



Simulação analítica e numérica dos efeitos de molas, deslocamentos prescritos e temperatura em linhas de influência

Paulo Roberto Rodrigues Arrieiro ^a; Rafael Araujo de Sousa ^b

^a Aluno de Graduação em Engenharia Civil, paulo.arrieiro@ufms.br

^b Professor Orientador, Doutor, rafael.a.sousa@ufms.br

Faculdade de Engenharias, Arquitetura e Urbanismo e Geografia. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Av. Costa e Silva, s/nº | Bairro Universitário | 79070-900 | Campo Grande, MS, Brasil.

RESUMO

A análise de estruturas submetidas a cargas móveis exige procedimentos capazes de relacionar a posição da carga à resposta estrutural. Nesse contexto, as linhas de influência permitem identificar posições críticas e avaliar a variação de reações de apoio, esforços internos e deslocamentos ao longo do elemento. A representação por vínculos idealizados, entretanto, nem sempre reproduz o comportamento real, uma vez que estruturas frequentemente apresentam rigidez finita em apoios, imposições cinemáticas e variações de temperatura que induzem deformações térmicas e ações adicionais. Este trabalho desenvolve uma abordagem analítica e numérica para avaliar os efeitos de apoios elásticos (molas) em linhas de influência e para analisar, nas envoltórias, a influência de deslocamentos prescritos e de efeitos térmicos. A etapa analítica fundamenta-se no princípio dos trabalhos virtuais, empregando o método das forças simplificado, e considera como ações externas um trem-tipo modelado por cargas concentradas, deslocamentos prescritos e efeitos térmicos. A verificação numérica é realizada com o software FTOOL. Por fim, evidenciam-se os impactos dos deslocamentos prescritos e dos efeitos térmicos nas envoltórias dos momentos fletores máximos e mínimos.

Palavras-chave: Linhas de influência; Molas; Deslocamentos prescritos; Temperatura; Envoltórias.

ABSTRACT

The analysis of structures subjected to moving loads requires procedures capable of relating the load position to the structural response. In this context, influence lines make it possible to identify critical positions and to evaluate the variation of support reactions, internal forces, and displacements along the member. The representation using idealized restraints, however, does not always reproduce actual behavior, since structures often exhibit finite support stiffness, kinematic constraints, and temperature variations that induce thermal strains and additional actions. This work develops an analytical and numerical approach to evaluate the effects of elastic supports (springs) on influence lines and to analyze, through envelopes, the influence of prescribed displacements and thermal effects. The analytical stage is based on the principle of virtual work, employing the simplified force method, and considers as external actions a design train modeled by concentrated loads, prescribed displacements, and thermal effects. Numerical verification is performed using the FTOOL software. Finally, the impacts of prescribed displacements and thermal effects are highlighted in the envelopes of maximum and minimum bending moments.

Keywords: Influence lines; Springs; Prescribed displacements; Temperature; Envelopes.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de estruturas submetidas a ações móveis demanda procedimentos capazes de correlacionar a posição da carga ao longo do elemento estrutural com a resposta desenvolvida no sistema. Essa correlação permite reconhecer posições críticas de carregamento e aprofundar a compreensão do comportamento global e local da estrutura, com reflexos diretos na determinação de reações de apoio, esforços internos, rotações e deslocamentos. Nesse contexto, as linhas de influência (LI) assumem papel fundamental; delas derivam as envoltórias de momentos fletores.

Para fins de clareza, define-se LI como a variação de um efeito elástico causada pelo deslocamento de uma carga móvel unitária. Dessa definição, percebe-se imediatamente que a LI, por si só, não estabelece relação direta com deslocamentos prescritos nem com efeitos térmicos; esses dois últimos refinamentos de análise estão associados às envoltórias, porque influenciam os valores máximos e mínimos dos esforços ao longo da estrutura.

Este trabalho desenvolve uma simulação analítica e numérica do efeito de molas nas LI, considerando também os efeitos de deslocamentos prescritos e das variações térmicas nas envoltórias dos momentos fletores. A etapa analítica utiliza o método das forças simplificado (MFS). A modelagem computacional é realizada no software FTOOL, e os resultados analíticos são comparados aos numéricos.

Ao longo do curso de Engenharia Civil da UFMS, o tema das LI é abordado em três disciplinas. Em Estática I, o tema é aplicado a estruturas isostáticas. Em Estática II, a estruturas hiperestáticas. Em Pontes de Concreto, retoma-se o assunto com apoio da Tabela de Anger. Como aluno, estudei o uso de LI em estruturas hiperestáticas de trechos de vigas na disciplina de Estática II. Nessa disciplina, as LI foram obtidas a partir das linhas elásticas das vigas, considerando conhecidos os deslocamentos nodais, conforme a abordagem apresentada por Soriano (2016). Posteriormente, o tema foi retomado em Pontes de Concreto com o auxílio da Tabela de Anger para avaliar a distribuição de efeitos; contudo, percebeu-se que as disciplinas, de certo modo, não estabeleciam uma conexão conceitual clara entre si. Dessa forma, além das simulações dos efeitos, construiu-se a própria Tabela de Anger de acordo com a configuração do exemplo proposto, buscando consolidar o entendimento e integrar o método à aplicação prática.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A revisão bibliográfica deste trabalho baseia-se em Sousa (2025). A seguir apresentam-se os conceitos utilizados.

2.1. Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

O princípio dos trabalhos virtuais (PTV) constitui uma base energética para relacionar ações e respostas em estruturas em equilíbrio, estabelecendo a igualdade entre o trabalho virtual externo e o trabalho virtual interno associado às deformações, sob as hipóteses usuais de compatibilidade cinemática e comportamento elástico linear. A formulação permite a adoção de grandezas virtuais que não precisam coincidir com os valores reais do problema, e pode ser apresentada em duas formas: uma baseada em forças virtuais e outra em deslocamentos virtuais (Sousa, 2025).

Neste trabalho, emprega-se a versão de forças virtuais no contexto do método das forças simplificado (MFS), conforme Sousa (2025), por possibilitar uma solução mais direta do que o método das forças (MF) convencional; em ambos, as incógnitas do problema são forças.

2.1.1. Escalas de análise

Sousa (2025) apresenta o conceito de escalas de análise, distinguindo três níveis: global, local e infinitesimal. Essa classificação contribui para organizar a interpretação física do problema. A escala global está associada às ações externas e aos deslocamentos em pontos de interesse do sistema, enquanto a escala local descreve os esforços internos, como esforço normal, esforço cortante e momento fletor. A escala infinitesimal não é abordada neste trabalho, por não ser de interesse para os objetivos propostos.

2.1.2. Método das forças simplificado (MFS)

Conforme Sousa (2025), o MFS é definido a partir do método das forças (MF) com o objetivo de tornar mais prática a construção das compatibilidades de deslocamento que reconstituem o problema original. Nesse formato, o MFS é desenvolvido de maneira detalhada a partir do conceito do princípio dos trabalhos virtuais (PTV) e da criação de sistemas virtuais de forças auto equilibrados.

O trabalho virtual externo resulta da soma dos produtos entre ações externas e deslocamentos virtuais. Na formulação com força virtual, a ação virtual multiplica o deslocamento real; na formulação com deslocamento virtual, a ação real multiplica o deslocamento virtual. Em ambos os casos, a coerência

direcional é fundamental, pois garante a correspondência física entre a grandeza aplicada e a resposta avaliada.

O trabalho virtual interno decorre do produto entre esforços internos e deformações associadas, integrados ao longo do domínio estrutural. Para vigas sob as hipóteses de Euler-Bernoulli, a parcela de flexão relaciona o momento fletor à curvatura, integrando-se ao longo do eixo do elemento. Quando relevantes, os efeitos axiais são representados pela relação entre força normal e alongamento unitário; e, em situações com torção, relaciona-se o torque à rotação específica, em formulação análoga. A linearidade do material permite a superposição, simplificando a relação entre os Estados reais e virtuais.

2.1.3. Trem-tipo adotado nas simulações

Em pontes, a carga móvel de projeto é usualmente representada por um trem-tipo normativo, cuja posição ao longo do tabuleiro é variada para a identificação de situações críticas, procedimento associado ao conceito de linhas de influência (LI) (EL DEBS; TAKEYA, 2007).

No presente trabalho, entretanto, como o objetivo é obter as LI e comparar seus efeitos na presença de molas, deslocamentos prescritos e temperatura, a ação móvel considerada nas simulações é idealizada como uma carga concentrada móvel unitária, de valor igual a 1 (EL DEBS; TAKEYA, 2007).

2.1.4. Refinamentos da análise

Sousa (2025) e Soriano (2016) discutem, em detalhes, como considerar os efeitos de apoios elásticos, deslocamentos prescritos e efeitos térmicos no princípio dos trabalhos virtuais (PTV). Os efeitos de molas e de variações térmicas são incorporados de forma mais direta por meio da energia de deformação elástica virtual, enquanto os deslocamentos prescritos são considerados no trabalho virtual realizado pelas forças virtuais.

Como um dos objetivos deste trabalho é conectar o conceito de linha de influência (LI) ao longo das disciplinas do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), será construída a Tabela de Anger a partir do método das forças simplificado (MFS).

2.3. Tabela de Anger

A Tabela de Anger constitui um instrumento clássico empregado na análise de estruturas submetidas a cargas móveis, especialmente em vigas de pontes rodoviárias e ferroviárias. Seu objetivo é facilitar a

determinação dos esforços máximos provocados por veículos-tipo ao longo do tabuleiro, por meio da combinação direta entre as ordenadas das linhas de influência (LI) e os carregamentos concentrados associados aos eixos do veículo. Conforme apresentado por Lima (1983), a tabela organiza, de forma sistemática, os valores de reação, esforço cortante ou momento fletor correspondentes a posições críticas do carregamento móvel.

Do ponto de vista metodológico, a Tabela de Anger baseia-se diretamente no conceito de LI, sendo aplicável sobretudo a estruturas hiperestáticas de pequena ordem, desde que o comportamento permaneça linear elástico. O procedimento consiste em multiplicar as ordenadas da LI pelo valor das cargas associadas a cada eixo do veículo e somar os resultados para obter o efeito total no ponto analisado.

Segundo Lima (1983), como em seu exemplo com vãos da ordem de 1:1 do próprio material, essa abordagem permite identificar com precisão as posições mais desfavoráveis do veículo sobre a estrutura, sendo amplamente utilizada em verificações práticas de projeto e ensino de pontes.

2.4. Linha de influência (LI)

Linhas de influência são representações que permitem avaliar como um efeito estrutural específico (reação, esforço interno ou deslocamento) se altera quando uma ação móvel muda de posição ao longo do elemento, sendo particularmente úteis para localizar posições críticas de carregamento e, assim, determinar valores extremos do efeito analisado; na prática, sua construção pode ser feita impondo-se uma carga concentrada unitária que percorre o vão e registrando-se, para cada posição, a ordenada correspondente ao efeito de interesse (EL DEBS; TAKEYA, 2007).

A partir dessas ordenadas, e por superposição, torna-se possível avaliar o efeito produzido por carregamentos móveis reais, posicionando-os nas regiões mais desfavoráveis e calculando esforços, como momentos fletores com base nas respectivas LI (EL DEBS; TAKEYA, 2007).

3. MÉTODOS

3.1. Ferramentas computacionais e tratamento de dados

A metodologia adotada estruturou-se em duas etapas complementares: desenvolvimento analítico e verificação numérica. O desenvolvimento analítico foi realizado no ambiente PTC Mathcad Prime, utilizado para a formulação, organização e execução das expressões matemáticas associadas ao método das forças simplificado (MFS). Nesse ambiente, obtiveram-se as funções analíticas das linhas de influência (LI) com a incorporação de molas, enquanto deslocamentos prescritos e ações térmicas foram considerados na construção das envoltórias dos momentos fletores. A verificação numérica foi conduzida com auxílio do software FTOOL 4.00.00 Basic.

3.1.1. AutoCAD

No presente TCC, o AutoCAD subsidiou detalhamento geométrico de vigas e representação de elementos associados a molas e condições de contorno, inclusive em arranjos com necessidade de melhor leitura espacial, servindo como base gráfica para padronização dos exemplos antes das rotinas de cálculo e simulação.

3.1.2. Microsoft Excel

Neste trabalho, o Excel permaneceu restrito ao papel de referência para criação e agrupamento de dados, com finalidade direta na estruturação de tabelas e organização da Tabela de Anger.

3.1.3. PTC Mathcad Prime

O Mathcad Prime apoiou a etapa analítica, com implementação das expressões necessárias à obtenção de respostas estruturais e linhas de influência (LI) sob presença de molas, deslocamentos prescritos e temperatura, estabelecendo base numérica para confronto posterior com resultados de modelo computacional.

3.1.4. FTOOL 4.00.00 Basic

No desenvolvimento das análises, o software FTOOL foi adotado como a principal ferramenta da metodologia numérica, sendo utilizado para a modelagem estrutural e para o pós-processamento dos resultados. A partir do modelo implementado, o programa permitiu obter e visualizar as linhas de influência (LI) associadas ao momento fletor nos trechos de interesse, evidenciando de forma clara a variação desse esforço em função da posição do carregamento móvel.

Além da geração das LI, o FTOOL foi empregado para extrair os diagramas de momentos fletores dos casos estudados e, com isso, viabilizar a comparação entre diferentes parcelas de ação. Em particular, os resultados foram organizados para confrontar os efeitos provenientes de deslocamentos prescritos com aqueles associados a efeitos térmicos, avaliando-se como cada contribuição modifica a distribuição de esforços e influencia diretamente a envoltória dos momentos fletores.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos a partir dos diferentes exemplos analisados, com exposição das equações desenvolvidas e breve explicação do significado físico e estrutural de cada expressão. A apresentação privilegia clareza e objetividade, com ênfase na interpretação das linhas de influência (LI).

As variáveis foram tratadas de forma algébrica, sem a adoção prévia de unidades do Sistema Internacional (SI), uma vez que o interesse inicial recaiu sobre a forma funcional das equações e a relação entre grandezas. A definição de unidades e a avaliação numérica ocorreram posteriormente, restritas à etapa comparativa, na qual cenários e posições específicas foram analisados para verificação e confronto dos resultados.

Diante das análises, as equações em (1) representam as condições de equilíbrio estático do sistema. Em termos físicos e matemáticos, elas traduzem a condição necessária para que a estrutura permaneça em equilíbrio.

$$\sum F_x = 0 \quad (1.1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (1.2)$$

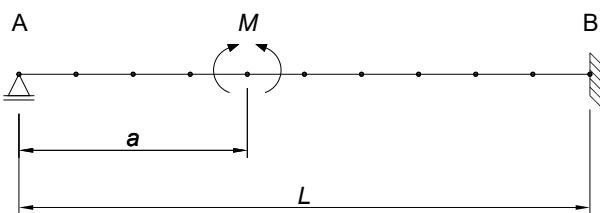
$$\sum M = 0 \quad (1.3)$$

Os exemplos a seguir apresentam as LI dos momentos fletores. Para o aprofundamento conceitual das equações e detalhamento teórico, recomenda-se a leitura do livro Sousa (2025).

4.1. Exemplo 01 – Viga simplesmente apoiada e engastada

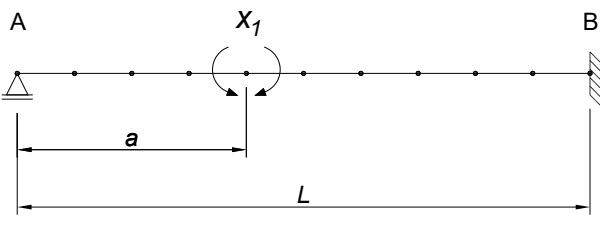
No primeiro exemplo analisou-se uma viga com as seguintes condições de contorno: simplesmente apoiada no extremo esquerdo, ponto A, e engastada no extremo direito, ponto B, conforme a Figura 1. O objetivo consiste em determinar a linha de influência (LI) do momento fletor na seção a , para uma viga de comprimento L e momento M , além da variável auxiliar ξ para descrever as funções de crescimento e decrescimento.

Figura 1 – Exemplo 01. Fonte: Autor.



Considerando o caráter hiperestático da estrutura, adotou-se o método das forças simplificado (MFS), com introdução de uma rótula no nó de interesse para viabilizar a avaliação do esforço interno. Dessa forma foi adotado o seguinte sistema principal (SP) conforme a Figura 2.

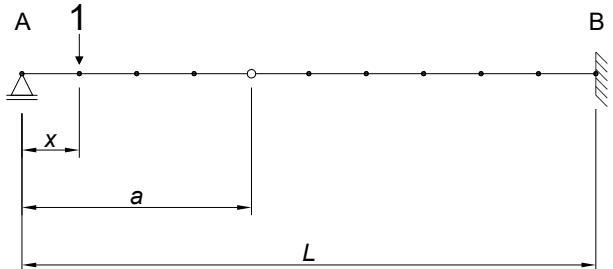
Figura 2 – Hiperestático X_1 . Fonte: Autor.



Nessa formulação, o Estado correspondente às ações externas reais foi tratado em duas situações: situação 1 quando a carga unitária está antes da seção de interesse a e situação 2 quando está depois.

De acordo com a Figura 3 aplica-se a carga unitária a uma distância x do apoio A.

Figura 3 – Situação 1. Fonte: Autor.



A seguir, nas equações apresentadas em (2), são impostas as condições de equilíbrio e obtém-se os momentos fletores do Estado E_0 e reações, considerando a situação 1.

$$\underline{H_{AE0S1} = 0} \quad (2.1)$$

Reações horizontais

$$\underline{R_{AE0S1} + R_{BE0S1} = 1} \quad (2.2)$$

Reações verticais

$$\underline{\sum M_{ROT.ESQ.E0S1} = 0} \quad (2.3)$$

Somatório a esq. da rótula

$$R_{AE0S1} = \frac{a-x}{a} \quad (2.4)$$

$$R_{BE0S1} = \frac{x}{a} \quad (2.5)$$

$$\underline{\sum M_{ROT.DIR.E0S1} = 0} \quad (2.6)$$

Somatório a dir. da rótula

$$M_{ROT.DIR.E0S1} = -R_{BE0S1} \cdot (L-a) - \underline{M_{BE0S1}} = 0 \quad (2.7)$$

M. no eng.

$$M_{BE0S1} \underset{\text{Parâmetros}}{\underline{(x, a, L)}} = \frac{(L-a) \cdot x}{a} \quad (2.8)$$

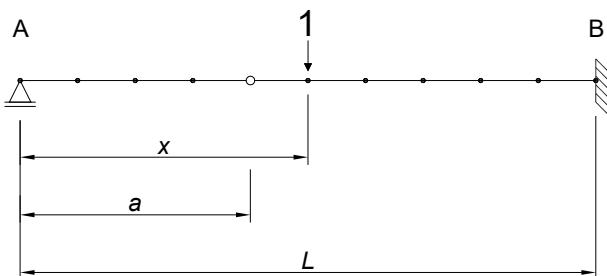
As nomenclaturas em subscrito representam particularidades de posição e de Estados pertinentes à análise. Como exemplo $\sum M_{ROT.ESQ.E0S1}$ significa: somatório de momento na rótula, pelo lado esquerdo, do Estado E_0 para situação 1. Todas as equações apoiam-se nessa metodologia de identificação.

Baseado nas equações apresentadas em (2), procede-se à formulação das expressões condicionais associadas às diferentes posições da carga móvel da situação 1, demonstradas em (3).

$$M_{1E0S1}(x, a, \xi) = \frac{a-x}{a} \quad (3.1) \quad \Sigma M_{\text{ROT.ESQ.E1}} = 0 \quad (5.1)$$

$$M_{2E0S1}(x, a, \xi) = \left(\frac{-x}{a}\right) \cdot \xi + x \quad (3.2) \quad R_{AE1} = \frac{1}{a} \quad (5.2)$$

Figura 4 – Situação 2. Fonte: Autor.



$$\Sigma M_{\text{BOT, ESO, E1}} = 0 \quad (5.1)$$

$$R_{AE1} = \frac{1}{a} \quad (5.2)$$

$$\Sigma M_{\text{ROT.DIR.E1}} = 0 \quad (5.3)$$

$$R_{\text{BE1}}(L - a) - M_{\text{B1}} - 1 = 0 \quad (5.4)$$

$$R_{AE1}(a) = \frac{1}{a} \quad (5.5)$$

$$R_{\text{BE1}}(a) = -\frac{1}{a} \quad (5.6)$$

$$M_{\text{BE1}}(a, L) = \frac{L}{a} \quad (5.7)$$

$$M_{E1}(a, \xi) = \left(\frac{\xi}{a} \right) \quad (5.8)$$

A Figura 4 corresponde quando a carga unitária móvel está depois da seção a . As equações dos momentos fletores do Estado E_0 e reações, considerando a situação 2, são vistos em (4).

$$\Sigma M_{\text{ROT,ESQ,EOS2}} = 0 \quad (4.1)$$

$$R_{AE0S2} = 0 \quad (4.2)$$

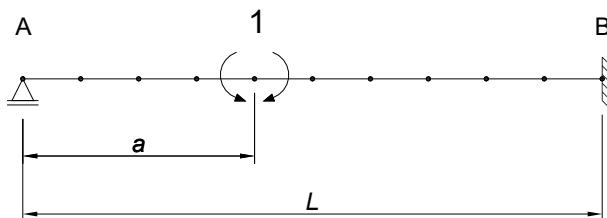
$$R_{BE0S2} = 1 \quad (4.3)$$

$$M_{BEOS2} = L - x \quad (4.4)$$

$$M_{\text{E0S2}}(x, \xi) = -(\xi - x) \quad (4.5)$$

Nessa seção aplicam-se os momentos unitários na rótula, indicado pela Figura 5 e resolve-se novamente a parte estática de acordo com as equações expressas em (5).

Figura 5 – Estado E_1 . Fonte: Autor.



As equações em (6) apresentam o trabalho virtual externo com os momentos virtuais realizando trabalho para as diferentes situações.

(6.1)

$$W_{10.S2} = (1) \cdot \theta_{10.ESQ.S2} + (-1) \cdot \theta_{10.DIR.S2} = \delta_{10.S2}(x, a, L, EI)$$

As equações em (7) apresentam a energia de deformação elástica virtual para cada situação.

(7.1)

Aplicando o PTV têm-se os coeficientes da ação externa demonstrados para cada situação em (8).

$$\delta_{10,S1}(x, a, L, EI) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\int_0^x M_{E1}(a, \xi) \cdot M_{E0S1}(x, a, \xi) d\xi + \int_x^L M_{E1}(a, \xi) \cdot M_{2E0S1}(x, a, \xi) d\xi \right) \quad (8.1)$$

$$\delta_{10,S2}(x, a, L, EI) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\int_x^L M_{E1}(a, \xi) \cdot M_{E0S2}(x, \xi) d\xi \right) \quad (8.2)$$

Ambos os casos são estabelecidos de acordo com os parâmetros das situações 1 e 2. Após determinados elabora-se o coeficiente de flexibilidade δ_{11} . Na equação (9) é demonstrado o trabalho virtual externo.

$$W_{11} = (1) \cdot \theta_{11,ESQ} + (-1) \cdot \theta_{11,DIR} = \delta_{11}(a, L, EI) \quad (9)$$

A equação (10) apresenta a energia de deformação elástica virtual.

$$U_{11} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\int_0^L M_{E1}(a, \xi) \cdot M_{E1}(a, \xi) d\xi \right) \quad (10)$$

Pelo PTV, temos em (11)

$$\delta_{11}(a, L, EI) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\int_0^L M_{E1}(a, \xi) \cdot M_{E1}(a, \xi) d\xi \right) \quad (11)$$

Ao utilizar a equação de compatibilidade obtém-se as equações em (12) das as duas situações.

$$X_{1S1}(x, a, L, EI) = \frac{-\delta_{10,S1}(x, a, L, EI)}{\delta_{11}(a, L, EI)} \quad (12.1)$$

$$X_{1S2}(x, a, L, EI) = \frac{-\delta_{10,S2}(x, a, L, EI)}{\delta_{11}(a, L, EI)} \quad (12.2)$$

A condicional final para os valores do hiperestático X_1 , com dependência da posição da carga móvel x , é vista abaixo em (13)

$$X_1(x, a, L, EI) = \begin{cases} se \ x \leq a \\ X_{1S1}(x, a, L, EI) \\ senão \\ X_{1S2}(x, a, L, EI) \\ senão \\ 0 \end{cases} \quad (13)$$

Para a padronização das variáveis adotou-se o módulo de elasticidade igual $E = 21.000 \text{ MPa}$ e o momento de inércia da seção transversal $I = 8,533 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ ($0,20 \text{ m} \times 0,80 \text{ m}$), além disso o exemplo utilizado trata-se da seção 4 (S4), a igual a 4 metros.

Os resultados numéricos apresentados foram obtidos por meio do PTC Mathcad Prime, demonstrados na Figura 6 e confrontados com os resultados fornecidos pelo software FTOOL, Figura 7.

Figura 6 – LI momento fletor S4 ($a = 4\text{m}$). Fonte: Autor.

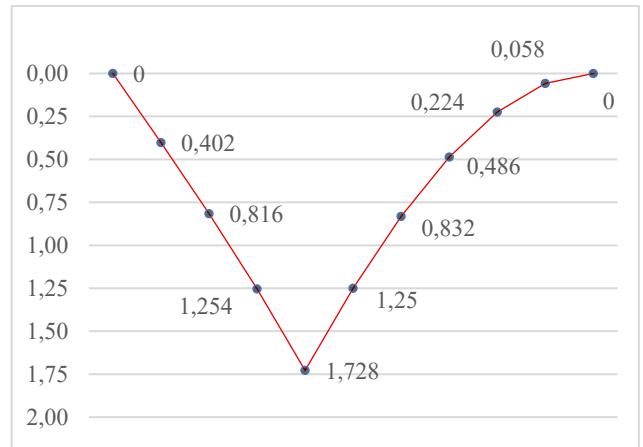
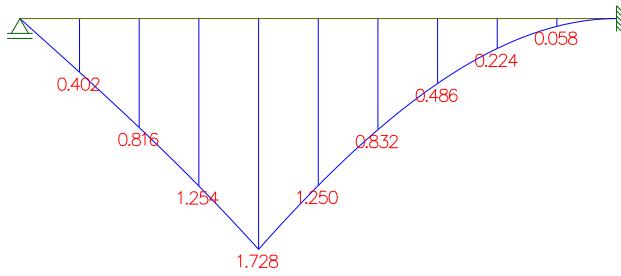


Figura 7 – LI momento fletor S4, ($a = 4m$). Fonte: Autor e FTOOL.

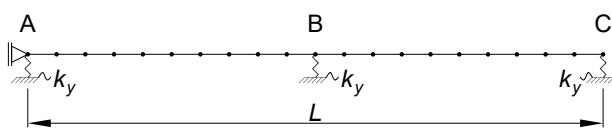


Observou-se concordância entre os resultados obtidos pelos métodos analítico e numérico, corroborando a adequação da modelagem numérica adotada e evidenciando a reprodução consistente, pelo procedimento computacional, da resposta estrutural prevista teoricamente para as condições analisadas.

4.2. Exemplo 02 – Construção da Tabela de Anger com molas translacionais.

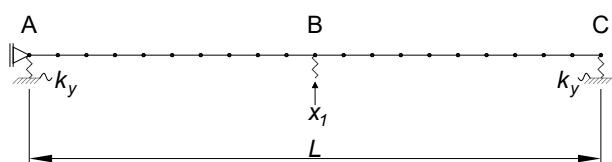
O exemplo apresenta similaridade com o conteúdo lecionado na disciplina de Pontes de Concreto. Neste caso a estrutura é composta por 20 segmentos discretizados em seções de 1 metro. O modelo considera a presença de três molas translacionais com ríjeza equivalente igual a $k_y = 5 \cdot 10^4 \frac{kN}{m}$. A Figura 8 apresenta os aspectos gerais do problema.

Figura 8 – Exemplo 02. Fonte: Autor.



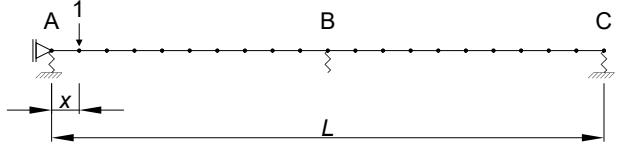
Utilizando o método das forças simplificado (MFS), escolheu-se o sistema da Figura 9 como o principal.

Figura 9 – SP hiperestático X_I . Fonte: Autor.



Para gerar a Tabela de Anger desse modelo, adota-se inicialmente a carga unitária posicionada a x metros do apoio A. A Figura 10 apresenta o Estado E_0

Figura 10 – E_0 . Fonte: Autor.



As equações de (14) demonstram as duas situações para equação do momento fletor $M_{S1E0}(x, L, \xi)$ e $M_{S2E0}(x, L, \xi)$.

$$\sum M_{CE0} = 0 \quad (14.1)$$

$$R_{AE0} \cdot (L) - 1 \cdot (L - x) = 0 \quad (14.2)$$

$$R_{AE0}(x, L) = \frac{L-x}{L} \quad (14.3)$$

$$R_{CE0}(x, L) = \frac{x}{L} \quad (14.4)$$

$$M_{S1E0}(x, L, \xi) = -\frac{x \cdot \xi}{L} + \xi \quad (14.5)$$

$$M_{S2E0}(x, L, \xi) = -\frac{x \cdot \xi}{L} + x \quad (14.6)$$

Em (15) mostra-se a condição final da equação de acordo com a posição da carga unitária móvel x .

$$(15)$$

$$M_{SE0}(x, L, \xi) = \text{se } \xi \leq x$$

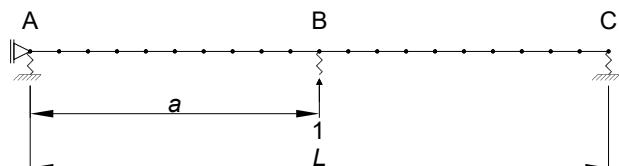
$$M_{S1E0}(x, L, \xi)$$

senão

$$M_{S2E0}(x, L, \xi)$$

Abaixo na Figura 11 analisa-se o Estado E_I .

Figura 11 – E_I . Fonte: Autor.



Posteriormente as equações de momento em (16) para as situações 1 e 2.

$$\Sigma M_{CE1} = 0 \quad (16.1)$$

$$-R_{AE1} \cdot (L) + 1 \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad (16.2)$$

$$R_{AE1} = \frac{1}{2} \quad (16.3)$$

$$R_{CE1} = \frac{1}{2} \quad (16.4)$$

$$M_{S1E1}(L, \xi) = -R_{AE1} \cdot \xi \quad (16.5)$$

$$M_{S2E1}(L, \xi) = -R_{AE1} \cdot \xi + 1 \cdot \left(\xi - \frac{L}{2}\right) \quad (16.6)$$

De acordo com a condicional da equação (17) abordase as duas possibilidades conforme o crescimento da variável ξ .

(17)

$$M_{SE1}(L, \xi) = \text{se } \xi \leq \frac{L}{2}$$

$$M_{S1E1}(L, \xi)$$

senão

$$M_{S2E1}(L, \xi)$$

A equação (18) apresenta o trabalho virtual externo.

$$W_{10} = (1) \cdot \delta_{10} \quad (18)$$

A equação (19) apresenta a energia de deformação elástica virtual, agora neste exemplo com a parcela do efeito elástico das molas.

(19)

$$U_{10} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\int_0^x M_{SE0}(x, L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi + \int_x^L M_{SE0}(x, L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi \right] + \underbrace{(-R_{AE1}) \cdot \left(\frac{R_{AE0}(x, L)}{k_y}\right) + (-R_{CE1}) \cdot \left(\frac{R_{CE0}(x, L)}{k_y}\right) + 1 \cdot \frac{0}{k_y}}_{\text{Efeito elástico das molas}}$$

Pelo PTV, temos na equação (20):

(20)

$$\delta_{10}(x, L) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\int_0^x M_{SE0}(x, L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi + \int_x^L M_{SE0}(x, L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi \right] + (-R_{AE1}) \cdot \left(\frac{R_{AE0}(x, L)}{k_y}\right) + (-R_{CE1}) \cdot \left(\frac{R_{CE0}(x, L)}{k_y}\right) + 1 \cdot \frac{0}{k_y}$$

Após conferência é demonstrada a determinação do coeficiente de flexibilidade em (21).

(21)

$$W_{11} = \underbrace{(1) \cdot \delta_{11} + (-R_{AE1}) \cdot 0 + (-R_{CE1}) \cdot 0}_{\text{Cargas virtuais}}$$

Note o sinal negativo nas reações de E_I dada a convenção. A equação (22) apresenta a energia de deformação elástica virtual.

(22)

$$U_{11} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\int_0^L M_{SE1}(L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi \right] + \underbrace{(-R_{AE1}) \cdot \left(\frac{-R_{AE1}}{k_y}\right) + (-R_{CE1}) \cdot \left(\frac{-R_{CE1}}{k_y}\right) + 1 \cdot \frac{1}{k_y}}_{\text{Efeito elástico das molas}}$$

Pelo PTV, temos em (23)

(23)

$$\delta_{11}(L) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\int_0^L M_{SE1}(L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi \right] + \underbrace{(-R_{AE1}) \cdot \left(\frac{-R_{AE1}}{k_y}\right) + (-R_{CE1}) \cdot \left(\frac{-R_{CE1}}{k_y}\right) + 1 \cdot \frac{1}{k_y}}_{\text{Efeito elástico das molas}}$$

Observa-se o efeito das 3 molas na equação (23) em cada reação. Ao utilizar a equação de compatibilidade, como abaixo na equação (24), delimita-se o hiperestático X_1 .

$$X_1(x, L) = \frac{-\delta_{10}(x, L)}{\delta_{11}(L)} \quad (24)$$

Com o hiperestático definido resolve-se a condição real inicial do problema em (25).

$$\Sigma M_C = 0 \quad (25.1)$$

$$R_A(x, L) \cdot L + R_B(x, L) \cdot \frac{L}{2} - 1 \cdot (L - x) = 0 \quad (25.2)$$

$$R_A(x, L) = \frac{-(2 \cdot x) + (2 - X_1(x, L)) \cdot L}{2 \cdot L} \quad (25.3)$$

$$R_B(x, L) = X_1(x, L) \quad (25.4)$$

$$R_C(x, L) = 1 - (R_A(x, L) + R_B(x, L)) \quad (25.5)$$

A partir das reações de apoio expressas na equação (25) obtém-se a condicional final do momento fletor em (26).

(26)

$$M_S(x, L, \xi) = \begin{cases} \text{se } 0 \leq \xi \leq \frac{L}{2} \\ R_A(x, L) \cdot \xi \\ \text{senão se } x \leq \xi \leq \frac{L}{2} \\ R_A(x, L) \cdot \xi - 1 \cdot (\xi - x) \\ \text{senão} \\ R_A(x, L) \cdot \xi - 1 \cdot (\xi - x) + \\ R_B(x, L) \cdot \left(\xi - \frac{L}{2}\right) \\ \text{senão se } \frac{L}{2} \leq \xi \leq L \\ R_A(x, L) \cdot \xi \\ \text{senão se } \frac{L}{2} \leq \xi \leq x \\ R_A(x, L) \cdot \xi + R_B(x, L) \cdot \\ \left(\xi - \frac{L}{2}\right) \\ \text{senão} \\ R_A(x, L) \cdot \xi + R_B(x, L) \cdot \\ \left(\xi - \frac{L}{2}\right) - 1 \cdot (\xi - x) \\ \text{senão} \\ 0 \end{cases}$$

Para comprovação dos resultados numéricos utilizou-se o software FTOOL e para seção de interesse a S1, distante 1 metro do apoio A. Os resultados encontrados foram equivalentes aos da Figura 12 e para melhor visualização foi elaborada a Tabela 01 com os resultados.

Figura 12 – LI momento fletor S1, ($a = 1m$). Fonte: Autor e FTOOL.

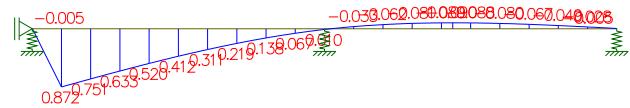


Tabela 01 – LI momento fletor S1, ($a = 1m$). Fonte: Autor e Excel.

Posição da Carga	S1	Posição da Carga	S1
0	-0,005	11	-0,033
1	0,872	12	-0,063
2	0,751	13	-0,081
3	0,633	14	-0,089
4	0,520	15	-0,088
5	0,412	16	-0,080
6	0,311	17	-0,067
7	0,219	18	-0,049
8	0,138	19	-0,028
9	0,067	20	-0,005
10	0,010		

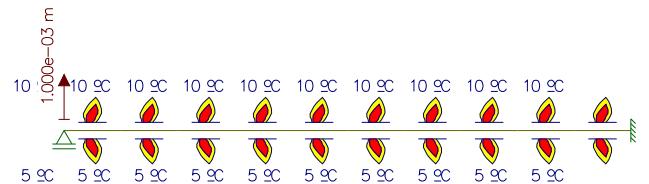
Todos os cálculos a título de conferência, assim como a Tabela Anger, constam nos apêndices no final deste trabalho.

4.3. Exemplo 03 – Envoltória dos momentos fletores do Exemplo 01, com os efeitos deslocamento prescrito e variação térmica.

Este exemplo retoma o Exemplo 01, incorpora-se os efeitos do deslocamento prescrito e variação térmica na envoltória dos momentos fletores. Para a comparação numérica, utilizou o FTOOL.

Dados: coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5} \frac{1}{\text{m}^{\circ}\text{C}}$, variação do bordo superior $\Delta t_s = 10^\circ\text{C}$, variação do bordo inferior $\Delta t_i = 5^\circ\text{C}$, $D_{py} = 0,001\text{m}$. O modelo deste exemplo é visto na Figura 13.

Figura 13 – Exemplo 03. Fonte: Autor e FTOOL.



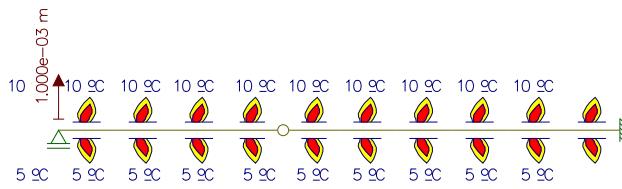
Estabelecidas as variações térmicas elabora-se o gradiente de temperatura e a variação uniforme de temperatura, vistos na equação (27) respectivamente.

$$g_t = \frac{\Delta t_i - \Delta t_s}{h} \quad (27.1)$$

$$\Delta_t = \frac{\Delta t_i + \Delta t_s}{2} \quad (27.2)$$

O sistema principal (SP) será o mesmo da Figura 2, contudo no novo Estado E_0 as ações externas são: deslocamento prescrito e variação de temperatura como abaixo na Figura 14.

Figura 14 – E_0 . Fonte: Autor e FTOOL.



Enquanto o Estado E_1 é equivalente ao contido no Exemplo 01 disponível na Figura 5, desenvolvido nas equações em (5). Por isso o coeficiente de flexibilidade resulta no mesmo δ_{11} explícito na equação (28)

$$\delta_{11}(a, L, EI) = \frac{L^3}{3 \cdot EI \cdot a^2} \quad (28)$$

A equação (29) apresenta o trabalho virtual externo.

$$(29)$$

$$W_{10} = R_{AE1}(a) \cdot D_{py} + (1) \cdot \theta_{10,ESQ,S1} + (-1) \cdot \theta_{10,DIR,S1} = \delta_{10}(a, L, EI) + R_{AE1}(a) \cdot D_{py}$$

Note a ausência das situações 1 e 2 do antigo E_0 , devido ao carregamento da carga móvel e logo inexistência da variável x . A energia de deformação elástica do exemplo é vista em (30).

$$U_{10} = \frac{0}{EI} + \alpha \cdot \Delta_t \cdot L \cdot 0 + \alpha \cdot g_t \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{a} \quad (30)$$

Pelo PTV, obtemos em (31) o novo δ_{10} .

$$(31)$$

$$\delta_{10}(a, L, EI) = \frac{-(R_{AE1}(a) \cdot D_{py})}{\text{Efeito D. Prescrito}} + \frac{\alpha \cdot g_t \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{a}}{\text{Efeito Térmico}}$$

Por último a obtenção do novo hiperestático X_1 em (32).

$$X_{1,Novo}(a, L, EI) = \frac{-\delta_{10}(a, L, EI)}{\delta_{11}(a, L, EI)} \quad (32)$$

De posse da função do hiperestático gera-se o diagrama dos momentos fletores de acordo com a Figura 15.

Figura 15 – Diagrama dos momentos fletores. Fonte: Autor e FTOOL.



Para elaborar a envoltória dos momentos fletores, organizam-se em (33) os valores máximos e mínimos, com inclusão dos efeitos de deslocamento prescrito e da temperatura. Adota-se trem-tipo carga concentrada $T_{Tipo} = 1$.

$$(33.1)$$

$$M_{MÍN} = X_{1,Novo}(a, L, EI) + \underbrace{X_1(x, a, L, EI) \cdot T_{Tipo}}_{LI Eq. (13)} \quad (33.2)$$

$$M_{MÁX} = X_{1,Novo}(a, L, EI) + \underbrace{X_1(x, a, L, EI) \cdot T_{Tipo}}_{LI Eq. (13)}$$

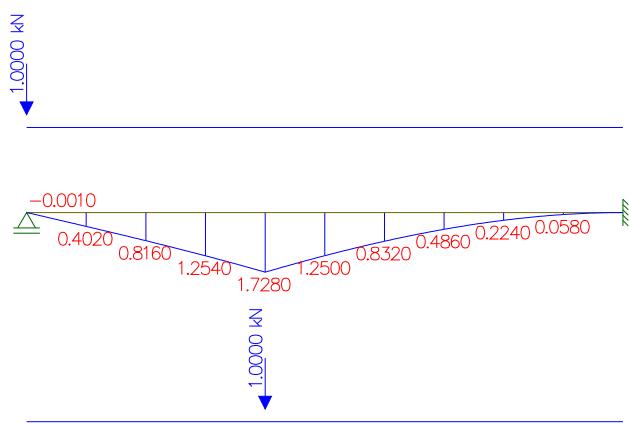
De forma genérica, os valores máximos e mínimos são obtidos somando-se aos resultados do novo problema hiperestático os efeitos do trem-tipo, determinados por meio da superposição a partir da linha de influência (LI) do Exemplo 01.

O valor máximo (33.2) pode ser obtido de forma direta, uma vez que, em geral, o maior valor positivo da LI ocorre quando a carga é posicionada no ponto

de maior ordenada, tipicamente sob a própria carga. Já o valor mínimo (33.1) não é, necessariamente, obtido de forma automática, pois as ordenadas disponíveis nem sempre coincidem exatamente com o ponto de análise, sendo por vezes necessárias interpolações para a sua determinação.

Como a análise foi discretizada de metro em metro, em conformidade com a modelagem no FTOOL, o software será utilizado para obter as ordenadas da linha de influência quando houver necessidade de interpolação. As ordenadas da seção distante $a = 4m$ são vistas na Figura 16.

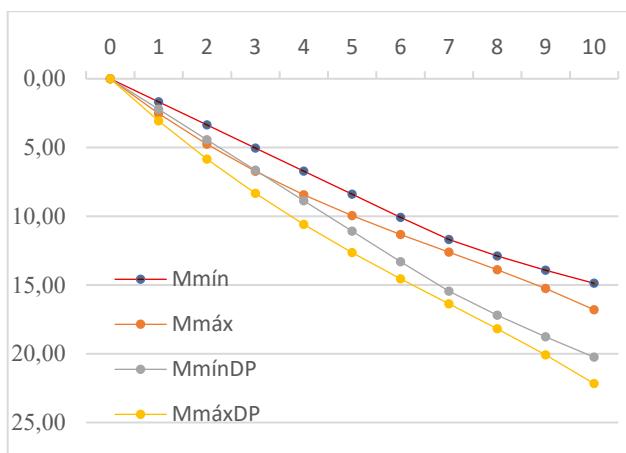
Figura 16 – LI momento fletor ($a = 4m$). Fonte: Autor e FTOOL.



Observa-se igualdade em relação à Figura 7. Ainda assim, com deslocamento prescrito, o FTOOL indica ordenada de -0,0010 m no apoio A devido ao $D_{py} = 0,001m$. Porém essa indicação não se sustenta, pois a ordenada no apoio deve ser nula.

Para comprovação do método analítico e prova de o efeito do deslocamento prescrito promover diferentes resultados, foram elaborados dois casos: um com a presença do deslocamento prescrito nas equações de $\delta_{10}(a, L, EI)$ e outro sem $D_{py} = 0$. As envoltórias correspondentes foram inseridas na Figura 17.

Figura 17 – Envoltória dos momentos fletores máximos e mínimos ($a = 4m$). Fonte: Autor.



A legenda é representada por: $Mmín$ e $Mmáx$ correspondem à envoltória sem deslocamento prescrito; $MmínDP$ e $MmáxDP$ correspondem à envoltória com deslocamento prescrito. Os resultados do gráfico estão disponíveis para comparação e dispostos na Tabela 02.

Tabela 02 – Envoltória dos momentos fletores máximos e mínimos ($a = 4m$). Fonte: Autor e Excel.

Ponto	$Mmín$	$Mmáx$	$MmínDP$	$MmáxDP$
0	0	0	-0,0010	0
1	1,6800	2,5305	2,2176	3,0681
2	3,3600	4,7680	4,4352	5,8432
3	5,0400	6,7305	6,6528	8,3433
4	6,7200	8,4480	8,8704	10,5984
5	8,4000	9,9625	11,0880	12,6505
6	10,0800	11,3280	13,3056	14,5536
7	11,6873	12,6105	15,4505	16,3737
8	12,8957	13,8880	17,1965	18,1888
9	13,9319	15,2505	18,7703	20,0889
10	14,8755	16,8000	20,2515	22,1760

Com essa comparação, evidencia-se que o software trata os resultados associados ao deslocamento prescrito de forma incoerente. Na ausência desse efeito, contudo, observa-se concordância entre os resultados do método numérico e do método analítico. Além das resoluções apresentadas neste trabalho, todo detalhamento dos exemplos consta nos apêndices.

5. CONCLUSÕES

O desenvolvimento apresentado consolidou uma abordagem analítica e numérica para a obtenção de linhas de influência (LI) em vigas com apoios elásticos (molas) e a avaliação de envoltórias considerando os efeitos de deslocamentos prescritos e de variações de temperatura. A etapa analítica foi estruturada com base no princípio dos trabalhos virtuais (PTV) e na aplicação do método das forças simplificado (MFS), enquanto a etapa numérica foi conduzida no software FTOOL, permitindo comparação direta entre resultados.

As comparações realizadas indicaram compatibilidade entre a formulação analítica e a modelagem numérica na determinação das LI do momento fletor nos casos estudados, sustentando a validade do procedimento adotado para estruturas com rigidez finita em apoios.

Na construção das envoltórias, verificou-se que deslocamentos prescritos e efeitos térmicos produzem alterações relevantes nos valores extremos dos momentos fletores máximos e mínimos. Além disso, a análise evidenciou uma limitação no pós-processamento do FTOOL para o caso com deslocamento prescrito, devido à indicação de ordenada não nula da linha de influência no apoio, comportamento não reproduzido pela formulação analítica. Sem deslocamento prescrito, a concordância entre as abordagens foi restabelecida. Esses resultados permitem concluir que o trabalho alcançou os objetivos de validar a formulação proposta e de qualificar os efeitos considerados nas envoltórias, bem como de delimitar restrições práticas de uso do software para a situação investigada.

Como continuidade, recomenda-se ampliar o conjunto de exemplos para maiores graus de hiperestaticidade, discretizar mais para reduzir a necessidade de interpolações na determinação de mínimos e realizar verificação cruzada com outras ferramentas computacionais para os casos envolvendo deslocamentos prescritos e temperatura.

6. AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, cujo apoio incondicional, presença constante e valores transmitidos foram essenciais ao longo de toda a minha trajetória acadêmica e pessoal, bem como à minha irmã e ao meu cunhado, pela compreensão, incentivo e suporte nos momentos em que a dedicação ao curso exigiu maiores esforços. Registro meu profundo reconhecimento ao orientador Rafael Araujo de Sousa, pela orientação técnica criteriosa, pela disponibilidade constante e pelas valiosas contribuições ao desenvolvimento deste trabalho, bem como pela amizade genuína que tornou esse percurso mais humano e significativo. Agradeço, ainda, ao curso de graduação em Engenharia Civil e ao seu corpo docente, pela formação acadêmica de elevado nível, bem como à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, pelas condições institucionais oferecidas para a realização deste trabalho. Por fim, agradeço a você, Natasha Corrêa Carneiro, minha esposa, por acreditar em mim de forma incondicional, mesmo diante das incertezas, e por ser fonte contínua de apoio, afeto e motivação.

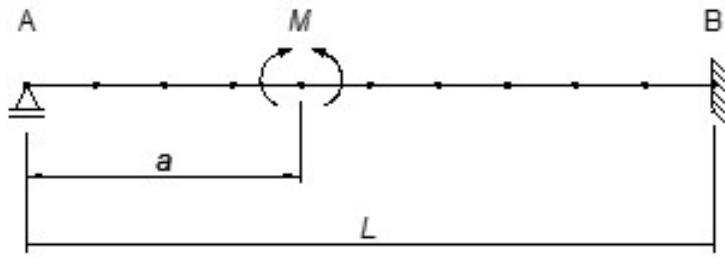
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- EL DEBS, M. K.; TAKEYA, T. **Introdução às pontes de concreto**. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2007.
- HIBBEKER, R. C. **Estática: mecânica para engenharia**. 14. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2017.
- LIMA, José Francisco de. **Pontes em concreto armado**. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 1983.
- SORIANO, H.L., **Análise de estruturas: formulações clássicas**, São Paulo, Livraria da Física, 2016.
- SOUZA, Rafael Araújo de. **Análise de estruturas a partir do princípio dos trabalhos virtuais: método das forças simplificado e método clássico dos deslocamentos**. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2025.

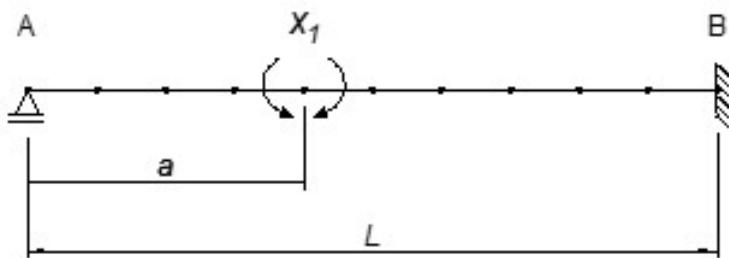
APÊNDICES

Posição da Carga	Tabela de Anger - Momentos Fletores																				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	-0,005	-0,010	-0,016	-0,021	-0,026	-0,031	-0,037	-0,042	-0,047	-0,052	-0,047	-0,042	-0,037	-0,031	-0,026	-0,021	-0,016	-0,010	-0,005	0
1	0	0,872	0,745	0,617	0,490	0,362	0,234	0,107	-0,021	-0,149	-0,276	-0,249	-0,221	-0,193	-0,166	-0,138	-0,111	-0,083	-0,055	-0,028	0
2	0	0,751	1,503	1,254	1,006	0,757	0,509	0,260	0,011	-0,237	-0,486	-0,437	-0,389	-0,340	-0,292	-0,243	-0,194	-0,146	-0,097	-0,049	0
3	0	0,633	1,267	1,900	1,533	1,167	0,800	0,434	0,067	-0,300	-0,666	-0,600	-0,533	-0,467	-0,400	-0,333	-0,267	-0,200	-0,133	-0,067	0
4	0	0,520	1,039	1,559	2,079	1,598	1,118	0,638	0,157	-0,323	-0,803	-0,723	-0,643	-0,562	-0,482	-0,402	-0,321	-0,241	-0,161	-0,080	0
5	0	0,412	0,824	1,235	1,647	2,059	1,471	0,883	0,294	-0,294	-0,882	-0,794	-0,706	-0,618	-0,529	-0,441	-0,353	-0,265	-0,176	-0,088	0
6	0	0,311	0,622	0,934	1,245	1,556	1,867	1,178	0,489	-0,200	-0,888	-0,800	-0,711	-0,622	-0,533	-0,444	-0,355	-0,267	-0,178	-0,089	0
7	0	0,219	0,439	0,658	0,877	1,096	1,316	1,535	0,754	-0,027	-0,807	-0,727	-0,646	-0,565	-0,484	-0,404	-0,323	-0,242	-0,162	-0,081	0
8	0	0,138	0,275	0,413	0,550	0,688	0,825	0,963	1,100	0,238	-0,625	-0,562	-0,500	-0,437	-0,375	-0,312	-0,250	-0,187	-0,125	-0,063	0
9	0	0,067	0,135	0,202	0,270	0,337	0,405	0,472	0,540	0,607	-0,326	-0,293	-0,261	-0,228	-0,195	-0,163	-0,130	-0,098	-0,065	-0,033	0
10	0	0,010	0,021	0,031	0,042	0,052	0,063	0,073	0,083	0,094	0,104	0,094	0,083	0,073	0,063	0,052	0,042	0,031	0,021	0,010	0
11	0	-0,033	-0,065	-0,098	-0,130	-0,163	-0,195	-0,228	-0,261	-0,293	-0,326	0,607	0,540	0,472	0,405	0,337	0,270	0,202	0,135	0,067	0
12	0	-0,063	-0,125	-0,187	-0,250	-0,312	-0,375	-0,437	-0,500	-0,562	-0,625	0,238	1,100	0,963	0,825	0,688	0,550	0,413	0,275	0,138	0
13	0	-0,081	-0,162	-0,242	-0,323	-0,404	-0,484	-0,565	-0,646	-0,727	-0,807	-0,027	0,754	1,535	1,316	1,096	0,877	0,658	0,439	0,219	0
14	0	-0,089	-0,178	-0,267	-0,355	-0,444	-0,533	-0,622	-0,711	-0,800	-0,888	-0,200	0,489	1,178	1,867	1,556	1,245	0,934	0,622	0,311	0
15	0	-0,088	-0,176	-0,265	-0,353	-0,441	-0,529	-0,618	-0,706	-0,794	-0,882	-0,294	0,294	0,883	1,471	2,059	1,647	1,235	0,824	0,412	0
16	0	-0,080	-0,161	-0,241	-0,321	-0,402	-0,482	-0,562	-0,643	-0,723	-0,803	-0,323	0,157	0,638	1,118	1,598	2,079	1,559	1,039	0,520	0
17	0	-0,067	-0,133	-0,200	-0,267	-0,333	-0,400	-0,467	-0,533	-0,600	-0,666	-0,300	0,067	0,434	0,800	1,167	1,533	1,900	1,267	0,633	0
18	0	-0,049	-0,097	-0,146	-0,194	-0,243	-0,292	-0,340	-0,389	-0,437	-0,486	-0,237	0,011	0,260	0,509	0,757	1,006	1,254	1,503	0,751	0
19	0	-0,028	-0,055	-0,083	-0,111	-0,138	-0,166	-0,193	-0,221	-0,249	-0,276	-0,149	-0,021	0,107	0,234	0,362	0,490	0,617	0,745	0,872	0
20	0	-0,005	-0,010	-0,016	-0,021	-0,026	-0,031	-0,037	-0,042	-0,047	-0,052	-0,047	-0,042	-0,037	-0,031	-0,026	-0,021	-0,016	-0,010	-0,005	0

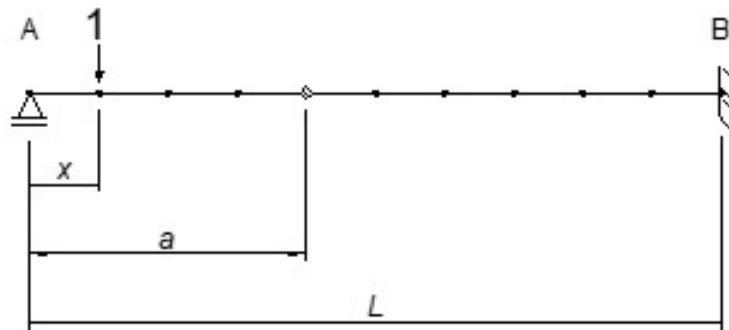
Exemplo 01



Sistema principal - SP



Reações de apoio - E0 - Situação 1



$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad H_{AE0} = H_{BE0} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_{AE0S1} + R_{BE0S1} - 1 = 0 \quad R_{AE0S1} + R_{BE0S1} = 1$$

$$\Sigma M_{ROT.ESQ.E0S1} = 0 \quad R_{AE0S1} \cdot a - 1 \cdot (a - x) = 0 \quad \text{solve, } R_{AE0S1} \frac{-x + a}{a}$$

$$\frac{-x + a}{a} + R_{BE0S1} = 1 \quad \text{solve, } R_{BE0S1} \frac{x}{a}$$

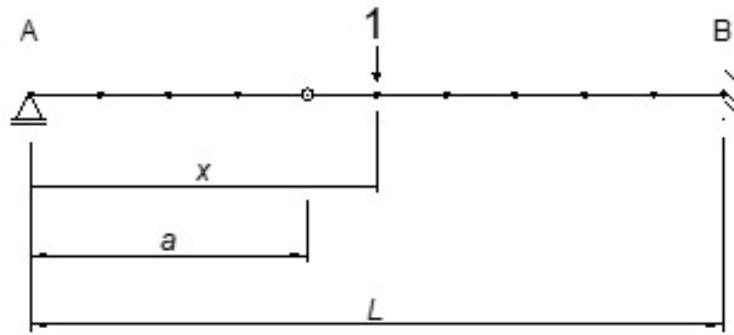
$$M_{ROT.DIR.E0S1} = 0 \quad \frac{x}{a} \cdot (L-a) - M_{BE0S1} = 0$$

$$\frac{x}{a} \cdot (L-a) - M_{BE0S1} \xrightarrow{\text{solve}, M_{BE0S1}} \frac{(-a+L) \cdot x}{a}$$

$$R_{AE0S1}(x, a, L) := \frac{(a-x)}{a} \quad R_{BE0S1}(x, a, L) := \frac{x}{a}$$

$$M_{1E0S1}(x, a, \xi) := \frac{(a-x)}{a} \cdot \xi \quad M_{2E0S1}(x, a, \xi) := \left(\frac{-x}{a} \right) \cdot \xi + x$$

Reações de apoio - E0 - Situação 2



$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad H_{AE12} = H_{BE12} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_{AE0S2} + R_{BE0S2} - 1 = 0 \quad R_{AE0S2} + R_{BE0S2} = 1$$

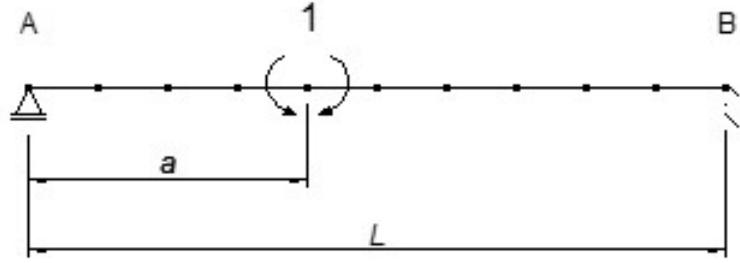
$$\Sigma M_{ROT.ESQ.E0S2} = 0 \quad R_{AE0S2} \cdot a = 0 \xrightarrow{\text{solve}, R_{AE0S2}} 0 \quad R_{BE0S2} = 1$$

$$M_{ROT.DIR.E0S2} = 0 \quad 0 = 1 \cdot (L-a) - 1 \cdot (x-a) - M_{BE0S2} \xrightarrow{\text{solve}, M_{BE0S2}} -x + L$$

$$R_{AE0S2} := 0 \quad R_{BE0S2} := 1 \quad M_{BE0S2}(x, L) := L - x \quad M_{BE0S2}(5, 10) = 5$$

$$M_{E0S2}(x, \xi) := -(\xi - x)$$

Estado - E1



$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad H_{AE1} = H_{BE1} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_{AE1} - R_{BE1} = 0 \quad R_{AE1} = R_{BE1}$$

$$\Sigma M_{ROT.ESQ.E1} = 0 \quad R_{AE1} \cdot a - 1 = 0 \xrightarrow{\text{solve}, R_{AE1}} \frac{1}{a} \quad R_{BE1} = \frac{1}{a}$$

$$\Sigma M_{ROT.DIR.E1} = 0 \quad -\frac{1}{a} \cdot (L - a) + M_{B1} - 1 = 0 \xrightarrow{\text{solve}, M_{B1}} \frac{L}{a}$$

$$R_{AE1}(a) := \frac{1}{a} \quad R_{BE1}(a) := -\frac{1}{a} \quad M_{B1}(a, L) := \frac{L}{a}$$

$$M_{E1}(a, \xi) := \left(\frac{\xi}{a} \right)$$

Condicionais para Situação 1 e 2

$$\delta_{10.S1}(x, a, L, EI) := \frac{1}{EI} \cdot \left(\int_0^x M_{E1}(a, \xi) \cdot M_{1E0S1}(x, a, \xi) d\xi + \int_x^L M_{E1}(a, \xi) \cdot M_{2E0S1}(x, a, \xi) d\xi \right) \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{-(x \cdot (a \cdot x^2 + (2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot a)))}{6 \cdot EI \cdot a^2}$$

$$\delta_{10.S1}(x, a, L, EI) := \frac{-(x \cdot (a \cdot x^2 + (2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot a)))}{6 \cdot EI \cdot a^2}$$

$$\delta_{10.S2}(x, a, L, EI) := \frac{1}{EI} \cdot \left(\int_x^L M_{E1}(a, \xi) \cdot M_{E0S2}(x, \xi) d\xi \right) \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{-(x - L)^2 \cdot (x + 2 \cdot L)}{6 \cdot EI \cdot a}$$

$$\delta_{11}(a, L, EI) := \frac{1}{EI} \cdot \left(\int_0^L M_{E1}(a, x) \cdot M_{E1}(a, x) dx \right) \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{L^3}{3 \cdot EI \cdot a^2}$$

Hiperestático X1 para Situações 1 e 2

$$X1_{S1}(x, a, L, EI) := \frac{-\delta_{10.S1}(x, a, L, EI)}{\delta_{11}(a, L, EI)}$$

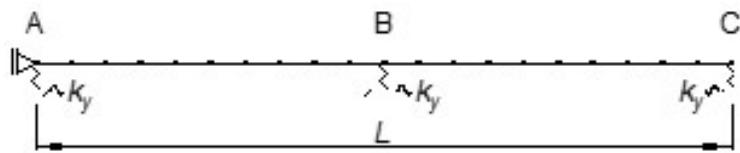
$$X1_{S2}(x, a, L, EI) := \frac{-\delta_{10.S2}(x, a, L, EI)}{\delta_{11}(a, L, EI)}$$

Dados do problema

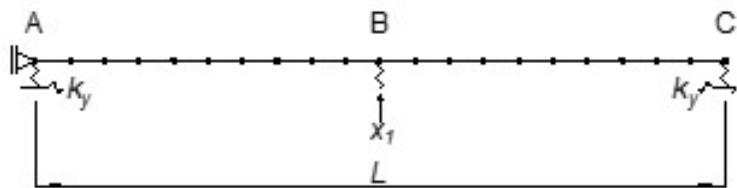
$$E := 210 \cdot 10^5 \quad I := \frac{0.2 \cdot 0.8^3}{12} \quad EI := E \cdot I \quad x := 0, 1..10$$

$$X1(x, a, L, EI) := \begin{cases} \begin{aligned} &\text{if } x \leq a \\ &\quad \left\| X1_{S1}(x, a, L, EI) \right. \\ &\text{else if } x > a \\ &\quad \left\| X1_{S2}(x, a, L, EI) \right. \\ &\text{else} \\ &\quad \left\| 0 \right. \end{aligned} & \quad X1(x, 4, 10, EI) = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.402 \\ 0.816 \\ 1.254 \\ 1.728 \\ 1.250 \\ 0.832 \\ 0.486 \\ 0.224 \\ 0.058 \\ 0.000 \end{bmatrix} \end{cases}$$

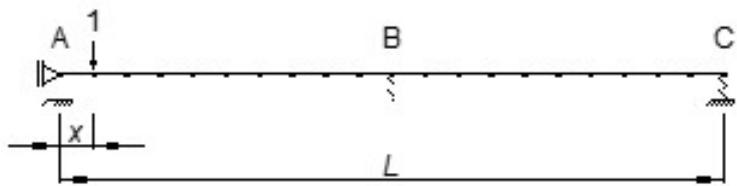
Exemplo 02



Sistema principal - SP



Estado E0



Reações de apoio - E0

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad H_{BE0} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_{AE0} + R_{CE0} - 1 = 0 \quad R_{AE0} + R_{CE0} = 1$$

$$\Sigma M_{CE0} = 0 \quad R_{AE0} \cdot (L) - 1 \cdot (L - x) = 0 \xrightarrow{\text{solve, } R_{AE0}} \frac{-x + L}{L}$$

$$\frac{-x + L}{L} + R_{CE0} = 1 \xrightarrow{\text{solve, } R_{CE0}} \frac{x}{L}$$

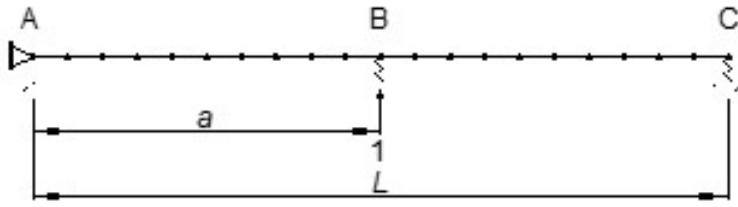
$$R_{AE0}(x, L) := \frac{L - x}{L} \quad R_{CE0}(x, L) := \frac{x}{L}$$

$$\Sigma M_{S1E0} = 0 \quad M_{S1E0} = R_{AE0}(x, L) \cdot \xi \xrightarrow{\text{simplify}} M_{S1E0} = -\frac{\xi \cdot x}{L} + \xi$$

$$\Sigma M_{S2E0} = 0 \quad M_{S2E0} = R_{AE0}(x, L) \cdot \xi - 1 \cdot (\xi - x) \xrightarrow{\text{simplify}} M_{S2E0} = x - \frac{\xi \cdot x}{L}$$

$$M_{SE0}(x, L, \xi) := \begin{cases} \text{if } \xi \leq x \\ \left\| -\frac{\xi \cdot x}{L} + \xi \right\| \\ \text{else} \\ \left\| x - \frac{\xi \cdot x}{L} \right\| \end{cases}$$

Reações de apoio - E1



$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad H_{BE1} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_{AE1} + R_{CE1} - 1 = 0 \quad R_{AE1} + R_{CE1} = 1$$

$$\Sigma M_{CE1} = 0 \quad -R_{AE1} \cdot (L) + 1 \cdot \left(\frac{L}{2} \right) = 0 \xrightarrow{\text{solve, } R_{AE1}} \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + R_{CE1} = 1 \xrightarrow{\text{solve, } R_{CE1}} \frac{1}{2}$$

$$R_{AE1} := \frac{1}{2} \quad R_{CE1} := \frac{1}{2}$$

$$\Sigma M_{S1E1} = 0 \quad M_{S1E1} = -R_{AE1} \cdot \xi$$

$$\Sigma M_{S2E1} = 0 \quad M_{S2E1} = -R_{AE1} \cdot \xi + 1 \cdot \left(\xi - \frac{L}{2} \right)$$

$$M_{SE1}(L, \xi) := \begin{cases} \text{if } \xi \leq \frac{L}{2} \\ \left\| \frac{-\xi}{2} \right\| \\ \text{else} \\ \left\| \frac{\xi - L}{2} \right\| \end{cases}$$

Dados do problema

$$E := 210 \cdot 10^5 \quad I := \frac{0.2 \cdot 0.8^3}{12} \quad EI := E \cdot I \quad k_y := 5 \cdot 10^4$$

Trabalho virtual externo

$$W_{10} = (1) \cdot \delta_{10} + R_{AE1} \cdot 0 + R_{CE1} \cdot 0$$

Energia de deformação elástica

$$U_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^x M_{SE0}(x, L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi + \int_x^L M_{SE0}(x, L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi \right] + (-R_{AE1}) \cdot \left(\frac{R_{AE0}(x, L)}{k_y} \right) + (-R_{CE1}) \cdot \left(\frac{R_{CE0}(x, L)}{k_y} \right) + 1 \cdot \frac{0}{k_y}$$

Pelo PTV, temos

$$\delta_{10}(x, L) := \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^x M_{SE0}(x, L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi + \int_x^L M_{SE0}(x, L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi \right] + (-R_{AE1}) \cdot \left(\frac{R_{AE0}(x, L)}{k_y} \right) + (-R_{CE1}) \cdot \left(\frac{R_{CE0}(x, L)}{k_y} \right) + 1 \cdot \frac{0}{k_y}$$

Trabalho virtual externo

$$W_{11} = (1) \cdot \delta_{11} + R_{AE1} \cdot 0 + R_{CE1} \cdot 0$$

Energia de deformação elástica

$$\delta_{11}(L) := \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^L M_{SE1}(L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi \right] + (-R_{CE1}) \cdot \left(\frac{-R_{CE1}}{k_y} \right) + \frac{1}{k_y}$$

$$U_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^L M_{SE1}(L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi \right] + (-R_{AE1}) \cdot \left(\frac{-R_{AE1}}{k_y} \right) + (-R_{CE1}) \cdot \left(\frac{-R_{CE1}}{k_y} \right) + \frac{1}{k_y}$$

Pelo PTV, temos

$$\delta_{11}(L) := \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^L M_{SE1}(L, \xi) \cdot M_{SE1}(L, \xi) d\xi \right] + (-R_{AE1}) \cdot \left(\frac{-R_{AE1}}{k_y} \right) + (-R_{CE1}) \cdot \left(\frac{-R_{CE1}}{k_y} \right) + \frac{1}{k_y}$$

$$X1(x, L) := \frac{-\delta_{10}(x, L)}{\delta_{11}(L)}$$

Reações de apoio - Reais

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad H_B = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_A + R_B + R_C - 1 = 0 \quad R_A + R_B + R_C = 1$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad R_A \cdot L + R_B(x, L) \cdot \frac{L}{2} - 1 \cdot (L - x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}, R_A} \frac{-(L \cdot R_B(x, L)) + (2 \cdot L - 2 \cdot x)}{2 \cdot L}$$

$$R_A(x, L) := \frac{-(2 \cdot x) + (2 - X1(x, L)) \cdot L}{2 \cdot L} \quad R_B(x, L) := X1(x, L)$$

$$R_C(x, L) := 1 - (R_A(x, L) + R_B(x, L))$$

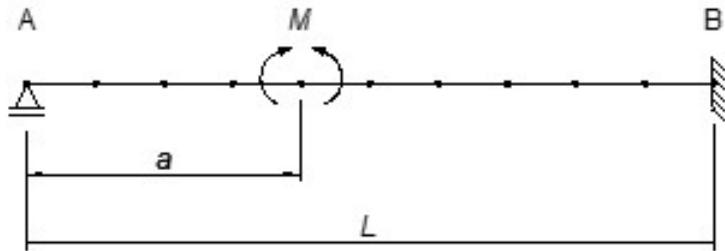
$$M_S(x, L, \xi) := \begin{cases} \text{if } 0 \leq \xi \leq \frac{L}{2} \\ \quad \begin{cases} \text{if } 0 \leq \xi \leq x \\ \quad \left\| R_A(x, L) \cdot \xi \right. \\ \text{else if } x \leq \xi \leq \frac{L}{2} \\ \quad \left\| R_A(x, L) \cdot \xi - 1 \cdot (\xi - x) \right. \\ \text{else} \\ \quad \left\| R_A(x, L) \cdot \xi - 1 \cdot (\xi - x) + R_B(x, L) \cdot \left(\xi - \frac{L}{2} \right) \right. \end{cases} \\ \text{else if } \frac{L}{2} \leq \xi \leq L \\ \quad \begin{cases} \text{if } 0 \leq \xi \leq \frac{L}{2} \\ \quad \left\| R_A(x, L) \cdot \xi \right. \\ \text{else if } \frac{L}{2} \leq \xi \leq x \\ \quad \left\| R_A(x, L) \cdot \xi + R_B(x, L) \cdot \left(\xi - \frac{L}{2} \right) \right. \\ \text{else} \\ \quad \left\| R_A(x, L) \cdot \xi - 1 \cdot (\xi - x) + R_B(x, L) \cdot \left(\xi - \frac{L}{2} \right) \right. \end{cases} \end{cases}$$

$x := 0, 1 \dots 20$

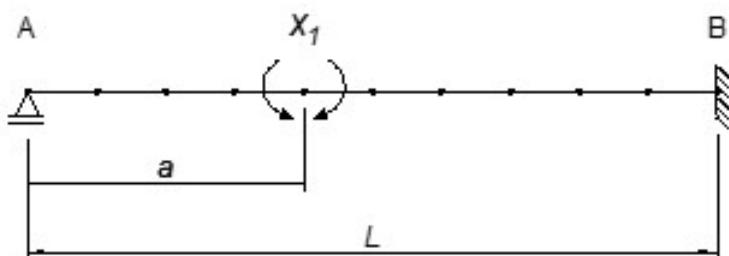
$$M_S(x, 20, 1) = \begin{bmatrix} -0.005 \\ 0.872 \\ 0.751 \\ 0.633 \\ 0.520 \\ 0.412 \\ 0.311 \\ 0.219 \\ 0.138 \\ 0.067 \\ 0.010 \\ -0.033 \\ -0.062 \\ -0.081 \\ -0.089 \\ -0.088 \\ -0.080 \\ -0.067 \\ -0.049 \\ -0.028 \\ -0.005 \end{bmatrix}$$

Exemplo 03

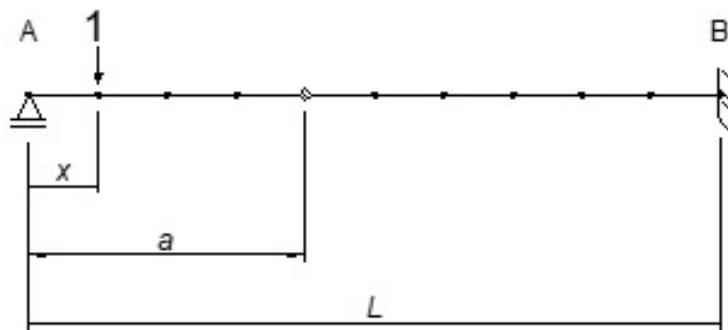
Retomada do Exemplo 01



Sistema principal - SP



Reações de apoio - E0 - Situação 1



$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad H_{AE0} = H_{BE0} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_{AE0S1} + R_{BE0S1} - 1 = 0 \quad R_{AE0S1} + R_{BE0S1} = 1$$

$$\Sigma M_{ROT.ESQ.E0S1} = 0 \quad R_{AE0S1} \cdot a - 1 \cdot (a - x) = 0 \quad \xrightarrow{\text{solve}, R_{AE0S1}} \frac{-x + a}{a}$$

$$\frac{-x + a}{a} + R_{BE0S1} = 1 \quad \xrightarrow{\text{solve}, R_{BE0S1}} \frac{x}{a}$$

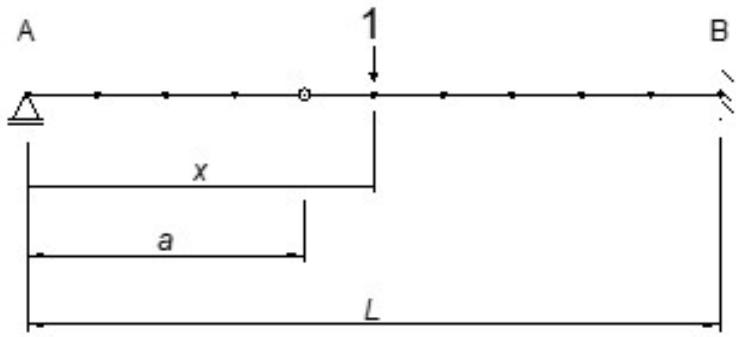
$$M_{ROT.DIR.E0S1} = 0 \quad \frac{x}{a} \cdot (L-a) - M_{BE0S1} = 0$$

$$\frac{x}{a} \cdot (L-a) - M_{BE0S1} \xrightarrow{\text{solve}, M_{BE0S1}} \frac{(-a+L) \cdot x}{a}$$

$$R_{AE0S1}(x, a, L) := \frac{(a-x)}{a} \quad R_{BE0S1}(x, a, L) := \frac{x}{a}$$

$$M_{1E0S1}(x, a, \xi) := \frac{(a-x)}{a} \cdot \xi \quad M_{2E0S1}(x, a, \xi) := \left(\frac{-x}{a} \right) \cdot \xi + x$$

Reações de apoio - E0 - Situação 2



$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad H_{AE12} = H_{BE12} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_{AE0S2} + R_{BE0S2} - 1 = 0 \quad R_{AE0S2} + R_{BE0S2} = 1$$

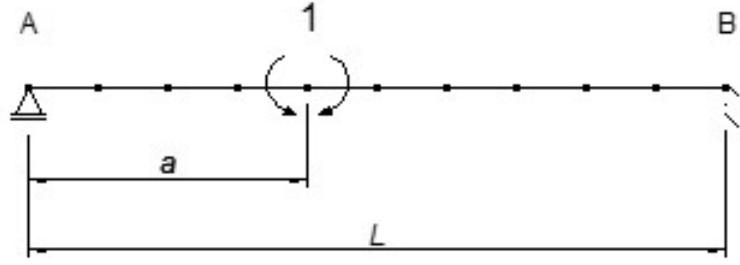
$$\Sigma M_{ROT.ESQ.E0S2} = 0 \quad R_{AE0S2} \cdot a = 0 \xrightarrow{\text{solve}, R_{AE0S2}} 0 \quad R_{BE0S2} = 1$$

$$M_{ROT.DIR.E0S2} = 0 \quad 0 = 1 \cdot (L-a) - 1 \cdot (x-a) - M_{BE0S2} \xrightarrow{\text{solve}, M_{BE0S2}} -x + L$$

$$R_{AE0S2} := 0 \quad R_{BE0S2} := 1 \quad M_{BE0S2}(x, L) := L - x \quad M_{BE0S2}(5, 10) = 5$$

$$M_{E0S2}(x, \xi) := -(\xi - x)$$

Estado - E1



$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad H_{AE1} = H_{BE1} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_{AE1} - R_{BE1} = 0 \quad R_{AE1} = R_{BE1}$$

$$\Sigma M_{ROT.ESQ.E1} = 0 \quad R_{AE1} \cdot a - 1 = 0 \xrightarrow{\text{solve}, R_{AE1}} \frac{1}{a} \quad R_{BE1} = \frac{1}{a}$$

$$\Sigma M_{ROT.DIR.E1} = 0 \quad -\frac{1}{a} \cdot (L-a) + M_{B1} - 1 = 0 \xrightarrow{\text{solve}, M_{B1}} \frac{L}{a}$$

$$R_{AE1}(a) := \frac{1}{a} \quad R_{BE1}(a) := -\frac{1}{a} \quad M_{B1}(a, L) := \frac{L}{a}$$

$$M_{E1}(a, \xi) := \left(\frac{\xi}{a} \right)$$

Condicionais para Situação 1 e 2

$$\delta_{10.S1}(x, a, L, EI) := \frac{1}{EI} \cdot \left(\int_0^x M_{E1}(a, \xi) \cdot M_{1E0S1}(x, a, \xi) d\xi + \int_x^L M_{E1}(a, \xi) \cdot M_{2E0S1}(x, a, \xi) d\xi \right) \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{-(x \cdot (a \cdot x^2 + (2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot a)))}{6 \cdot EI \cdot a^2}$$

$$\delta_{10.S1}(x, a, L, EI) := \frac{-(x \cdot (a \cdot x^2 + (2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot a)))}{6 \cdot EI \cdot a^2}$$

$$\delta_{10.S2}(x, a, L, EI) := \frac{1}{EI} \cdot \left(\int_x^L M_{E1}(a, \xi) \cdot M_{E0S2}(x, \xi) d\xi \right) \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{-(x-L)^2 \cdot (x+2 \cdot L)}{6 \cdot EI \cdot a}$$

$$\delta_{11}(a, L, EI) := \frac{1}{EI} \cdot \left(\int_0^L M_{E1}(a, x) \cdot M_{E1}(a, x) dx \right) \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{L^3}{3 \cdot EI \cdot a^2}$$

Hiperestático X1 para Situações 1 e 2

$$X1_{S1}(x, a, L, EI) := \frac{-\delta_{10.S1}(x, a, L, EI)}{\delta_{11}(a, L, EI)}$$

$$X1_{S2}(x, a, L, EI) := \frac{-\delta_{10.S2}(x, a, L, EI)}{\delta_{11}(a, L, EI)}$$

$$LI_M(x, a, L, EI) := \begin{cases} X1_{S1}(x, a, L, EI) & \text{if } x \leq a \\ X1_{S2}(x, a, L, EI) & \text{else if } x > a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Dados efeitos térmicos e deslocamento prescrito

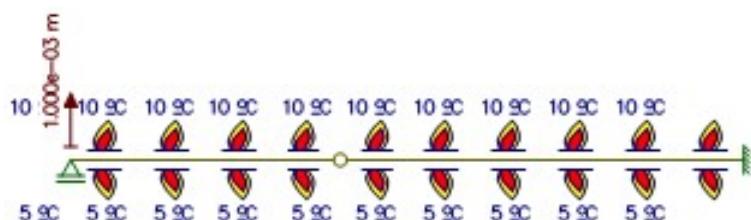
$$h := 0.8 \quad b := 0.2 \quad I := \frac{b \cdot h^3}{12} = 8.533 \cdot 10^{-3} \quad E := 210 \cdot 10^5 \quad EI := E \cdot I$$

$$\Delta_{ts} := 10 \quad \Delta_{ti} := 5 \quad \Delta_t := \frac{\Delta_{ts} + \Delta_{ti}}{2} \quad g_t := \frac{\Delta_{ti} - \Delta_{ts}}{h} \quad \alpha := 10^{-5} \quad L := 10$$

$$D_{py} := 0.001 \quad T_{Tipo} := 1$$

Para o cálculo da envoltória obtemos um novo Estado E0

Reações de Apoio - E0



Não geram esforços = 0

Trabalho virtual externo

$$w_{10} = R_{AE1}(a) \cdot D_{py} + (\theta_{ESQ.ROT.E0} - \theta_{DIR.ROT.E0}) \cdot 1 = R_{AE1}(a) \cdot D_{py} + \delta_{10} \cdot 1$$

Energia de deformação elástica

$$U_{10} = \frac{0}{EI} + \alpha \cdot \Delta_t \cdot L \cdot 0 + \alpha \cdot g_t \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{a}$$

Pelo PTV

$$\delta_{10.DP}(a, L, EI) := - (R_{AE1}(a) \cdot D_{py}) + \alpha \cdot g_t \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{a}$$

$$\delta_{10}(a, L, EI) := \alpha \cdot g_t \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{a}$$

Hiperestático X1 sem e com o efeito do deslocamento prescrito

$$X1_{NOVO}(a, L, EI) := \frac{-\delta_{10}(a, L, EI)}{\delta_{11}(a, L, EI)}$$

$$X1_{NOVO.DP}(a, L, EI) := \frac{-\delta_{10.DP}(a, L, EI)}{\delta_{11}(a, L, EI)}$$

Determinação envoltória dos momentos fletores mínimos sem D_{py}

$$M_{MIN.0} := 0 + 0 \cdot T_{Tipo} = 0.0000$$

$$M_{MIN.1} := X1_{NOVO}(1, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipo} = 1.6800$$

$$M_{MIN.2} := X1_{NOVO}(2, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipo} = 3.3600$$

$$M_{MIN.3} := X1_{NOVO}(3, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipo} = 5.0400$$

$$M_{MIN.4} := X1_{NOVO}(4, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipo} = 6.7200$$

$$M_{MIN.5} := X1_{NOVO}(5, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipo} = 8.4000$$

$$M_{MIN.6} := X1_{NOVO}(6, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipo} = 10.0800$$

$$M_{MIN.7} := X1_{NOVO}(7, L, EI) + (-0.0727) \cdot T_{Tipo} = 11.6873$$

$$M_{MIN.8} := X1_{NOVO}(8, L, EI) + (-0.5443) \cdot T_{Tipo} = 12.8957$$

$$M_{MIN.9} := X1_{NOVO}(9, L, EI) + (-1.1881) \cdot T_{Tipto} = 13.9319$$

$$M_{MIN.10} := X1_{NOVO}(10, L, EI) + (-1.9245) \cdot T_{Tipto} = 14.8755$$

Determinação envoltória dos momentos fletores mínimos com D_{py}

$$M_{MIN.0} := 0 + 0 \cdot T_{Tipto} = 0.0000$$

$$M_{MIN.1} := X1_{NOVO.DP}(1, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipto} = 2.2176$$

$$M_{MIN.2} := X1_{NOVO.DP}(2, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipto} = 4.4352$$

$$M_{MIN.3} := X1_{NOVO.DP}(3, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipto} = 6.6528$$

$$M_{MIN.4} := X1_{NOVO.DP}(4, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipto} = 8.8704$$

$$M_{MIN.5} := X1_{NOVO.DP}(5, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipto} = 11.0880$$

$$M_{MIN.6} := X1_{NOVO.DP}(6, L, EI) + 0 \cdot T_{Tipto} = 13.3056$$

$$M_{MIN.7} := X1_{NOVO.DP}(7, L, EI) + (-0.0727) \cdot T_{Tipto} = 15.4505$$

$$M_{MIN.8} := X1_{NOVO.DP}(8, L, EI) + (-0.5443) \cdot T_{Tipto} = 17.1965$$

$$M_{MIN.9} := X1_{NOVO.DP}(9, L, EI) + (-1.1881) \cdot T_{Tipto} = 18.7703$$

$$M_{MIN.10} := X1_{NOVO.DP}(10, L, EI) + (-1.9245) \cdot T_{Tipto} = 20.2515$$

Determinação envoltória dos momentos fletores máximos

$$M_{MAX}(a, L, EI) := \begin{cases} \text{if } a \neq 0 \\ \quad \left\| LI_M(a, a, L, EI) + X1_{NOVO}(a, L, EI) \right\| \\ \text{else} \\ \quad \left\| 0 \right\| \end{cases}$$

$$M_{MAX.DP}(a, L, EI) := \begin{cases} \text{if } a \neq 0 \\ \quad \left\| LI_M(a, a, L, EI) + X1_{NOVO.DP}(a, L, EI) \right\| \\ \text{else} \\ \quad \left\| 0 \right\| \end{cases}$$

$a := 1, 2..10$

$$M_{MAX}(a, L, EI) = \begin{bmatrix} 2.5305 \\ 4.7680 \\ 6.7305 \\ 8.4480 \\ 9.9625 \\ 11.3280 \\ 12.6105 \\ 13.8880 \\ 15.2505 \\ 16.8000 \end{bmatrix} \quad M_{MAX.DP}(a, L, EI) = \begin{bmatrix} 3.0681 \\ 5.8432 \\ 8.3433 \\ 10.5984 \\ 12.6505 \\ 14.5536 \\ 16.3737 \\ 18.1888 \\ 20.0889 \\ 22.1760 \end{bmatrix}$$