. Resolveremos essa recorrência de forma iterativa, explicitando os termos:

$$\begin{aligned}
D_1 &= (1+i)D_0 - P_0, \\
D_2 &= (1+i)D_1 - P_1 = (1+i)[(1+i)D_0 - P_0] - P_1 = (1+i)^2 D_0 - (1+i)P_0 - P_1, \\
&\vdots \\
D_{t+1} &= (1+i)D_t - P_t = (1+i)^{t+1}D_0 - (1+i)^t P_0 - \cdots - (1+i)P_{t-1} - P_t.
\end{aligned}$$

Colocando em notação de somatória, obtemos:

$$D_{t+1} = (1+i)^{t+1}D_0 - \sum_{i=0}^{t}(1+i)^{t-i}P_i. \tag{3.5}$$

Observe que pelo Teorema 8, a solução da recorrência não homogênea é composta por duas partes, a solução geral da recorrência homogênea, que neste caso é $(1+i)^{t+1}D_0$ e a solução particular $-\sum_{i=0}^{t}(1+i)^{t-i}P_i$.

É importante ressaltar, que a solução da Recorrência (3.4), dada pela Equação (3.5) é o caso mais geral possível, dentro das condições citadas. Porém, há diversos Sistemas de Amortização pelo mundo, com as mais diversas respectivas particularidades, formas de pagamentos, períodos constantes ou não, e essas especificidades irão gerar uma solução particular, os tipos mais comuns aqui no Brasil, são: Sistema Price e o Sistema de Amortização Constante (SAC). Comentaremos a seguir, a respeito de cada um de forma separada.

No Sistema Price, as parcelas são contantes, ou seja, $P_t = P$, independente do período. Logo a solução da recorrência dada pela Equação (3.5), torna-se

$$\begin{aligned}
D_{t+1} &= (1+i)^{t+1}D_0 - \sum_{i=0}^{t}(1+i)^{t-i}P \Rightarrow \\
&= (1+i)^{t+1}D_0 - P\sum_{i=0}^{t}(1+i)^{t-i}.
\end{aligned}$$

Daí, observe que o somatório $\sum_{i=0}^{t}(1+i)^{t-i}$ é uma progressão geométrica, pois

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{t}(1+i)^{t-i} &= (1+i)^{t}+(1+i)^{t-1}+\cdots+(1+i)+(1+i)^{0},\\ &= (1+i)^{t}+(1+i)^{t-1}+\cdots+(1+i)+1.\end{aligned}$$

Pela Proposição 2 temos que a soma dos $t+1$ primeiros termos dessa P.G, onde o primeiro termo $a_1 = 1$ e $q = (1+i)$ é dado por

$$\sum_{i=0}^{t}(1+i)^{t-i} = a_1\left(\frac{q^{t+1}-1}{q-1}\right) = \frac{(1+i)^{t+1}-1}{(1+i)-1} = \frac{(1+i)^{t+1}-1}{i}.$$

Substituindo na solução, obtemos

$$D_{t+1} = (1+i)^{t+1}D_0 - P\cdot\left(\frac{(1+i)^{t+1}-1}{i}\right).$$

Deste modo, note que podemos encontrar o valor de cada prestação. Suponhamos, que deseja-se quitar a dívida em um período T, isso significa que o valor de $D_T = 0$, assim, substituindo tal valor na solução, obtemos

$$0 = (1+i)^{T}D_0 - P\cdot\left(\frac{(1+i)^{T}-1}{i}\right) \Rightarrow P\cdot\left(\frac{(1+i)^{T}-1}{i}\right) = (1+i)^{T}D_0,$$

$$P = iD_0\frac{(1+i)^{T}}{(1+i)^{T}-1}.$$

Portanto no Sistema Price, o valor de cada prestação será

$$P = D_0\cdot\left(\frac{i}{1-(1+i)^{-T}}\right). \tag{3.6}$$

Antes de encerrar a discussão sobre o Sistema Price, temos um caso a analisar. E se a dívida nunca for paga, ou seja, $D_0 = D_t,\ \forall t \in \mathbb{N}$, o que na prática está acontecendo? Pode parecer absurdo tal questionamento, pois aparentemente essa negociação é péssima para o contratante, mas na realidade é extremamente comum no cotidiano. É o caso locações de modo geral, em particular considere o aluguel de um imóvel, o proprietário cede seu bem ao locatário, e este paga uma compensação pela utilização do mesmo, embora pague mensalmente este imóvel nunca será dele, independente do número de prestações pagas. Mas matematicamente, como isso pode ocorrer? A resposta é bem simples, a parcela paga corresponde apenas ao juro do valor do bem, logo

$$P_t = iD_0.$$

Dessa forma, o proprietário recebe algo que é conhecido como renda perpétua.

O Sistema SAC por sua vez, é mais agressivo em relação ao Price, pois o seu foco é amortizar (descontar) do saldo devedor o mesmo valor a cada pagamento, somado ao juro correspondente a aquele período, ou seja,

$$P_t = A_t + J_t. \tag{3.7}$$

onde A_t é a amortização da dívida e J_t o juro, ambos no período t, logo as parcelas começam com valores mais altos e diminuem com o decorrer do tempo. Esse efeito é justificado pelo fato de que a dívida vai diminuindo a medida que é paga, desde que $A_t > 0$, com isso o juros total nessa transação costumam ser menores, comparado com o Sistema Price, nas mesmas condições de taxa de juros e valor emprestado.

Retornando a solução geral dada na Equação 3.5, no SAC, como já comentado, as parcelas não serão mais constantes. Suponhamos que o contratante irá pagar toda a dívida n parcelas a uma taxa de juros i. Logo, como em cada pagamento a amortização deve ser constante, segue que

$$A_k = \frac{D_0}{n}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ k \leq n.$$

Por outro lado, note que a dívida irá diminuir de maneira constante, explicitando os primeiros termos

$$\begin{aligned}
D_1 &= D_0 - \frac{D_0}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)D_0 = \left(\frac{n-1}{n}\right)D_0,\\
D_2 &= D_1 - \frac{D_0}{n} = D_0 - \frac{D_0}{n} - \frac{D_0}{n} = D_0 - 2\frac{D_0}{n} = \left(\frac{n-2}{n}\right)D_0,\\
&\vdots\\
D_k &= \left(\frac{n-k}{n}\right)D_0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

que será o valor da dívida para qualquer período k, com $0 \leq k \leq n$.

Além disso, como o juro é calculado a cada período e o valor da dívida diminuí constantemente, pois supomos que a dívida seria paga em n parcelas, segue que o juros de um período k deve ser calculado sobre a dívida um período anterior $k-1$. Desse modo,

$$J_k = iD_{k-1}. \tag{3.9}$$

Por fim, um questionamento pertinente em relação ao Sistema SAC, é o seguinte, é possível descobrir o valor de juros total pagos em uma operação, ou seja, o somatório dos juros de cada período. E a resposta é sim. Combinando as Equações (3.8) e (3.9), podemos encontrar um padrão, veja

$$
\begin{aligned}
J_1 &= iD_0 = i\left(\frac{n}{n}\right)D_0, \\
J_2 &= iD_1 = i\left(\frac{n-1}{n}\right)D_0, \\
J_3 &= iD_2 = i\left(\frac{n-2}{n}\right)D_0, \\
&\vdots \\
J_{n-1} &= iD_{n-2} = i\left(\frac{n-(n-2)}{n}\right)D_0 = i\left(\frac{2}{n}\right)D_0, \\
J_n &= iD_{n-1} = i\left(\frac{n-(n-1)}{n}\right)D_0 = i\left(\frac{1}{n}\right)D_0.
\end{aligned}
$$

Logo, a soma dos juros é da forma

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} J_i &= i\left(\frac{n}{n}\right)D_0 + i\left(\frac{n-1}{n}\right)D_0 + i\left(\frac{n-2}{n}\right)D_0 + \cdots + i\left(\frac{2}{n}\right)D_0 + i\left(\frac{1}{n}\right)D_0, \\
&= \frac{iD_0}{n}[n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1].
\end{aligned}
$$

Observe que a soma dentro de colchetes é uma progressão aritmética de razão 1. Pela Proposição 1 temos que a soma dos n primeiros termos da P.A é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2},$$

logo

$$\sum_{i=1}^{n} J_i = \left(\frac{iD_0}{n}\right)\cdot\left[\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right] = \frac{iD_0\cdot(n+1)}{2}. \tag{3.10}$$

Para encerrar este capítulo, cabe ressaltar que no Capítulo 5 retornaremos a tais temáticas, resolvendo alguns exemplos que envolvem Juros Compostos e os Sistemas de Amortização.

Capítulo 4

Modelos Econômicos como Recorrência de Primeira e Segunda Ordem

Este capítulo, é direcionado prioritariamente ao professor e seus conceitos, em sua totalidade, dificilmente poderão ser trabalhados na Educação Básica, pois é de um nível de complexidade maior, os assuntos aqui tratados são de Ensino Superior. Vale ressaltar, que isso não o torna menos importante, pelo contrário, ele servirá como embasamento e aprofundamento para o docente, de modo que o mesmo tenha um conhecimento além do proposto durante as aulas.

Contudo, caso o professor julgue pertinente, esses modelos podem ser comentados em linhas gerais com os estudantes, a depender do desenvolvimento deles durante as aulas. A complexidade dessa temática demonstra que a matemática financeira trabalhada em sala de aula está limitada a uma pequena parcela comparada a problemas reais da economia.

O capítulo está dividido em três partes. Na primeira serão apresentados alguns conceitos básicos de Álgebra Linear, finalizando com um teorema que relaciona o conjunto de soluções de uma recorrência homogênea de primeira ordem com espaço vetorial, base e dimensão. Na segunda, serão desenvolvidos algumas definições ainda da Álgebra Linear porém adaptando-as para recorrências lineares. Essa relação permite expandir tais conceitos para recorrências lineares homogêneas de ordem k, porém este trabalho será limitado a ordem 1 e 2. Por fim, serão estudados modelos da economia que tornam-se recorrências lineares de primeira e segunda ordem. Para elaboração deste capítulo, foram utilizadas as referências [4, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 31].

4.1 Conceitos em Álgebra Linear

Definição 8 *(Corpo) Um conjunto K não vazio será chamado de corpo se for munido de uma operação de adição $(+)$ e uma operação de multiplicação $(\times)$, verificando as condições a seguir.*

A1. A adição é associativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$, para todos $a, b, c \in K$.

A2. A adição é comutativa: $a+b = b+a$ para todos $a, b \in K$.

A3.A adição possui elemento neutro: existe $0 \in K$, tal que $a+0 = a$, para todo $a \in K$

A4. A adição possui elementos simétricos: para todo $a \in K$, existe $-a \in K$ tal que $a+(-a) = 0$.

M1. A multiplicação é associativa: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, para todos $a, b, c \in K$.

M2. A multiplicação é comutativa: $a \times b = b \times a$, para todos $a, b \in K$.

M3. A multiplicação possui elemento neutro: existe $1 \in K \setminus \{0\}$, tal que $a \times 1 = a$, para todo $a \in K$.

M4. A multiplicação possui inversos: para todo $a \in K \setminus \{0\}$, existe $a^{-1} \in K$ tal que $a \times a^{-1} = 1$.

AM. A multiplicação é distributiva com relação à adição: $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$, para todos $a, b, c \in K$.

Exemplo 19 *Os conjuntos numéricos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, com suas operações usuais de adição e multiplicação são corpos, pois satisfazem cada uma das nove propriedades da Definição 8.*

Definição 9 *Um conjunto V não vazio será dito um espaço vetorial sobre um corpo K, se possui uma adição $(+)$ com as mesmas propriedades da adição de um corpo; ou seja,*

A1. A adição é associativa: $(u+v)+w = u+(v+w)$, para todos $u, v, w \in V$.

A2. A adição é comutativa: $u+v = v+u$, para todos $u, v \in V$.

A3. A adição possui elemento neutro: existe $0 \in V$, tal que $v+0 = v$, para todo $v \in V$.

A4. A adição possui simétricos: para todo $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v+(-v) = 0$.

E além disso, existe uma operação chamada de multiplicação por escalar, que associa a um elemento $k \in K$ e a um elemento $v \in V$, um elemento $kv \in V$, tal que:

ME1. $k(u+v) = ku+kv$, para todos $k \in K$ e $u, v \in V$.

ME2. $(k_1+k_2)v = k_1v+k_2v$, para todos $k_1, k_2 \in K$ e $v \in V$.

ME3. $(k_1k_2)v = k_1(k_2v)$, para todos $k_1, k_2 \in K$ e $v \in V$.

ME4. $1v = v$, para todo $v \in V$.

Observação 13 *Os elementos de V são chamados de vetores e os elementos de K de escalares. O elemento 0 de V será chamado de vetor nulo e o elemento $-v$ de vetor oposto de v.*

Observação 14 *Apesar de definir o que é um corpo de modo geral na Definição 8, neste trabalho nos concentraremos apenas em espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, ou seja, sobre o corpo dos números reais.*

Exemplo 20 *O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.*

Note que, o conjunto $\mathbb{R}^n$ é uma generalização do $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde, este conjunto são os vetores no plano cartesiano de duas dimensões, ou seja,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1,\ y_1); x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Dessa forma o conjunto $\mathbb{R}^n$ seriam vetores com n-uplas de números reais, logo

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ x_2, ...,\ x_n); x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$, dessa forma:

$$u = (x_1,\ x_2, ...,\ x_n) \quad e \quad v = (y_1, y_2, ..., y_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u + v = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ ...,\ x_n + y_n) \quad e \quad au = (ax_1,\ ax_2,\ ..., ax_n).$$

Desse modo, definido as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar, como cada $n-$upla são números reais, e $\mathbb{R}^n$ ser um espaço vetorial decorre imediatamente de que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Definição 10 ***(Combinação Linear)*** *Seja V um espaço vetorial e sejam $v_1, v_2, \cdots, v_k$ vetores de V. Diremos que um vetor v de V é uma combinação linear de $v_1, v_2, \cdots, v_r$ se existirem números reais $b_1, b_2, \cdots, b_k$ tais que*

$$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_kv_k.$$

Definição 11 ***(Subespaço Vetorial)*** *Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se:*

i) Para quaisquer $u,\ v \in W$ tivermos $u + v \in W$.

ii) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W$ tivermos $\alpha u \in W$.

Lema 1 *Se W é um subespaço vetorial de um espaço vetorial V, então W também é um espaço vetorial.*

Definição 12 *Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_k$ vetores de um espaço vetorial V. Denotaremos por $G(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ o conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \cdots, v_k$ em V.*

Lema 2 *$G(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ é um subespaço de V.*

Os Lemas 1 e 2 não serão demonstrados aqui, pois este não é o objetivo desse trabalho, mas suas demonstrações podem ser consultadas em [8, 17].

Definição 13 *O subespaço $G(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ é chamado de subespaço gerado por $v_1, v_2, \cdots, v_k$.*

Definição 14 ***(Dependência e Independência Linear)*** *Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_k$ vetores em um espaço vetorial V. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_k$ são **linearmente independentes**, ou simplesmente **independentes**, se a equação*

$$b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_kv_k = 0$$

*é satisfeita somente quando $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$. Caso exista algum $b_i \neq 0$, dizemos que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_k$ são **linearmente dependentes**, ou simplesmente **dependentes**. O conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ é dito ser **independente** ou **dependente** se os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_k$ são independentes ou dependentes, respectivamente.*

Definição 15 ***(Base)*** *Seja $\alpha = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial não nulo V. Dizemos que α é uma base de V se as seguintes condições são verificadas:*
a) α é linearmente independente;
b) $V = G(\alpha)$.

Definição 16 *Um espaço vetorial não nulo V é denominado de dimensão finita se contém um conjunto finito $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de vetores que constitui uma base de V. Se não existir um tal conjunto, dizemos que V é de dimensão infinita. Convencionamos que o espaço vetorial nulo é um espaço vetorial de dimensão finita.*

Definição 17 ***(Dimensão)*** *O número de elementos de uma base de um espaço vetorial não nulo V de dimensão finita é chamado de dimensão de V e denotado por $\dim V$. Convencionamos que se V é o espaço vetorial nulo, então $\dim V = 0$.*

Por fim, chega-se no principal resultado dessa seção, todas as definições e exemplos previamente mostrados nesse capítulo visam proporcionar recursos mínimos para demonstrar e compreender o Teorema 9 que basicamente relaciona os conceitos de Recorrências Lineares com Álgebra Linear.

Teorema 9 ***(Espaço das Soluções)*** *Seja S o conjunto das soluções $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ da recorrência linear homogênea de primeira ordem $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n$, ou seja,*

$$S = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_{n+1} = g(n) \cdot a_n\}.$$

S é um espaço vetorial de dimensão 1.

Demonstração: Inicialmente, observe que S é um subconjunto do espaço das sequências, que nada mais são do que, funções $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ definidas por $a \mapsto a(n) = a_n$. Sejam $(a_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, (a_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}} \in S$, então, temos as seguintes operações em S, de adição

$$+ : S \times S \to S$$

$$(a^{(1)} + a^{(2)})(n) = a_n^{(1)} + a_n^{(2)},$$

e multiplicação por escalar,

$$\times : S \times S \to S$$

$$(\lambda a^{(1)})(n) = \lambda a_n^{(1)},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. As operações estão bem definidas, uma vez que se $(a_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, (a_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}} \in S$, então, $a_{n+1}^{(1)} = g(n) \cdot a_n^{(1)}$ e $a_{n+1}^{(2)} = g(n) \cdot a_n^{(2)}$, logo a soma $(a^{(1)} + a^{(2)})(n)$ também pertence a S,

$$a_{n+1}^{(1)} + a_{n+1}^{(2)} = g(n) \cdot (a_n^{(1)} + a_n^{(2)}).$$

Analogamente, para a multiplicação por escalar temos, se $(a_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} \in S$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, então, $a_{n+1}^{(1)} = g(n) \cdot a_n^{(1)} \Rightarrow \lambda a_{n+1}^{(1)} = \lambda g(n) \cdot a_n^{(1)} \Rightarrow \lambda a_{n+1}^{(1)} = g(n) \cdot (\lambda a_n^{(1)})$, logo $(\lambda a^{(1)})(n)$ também pertence a S,

$$(\lambda a_{n+1}^{(1)}) = g(n) \cdot (\lambda a_n^{(1)}).$$

Observe que como as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são números reais, então valem todas as propriedades da Definição 9. Portanto S é um espaço vetorial.

Tome agora o conjunto formado por uma solução $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ da recorrência linear homogênea de primeira ordem $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n$. Temos que, como qualquer combinação linear de

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução, então deve-se mostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gera o espaço de soluções. Considere duas soluções $a_n^{(1)}$ e $a_n^{(2)}$ que geram o espaço S. Vamos mostrar que elas são linearmente dependentes. De fato, pela Definição 19, dadas as constantes $b_1, b_2 \in R$, temos

$$b_1 a_n^{(1)} + b_2 a_n^{(2)} = 0,$$

$$b_1 a_{n+1}^{(1)} + b_2 a_{n+1}^{(2)} = 0,$$

ou ainda,

$$b_1 a_n^{(1)} + b_2 a_n^{(2)} = 0,$$

$$g(n)(b_1 a_n^{(1)} + b_2 a_n^{(2)}) = 0.$$

Como $g(n) \neq 0$ então $b_1 a_n^{(1)} + b_2 a_n^{(2)} = 0$ e então $a_n^{(1)} = \frac{-b_2}{b_1} a_n^{(2)}$, $b_1 \neq 0$. Logo, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gera o espaço de soluções S e é linearmente independente, logo pela Definição 15, S é uma base e tem dimensão 1. ∎

4.2 Recorrência de primeira ordem e o espaço das soluções

Considere a recorrência linear $x_{n+1} = \phi x_n$ já resolvida no Exemplo 6, naquele momento encontramos uma solução geral $x_n = \phi^n c$, onde $c \in R$ e $c = x_0$. Logo, as soluções particulares dependem do valor inicial x_0. Mas e se tivéssemos outras duas soluções gerais diferentes? Será que isso é possível? Suponha que existam duas soluções gerais distintas $a_n^{(1)}$ e $a_n^{(2)}$. Provaremos a seguir, que a combinação linear

$$C_1 a_n^{(1)} + C_2 a_n^{(2)}$$

com $C_1, C_2 \in R$ é também uma solução geral da recorrência. Porém antes disso, para facilitar a compreensão, veja que isso de fato ocorre com um exemplo particular.

Exemplo 21 *Considere a recorrência $x_{n+1} = 2x_n$.*
Note que 2^n e 2^{n-1} são soluções da recorrência, basta substituir essas soluções na recorrência e verá que a igualdade se mantém.
Note que $C_1 2^n + C_2 2^{n-1}$ com $C_1, C_2 \in R$ é solução, pois:

$$x_{n+1} = C_1 2^{n+1} + C_2 2^n = 2 \cdot (C_1 2^n + C_2 2^{n-1}) = 2x_n.$$

Portanto,

$$x_{n+1} = 2x_n.$$

Ou seja, $C_1 2^n + C_2 2^{n+1}$ *também é solução da recorrência* $(C_1, C_2 \in R)$*.*

Proposição 4 *Seja* $x_{n+1} = \phi x_n$ *com* $\phi \in R$ *uma recorrência linear homogênea de primeira ordem. Se* $(a_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(a_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ *são soluções desta recorrência, então a combinação linear* $C_1 a_n^{(1)} + C_2 a_n^{(2)}$*, com* $C_1, C_2 \in R$ *também será solução.*

Demonstração: Considere a recorrência $x_{n+1} = \phi x_n$ com $\phi \in R$. Por hipótese, $a_n^{(1)}$ e $a_n^{(2)}$ são soluções desta recorrência. Logo:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^{(1)} &= \phi a_n^{(1)}, \\ a_{n+1}^{(2)} &= \phi a_n^{(2)}. \end{aligned}$$

Substituindo $C_1 a_n^{(1)} + C_2 a_n^{(2)}$ na recorrência, obtemos:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= C_1 a_{n+1}^{(1)} + C_2 a_{n+1}^{2)} \iff \\ x_{n+1} &= C_1 \phi a_n^{(1)} + C_2 \phi a_n^{(2)} \iff \\ x_{n+1} &= \phi \cdot (C_1 a_n^{(1)} + C_2 a_n^{(2)}) \iff \\ x_{n+1} &= \phi x_n. \end{aligned}$$

O que de fato é verdade, portanto $C_1 a_n^{(1)} + C_2 a_n^{(2)}$, que é uma combinação linear das soluções da recorrência genérica, também é uma solução geral. $\blacksquare$.

De agora em diante, será feita uma relação entre recorrências de ordem k com conceitos de álgebra linear, as definições apresentadas são semelhantes as que foram vistas na seção anterior, porém agora forma específica para recorrências.

Definição 18 ***(Recorrências Lineares Homogêneas de ordem k)*** *Sejam* $b_1, \cdots, b_k \in R$*, com* $1 \leq k \in \mathbf{N}$ *uma recorrência linear homogênea de ordem* k *será da forma*

$$x_{n+k} + b_k x_{n+k-1} + b_{k-1} x_{n+k-2} + \cdots + b_1 x_n = 0.$$

Definição 19 ***(Dependência e Independência Linear).*** *Dadas as sequências* $(a_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}$, $(a_n^{(2)})_{n\in\mathbf{N}}, \cdots, (a_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$, *com* $2 \leq k \in \mathbf{N}$ *. Dizemos que elas são **linearmente dependentes** para* $n \geq n_0$*, se existirem constantes reais* $b_1, b_2, \cdots, b_k \in R$*, não todas nulas, tais que*

$$b_1 a^{(1)} + b_2 a^{(2)} + \cdots + b_k a^{(k)} = 0, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Equivalentemente podemos dizer que existe uma combinação linear não-trivial das soluções que é zero. Se as soluções não são linearmente dependentes, dizemos que são ***linearmente independentes****.*

Definição 20 ***(Conjunto Fundamental de Soluções).*** *Um conjunto de k soluções linearmente independentes da equação homogênea é chamado de conjunto fundamental de soluções.*

Definição 21 ***(Matriz de Casoratian)*** *Sejam $(a_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}, (a_n^{(2)})_{n\in\mathbf{N}}, \cdots, (a_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ soluções da recorrência linear homogênea de ordem k, a matriz de Casoratian $C(n)$ é dada por*

$$C(n) = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & \cdots & a_n^{(k)} \\ a_{n+1}^{(1)} & a_{n+1}^{(2)} & \cdots & a_{n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+k-1}^{(1)} & a_{n+k-1}^{(2)} & \cdots & a_{n+k-1}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Por fim, com essas definições é possível tratar de dimensão do espaço vetorial, para o contexto de recorrências homogêneas de ordem k, onde assim como ocorreu para recorrências homogêneas de primeira ordem, o conjunto das soluções formam um espaço vetorial de dimensão k. Porém, essa afirmação não será abordada nesse trabalho. No Teorema 10 será feita uma demonstração diferente da que foi realizada no Teorema 9, embora a conclusão em relação a dimensão seja a mesma.

Teorema 10 ***(Dimensão da Recorrência Linear de Primeira Ordem)*** *O conjunto de soluções da recorrência linear homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes é um espaço vetorial de dimensão um.*

Demonstração: Por hipótese a recorrência é do tipo

$$x_n = \phi x_{n-1}, \qquad 0 \neq \phi \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos por absurdo, que existam duas soluções linearmente independentes $a_n^{(1)}$ e $a_n^{(2)}$. Pela Definição 19, $\forall\ b_1, b_2 \in R$, não ambos iguais a zero, logo:

$$\begin{cases} b_1 a_n^{(1)} + b_2 a_n^{(2)} \neq 0, \\ b_1 a_{n+1}^{(1)} + b_2 a_{n+1}^{(2)} \neq 0. \end{cases}$$

Fazendo $a_{n+1} = \phi a_n$, obtemos:

$$\begin{cases} b_1 a_n^{(1)} + b_2 a_n^{(2)} \neq 0, \\ b_1 \phi a_n^{(1)} + b_2 \phi a_n^{(2)} \neq 0. \end{cases}$$

Transformando em notação matricial

$$\begin{pmatrix} a_n^{(1)} & a_n^{(2)} \\ \phi a_n^{(1)} & \phi a_n^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, como $\forall\ b_1, b_2 \in R$ e ambos não podem ser nulos, segue que o determinante da Matriz de Casoratian também não pode ser nulo, ou seja,

$$det\ C(n) = det \begin{pmatrix} a_n^{(1)} & a_n^{(2)} \\ \phi a_n^{(1)} & \phi a_n^{(2)} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Porém, por outro lado, note que $det\ C(n) = a_n^{(1)} \cdot \phi a_n^{(2)} - a_n^{(1)} \cdot \phi a_n^{(2)} = 0$, absurdo. Logo só pode haver uma solução independente. ■

Considere $(a_n^{(1)})_{n \in \mathbf{N}}$, $(a_n^{(2)})_{n \in \mathbf{N}}$, duas soluções da recorrência linear não homogênea de primeira ordem

$$x_{n+1} = \phi x_n + f(n).$$

Então, $a_{n+1}^{(1)} = \phi a_n^{(1)} + f(n)$ e $a_{n+1}^{(2)} = \phi a_n^{(2)} + f(n)$. Logo $a_{n+1}^{(1)} - a_{n+1}^{(2)} = \phi(a_n^{(1)} - a_n^{(2)})$ é uma solução da recorrência linear homogênea de primeira ordem

$$x_{n+1} = \phi x_n,$$

ou ainda $a_{n+1}^{(1)} - a_{n+1}^{(2)} = \phi^t c$. Portanto, uma solução da recorrência linear não homogênea de primeira ordem $x_{n+1} = \phi x_n + f(n)$ é dada por $a_{n+1}^{(1)} = \phi^t c + a_{n+1}^{(2)}$, soma da solução geral da recorrência homogênea e uma solução particular da recorrência não homogênea. Sobre a discussão acima, segue o teorema.

Teorema 11 ***(Princípio da Superposição)*** *Cada solução a_n, da recorrência linear não homogênea de primeira ordem pode ser representada como a soma da solução geral da recorrência homogênea $a_n^{(g)}$, e uma solução particular da recorrência não homogênea $a_n^{(p)}$.*

Observe que o Teorema 11 trata das soluções da recorrência linear não homogênea de primeira ordem e o Teorema 8 trata das soluções da recorrência linear não homogênea de segunda ordem. Ambos os casos podem ser estendidos para descrever as soluções da recorrência linear não homogênea de ordem superior como a soma da solução geral da recorrência homogênea e uma solução particular da recorrência.

4.3 Modelos econômicos como recorrência de primeira ordem

Nesta seção, serão apresentados alguns modelos oriundos da economia que podem ser desenvolvidos a partir do conceito de recorrência de primeira ordem. Cabe ressaltar, que a análise e a discussão será muito mais matemática do que econômica. Contudo, os contextos econômicos serão comentados a caráter de conhecimento, mas de uma maneira menos aprofundada e apenas com objetivo de situar o leitor.

Antes de apresentarmos esses modelos é importante comentar o que eles seriam de modo geral. Os modelos econômicos são representações simplificadas que relacionam diferentes variáveis para explicar como a economia funciona. Como exemplo podemos citar a variação do preço de um produto dentro de um mercado específico. Esses modelos permitem que fenômenos complexos possam ser estudados uma vez que é possível fazer previsões sobre o comportamento de suas variáveis em um espaço de tempo pré determinado. Apesar de suas contribuições para os setores econômicos, eles apresentam algumas fraquezas, uma vez que não é possível termos o controle de todas as variáveis que são relevantes para o estudo. Sendo assim, essas duas próximas seções tem por objetivo apresentar alguns modelos econômicos como uma complementação ao conteúdo de Educação Financeira.

4.3.1 Modelo de teia de aranha

Este modelo começou a ser estudado nos mercados agrícolas, pois o produtor rural deve estimar a oferta por aquele(s) produto(s) um período anterior a venda, visto que há uma espera entre o plantio, colheita e venda do produto. Por exemplo, o preço do arroz quando é cultivado pode ser diferente em relação a quando será colhido e/ou vendido. Visando dar mais segurança para os produtores e evitar flutuações de preços esse modelo pode ser utilizado. O objetivo será igualar ou equilibrar a demanda e a oferta. As variáveis que serão utilizadas no modelo, são:

D_t: Demanda no período t,

S_t: Oferta no período t,

p_t: Logaritmo do nível de preços no período t,

U_t: Choque de oferta no período t.

O modelo pode ser resumido nas seguintes equações:

$$D_t = -\beta p_t, \qquad (\beta > 0), \tag{4.1}$$

$$S_t = \gamma p_{t-1} + U_t, \qquad (\gamma > 0), \tag{4.2}$$

$$S_t = D_t. \tag{4.3}$$

Substituindo as Equações (4.1) e (4.2) na Equação (4.3) obtemos

$$-\beta p_t = \gamma p_{t-1} + U_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p_t = -\frac{\gamma}{\beta} p_{t-1} - \frac{U_t}{\beta}.$$

Se U_t for independente do tempo e igual a U, teremos a seguinte equação

$$p_t = -\frac{\gamma}{\beta} p_{t-1} - \frac{U}{\beta}.$$

Se $\alpha = -\dfrac{\gamma}{\beta}$ e $\phi = -\dfrac{U}{\beta}$, segue

$$p_t = \alpha p_{t-1} + \phi,$$

que é uma recorrência não homogênea de primeira ordem. Pelo Teorema 1, podemos resolver tal recorrência. Considere a recorrência homogênea $p_t = \alpha p_{t-1}$, iremos encontrar uma solução $a_n \neq 0$. Explicitando os termos temos

$$p_2 = \alpha p_1,$$

$$p_3 = \alpha p_2,$$

$$\vdots$$

$$p_t = \alpha p_{t-1}.$$

Multiplicando os termos, membro a membro, obtemos

$$p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_t = \alpha^{t-1} \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_{t-1},$$

$$p_t = \alpha^{t-1} \cdot p_1.$$

Logo, a solução particular $a_t = \alpha^{t-1}$. Fazendo a substituição $p_t = a_t y_t$ na recorrência inicial,

$$a_t y_t = \alpha \cdot a_{t-1} y_{t-1} + \phi,$$

$$\alpha^{t-1} y_t = \alpha \cdot \alpha^{t-2} y_{t-1} + \phi,$$

$$y_t = y_{t-1} + \frac{\phi}{\alpha^{t-1}}.$$

Explicitando os termos dessa recorrência, obtemos

$$y_2 = y_1 + \frac{\phi}{\alpha},$$

$$y_3 = y_2 + \frac{\phi}{\alpha^2},$$

$$\vdots$$

$$y_t = y_{t-1} + \frac{\phi}{\alpha^{t-1}}.$$

Somando as equações membro a membro

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_t = y_1 + y_2 + \cdots + y_{t-1} + \frac{\phi}{\alpha} + \frac{\phi}{\alpha^2} + \cdots + \frac{\phi}{\alpha^{t-1}},$$

$$y_t = y_1 + \frac{\phi}{\alpha} + \frac{\phi}{\alpha^2} + \cdots + \frac{\phi}{\alpha^{t-1}}.$$

Utilizando a Proposição 2, que se refere a soma dos n primeiros termos de uma P.G, obtemos

$$y_t = y_1 + \frac{\frac{\phi}{\alpha} \cdot \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{t-1} - 1\right]}{\frac{1}{\alpha} - 1},$$

$$y_t = y_1 + \phi \cdot \left(\frac{\frac{1}{\alpha^t} - \frac{1}{\alpha}}{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right),$$

$$y_t = y_1 + \phi \cdot \left(\frac{\frac{1-\alpha^{t-1}}{\alpha^t}}{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right),$$

$$y_t = y_1 + \phi \cdot \left(\frac{1-\alpha^{t-1}}{\alpha^t} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}\right),$$

$$y_t = y_1 + \phi \cdot \left(\frac{1-\alpha^{t-1}}{\alpha^{t-1}(1-\alpha)}\right).$$

Logo, como $p_t = a_t y_t$ segue que

$$p_1 = a_1 y_1,$$

$$p_1 = \alpha^0 y_1,$$

$$p_1 = y_1.$$

Além disso,

$$p_t = \alpha^{t-1} \cdot \left(p_1 + \phi \cdot \left(\frac{1-\alpha^{t-1}}{\alpha^{t-1}(1-\alpha)}\right)\right),$$

$$p_t = \alpha^{t-1} \cdot p_1 + \phi \cdot \left(\frac{1-\alpha^{t-1}}{1-\alpha}\right),$$

que é a solução geral do modelo.

Faremos algumas análises, observando o que ocorre com a solução geral desse modelo quando variamos a constante γ e tomamos $\beta = 1$. Cabe ressaltar que a Observação 2 vista na **soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica**, é fundamental para o compreensão plena.

Como $\alpha = -\dfrac{\gamma}{\beta}$ e $\phi = -\dfrac{U}{\beta}$, temos que a solução geral pode ser escrita da seguinte forma:

$$p_t = (-\gamma)^{t-1} \cdot p_1 - U \cdot \left(\frac{1-(-\gamma)^{t-1}}{1-(-\gamma)}\right) \Rightarrow$$

$$p_t = (-\gamma)^{t-1} \cdot p_1 - U \cdot \left(\frac{1-(-\gamma)^{t-1}}{1+\gamma}\right).$$

Se calcularmos o limite para $t \to \infty$, ou seja, em um período t muito grande, podemos fazer a seguinte análise:

1ºCaso: Se $\gamma < 1$ e $\beta = 1$:

$$\lim_{t\to\infty} p_t = 0 \cdot p_1 - U \cdot \left(\frac{1-0}{1+\gamma}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} p_t = -\frac{U}{1+\gamma},$$

ou seja, o logaritmo do nível de preços irá convergir para um valor constante (equilíbrio).

2ºCaso: Se $\gamma = 1$ e $\beta = 1$:

$$\lim_{t\to\infty} p_t = (-1)^{t-1} \cdot p_1 - U \cdot \left(\frac{1-(-1)^{t-1}}{1+1}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} p_t = (-1)^{t-1} \cdot p_1 - U \cdot \left(\frac{1-(-1)^{t-1}}{2}\right),$$

ou seja, o logaritmo do nível de preços irá oscilar, pois $(-1)^{t-1} = 1$ se t for ímpar e $(-1)^{t-1} = -1$ se t for par. Por exemplo, $(-1)^1 = 1$ e $(-1)^2 = 1$, mas o valor ainda será uma constante para ambos os casos.

3ºCaso: Se $\gamma > 1$ e $\beta = 1$:

$$\lim_{t\to\infty} p_t = \pm\infty,$$

pois, $(-\gamma)^{t-1} = \pm\infty$, quando $t \to \infty$ e $\gamma > 1$. Para justificar, vamos exemplificar numericamente, suponha que $\gamma = 10 \Rightarrow (-\gamma)^n = (-10)^n$.

Se $n = 1 \Rightarrow (-10)^1 = -10$.

Se $n = 2 \Rightarrow (-10)^2 = 100$.

Se $n = 3 \Rightarrow (-10)^3 = -1000$.

Se $n = 4 \Rightarrow (-10)^4 = 10000$.

Assim, o valor de $(-\gamma)^n$ está oscilando entre valores positivos e negativos, porém considerando apenas seu valor absoluto, ou seja, $|(-\gamma)^n|$ sempre está subindo a medida que n também aumenta, logo se n tende ao infinito $(-\gamma)^n \to \pm\infty$. Desse modo, o logaritmo do nível de preços irá explodir (divergir), visto que os demais termos da p_t são constantes.

4.3.2 Modelo de Preço de Ações

Vamos analisar a seguinte situação. Um investidor têm a sua disposição dois tipos diferentes de ativos. O primeiro de renda fixa, como por exemplo, uma conta bancária em um banco digital, que rende a uma taxa de juros constante $i > 0$ a cada período (geralmente anual e relacionada ao CDI: Certificado de Depósito Interbancário), neste caso, o risco é praticamente zero. O segundo caso, seria um investimento em renda variável, como por exemplo, ações listadas na Bolsa de Valores (poderia ser também fundos imobiliários), onde o investidor tem direito a dividendos em função da quantidade de ações que possuí. As variáveis que serão utilizadas no modelo, são:

p_t: Preço da ação no período t,

d_t: Dividendo por ação no período t.

Em um cenário realista, o retorno dos investimentos serão praticamente sempre diferentes, a depender de várias variáveis (economia do país, política, doenças epidemiológicas, guerras, etc). Porém, para conseguirmos modelar, suponhamos que ambos os investimentos tenham retorno igual em cada período. O problema seria determinar o valor de p_t, ou seja, o preço da ação em função dos dividendos d_t e da taxa de juros i. Observe o Return Over Investment (ROI), que traduzido para o português, é o retorno sobre o investimento, das ações será o dividendo d_t mais a variação do preço das ações, ou seja, $p_{t+1} - p_t$, com base nisso, chegamos que a taxa i, pode ser descrita pela seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} i = \frac{d_t + (p_{t+1} - p_t)}{p_t} \quad &\iff \quad i \cdot p_t = d_t + p_{t+1} - p_t, \\ &\iff \quad p_{t+1} = (1+i)p_t - d_t. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Considerando $\phi = 1 + i$ e $Z_t = -d_{t-1}$, obtemos a recorrência não homogênea de primeira ordem:

$$p_{t+1} = \phi p_t + Z_{t-1}. \tag{4.5}$$

Pelo Teorema 11 (Princípio da Superposição), para resolver essa recorrência devemos inicialmente encontrar a solução da recorrência homogênea relacionada e somar com uma solução particular da recorrência não homogênea. Vamos resolver a recorrência homogênea inicialmente, seja $p_{t+1} = \phi p_t$ a recorrência homogênea relacionada a recorrência $p_{t+1} = \phi p_t + Z_{t-1}$. Note que:

$$\begin{aligned} p_1 &= \phi p_0, \\ p_2 &= \phi p_1 = \phi \cdot (\phi p_0) = \phi^2 p_0, \\ p_3 &= \phi p_2 = \phi \cdot (\phi^2 p_0) = \phi^3 p_0, \\ &\vdots \\ p_t &= \phi^t p_0. \end{aligned}$$

Logo a solução particular é da forma $p_t^{(g)} = \phi^t p_0$. Agora, observe que ao tentar resolver a recorrência não homogênea de forma iterativa, obtemos o seguinte

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \phi p_0 + Z_1, \\
p_2 &= \phi p_1 + Z_2 = \phi \cdot (\phi p_0 + Z_1) + Z_2 = \phi^2 p_0 + \phi Z_1 + Z_2, \\
p_3 &= \phi p_2 + Z_3 = \phi \cdot (\phi^2 p_0 + \phi Z_1 + Z_2) + Z_3 = \phi^3 p_0 + \phi^2 Z_1 + \phi Z_2 + Z_3, \\
&\vdots \\
p_t &= \phi^t p_0 + \phi^{t-1} Z_1 + \phi^{t-2} Z_2 + \cdots + \phi Z_{t-1} + Z_t.
\end{aligned}
$$

Colocando em notação de somatório, obtemos a seguinte solução:

$$p_t = \phi^t p_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i Z_{t-i}.$$

Logo, como a solução da recorrência homogênea relacionada é $p_t^{(g)} = \phi^t p_0$, e pelo Teorema 11 (Princípio da Superposição) a solução da recorrência é da forma $p_t = p_t^{(g)} + p_t^{(p)}$, segue que a solução particular é

$$p_t^{(p)} = \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i Z_{t-i}. \tag{4.6}$$

Porém, para encontrar o formato dessa solução particular, seria necessário condições iniciais ou então conceitos mais avançados de cálculo e economia, os quais não abordaremos aqui, caso seja do interesse do leitor o mesmo é convidado a ver em [26].

Observação 15 *Na Equação 4.4 o valor de p_{t+1} é um valor futuro, ou seja, um período após o período t (tempo presente), logo é um valor especulativo, porém como modelamos de forma que os rendimentos sejam iguais em cada período tanto para "renda fixa"como para renda variável, assumimos que p_{t+1} seja uma "previsão perfeita".*

4.3.3 Modelo de Hiperinflação de Cagan

De acordo com o Dicionário [15] inflação é:

> "Aumento geral de preços, com consequências perda do poder aquisitivo do dinheiro."
> (FERREIRA, 2005, p.501)

A hiperinflação nada mais é do que um aumento exagerado da inflação, mais precisamente dizendo, quando o nível de preços sobem a patamares superiores a 50% ao mês. O Brasil viveu um período desse na década de 90, mais recentemente, dois países vizinhos ao

Brasil, Venezuela e Argentina, passaram por períodos de hiperinflação. O modelo que será proposto busca relacionar a oferta da moeda e o nível de preços, cabe ressaltar que esses momentos de hiperinflação costumam ser de curta duração, visto que a taxa inflacionária é muito alta, e os governos procuram soluções o quanto antes, pelo alto risco de caos econômico. Devido a isso, pode-se desconsiderar algumas variáveis, como por exemplo, a mudança na produção real. As variáveis que serão utilizadas são:

m_t: Logaritmo do estoque de dinheiro no período t,
p_t: Logaritmo do nível de preços no período t.

O modelo consiste em dois cenários diferentes, o de **expectativas adaptativas** e as **racionais**. Para simplificar, o primeiro se baseia em dados do passado para especular sobre o futuro, já o segundo, se baseia nos dados do presente para especular o futuro, ou seja, desprezando o que já ocorreu. O modelo apresentado a seguir estará baseado em **expectativas adaptativas**:

$$m_t^d - p_t = \alpha(p_{t+1}^e - p_t), \qquad \alpha < 0, \tag{4.7}$$

$$m_t^s = m_t^d = m_t, \tag{4.8}$$

$$p_{t+1}^e - p_t = \gamma(p_t - p_{t-1}), \qquad \gamma > 0. \tag{4.9}$$

Cabe uma observação importante, sobre cada uma dessas equações do modelo, os sobrescritos nas variáveis m_t e p_t não tratam-se de expoentes, mas uma simbologia, onde d, e e s representam, respectivamente, **demanda**, **expectativa** e **fornecimento**.

Será discutido brevemente sobre o significado de cada uma das equações. A Equação (4.7), estabelece a relação entre a demanda de estoque de dinheiro com o nível de preços tanto no presente como a expectativa de nível de preços futuro, note que α é negativo, pois como o período é de hiperinflação tanto a população como o mercado, não tem interesse em reter dinheiro, pois o mais natural é que a moeda se desvalorize.

Por outro lado na Equação (4.8), o Banco Central desse país tentará controlar essa inflação, definindo o estoque de moeda, independente da flutuação do nível de preços, de modo que toda moeda injetada seja absorvida pela economia, e que a oferta de dinheiro seja a mesma que a demanda. Por fim, na Equação (4.9) o modelo usará inicialmente expectativas adaptativas, ou seja, que a inflação esperada para o próximo período leva em consideração a inflação atual, logo são proporcionais, tomando que γ é o fator de proporcionalidade seja positivo. Assim, da Equação (4.8) tem-se que $m_t^d = m_t$, substituindo na Equação (4.7), obtém-se:

$$m_t - p_t = \alpha(p_{t+1}^e - p_t). \tag{4.10}$$

Isolando p_{t+1}^e na Equação (4.9):

$$p_{t+1}^e - p_t = \gamma(p_t - p_{t-1}),$$

$$p_{t+1}^e = \gamma(p_t - p_{t-1}) + p_t. \tag{4.11}$$

Substituindo a Equação (4.11) na Equação (4.10):

$$m_t - p_t = \alpha[(\gamma(p_t - p_{t-1}) + p_t) - p_t],$$

$$m_t - p_t = \alpha\gamma p_t - \alpha\gamma p_{t-1},$$

$$p_t + \alpha\gamma p_t = \alpha\gamma p_{t-1} + m_t,$$

$$(1 + \alpha\gamma)p_t = \alpha\gamma p_{t-1} + m_t,$$

$$p_t = \frac{\alpha\gamma}{(1+\alpha\gamma)}p_{t-1} + \frac{1}{(1+\alpha\gamma)}m_t, \qquad 1 + \alpha\gamma \neq 0.$$

Considerando $\phi = \dfrac{\alpha\gamma}{(1+\alpha\gamma)}$ e $Z_t = \dfrac{1}{(1+\alpha\gamma)}m_t$, novamente se obtém uma recorrência não homogênea de primeira ordem

$$p_t = \phi p_{t-1} + Z_t.$$

Note que é a mesma recorrência já resolvida no modelo de preço de ações Equação (4.5), a qual a solução, como já resolvida previamente, é da forma

$$p_t = \phi^t p_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i Z_{t-i}.$$

A discussão é encerrada com o seguinte questionamento: o que ocorre se esse valor de t tender ao infinito, ou seja, para um t suficientemente grande? Observe que como p_t é o logaritmo do nível de preços não faria sentido esse valor tender para o infinito também, ou seja, ele deveria convergir para uma constante. Porém, para isso ocorrer o valor do módulo de ϕ deve obrigatoriamente ser menor que 1. Ou seja,

$$|\phi| = \left|\frac{\alpha\gamma}{(1+\alpha\gamma)}\right| < 1.$$

Mas isso ocorre, quando se faz $t \to \infty$, obtendo $\phi^t = 0$. Considerando que p_0 é uma constante, resultaria em

$$\lim_{t\to\infty} p_t = \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i Z_{t-i}.$$

Isso significa que a medida que o tempo passa (t suficientemente grande), independentemente do valor de p_0 a parte da solução geral da recorrência homogênea $\phi^t p_0$ torna-se irrelevante, e o que de fato deve ser considerado são os valores da solução particular da recorrência não homogênea, ou seja,

$$p_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i Z_{t-i}.$$

Além disso, o que irá influenciar no nível de preço nesse período, serão os recentes estoques de dinheiro.

Por fim, será estudado o que acontece com o modelo quando trabalha-se com **expectativas racionais**. Nesse caso, o modelo se torna determinístico, ou seja, seria uma previsão perfeita. Dessa forma,

$$p^e_{t+1} = p_{t+1}.$$

Substituindo essa nova informação na Equação (4.10):

$$m_t - p_t = \alpha(p_{t+1} - p_t),$$

$$m_t - p_t = \alpha p_{t+1} - \alpha p_t,$$

$$\alpha p_{t+1} = -p_t + \alpha p_t + m_t,$$

$$p_{t+1} = -\frac{1}{\alpha}p_t + p_t + \frac{1}{\alpha}m_t,$$

$$p_{t+1} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)p_t + \frac{1}{\alpha}m_t.$$

Tomando $\phi = \dfrac{\alpha-1}{\alpha}$ e $Z_t = \dfrac{1}{\alpha}m_t$. Resulta a seguinte recorrência de primeira ordem não homogênea

$$p_{t+1} = \phi p_t + Z_t.$$

É importante ressaltar que $\dfrac{\alpha-1}{\alpha} > 1$, pois α é negativo.

$$\alpha - 1 < \alpha \iff \frac{\alpha-1}{\alpha} > 1 \iff \phi > 1.$$

Logo, para a solução encontrada anteriormente, se o tempo tender ao infinito p_t irá para o infinito também, ou seja, vai divergir. Nesse caso, será utilizado outra estratégia para encontrar uma solução razoável de forma iterativa, mas ao invés de iteramos no passado, deve para o futuro. Mas antes disso, isolando a variável p_t em função de p_{t+1} e Z_t:

$$p_{t+1} = \phi p_t + Z_t \Rightarrow \phi p_t = p_{t+1} - Z_t \Rightarrow p_t = \frac{1}{\phi} p_{t+1} - \frac{1}{\phi} Z_t,$$
$$\Rightarrow p_t = \phi^{-1} p_{t+1} - \phi^{-1} Z_t.$$

Observe que podemos colocar essa recorrência dessa mesma maneira, mas agora com p_{t+1} e p_{t+2},

$$p_{t+1} = \phi^{-1} p_{t+2} - \phi^{-1} Z_{t+1}.$$

E assim sucessivamente, de modo que obtemos

$$p_{t+h} = \phi^{-1} p_{t+h+1} - \phi^{-1} Z_{t+h}, \qquad h \in \mathbb{N}.$$

Esse recurso será utilizado para iterar a recorrência para o futuro

$$\begin{aligned}
p_t &= \phi^{-1} p_{t+1} - \phi^{-1} Z_t, \\
&= \phi^{-1}(\phi^{-1} p_{t+2} - \phi^{-1} Z_{t+1}) - \phi^{-1} Z_t = \phi^{-2} p_{t+2} - \phi^{-2} Z_{t+1} - \phi^{-1} Z_t, \\
&= \phi^{-2}(\phi^{-1} p_{t+3} - \phi^{-1} Z_{t+2}) - \phi^{-2} Z_{t+1} - \phi^{-1} Z_t = \phi^{-3} p_{t+3} - \phi^{-3} Z_{t+2} - \phi^{-2} Z_{t+1} - \phi^{-1} Z_t, \\
&\vdots \\
p_t &= \phi^{-h} p_{t+h} - \phi^{-1} \sum_{i=0}^{h-1} \phi^{-i} Z_{t+i}, \qquad h > 0.
\end{aligned}$$

Agora, pode-se fazer $h \to \infty$, e buscar encontrar p_t em função de valores futuros, o que é bastante razoável, pois trata-se de expectativas racionais, ou seja, as previsões são perfeitas, além de que espera-se que a economia dure para sempre.

$$p_t = \lim_{h\to\infty} \left(\phi^{-h} p_{t+h} - \phi^{-1} \sum_{i=0}^{h-1} \phi^{-i} Z_{t+i} \right).$$

Dessa forma, atente-se que como $\phi > 1 \Rightarrow 1 > \dfrac{1}{\phi} = \phi^{-1}$, segue que , $1 > \phi^{-1} > 0$. Assim, se p_{t+h} for uma constante, ou seja, um valor limitado a primeira parcela $\phi^{-h} p_{t+h}$ irá para zero, quando h tender ao infinito, daí:

$$p_t = -\phi^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{-i} Z_{t+i}.$$

Em síntese, o Modelo de Cagan obtém duas soluções, a depender de das expectativas assumidas:

adaptativas,

$$p_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i Z_{t-i},$$

e as **racionais,**

$$p_t = -\phi^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{-i} Z_{t+i}.$$

4.4 Modelo econômico como recorrência de segunda ordem

Por fim, há alguns modelos da economia, que para soluciona-los são utilizados recorrências de segunda ordem. Contudo, neste trabalho será apresentado apenas um deles o **Modelo de Samuelson**, e de forma mais matemática, já o modelo de **Teia de Aranha com inventário** e o de **Taylor** podem ser consultados em [26].

4.4.1 Modelo de Samuelson

Este é um modelo clássico que ilustra como as recorrências de segunda ordem podem ser utilizadas na economia, e foi proposto por Paul Samuelson em 1939, um grande economista que nasceu nos Estados Unidos e ganhou o Prêmio Nobel da Economia no ano de 1970. O modelo em si, serve para demonstrar que a interação entre o multiplicador e o acelerador pode gerar ciclos de negócios. Além disso, ele é de economia fechada, ou seja, de um país que tem pouca ou nenhuma relação comercial com o exterior. As variáveis que serão utilizadas são:

C_t: Consumo privado no período t,

I_t: Custos de investimentos no período t,

Y_t: Renda no período t,

G_t: Gastos do governo no período t.

O modelo pode ser resumido nas seguintes equações

$$C_t = \alpha + \beta Y_{t-1}, \qquad 0 < \beta < 1, \alpha > 0, \tag{4.12}$$

$$I_t = \gamma(Y_{t-1} - Y_{t-2}), \qquad \gamma > 0, \tag{4.13}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t. \tag{4.14}$$

O parâmetro β nada mais é do que a propensão marginal de consumo, que é a tendência que uma comunidade tem de aumentar suas despesas a medida que sua renda também aumenta, mas proporcionalmente menor que o de aumento de renda, logo β deve ser entre 0 e 1. Já γ é o coeficiente de aceleração, e α e γ devem ser positivos.

Substituindo as Equações (4.12) e (4.13) na Equação (4.14), obtemos:

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \gamma(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + G_t \Rightarrow$$

$$Y_t = (\beta + \gamma)Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2} + \alpha + G_t. \tag{4.15}$$

Que é uma recorrência de segunda ordem, não homogênea. Para resolve-la, temos que encontrar uma solução geral $Y_t^{(g)}$ e uma solução particular $Y_t^{(p)}$, pois a solução da recorrência será da forma

$$Y_t = Y_t^{(g)} + Y_t^{(p)}.$$

Desse modo, para encontrar a solução geral, basta resolvermos a recorrência de segunda ordem homogênea relacionada. Reorganizando a recorrência (4.15) temos

$$Y_t - (\beta + \gamma)Y_{t-1} + \gamma Y_{t-2} = \alpha + G_t. \tag{4.16}$$

Logo, a equação característica, relacionada é da forma;

$$r^2 - (\beta + \gamma)r + \gamma = 0. \tag{4.17}$$

Resolvendo-a obtemos as raízes,

$$r = \frac{-[-(\beta + \gamma)] \pm \sqrt{[-(\beta + \gamma)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \gamma}}{2 \cdot 1} \Rightarrow r = \frac{(\beta + \gamma) \pm \sqrt{(\beta + \gamma)^2 - 4\gamma}}{2}.$$

Temos agora alguns casos a serem analisados, quando o discriminante $\Delta = (\beta + \gamma)^2 - 4\gamma$ for negativo, igual a zero, ou positivo.

1º Caso: Se $(\beta + \gamma)^2 - 4\gamma = 0$. Teremos apenas uma solução real, ou seja, $r_1 = r_2 = r$. Daí:

$$(\beta + \gamma)^2 - 4\gamma = 0 \Rightarrow (\beta + \gamma)^2 = 4\gamma.$$

Como $\alpha, \beta, \gamma > 0$, concluímos que:

$$(\beta+\gamma) = 2\sqrt{\gamma} \Rightarrow \beta = 2\sqrt{\gamma} - \gamma.$$

Desse modo, concluímos que

$$r = \frac{(2\sqrt{\gamma} - \gamma + \gamma)}{2} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{\gamma}}{2} \Rightarrow r = \sqrt{\gamma}.$$

Portanto

$$Y_t^{(g)} = C_1(\sqrt{\gamma})^t + C_2 t(\sqrt{\gamma})^t, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2º Caso: Se $(\beta+\gamma)^2 - 4\gamma > 0$. Teremos duas soluções reais distintas. Logo:

$$r_1 = \frac{(\beta+\gamma) + \sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\gamma}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{(\beta+\gamma) - \sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\gamma}}{2}.$$

E a solução geral será da forma

$$Y_t^{(g)} = C_1\left(\frac{(\beta+\gamma) + \sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\gamma}}{2}\right)^t + C_2\left(\frac{(\beta+\gamma) - \sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\gamma}}{2}\right)^t,$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3º Caso: Se $(\beta+\gamma)^2 - 4\gamma < 0$. Teremos duas soluções complexas conjugadas. Assim:

$$r_1 = \frac{(\beta+\gamma) + i\sqrt{4\gamma - (\beta+\gamma)^2}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{(\beta+\gamma) - i\sqrt{(4\gamma - (\beta+\gamma)^2}}{2}.$$

Concluindo que

$$Y_t^{(g)} = C_1\left(\frac{(\beta+\gamma) + i\sqrt{4\gamma - (\beta+\gamma)^2}}{2}\right)^t + C_2\left(\frac{(\beta+\gamma) - i\sqrt{(4\gamma - (\beta+\gamma)^2}}{2}\right)^t,$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Para encontrarmos a solução particular dividiremos o modelo em dois casos: o primeiro suponhamos que $G_t = G$, ou seja, os gastos do governo são os mesmos independente de qual seja o período t. Desse modo, a Recorrência 4.16 fica da seguinte forma

$$Y_t - (\beta+\gamma)Y_{t-1} + \gamma Y_{t-2} = \alpha + G.$$

Como a parte não homogênea é uma constante, pela Tabela 2.1, é bastante razoável supor que a solução particular seja uma constante $Y_t^{(p)} = A$. Substituindo-o na recorrência,

$$A - (\beta + \gamma)A + \gamma A = \alpha + G \Rightarrow A(1 - \beta - \gamma + \gamma) = \alpha + G \Rightarrow A = \frac{\alpha + G}{1 - \beta}.$$

Segue que,

$$Y_t^{(p)} = \frac{\alpha + G}{1 - \beta}.$$

Portanto, o caso em que os gastos do governo são constantes, ou seja, $G_t = G$ está solucionado, pois já encontramos a solução geral da recorrência e sua solução particular, restando apenas somar em cada das situações.

1º Caso:

$$Y_t = C_1(\sqrt{\gamma})^t + C_2 t(\sqrt{\gamma})^t + \frac{\alpha + G}{1 - \beta},$$

2º Caso:

$$Y_t = C_1\left(\frac{(\beta + \gamma) + \sqrt{(\beta + \gamma)^2 - 4\gamma}}{2}\right)^t + C_2\left(\frac{(\beta + \gamma) - \sqrt{(\beta + \gamma)^2 - 4\gamma}}{2}\right)^t + \frac{\alpha + G}{1 - \beta},$$

3º Caso:

$$Y_t = C_1\left(\frac{(\beta + \gamma) + i\sqrt{4\gamma - (\beta + \gamma)^2}}{2}\right)^t + C_2\left(\frac{(\beta + \gamma) - i\sqrt{(4\gamma - (\beta + \gamma)^2}}{2}\right)^t + \frac{\alpha + G}{1 - \beta}.$$

Resta debater o caso geral, onde os gastos G_t não são contantes e variam ao longo do tempo. Para tal, observe que resolvemos as recorrências dos **modelos de ações e o de hiperinflação de Cagan** de forma iterativa, este modo de resolver recorrências de primeira ordem, pode ser expandido para recorrências de ordem ordem. Ou seja, naqueles caso, concluímos que a solução particular eram da forma $\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i Z_{t-i}$, caso t tende-se ao infinito. Em nosso caso, como a parte não homogênea é composta por $\alpha + G_t$, suponhamos que a solução particular é

$$Y_t^{(p)} = c + \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i G_{t-i}.$$

Substituindo tal tentativa na Recorrência 4.15, obtemos

$$c + \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i G_{t-i} = c(\beta + \gamma) + (\beta + \gamma)\sum_{i=0}^{\infty} \psi^i G_{t-1-i} - c\gamma - \gamma\sum_{i=0}^{\infty} \psi^i G_{t-2-i} + \alpha + G_t.$$

Comparando os termos constantes da equação, obtemos

$$c = c(\beta + \gamma) - c\gamma + \alpha \Rightarrow c - c(\beta + \gamma) + c\gamma = \alpha \Rightarrow c(1 - \beta - \gamma + \gamma) = \alpha \Rightarrow c = \frac{\alpha}{1 - \beta}.$$

Além disso,

$$0 < \beta < 1 \Rightarrow 0 > -\beta > -1 \Rightarrow 1 > 1-\beta > 0 \Rightarrow 1 > 1-\beta > 0 \Rightarrow \frac{1}{1-\beta} > 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{1-\beta} > \alpha > 0 \Rightarrow c > 0.$$

Agora, comparando os termos em somatórios

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi^i G_{t-i} = (\beta+\gamma)\sum_{i=0}^{\infty} \psi^i G_{t-1-i} - \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i G_{t-2-i} + G_t.$$

Para facilitar a comparação, vamos explicitar os primeiros termos dos somatórios:

$$\begin{aligned}\psi_0 G_t + \psi_1 G_{t-1} + \psi_2 G_{t-2} + \cdots &= (\beta+\gamma)\psi_0 G_{t-1} + (\beta+\gamma)\psi_1 G_{t-2} + (\beta+\gamma)\psi_2 G_{t-3} + \cdots \\ &\quad -\gamma\psi_0 G_{t-2} - \gamma\psi_1 G_{t-3} - \gamma\psi_2 G_{t-4} \cdots + G_t.\end{aligned}$$

Igualando os termos semelhantes, em relação a $G_{t-i},\ i = 0, 1, ...,$

$$\begin{aligned}\psi_0 G_t &= G_t \Rightarrow \psi_0 = 1,\\ \psi_1 G_{t-1} &= (\beta+\gamma)\psi_0 G_{t-1} \Rightarrow \psi_1 = (\beta+\gamma)\psi_0 \Rightarrow \psi_1 = (\beta+\gamma),\\ \psi_2 G_{t-2} &= (\beta+\gamma)\psi_1 G_{t-2} - \gamma\psi_0 G_{t-2} \Rightarrow \psi_2 = (\beta+\gamma)\psi_1 - \gamma\psi_0,\\ &\vdots\\ \psi_j &= (\beta+\gamma)\psi_{j-1} - \gamma\psi_{j-2}, \quad j \geq 2.\end{aligned}$$

Desse modo, os coeficientes $\psi_j, j \geq 2$, segue a mesma recorrência homogênea de segunda ordem, com $\psi_0 = 1$ e $\psi_1 = \beta + \gamma$ e, para resolver, utilizaríamos a mesma Equação Característica (4.17). Logo, a solução, pode ser escrita da seguinte forma

$$\psi_j = C_3 r_1^j + C_4 r_2^j,$$

com $C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 2\sqrt{\gamma} - \gamma$. Para o caso em que $\beta = 2\sqrt{\gamma} - \gamma$, a solução pode ser escrita da seguinte maneira

$$\psi_j = C_3 r^j + C_4 j r^j, \qquad C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

As constantes, podem ser encontradas por meio das condições iniciais ψ_0 e ψ_1. Vamos atribuir alguns valores para β e γ e ver o que ocorre com a solução.
Se $\beta = \dfrac{4}{5}$ e $\gamma = \dfrac{1}{5}$,

$$r = \frac{(\beta+\gamma) \pm \sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\gamma}}{2} \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - \frac{4}{5}}}{2} \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}}{2} \Rightarrow$$

$$r=\frac{1\pm\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}\Rightarrow r=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{10}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10} \\ r_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} r_1\approx 0,72 \\ r_2\approx 0,28 \end{cases}.$$

Ou seja, possuí duas raízes distintas e reais. Além disso, podemos encontrar as contantes C_3 e C_4, uma vez que

$$\begin{cases} \psi_0=1=C_3(r_1)^0+C_4(r_2)^0 \\ \psi_1=\beta+\gamma=1=C_3r_1+C_4r_2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_3+C_4=1 \\ C_3r_1+C_4r_2=1 \end{cases}.$$

Isolando umas das constantes C_3 ou C_4 na 1ª equação do sistema linear, e substituindo na segunda, obtemos:

$$\begin{cases} C_3=\dfrac{1-r_2}{r_1-r_2} \\ C_4=\dfrac{1-r_1}{r_2-r_1} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_3\approx 1,64 \\ C_4\approx -0,64 \end{cases}.$$

Se $\beta=\dfrac{3}{4}$ e $\gamma=\dfrac{1}{4}$ então

$$r=\frac{(\beta+\gamma)\pm\sqrt{(\beta+\gamma)^2-4\gamma}}{2}\Rightarrow r=\frac{1\pm\sqrt{1^2-1}}{2}\Rightarrow r=\frac{1\pm\sqrt{0}}{2}\Rightarrow r=\frac{1}{2}.$$

Então, possuí uma única raiz real. Agora, podemos encontrar os valores das constantes C_3 e C_4, pois

$$\begin{cases} \psi_0=1=C_3r^0+C_4\cdot 0\cdot r^0 \\ \psi_1=\beta+\gamma=1=C_3r+C_4\cdot 1\cdot r \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_3=1 \\ C_3r+C_4r=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow rC_4=1-r\Rightarrow\frac{1}{2}C_4=1-\frac{1}{2}\Rightarrow C_4=1.$$

Considere $\beta=\dfrac{2}{3}$ e $\gamma=\dfrac{2}{3}$.
Neste caso teremos

$$r=\frac{(\beta+\gamma)\pm\sqrt{(\beta+\gamma)^2-4\gamma}}{2}\Rightarrow r=\frac{\frac{4}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{8}{3}}}{2}\Rightarrow r=\frac{\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}-\frac{8}{3}}}{2}\Rightarrow$$

$$r=\frac{\frac{4}{3}\pm i\frac{2}{3}\sqrt{2}}{2}\Rightarrow r=\frac{2}{3}\pm i\frac{\sqrt{2}}{3}\Rightarrow r=\frac{1}{3}\left(2\pm i\sqrt{2}\right)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{3}\left(2 + i\sqrt{2}\right) \\ r_2 = \dfrac{1}{3}\left(2 - i\sqrt{2}\right) \end{cases}.$$

Agora, encontraremos as constantes C_3 e C_4,

$$\begin{cases} \psi_0 = 1 = C_3(r_1)^0 + C_4(r_2)^0 \\ \psi_1 = \beta + \gamma = \dfrac{4}{3} = C_3 r_1 + C_4 r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 + C_4 = 1 \\ C_3 r_1 + C_4 r_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

Isolando umas das constantes C_3 ou C_4 na 1ª equação do sistema linear, e substituindo na segunda, obtemos:

$$\begin{cases} C_3 = \dfrac{4/3 - r_1}{r_2 - r_1} \\ C_4 = \dfrac{4/3 - r_2}{r_1 - r_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = \dfrac{4/3 - r_1}{r_2 - r_1} \\ C_4 = \dfrac{4/3 - r_2}{r_1 - r_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = \dfrac{4/3 - (2/3 + i\sqrt{2}/3)}{2/3 - i\sqrt{2}/3 - (2/3 + i\sqrt{2}/3)} \\ C_4 = \dfrac{4/3 - 2/3 - i\sqrt{2}/3}{2/3 + i\sqrt{2}/3 - (2/3 - i\sqrt{2}/3} \end{cases}.$$

Fazendo as devidas manipulações algébricas, concluímos que

$$\begin{cases} C_3 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ C_4 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Capítulo 5

Aplicação

Um dos maiores dilemas encontrados pelo professor de Matemática é trabalhar vários conceitos abstratos com os alunos em um espaço muito curto de tempo. Tanto o currículo quanto o tempo não permite que os conceitos de juros e porcentagens sejam aprofundados de forma a levar o aluno a refletir sobre o uso no seu dia a dia.

Sendo assim, o principal objetivo dessa capítulo é apresentar ao professor da Educação Básica exercícios resolvidos sobre Educação Financeira que envolvam Aportes Mensais, Juros Compostos e Sistema de Amortização desenvolvidos a partir do conceitos de recorrências de primeira ordem homogêneas e não homogêneas, para que os alunos sejam incentivados a buscar esse conhecimento.

O primeiro problema proposto foi exatamente o que gerou toda a discussão sobre esse trabalho. Foi feito um questionamento sobre qual seria o patrimônio futuro de uma determinada pessoa, sendo colocada uma condição adicional, seriam feitos aportes mensais além de seu capital inicial. Diante das condições apresentadas, foi verificado que os conceitos ensinados no Ensino Fundamental e Médio não eram suficientes para dar uma resposta ao problema, então a partir do conceito de recorrência foi possível encontrar uma solução.

Dando sequência, serão resolvidos problemas de Juros compostos em vários contextos e Sistema de Amortização, comparando os Sistemas Price e SAC, para uma melhor interpretação dos resultados encontrados serão apresentados em alguns momentos serão utilizados tabelas e gráficos de barras. Para elaboração deste capítulo, foram utilizadas as referências [1, 7, 21, 24, 26, 30].

5.1 Investimento com aportes mensais

Suponhamos que uma pessoa tem um capital inicial e deseja multiplicar esse patrimônio após um período de tempo considerável. Para tal, resolve investir essa quantia em fundos de investimentos, porém além disso para acelerar esse processo, fará depósitos mensais sem falta nesses fundos. Como descobrir qual será seu patrimônio após um período de tempo? Quanto tempo ele demorará para conseguir atingir um patrimônio desejado? Vamos propor um exemplo numérico que trata desse assunto.

Exemplo 22 *Lucas é um investidor de longo prazo, com objetivo de viver de renda em alguns anos. Para tal, faz aportes mensais de R$ 500,00. Além disso, ele já possui R$ 50.000,00 investidos. Supondo que seus investimentos rendem 1% a.m (ao mês). Encontre uma fórmula que estima o patrimônio de Lucas em um mês t qualquer.*
Inicialmente, para facilitar a compreensão do que de fato está acontecendo neste problema, tome um t *particular, por exemplo* $t = 4$*, será utilizado a Tabela 5.1 para verificar o que ocorre, a primeira de forma, onde:*
t*: Período de tempo,*
C_t*: Capital no período* t*,*
A*: Aportes,*
J_t*: Juros do período* t*.*

t	C_{t-1}	Aportes	J_t	C_t
1	C_0	500	$J_1 = i \cdot C_0$	$C_1 = C_0 + J_1 + A$
2	C_1	500	$J_2 = i \cdot C_1$	$C_2 = C_1 + J_2 + A$
3	C_2	500	$J_3 = i \cdot C_2$	$C_3 = C_2 + J_3 + A$
4	C_3	500	$J_4 = i \cdot C_3$	$C_4 = C_3 + J_4 + A$

Tabela 5.1: Investimentos Genérico para $t = 4$

Substituindo os valores dados no problema, ou seja, $C_0 = 50000$, $i = 1\% = 0,01$ *e* $A = 500$ *e fazendo as devidas iterações com o passar do tempo, obtemos a Tabela 5.2.*

t	C_{t-1}	A	J_t	C_t
1	50.000	500	$0,01 \cdot 50.000 = 500$	$C_1 = 50.000 + 500 + 500 = 51.000$
2	51.000	500	$0,01 \cdot 51.000 = 510$	$C_2 = 51.000 + 510 + 500 = 52.010$
3	52.010	500	$0,01 \cdot 52.010 = 520,10$	$C_3 = 52.010 + 520,10 + 500 = 53.030,10$
4	53.030,10	500	$0,01 \cdot 53.030,10 \approx 530,30$	$C_4 \approx 53.030,10 + 530,30 + 500 = 54.060,40$

Tabela 5.2: Investimento de Lucas para $t = 4$

Retornando ao problema inicial, para resolver tal problema e encontrar uma fórmula para estimar o patrimônio em um período de t qualquer, considere a recorrência $C_{t+1} = 1,01 \cdot\ C_t + 500, \forall\ t \in \mathbf{N}$, *com* $C_0 = 50000$, *onde* C_t *é o capital no período* t.

Afim de determinar uma solução para C_t, *seja a recorrência linear de primeira ordem homogênea associada a* C_t, $\alpha_{t+1} = 1,01 \cdot \alpha_t, \forall\ t \in \mathbf{N}$. *Observe que, variando t obtemos as seguintes igualdades,*

$$\alpha_1 = 1,01 \cdot \alpha_0,$$

$$\alpha_2 = 1,01 \cdot \alpha_1,$$

$$\vdots$$

$$\alpha_t = 1,01 \cdot \alpha_{t-1}.$$

Multiplicando as equações membro a membro, temos

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_t = (1,01 \cdot \alpha_0) \cdot (1,01 \cdot \alpha_1) \cdots (1,01 \cdot \alpha_{t-1}),$$

$$\alpha_t = (1,01)^t \cdot \alpha_0.$$

Tomando a condição inicial $\alpha_0 = 1$ *segue a solução para a recorrência*

$$\alpha_t = (1,01)^t.$$

Fazendo uma substituição $C_t = \alpha_t \cdot Y_t$, *na recorrência inicial obtemos*

$$C_{t+1} = 1,01 \cdot C_t + 500 \Rightarrow (1,01)^{t+1} \cdot Y_{t+1} = 1,01 \cdot 1,01^t \cdot Y_t + 500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1,01)^{t+1} \cdot Y_t = (1,01)^{t+1} \cdot Y_t + 500.$$

Dividindo ambos os membros da equação por $(1,01)^{t+1}$, *obtemos*

$$Y_{t+1} = Y_t + \frac{500}{(1,01)^{t+1}}.$$

Resolvendo, a recorrência anterior:

$$Y_1 = Y_0 + \frac{500}{1,01},$$

$$Y_2 = Y_1 + \frac{500}{(1,01)^2},$$

$$\vdots$$

$$Y_t = Y_{t-1} + \frac{500}{(1,01)^t}.$$

Somando as equações membro a membro

$$Y_t = Y_0 + \frac{500}{1,01} + \frac{500}{(1,01)^2} + \cdots + \frac{500}{(1,01)^t},$$

$$Y_t = Y_0 + 500 \cdot \left(\frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,01^2} + \cdots + \frac{1}{1,01^t} \right).$$

Note que a soma dentro de parênteses trata-se de uma progressão geométrica, cujo de razão $q = \dfrac{1}{1,01}$. *Como, temos que a soma dos* t *primeiros termos de uma progressão geométrica é*

$$S_t = \frac{a_1 \cdot (q^t - 1)}{q - 1}. \tag{5.1}$$

Substituindo os valores de a_1 *e* q *na Equação* (5.1) *obtemos*

$$S_t = \frac{1}{1,01} \cdot \frac{\left[\left(\frac{1}{1,01} \right)^t - 1 \right]}{\frac{1}{1,01} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{1,01} \right)^t - 1}{1 - 1,01} = \frac{\frac{1}{1,01^t} - 1}{-0,01} = \frac{\frac{1 - 1,01^t}{1,01^t}}{-0,01} \Rightarrow$$

$$S_t = \frac{1,01^t - 1}{1,01^t \cdot 0,01}.$$

Logo,

$$Y_t = Y_0 + 500 \cdot \left(\frac{1,01^t - 1}{1,01^t \cdot 0,01} \right).$$

Como $C_0 = 50000$, *temos que*

$$C_0 = \alpha_0 \cdot Y_0,$$

$$50000 = 1 \cdot Y_0 \implies Y_0 = 50000.$$

Desta forma, temos

$$Y_t = 50000 + 500 \cdot \left(\frac{1,01^t - 1}{1,01^t \cdot 0,01} \right).$$

Com isso, concluímos que

$$C_t = 1,01^t \cdot \left[50000 + 500 \cdot \left(\frac{1,01^t - 1}{1,01^t \cdot 0,01}\right)\right],$$

$$C_t = 1,01^t \cdot 50000 + 500 \cdot \left(\frac{1,01^t - 1}{0,01}\right). \tag{5.2}$$

Vamos analisar agora o poder dessa fórmula, observando o patrimônio investido de Lucas após um determinado período de meses.

Exemplo 23 *Qual será o patrimônio de Lucas com seus investimentos, considerando as condições iniciais anteriores após um período de 120 meses?*
Utilizando a fórmula (5.2), para $t = 120$*, obtemos*

$$C_{120} = 1,01^{120} \cdot 50000 + 500 \cdot \left(\frac{1,01^{120} - 1}{0,01}\right),$$

$$C_{120} \approx 3,30038689 \cdot 50000 + 500 \cdot \left(\frac{3,30038689 - 1}{0,01}\right),$$

$$C_{120} \approx 165019,34 + 500 \cdot 230,038689,$$

$$C_{120} \approx 165019,34 + 115019,34,$$

$$C_{120} \approx 280038,68.$$

Ou seja, após 10 anos (120 meses), o patrimônio de Lucas deve ser aproximadamente R$ 280.000,00.

Uma pergunta muito pertinente, é quanto de fato ele ganhou com esses investimentos e quanto ele investiu ao longo desses 10 anos. Vamos aos cálculos.

1) Quanto ele investiu no total?

Para responder essa pergunta o cálculo é bem simples. Basta somar o capital inicial (R$ 50.000,00) com os 120 aportes mensais de R$ 500,00. Logo

$$Capital\ Investido \ = \ 50000 + 120 \cdot 500 = 50000 + 60000 = 110000.$$

Portanto, o valor investido por Lucas foi de R$ 110.000,00.

2) Quanto o investimento rendeu de lucro nesses 10 anos?

Para descobrir isso bastante subtrair o montante final do valor investido, ou seja,

$$280000 - 110000 = 170000.$$

Com isso, concluí-se que nessas condições o rendimento desse investimento foi de R$ 170.000,00. Portanto um rendimento de aproximadamente 154% em relação a todo capital investido. E esse valor aumenta exponencialmente com relação ao tempo. Com 20 anos, a expectativa de montante é superior a R$ 1.000.000,00.

De modo geral, se iniciarmos os investimentos com um capital C_0 a uma taxa mensal i e aportes mensais de valor A (começando no período $n = 0$. Teremos a seguinte situação:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 + iC_0 + A = (1+i) \cdot C_0 + A, \\ C_2 &= C_1 + iC_1 + A = (1+i) \cdot C_1 + A. \end{aligned}$$

Generalizando chegamos na seguinte recorrência

$$C_{t+1} = (1+i) \cdot C_t + A.$$

Vamos resolvê-la, utilizando o mesmo procedimento que utilizamos na situação problema do Lucas. Associando esta recorrência original a sua recorrência homogênea

$$\alpha_{t+1} = (1+i) \cdot \alpha_t, \qquad \forall\ t \in \mathbf{N}.$$

Explicitando os termos, obtemos

$$\alpha_1 = (1+i) \cdot \alpha_0,$$

$$\alpha_2 = (1+i) \cdot \alpha_1,$$

$$\vdots$$

$$\alpha_t = (1+i) \cdot \alpha_{t-1}.$$

Multiplicando os termos, membro a membro

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_t = ((1+i) \cdot \alpha_0) \cdot ((1+i) \cdot \alpha_1) \cdots ((1+i) \cdot \alpha_{t-1}),$$

$$\alpha_t = (1+i)^t \cdot \alpha_0.$$

Tomando a condição inicial $\alpha_0 = 1$, segue que a solução para a recorrência homogênea é

$$a_n = (1+i)^t.$$

Fazendo a substituição $C_t = \alpha_t \cdot Y_t$ na recorrência original

$$C_{t+1} = (1+i) \cdot C_t + A \Rightarrow \alpha_{t+1} \cdot Y_{t+1} = (1+i) \cdot \alpha_t + A \Rightarrow (1+i)^{t+1} \cdot Y_{t+1} = (1+i)^{t+1} \cdot Y_t + A.$$

Dividindo ambos os membros da equação por $(1+i)^{t+1}$ obtemos

$$Y_{t+1} = Y_t + \frac{A}{(1+i)^{t+1}}.$$

Repetindo o processo de explicitar os termos

$$Y_1 = Y_0 + \frac{A}{1+i},$$

$$Y_2 = Y_1 + \frac{A}{(1+i)^2},$$

$$\vdots$$

$$Y_t = Y_{t-1} + \frac{A}{(1+i)^t}.$$

Somando as equações membro a membro

$$Y_t = Y_0 + \frac{A}{1+i} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^t},$$

$$Y_t = Y_0 + A \cdot \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^t} \right).$$

Note que a soma dentro de parênteses trata-se de uma progressão geométrica, cujo de razão $q = \dfrac{1}{1+i}$. Como a soma dos t primeiros termos da progressão geométrica é

$$S_t = \frac{a_1 \cdot (q^t - 1)}{q - 1}.$$

Substituindo os valores na equação obtemos

$$S_t = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\left[\left(\frac{1}{1+i} \right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{1+i} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{1+i} \right)^t - 1}{1 - (1+i)} = \frac{\frac{1}{(1+i)^t} - 1}{-i} = \frac{\frac{1 - (1+i)^t}{(1+i)^t}}{-i} \Rightarrow$$

$$S_t = \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i}.$$

Logo

$$Y_t = Y_0 + A \cdot \left(\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right).$$

Além disso, note que

$$C_0 = \alpha_0 \cdot Y_0,$$

$$C_0 = 1 \cdot Y_0 \implies Y_0 = C_0.$$

Desta forma, temos

$$Y_t = C_0 + A \cdot \left(\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right).$$

Com isso, concluímos que

$$C_y = (1+i)^t \cdot \left[C_0 + A \cdot \left(\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right) \right].$$

Consequentemente, a fórmula geral é

$$C_t = (1+i)^t \cdot C_0 + A \cdot \left(\frac{(1+i)^t - 1}{i} \right). \tag{5.3}$$

Portanto, a Fórmula (5.3) tem a funcionalidade de buscar prever um retorno futuro, com base em uma taxa de juros esperada. Porém não existe uma fórmula que dá o resultado com exatidão, pois os investimentos de modo geral dependem de uma série de variáveis e oscilam com o passar do tempo, mas a utilizando com uma taxa de juros razoável, é possível ter uma boa expectativa, podendo inclusive escolher variados cenários desde os mais otimistas (taxas de juros mais altas) aos mais conservadores (taxas de juros mais baixas).

Observação 16 *No desenvolvimento dessa seção, foi considerado o caso onde esse aporte periódico é fixo e constante, mas nada impede desse valor ser variável e em função do tempo, pois eles podem aumentar com mudança de empregos, promoções salariais, etc. Por ser um capítulo para o Ensino Médio, esse caso não será analisado, mas é uma sugestão para ser comentado com os estudantes.*

5.2 Problemas Resolvidos - Juros Compostos

Nesta seção serão resolvidos oito problemas envolvendo juros compostos, cada um envolvendo um conceito diferente. Os problemas 24, 25, 26 são aplicações diretas da fórmula de juros compostos, sendo que o segundo no contexto de comparação de montantes, ou seja, uma análise de caso. No terceiro, será calculado o valor do juro. No problema 27 calcularemos o capital inicial, para tal deve-se manipular a fórmula de juros compostos. Os problemas 28 e 29 tratam da taxa mensal, de modo geral, para encontra-las requer o conhecimento de raízes n-ésimas e algumas manipulações algébricas, o 28 é uma aplicação direta de raízes n-ésimas, já o 29 requer além do que foi pedido no problema anterior a conversão de tempo. Para o problema 30 procura-se o tempo, e são necessários conhecimentos de logaritmo e suas propriedades. Por fim, o último problema 31 é um exercício que não possui alguns dados iniciais, ou seja, mais genérico, porém pode ser resolvido facilmente com manipulações algébricas.

Exemplo 24 ***Antônio investe a quantia de R$ 4.500,00 a juros de 1% ao mês. Qual será o montante retirado após um período de 3 anos?***

Note que o período de 3 anos, corresponde a 36 meses. Logo, devemos encontrar M_{36} *pela Fórmula* (3.3)*, obtemos:*

$$M_{36} = 4.500(1 + 0,01)^{36} \Rightarrow M_{36} = 4.500 \cdot 1,01^{36}.$$

Realizando os cálculos na calculadora, obtemos:

$$M_{36} = 6.438,46.$$

Portanto Antonio irá retirar após 3 anos a quantia de R$ 6.438,46.

Os problemas resolvidos a seguir, foram extraídos do livro [21].

Exemplo 25 ***Afonso pode comprar um terreno por R$ 20.000,00. Ele sabe que, com certeza, o terreno valerá R$ 30.000,00 daqui a 5 anos. Se ele tiver a alternativa de aplicar o dinheiro a juros compostos, à taxa de 9% ao ano, será que a aplicação no terreno valerá a pena?***

Note que esse problema quer comparar dois montantes após 5 anos, o valor que o terreno valerá foi dado, resta calcular quanto ele ganhará com a aplicação a juros compostos, a uma taxa de 9% ao ano. Utilizando a Fórmula (3.3)*, obtemos:*

$$M_5 = 20.000(1 + 0,09)^5 \Rightarrow M_5 = 20.000 \cdot 1,09^5 \Rightarrow M_5 = 30.772,48.$$

Portanto, caso o valor do terreno após 5 anos seja de apenas R$ 30.000,00 é mais vantajoso para Afonso aplicar o dinheiro a juros compostos.

Exemplo 26 ***José Luís aplicou R$ 12.000,00 por 10 meses num fundo que rende juros compostos à taxa de 1,4% a.m. Quanto ele ganhou de juros ao longo do 10º mês?***

Observe, que pela Fórmula (3.3) *podemos encontrar o montante, mas não o juros diretamente. Porém, como já temos o capital inicial, basta subtrair o montante ao final do 10º mês do capital e o juros será encontrado. Logo:*

$$M_10 = 12.000 \cdot (1 + 0,014)^{10} = 12.000 \cdot 1,014^{10} = 13.789,89.$$

Portanto,

$$M = C + J \Rightarrow J = M - C \Rightarrow J = 13.789,89 - 12.000 = 1.789,89.$$

Ou seja, José Luís ganhou R$ 1.789,89 por essa aplicação.

Exemplo 27 ***Qual capital que deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 1,8% a.m., durante 8 meses, para dar um montante de R$ 6.000,00?***
Note que nesse problema, não é o montante que deve ser encontrado, pelo contrário esse valor é conhecido. O valor desejado é o do capital. Pela Equação (3.3)*, obtemos:*

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow C = \frac{M}{(1+i)^t}.$$

Substituindo os valores dados no problema:

$$C = \frac{6.000}{(1+0,018)^8} = \frac{6.000}{1,018^8} = 5.201,98.$$

Portanto, o capital que deve ser aplicado nessas condições para gerar um montante de R$ 6.000,00 é de R$ 5.201,98.

Exemplo 28 ***Um fogão é vendido à vista por R$ 800,00 ou a prazo com 30% de entrada mais uma parcela de R$ 700,00 após 5 meses. Qual a taxa mensal de juros compostos do financiamento?***
Note que ele deseja saber a taxa i, e dá todas as demais condições iniciais. Além disso, como a entrada é de 30%, segue que, 30% *de* $800 = \frac{30}{100} \cdot 800 = 30 \cdot 8 = 240.$
Logo, o financiamento é de apenas R$ 560,00, ou seja, $C = 560$*. Pela Fórmula* (3.3)*, obtemos:*

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow (1+i)^t = \frac{M}{C}.$$

Substituindo os valores na equação obtemos

$$(1+i)^5 = \frac{700}{560} \Rightarrow (1+i)^5 = 1,25.$$

Observe que ambos valores são positivos, dessa forma podemos elevar ambos os membros da equação por $\frac{1}{5}$*, assim:*

$$[(1+i)^5]^{\frac{1}{5}} = 1,25^{\frac{1}{5}} \Rightarrow (1+i) = 1,0456 \Rightarrow i = 1,0456 - 1 \Rightarrow i = 0,0456.$$

Portanto, a taxa de juros mensal deve ser de aproximadamente 4,56 % a.m.

Exemplo 29 ***Um banco concedeu um empréstimo a uma empresa no valor de R$ 20.000,00, pelo prazo de 72 dias, cobrando um montante de R$ 26.000,00.***

a) Qual é a taxa mensal de juros compostos do financiamento?

b) Qual é a taxa anual de juros compostos do financiamento?

Para resolver esse problema, inicialmente deve-se encontrar a taxa diária e depois convertê-la em taxa mensal, e por fim em taxa anual.

Substituindo os valores

$$(1+i)^{72} = \frac{26.000}{20.000} \Rightarrow (1+i)^{72} = 1,3.$$

Elevando ambos membros da equação por $\frac{1}{72}$

$$[(1+i)^{72}]^{\frac{1}{72}} = 1,3^{\frac{1}{72}} \Rightarrow (1+i) = 1,0037 \Rightarrow i = 0,0037.$$

Portanto, a taxa diária é de $0,37$. *Para encontrar a taxa mensal, basta elevar* $(1+i)$ *pela quantidade de dias que há em um mês comercial, que por convenção é 30 dias. Logo*

$$(1,0037)^{30} \approx 1,1155.$$

*Dessa forma, respondendo o item **a** a taxa de juros mensal é de aproximadamente 11,55 % a.m.*

Agora, utilizando o mesmo processo, para converter meses em anos, obtemos

$$(1,1155)^{12} = 3,71293$$

Logo, como $3,71293 - 1 = 2,71293$, *segue que a taxa anual é de 271,293 % a.a., que é a resposta do item **b**.*

Exemplo 30 ***Durante quanto tempo um capital de R\$5.000,00 deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 1,9% a.m. para se obter um montante de R\$ 7.000,00?***

Observe, que o problema pede o tempo em meses (para facilitar os cálculos visto que a taxa está em meses). Utilizando a Fórmula (3.3)

$$7.000 = 5.000 \cdot (1+0,019)^t \Rightarrow \frac{7000}{5000} = 1,019^t \Rightarrow 1,4 = 1,019^t.$$

Para resolver esse problema, utilizamos o logaritmo, e utilizando suas propriedades, obtemos

$$\log 1,4 = \log 1,019^t \Rightarrow \log 1,4 = t \cdot \log 1,019 \Rightarrow t = \frac{\log 1,4}{\log 1,019} \Rightarrow t = 17,88.$$

Portanto, diante das condições iniciais dadas no problema, o tempo necessário para conseguir o montante de R\$ 7.000,00 é de aproximadamente 17,88 meses.

Exemplo 31 ***A que taxa trimestral de juros compostos um capital deve ser aplicado durante 1 ano para que duplique seu valor?***

Inicialmente, observe que cada trimestre corresponde a 3 meses, logo, como o tempo total é de 1 ano, convertendo esse tempo em trimestres, corresponderá a 4 trimestres. Como deseja que o capital seja duplicado, segue que $M = 2C$*. Substituindo na Fórmula* (3.3)*:*

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow 2C = C(1+i)^4 \Rightarrow \frac{2C}{C} = (1+i)^4.$$

Como $C \neq 0$*, tem-se que* $\frac{2C}{C} = 2$*, logo o valor de* C *não importa nesse problema. Logo*

$$2 = (1+i)^4.$$

Elevando ambos os membros da equação por $\frac{1}{4}$*, obtém-se*

$$2^{\frac{1}{4}} = [(1+i)^4]^{\frac{1}{4}} \Rightarrow i \approx 1,1892 - 1 \Rightarrow i \approx 0,1892.$$

Portanto, a taxa trimestral de juros é de aproximadamente 18,92 % a.t.

5.3 Problemas Resolvidos - Sistemas de Amortização

Nessa seção serão feitas estudos de casos para os sistemas de amortização Price e SAC, por meio de resolução de problemas.

Exemplo 32 *Carolina deseja muito comprar um carro que custa R\$ 50.000,00, buscando opções de financiamento, o gerente de um banco a ofereceu este capital, a uma taxa de juros de 2% ao mês, que deverão ser pagas em 36 meses. Calcule os juros e o montante que deverão ser pagos segundo o sistema:*

a) Price

b) Sac

(a) *O Sistema Price de amortização tem como principal característica parcelas constantes. Descobriremos primeiramente o valor de cada prestação. Utilizando a Fórmula 3.6, obtemos:*

$$P = D_0 \cdot \left(\frac{i}{1-(1+i)^{-T}}\right) = 50.000 \cdot \left(\frac{0,02}{1-(1+0,02)^{-36}}\right).$$

Efetuando os cálculos na calculadora, obtemos que

$$P \approx 1.961,64.$$

Logo, como serão 36 parcelas de R$ 1.961,64, para calcular o montante, bastante multiplicar os valores, assim:

$$M = 36 \cdot 1.961,44 = 70.619,04.$$

Por outro lado, como o valor do carro era R$50.000,00, segue que o $J = M - C \Rightarrow J = 70.619,04 - 50.000,00 \Rightarrow J = 20.619,04.$

(b) *Já o Sistema SAC, tem como característica amortizações constantes. Porém, como ele pede o montante é o juros. Basta encontrar o somatório dos juros. Pela Fórmula* (3.10)

$$\sum_{i=1}^{n} J_i = \frac{iD_0 \cdot (n+1)}{2} = \frac{0,02 \cdot 50.000 \cdot (36+1)}{2} = \frac{1000 \cdot 37}{2} = \frac{37.000}{2} = 18.500.$$

Portanto o juros total é R$ 18.500,00. Além disso, o montante é soma do capital com o juro, daí

$$M = C + J \Rightarrow M = 50.000 + 18.500 \Rightarrow M = 68.500.$$

Comparando apenas os juros de ambos sistemas de amortização, note que o do SAC é inferior, mas ainda assim valores próximos considerando o valor do capital. Essa diferença torna-se mais evidente em períodos longos, o qual geralmente é caso de financiamento de imóveis. No próximo exemplo, serão feitas as comparações entre os dois sistemas de amortização de forma mais detalhada.

Exemplo 33 *Carolina deseja comprar uma moto de R$20.000,00 e tem uma entrada no valor de R$ 8.000,00, que será paga no ato da compra. Analise as opções financiamentos nos sistemas SAC e Price, considerando que o banco a ofereceu crédito a taxa de 3% ao mês e que ela deseja quitar a dívida em 1 ano.*

Inicialmente, como o custo da moto é de R$ 20.000,00 e Carolina já possuí a entrada de R$ 8.000,00, sua dívida com o banco será de apenas $20.000 - 8.000 = 12.000$. *Logo para o financiamento o saldo devedor será de R$ 12.000,00. Para fins de comparação, será utilizado uma tabela, com cada uma das variáveis, onde pode ser visualizado o que ocorre em cada período e em cada sistema de amortização. As variáveis são:*

t: Período de tempo,

P_t*: Parcela do período* t,

A_t*: Valor amortizado no período* t,

J_t*: Juros do período* t,

D_t: Dívida ou saldo devedor no período t,

T: tempo para quitar a dívida.

Pelos dados do problema, temos

$D_0 = 12.000$,

$i = 3\%\ a.m = 0,03$,

$T = 12$.

Agora, serão analisados cada um dos sistemas

Price: *Neste sistema, as parcelas são constantes, pela Fórmula* (3.6)*:*

$$P = D_0 \cdot \left(\frac{i}{1-(1+i)^{-T}}\right).$$

Substituindo os valores dados pelo problema,

$$P = 12.000 \cdot \left(\frac{0,03}{1-(1+0,03)^{-12}}\right) = 12.000 \cdot \left(\frac{0,03}{1-(1,03)^{-12}}\right).$$

Efetuando os cálculos na calculadora

$$P \approx 1.205,55.$$

A Tabela 5.3, ficará da seguinte forma

t	P_t	J_t	A_t	D_t
0	0	0	0	D_0
1	P	$J_1 = iD_0$	$A_1 = P - J_1$	$D_1 = D_0 - A_1$
2	P	$J_2 = iD_1$	$A_2 = P - J_2$	$D_2 = D_1 - A_2$
3	P	$J_3 = iD_2$	$A_3 = P - J_3$	$D_3 = D_2 - A_3$
4	P	$J_4 = iD_3$	$A_4 = P - J_4$	$D_4 = D_3 - A_4$
5	P	$J_5 = iD_4$	$A_5 = P - J_5$	$D_5 = D_4 - A_5$
6	P	$J_6 = iD_5$	$A_6 = P - J_6$	$D_6 = D_5 - A_6$
7	P	$J_7 = iD_6$	$A_7 = P - J_7$	$D_7 = D_6 - A_7$
8	P	$J_8 = iD_7$	$A_8 = P - J_8$	$D_8 = D_7 - A_8$
9	P	$J_9 = iD_8$	$A_9 = P - J_9$	$D_9 = D_8 - A_9$
10	P	$J_{10} = iD_9$	$A_{10} = P - J_{10}$	$D_{10} = D_9 - A_{10}$
11	P	$J_{11} = iD_{10}$	$A_{11} = P - J_{11}$	$D_{11} = D_{10} - A_{11}$
12	P	$J_{12} = iD_{11}$	$A_{12} = P - J_{12}$	$D_{12} = D_{11} - A_{12}$

Tabela 5.3: Planilha Price - Caso Geral para 12 parcelas

A Tabela 5.4 será construída substituindo as condições iniciais e o valor da parcela encontrado, ou seja, $P_t = P = R\$\ 1.205,55, \forall t \in \mathbb{N}$. *Além disso, note que no período* *inicial* $t = 0$, *há apenas o valor da dívida feita com o banco, para esse caso* $D_0 = 12.000$, *mas não há juros, pagamento de parcela e consequentemente nem amortização da dívida, logo* $P_0 = J_0 = A_0 = 0$. *Por fim, a Tabela 5.4 será preenchida por iterações, período por período, iniciando de* $t = 0$ *até o último período* $t = 12$, *e na ordem (esquerda para a direita), ou seja, parcela, juros, amortização e dívida dos períodos, respectivamente. A linha do tempo* $t = 1$ *será feito passo a passo, substituindo os números na Tabela 5.3 as demais serão colocados apenas os resultados aproximados, pois para fins de dinheiro o importante são as duas casas após a vírgula.*

t	P_t	J_t	A_t	D_t
0	0	0,00	0,00	$12.000,00$
1	1.205,55	$0,03 \cdot 12.000 = 360$	$1.250,55 - 360 = 845,55$	$12.000 - 845,55 = 11.154,45$
2	1.205,55	$334,63$	$870,91$	$10.283,54$
3	1.205,55	$308,51$	$897,04$	$9.386,50$
4	1.205,55	$281,60$	$923,95$	$8.462,56$
5	1.205,55	$253,88$	$951,67$	$7.510,89$
6	1.205,55	$225,33$	$980,22$	$6.530,67$
7	1.205,55	$195,92$	$1.009,62$	$5.521,04$
8	1.205,55	$165,63$	$1.039,91$	$4.481,13$
9	1.205,55	$134,43$	$1.071,11$	$3.410,02$
10	1.205,55	$102,30$	$1.103,24$	$2.306,77$
11	1.205,55	$69,20$	$1.136,34$	$1.170,43$
12	1.205,55	$35,11$	$1.170,43$	$0,00$

Tabela 5.4: Financiamento de Carolina - Sistema Price em 12 parcelas

Para encontrar todo o valor pago, basta multiplicar o valor da parcela, que é constante pelo número de parcelas, ou seja,

$$Total\ pago = 1.205,55 \cdot 12 = 14.466,60.$$

Portanto, o total de juros pago nessa operação pelo sistema Price será de $14.466,60 - 12.000 = 2.466,60$.

SAC: *O sistema SAC tem uma característica diferente, pois ao invés de ter parcelas constantes, tem-se amortização constante. Dessa forma, como o período para liquidar a dívida é de 12 meses, e a dívida é de R\$ 12.000,00, segue que o valor amortizado é*

$$A = \frac{12.000}{12} = 1.000.$$

Pelas Fórmulas (3.7), (3.8) e (3.9) a Tabela 5.5 com 12 parcelas ficará da seguinte maneira

t	J_t	A_t	P_t	D_t
0	0,00	0,00	0,00	D_0
1	$J_1 = iD_0$	A	$P_1 = A + J_1$	$D_1 = D_0 - A$
2	$J_2 = iD_1$	A	$P_2 = A + J_2$	$D_2 = D_1 - A$
3	$J_3 = iD_2$	A	$P_3 = A + J_3$	$D_3 = D_2 - A$
4	$J_4 = iD_3$	A	$P_4 = A + J_4$	$D_4 = D_3 - A$
5	$J_5 = iD_4$	A	$P_5 = A + J_5$	$D_5 = D_4 - A$
6	$J_6 = iD_5$	A	$P_6 = A + J_6$	$D_6 = D_5 - A$
7	$J_7 = iD_6$	A	$P_7 = A + J_7$	$D_7 = D_6 - A$
8	$J_8 = iD_7$	A	$P_8 = A + J_8$	$D_8 = D_7 - A$
9	$J_9 = iD_8$	A	$P_9 = A + J_9$	$D_9 = D_8 - A$
10	$J_{10} = iD_9$	A	$P_{10} = A + J_{10}$	$D_{10} = D_9 - A$
11	$J_{11} = iD_{10}$	A	$P_{11} = A + J_{11}$	$D_{11} = D_{10} - A$
12	$J_{12} = iD_{11}$	A	$P_{12} = A + J_{12}$	$D_{12} = D_{11} - A$

Tabela 5.5: Planilha SAC - Caso Geral para 12 parcelas

Observe que para o sistema SAC, foi explicitado cada uma das fórmulas, para encontrar J_t, P_t, D_t. O professor nesse caso pode propor o preenchimento da Tabela 5,5 de duas formas diferentes, encontrando cada valor por meio dessas fórmulas, ou de forma iterativa, como foi feita para o Sistema Price, cabe ressaltar que a ordem das colunas foram alteradas com objetivo em facilitar o preenchimento iterativo (da esquerda para a direita). Substituindo os valores numéricos na Tabela 5.5, obtemos a Tabela 5.6.

t	J_t	A_t	P_t	D_t
0	0,00	0,00	0,00	D_0
1	$0,03 \cdot 12.000 = 360$	1.000	$1.000 + 360 = 1.360$	$12.000 - 1.000 = 11.000$
2	$0,03 \cdot 11.000 = 330$	1.000	$1.000 + 330 = 1.330$	$11.000 - 1.000 = 10.000$
3	$0,03 \cdot 10.000 = 300$	1.000	$1.000 + 300 = 1.300$	$10.000 - 1.000 = 9.000$
4	$0,03 \cdot 9.000 = 270$	1.000	$1.000 + 270 = 1.270$	$9.000 - 1.000 = 8.000$
5	$0,03 \cdot 8.000 = 240$	1.000	$1.000 + 240 = 1.240$	$8.000 - 1.000 = 7.000$
6	$0,03 \cdot 7.000 = 210$	1.000	$1.000 + 210 = 1.210$	$7.000 - 1.000 = 6.000$
7	$0,03 \cdot 6.000 = 180$	1.000	$1.000 + 180 = 1.180$	$6.000 - 1.000 = 5.000$
8	$0,03 \cdot 5.000 = 150$	1.000	$1.000 + 150 = 1.150$	$5.000 - 1.000 = 4.000$
9	$0,03 \cdot 4.000 = 120$	1.000	$1.000 + 120 = 1.120$	$4.000 - 1.000 = 3.000$
10	$0,03 \cdot 3.000 = 90$	1.000	$1.000 + 90 = 1.090$	$3.000 - 1.000 = 2.000$
11	$0,03 \cdot 2.000 = 60$	1.000	$1.000 + 60 = 1.060$	$2.000 - 1.000 = 1.000$
12	$0,03 \cdot 1.000 = 30$	1.000	$1.000 + 30 = 1.030$	$1.000 - 1.000 = 0$

Tabela 5.6: Financiamento de Carolina - Sistema SAC em 12 parcelas

Assim, como foi feito para o Sistema Price, o valor total pago é a soma das parcelas, logo

$$\begin{aligned} Total\ pago &= 1.360 + 1.330 + 1.300 + 1.270 + 1.240 + 1.210 + 1.180 + \\ &\quad +1.150 + 1.120 + 1.090 + 1.060 + 1.030 = 14.340, \\ Total\ pago &= 14.340. \end{aligned}$$

Portanto, o total de juros, nessa operação pelo sistema SAC será de $14.340 - 12.000 = 2.340$.

Outro ponto que pode ser explorado pelo professor em sala de aula são as análises gráficas da ***dívida*** *(Figura 1) e do* ***juros*** *(Figura 2) com o passar do tempo em ambos os sistemas de amortização, SAC e Price.*

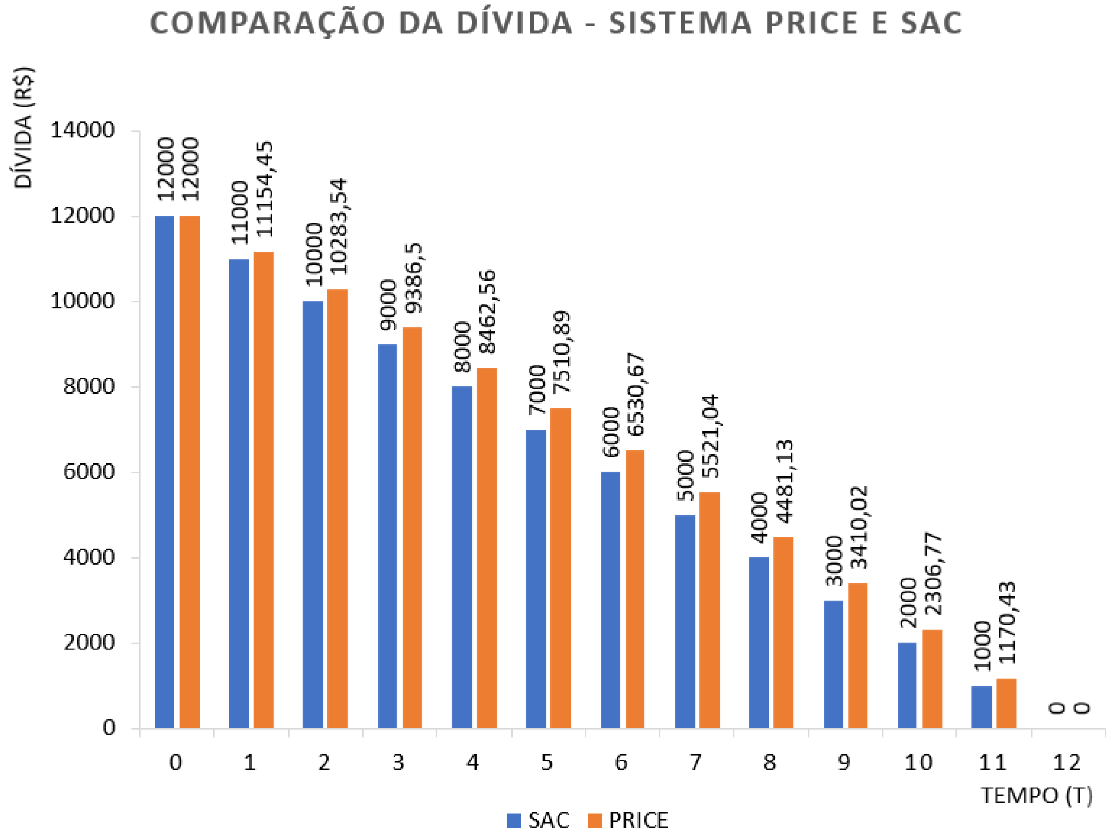

Figura 1: *Gráfico de comparação da Dívida - Sistema Price e SAC*

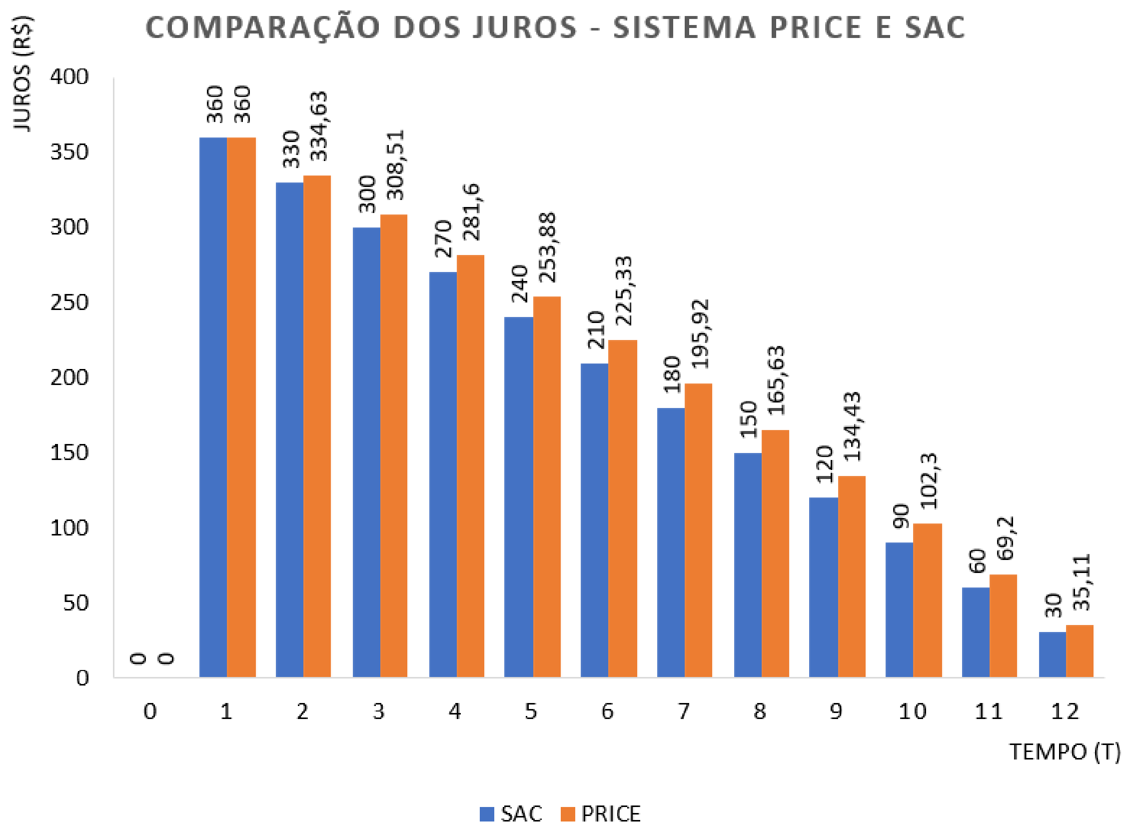

Figura 2: *Gráfico de comparação dos Juros - Sistema Price e SAC*

Analisando os gráficos da Figura 1 e Figura 2, pode-se tirar algumas conclusões, no Sistema Price o saldo devedor sempre será maior que a do Sistema SAC, com as únicas exceções no ato da dívida e ao quitar, por motivos óbvios, pois em ambos a dívida é feita no tempo $t = 0$ *e deveriam ser quitadas no mesmo período* $t = 12$. *E por consequência, os juros do sistema Price é superior em todos os períodos, com exceção do período* $t = 1$, *pois neste período é considerada a dívida inicial, que é a mesma. Além disso, no sistema SAC, a dívida e os juros tem um declínio constante, ou seja, uma progressão aritmética e pode ser modelado como uma função afim.*

Cabe ressaltar ao professor, que os cálculos feitos nesse exemplo são importantes para o estudante compreender a ideia de cada um dos sistemas de amortização. Porém é totalmente inviável faze-lo, manualmente ou até mesmo com calculadora nos casos em que a dívida será paga em um período muito superior ao visto no Exemplo 33. Porém, essa situação é comum em financiamentos de imóveis, os quais o prazo para quitar a dívida pode chegar a décadas. Desse modo, para facilitar sua análise recomenda-se a utilização da calculadora de amortização [7].

Exemplo 34 *Sugere-se como atividade, que o professor pesquise o preço médio dos imóveis na região da escola, e faça a simulação de um financiamento imobiliário, com as mesmas taxas de juros e tempo para o sistema Price e SAC, comparando os valores das parcelas, juros total e montante total pago.*

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho apresentamos a matemática financeira por uma outra perspectiva, a de relações de recorrências. Esse conceito matemático, apesar de não constar na BNCC, é apresentado como uma sugestão de aprofundamento a ser trabalhado no Ensino Médio, visto que a maioria dos seus pré-requisitos são conceitos ensinos ao longo da Educação Básica, como foi desenvolvido no primeiro capítulo. Além disso, as recorrências se mostraram uma ferramenta poderosa para resolver problemas da matemática financeira, que apesar de simples, não podem ser solucionados apenas com juros simples, compostos e porcentagem, mas que ainda assim, são relevantes para a Educação Financeira, como a rentabilidade futura de um investimento.

No Capítulo 2 foi desenvolvido um estudo detalhado de recorrências lineares homogêneas e não-homogêneas de primeira e segunda ordem. Uma característica relevante desse capítulo, é ser o mais pedagógico possível, ou seja, com resoluções passo a passo, desde as demonstrações dos teoremas e proposições como também nos exemplos resolvidos. Ademais, alguns assuntos matemáticos que seriam usados com grande frequência como soma dos termos de uma P.A ou P.G, foram citados e demonstrados. Desse modo, esse material pode ser utilizado tanto como referencial teórico para os demais capítulos deste trabalho, como também pelo público geral que desejar estudar recorrências lineares.

No Capítulo 3 foi debatido a importância da Educação Financeira para a vida das pessoas e para o desenvolvimento do país de modo geral, devido a isso a própria BNCC tem buscado melhorar e desenvolver essa temática nas escolas do Brasil. Para finalizar essa discussão, foram apresentadas as habilidades e competências relacionadas a Educação Financeira a serem desenvolvidas na Educação Básica. Ainda neste capítulo, foram aplicados os conhecimentos de recorrências de primeira ordem, para deduzir as principais fórmulas de juros compostos e dos sistemas de amortização Price e SAC.

No Capítulo 4, foram feitas relações entre recorrências lineares e alguns conceitos de álgebra linear. O objetivo dessa conexão entre tais temáticas é que o conjunto de soluções das recorrências de primeira ordem, formam uma base de dimensão 1. Por outro lado, foram apresentados quatro modelos econômicos que recaem em recorrências de primeira e segunda ordem, sendo que os três primeiros: Modelo de teia de aranha, Modelo de Preço de Ações e Modelo de Hiperinflação de Cagan são de primeira ordem e o Modelo de Samuelson de segunda ordem.

O modelo de teia de aranha, começou a ser estudado com objetivo em reduzir de dar mais segurança e equilibrar a demanda e a oferta, em contextos agrícolas. O modelo de Preço de Ações a grosso modo, busca comparar investimentos feitos em ações, onde o preço oscila diariamente e os seus rendimentos são em forma de dividendos, com aplicações financeiras com uma taxa de juros pré-fixada. Já o modelo de hiperinflação de Cagan, como o próprio nome diz busca uma relação entre o nível de preços dos produtos com o estoque de dinheiro. Por fim, o modelo de Samuelson serve para demonstrar que a interação entre o multiplicador e o acelerador pode gerar ciclos de negócios.

No Capítulo 5, foram propostas situações problemas que podem ser trabalhados em sala de aula. O problema inicial está relacionado a estimativa de rentabilidade de um investimento com aportes mensais, este problema foi primeiramente resolvido numericamente, o que permite análises sobre o poder dos juros compostos no longo prazo, devido ao crescimento exponencial. Após isso foi demonstrado o caso geral, obtendo uma fórmula para estimar resultados futuros, dadas condições iniciais. Finalizando com exemplos resolvidos de juros compostos, em diversas situações e comparações numéricas dos sistemas de amortização Price e SAC.

Como trabalhos futuros, pode-se expandir os estudos para outros modelos da economia, como, por exemplo, os que são solucionados por recorrências lineares de segunda ordem ou equações diferenciais. Além disso, para ter-se análises mais profundas sobre cada modelo seriam fundamentais conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral.

Por fim, espera-se que este trabalho sirva como uma fonte de consulta para professores que desejam trabalhar a matemática financeira de forma mais aprofundada e com maior rigor matemático, levando os alunos a desenvolverem as habilidades propostas na BNCC, estimulando-os a resolver situações mais próximos da realidade do seu dia a dia.

Referências Bibliográficas

[1] *ANDRADE, Thais M. Matemática interligada: grandezas, sequências e matemática financeira. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.*

[2] *BANUTH, Raquel. Como está a Educação Financeira dos jovens brasileiros? Uma análise a partir do PISA. Penso, Logo Invisto, 2021. Disponível em: https://www.gov.br/investidor/pt-br/penso-logo-invisto/como-esta-a-educacao-financeira-dos-jovens-brasileiros-uma-analise-a-partir-do-pisa. Acesso em: 13/08/2023.*

[3] *BERTÃO, Naiara. INVESTE, Valor. Brasil é o 4º pior país em competência financeira de jovens, mostra PISA. Globo, 2020. Disponível em: https://valorinveste.globo.com/educacao-financeira/noticia/2020/05/07/brasil-e-o-4o-pior-pais-do-mundo-em-competencia-financeira-de-jovens-mostra-pisa.ghtml. Acesso em: 13/08/2023.*

[4] *BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera L.; WETZLER, Henry G. Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1980.*

[5] *BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.*

[6] *BRASIL. Ministério da Educação.Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.*

[7] *Calculadoras de Amortização: Price, SAC, SACRE e MEJS/MAJS. Cálculo Jurídico. Disponível em: https://calculojuridico.com.br/calculadora-price-sac/. Acesso em: 13/08/2023.*

[8] *CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. Álgebra Linear e Aplicações. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1990.*

[9] *CARVALHO, Paulo C. P. Recorrências Lineares de Segunda Ordem II. YouTube, 07/05/2015. Disponível em: https://youtu.be/QCQ1W44rrSg. Acesso em: 13/08/2023.*

[10] *CARVALHO, Paulo C. P. Recorrências Lineares de Segunda Ordem IV. YouTube, 07/05/2015. Disponível em: https://youtu.be/JAoN_mEwbB0. Acesso em: 13/08/2023.*

[11] *CHIANG, Alpha C.; WAINWRIGHT, Kevin. Matemática para economistas. Tradução: Arlete Simille Marques. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevie, 2006.*

[12] *COELHO, Flávio U.; LOURENÇO, Mary L. Um curso de álgebra linear. 2.ed. rev. e ampl., 4. reimpr. São Paulo: EDUSP, 2018.*

[13] *DE MELO, Danilo. P.; VIEIRA, Glauciane S.; AZEVEDO, Suedy. S.; PESSOA, Cristiane A. S. Diálogos entre a Educação Financeira Escolar e as diferentes áreas do conhecimento na BNCC do Ensino Fundamental. EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericanav. 12, n. 2, 2021. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Cristiane-Pessoa/publication/353779366_DIALOGOS_ENTRE_A_EDUCACAO_FINANCEIRA_ESCOLAR_E_AS_DIFERENTES_AREAS_DO_CONHECIMENTO_NA_BNCC_DO_ENSINO_FUNDAMENTAL_DIALOGUES_BETWEEN_SCHOOL_FINANCIAL_EDUCATION_AND_THE_DIFFERENT_AREAS_OF_KNOWLEDGE_AT_TH/links/611171b60c2bfa282a3072fb/DIALOGOS-ENTRE-A-EDUCACAO-FINANCEIRA-ESCOLAR-E-AS-DIFERENTES-AREAS-DO-CONHECIMENTO-NA-BNCC-DO-ENSINO-FUNDAMENTAL-DIALOGUES-BETWEEN-SCHOOL-FINANCIAL-EDUCATION-AND-THE-DIFFERENT-AREAS-OF-KNOWLEDGE-AT-TH.pdf. Acesso em: 19/08/23.*

[14] *Dicionário de economia para o CACD: hipótese das expectativas adaptativas e racionais. Sapientia, 2021. Disponível em: https://www.cursosapientia.com.br/conteudo/noticias/dicionario-de-economia-para-o-cacd-hipotese-das-expectativas-adaptativas-e-racionais. Acesso em: 13/08/2023.*

[15] *FERREIRA, Aurélio B. de H. Dicionário Aurélio Junior: dicionário escolar de língua portuguesa. 1. ed. Curitiba: Editora Positivo, 2005.*

[16] *FURLAN, Mariana. Endividamento das famílias é de quase 80%. Serasa limpa nome, 2023. Disponível em: https://www.serasa.com.br/limpa-nome-online/blog/endividamento-no-brasil/. Acesso em: 13/08/2023.*

[17] *HEFEZ, Abramo.; FERNANDEZ, Cecília. S. Introdução à Álgebra Linear. Coleção PROFMAT. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.*

[18] *IEZZI, Gelson.; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos e funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.*

[19] *IEZZI, Gelson.; HAZZAN, Samuel.Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.*

[20] *IEZZI, Gelson.Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.*

[21] *IEZZI, Gelson.; HAZZAN, Samuel.; DEGENSZAJN, David. Fundamentos de matemática elementar, 11: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.*

[22] *INEP. Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa). Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa#:~:text=Apresenta%C3%A7%C3%A3o,e%20 Desenvolvimento%20Econ%C3%B4mico%20(OCDE). Acesso em: 13/08/2023.*

[23] *Modelo econômico Definição, o que é e conceito. Nova economia hoje, 2022. Disponível em: https://novaeconomiahoje.com/modelo-economico-definicao-o-que-e-e-conceito/. Acesso em: 13/08/2023.*

[24] *MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, Paulo C. P. Matemática discreta. Coleção PROFMAT. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.*

[25] *MUNIZ NETO, Antonio C. Tópicos de Matemática Elementar: números reais. vol 1. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.*

[26] *NEUSSER, Klaus. Difference Equations for Economists, preliminary and incomplete. 2016. Disponível em:*

http://www2.econ.iastate.edu/classes/econ600/rksingh/fall16/TA/DifferenceEquations.pdf. Acesso em: 13/08/2023.

[27] *OCDE. Recomendação sobre os Princípios e as Boas Práticas de Educação e Conscientização Financeira: Recomendação do conselho da organização para a cooperação e desenvolvimento econômico. Tradução: Comissão de Valores Mobiliários (CVM). Julho de 2005. Disponível em: https://www.oecd.org/daf/fin/financial-education/%5BPT%5D%20Recomenda%C3%A7%C3%A3o%20Princ%C3%ADpios%20de%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20Financeira%202005%20.pdf. Acesso em: 13/08/2023.*

[28] *PEREIRA, Marcus. V., Recorrências – Problemas e Aplicações, Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, p.71. 2014. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4680523/mod_resource/content/1/Recorrências.pdf. Acesso em: 13/08/2023.*

[29] *SCAFF, Artur. Número de endividados no País deve encerrar 2023 com alta histórica. Estadão, 2023. Disponível em: https://einvestidor.estadao.com.br/ultimas/populacao-endividada-inadimplente-no-brasil-pesquisa-cnc/. Acesso em: 13/08/2023.*

[30] *SMOLE, Kátia C. S.; DINIZ, Maria I. S. V. Matemática: ensino médio. vol 3. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.*

[31] *TORRES, Vitor. O que é ROI: como calcular retorno sobre o investimento?. Contabilizei, 2023. Disponível em: https://www.contabilizei.com.br/contabilidade-online/o-que-e-roi-como-calcular-retorno-sobre-o-investimento/. Acesso em: 13/08/2023.*

[32] *ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. Equações Diferenciais, vol 1. 3. ed. Tradução Antonio Zumpano, revisão técnica: Antonio Pertence Jr. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.*