UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CURSO DE MATEMÁTICA

ESTUDO ORIENTADO

8º Semestre

Suélen Dorneles Serafim
Leide Katia Amorim de Almeida
Grazieli Lorraine Gimenes dos Santos

Aquidauana-MS
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CURSO DE MATEMÁTICA

ESTUDO ORIENTADO

8º Semestre

Suélen Dorneles Serafim
Leide Katia Amorim de Almeida
Grazieli Lorraine Gimenes dos Santos

Estudo Orientado apresentado ao Curso de Matemática como parte da exigência do curso.

Orientador: Prof. Cláudio Eduardo Pupim

Aquidauana-MS
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CURSO DE MATEMÁTICA

ESTUDO ORIENTADO

PROFESSORA ORIENTADOR: Cláudio Eduardo Pupim

De Suélen Dorneles Serafim, Leide Katia Amorim de Almeida e Grazieli Lorraine Gimenes dos Santos

Assunto: Estudo Orientado obrigatório

Atenciosamente,

Suélen Dorneles Serafim

Leide Katia Amorim de Almeida

Grazieli Lorraine Gimenes dos Santos

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho de Estudo Orientado, vamos explorar os conceitos de sequências, progressão aritmética e progressão geométrica. Você vai aprender como esses conceitos foram descobertos e como eles são aplicados em diferentes áreas do conhecimento. Ele irá abordar alguns assuntos que dizem respeito à matemática. Nele vamos explorar os conceitos fundamentais de sequências matemáticas, com foco especial nas Progressões Aritméticas (PAs) e Progressões Geométricas (PGs). Sequências são elementos essenciais na matemática, encontrando aplicações em diversas áreas do conhecimento e desempenhando um papel crucial na análise de padrões e na resolução de problemas práticos.

As PAs são sequências nas quais cada termo subsequente é obtido adicionando-se uma constante ao termo anterior, enquanto as PGs são sequências onde cada termo subsequente é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante. Ambas as progressões desempenham um papel central em várias disciplinas, permitindo a modelagem de situações do mundo real, previsões e cálculos importantes.

Neste estudo, investigamos a teoria por trás dessas sequências, suas propriedades, aplicações e relevância em campos como finanças, física, economia e engenharia. Ao compreender esses conceitos, estamos capacitados a abordar problemas complexos, analisar dados e fazer projeções, contribuindo para uma base sólida em matemática e resolução de desafios práticos. Aprofundar-se nesse tópico é fundamental não apenas para acadêmicos, mas também para profissionais que buscam ferramentas matemáticas valiosas em suas respectivas áreas de atuação.

2. O QUE É UMA SEQUÊNCIA?

Uma sequência na matemática é um conjunto ordenado de números, elementos ou objetos, organizados em uma ordem específica. Cada elemento em uma sequência é chamado de "termo", e a ordem em que esses termos são dispostos é fundamental. As sequências são usadas para analisar e representar padrões matemáticos, observar o comportamento de grandezas em relação a outras e estudar a progressão ou repetição de eventos.

A noção de sequências na matemática remonta à antiguidade e não possui uma única fonte de origem documentada. Sequências numéricas têm sido estudadas e utilizadas há milhares de anos em várias culturas ao redor do mundo. Aqui está uma breve visão geral da origem e do desenvolvimento das sequências na matemática:

1. **Matemática Antiga:** A ideia de sequências numéricas pode ser traçada até civilizações antigas, como os egípcios e babilônios, que registravam números em sistemas de notação. No entanto, os gregos antigos, em particular, fizeram contribuições significativas para o estudo de sequências. Matemáticos gregos, como Euclides e Arquimedes, exploraram propriedades de números inteiros e sequências geométricas.
2. **Idade Média e Renascença:** Durante a Idade Média e o Renascimento, matemáticos árabes e europeus contribuíram para o desenvolvimento das sequências. Fibonacci, um matemático italiano do século XIII, introduziu a famosa Sequência de Fibonacci, que agora leva seu nome.
3. **Desenvolvimento Moderno:** No século XVII, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz começou a formalizar o estudo das séries infinitas e das sequências. Seus trabalhos e os de outros matemáticos da época estabeleceram as bases para o cálculo infinitesimal, que envolve o uso de sequências e séries.

Aplicabilidades da Sequência:

É importante observar que as sequências desempenham um papel fundamental em várias áreas da matemática, como a análise, a teoria dos números, a geometria, a álgebra e muitas outras. Sequências são conjuntos ordenados de números ou objetos que seguem um padrão específico. Elas têm diversas aplicações em matemática, incluindo:

1. **Teoria dos Números**: Sequências desempenham um papel crucial na teoria dos números, onde são usadas para estudar propriedades dos números inteiros, como as sequências de números primos, sequências de Fibonacci e muitas outras.
2. **Análise Matemática**: Sequências são usadas na análise matemática para definir conceitos fundamentais, como limites, derivadas e integrais. O estudo de limites de sequências é uma parte essencial da análise.
3. **Geometria**: Sequências podem ser usadas para representar pontos em espaços euclidianos e para definir curvas, superfícies e outras estruturas geométricas.

4. **Probabilidade e Estatística**: Em estatística, as sequências de dados são frequentemente analisadas para fazer inferências sobre populações maiores. Sequências aleatórias, como as geradas por processos estocásticos, também são estudadas.
5. **Álgebra Linear**: Sequências são usadas para representar vetores e matrizes. Elas também têm aplicações em álgebra linear numérica, como a diagonalização de matrizes.
6. **Teoria dos Grafos**: Sequências podem ser usadas para representar grafos, e a análise de sequências de grafos é uma parte importante da teoria dos grafos.
7. **Criptografia**: Em criptografia, sequências aleatórias desempenham um papel importante na geração de chaves criptográficas seguras.
8. **Engenharia e Ciência da Computação**: Sequências são usadas em algoritmos e estruturas de dados, como listas encadeadas e sequências numéricas usadas em simulações e modelagem computacional.

Essas são apenas algumas das muitas áreas da matemática em que as sequências desempenham um papel importante. A matemática é uma disciplina vasta, e as sequências são uma ferramenta fundamental para descrever e analisar padrões matemáticos.

2. PA E PG (PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA)

Uma Progressão aritmética é uma sequência de números reais cuja diferença entre um termo e seu antecessor (começando pelo segundo) é uma constante. Já uma Progressão Aritmética é uma sequência de números reais não nulos cujo quociente entre um termo e seu antecedente, a partir do segundo, é uma constante.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA – PROPRIEDADES:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$r = a_n - a_{n-1}$$

a_n → termo geral → enésimo termo

a_1 → primeiro termo

n → número de termos

r → razão

S_n → Soma dos *n* primeiros termos

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA – PROPRIEDADES:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}; \quad -1 < q < 1$$

a_n → termo geral → enésimo termo

a_1 → primeiro termo

n → número de termos

q → quociente ou razão

S_n → soma dos *n* primeiros termos

S_∞ → soma de infinitos termos

3. MATEMÁTICA FINANCEIRA

Matemática financeira é uma área de **aplicação prática da matemática**, que consiste em cálculos direcionados à melhor organização e ao maior controle do dinheiro. Mais do que uma ciência, é uma ferramenta bastante útil no dia a dia, tanto para cuidar das contas pessoais quanto daquelas que pertencem a uma empresa.

A matemática financeira estuda os procedimentos utilizados em pagamentos de empréstimos, bem como os métodos de análise de investimento em geral.

3.1. Capital, juros e taxa de juros e montante

Quando uma pessoa empresta a outra um valor monetário, durante um certo tempo, essa quantia é chamada de capital (ou principal) e é indicada por C. O valor que o emprestador cobra pelo uso do dinheiro, ou valor pago pelo tomador do empréstimo é chamado de Juros é indicado por J.

A taxa de juros indicada por i, é expressa como porcentagem do capital. Ela reapresenta os juros numa certa unidade de tempo, normalmente indicada da seguinte forma: ao dia(a.d), ao mês(a.m), ao ano(a.a). Para calcular o juros no período da taxa usaremos a seguinte fórmula:

$$\mathbf{J = C * i}$$

Se o pagamento do empréstimo for feito numa única parcela, ao final do prazo do empréstimo, o tomador pagará a soma do capital emprestado com juros, o que chamaremos de montante e indicaremos pro M. Para calcular o montante usaremos a seguinte fórmula:

$$\mathbf{M = C + J}$$

3.1. Regimes de capitalização

Se um capital for aplicado a uma certa taxa por período, por vários intervalos ou períodos de tempo, o valor do montante pode ser calculado seguindo duas convenções, chamadas de regimes de capitalização: capitalização simples(ou juros simples), capitalização composta(ou juros composto).

3.1.1. Juros simples

São uma correção calculada sobre um valor inicial, expressa em porcentagem.Trata-se de um acréscimo que, como o nome indica, é bastante simples de ser realizado. Pode ser uma **cobrança ou recebimento extra** por não haver o desembolso total no momento. Partindo de um valor presente, se aplica uma taxa de juros que leva em conta também o período da operação.Vale para vendas a prazo e investimentos (dinheiro que entra) e para compras parceladas e empréstimos (dinheiro que sai).A fórmula dos juros simples é bastante enxuta e considera quatro variáveis:

- **Capital (C)**: o valor presente, que se refere à quantia total da operação
- **Juros (J)**: acréscimo sobre o capital
- **Tempo (t)**: a duração da operação (geralmente expressa em meses)
- **Taxa (i)**: percentual que determina a quantidade de juros que incidem na operação.

Assim, chegamos à seguinte fórmula:

J = C * i * t.

3.1.2. Juros composto

Representam o juro sobre juro, ou seja, têm aplicação sobre o montante de cada período. A melhor forma de entender é justamente comparar com os juros simples. Observando o exemplo anterior, você vê que há uma previsão clara sobre o acréscimo antes mesmo de a operação ser realizada, com juros incidindo sobre o valor total da operação. No caso dos juros compostos, isso muda um pouquinho. O que acontece é que a cada mês, é aplicada uma correção sobre o capital de momento. Isso torna a rentabilidade de um investimento mais atrativa, mas, por outro lado, pode elevar uma dívida se for essa a modalidade de correção utilizada. No caso dos juros compostos, um novo elemento é somado à fórmula:

- **M**: corresponde ao montante final.

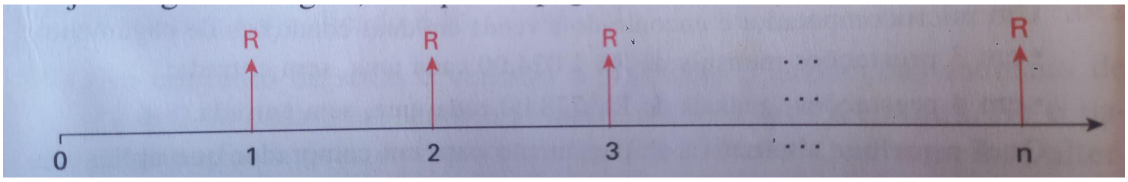
Os demais se mantêm: capital (C), taxa de juros (i) e tempo (t). A fórmula agora é a seguinte:

M = C x (1 + i) t

4. Sequência uniforme de pagamentos

Consideremos um valor financiado V que deve ser pago em prestações iguais de valor R nas datas 1,2, 3, ..., n e suponhamos que a taxa de juros compostos cobrada no financiamento seja *i* por período de tempo. Chamamos esse conjunto de ´´Sequência uniforme de pagamentos´´.

Veja a figura a seguir, em que os pagamentos são representados por R.



Podemos indicar o valor atual das prestações, representado por V, à taxa *i*, como:

$$V = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+i)*n}$$

Considerando que o 2º membro dessa expressão é a soma dos termos de uma Progressão Geométrica finita, cuja razão é $q = \frac{1}{1+i}$ e cujo 1º termo é $a_1 = \frac{R}{(1+i)}$, podemos aplicar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica finita, como segue:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{a_1\left(q^n + 1\right)}{(q-1)}$$

Assim, temos:

$$V = \frac{\frac{R}{(n+i)}\left[\frac{1}{(1+i)^*n} - 1\right]}{\frac{1}{(1+i)} - 1}$$

$$V = R \, . \, \frac{\frac{1}{(1+I)}\left[\frac{1-(1+I)^*n}{(1+i)^*n}\right]}{\frac{1-(1+i)}{(1+i)}}$$

$$V = R \, . \, \frac{\left[\frac{1-(1+i)^*n}{(1+i)^*n}\right]}{-i} = \frac{\left[\frac{(1+i)^*n \quad -1}{(1+i)^*n}\right]}{i}$$

E, finalmente:

$$V = R \, . \, \frac{(1+i)^*n \quad -1}{(1+i)^*n \quad . \, i}$$

Essa é a fórmula que relaciona o valor atual com a prestação, taxa de juros e número de prestações.

Referências Bibliográficas

- "A History of Mathematics" de Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach
- "The Story of Mathematics: From Creating the Pyramides to Exploring Infinity" de Anne Rooney
- Pesquisa escolar matemática. Uol, 2023. Disponível em: https://vestibular.uol.com.br/resumo-das-disciplinas/matematica/progressao-aritmetica-e-geometrica.
- IEZZI, Gelson. HAZZAN, Samuel. DEGENSZAJN, David. Fundamentos de Matemática Elementar - volume 11.ISBN 978-85-357-0462-0(aluno).ISBN978-85-357-0523-6(professor).ed. São Paulo: Saraiva, 2009.