FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – INMA
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

André Luiz Oliveira Capoano

O som das funções: possibilidades em Tecnologias Digitais e Educação Matemática para futuros professores

Campo Grande
2022

André Luiz Oliveira Capoano

O som das funções: possibilidades em Tecnologias Digitais e Educação Matemática para futuros professores

Versão de defesa de trabalho de conclusão de dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Aparecida Santana de Souza Chiari

Linha de Pesquisa Tecnologia e Educação Matemática

Campo Grande

2022

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Aparecida Santana de Souza Chiari (Orientadora)

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)

Profa. Dra. Suely Scherer

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)

Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida. Também quero agradecer a minha mãe e ao meu pai que sempre me apoiaram e me ajudaram sempre que podiam, e grande parte do que sou hoje, foi por conta de estarem sempre presentes e me auxiliando e aconselhando.

A todos meus amigos e colegas por de alguma forma contribuírem na minha vida, seja com risadas, estudos, questionamentos, apoio entre outras coisas. Agradeço também a minha orientadora por ser paciente e compreensiva durante todo o processo de escrita, perdoar e entender os meus atrasos.

Aos pibidianos participantes desta pesquisa faço aqui meu agradecimento pela participação, cooperação e pelos questionamentos promovidos durante os encontros realizados.

A todos os membros da banca por aceitarem participar desta etapa de minha vida e por contribuir com esta pesquisa com seus conselhos e conhecimentos a respeito. E a todas as pessoas que de alguma forma, influenciaram na minha vida.

RESUMO

Utilizar as Tecnologias Digitais para o ensino da matemática é um assunto debatido tanto por pesquisadores quanto por professores em diversas esferas acadêmicas, enquanto a música é uma das artes mais apreciadas ao redor do mundo, algo que envolve todas as culturas e possui grande relação com a matemática. Sabendo disso, nesta pesquisa qualitativa, buscamos responder a seguinte pergunta: Como futuros professores de matemática produzem Performances Matemáticas Digitais (PMD) para representar funções a partir de notas musicais? O objetivo foi então analisar o processo de produção de PMD por futuros professores de matemática para representar funções a partir de notas musicais. Tendo em vista os procedimentos de uma pesquisa qualitativa, a produção de dados foi realizada a partir de encontros semanais realizados com 10 alunos do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Todos os encontros foram realizados por meio de videochamadas on-line nas quais discutimos as relações entre matemática e música, estudamos o conceito de PMD e construímos representações sonoras do gráfico das funções escolhidas pelos participantes, entre outros. Para a análise nos amparamos na definição de uma PMD conceitual e na análise exploratória dos resultados apresentados. Com isso, em resposta à pergunta de pesquisa, os pibidianos realizaram a PMD para representar funções por meio de sete notas musicais, atribuídas também para a insurgência de novas variáveis na função, trabalhando, assim, razão e proporção. Mediante o exposto, entende-se que foi visto pelos professores em formação que é possível utilizar essa relação entre música e Matemática para o ensino de funções. Finalizando a etapa de análise, entendemos que o uso de música para se trabalhar funções matemáticas, sobretudo com o uso das PMD, apresenta diversos aspectos que potencializam o entendimento do aluno e favorecem a produção de significados de conceitos.

Palavras-chave: Performances Matemáticas Digitais; PIBID; Aprendizagem.

ABSTRACT

Using Digital Technologies for the teaching of mathematics is a subject debated by both researchers and teachers in the various academic spheres. While music is one of the most appreciated arts around the world, something that involves all cultures and has a strong relationship with mathematics. Knowing this, in this research, we seek to answer the following question: How future mathematics teachers produce Digital Mathematical Performances (PMD) to represent functions from musical notes? The objective was then to investigate the process of construction of PMD in its representation of functions through sound, the vision of future mathematics teachers about PMD and their pedagogical reflections on the relationships between functions and their sound representation. Bearing in mind the procedures of a qualitative research, the production of data was carried out through weekly meetings held with 10 scholars from the Institutional Scholarship Program for Teaching Initiation (PIBID) in mathematics at the Federal University of Mato Grosso do Sul (UFMS). All meetings were held through on-line video calls where we discussed the relationship between mathematics and music, studied the concept of PMD and built sound representations of the graph of the functions chosen by the participants, among others. For the analysis, we supported the definition of a conceptual PMD and the exploratory analysis of the results presented. Thus, in response to the research question, the Pibidians performed the PMD to represent functions through seven musical notes, also attributed to the insurgency of new variables in the function, thus working, ratio and proportion. Based on the above, the objective was duly achieved, as it was seen by the teachers that it is possible to use this relationship between music and mathematics for the teaching of functions. Concluding the analysis stage, we understand that the use of music to work on mathematical functions, especially with the use of PMD, presents several aspects that enhance the student's understanding and favor the production of meanings of concepts.

Keywords: Digital Mathematical Performances; PIBID; Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

PRÓLOGO

Antes de você leitor, iniciar a leitura deste trabalho, venho através deste prólogo lhe propor um desafio! A seguir haverão cinco *QR codes* que também estarão com os links disponíveis no rodapé caso haja algum problema com as imagens. Cada um dos links leva a um áudio diferente, peço ao leitor para que os ouça atentamente e comece a imaginar o som que vai escutar como sendo uma função matemática, ora subindo mais para o agudo, ora descendo mais para o grave.

Feita a apreciação do som, caso seja possível, gostaria que você leitor tentasse desenhar em um papel, o gráfico que você acredita que cada um dos áudios está representando.

Figura 1: QR codes[1] com os áudios do desafio.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Venha e participe conosco desta pesquisa, não apenas lendo, mas também vivendo parte do que nós realizamos aqui.

1 Links para os áudios do desafio:
https://drive.google.com/file/d/1O0c3Q3--NQckPbsZ4VYCXAYOa5aYrZTA/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/1kdCNUrFW-F19ZXngFWVd-h2yi5v6PZrB/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/16VKhgNErL47EHd3pxTLiOLO4XKfGn6hV/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/1YdxtkVNg9U491oJY0qEGVZyRfkwbxdYC/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/1DwyVBUcA5hMH0RtnJOV29IlHUsd4REhJ/view?usp=sharing

1 INTRODUÇÃO

Acredito que ler o título desta dissertação e encontrar o termo “o som das funções” possa ter gerado uma certa curiosidade em você, meu caro leitor. De fato, talvez seja um termo não tão comum como aula expositiva, por exemplo, mas é possível que, no incomum, se desperte a inquietação necessária para se fazer algo além do trivial. Foi com o auxílio da música que despertei essa minha inquietude a respeito de outras formas para compreender a matemática. Buscando outros caminhos para se visualizar como ela se relaciona com o meio em que vivemos para além números e contas, algo que surgiu de forma inesperada, mas que se tornou uma pesquisa de mestrado.

Antes de explicar os objetivos dessa pesquisa, gostaria de falar um pouco da minha trajetória e como ela me levou onde estamos agora, quais os elementos desta história que fizeram com que uma pesquisa envolvendo matemática e música fosse não uma pesquisa, mas a minha pesquisa.

Para isso falarei sobre três elementos importantes, o primeiro é a minha relação com a música, que vem deste o meu nascimento, afinal vários membros da minha família são músicos, a maioria por paixão, alguns por profissão. Então aos meus dez anos de idade comecei a aprender a tocar violão, depois aprendi a cantar, aí veio a curiosidade por outros instrumentos musicais e assim por diante. A música tem grande valor para a minha vida.

O segundo elemento é a minha paixão pela matemática, sempre gostei e desde a época de escola achava empolgante cada novo conteúdo aprendido, bem como suas possibilidades e ficava “viajando” com os números. Assim acabei ingressando no curso de graduação em Matemática – licenciatura, da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD), lá fui também um pibidiano, assim como os participantes desta pesquisa. Aprendi várias coisas interessantes, cheguei a ver inclusive alguns exemplos de como aliar a música ao ensino da matemática, porém eram sempre situações que considerei bem simples, como ensinar frações relacionando com o tempo musical, razão e proporção, entre outras situações semelhantes. Logo, ficava pensando: como trabalhar outros conceitos? Seria possível?

Um certo dia vi um vídeo no Youtube[2], no qual o autor transformava a sequência de Fibonacci em uma melodia musical, achei fascinante, não esperava que de fato saísse uma melodia boa (e que melodia bonita que essa experiência resultou). Enfim, vi este vídeo mais como um trabalho de grande criatividade do que qualquer outra coisa, num primeiro momento não pensei nas possibilidades disso para o ensino da matemática.

O tempo passou e ingressei no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), e aqui se encontra o terceiro elemento que tornou possível a criação deste trabalho que vos apresento. A princípio, apesar de ter elaborado um pré-projeto como requisito para o ingresso no mestrado, estava um pouco incerto acerca da temática, então conforme participava dos encontros do TeDiMEM (Tecnologias, Mobilidade e Educação matemática), grupo de pesquisa em que estive inserido durante todo o curso, fui apresentado ao termo Performances Matemáticas Digitais (PMD), que explicando de forma breve, trata-se do uso de tecnologias e das artes para comunicar uma ideia matemática.

Na hora pensei comigo, é isso! Lembrei do vídeo que comentei nos parágrafos anteriores e pensei: e se fizesse algo semelhante voltado para o estudo de funções? A partir deste ponto comecei a pensar nesta possibilidade para o ensino. Como os estudantes poderiam produzir músicas através de funções? Melhor ainda, será que poderíamos encontrar uma função matemática que expresse uma música já existente? Como essa experiência poderia ajudar os alunos a aprenderem matemática? Qual seria a sensação não apenas visual, mas auditiva de uma parábola por exemplo? Seriam possíveis várias sensações sonoras diferentes para a mesma parábola? Algumas pesquisas como a de Miritz (2015), que será objeto de discussão adiante, mas de modo sintetizada aqui, é um exemplo nos ajuda a entender melhor a relação da matemática com a música, consequentemente ajudando a responder nossas indagações.

Muitos questionamentos e possibilidades surgiram, como podem ver, no entanto, para realizar este estudo foi essencial traçar um limite de objetivos para que

2 Link do vídeo citado: https://www.youtube.com/watch?v=IGJeGOw8TzQ

de fato pudéssemos fazer um estudo de qualidade com uma ideia de atividade não tão comum assim. Foi então que foram definidos os nossos participantes, para isso levamos em consideração o cenário do momento da pesquisa, e dadas as ocorrências ocasionadas pela pandemia da Covid-19, causada pelo vírus Sars-coV-2, o estudo ocorreu de forma 100% virtual por meio de reuniões através de videochamadas. Esse cenário inviabilizou fazer a coleta de dados em uma sala de aula presencial e também virtual, tendo em vista a impossibilidade de alguns alunos em disporem de internet. Portanto, escolheu-se fazer a pesquisa com o grupo do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) de matemática da UFMS. Esses participantes foram escolhidos, pois, a finalidade do PIBID é a iniciação à docência, portanto, os estudantes possuem conhecimento acerca das práticas pedagógicas na sala de aula.

Com todos estes elementos já decididos, o objetivo dessa pesquisa, é analisar o processo de produção de PMD por futuros professores de matemática para representar funções a partir de notas musicais. Para auxiliar em nosso objetivo, foi estabelecida a seguinte pergunta de pesquisa: Como futuros professores de matemática produzem PMD para representar funções a partir de notas musicais? E também foram elencados alguns objetivos específicos, sendo estes:

- Analisar a representação de funções com notas musicais a partir de codificações com escalas musicais variadas utilizando o software Reaper;
- Analisar produções musicais feitas por futuros professores envolvendo funções e outros conhecimentos matemáticos com o software Reaper;
- Analisar reflexões pedagógicas sobre relações entre funções, representações por meio de som e música e produção de PMD.

A produção de dados foi realizada com a participação de dez pibidianos que se organizaram em duplas, em um total de oito encontros virtuais. Nós realizamos os dois primeiros encontros com o grupo completo, ao qual estudamos um texto sobre PMD e explicamos como seria a proposta da experiência, depois tivemos um encontro individual com cada dupla e para finalizar, um último encontro com o grupo todo para cada dupla apresentar seus resultados e discutirmos sobre os mesmos. A análise dos foi feita por meio dos critérios para a construção de uma PMD conceitual, teorizados por Ricardo Scucuglia, e também trouxe uma perspectiva sobre o pensamento dos pibidianos acerca do tema.

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos, além desta introdução. No primeiro capítulo, chamado de Matemática e Música, abordamos o a relação histórica entre essas duas áreas, contando um pouco sobre o surgimento das escalas musicais, o experimento de Pitágoras, a matemática envolvida nessas construções de escalas, o Ciclo das Quintas, o pequeno erro matemático ocasionado na época, conhecido na música Coma Pitagórica, como resolveram este problema e alguns outros elementos relacionados à matemática e à música.

Seguindo para o segundo capítulo, denominado Tecnologias Digitais e Performances Matemáticas Digitais, vamos falar sobre as tecnologias digitais, sua história e surgimento, bem como apresentar as fases que possui. Além disso, apresentarei para o leitor as Performances Matemáticas Digitais, o que são, como surgiram e sua importância.

Já no terceiro capítulo, chamado Metodologia, apresento todo o processo de produção de dados que foi feito com os bolsistas do PIBID, disponho de uma explanação breve sobre o porquê desta pesquisa possuir caráter qualitativo, disponho a produção de dados realizada, bem como os métodos utilizados para sua construção.

Por fim, no capítulo 4, realizo a análise das PMD produzidas, a partir da definição de uma PMD conceitual. Além disso, apresento também um pouco do que essa experiência realizou na vida acadêmica dos participantes e comento sobre os pensamentos e indagações que tiveram sobre como colocar isso em prática na sala de aula. Aqui o leitor poderá ouvir o “som das funções” e tirar suas próprias conclusões a respeito do tema.

Como fechamento, faço as considerações finais a respeito de todo o processo de elaboração e realização desta pesquisa, bem como falo das reflexões que foram aparecendo no meio do caminho. Por fim, trago nos apêndices o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) utilizado.

2 MATEMÁTICA E MÚSICA

2.1 O começo de tudo... A matemática e a composição de notas musicais

Apesar de a primeira vista não parecer, a matemática possui uma relação íntima e antiga com a música. Estas duas áreas de conhecimento, mesmo parecendo bem distintas entre si, seguem próximas desde a antiguidade. Podemos verificar que durante o período da Idade Média já existia "uma grade curricular" relacionando essas duas áreas, esta era formada por dois currículos principais, o Trivium e o Quadrivium (JOSEPH, 2008).

Cada um destes currículos foi voltado para alguns conhecimentos específicos, "O trivium inclui aqueles aspectos das artes liberais pertinentes à mente, e o quadrivium, aqueles aspectos das artes liberais pertinentes à matéria" (JOSEPH, 2008, p. 21). Ainda sobre os conteúdos abrangidos, temos que:

> Lógica, gramática e retórica constituem o trivium,- aritmética, música, geometria e astronomia constituem o quadrivium. A lógica é a arte do pensamento,- a gramática, a arte de inventar símbolos e combiná-los para expressar pensamento,- e a retórica, a arte de comunicar pensamento de uma mente a outra [...]. A aritmética, ou a teoria do número, **e a música, uma aplicação da teoria do número** (a medição de quantidades discretas em movimento), são as artes da quantidade discreta ou número. A geometria, ou a teoria do espaço, e a astronomia, uma aplicação da teoria do espaço, são as artes da quantidade contínua ou extensão (JOSEPH, 2008, p. 21, grifo nosso).

Como podemos ver, a relação da matemática e da música é bem profunda, como disposto acima. Na Idade Média já se estudava ambas em conjunto, tendo a aritmética como o estudo dos números em repouso e a música como o estudo dos números em movimento sendo vista como uma aplicação da teoria dos números. Dessa forma, os ritmos, as melodias e demais componentes musicais eram utilizados como instrumento de estudo. E toda essa relação entre essas duas disciplinas vai muito mais além, como Miritz afirma:

> Há vários milênios, as relações entre a matemática e a música já podiam ser claramente identificadas: como no som produzido pela corda de um arco e flecha, na relação entre a frequência (mais ou menos grave) e as características da corda (tamanho, tensão e espessura), ou ainda, ao assoprar em um osso, como se fosse uma espécie de flauta, as diferenças

> entre os sons produzidos, dependendo do tamanho e do posicionamento dos buracos no osso (MIRITZ, 2015, p. 25-26).

O primeiro registro de experimento associando matemática e música aconteceu por volta do século VI a.C. na Escola Pitagórica (ABDOUNUR, 1999, p. 8), onde se criou o instrumento que ficou conhecido como monocórdio de Pitágoras.

Uma das histórias de como tudo começou seria de que ele passou em frente a uma casa de ferreiros e, conforme ouvia os sons, percebeu que alguns dos sons eram agradáveis ao ouvido, enquanto outros eram desagradáveis. Du Sautoy (2007) apresenta também como uma das várias versões dessa experiência, que Pitágoras teria enchido uma bacia com água e usando um martelo para bater nela, ele teria percebido diferentes sons conforme a quantidade de água que havia na bacia, porém o ponto de convergência de todos estes relatos é o monocórdio de Pitágoras.

Este que é considerado também, como Abdounur (1999) afirma, a primeira experiência científica que se tem catalogada da história. O monocórdio trata-se de um aparelho que possui apenas uma única corda, presa a uma caixa acústica com dois cavaletes fixos e um móvel. Com essa estrutura, Pitágoras, conforme deslocava o cavalete, conseguia ouvir os diferentes sons com base no comprimento da corda, sendo estes sons ora consonantes, ora dissonantes.

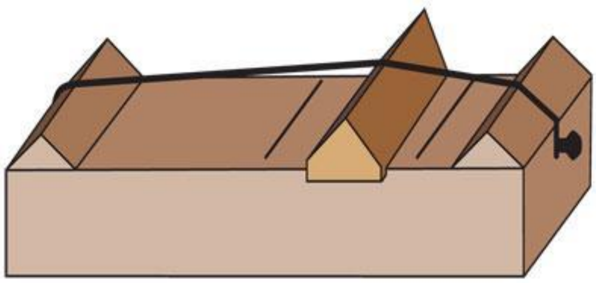

Figura 2: Monocórdio de Pitágoras
Fonte: Abdonur (1999)

Percebe-se, então, que “a descoberta de Pitágoras com o experimento do monocórdio lança luz sobre inúmeras discussões no âmbito da música teórica tendo por fundamento os conceitos matemáticos de razão e de proporção.” (ABDOUNUR, 2019, p. 3). Pitágoras percebeu que quando o cavalete estava dividindo a corda exatamente ao meio, era um som harmonioso. Esta divisão ficou conhecida como oitava justa e o som produzido por ela é considerado um som equivalente.

Semelhante a isso, ocorreu quando a corda foi dividida em dois terços de seu tamanho, outro som consonante. Este ficou conhecido como o intervalo de quinta justa. E para finalizar, ele estudou um terceiro intervalo, que era de três quartos do tamanho da corda e que mais uma vez trazia um som agradável. Este último ficou conhecido como intervalo de quarta justa. Assim, neste experimento, Pitágoras estabeleceu, com o uso do monocórdio:

> [...] correspondência entre intervalos musicais e razões matemáticas de uma corda, relacionou-se, sob uma perspectiva aritmética, consonâncias musicais a razões matemáticas simples, de modo que aos intervalos musicais de oitava, de quinta e de quarta, subjaziam razões matemáticas 1:2, 2:3 e 3:4, respectivamente. (ABDOUNUR, 2019, p. 3)

Razão	Consonância	Nome
1:1	Unison	Uníssono
1:2	Diapason	Oitava Justa
2:3	Diapente	Quinta Justa
3:4	Diatessaron	Quarta Justa

Quadro 1: Primeiros intervalos consonantes descobertos com o monocórdio de Pitágoras.

Este experimento foi tão importante para a música que, a partir dele, Pitágoras criou a primeira escala musical, composta a princípio por sete notas musicais, mais sua oitava justa, escala que hoje conhecemos como escala natural ou escala diatônica, porém com uma pequena aproximação que será explicada mais à frente. Para a criação desta escala, foram estabelecidos alguns critérios:

I) Equivalência da oitava;

II) Unidade padrão de 2:3 (Quinta Justa);

III) Limite: a condição para a existência da nota na escala seria ela estar entre o meio da corda e o total do comprimento dela.

Caso o resultado fosse um comprimento de corda menor que meio, dobrava-se o valor, pois pelo critério I, sabemos que isso nos resulta em uma nota equivalente. Assim foram estabelecidas as notas conforme mostra a tabela:

Comprimento da corda (L)	Ciclo das Quintas (2/3 de L)	Comprimento resultante (Lr)	Condição de existência 1/2 < Lr < 1	Fração Equivalente (oitava: 2x)
1	2/3 de 1	2/3 = 0,66...	Sim	-
2/3	2/3 de 2/3	4/9 = 0,44...	Não	8/9 = 0,88...
8/9	2/3 de 8/9	16/27 ~ 0,59	Sim	-
16/27	2/3 de 16/27	32/81 ~ 0,395	Não	64/81 ~ 0,79
64/81	2/3 de 64/81	128/243 ~ 0,52	Sim	-
128/243				

Quadro 2: Cálculos para a adição de notas na escala Pitagórica.

Então para exemplificar o cálculo realizado, vamos utilizar a primeira linha com o comprimento de 1 inteiro da corda e multiplicamos por 2/3 (quinta justa). Se o resultado estiver no intervalo $\frac{1}{2} < Lr < 1$, ele pertence à escala. Caso seja menor, multiplica-se por dois. É importante destacar que a tabela continua com mais alguns valores, dando origem assim a mais cinco notas conhecidas como notas acidentais. Entretanto, com os valores obtidos, já podemos formar a escala natural unindo os intervalos apresentados nas tabelas I e II, como representado na figura a seguir:

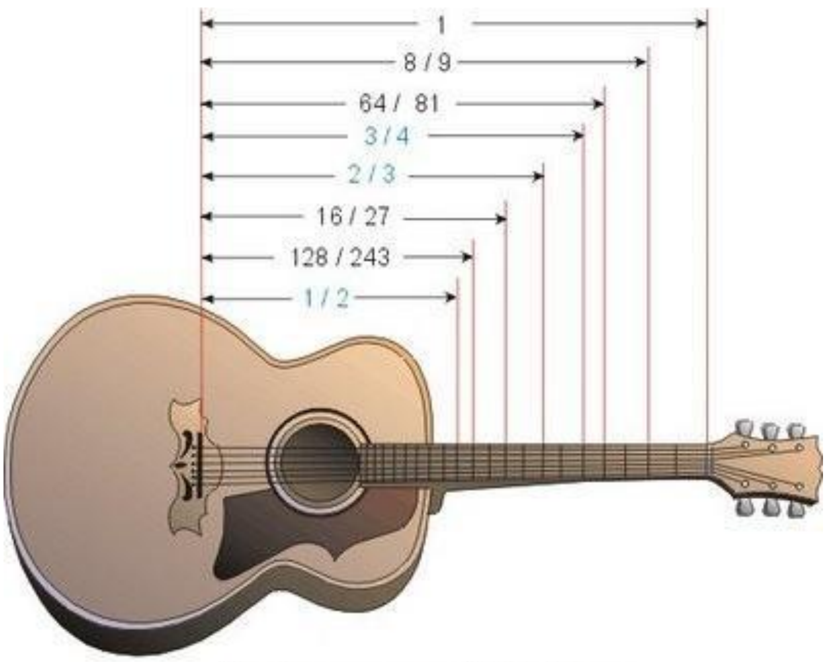

Figura 3: Escala natural exemplificada no braço do violão de acordo com o comprimento das cordas.
Fonte: Disponível em <http://profaerica-matematica.blogspot.com/2015/08/matematica-na-musica.html> (2015)

Para um melhor entendimento do leitor, suponhamos que determinada corda tenha como nota fundamental (comprimento total) a nota Dó. Seguindo estes valores da escala pitagórica, a composição de notas seria:

- 1 = Dó (Nota fundamental);
- 8/9 = Ré (2ª maior);
- 64/81 = Mi (3ª maior);
- 3/4 = Fá (4ª justa);
- 2/3 = Sol (5ª justa);
- 16/27 = Lá (6ª maior);
- 128/243 = Si (7ª maior);
- 1/2 = Dó uma oitava acima (Oitava justa).

Estes elementos apresentados neste subcapítulo foram discutidos com os participantes da pesquisa, pois nem todos eram familiarizados com esses conhecimentos sobre música neste aspecto. Como a pesquisa foi realizada com pibidianos do curso de matemática, trazer a relação da música com a matemática foi essencial para a contextualização da pesquisa para os participantes como também trazer elementos da música que foram necessários para a produção de dados.

2.2 O som como fenômeno acústico

Dando seguimento à significativa relação entre matemática e música, veremos agora um pouco da relação do som como fenômeno físico. Vale lembrar que retomaremos alguns pontos vistos até o momento, porém na forma física deles, ou seja, como ondas sonoras.

Mas o que é som? Bohumil Med afirmar que:

> SOM é a sensação produzida no ouvido pelas vibrações de corpos elásticos. Uma vibração põe em movimento o ar na forma de ondas sonoras que se propagam em todas as direções simultaneamente. Estas atingem a membrana do tímpano fazendo-a vibrar. Transformadas em impulsos nervosos, as vibrações são transmitidas ao cérebro que as identifica como tipos diferentes de sons (MED, 1996, p. 11).

Med (1996) acrescenta ainda, distinguindo as vibrações em duas, as regulares e as irregulares. As primeiras produzem sons de altura definida, podendo ser identificadas como notas musicais (som de teclado, violino etc.), enquanto as outras são indefinidas e ruidosas, geralmente chamadas de barulhos (som do motor do carro, uma explosão etc.).

Podemos ainda identificar quatro principais características do som, sendo três delas fortemente relacionadas à matemática:

- **Altura:** Diretamente ligada com a frequência das vibrações, quanto maior a velocidade em que a onda vibra, mais agudo é o som;
- **Duração:** Determinada pelo tempo de emissão da vibração;
- **Intensidade:** Indica a força ou volume do emissor do som, esta é medida através de decibéis;
- **Timbre:** Está relacionado às características únicas de cada emissor que produz o som, derivando do tamanho, formato e material dele. Med (1996) nos diz que é o timbre o responsável por dar “cor” ao som de cada instrumento.

Trabalharemos nesta pesquisa especificamente com os sons regulares, ou seja, os que podemos quantificar sua altura por meio da sua frequência de vibração. Para adentrar neste tópico, vejamos algumas definições importantes de acordo com Valle (2009):

Ondas: são fenômenos de repetição cíclica, em que a variação sai do ponto de repouso e atinge um máximo, volta ao repouso e atinge um mínimo repetidas vezes. No caso particular das ondas sonoras, trata-se da compressão e rarefação das moléculas de ar

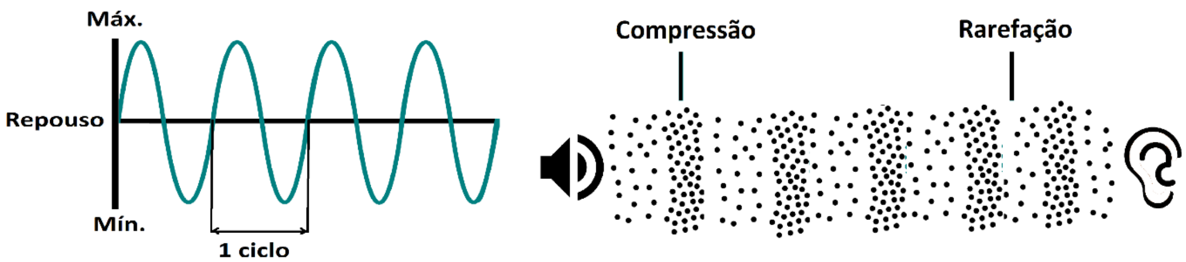

Figura 4: Representação das ondas sonoras.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Frequência (f): é o número de ciclos realizados a cada segundo de tempo. Portanto dizer que a frequência é de 720 ciclos por segundo significa que a cada segundo ocorrem 720 ciclos. Usamos como unidade de medida o Hertz, portanto no exemplo dado temos 720 Hertz ou 720Hz.

Período (t): Este é o tempo de duração de cada ciclo da onda, é expresso em segundos e equivale ao inverso da frequência, por exemplo:

Sabemos que $500Hz = \frac{500ciclos}{1segundo}$, e queremos encontrar o tempo de duração de cada ciclo, portanto calculamos $\frac{1segundo}{500ciclos}$, resultando em 0,002 segundos ou 2 milissegundos, este é o tempo de duração de cada ciclo.

Dando continuidade, agora que já foram apresentadas algumas definições importantes para prosseguirmos, veremos que cada nota possui uma frequência específica que se difere até mesmo de sua oitava, ou seja, a nota pode ser equivalente em termos musicais, mas cada uma está numa frequência diferente.

Vimos anteriormente que a oitava de uma nota é exatamente a metade do comprimento de corda utilizado. Isso, em termos físicos, significa que a frequência irá aumentar exatamente o dobro da frequência anterior. A nota "lá" por exemplo vibra a 440Hz, logo sua oitava será um "lá" que vibra a 880Hz. É interessante notar que a próxima oitava não será $880 + 440$ e sim $880 + 880$, totalizando 1760Hz. Podemos perceber que conforme subimos na escala, o "tamanho" dela em Hertz dobra, pois se trata de uma sequência geométrica, onde temos a razão 2, já que a frequência está sempre sendo multiplicada por esse valor.

Em contrapartida, vemos que as oitavas estão subindo conforme uma sequência aritmética, ou seja, a cada oitava está sendo somada mais uma oitava, porém em termos de frequência, é sempre o dobro da anterior. Uma maneira de representar este tipo de comportamento, é com o uso de logaritmos, neste caso específico, podemos usar uma escala logarítmica de base 2, onde

- 2 vezes a frequência: $log_2 2 = 1oitava$;
- 4 vezes a frequência: $log_2 4 = 2oitavas$ e assim por diante.

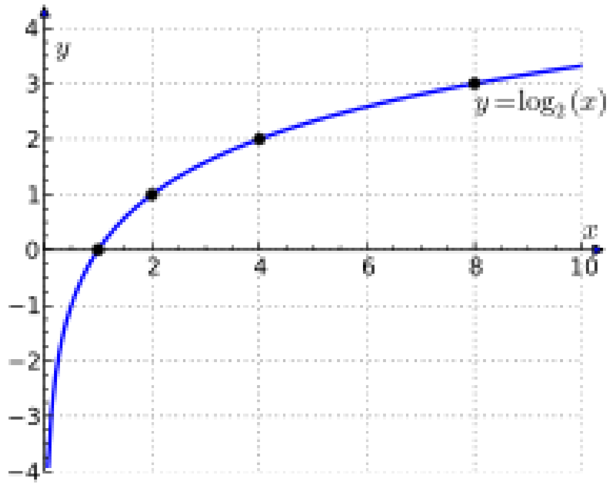

Figura 5: Gráfico de uma função logarítmica de base 2.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Quando visualizamos este comportamento por meio do plano cartesiano fica mais fácil entender o que está acontecendo, vemos que o eixo y aumenta de valor em uma unidade a cada vez que o valor do eixo x dobra. Em outras palavras, o eixo y representa as oitavas enquanto o eixo x representa a razão pela qual a frequência está sendo multiplicada.

Valle (2009, p. 21) diz que “[...] nossos processos de percepção são logarítmicos. Somas e subtrações pouco representam, multiplicações são sentidas como somas, divisões como diferenças e potências como multiplicações.

Com tudo isso em mente, vamos agora rever a escala pitagórica não mais por meio do comprimento de corda, mas sim com a utilização das frequências de cada nota. O intuito de fazer a revisão será de que agora perceberemos alguns “erros” matemáticos encontrados na escala e veremos também o que foi feito para corrigi-los.

Os critérios de estabelecidos para a existência das notas da escala serão os mesmos:

- Há uma nota equivalente (oitava) que desta vez será expressa como $f_1 = 2f_0$, ou seja, o dobro da frequência original;
- A unidade padrão será de uma quinta justa, que representa 2/3 do comprimento da corda, mas como vimos, é o inverso da frequência, então denotaremos da seguinte forma $f_1 = \frac{3}{2}f_0$ ou $f_1 = 1{,}5f_0$;

- O intervalo deve estar dentro de uma oitava, caso seja maior, reduzimos uma oitava, o que significa dividir por 2.

Assim espera-se que ao final dos cálculos com a unidade de quinta justa, façamos um ciclo, conhecido como ciclo das quintas, e que ele chegue a uma nota de equivalência, vejamos como ficam os valores:

Frequência (f)	Ciclo das Quintas	Frequência Resultante (fr)	Condição de Existência (1 < fr < 2)	Frequência Equivalente (Se fr > 2, fr/2)
f	1,5*f	1,5f	Sim	-
1,5f	1,5*1,5f	2,25f	Não	1,125f
1,125f	1,5*1,125f	1,6875f	Sim	-
1,6875f	1,5*1,6875f	2,53125f	Não	1,26563f
1,26563f	1,5*1,26563f	1,89844f	Sim	-
1,89844f	1,5*1,89844f	2,84766f	Não	1,42383f
1,42383f	1,5*1,42383f	2,13574f	Não	1,06787f
1,06787f	1,5*1,06787f	1,60181f	Sim	-
1,60181f	1,5*1,60181f	2,40271f	Não	1,20135f
1,20135f	1,5*1,20135f	1,80203f	Sim	-
1,80203f	1,5*1,80203f	2,70305f	Não	1,35152f
1,35152f	1,5*1,35152f	2,02729f	Não	1,01364f

Quadro 3: Cálculos das frequências da escala pitagórica completa.

Agora com o cálculo completo de uma oitava, a escala musical acaba possuindo 12 notas, as 7 já mencionadas, 5 notas que são os acidentes musicais e a próxima nota (13ª) que deveria ser equivalente a primeira, entretanto, o que podemos verificar na célula destacada é que a nota que deveria ser equivalente a f resultou em 1,01364f, isso gera uma leve desafinação a cada oitava.

Isto acontece porque um ciclo de quintas não combina matematicamente com um ciclo de oitavas. Para verificar este problema “trata-se de um método muito simples para quem possui o moderno conhecimento de aritmética que, no entanto, era um ramo da matemática pouco desenvolvido na Grécia Antiga” (SANDRONI, 2012, p. 352 - 353). Basta que coloquemos em igualdade o ciclo de quintas e o ciclo de oitavas.

Ora, como vimos anteriormente, um ciclo de oitavas é feito multiplicando a frequência sempre por 2, enquanto o ciclo de quintas é desenvolvido pela multiplicação na ordem de $\frac{3}{2}$. Sabendo que o objetivo é chegar a uma nota de equivalência, basta verificarmos o seguinte:

$$Existemm, nnaturaisnãonulostalque \left(\frac{3}{2}\right)^m = 2^n?$$

Manipulando a equação chegamos a $3^m = 2^{m+n}$, e assim verificamos que é uma equação para a qual não podemos encontrar m, n naturais que satisfaçam, pois 3 e 2 são primos entre si. O que é possível fazer, seria encontrar valores com a maior aproximação possível, e estes são 12 ciclos de quintas e 7 ciclos de oitavas, nos dando

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cong 129{,}74 e 2^7 = 128$$

Isso gera uma leve diferença, iremos agora dividir 129,74 por 128 para verificar quanto de uma oitava essa diferença gera e chegaremos ao valor de 1,01364 aproximadamente, e já vimos este número. Essa diferença por oitava de 0,01364 é conhecida como coma pitagórica, que é também “o menor intervalo (relação de frequência) perceptível pelo ouvido humano normal” (VALLE, 2009, p. 31). A título de curiosidade, a coma pitagórica também ficou conhecida como a quinta do lobo, pois ficava dissonante do restante das notas, dando assim a sensação que o som “uivava”.

Para verificar essa desafinação na prática usemos como exemplo a frequência de 440Hz, que é a nota “lá”. Aplicando esta diferença de uma coma pitagórica temos uma variação para 446Hz, aproximadamente. Você leitor pode verificar esta diferença no som através do *QR code* a seguir ou através do link no rodapé[3]. O áudio apresentado intercala o som entre as frequências de 440Hz e 446Hz e, ao final, soa ambas juntas para que possa ouvir o “uivar” da quinta do lobo:

Figura 6: QR Code do áudio exemplo.
Fonte: Elaboração própria (2022)

3 Link para o áudio:
https://drive.google.com/file/d/1IxfOx4hGIGFsaYppbLvZF9UVO2HAhj2E/view?usp=sharing

Este pequeno desvio de afinação foi um grande problema enfrentado pelos matemáticos e músicos da época. Agora a escala possuía um total de 12 notas, tudo deveria caber dentro dessa quantia, porém o ciclo das quintas de Pitágoras não se fecha, e sim forma uma espiral.

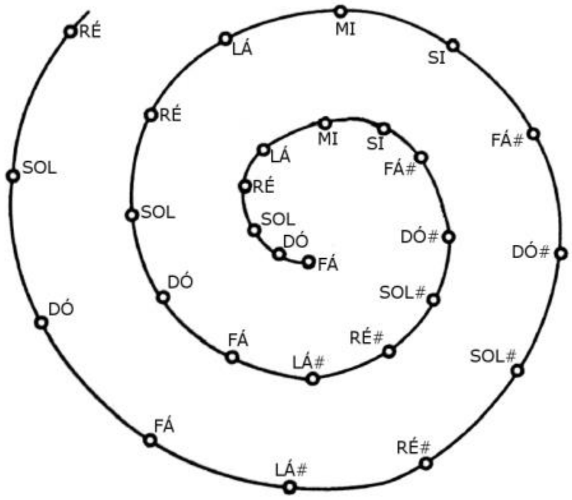

Figura 7: Ciclo das quintas em espiral.
Fonte: Laboratório de Luthieria (2015). Disponível em:
<https://laboratoriodeluthieria.wordpress.com/2015/07/02/temperamento-a-musica-atraves-dos-numeros/>

Havia outro problema na escala pitagórica, ela não possuía uma unidade padrão entre as notas, o que dificultava a transposição de tons e resultava numa necessidade constante de se afinar os instrumentos conforme o tom desejado, isso porque a razão entre as frequências sucessivas acaba por não ser constante. Podemos verificar isso analisando a distância de cada nota da escala natural, e chegaremos às seguintes distâncias:

Transposição	Dó para Ré	Ré para Mi	Mi para Fá	Fá para Sol	Sol para Lá	Lá para Si	Si para Dó
Razão das frequências	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243
Distância entre as notas	1 tom	1 tom	1/2 tom	1 tom	1 tom	1 tom	1/2 tom

Quadro 4: Distância entre as notas.

Chegamos à conclusão de que a unidade padrão seria a de meio tom ou um semitom, em que algumas notas teriam a distância de dois semitons e outras de apenas um semitom e cada semitom deveria possuir o mesmo "tamanho", permitindo assim que os músicos da época pudessem fazer a transposição de tons de maneira simples e rápida.

Entretanto, verificamos que isso não ocorre na escala pitagórica pois temos um semitom de $\frac{256}{243}$. Como sabemos que um tom equivale a dois semitons, isso implica que $\frac{\frac{256}{243}*256}{243}$ seja igual a $\frac{9}{8}$, o que não é verdade, pois o primeiro resulta em aproximadamente $1{,}1098$, enquanto o outro nos dá $1{,}125$ como resultado, fazendo assim com que a unidade da escala pitagórica não seja constante.

2.3 Temperamento musical

Estes problemas com a escala pitagórica perduraram até a criação dos logaritmos por Jonh Napier (1550 - 1617), em meados do século XVI, com o temperamento da escala. Isso porque “a divisão da escala temperada torna-se inconcebível sem a invenção dos logaritmos” (MIRITZ, 2015, p. 22). Vamos perceber também que para o temperamento foi necessária a admissão da existência dos números irracionais, algo que os pitagóricos não concebiam.

A escala temperada nada mais é que a divisão dos doze semitons existentes em uma oitava, em razões sucessivas exatamente iguais. Para realizar esta divisão partimos da premissa de que $x^{12} = 2$, pois sabemos que após uma oitava (ou doze semitons) a frequência dobra de valor. Sendo assim, $x = 2^{\frac{1}{12}}$ ou $x = \sqrt[12]{2}$, que resulta em aproximadamente em $1{,}059463\ldots$, um número irracional. “Tal processo induz à necessidade de pensar a música navegando sobre um sistema em que não mais os comprimentos ou frequências associadas às notas relacionem-se como grandezas comensuráveis ou números racionais.” (MIRITZ, 2015, p. 22)

Frequência (Hz)	Semitom temperado	Frequência resultante (Hz * Semitom temperado)
440	1,0594631	466,16
466,16	1,0594631	493,88
493,88	1,0594631	523,25
523,25	1,0594631	554,37
554,37	1,0594631	587,33
587,33	1,0594631	622,25
622,25	1,0594631	659,26
659,26	1,0594631	698,46
698,46	1,0594631	739,99
739,99	1,0594631	783,99
783,99	1,0594631	830,61
830,61	1,0594631	880

Quadro 5: Escala a partir de 440Hz resultando na sua oitava correta (880Hz) após o temperamento.

A importância do temperamento musical foi tamanha que ele é utilizado até os dias de hoje. É importante destacar que a escala temperada possui uma pequena desafinação em relação à pitagórica. Por exemplo, a quinta justa pura de Pitágoras era $\frac{3}{2}f$ ou $1{,}5f$ enquanto a quinta justa após o temperamento passa a ser $\sqrt[12]{2^7}f$ ou aproximadamente $1{,}4983f$. São notas muito próximas, a ponto de ser praticamente imperceptível ao ouvido humano sua dissonância, porém resolve os problemas de transposição de tons que se tinham na época e tem um impacto positivo enorme na música.

Dados os fatos apresentados, vemos que a relação da matemática com a música é de longa data e pela união das mesmas e ao trabalho de vários matemáticos e músicos da antiguidade, somos contemplados com as mais variadas canções e melodias que podemos apreciar nos dias de hoje. Assim, espero que este capítulo tenha não apenas trazido um conteúdo de relevância para você, leitor, mas para que também, da próxima vez que ouvir uma música, a veja com “outros olhos”, ou melhor, a ouça com “outros ouvidos”, pois como disse Cello Vieira, “A música é a matemática falando harmonicamente”. Então... ouça a matemática falar com você.

E como fechamento para este capítulo, vamos agora falar um pouco sobre a relação destes conceitos com a Educação Matemática. Neste sentido, vamos primeiramente entender o que conhecemos como Educação Matemática, esta que já foi ingenuamente entendida como a “[...] união de Educação e Matemática, como se possível fosse tomar os conteúdos matemáticos e adequá-los aos níveis de desenvolvimento do aluno em consonância com modos apropriados de ensina-los [...]” (BICUDO, 2013, p. 13).

Hoje entendemos:

> [...] a Educação Matemática como sendo constituída pelo « entre » que se estabelece entre a Matemática e a Educação, o que exige posturas investigativas inter, multi e transdisciplinares. Essa exigência traz consigo outra, qual seja, a de ficarmos atentos às especificidades das disciplinas que convergem para a interdisciplinaridade solicitada [...] (BICUDO, 2013, p. 13)

Podemos perceber então, que muito mais que uma mistura dos dois elementos Educação e Matemática, estão falando de algo que está entre ambos e que se faz uso principalmente de meios interdisciplinares para as abordagens nesta área. Portanto, o uso da música como sendo uma aliada para o ensino de matemática, levando em consideração às especificidades dos conteúdos abordados, é um modo de se atingir as posturas investigativas para a Educação Matemática.

E podemos adicionar a isto, esta pesquisa como um todo, ainda mais quando olhamos com maior atenção o que é uma PMD (veremos no capítulo seguinte), pois uma de suas características principais e de modo geral mais utilizada durante suas aplicações é a sua multimodalidade, que se torna um poderoso meio de se manifestar as propostas interdisciplinares, multidisciplinares e transdisciplinares.

3 TECNOLOGIAS DIGITAIS E PERFORMANCES MATEMÁTICAS DIGITAIS

3.1 Tecnologias digitais

Como já é de conhecimento do leitor, esta pesquisa tem como foco o uso das Performances Matemáticas Digitais (PMD), onde através do uso das tecnologias digitais alia-se arte para expressar conhecimento matemático, portanto antes de nos aprofundarmos no mundo das PMD, vamos falar um pouco sobre a importância das tecnologias digitais no mundo atual, sobretudo como elas podem se integrar aos processos educativos.

Nos tempos atuais, muitos já entendem as tecnologias digitais como indissociáveis do ensino (KENSKI, 2007), podemos destacar pontos que comprovam essa relação na versão mais recente da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018, elaborada pelo Ministério da Educação (MEC). No documento é ressaltado em diversos momentos a importância da utilização e da exploração das novas possibilidades que as tecnologias atuais podem oferecer para o ensino.

Podemos encontrar praticamente em todo texto da BNCC, tópicos que integram cada vez mais a contemporaneidade no cotidiano do ensino, sobretudo em matemática, como por exemplo “utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2018, p. 267).

Dentre outros tópicos, trago alguns dos vários encontrados na Base, referentes ao uso de tecnologias digitais para o ensino da matemática:

> (EF03MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas em um universo de até 50 elementos, organizar os dados coletados utilizando listas, tabelas simples ou de dupla entrada e representá-los em gráficos de colunas simples, com e sem uso de **tecnologias digitais** (BNCC, 2018, p. 289, grifo nosso).
> (EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando **tecnologias digitais** (BNCC, 2018, p. 297, grifo nosso).
> (EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de **tecnologias digitais**, no contexto da educação financeira (BRASIL, 2018, p. 317, grifo nosso).

Percebe-se então, que o Ministério da Educação (MEC) está dando uma grande ênfase na utilização das tecnologias emergentes, de fato, muito se fala sobre isso no meio educacional. Vamos agora entender o porquê disso e a importância do uso destas ferramentas para a aprendizagem dos alunos, em especial, abordaremos as vantagens para com o ensino da matemática, já que esta é a área de estudos dessa pesquisa.

Antes de entendermos como se dá a interação de nós seres humanos com a tecnologia, vamos primeiramente defini-la. Kenski nos diz que:

> Ao conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade, chamamos de “tecnologia”. Para construir qualquer equipamento – uma caneta esferográfica ou um computador –, os homens precisam pesquisar, planejar e criar o produto, o serviço, o processo. Ao conjunto de tudo isso, chamamos tecnologias (KENSKI, 2007, p. 24).

É importante destacar que uma tecnologia não se limita a algo físico, como a própria Kenski diz, um tipo de atividade pode ser caracterizado também como uma tecnologia, qualquer forma de se utilizar algo, planejar e etc entra também nesta definição. Vemos que a definição de tecnologia pode ser e é, bem ampla, agora adicionaremos o adjetivo “digital” nesta definição, assim teremos um subconjunto onde englobaremos tecnologias do mundo eletrônico, sendo assim, as tecnologias digitais estão associadas ao “computador, ao celular e aos dispositivos amplamente utilizados na atualidade” (CHIARI, 2018, p. 354).

Para chegarmos onde estamos hoje, com smartphones, tablets, softwares, computadores, com vários métodos criados para se ensinar matemática com o auxílio destes, houve um processo gradativo, uma longa jornada até os tempos atuais, todos esses acontecimentos foram definidos por Borba, Scucuglia e Gananidis (2020) como sendo as quatro fases das tecnologias digitais em Educação Matemática.

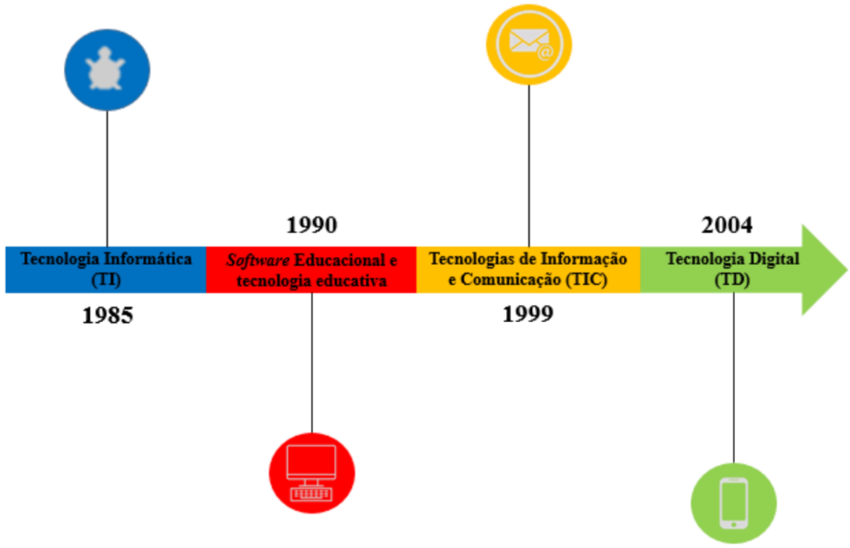

Figura 8: As quatro fases da Tecnologia Digital

Fonte: SALMASIO (2020)

A primeira fase ocorreu por volta dos anos 80, onde o uso de calculadoras e computadores já estava sendo debatido para o ensino de matemática, nessa época foram introduzidos termos como tecnologias informáticas (TI), esta fase se caracteriza pelo uso dos computadores e os primeiros softwares elaborados para aprender matemática, sendo o principal da época o LOGO[4].

> Cada comando do LOGO determina um procedimento a ser executado por uma tartaruga (virtual). Os movimentos da tartaruga, como passos e giros, possibilitam a construção de objetos geométricos como segmentos de reta e ângulos. A natureza investigativa do LOGO diz respeito à construção de sequências de comandos (um algoritmo) que determina um conjunto ordenado, ou sequencial, de ações que constituam uma figura geométrica (BORBA; SCUCUGLIA; GANANIDIS, 2014, p. 19).

4 O LOGO é um software que alia os conhecimentos de linguagem de programação e matemática.

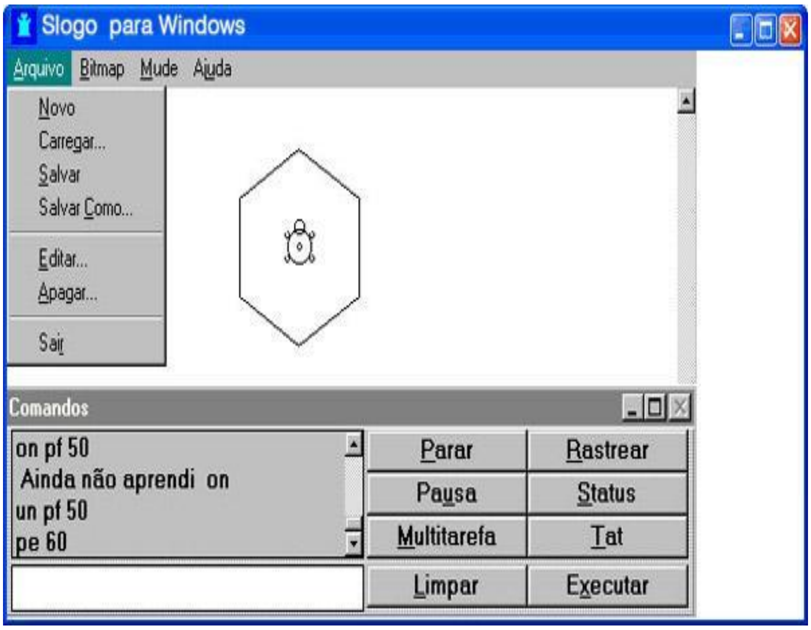

Figura 9: Interface do software LOGO.

Fonte: Borba; Scucuglia; Gananidis (2014)

Nesta fase também, deu-se o início de discussões acerca da implementação de salas de informática nas escolas, tendo em vista as possibilidades acerca do uso dessas ferramentas e vindouras, porém ainda era incerto, então foi algo muito debatido. A partir deste momento em que houve as primeiras discussões sobre o assunto, começa uma longa investigação sobre a importância do uso dos primeiros computadores e calculadoras para o ensino de matemática (SALMASIO, 2020).

Em meados dos anos 90 vemos o surgimento da segunda fase, essa se deu devido à acessibilidade e popularização dos computadores em ambientes pessoais de modo geral. Nesta época, muitas pessoas ainda não tinham utilizado um computador, enquanto outros estavam aos poucos explorando e descobrindo os novos rumos que o uso das TI estava proporcionando. Os educadores e demais envolvidos com o ensino nessa época ainda estavam muito divididos a respeito do uso das tecnologias, alguns já estavam explorando todas as possibilidades enquanto outros ainda estavam indiferentes a respeito do assunto.

Foi um estágio onde várias empresas, governos e pesquisadores começaram a desenvolver softwares voltados especificamente para uso na educação. “Nesta fase destacamos o uso de softwares voltados às múltiplas representações de funções (como o Winplot, o Fun e o Graphmathica) e de geometria dinâmica (como o Cabri Géomètre e o Geometricks)” (BORBA, SCUCUGLIA, GANANIDIS, 2014, p. 23).

Uma novidade que vale ressaltar a respeito dos softwares representantes dessa fase, foi a implementação da função de “arrastar”, dessa forma era possível mover determinada construção geométrica e ter uma maior compreensão das características do objeto que estava sendo estudado.

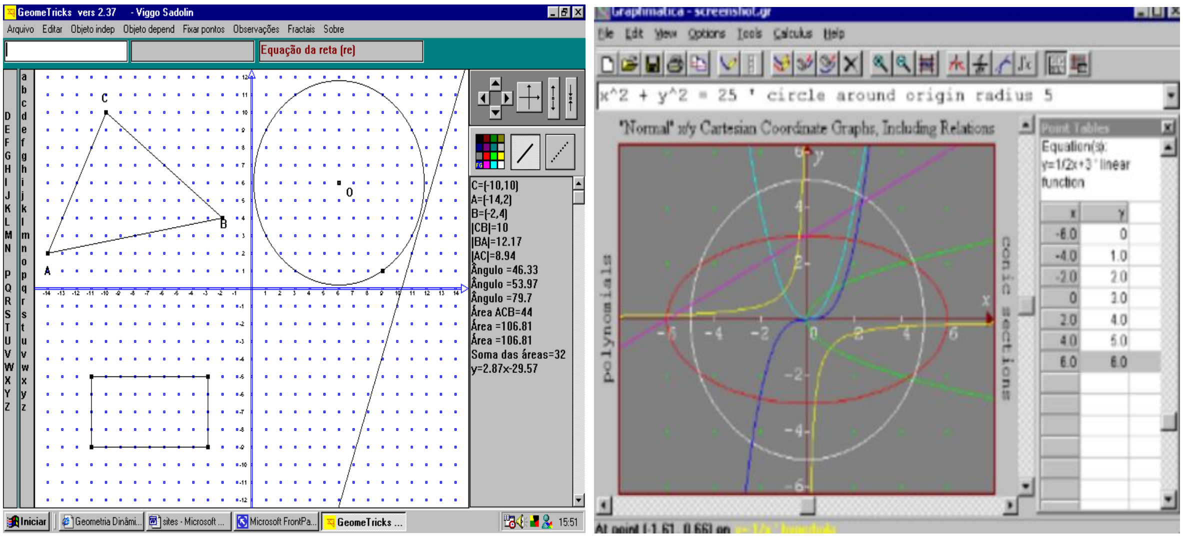

Figura 10: Interface dos softwares Geometricks e Graphmathica respectivamente.

Fonte: Geocities e UptoDown (Acesso em julho de 2022). Disponível em: <http://www.geocities.ws/geometricks_ipora/> e <https://graphmatica.br.uptodown.com/windows> respectivamente.

Caminhando para a terceira fase do uso das tecnologias digitais, temos um marco extremamente importante, o surgimento da internet. Essa fase ocorreu por volta de 1999. A partir deste momento, a internet começa a ser vista como um facilitador na busca por informações e comunicações entre pessoas. Foi nessa fase que ocorreu o surgimento dos primeiros fóruns de discussão, chats, e-mails entre outros. Em função dessas novas possibilidades de comunicação, as Tecnologias da Informação começaram a serem chamadas de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC).

Após este longo percurso, por volta do ano de 2004, devido ao surgimento de uma internet mais veloz e mais acessível, surgiu então a quarta fase e também a mais atual, onde oficialmente passa a ser usado o termo Tecnologias Digitais (TD). Ferramentas como smartphones, notebook entre outros trazem uma mobilidade que garante, aos que tem acesso a estes aparelhos, que estejam “on-line” praticamente todo o tempo.

> Podemos notar que as formas de comunicação, o comportamento das pessoas, a busca por informações, o estilo de vida e principalmente a Educação se alteram. Os chats vão desaparecendo. O WhatsApp se torna um dos mais utilizados aplicativos para a comunicação. O e-mail, mesmo que ainda muito utilizado, perde sua força, novos aplicativos surgem, possibilitando que em toques rápidos na tela do celular seja possível resolver problemas (como acessar sua conta no banco, pagar contas, fazer orçamento, baixar músicas...). (SALMASIO, 2020, p. 28)

E temos ainda uma quinta fase, que surgiu dentre outros motivos, pela grande demanda da necessidade de comunicação on-line ocasionada pela pandemia da Covid-19, em que foi possível e vista a realização de videochamadas com centenas de pessoas simultaneamente e cada vez mais evoluindo, conforme as evoluções tecnológicas.

> Antes da pandemia a Educação presencial já tinha várias facetas online, assim como a Educação online sempre teve facetas presenciais. E esse caminho parece ser irremediável na quinta fase. A hibridização da Educação já se apresenta na quarta fase, mas parece que será intensificada, mesmo com a superação da pandemia. [...] A intensificação do uso de tecnologias digitais na Educação Matemática durante a pandemia foi algo extraordinário [...] (BORBA, SOUTO, CANEDO-JUNIOR, 2022, p. 28)

Em virtude ao massivo uso de recursos digitais, como visto pelo cenário pandêmico, poderíamos dizer que o uso das tecnologias digitais está em seu ápice? Ou é só o começo? Isso só poderemos dizer com o passar dos tempos, mas, de fato, os movimentos e mudanças produzidos por este momento que vivemos possuem diversos aspectos como Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018, p. 39-40) apresentam:

GeoGebra

- Interação entre Geometria Dinâmica e múltiplas representações de funções;
- Cenários inovadores de investigação matemática.

Multimodalidade

- Diversificados modos de comunicação passaram a estar presentes no ciberespaço;
- Uso de vídeos na internet;
- Fácil acesso a vídeos em plataformas ou repositórios (YouTube e TEDTalks);

- Produção de vídeos com câmeras digitais e softwares de edição com interfaces amigáveis.

Novos designs e Interatividade

- Comunicadores on-line (Skype) Ambientes virtuais de aprendizagem (Moodle, ICZ e Second life);
- Aplicativos on-line (Applets);
- Objetos virtuais de aprendizagem (RIVED).

Tecnologias móveis ou Portáteis

- Celulares inteligentes, tablets, laptops, dentre outros: Comunicação por SMS;
- Multifuncionalidade;
- Câmeras digitais, jogos e outros aplicativos;
- Multiconectáveis (USB);
- Interação através do toque em tela;
- Acesso à internet.

Performance

- Estar on-line em tempo integral;
- Internet na sala de aula;
- Reorganização de dinâmicas e interações nos ambientes escolares;
- Redes sociais (Facebook);
- A matemática dos estudantes para a ir além da sala de aula: Torna-se pública nos ciberespaços;
- Presente em diversos tipos de diálogos e cenários sociais.

Performance Matemática Digital

- Uso das artes na comunicação de ideias matemáticas;
- Estudantes e professores como artistas;
- Produção audiovisual e disseminação de vídeos na internet;
- Narrativas multimodais e múltiplas identidades on-line;
- Surpresas, sentidos, emoções e sensações matemáticas;
- Ambientes multimodais de aprendizagem; Novas imagens públicas sobre a matemática e os matemáticos.

Todos estes aspectos fazem parte da quarta fase e estes agregam junto com essa nova quinta fase, focada na imersão em um ambiente virtual capaz de entregar uma experiência cada vez mais próxima da realidade. Há muito o que se falar da quinta fase, mas vamos dar destaque ao que é tema também desta pesquisa, as Performances Matemáticas Digitais.

Antes de entrarmos neste tópico, é importante destacar a influência que a pandemia da Covid-19 teve no modo de se utilizar as tecnologias digitais, tanto para a realização desta pesquisa, quanto para a educação matemática em geral. Os dados aqui produzidos já foram realizados sob os efeitos da pandemia, em um momento onde os espaços físicos das universidades e escolas estavam fechados, utilizando o ensino remoto, portanto a pesquisa foi feita em sua totalidade através do contato digital com os participantes por meio de videochamadas.

Essa mudança repentina no modo de ensino trouxe algumas dificuldades iniciais, como vai dizer Fávaro et al. (2021), principalmente no fato de nem todos possuíam os recursos tecnológicos ou tinham o conhecimento técnico, necessários para a utilização destes para o ensino da matemática. Foi um começo de adaptações e constante aprendizado, assim repensando o modelo de produção desta pesquisa que antes seria presencial, foi feita uma reestruturação para ser desenvolvido no âmbito do ensino remoto.

3.2 Performances Matemáticas Digitais

A noção de PMD surgiu por volta de 2005, por meio de uma colaboração entre George Gadanidis e Marcelo Borba. Esse trabalho em conjunto buscava aliar tecnologias digitais com as artes performáticas (música, dança, teatro entre outros) aplicados à Educação Matemática. Após a aplicação e aprovação do projeto no *Social Sciences and Humanities Council of Canada* em 2006, vários projetos com ênfase neste tema começaram a surgir.

Mas afinal, o que é de fato uma PMD? De forma simples podemos dizer que a PMD é o uso das artes para produzir e comunicar conhecimento matemático de alguma forma, podendo utilizar vários ramos artísticos para isto juntamente com as tecnologias digitais. Vital (2018) nos diz que:

> PMD pode ser caracterizada como uma expressão matemático-artístico-tecnológica, o que inclui encenação, escrita, declamação e registros digitais de poemas, animações, vídeos digitais, músicas, objetos de aprendizagem, dentre outros, sejam elas quaisquer comunicações de ideias matemáticas com o auxílio das Artes e das tecnologias digitais (VITAL, 2018, p. 32)

A PMD tem a capacidade e o potencial de fazer os educadores irem além do usual, além do comum, explorando o lado artístico do ser humano para aprender e ensinar matemática. A partir disso, é possível discutir a PMD como linha de pesquisa ou como ferramenta didática para se aprender matemática.

> [...] a noção de PMD envolve pluralidade semântica e conceitual. Por exemplo, algumas situações que concebemos PMD enquanto linha de pesquisa (em potencial fase de consolidação em educação matemática). Em outros momentos discutimos a PMD enquanto enfoque didático e pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática. Contudo, acreditamos que um dos sentidos mais usuais atribuídos à “PMD” é o texto-narrativa digital multimodal, principalmente em formato de vídeo digital, embora outros tipos de mídias digitais também sejam explorados (BORBA, SCUCUGLIA, GADANIDIS, 2014, p. 107).

Vemos que a PMD é bem versátil quanto a essa questão, sendo oras vista como linha de pesquisa, porém também sendo utilizada como ferramenta didática, e uma das características mais atribuída a ela é o texto-narrativa multimodal, pois a multimodalidade que a mesma apresenta por conta de sua natureza de trabalho, o que a torna muito interessante e eficaz para abordagem do ensino da matemática, isso porque:

> A multimodalidade é entendida, em termos gerais, como a co-presença de vários modos de linguagem, sendo que os modos interagem na construção dos significados da comunicação social. O que é importante nessa visão de uso de linguagens é que os modos funcionam em conjunto, sendo que cada modo contribui de acordo com a sua capacidade de fazer significados (HEMAIS, 2010).

Então para exemplificar a multimodalidade presente nas PMD, analisemos uma PMD audiovisual. Nela teremos o elemento sonoro, o elemento visual e a mensagem que ela pretende passar. Estes elementos estarão funcionando em conjunto cada qual fazendo o seu papel para que o conceito matemático abordado seja entregue a quem esteja apreciando a performance.

Outro ponto interessante é que com o advento de uma internet mais veloz, como a conhecemos hoje, a PMD possui uma característica que a diferencia da sala de aula habitual, que é a possibilidade de ampliar a interação para além da sala de aula, já que os alunos podem divulgar suas PMD com toda a rede (VITAL, 2018). Assim, devido a estas características e ao trabalho realizado por George Gadanidis, Marcelo Borba e Ricardo Scucuglia, existem vários projetos e pesquisas voltados para as PMD, isto levou ao desenvolvimento de métodos próprios para se analisar uma produção desta natureza.

Gadanidis e Hughes (2011) apresentam a questão acerca de “boas histórias matemáticas”, se utilizando da leitura, dramatização entre outros para transmitir as ideias matemáticas. Os autores se basearam a partir dos critérios estabelecidos por Boorstin (1990) para analisar a qualidade técnica de um filme. Estes critérios são definidos na forma de três prazeres que devem ser experimentados ao ver um bom filme:

- Prazer observador: Trata-se da sequência lógica dos fatos e acontecimentos, algo muito fora do contexto da narrativa pode prejudicar o interesse de quem assiste;
- Prazer emocional: Está relacionado com as emoções geradas em quem assiste, sobretudo ao fato delas serem coerentes com as emoções interpretadas pelos atores;
- Prazer visceral: Este significa que as sensações experimentadas podem ser descritas com facilidade, os sentimentos apresentados pelo filme são de fácil explicação e quem assiste os sente com clareza.

Dessa forma, a adaptação feita por Gadanidis e Hughes (2011) para avaliar uma boa história matemática trouxe também três prazeres, sendo eles:

- Surpresa matemática: Relacionado a uma experiência nova que surpreenda;
- Emoções matemáticas: Sobre as emoções geradas envolvendo a matemática;
- Beleza da matemática: O prazer visceral relacionado à matemática por ela mesma, enxergando a beleza que ela possui.

Então, em meados de 2012, Ricardo Scucuglia elaborou com premissas semelhantes e com base nestas adaptações de Gadanidis e Hughes, os elementos fundamentais para se construir uma PMD conceitual, em outras palavras, uma PMD de qualidade em todos os sentidos (É importante destacar que a falta de uma ou outra premissa não descaracteriza a PMD). Para isto, estabeleceu quatro critérios de avaliação que uma PMD precisa atender para ser considerada conceitual, que são:

> 1. **Surpresa matemática**: a ideia explorada deve oferecer surpresa matemática, explicitando-a como atividade humana e estética;
> 2. **Sentido matemático**: a PMD deve comunicar claramente a ideia matemática de maneira conceitualmente correta;
> 3. **Emoções matemáticas**: se refere a natureza multimodal da narrativa digital, na qual são enfatizados modos alternativos de comunicação como a oralidade, a gestualidade, a espacialidade e a visualização, além da linguagem escrita tradicional no fazer matemático e a articulação entre multimodalidade e sensibilidade artística na narrativa matemática.
> 4. **Sensações viscerais**: diz respeito ao desejo em matemática e a aspectos estéticos como a identificação de padrões, simetrias, generalizações, etc. (SCUCUGLIA; GREGORUTTI, 2015, p.7).

Estes critérios serão a base norteadora desta pesquisa no que se diz respeito ao resultado final das PMD produzidas. Assim, antes de prosseguirmos, é necessário relembrar o leitor que uma PMD não se limita apenas ao uso da música, mas este trabalho, como provavelmente já sabe, teve como foco a produção de PMD utilizando música, além de sua íntima relação com a matemática, como foi visto no capítulo anterior.

A música é uma das artes mais populares no mundo moderno, pelo menos no Brasil com certeza é, de acordo com a pesquisa realizada pela Opinion Box[5] em 2019 acerca do comportamento do consumidor de música no Brasil. Dentre os resultados apresentados, um dos que mais se destaca é o fato de que 79% dos brasileiros ouve música todos os dias, variando entre o dia todo (26%) até poucas vezes no dia (29%). Podemos perceber isto também no número de serviços de streaming de música que existem atualmente e no seu crescimento constante. Alguns dos principais exemplos são o Spotify, Deezer, Youtube Music, Amazon Music e Apple Music.

Vimos há pouco como a PMD e sua característica multimodal traz várias possibilidades de organização entre os elementos que a compõem, trazendo

---

5 O leitor pode conferir o infográfico da pesquisa através do link: https://d335luupugsy2.cloudfront.net/cms/files/7540/1556130050OPB_pesquisa_comportamento_musica_infografico_final_links.pdf

resultados dos mais variados no que diz respeito à aprendizagem, e à música. Nesse contexto, Campos (2009, p. 16) argumenta que esta característica:

> [...] cria um ambiente livre de tensões, facilita a sociabilização, cria um ambiente escolar mais abrangente e favorece o desenvolvimento afetivo. Na música, vários motivos são simultaneamente acionados: a audição, o canto, a dança, o ritmo corporal e instrumental da criação melódica – contribuindo para o desenvolvimento da pessoa e servindo para transformar o ato de aprender em uma atitude prazerosa no cotidiano do professor e do aluno (CAMPOS, 2009, p. 16)

Percebe-se, então, que a música dá oportunidade para o uso da multimodalidade de uma forma ampla e pode trazer um desenvolvimento prazeroso em sua utilização, sendo bem compatível com a proposta de uma PMD conceitual.

E da mesma forma que vimos como a BNCC faz referência a diversos aspectos importantes sobre o uso das tecnologias digitais, vemos que a mesma também explora o uso da música, tanto que ao pesquisar a palavra música na Base, encontramos 136 resultados, presentes na educação infantil, ensino fundamental e médio.

> (EF15AR14) Perceber e explorar os elementos constitutivos da música (altura, intensidade, timbre, melodia, ritmo etc.), por meio de jogos, brincadeiras, canções e práticas diversas de composição/criação, execução e apreciação musical (BNCC, 2018, p. 203).
> (EM13LGG603) Expressar-se e atuar em processos de criação autorais individuais e coletivos nas diferentes linguagens artísticas (artes visuais, audiovisual, dança, música e teatro) e nas intersecções entre elas, recorrendo a referências estéticas e culturais, conhecimentos de naturezas diversas (artísticos, históricos, sociais e políticos) e experiências individuais e coletivas (BNCC, 2018, p. 496).

Não foi encontrado nenhuma habilidade que ligue diretamente o uso da música com a matemática, entretanto podemos observar que na habilidade EM13LGG603 há uma relação ao uso da PMD no processo de aprendizagem desde elemento, o que evidencia a importância dos movimentos e projetos que buscam fomentar a sua utilização cada vez mais. Devemos lembrar também que:

> Para alguns alunos é a partir talvez da beleza da música, da alegria proporcionada pela beleza musical, tão freqüentemente presente em suas vidas em outra forma, que chegarão a sentir a beleza na literatura, o misto de beleza e verdade existente na matemática, o misto de beleza e eficácia que há nas ciências e nas técnicas (SNYDERS, 1994, p. 138)

Existe grande potencial no uso da música para trazer boas emoções e sentimentos, e quebra o padrão e o senso comum de muitos alunos que veem a matemática como algo tedioso. A grande “sacada” é que a maioria desses alunos ouvem música o dia todo ou, pelo menos, com muita frequência.

Diante dos fatos apresentados, vamos agora entender todo o processo metodológico desta pesquisa, como foi a produção de dados, as PMD realizadas e a análise feita a partir da teoria de uma PMD conceitual, bem como algumas indagações feitas pelos participantes.

4 METODOLOGIA

Como tudo na vida, conscientemente ou não, utilizamos métodos para realizar quaisquer atividades do nosso cotidiano, dado o fato desta pesquisa ser uma pesquisa científica, não podemos realizá-la por meio de um método inconsciente, portando chegou a hora de detalhar neste capítulo como foram os processos metodológicos escolhidos para a produção dos dados.

Vamos entender também, o motivo das escolhas que foram feitas e como as mesmas foram importantes para a realização da proposta de pesquisa. As escolhas tiveram muita influência pela pandemia da Covid-19, que limitou a realização de algumas ideias e trouxe a necessidade de buscar novas maneiras para fazer esta pesquisa.

4.1 Pesquisa qualitativa e a produção de dados

Dada a natureza da pesquisa e dos dados produzidos, foi utilizada uma metodologia de caráter qualitativo, isso por que:

> Na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc (GOLDENBERG, 2004, p. 14).

Retomando o que a pergunta central da pesquisa procura responder, a respeito de entender como futuros professores de matemática produzem PMD para representar funções a partir de notas musicais, percebemos que, de fato, não houve uma contabilização numérica destes dados. Para se fazer a análise dos mesmos, é necessário nos aprofundarmos no que foi o entendimento dos participantes e os pensamentos que surgiram a partir da realização das atividades propostas.

Existem alguns pontos importantes a se destacar a respeito da pesquisa qualitativa, Bogda e Biklen nos falam sobre algumas de suas características principais:

> [...] a fonte de dados é o ambiente natural, constituindo investigador o instrumento principal; a investigação qualitativa é descritiva; os instrumentos qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; os investigadores qualitativos tendem a analisar os

> seus dados de forma indutiva; o significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 47–51).

É interessante observar que no processo de construção das PMD se produziu boa parte dos dados, visto que é a partir desse processo que entendemos as potencialidades do uso da PMD e o processo de construção do conhecimento por parte dos envolvidos.

Os participantes da pesquisa foram estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), estes comumente chamados de pibidianos. Ao todo foram 10 participantes, divididos em 5 duplas. O motivo da escolha destes indivíduos para a realização da pesquisa foi, entre outros, o contato que estes já têm em sala de aula por serem bolsistas do PIBID e também por estarem cursando a graduação. Em outras palavras, temos "o melhor dos dois mundos", futuros professores que já possuem algum conhecimento em sala de aula (entendem as limitações e obstáculos que eventualmente possam vivenciar) e atuais graduandos que estão buscando novas práticas e formas de ensinar para leva-las às escolas quando começarem a atuar na profissão.

Vale destacar já de início que pelo fato de alguns dos participantes optarem pelo anonimato na resposta ao Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE, decidimos por não usar os nomes reais de nenhum dos participantes. Quando houver falas dos mesmos, eles serão chamados de pibidiano A ou pibidiano B seguido do número de sua dupla, ou seja, um diálogo entre os membros da dupla 3 será apresentado como diálogo entre pibidiano A3 e pibidiano B3.

Outro fato importante foi que, em decorrência da pandemia ocasionada pela Covid-19, todos os encontros foram feitos de maneira virtual por meio da ferramenta Google Meet, sendo que ao todo foram três encontros de aproximadamente duas horas com a grupo todo, e mais cinco encontros separados com cada dupla, com duração média de uma hora.

Houve a gravação em vídeo de todo o processo da produção de dados, os momentos com as duplas e os momentos com o grupo todo. Com isso foi possível registrar todas as conversas e reflexões dos participantes, bem como a gravação da construção de cada PMD, nos dando assim, um material significativo e robusto de movimentações realizadas no processo de produção de dados. Então, sem mais delongas... vamos entender como foi a produção e coleta dos dados.

O primeiro encontro teve como objetivo a discussão de um texto voltado para a PMD, situando assim os participantes acerca do que era uma PMD, como funcionava, as suas potencialidades e é claro, alguns exemplos. O artigo escolhido para esse encontro foi o “Narrativas Multimodais: a imagem dos matemáticos em performances matemáticas digitais” produzido por Ricardo Scucuglia em 2014.

Figura 11: Encontro com os pibidianos para a discussão sobre PMD.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Além da discussão do texto, também houve algumas explicações a respeito de como funcionaria a pesquisa (a respeito de como seriam os encontros, como foi dito), como seriam feitas as produções e quais softwares seriam utilizados para isso.

Assim, após uma discussão a respeito do tema PMD, o segundo encontro foi focado em dois elementos, o primeiro foi explicar a relação entre música e matemática e outras informações que estão no capítulo Matemática e Música, nesta dissertação.

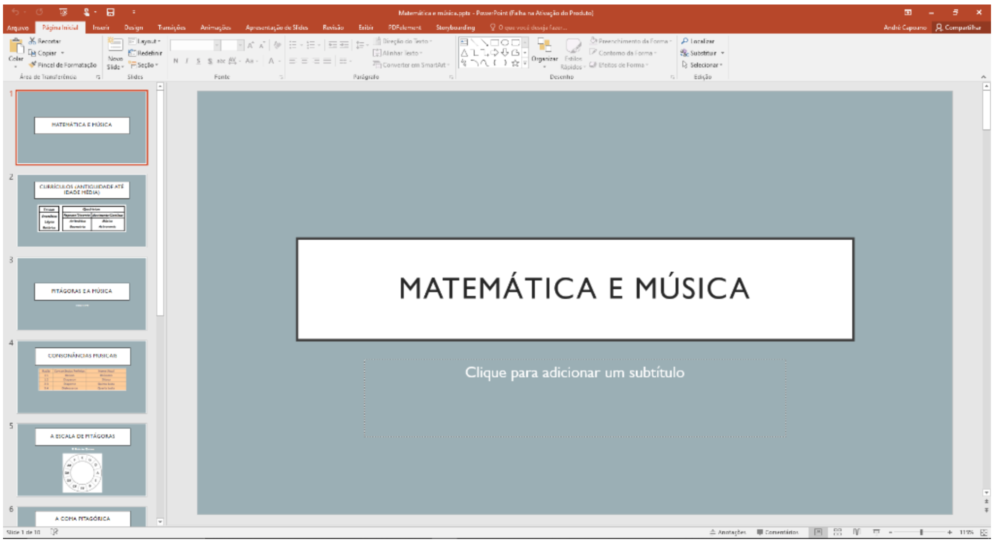

Figura 12: Slide usado para a apresentação dos tópicos.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Neste encontro também foi aprofundado o uso do software a ser usado para a produção, que foi o Reaper[6]. Neste momento do encontro foi explicada a proposta de atividade mais detalhadamente, ou seja, a realização de PMD utilizando funções e música.

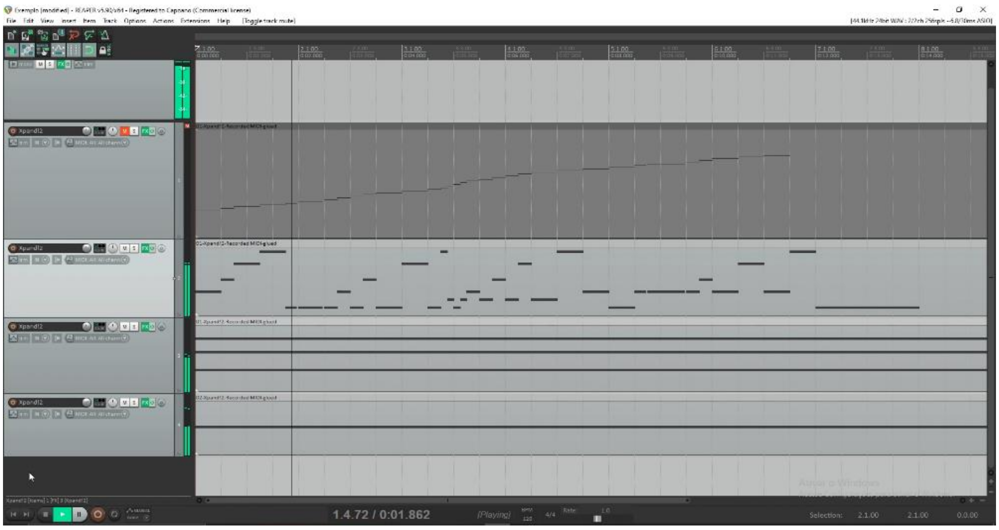

Figura 13: Interface do software Reaper com o exemplo mostrado no encontro.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Imagino que o leitor deve ter ficado curioso sobre o resultado do exemplo dado na Figura 13, então primeiramente explicarei a ideia e os procedimentos usados na

6 REAPER é um aplicativo completo de produção de áudio digital para computadores, oferecendo um conjunto completo de ferramentas de gravação, edição, processamento, mixagem e masterização de áudio multitrack e MIDI. (Fonte: site do software).

produção, e no final disponibilizarei um QR code para que possa conferir o resultado deste exemplo feito pelo autor desta pesquisa.

Cada dupla ficou responsável por escolher uma função matemática (afim, quadrática, exponencial, trigonométrica...) para produzir uma PMD, a ideia era de que as duplas escolheriam uma variedade de funções com características distintas para produzir música com o resultado das funções dadas.

Para o leitor se situar com a ideia e entender melhor como ocorreu esse processo de representar cada função através de uma música, vamos ao exemplo dado neste segundo encontro. A função escolhida foi $f(x) = 2x + 1$ com o domínio escolhido sendo um subconjunto dos números inteiros naturais. Tendo em mãos nossa função, codificamos os resultados dela de forma que cada número correspondesse a uma nota musical. Foram feitos dois tipos de codificação, uma buscando produzir um som no qual pudéssemos perceber as características das funções não pelo seu gráfico, mas sim pelo seu som (se o mesmo fica mais agudo então lembra uma função crescente e assim por diante, isso para todas as funções) e outro método, este utilizado para criar de fato uma melodia agradável aos nossos ouvidos.

O motivo para isso foi que as músicas em geral seguem uma certa linearidade, pois as notas que compõem sua melodia estão sempre um pouco acima ou um pouco abaixo de uma "média melódica". Já no caso de uma função crescente de 1º grau, sem intervalo definido, por exemplo, este som iria apenas ficar mais agudo até se tornar inaudível, desqualificando este som como uma melodia agradável, mas sendo útil para se entender o comportamento da função.

A codificação para o exemplo ficou da seguinte forma:

- Dó = 1
- Ré = 2
- Mi = 3
- Fá = 4
- Sol = 5
- Lá = 6
- Si = 7

Assim, para $x = 1$ em nossa função, teríamos como resultado o valor 3, y=3, ou seja, a nota tocada seria o Mi. Caso o valor da função para determinado valor do domínio fosse maior que sete, no primeiro método repete-se a sequência de notas, porém uma oitava acima, ou seja, Dó uma oitava acima = 8, Ré uma oitava acima = 9, Mi um oitava acima = 10 e assim por diante. No segundo método fazemos isso com os números de 0 a 9, porém se o valor resultante para a função possuir mais de um algarismo, tocaremos duas notas em vez de uma. Como exemplo, se a função assumir valor 16, tocamos o Dó = 1 e o Lá = 6 um por vez.

Utilizando esta estratégia, fazemos com que no primeiro caso, o som possa ficar cada vez mais agudo ou grave de forma virtualmente ilimitada (claro que para esta experiência, não faz sentido o som ser superior a capacidade de audição humana, portanto este seria o limite), acompanhando o comportamento do gráfico da função, enquanto que no segundo caso a melodia estaria limitada a apenas 10 notas, pouco mais que uma oitava, dando essa linearidade sonora que as músicas geralmente têm.

Dessa maneira temos como resultado dois arquivos de som, um usado para analisar as características da função por meio do som criado por ela e outro contendo uma versão musical dessa função, usando apenas os resultados obtidos ao escolher valores para x.

Veja agora como ficaram os áudios produzidos por meio da função exemplo, que, relembrando, foi $f(x) = 2x + 1$. Basta acessar os QR codes a seguir, e peço ao leitor que tente perceber as características dessa função afim crescente pela sonoridade produzida no primeiro áudio, é importante dizer que o domínio foram os números inteiros, mais a frente falaremos um pouco das consequências desta escolha. Já no segundo áudio foram adicionados uma percussão[7] e uma harmonia de fundo para acompanhar a melodia, neste áudio, apenas aprecie o som.

7 Os instrumentos de percussão são aqueles que necessitam ser percutidos (batidos), agitados, raspados ou friccionados para que produzam os sons. Podem ser divididos em dois grupos principais: os de altura indefinida, percebidos pelo ouvido humano apenas como ruídos, como o chocalho e o tamborim, e os de altura definida, que geram uma nota musical específica, como o tímpano, a marimba e o xilofone.

Figura 14: QR codes[8] do exemplo de PMD, a esquerda o áudio com objetivo de analisar as características da função pelo som, a direita a melodia produzida pela função.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Peço ao leitor para que ouça o primeiro áudio e já o compare com o gráfico a seguir, assim vá percebendo as relações que possam existir entre o som ouvido e as características da função no plano cartesiano, aos poucos nos aprofundaremos mais nisso.

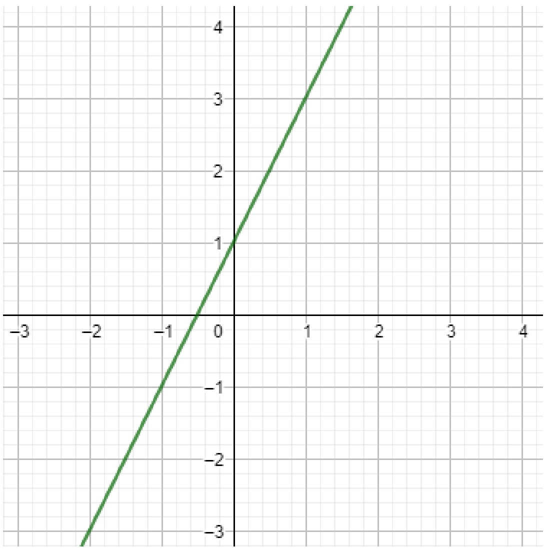

Figura 15: Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

Fonte: Elaboração própria (2022)

Dando seguimento a explicação de como foi a realização da produção de dados, após o segundo encontro, cada dupla já tinha escolhido a sua função escolhida e assim marcamos os encontros individuais com as duplas, totalizando assim cinco encontros desta natureza. O motivo para a escolha de encontros individuais se deu

---

8 Links para os áudios do exemplo:
https://drive.google.com/file/d/1an3xn-HOR2_vDds8GNffl34MO6SnSYWE/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/185-rluIeaDgeDdv2rdwHx9hrs3EXnODo/view?usp=sharing

pela natureza dos programas utilizados e pelo fato de toda a produção ter sido feita de forma on-line, por meio de videochamadas.

Além do software Reaper, que é uma DAW[9] feita especificamente para a produção de músicas, foi utilizado o plugin Xpand!2[10] para sintetizar diversos instrumentos musicais diferentes e trazer uma riqueza maior de sonoridades às produções realizadas, dando assim a oportunidade de cada dupla aplicar um pouco de sua personalidade na produção, seja por meio dos instrumentos utilizados, ou por meio dos estilos empregados a cada produção, tornando-as únicas.

Após o encontro com cada dupla, houve ainda um último encontro com o grupo todo, onde cada equipe apresentou sua PMD e contou um pouco sobre o processo de produção e seus pensamentos a respeito da proposta, este momento foi para que todos pudessem discutir sobre o tema, tentar decifrar as PMD dos colegas e notar o comportamento das funções escolhidas nas representações sonoras de cada um.

9 Digital Audio Workstation ou em português, Estação de Trabalho para Áudio Digital

10 Xpand!2 é um instrumento virtual multitimbre de quatro canais, com até quatro partes de instrumentos estéreo por patch e 64 vozes por partes, nas opções de modo monofônico e polifônico.

5 ANÁLISE DOS DADOS

Chegamos para o momento da análise dos dados produzidos para a proposta desta pesquisa e de antemão nesta breve introdução do capítulo, quero apresentar um pouco do pensamento dos participantes a respeito da proposta da construção das PMD usando funções, sendo mais específico, quando é explicado com exemplos o que eles fariam durante os encontros.

Foi possível perceber certo entusiasmo por parte dos participantes naquele momento, através de comentários e até mesmo expressões faciais dos que estavam com a câmera habilitada. Destacando que no início ainda não sabiam muito bem quais eram os planos para os encontros e como isso se daria, porém, após mostrar o exemplo, tudo se tornou claro e houve grande curiosidade a respeito da realização da atividade, afinal essa proposta de trabalho foi um tanto quanto inusitada para eles. Como eles mesmos disseram:

– “Não sei como isso vai funcionar na prática né... eu não entendo nada de música por exemplo, mas é bastante diferente... tipo... fazer isso só com matemática... vamos ver”. (Participante B5)

Antes mesmo de produzirem as próprias versões em PMD das funções escolhidas, já ficaram surpresos com a ideia. Podemos verificar essa surpresa na fala de um dos participantes após ver o exemplo:

– *“Eu particularmente estou bem curioso para ver como vai funcionar, por que assim... ficou bem legal... e parece ser algo bem diferente e legal né, uma forma diferente de ver a matemática e a música também”. (Participante A4)*

Agora que vimos brevemente um pouco do pensamento dos pibidianos no início da pesquisa, vamos avançar para a análise do som das funções, que se encontra a maior parte dos dados e ao qual mais vamos focar a nossa análise. Apenas para contextualizar melhor, vamos relembrar os objetivos norteadores desta pesquisa e assim prosseguir com a análise:

- Analisar a representação de funções com notas musicais a partir de codificações com escalas musicais variadas utilizando o software Reaper;
- Analisar produções musicais feitas por futuros professores envolvendo funções e outros conhecimentos matemáticos com o software Reaper;

- Analisar reflexões pedagógicas sobre relações entre funções, representações por meio de som e música e produção de PMD.

5.1 O som das funções

O início do encontro por dupla foi semelhante com todas as duplas: por meio de videochamada através do Google Meet fizemos a nossa tabela para transposição dos números em notas musicais conforme já foi explicado, porém buscando trazer uma riqueza maior para as melodias, as duplas usaram escalas musicais diferentes umas das outras (desde funções de 1º grau, até funções trigonométricas mais complexas foram trabalhadas). A escolha das escalas musicais foi feita pelo próprio pesquisador, enquanto que cada dupla escolheu a função.

A dupla 1 escolheu a função $f(x) = 4x + 8$, uma função de primeiro grau crescente e a escala utilizada foi a escala de Dó maior (esta tem cada oitava composta pelas notas Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si nesta ordem). No começo apresentaram alguma dificuldade no manuseio do software, porém conforme foi passando o tempo e começamos a adicionar as notas musicais, a atividade foi aos poucos tomando forma como mostra a figura XIV.

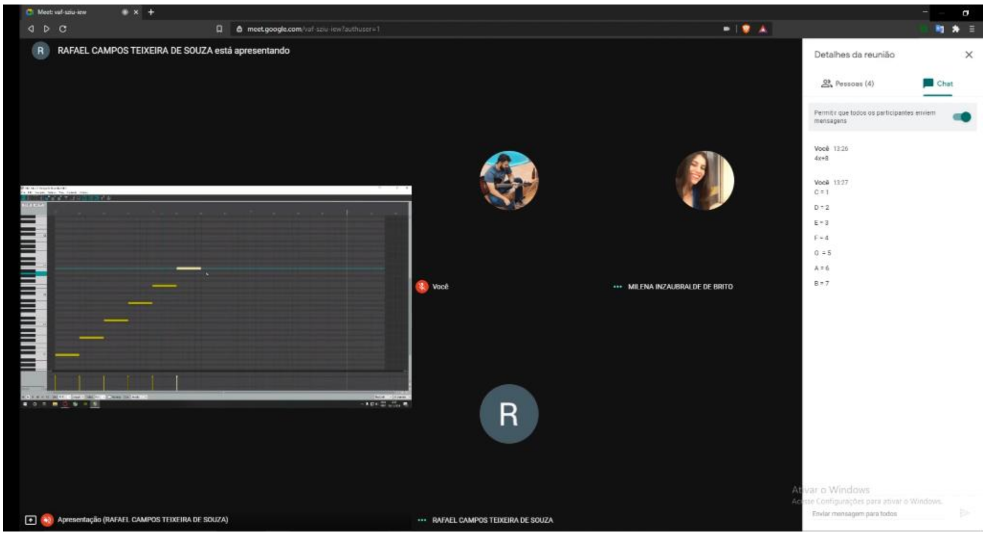

Figura 16: Encontro com a dupla 1.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Após a realização das produções da PMD da função $f(x) = 4x + 8$, algumas perguntas foram feitas à dupla a respeito do que acharam e se viam aplicabilidade em sala de aula. Ambos falaram que acharam muito legal, que foi uma experiência nova e divertida de ver a matemática. Um dos membros da dupla, a respeito da pergunta sobre o uso em sala de aula comentou: "*Sim, porque além de ajudar também na leitura de gráfico não só enxergando, mas também ouvindo, você vê se ela, se o gráfico subiu muito rápido, desceu muito rápido, além disso tudo acho que ajuda bastante a fazer os alunos socializarem, alunos com alunos e alunos com professor, porque é bem legal, a gente está literalmente montando uma música, eu achei bem legal a ideia, gostei bastante" (Participante A1).*

Prosseguindo com a construção da PMD, as notas eram dadas com base nos resultados obtidos pela função escolhida, porém existia uma nova variável na construção da música, quanto tempo ia se prolongar cada nota? Para resolver este empasse, foi deixado a critério dos próprios participantes a duração de tempo de cada nota, respeitando sempre o compasso da música. Assim cada nota era uma fração de um compasso musical, seja um inteiro, meio, um quarto, um oitavo e assim por diante.

Deixamos a critério deles a escolha do tempo por se tratar de uma atividade exploratória para futuros professores, que já conheciam a matemática envolvida nos elementos musicais, por ter sido trabalhado com eles estas questões nos encontros anteriores. No entanto, para fazer o exercício de esboço do gráfico a partir do som das funções (exercício que veremos nas próximas páginas), optamos por deixar todas as notas com a mesma duração, pois poderia interferir na interpretação gráfica do comportamento da função. Veremos mais a diante que houve outra surpresa no decorrer da pesquisa: o fato de trabalharmos a função usando valores apenas no conjunto dos inteiros, trabalhando a construção da função de modo discreto e não contínuo. Essas foram algumas das problematizações que não existiam no início, mas que foram surgindo ao longo do trabalho.

Aqui trabalhamos os conceitos de razão e proporção também, pois existe essa relação entre a duração das notas e cada compasso musical, como podemos ver no exemplo a seguir, cada valor de tempo tem um nome e uma figura que o representa em seu som e em seu silêncio, assim como na última coluna contém também a duração de tempo da nota em relação a um compasso inteiro:

Nome	Som	Silêncio	Duração
Semibreve	𝅝	𝄻	1
Mínima	𝅗𝅥	𝄼	1 / 2
Semínima	𝅘𝅥	𝄽	1 / 4
Colcheia	𝅘𝅥𝅮	𝄾	1 / 8
Semicolcheia	𝅘𝅥𝅯	𝄿	1 / 16
Fusa	𝅘𝅥𝅰	𝅀	1 / 32
Semifusa	𝅘𝅥𝅱	𝅁	1 / 64

Figura 17: Figuras e tempos musicais.

Fonte: Dantas (2019)

Entretanto, este não é o foco desta pesquisa, porém podemos dizer que passamos por esses conceitos indiretamente, assim, no programa utilizado para as construções das PMD, podemos ver a duração de cada nota por meio das barras em laranja como mostra a figura a seguir:

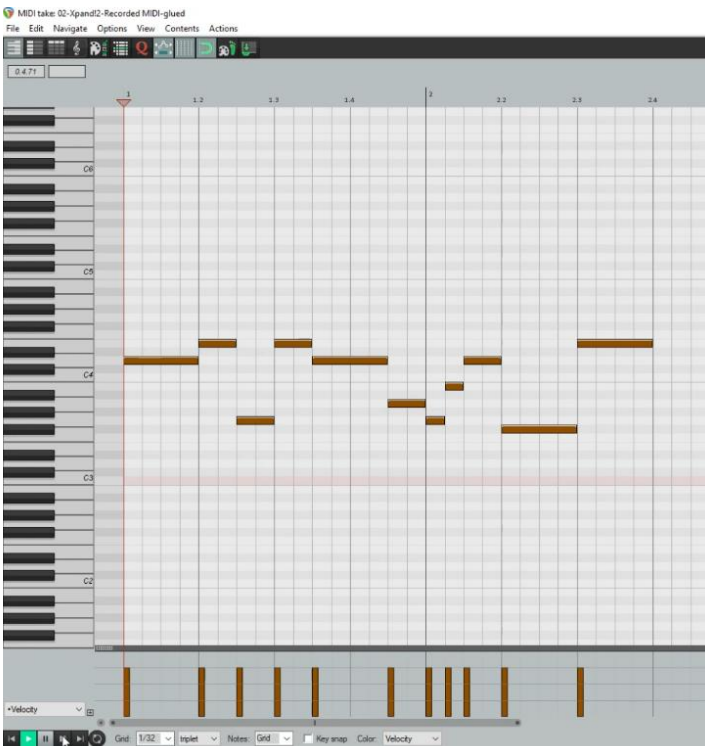

Figura 18: Aba do Reaper na qual foi montada a melodia. Cada barra em laranja na horizontal representa a duração de tempo de cada nota.

Fonte: Elaboração própria (2022)

Para a versão mais melódica da PMD, adicionamos também uma percussão e um pad para preencher mais os silêncios do áudio e acrescentar um ritmo. Os instrumentos virtuais usados para cada um destes elementos, assim como ao da melodia principal, foi de escolha da dupla, configurando uma personalidade própria ao som produzido por eles. Para o primeiro áudio foi usado o seguinte intervalo no domínio dos números inteiros $\{x \in Z|\ 0 \leq x \leq 10\}$ representando o comportamento da função, enquanto que no segundo áudio o intervalo se estendeu até $x = 32$. Eis então o resultado obtido com a função $f(x) = 4x + 8$

Figura 19: QR codes[11] da produção de PMD da função $4x + 8$, a esquerda o áudio contendo o "som do gráfico" e a direita a melodia produzida na sua versão musical.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Perceba como o comportamento do primeiro áudio, em termos sonoros, se assemelha a uma subida, ficando cada vez mais agudo, e o compare com o gráfico da função escolhida.

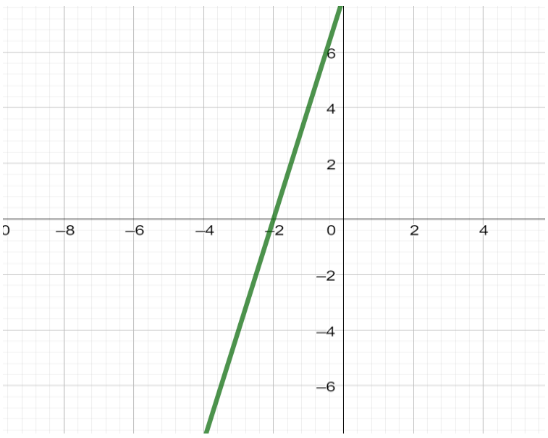

Figura 20: Gráfico da função $4x + 8$

Fonte: Elaboração própria (2022)

---

11 Links para os áudios da dupla 1:
https://drive.google.com/file/d/1O0c3Q3--NQckPbsZ4VYCXAYOa5aYrZTA/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/1A-HHoSRF6uCAbDxePIojPJONtctprel_/view?usp=sharing

Prosseguindo então com os encontros, a dupla 2 escolheu a função f(x)= x^3 e para a construção dos áudios utilizamos a escala de Sol maior (onde cada oitava é composta pelas notas Sol, Lá, Si, Dó, Ré, Mi e Fá sustenido nesta ordem). Todos os procedimentos se seguiram de forma semelhante à dupla anterior, porém com observações diferentes destacadas pelos participantes, então o foco agora será em apresentar o resultado das produções e destacar algumas falas dos participantes para que o leitor consiga sentir um pouco de como foi a experiência dos mesmos com a atividade proposta.

Eis um trecho do diálogo feito entre os participantes da dupla 2:

– *"Eu acho que você produzir uma PMD dessa igual você fez com a gente, fazer esse exercício com aluno de ensino médio, dá uma outra visão sobre a matemática para ele e ajudaria bastante naquele problema que a gente leu no primeiro texto lá do encontro do pibid (referente ao texto de Scucuglia, discutido no primeiro encontro), que é mudar a imagem do professor de matemática" (Participante A2).*

– *"Eu acho que sai um pouco do tipo assim, o cara vai estudar uma função, o cara vai estudar uma expressão ao cubo assim, ele sai um pouco daquele papel de fazer conta e só achar o valor de Y e tudo mais. Ele vê aplicação do valor ali, sabe? O que significa cada coisa, eu acho isso muito interessante" (Participante B2).*

– *"E não trabalha somente a função, você trabalha a lógica ali, a fração, então o aluno vai estar sempre pensando...Eu acho bem legal, eu penso assim, dá pra fazer um trabalho muito legal com uma turma inteira, sabe? Eles produzirem uma música, cantarem, apresentarem no colégio..." (Participante A2)*

Como podemos observar, houve um interesse, por parte dos participantes, em especular novas formas de ensinar frações a partir de elementos que antes não tinham sido pensados. Trazer essas novas perspectivas é importante para a formação de futuros professores, o pensar diferente ("fora da caixa" como dizem) atinge espaços e elementos até então não alcançados.

Para o primeiro áudio usamos o domínio dos inteiros no intervalo $\{x \in Z | -3 \leq x \leq 3\}$, suficiente para representar o comportamento da função escolhida no gráfico enquanto que para o segundo áudio o intervalo foi $\{x \in Z | -6 \leq x \leq 19\}$. Veja agora como ficou o resultado da PMD feita a partir da função x^3 .

Figura 21: QR codes[12] da produção de PMD da funçãox^3 , a esquerda o áudio contendo o “som do gráfico” e a direita a melodia produzida na sua versão musical.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Perceba que o primeiro áudio de todas as produções sempre tem o intuito de expressar o comportamento do gráfico da função por meio do som. Sugiro ao leitor tentar identificar essas características apenas pelo som, tente desenhar o gráfico apenas ouvindo o áudio, vai ser divertido, depois compare com o gráfico da função. Veja se acertou.

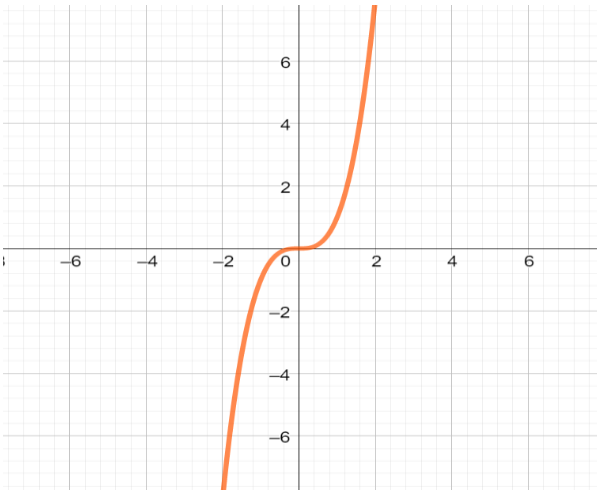

Figura 22: Gráfico da função x^3

Fonte: Elaboração própria (2022)

Dando continuidade na apresentação das PMD feitas pelas duplas, chegou a vez da dupla 3, que escolheu uma função um pouco mais complexa que as demais, o que trouxe algumas reflexões acerca dessa transformação de números em notas musicais. A função escolhida foi $f(x) = \sqrt{x}.(x)$ e a escala musical usada foi a de Dó

12 Links para os áudios da dupla 2:
https://drive.google.com/file/d/1kdCNUrFW-F19ZXngFWVd-h2yi5v6PZrB/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/1fMiHSJoeAafV9c5sto33Rre5gTh4zQSc/view?usp=sharing

menor (cada oitava dessa escala possui as seguinte notas: Dó, Ré, Mi bemol, Fá, Sol, Lá bemol e Si bemol), resultando numa sonoridade curiosa.

A respeito dos números com casas decimais diferentes de zero, fizemos as adaptações necessárias de modo que no caso do primeiro áudio, voltado para identificar as características da função por meio do som, utilizamos a nota mais próxima, ou seja, foi necessário fazer um arredondamento, pois utilizamos como domínio os inteiros não negativos, mas neste caso a imagem da função, várias vezes resultou em números pertencentes aos racionais, algo que trouxe a discussão sobre como seria colocar exatamente uma nota que representasse o valor obtido.

Nesse caso seria necessário desafinar as notas e ter como base não mais as escalas musicais, mas sim as frequências sonoras. Dessa maneira seria possível encontrar uma frequência que fosse mais próxima do resultado obtido na função, porém colocando em risco a afinação da nota, trazendo uma provável desarmonia entre as notas.

No caso do segundo áudio utilizamos duas casas decimais como padrão e cada algarismo do resultado representou uma nota diferente. Deste modo, não mudou muita coisa no processo de criação do segundo áudio. Por fim, este foi o resultado das produções de PMD da dupla 3, usando a função $f(x) = \sqrt{x}.(x)$. Lembrando que usamos o intervalo dos inteiros $\{x \in Z | 0 \leq x \leq 15\}$ para o primeiro áudio e $\{x \in Z | 0 \leq x \leq 19\}$ para o segundo áudio.

Figura 23: QR codes[13] da produção de PMD da função$\sqrt{x}.(x)$, a esquerda o áudio contendo o “som do gráfico” e a direita a melodia produzida na sua versão musical.
Fonte: Elaboração própria (2022)

13 Links para os áudios da dupla 3:
https://drive.google.com/file/d/16VKhgNErL47EHd3pxTLiOLO4XKfGn6hV/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/1L0JsUfQc1kLWQSsHlmTT39W_0A6hwHq7/view?usp=sharing

Repare ao escutar o primeiro áudio, como o som se comporta, as vezes ficando cada vez mais agudo e depois alternando para cada vez mais grave, como se fosse algo subindo e depois descendo, perceba como e som busca representar a função escolhida através de como seu gráfico é apresentado no plano cartesiano. Experimente jogar os valores do intervalo que usamos na mesma função e verifique os valores resultantes, ora positivos, ora negativos, aos poucos essa relação do primeiro áudio com a função irá ficando mais clara e de melhor observação.]

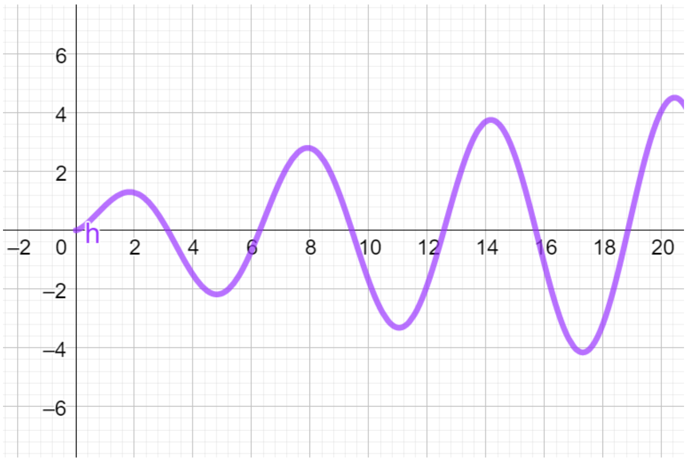

Figura 24: Gráfico da função $\sqrt{x}.\,(x)$

Fonte: Elaboração própria (2022)

A dupla 4 escolheu fazer a produção com a função $f(x) = x^2$ e no primeiro áudio trabalhamos com os inteiros no intervalo $\{x \in Z| -4 \leq x \leq 4\}$ e no segundo áudio $\{x \in Z| -9 \leq x \leq 25\}$. Para esta dupla escolhemos a escala pentatônica maior de Fá (essa escala possui cinco notas apenas, sendo elas Fá, Sol, Lá, Dó e Ré). Essa escala, diferente das outras usadas com as duplas anteriores, possui apenas cinco notas, enquanto as demais possuem sete. A escolha se deu para que pudéssemos variar e explorar mais os sons das funções e suas possibilidades.

A dupla gostou de todo o processo de construção, ao decorrer da atividade já pensavam em ideias para a sala de aula e como organizariam uma proposta assim para os alunos. Trago um pequeno trecho do diálogo que ocorreu durante o processo de desenvolvimento da PMD:

– *“Olha eu... eu acho que seria excelente mostrar para os alunos porque de primeira eu acho que eles não iam entender, só que quando eles pegassem, eu acho que...*

que ia fazer com que o interesse deles com funções, principalmente pela função quadrada, aumentaria 100% eu acho". (Participante A4)

– "Eu acho que é uma questão mais divertida brincar com a música do que brincar só com uma função sabe". (Participante B4)

– "Legal, e o que vocês pensam sobre levar uma proposta dessa para a sala de aula? Acham que seria uma boa?" (Pesquisador).

– "Eu acho que dá pra fazer, é complicadinho no começo mas é bem legal..." (Participante B4)

– "Eu penso assim, em levar os alunos num primeiro encontro disso em uma aula, apresentar, sabe? Essas coisas que você apresentou pra gente, e depois num próximo encontro com os alunos a gente leva eles para eles realizarem as próprias músicas..." (Participante A4)

Nestes trechos podemos ver que os pibidianos começaram a elaborar ideias para a aplicação de uma atividade semelhante a esta na escola, com uma turma de alunos em que os mesmos produziriam suas próprias músicas. Aqui podemos ver também a importância do PIBID na formação não só dos futuros professores, como também na de alunos, como sugere Gomes (2015, p. 15):

> O PIBID possui benefícios que não se restringem somente aos participantes do programa, mas também as escolas parceiras obtêm benefícios, uma vez que são escolhidas aquelas de baixo rendimento escolar que além de contar com a colaboração dos bolsistas para alcançar resultados positivos ainda colaboram para a formação inicial desses e da formação continuada do educador da escola, supervisor do projeto.

Vemos o processo de pensamento dos pibidianos já pensando em atuar em sala de aula, pensando nas possibilidades e em como trabalhar com estes conhecimentos construídos de forma a favorecer processos de aprendizagem juntamente com os alunos.

Como resultado dessa produção, seguem os QR codes para que o leitor possa apreciar também o trabalho da dupla 4, assim como as duplas anteriores:

Figura 25: QR codes[14] da produção de PMD da função x^2, a esquerda o áudio contendo o "som do gráfico" e a direita a melodia produzida na sua versão musical.
Fonte: Elaboração própria (2022)

A seguir, você pode conferir o gráfico da função x^2 e fazer suas observações a respeito do primeiro áudio e sua relação com este gráfico.

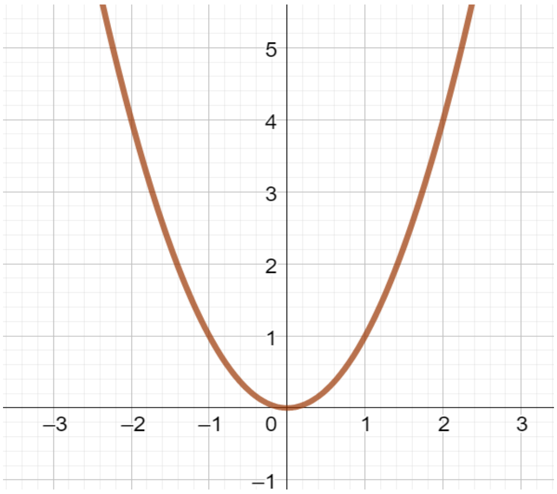

Figura 26: Gráfico da função x^2

Fonte: Elaboração própria (2022)

E para finalizar esta etapa de apresentação das PMDs produzidas pelas duplas, vamos analisar os resultados obtidos pela dupla 5 no desenvolvimento da PMD e também ao final dela. Esta dupla, assim como a dupla 3, também escolheu uma função um pouco mais complexa, mas que trouxe um gráfico bem interessante para se analisar por meio do áudio obtido. A função escolhida foi $f(x) = -|x^2 - 2x - 5|$, a escala musical escolhida foi a de Dó maior (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si nesta ordem)

14 Links para os áudios da dupla 4:
https://drive.google.com/file/d/1YdxtkVNg9U491oJY0qEGVZyRfkwbxdYC/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/1F5h3ygqhOxBYo0GNH4QkCr2P7szusqn6/view?usp=sharing

com domínio nos inteiros e os intervalos usados foram, para o primeiro áudio, $\{x \in Z| -3 \leq x \leq 5\}$ e para o segundo $\{x \in Z| -3 \leq x \leq 31\}$.

Dentre alguns dos pontos interessantes da discussão com esta dupla, foi o fato de ao fazer a análise do "som do gráfico" da função escolhida, chegamos ao ponto em que é fácil de fazer a confusão com outras funções que possuem gráfico parecido. Um exemplo disso foi a função g(x)=$-|x^4 - 4|$, que gerou um som que quando ouvimos, podemos confundi-lo com diversas outras funções por ter um comportamento parecido.

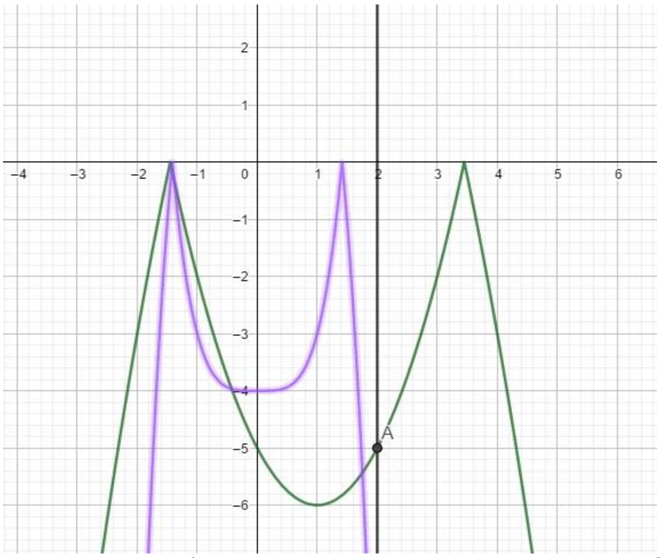

Figura 27: Função $f(x) = -|x^4 - 4|$ em roxo e função $g(x) = -|x^2 - 2x - 5|$ em verde.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Isso já nos traz indagações às limitações do uso desta maneira de se trabalhar funções, visto que em alguns casos onde temos gráficos muito semelhantes, há uma grande dificuldade de diferencia-los através do som, um dos motivos para isto pode ser o fato de trabalharmos a atividade usando o domínio dos inteiros, talvez usando os racionais a precisão fosse maior.

Durante a qualificação desta dissertação foi apresentado um aplicativo em desenvolvimento (não nomeado até então) que faz exatamente isto. Com ele poderíamos trabalhar estes mesmos gráficos por meio do som e com uma maior precisão de tonalidades, tornando a interpretação do gráfico por meio do som muito mais assertiva. Penso que aliando o proposto nesta pesquisa junto com este aplicativo o resultado poderá ser ainda mais abrangente e detalhado, mas essa ideia fica para o desenvolvimento de um outro trabalho no futuro, por ora prosseguimos desta forma.

Outro ponto que se liga com este apresentado, é o que disseram outras duplas, sobre o poder de inclusão da atividade para se trabalhar funções com pessoas com deficiências visuais moderadas a severas por exemplo. É uma perspectiva interessante a ser analisada, justamente por que tem tudo para ser uma ótima atividade inclusiva para estes alunos, contudo é necessário verificar e entender as limitações da proposta para que possamos explorar com qualidade, suas potencialidades e não causar confusão no entendimento do conteúdo.

Os resultados da produção da PMD dessa dupla podem ser conferidos através dos QR codes a seguir:

Figura 28: QR codes[15] da produção de PMD da função$-|x^2 - 2x - 5|$, a esquerda o áudio contendo o "som do gráfico" e a direita a melodia produzida na sua versão musical.
Fonte: Elaboração própria (2022)

E a seguir o gráfico da função:

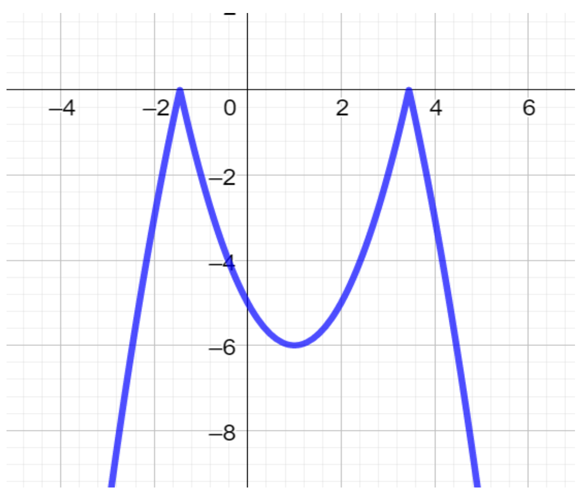

Figura 29: Gráfico da função $-|x^2 - 2x - 5|$

Fonte: Elaboração própria (2022)

15 Links para os áudios da dupla 5:
https://drive.google.com/file/d/1DwyVBUcA5hMH0RtnJOV29lIHUsd4REhJ/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/12U02i23Gst2C3bYC2ueBB60iuNInmiHd/view?usp=sharing

Apresentadas as PMDs produzidas por todas as duplas, foi pedido para que no encontro final, com todos reunidos, cada dupla apresentasse seus resultados e contasse um pouco sobre sua experiência na construção dos áudios.

5.2 O encontro final

A dinâmica deste encontro final ocorreu da seguinte forma, cada dupla teve um período em torno de uns 15 à 20 minutos para apresentar a função e explanar sobre a atividade, algo interessante que tivemos a ideia de fazer durante o próprio encontro, foi apresentar primeiro o áudio contendo o “som do gráfico” da função escolhida pela dupla, enquanto o restante da turma deveria tentar adivinhar qual era a função, ou, pelo menos, quais características mais evidentes notadas por eles, tendo como único meio a sua audição.

Todos os pibidianos participaram na “missão” de desvendar qual era a função tocada, e com isso surgiram até alguns desenhos que geraram bastante descontração e deu uma cara especial ao encontro. Seguem algumas fotos dos desenhos que foram enviadas:

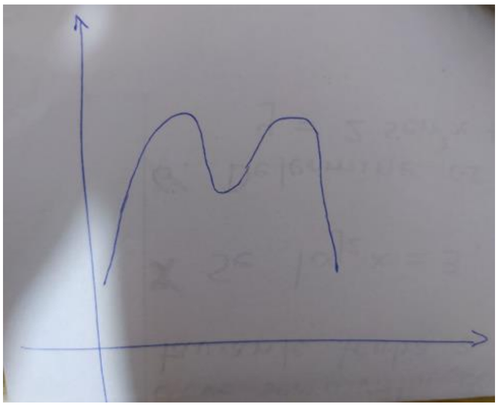
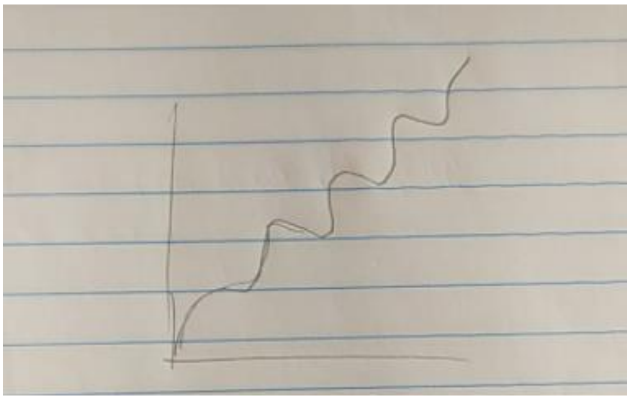

Figura 30: Desenhos dos gráficos tendo como base apenas o som escutado. A imagem da esquerda busca representar a função $-|x^2 - 2x - 5|$ e a da direita a função $\sqrt{x}.(x)$.
Fonte: Elaboração própria (2022)

Então, caso o leitor ainda não tenha tentado essa experiência como recomendado no prólogo desta pesquisa, volte ao prólogo e escute os áudios que ali estão, e tente desenhar o gráfico conforme o som, você já viu os gráficos da cada uma das funções, então será mais fácil, ouça como um som mais grave parece descer, enquanto que conforme mais agudo fica o som, mais temos a impressão de que o áudio está subindo. Após isso, compare seus desenhos com os gráficos de cada função, você vai se surpreender com o resultado.

Agora que você leitor pode perceber na prática como foi essa dinâmica durante o encontro final, daremos continuidade aos pensamentos e indagações construídos neste último momento com os pibidianos. Seguimos com as apresentações de cada uma das duplas e para finalizar essa etapa do capítulo, serão apresentados apenas os insights principais da discussão entre elas.

Um levantamento interessante foi a questão da inclusão, pois como estávamos fazendo a atividade de procurar identificar as características das funções escolhidas por meio do som obtido, os participantes diversas vezes conseguiram identificar, por exemplo, que a função da dupla 4 (x^2) era uma função quadrática e também que sua concavidade era voltada para cima. Isso fez com que os pibidianos percebessem o quão importante esta forma de se visualizar uma função poderia ser para ensinar as peculiaridades do gráfico de uma função para uma pessoa que possuísse grau elevado em deficiência visual.

– *“Por exemplo você apresenta o software numa aula para os alunos e numa outra aula você pode tentar ajudar os alunos a montar as próprias funções... e várias coisas que foram discutidas aqui na reunião também como a questão da concavidade para cima e concavidade para baixo, simetria, então assim eu acho que abriu muitas possibilidades de ensino para os alunos... e também tem a inclusão dos alunos com deficiência visual né”. (Pibidiano A4)*

– *“Sim sim, isso tinha aparecido em uma das reuniões também né? Da potencialidade do uso dele... você não tem o visual no caso, mas tem a experiência sonora”. (Coordenadora do Pibid)*

Aqui evidenciamos mais uma vez a importância da visão dos futuros professores que participam do PIBID: como os mesmos já possuem uma vivência em sala de aula antes mesmo do início das disciplinas de estágios, já conseguem observar a relação da prática docente com as diferentes realidades e necessidades que podem ser encontradas no ambiente escolar, tal como a inclusão.

Sabemos que a inclusão do aluno deficiente visual requer apoio e adequações da equipe pedagógica e também de um preparo criativo de como abordar os temas matemáticos (CEZARO, 2014), visto que o aluno terá um dos sentidos a menos para se trabalhar.

> Para que isso ocorra, medidas devem ser tomadas em relação às práticas pedagógicas, fatores sociais e culturais do aluno com deficiência e adequação de recursos voltados a eles. Pensando na Matemática, em que sempre há a necessidade de buscar algo concreto para facilitar o ensino e aprendizagem, para os cegos isso é de extrema necessidade, pois o tato, a audição e as sensações são muito importantes e, dessa forma, eles se sentirão inseridos na escola (CEZARO, 2014, p. 31).

E de fato, a proposta desta pesquisa explora explicitamente um dos sentidos humanos, que no caso é a audição. Os participantes perceberam a potencialidade e a aplicabilidade durante a atividade e discutiram a respeito do assunto como vimos mais acima no texto, este foi um ponto bastante abordado pelos pibidianos e de grande importância.

Outro ponto evidenciado no decorrer dos encontros e principalmente neste último, foi sobre as potencialidades gerada numa perspectiva interdisciplinar. Vemos que interdisciplinaridade é algo essencial não só no ambiente escolar, mas também para a vida toda. Num mundo cada vez mais moderno em que as mudanças ocorrem em velocidades absurdas, é de extrema importância o entendimento deste termo.

> A interdisciplinaridade é uma “exigência” não somente no que tange às atividades escolares, mas também às práticas do dia-a-dia com as quais frequentemente nos deparamos. O mundo encontra-se em constantes e aceleradas mudanças. As tecnologias de comunicação integram povos de diferentes partes do mundo em questão de segundos, e para lidar com essa nova fase, decorrente de um mundo globalizado, precisamos saber integrar as diversas concepções e realidades. Esta integração deve complementar as diversas disciplinas e a possibilidade de acesso à pesquisa, motivando o educando e o educador a buscarem novos conhecimentos sobre um determinado assunto, problema ou questão (TERRADAS, 2011, p. 96).

A atividade proposta nesta pesquisa nos parece apresentar isto: a integração de diversas concepções e realidades, a partir das quais procuramos trabalhar a visão matemática da música e a visão musical da matemática, trazendo discussões e abordagens sobre como identificar (no nosso caso específico) padrões gráficos de funções por meio do som, o que torna, em nosso entendimento, a proposta mais rica e com diversas possibilidades.

É importante salientar também os benefícios do uso de atividades interdisciplinares, algumas das contribuições do seu uso são:

> a) um maior diálogo entre professores, alunos, pesquisadores etc., de diferentes áreas do conhecimento; b) um melhor preparo profissional e uma formação mais integrada do cidadão; c) uma Ciência mais responsável, já que seria possível trazer a problematização ética para dentro do conhecimento cientifico; d) a reversão da tendência crescente de especialização, de modo que se desenvolveria uma visão holística da realidade; e) a criação de novos conhecimentos, graças à fecundação mutua de áreas que até então se mantinham estanques; f) reverter um suposto desequilíbrio ontológico de que padece a Modernidade, isto é, reverter o descompasso entre uma pretensa natureza última das coisas e as ações humanas que tem alterado tal natureza. (VEIGA-NETO, 1994, p. 145)

Assim com seu uso podemos levantar novas indagações e criar propostas diferentes das quais estamos habituados. Essa própria pesquisa é um exemplo de uma tentativa de trazer diferentes modos de se estudar funções matemáticas por meio do som. E este potencial interdisciplinar está também intimamente ligado à natureza multimodal das PMD, que agrega ainda mais nas possibilidades de se trabalhar sob esta perspectiva, visto que:

> A multimodalidade tem um papel fundamental com relação aos processos de produção de significados matemáticos. São enfatizados os modos de comunicação oferecidos pelas mídias digitais (gestos, elementos visuais, sons, espaços, vocabulários, materiais manipuláveis, dentre outros). Nesse sentido, as tecnologias digitais condicionam o pensamento matemático, ou seja, a natureza de diferentes problemas e soluções está associada ao uso de diferentes mídias, na maneira como diversificados significados matemáticos são produzidos mediante o uso de variadas tecnologias (BORBA, VILLARREAL, 2005 apud SCUCUGLIA, 2014, p. 958).

Além de todos os fatores apresentados, gostaria de dizer que a discussão foi significativamente produtiva e as duplas consideraram a proposta divertida, com potencial para se trabalhar em sala de aula e que inclusive, alguns dos participantes comentaram que depois dessa atividade já estavam pensando em elaborar alguma atividade para uso em sala de aula na escola, abordando o uso das PMD e mais especificamente também, o uso do “som das funções” para ensinar a percepção das características e comportamentos de cada função no plano cartesiano.

5.3 Uma PMD conceitual

Como o leitor já está ciente, uma parte importante da análise se dará por meio de interpretar as produções realizadas pelos participantes tendo como base a noção de Performances Matemáticas Digitais, já adianto é claro, que houve dados importantes que foram e serão abordados nesta análise que vão além do que podemos destacar com deste modelo, dados estes que nos auxiliam a responder a pergunta de pesquisa e atendem alguns de nossos objetivos específicos.

Para que uma PMD seja considerada uma PMD conceitual, é necessário que a mesma possua quatro critérios, que foram apresentados brevemente no capítulo sobre Tecnologias Digitais e Performances Matemáticas Digitais e que agora serão observados um a um. Vamos relembrá-los:

> 1. **Surpresa matemática**: a ideia explorada deve oferecer surpresa matemática, explicitando-a como atividade humana e estética;
> 2. **Sentido matemático**: a PMD deve comunicar claramente a ideia matemática de maneira conceitualmente correta;
> 3. **Emoções matemáticas**: se refere a natureza multimodal da narrativa digital, na qual são enfatizados modos alternativos de comunicação como a oralidade, a gestualidade, a espacialidade e a visualização, além da linguagem escrita tradicional no fazer matemático e a articulação entre multimodalidade e sensibilidade artística na narrativa matemática.
> 4. **Sensações viscerais**: diz respeito ao desejo em matemática e a aspectos estéticos como a identificação de padrões, simetrias, generalizações, etc. (SCUCUGLIA; GREGORUTTI, 2015, p.7).

O primeiro critério então, para uma PMD conceitual é a Surpresa Matemática, que, essa passa pelo sentido de que a proposta explorada deve trazer surpresa, algo inusitado ou não esperado para quem está estudando/apreciando a matemática, a apresentando como atividade estética e humana. De fato, podemos ver em alguns momentos essa ideia. Logo no começo da produção dos dados, houve a identificação deste elemento na fala dos pibidianos durante a explicação do que seria realizado, ora, transformar funções em música? Como isso seria possível? Vamos relembrar algumas falas dos participantes que destacaram isso:

– “Não sei como isso vai funcionar na prática né... eu não entendo nada de música por exemplo, mas é bastante diferente... tipo... fazer isso só com matemática... vamos ver”. (Participante B5)

– “Eu particularmente estou bem curioso para ver como vai funcionar, por que assim... ficou bem legal... e parece ser algo bem diferente e legal né, uma forma diferente de ver a matemática e a música também”. (Participante A4)

Alguns participantes nestes primeiros momentos comentaram que estavam curiosos para saber como isto se daria, alguns até mesmo estavam com certo receio, achando que não seria possível. No entanto, como vimos em algumas falas das duplas nos momentos finais, após analisarem o resultado de suas construções, todas acharam a atividade interessante e divertida, trazendo surpresa matemática no começo e no fim da produção, pois a reação das duplas ao tentarem adivinhar o gráfico das funções através do som foi divertida e uma experiência inédita para todos.

A curiosidade e o desejo de ver o resultado final deixou os participantes em um estado em que tinham foco total na atividade e se divertiam durante todo o processo, coincidindo muito com o que Gerofsky (2006) fala, dizendo que é “incomum (e empolgante) vincular os matemáticos e a Educação Matemática com performance, porque muitas das coisas que fazem as performances distintas e interessantes vão contra muitas das longas tradições da Matemática” (apud Vital, 2018, p. 64). Falas dos participantes como *“Eu achei sensacional a ideia! Por que a gente tá transformando função em música... é diferente sabe?” (Pibidiano A4)* evidenciam isso mais ainda.

Outro critério importante de uma PMD conceitual é o sentido matemático: a PMD precisa trazer a ideia matemática de maneira correta e objetiva. Neste ponto em particular se formos analisar apenas os resultados das produções, pode parecer que a princípio a atividade não está contemplando na íntegra este critério (e não é necessário que se contemple todos os critérios), pois ao ouvirmos os sons, não identificamos com clareza qual função se trata, porém podemos identificar algumas de suas características e dizer se o intervalo apresentado na função escolhida é crescente ou não, no caso das PMD das duplas 1 e 2, por exemplo, ou verificar a existência de concavidades no gráfico da função, como nas PMD das duplas 4 e 5, e outras características a depender da função trabalhada. Nesse caso, o momento em que fica mais clara a ideia matemática é durante o processo de produção das PMD.

Nesse contexto, percebemos que foi muito além da noção sobre funções, pois se repararmos melhor, vemos que além de se trabalhar funções nessa etapa, também trabalhamos razão e proporção na hora que escolher o tempo de cada nota, também trabalhamos criptografia, por incrível que pareça, afinal codificamos os resultados das funções em notas musicais. E fazendo um gancho com a próxima característica de uma PMD conceitual, que trata das emoções matemáticas, abordamos a natureza multimodal das narrativas digitais, trazendo modos alternativos de comunicação misturando tudo isso com a sensibilidade artística aplicada numa narrativa matemática.

Podemos identificar este terceiro elemento no fato de estarmos explorando não só conteúdos diversos, apesar de o foco ter sido funções, como também abordamos a música e suas maneiras de se comunicar, sobretudo a respeito da comunicação sonora, dado fato que foi através do som que pudemos perceber as características das funções escolhidas por dupla. E também no processo de produção, ao combinar os sons com o software e as diferentes linguagens: a musical e a matemática.

Por último, temos o quarto critério, composto pelas sensações viscerais, estas trazem características como aspectos estéticos, identificação de padrões, simetrias e etc... Podemos destacar este ponto através dos áudios do som das funções, estes seguem o padrão matemático das funções e criam uma melodia que simula o comportamento do gráfico de cada uma das funções. Dada a natureza do quarto critério, a realização de propostas como essa, aliadas a produção de vídeos certamente podem entregar uma maior experiência envolvendo as sensações viscerais, identificar padrões, apresentar simetrias entre outros elementos, entretanto mesmo por meio apenas do som já podemos perceber alguns padrões já que este associado a uma função acompanha o padrão da mesma.

Como vimos, as produções realizadas com os participantes desta pesquisa, em sua coletividade, abrangem indícios de critérios utilizados na problematização sobre PMD conceituais, ora mais evidentes, ora menos (visto que atingir plenamente todos os critérios de uma PMD conceitual é uma utopia, servem como norte para o que pode ser uma PMD mais rica em termos de características, porém dificilmente em sua totalidade) quando e se aplicadas desde o processo de construção das mesmas.

Algo que entendemos ser oportuno destacar foi justamente que alguns dos critérios e boa parte da experiência das PMD propostas no que tange a ideias, questionamentos e debates realizados surgiram no processo de construção das PMD e não necessariamente apenas no “produto final”, ou seja, na PME em si. Em outras palavras, no próprio processo em que os participantes iam aprendendo e testando por si mesmos a maneira em que o som construído, com a função que escolheram, pudesse soar da maneira que mais lhes agradavam é que foi possível considerar pensamentos pertinentes e relevantes para a pesquisa, pois como disse Freire (2014):

> [...] aprender é uma aventura criadora, algo, por isso mesmo, muito mais rico do que meramente repetir a lição dada. Aprender para nós é construir, reconstruir, constatar para mudar, o que não se faz sem abertura ao risco e à aventura do espírito (FREIRE, 2014, p. 68).

A junção de todo esse processo e todos estes elementos pode ser associada ao conceito de matética, proposto por Comenius, e que significa, em linhas gerais, “a arte de aprender”. Vemos, portanto, que além de identificarmos os conhecimentos aprendidos por meio da escuta dos áudios desta pesquisa e sua análise gráfica, sua construção e elaboração de todo o processo de confecção dos mesmos possui notória relevância para o que foi observado a respeito de PMD conceitual e até mesmo sobre a relação da música com a matemática e o uso das funções para a produção.

E como fechamento dessa análise, relembrando todas as falas apresentadas pelos participantes, todo o processo de construção das PMD e as ideias dos participantes envolvendo sala de aula, é possível observar que esta pesquisa colabora com o estudo das Performances Matemática Digitais e apresenta novas possibilidades para o ensino de matemática em sala de aula. E ainda faço um último questionamento ao leitor: será que seria possível expressar uma música já existente por meio de uma função de maneira igual ou similar ao que foi proposto aqui? Quais as potencialidades de se trabalhar agora desta forma, buscando fazer o contrário, a partir da música chegar em uma função? Gostaria de um dia ver isto em prática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Chegou a hora de verificarmos se de fato conseguimos responder/discutir a pergunta de pesquisa a partir dos objetivos elencados no começo deste texto. A proposta para estas considerações finais seguirá um modelo um tanto quando diferente do habitual, em vez de usamos a abordagem textual como elemento principal, porque não a finalizarmos usando uma PMD?

Aliás, por que não transformamos este final em uma pequena apresentação musical? Pois bem, vamos verificar agora o que pudemos atingir dos três objetivos específicos apresentados no início desta dissertação. Sendo assim, teremos três atos, onde cada ato buscará verificar um dos objetivos através de uma breve PMD e ao final do show, um epílogo juntando todos estes dados para enfim verificarmos o que tivemos como respostas para a pergunta norteadora desta pesquisa: Como futuros professores de matemática produzem PMDs para representar funções a partir de notas musicais? Os links para cada ato podem ser encontrados nas notas de rodapé.

Primeiro Ato[16]

Analisar a representação de funções com notas musicais a partir de codificações com escalas musicais variadas utilizando o software Reaper;

Vamos agora analisar/ como foram as nossas funções.
O que podemos aprender transformando gráficos em belas canções.
Notei padrões sonoros, disse o pibidiano/ o som aumentava ou reduzia igual no plano cartesiano.
Oportunidade de se ensinar, "*estou bem curioso para ver como vai funcionar,*
Por que assim... ficou bem legal... e parece ser algo fora do normal"
Algumas restrições enxergamos ao se trabalhar com o domínio dos inteiros, pois faltavam uns números lá.
E agora como resolver? Aproximações fizemos, mas apenas na quali é que uma solução recebemos.

16 Link do Primeiro Ato: https://drive.google.com/file/d/18YrmbOS9j9jah1B3gN_PecxbFlkePhrt/view?usp=sharing

Com ela pudemos vir a trabalhar nos domínios reais, assim o som seria possível mesmo com casas decimais.

Mas mesmo com tudo isso, alguns empecilhos, deu para perceber que era possível

Ao ver os participantes em nosso encontro final, tentar desenhar os gráficos ouvindo um som bem legal.

Assim se mostrou eficaz, a representação, pois ao olhar os desenhos, vimos algo parecido com uma função

E era semelhante à verdadeira função, que eles escolheram no começo dessa missão

E com apenas alguma troca de tom, encerramos o primeiro ato deste som

Segundo Ato[17]

Analisar produções musicais feitas por futuros professores envolvendo funções e outros conhecimentos matemáticos com o software Reaper;

Chegou o momento de observar outra visão, qual o olhar do professor que está para se formar em então

A matemática das produções musicais feitas com funções e outros conhecimentos mais

E o que podemos fazer em sala de aula

Será que os alunos iriam ter interesse? Será que a atividade auxilia na aprendizagem?

Vamos ouvir o que o pibidiano falou, disse das produções para aplicar em classe

Eu acho que produzir uma PMD

Com aluno de ensino médio por exemplo, acrescenta mais valor e muda a imagem do professor

“Ele vê aplicação do valor ali, algo bem mais prático que faz a matemática fluir

Outro pibidiano acrescentou

17 Link do Segundo Ato: https://drive.google.com/file/d/1hEB1gfTYvKItD63MRiNeHA3FQG4S2TKb/view?usp=sharing

“E não trabalha somente a função, também trabalha a lógica, a fração, razão e proporção

Assim o aluno vai estar sempre pensando e dá para fazer um trabalho com a turma inteira

Eles produzirem uma música

Cantar e apresentar lá na escola, e assim mostrar para todos que a matemática é da hora

Podemos ver que as possibilidades são bem variadas e vimos algumas delas

inclusive uma abertura para se trabalhar

Com os alunos que precisam de inclusão, com o som do gráfico para quem tem baixa visão

E assim se encerra esta canção, veremos mais à frente o fim de toda a produção

Terceiro Ato[18]

Analisar reflexões pedagógicas sobre relações entre funções, representações por meio de som e música e produção de PMD.

Sobre as reflexões, a respeito das nossas funções

Representações por meio do som e música, e PMD inclusa

Vamos começar com a abordagem então, voltada também para a inclusão

Ao utilizar o som para expressar, o gráfico de uma função

Estamos utilizando um meio onde o aluno, com baixa visão tem mais acesso

Assim como vimos de fato, foi possível estabelecer

Uma relação onde por meio do som, representaram uma função

Através da representação foram apontadas, semelhanças ao gráfico real

E vai além do uso para inclusão, é um meio de expressar uma função

Que se utiliza da música, que se faz presente em toda parte

Agora vamos falar, de uma PMD conceitual

No próprio processo de construção, houveram muitas possibilidades

Para uso pedagógico como vimos, assim também para quando as ouvimos

18 Link do Terceiro Ato: https://drive.google.com/file/d/1matcRQIdpRPI4Ebf7K79IShmmEyg6eT2/view?usp=sharing

Aliando o som com a sua construção, e o processo de identificação

Da função por meio do som é possível, potencializar a aprendizagem

Torna a aula mais descontraída e diferente

Tanto para o aluno quando para o professor, um pibidiano que falou:

“Eu achei sensacional! Por que a gente tá transformando

Função em música... é diferente sabe”

E assim finalizamos o último ato, com essa canção e um pedido

Depois de ouvir toda essa produção, siga com a leitura no epílogo.

EPÍLOGO

Após esta breve experiência que tivemos nas considerações finais desta pesquisa, vamos relembrar qual era a pergunta apresentada logo na introdução dessa dissertação: Como futuros professores de matemática produzem PMD para representar funções a partir de notas musicais?

Os três atos apresentados no capítulo anterior, nos auxiliarão a enxergar a resposta dessa pergunta, como cada um dos atos trabalhou com um dos objetivos específicos que elencamos, foi possível entender e analisar estes resultados de uma forma mais clara e dinâmica.

No primeiro ato podemos perceber que durante o processo de produção das PMD os pibidianos já buscavam fazer as ligações entre o som ouvido e o gráfico da função escolhida, vimos duas codificações diferentes para tal, uma voltada para o reconhecimento do gráfico através do áudio obtido com ela, e outra para apreciação musical, Com enfoque na primeira codificação denominada “som da função” os participantes trabalharam através de sua audição a tentativa de reescrever o som escutado em um gráfico de uma função, buscando adivinhar a função que cada colega escolheu.

O resultado foi considerado bom, visto que de fato foi possível acertar, ou chegar bem próximo do que seria o gráfico real de cada função. Das limitações apresentadas, a maior delas sem dúvidas foi a utilização do domínio dos números reais para a primeira codificação, pois em várias situações o resultado da função era um número racional eisso fez com que o áudio não gerasse tanta precisão. Outro fator, foi a limitação do software, pois este, por ser um software próprio para a produção musical, não daria a oportunidade de usarmos “notas desafinadas”, o que aconteceria caso tivéssemos usado o domínio dos reais para a construção do “som da função”.

Na qualificação deste trabalho, a banca apresentou um software que tinha a finalidade de reproduzir sons com base no gráfico dado, este seria mais preciso para se fazer a análise do gráfico de uma função por meio do som, porém não descartamos o resultado obtido pelo método utilizado aqui nesta pesquisa, com o mesmo também foi possível fazer a análise.

Para o segundo ato, abordamos a visão dos pibidianos como futuros professores de matemática e estes tiveram diversas ideias a respeito como pudemos ouvir a pouco. Mesmo antes do término dos encontros, alguns dos participantes já estavam pensando a respeito de como aplicar uma atividade envolvendo música e funções em sala de aula, até mesmo fazendo propostas para se apresentar para uma escola inteira, algo que na minha opinião seria bem interessante e divertido inclusive.

Como vimos nos capítulos anteriores, com a pesquisa da Opinion Box de 2019, usar a música como aliada neste processo foi importante pois ela é tão presente na vida das pessoas quanto a matemática, e a grande maioria das pessoas gostam de música e escutam todos os dias, o que faz com que este tipo de atividade possa despertar um interesse maior nos alunos, deixando-os mais abertos para uma melhor aprendizagem.

Enfim no último ato abordamos algumas das reflexões pedagógicas a respeito das relações entre funções e suas representações sonoras, bem como a relação da própria música com a matemática e as produções de PMD realizadas. A primeira reflexão diz respeito à inclusão de alunos com deficiência visual e convida o professor a explorar os outros sentidos para se ensinar funções, no caso, a audição. Como os "sons do gráfico" conseguem mostrar de maneira fidedigna o comportamento na função no plano cartesiano, por meio de sons ora graves, ora agudos, conforme o caso, se torna possível ensinar as características de diversas funções por meio do som, sejam elas funções afim, quadráticas, exponenciais, trigonométricas, modulares entre outras.

É importante destacar que não só o trabalho de audição e análise das PMD agrega no aprendizado, como também todo o processo de construção das mesmas nos dá ferramentas para irmos além em vários tópicos, em formas diferentes de se interpretar uma função e transforma o ambiente de sala de aula como um todo, num verdadeiro processo investigativo e lúdico, afinal os próprios alunos vão descobrindo o conhecimento através de testes e representações de sua escolha além de se usar música para o processo, fazendo com que alguns estudantes que a princípio não tem tanto interesse na matemática, começarem a desenvolver este interesse por meio da música.

Assim, vimos como os futuros professores produziram PMD através de funções matemáticas e entendemos também algumas reflexões acerca de suas potencialidades para o ensino, que não se limita é claro, a funções, mas durante o processo de construção podemos observar outros conteúdos surgindo e dialogando com a música.

De certo, também é necessário abordar sobre a formação inicial de professores de Matemática e a importância de programas como o PIBID. A formação inicial e a relação entre universidade, escola e aluno deve ser pautada em meios que permitem a amplitude da experiência do futuro professor. No caso desta pesquisa, é preciso também discutir e incentivar os alunos de graduação a buscarem um pensamento inovador. Sugere-se também o fomento dessa abordagem disposta neste estudo como objeto de discussão e incentivo para a formação continuada de docentes.

Esta experiência pode se torna muito mais abrangente do que ela é, afinal, quando falamos de PMD, não estamos apenas falando de música, mas sim de Artes aliadas às Tecnologias Digitais para o ensino da matemática, portanto esta pesquisa foi apenas a “pontinha do iceberg” do que pode ser explorado com professores e futuros professores através da produção de PMD seja para o ensino de funções, seja para o ensino da matemática como um todo.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**: pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras Editora, 1999.

ABDOUNUR, O. J. **O EXPERIMENTO DE PITÁGORAS COM O MONOCÓRDIO: UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-DIDÁTICA**. Congresso nacional de pesquisa e ensino em ciências (CONAPESC). 2019.

BICUDO, M. "**Educação matemática:** Um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento" em FLORES; CASSIANI (Org.). Um ensaio sobre as concepções que sustentaram sua (da educação matemática) prática pedagógica e produção de conhecimentos. Campinas: Mercado das Letras. 2013.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BOORSTIN, J. **The Hollywood Eye. What makes movies work**. New York: Cornelia & Michael Bessie Books, 1990.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte, MG: Editora Autêntica, 2014.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. 2ª ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2018.

BORBA, M. C.; SOUTO, D. L. P.; CANEDO-JUNIOR, N. R. Vídeos na educação matemática: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais. 1. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2022. (Tendências em Educação Matemática).

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 15 nov. 2021.

CAMPOS, G. P. S. **Matemática e Música**: práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares (Mestrado em Educação). Vitória: Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, 2009.

CEZARO T. F. **Música – um caminho para ajudar deficientes visuais a aprenderem Matemática**. 2014. Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática. Instituto Federal de São Paulo – IFSP. São Paulo, 2014.

CHIARI, A. S. S. Tecnologias Digitais e Educação Matemática: relações possíveis, possibilidades futuras. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 11, n. 26, p. 351–364, 2018.

DU SAUTOY, M. **A música dos números primos**: história de um problema não resolvido na matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.

FÁVARO, L. C.; FONSECA, L. R.; LUCIANO, T. D. S.; MINASI, L. F.; SILVA, M. R.; LAHMANN; F. P. O impacto provocado pela pandemia do covid-19 nas práticas pedagógicas de professores de matemática da educação básica. Revista paranaense de educação matemática. **RPEM**, Campo Mourão, PR, Brasil, v.10, n.22, p.446-469, mai.-ago. 2021.

FREIRE, P. (2014). Pedagogia da Autonomia – **Saberes Necessários à Prática Educativa**. 49ª ed. São Paulo: Paz & Terra.

GADANIDIS, G.; HUGHES, J. Performing big math ideas across the grades. **Teaching children mathematics**, 2011.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

Gomes, L. S. (2015). **A importância do PIBID na formação e prática docente dos licenciandos em matemática** da UESB campus de vitória da conquista. Vitória da Conquista –BA 2015.

HEMAIS, B. **“Multimodalidade: enfoque para o professor de ensino médio”**. 2010. Disponível em: < http://www.letras.puc-rio.br/unidades&nucleos/janeladeideias/biblioteca/B_Multimodalidade.pdf> Acesso em: 15 nov. 2021.

JOSEPH, I. M. **O Trivium**: as artes liberais da lógica, gramática e retórica. São Paulo: Realizações, 2002.

KENSKI, V. M. **Educação E Tecnologias**. Coleção Papirus educação. Papirus Editora, 2007.

MED, B. **Teoria da Música / Bohumil Med**. 4. Ed. rev. e ampl. Brasília: Musimed, 1996.

MIRITZ, J. C. D. **Matemática e Música**. (Mestrado Profissional). Rio Grande: Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal do Rio Grande, 2015.

SALMASIO, J. L. **Desbloqueando Telas para produzir matemática(s)**: possibilidades e limites envolvendo Álgebra Linear e smartphone. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Campo Grande: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2020.

SANDRONI, F. A. R. Música e harmonia: origens da escala diatônica. **Revista de Ciências Humanas**, Florianópolis, Vol. 46. Nº 2, p. 347-370. Out. de 2012.

SCUCUGLIA, R. R. S. Narrativas Multimodais: **a Imagem dos Matemáticos em Performances Matemáticas Digitais**. Bolema, Rio Claro, v. 28, n. 49, p. 950–973, ago., 2014.

SCUCUGLIA, R. R. S.; GREGORUTTI, G. S. Explorando o Teorema das Quatro Cores em Performances Matemáticas Digitais. **BoEM, Boletim on-line de Educação Matemática**, Joinville, v.3. n.5, p. 2-17, ago./dez. 2015.

SNYDERS, Georges. **A escola pode ensinar as alegrias da música**? 2 ed. São Paulo: Cortez, 1994.

TERRADAS, R. D. (2011). A importância da interdisciplinaridade na educação matemática. **Revista da Faculdade de Educação**, Ano IX, n. 16, pp 95-114.

VALLE, S. **Manual prático de acústica**. 3 ed. Rio de Janeiro: Música & Tecnologia, 2009.

VEIGA-NETO, Alfredo José da. Produção e construção do conhecimento nas diferentes disciplinas – **a problemática da interdisciplinaridade**. In: Anais do VII ENDIPE, Goiânia-60, 5 a 9 de junho de 1994, Vol. 2.

APÊNDICE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Prezado (a), você está sendo convidado a participar de uma pesquisa intitulada "O SOM DA FUNÇÕES: UMA ABORDAGEM EM PERFORMANCES MATEMÁTICAS DIGITAIS", cujo objetivo é o de apresentar e analisar uma possibilidade de realização de ensino por meio das performances matemáticas digitais com o foco na música, bem como entender como se dá esta produção e experiências dos pibidianos com esta proposta. Diante disso, a finalidade deste trabalho: Entender como os pibidianos, produzem PMD através de funções, tendo em mente alguns dos seguintes objetivos:

- Investigar se pibidianos do curso de matemática têm compreensão da relação entre música e matemática;
- Verificar a criação de músicas produzidas pelos participantes a partir de funções matemáticas e sua experiência auditiva;
- Entender o processo de construção e as potencialidades para o ensino enxergadas pelos pibidianos;
- Analisar através da Teoria da PMD Conceitual, a criação de músicas feitas a partir de funções.

Para esta pesquisa, serão feitas gravações dos encontros, construção de PMDs e discussões com o grupo todo e/ou parcialmente. Por isso, solicitamos a sua colaboração para participação nos encontros, questionários, construção e demais eventos que possam se fazer necessários, bem como na cessão dos dados produzidos a partir dos mesmos. Todos os dados produzidos serão mantidos confidenciais sob a responsabilidade do pesquisador durante um período de no mínimo cinco anos. Solicitamos também sua autorização para apresentar os resultados deste estudo em eventos da área e publicar em revistas científicas nacionais e/ou internacionais. Informamos que essa pesquisa pode acabar por gerar desconfortos uma vez que estará sendo gravada e registrada, entretanto, para minimizar esse efeito garantimos que por ocasião da publicação dos resultados, seu nome será mantido em sigilo absoluto, se for de sua preferência. Esclarecemos que sua participação no estudo é gratuita e voluntária e, portanto, você não é obrigado (a) a fornecer as informações e/ou colaborar com as atividades solicitadas pelos pesquisadores. Desde já agradecemos sua disponibilidade.

Nome Completo: ____

E-mail: ____

1- Assinale nos campos com os materiais que se sente confortável em colaborar (pode selecionar mais de um item):
   - ☐ Gravação de áudio das discussões
   - ☐ Falas feitas durante os encontros de forma escrita
   - ☐ Gravação de imagem
   - ☐ Nenhum
2- Em caso de publicação dos dados coletados, você gostaria de:
   - ☐ Ter o anonimato preservado
   - ☐ Não ter o anonimato preservado
   - ☐ Preservar ou não o anonimato segundo preferência dos pesquisadores