UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS

ALANIS EDUARDA FERREIRA DOS SANTOS

PADRÕES EM INTEGRAIS

TRÊS LAGOAS
2024

ALANIS EDUARDA FERREIRA DOS SANTOS

PADRÕES EM INTEGRAIS

Trabalho de conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul Campus de Três Lagoas como parte das exigências do curso de Licenciatura em Matemática, para obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Banca examinadora:

Fernando Pereira de Souza (orientador)

Gilberto Rodrigues dos Santos

Allan Edley Ramos de Andrade

TRÊS LAGOAS

2024

RESUMO

Neste trabalho, exploraremos a temática de padrões em integrais de determinadas funções. Para introduzir o conceito, apresentaremos exemplos cujas resoluções realizaremos de duas formas: utilizando sistemas algébricos computacionais, como SYMBOLAB e WOLFRAM, e por meio de métodos convencionais de integração, que desenvolveremos passo a passo de forma algébrica. Após a resolução de cada exemplo, identificaremos os padrões apresentados nas soluções, a fim de estabelecer um raciocínio lógico e consistente. Com base nisso, mostraremos que os padrões observados são, de fato, válidos para os casos gerais correspondentes, permitindo uma análise mais detalhada sobre o comportamento padrão das integrais dessas funções.

Palavras-chave: Integrais; Padrões; Funções.

ABSTRACT

In this paper, we will explore the subject of patterns in integrals of certain functions. To introduce the concept, we will present examples which we will solve in two ways: using computer algebraic systems, such as SYMBOLAB and WOLFRAM, and using conventional integration methods, which we will develop step by step algebraically. After solving each example, we will identify the patterns presented in the solutions in order to establish logical and consistent reasoning. Based on this, we will show that the observed patterns are in fact valid for the corresponding general cases, allowing for a more detailed analysis of the standard behavior of the integrals of these functions.

Keywords: Integrals; Patterns; Functions.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A integração é uma ferramenta fundamental no cálculo que permite solucionar equações diferenciais, tendo ainda aplicações na física, engenharia e em diversas outras áreas. Apesar de ser uma ferramenta versátil, existem casos em que não é possível encontrar uma solução direta para determinada integral. Nesse contexto, identificar padrões em integrais torna-se indispensável, especialmente em situações que envolvem o produto ou o quociente de diferentes funções.

Neste trabalho, foram analisadas soluções de determinadas integrais realizadas por sistemas algébricos computacionais, como Symbolab, Wolfram e ChatGPT. Tais integrais são oriundas do "Projeto Descoberta: Padrões em Integrais", presente na página 513 do livro Cálculo Volume I, de James Stewart.

Após as análises mencionadas, foram aplicadas técnicas de integração, como substituição e integração por partes, com o apoio dos livros de Guidorizzi e Leithold, para encontrar padrões em diferentes exemplos. O objetivo foi otimizar as soluções, eliminando a necessidade de aplicar as mesmas técnicas repetidamente, demonstrando, assim, como o reconhecimento desses padrões pode tornar o processo de resolução mais direto. Por fim, mostramos que, para todos os casos gerais apresentados em cada capítulo da pesquisa, é possível identificar um padrão geral válido para todas as funções consideradas.

Para este estudo, o trabalho foi dividido em quatro capítulos, seguindo a cronologia estabelecida no Projeto Descoberta. No primeiro capítulo, analisam-se os padrões encontrados em integrais de funções racionais; nos capítulos seguintes, exploram-se os padrões em funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais, respectivamente.

CAPÍTULO 1: PADRÕES EM INTEGRAIS DE FUNÇÕES RACIONAIS

Neste capítulo, utilizaremos Frações Parciais e o Método de Substituição para analisar os padrões presentes em integrais do tipo $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$. Com o auxílio de sistemas algébricos computacionais e conhecimentos matemáticos, aplicaremos a decomposição em frações parciais aos exemplos apresentados, com o objetivo de simplificar as integrais e facilitar sua resolução, permitindo uma análise mais clara de suas soluções.

O método de frações parciais e substituição, amplamente utilizado ao longo deste capítulo, pode ser consultado no Capítulo 7, página 470, do livro *Cálculo Volume I*, de James Stewart.

Exemplo 1.1 *Encontre a integral*

$$\int \frac{1}{x^2 - x - 2}\,dx.$$

Solução: Primeiro, reescrevemos o integrando como soma de funções racionais cujo denominador é um polinômio de primeiro grau.

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}. \tag{1.1}$$

Para determinar os valores de A e B multiplicaremos ambos os lados da equação (1.1) pelo produto $(x+1)(x-2)$, obtendo:

$$1 = A(x-2) + B(x+1), \tag{1.2}$$

aplicando a distributiva no lado direito da equação (1.2) e colocando x em evidência posteriormente, temos:

$$1 = Ax - 2A + Bx + B$$

$$1 = (A+B)x - 2A + B.$$

Dessa forma, da igualdade de polinômios, temos:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A - B = 0 \\ -2A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow -3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}.$$

Substituindo $A = -\frac{1}{3}$ em $A + B = 0$ teremos $B = \frac{1}{3}$, e assim

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-2| + C,$$

onde C é a constante de integração.

1.1 INTEGRAIS DO TIPO $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx$

Para avaliar a integral do tipo $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx$, é usado o método de frações parciais. Primeiramente utilizaremos um sistema algébrico computacional para avaliar algumas integrais do tipo:

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx,$$

com $a \neq b$.

Exemplo 1.2: *Utilize um sistema algébrico computacional para avaliar as seguintes integrais*

a) $\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx$

b) $\int \frac{1}{(x+1)(x+5)}dx$

c) $\int \frac{1}{(x+2)(x-5)}dx$

Para avaliar as integrais citadas, utilizamos o sistema algébrico Symbolab e assim obtemos as seguintes respostas:

Figura 1.1: Integral de $1/(x+2)(x+3)$

$$\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx$$

Solução

$$\ln|x+2| - \ln|x+3| + C$$

Fonte: Autor

Figura 1.2: Integral de $1/(x+1)(x+5)$

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+5)}dx$$

Solução

$$\frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+5| + C$$

Fonte: Autor

Figura 1.3: Integral de $1/(x+2)(x-5)$

$$\int \frac{1}{(x+2)(x-5)}dx$$

Solução

$$-\frac{1}{7}\ln|x+2| + \frac{1}{7}\ln|x-5| + C$$

Fonte: Autor

Analisando as soluções das integrais no Exemplo 1.2 é possível observar alguns padrões:

- O termo $\left(\frac{1}{b-a}\right)$ está sempre multiplicando todas as soluções;

- As soluções são compostas pela diferença entre $\ln|x+a|$ e $\ln|x+b|$;
- A argumentação do logaritmo (ln) será exatamente as funções presentes no denominador da fração que aparece na integral.

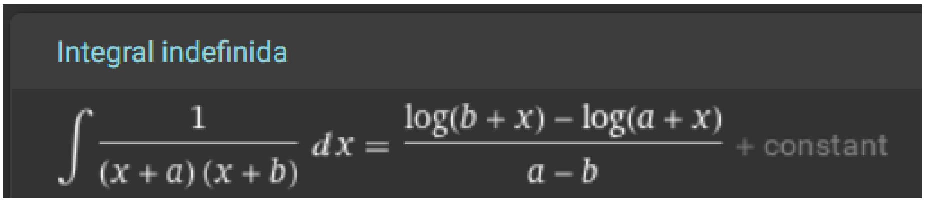
Exemplo 1.3*: Utilize um sistema algébrico computacional para avaliar a integral*

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx,$$

com $a \neq b$.

Solução: Utilizando o sistema algébrico Wolfram, obtemos o seguinte resultado:

Figura 1.4: Integral de $1/(x+a)(x+b)$



Fonte: o autor

Agora, provaremos o Exemplo 1.3 utilizando o método de frações parciais. Começaremos simplificando a função dada na integral através da decomposição em frações parciais.

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}. \tag{1.3}$$

Para determinar os valores de A e B multiplicaremos ambos os lados da equação (1.3) pelo produto dos denominadores, $(x+a)(x+b)$, obtendo:

$$1 = A(x+b) + B(x+a), \tag{1.4}$$

aplicando a distributiva no lado direito da equação (1.4) e colocando x em evidência posteriormente, obtemos:

$$1 = Ax + Ab + Bx + B$$

$$1 = (A + B)x + Ab + Ba.$$

Agora, igualando os coeficientes de x e do termo constante, teremos respectivamente:

$$A + B = 0, \tag{1.5}$$

$$Ab + Ba = 1. \tag{1.6}$$

De (1.5), temos $B = -A$, substituindo em (1.6), obtemos:

$$Ab - Aa = 1$$

$$A(b - a) = 1$$

$$A = \frac{1}{b - a}.$$

Assim $B = -\frac{1}{b-a}$. Portanto,

$$\int \frac{1}{(x + a)(x + b)}\, dx = \int \frac{\frac{1}{b - a}}{x + a} + \frac{-\frac{1}{b - a}}{x + b}\, dx$$

$$= \frac{1}{b - a} \int \frac{1}{x + a}\, dx - \frac{1}{b - a} \int \frac{1}{x + b}\, dx$$

$$= \frac{1}{b - a} \ln|x + a| - \frac{1}{b - a} \ln|x + b| + C,$$

onde C é a constante de integração.

Agora utilizando um sistema algébrico computacional avaliaremos a integral do tipo

$$\int \frac{1}{(x + a)(x + b)} dx,$$

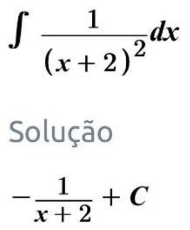
com $a = b$.

Exemplo 1.4 *Utilize um sistema algébrico computacional para avaliar a seguinte integral*

$$\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx.$$

Solução: Para avaliar a integral citada, utilizamos o sistema algébrico Symbolab e assim obtemos:

Figura 1.5: Integral de $1/(x+2)^2$



Fonte: Autor

Agora analisando o Exemplo (1.4) algebricamente, utilizando o método de substituição.

Seja $u = x + 2$, então $du = dx$. Logo,

$$\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{1}{(u)^2}\,du = \int u^{-2}du = -\frac{1}{u} + C.$$

Substituindo $u = x + 2$, encontramos:

$$\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{x+2} + C.$$

onde C é a constante de integração.

Observando os padrões mencionados anteriormente, podemos concluir que, no caso específico em que $a = b$, a solução da integral $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx$ se simplifica, resultando na expressão $-\frac{1}{(x+a)} + C$.

CAPÍTULO 2: PADRÕES EM INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo, utilizaremos identidades trigonométricas e o método de substituição para resolver integrais do tipo $\int \operatorname{sen} ax \cos bx \; dx$. O foco será analisar os padrões presentes nos exemplos, com o auxílio de sistemas algébricos computacionais. As identidades trigonométricas serão empregadas para simplificar as expressões, enquanto o método de substituição auxiliará na resolução das integrais.

O método citado acima e as identidades utilizadas no decorrer deste capítulo podem ser encontradas a partir da página 470, Capítulo 7 do livro Cálculo Volume I, de James Stewart.

Exemplo 2.1*: Encontre a integral*

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \; dx.$$

Solução: É possível avaliar essa integral se a simplificarmos, usando a seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Dessa forma podemos reescrever o integrando, como sendo:

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x,$$

então, temos:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} x \cos x \; dx &= \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + C \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

onde C é a constante de integração.

Note que o Exemplo 2.1 pode ser resolvido utilizando a técnica da substituição que veremos no Exemplo 2.2.

Exemplo 2.2*: Encontre a integral*

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \ dx$$

pela técnica da substituição.

Solução: Podemos avaliar a integral substituindo $u = sen(x)$, assim $du = cos(x)\ dx$ e

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \ dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} = \frac{sen^2(x)}{2} + C,$$

onde C é a constante de integração.

2.1 INTEGRAIS DO TIPO $\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx$

Para avaliar a integral do tipo $\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx$, é usada a seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)] \qquad (2.1)$$

Para aplicar essa identidade com mais clareza na integral, vamos demonstrá-la a seguir.

$$\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)] =$$

$$= \frac{1}{2}[(\operatorname{sen} A \cos B - \operatorname{sen} B \cos A) + (\operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A]$$

$$= \frac{1}{2}[2 \operatorname{sen} A \cos B]$$

$$= \operatorname{sen} A \cos B.$$

Primeiramente utilizaremos um sistema algébrico computacional para avaliar algumas integrais do tipo

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx.$$

Exemplo 2.3*: Utilize um sistema algébrico computacional para avaliar as seguintes integrais*

a) $\int \operatorname{sen} x \cos 2x \, dx$

b) $\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x \, dx$

c) $\int \operatorname{sen} 8x \cos 3x \, dx$

Para avaliar as integrais citadas, utilizamos o sistema algébrico Symbolab e assim obtemos as seguintes respostas:

Figura 2.1: Integral de $sen(x)\ cos(2x)$

$$\int \sin(x)\cos(2x)\,dx$$

Solução

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)+\cos(x)\right)+C$$

Fonte: Autor

Figura 2.2: Integral de $sen(3x)\ cos(7x)$

$$\int \sin(3x)\cos(7x)\,dx$$

Solução

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos(10x)+\frac{1}{4}\cos(4x)\right)+C$$

Fonte: Autor

Figura 2.3: Integral de $sen(8x)\ cos(3x)$

$$\int \sin(8x)\cos(3x)\,dx$$

Solução

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{11}\cos(11x)-\frac{1}{5}\cos(5x)\right)+C$$

Fonte: Autor

Analisando as soluções das integrais no Exemplo 2.3 e conhecendo as identidades trigonométricas dadas em (2.1), é possível observar alguns padrões:

- O número $\left(\frac{1}{2}\right)$ está sempre multiplicando todas as soluções, sendo colocado em evidência para uma simplificação mais completa;
- As soluções envolvem apenas a função cosseno;
- Cada argumento dos cossenos refere-se à soma e subtração sucessivas entre os argumentos das funções trigonométricas seno e cosseno presentes no integrando;

- As frações multiplicadas à frente de cada função trigonométrica fundamental (cosseno) correspondem a $\frac{1}{A}$ e $\frac{1}{B}$, onde A e B são os coeficientes presentes nos argumentos dos cossenos;

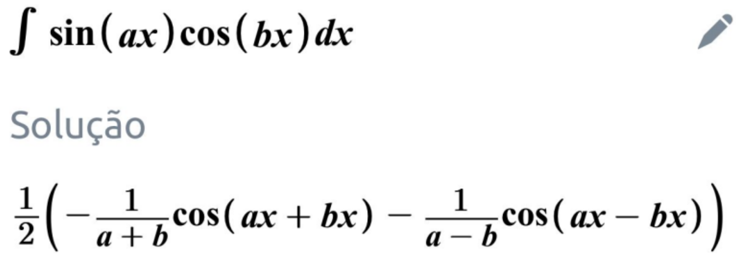
- No resultado, temos uma soma entre as funções cosseno; no entanto, os sinais podem variar de acordo com os argumentos dessas funções trigonométricas, uma vez que utilizamos identidades como $sen(-A) = -sen(A)$ e $cos\,(-A) = cos\,(A)$.

Exemplo 2.4*: Utilize um sistema algébrico computacional para avaliar a integral*

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx.$$

Solução: Utilizando o sistema algébrico Symbolab, obtemos o seguinte resultado:

Figura 2.4: Integral de $sen(ax)\ cos(bx)$



Fonte: Autor

Provaremos agora o Exemplo 2.4, utilizando técnicas de integração. De (2.1), temos:

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx = \int \frac{1}{2}[\operatorname{sen}((a+b)x) + \operatorname{sen}((a-b)x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{sen}((a+b)x)dx + \int \operatorname{sen}((a-b)x)\, dx\right]. \qquad (2.2)$$

Vamos calcular separadamente as integrais em (2.2). Primeiro, vamos calcular a integral

$$\int \operatorname{sen}((a+b)x)\, dx.$$

Utilizando integração por substituição, tomamos $u = (a+b)x$, teremos

$$du = (a+b)dx,$$

e assim:

$$\int \operatorname{sen}((a+b)x)\,dx = \int \operatorname{sen} u \frac{du}{a+b} = \frac{1}{a+b}\int \operatorname{sen} u\, du$$

$$= \frac{1}{a+b}(-\cos u) + C = \frac{-1}{a+b}\cos((a+b)x) + C, \qquad (2.3)$$

Agora, analisamos a integral:

$$\int \operatorname{sen}((a-b)x)\,dx.$$

Tomando $u = (a-b)x$, teremos $du = (a-b)dx$ e assim, obtemos:

$$\int \operatorname{sen}((a-b)x)\,dx = \int \operatorname{sen} u \frac{du}{a-b} = \frac{1}{a-b}\int \operatorname{sen} u\, du$$

$$= \frac{1}{a-b}(-\cos u) + C_1 = \frac{-1}{a-b}\cos((a-b)x) + C_1. \qquad (2.4)$$

Substituindo (2.3), (2.4) em (2.2), obtemos:

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{a+b}\cos((a+b)x) - \frac{1}{a-b}\cos((a-b)x)\right] + C_2.$$

onde $C_2 = \frac{C+C_1}{2}$, sendo a constante de integração.

CAPÍTULO 3: PADRÕES EM INTEGRAIS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Nesta seção, analisaremos o padrão presente em algumas integrais do tipo $\int x^n \ln x \, dx$, por meio de sistemas algébricos computacionais e cálculos tradicionais, utilizando o método de integração por partes, cuja fórmula é dada por

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du.$$

Tal método e suas especificidades estão presentes na página 471 do livro Cálculo Volume I, de James Stewart.

Exemplo 3.1: *Avalie a integral*

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx.$$

Solução: Note que $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \ln x \; dx. \tag{3.1}$$

Tomando $u = \ln x$ e $dv = x^{-2} \, dx$, obtemos:

$$du = \frac{1}{x} \, dx, \qquad v = -x^{-1}.$$

Integrando por partes a equação (3.1), teremos:

$$\begin{aligned}\int x^{-2} \ln x \, dx &= (-x^{-1}) \cdot \ln x - \int (-x^{-1}) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= (-x^{-1}) \cdot \ln x + \int x^{-2} \; dx \\ &= -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C,\end{aligned}$$

onde C é a constante de integração.

3.1 INTEGRAIS DO TIPO $\int x^n \ln x \, dx$

Para avaliar a integral do tipo $\int x^n \ln x \, dx$ é usado o método de integração por partes.

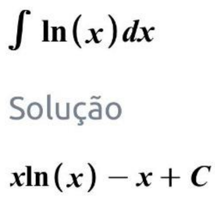
Primeiramente utilizaremos um sistema algébrico computacional para avaliar algumas integrais desse tipo.

Exemplo 3.2: *Utilize um sistema algébrico computacional para avaliar as seguintes integrais*

a) $\int \ln x \, dx$
b) $\int x \ln x \, dx$
c) $\int x^2 \ln x \, dx$
d) $\int x^3 \ln x \, dx$
e) $\int x^7 \ln x \, dx$

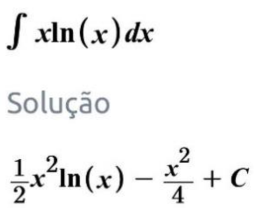
Para avaliar as integrais citadas, utilizamos o sistema algébrico Symbolab e assim obtemos as seguintes respostas:

Figura 3.1: Integral de $ln\, x$



Fonte: Autor

Figura 3.2: Integral de $x\, ln\, x$



Fonte: Autor

Figura 3.3: Integral de $x^2 \, ln \, x$

$$\int x^2 \ln(x)\, dx$$

Solução

$$\frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

Fonte: Autor

Figura 3.4: Integral de $x^3 \, ln \, x$

$$\int x^3 \ln(x)\, dx$$

Solução

$$\frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{x^4}{16} + C$$

Fonte: Autor

Figura 3.5: Integral de $x^7 \, ln \, x$

$$\int x^7 \ln(x)\, dx$$

Solução

$$\frac{1}{8}x^8 \ln(x) - \frac{x^8}{64} + C$$

Fonte: Autor

Analisando as soluções das integrais no Exemplo 3.2 é possível observar alguns padrões:

- A solução final é dada pela diferença entre dois termos principais;
- No primeiro termo, o $\ln x$ é multiplicado pelo polinômio x^{n+1}, onde x^n é o polinômio que aparece na integral e dividido por $n + 1$;
- Já o segundo termo é formado pelo produto de $\frac{1}{(n+1)^2}$ e o polinômio x^{n+1};
- Tal solução só é válida para $n \neq -1$.

Exemplo 3.3*: Utilize um sistema algébrico computacional para avaliar a integral*

$$\int x^n \ln x \, dx, \qquad (3.2)$$

com $n \neq -1$.

Solução: Utilizando o sistema algébrico Symbolab, obtemos o seguinte resultado:

Figura 3.6: Integral de $x^n \, ln \, x$

$$\int x^n \ln(x) dx$$

Solução

$$\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

Fonte: Autor

Agora, provaremos o Exemplo 3.3 utilizando o método de integração por partes. Considere $u = \ln x$ e $dv = x^n \, dx$, então temos:

$$du = \frac{1}{x} \, dx \qquad\qquad v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \, , com \;\; n \neq -1.$$

Integrando a equação (3.2) utilizando a técnica integração por partes, temos que:

$$\int x^n \ln x \, dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} \cdot x^{n+1} + C.$$

Portanto,

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} \cdot x^{n+1} + C,$$

onde C é a constante de integração.

CAPÍTULO 4: PADRÕES EM INTEGRAIS DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Neste capítulo, analisaremos os padrões presentes em algumas integrais do tipo $\int x^n \cdot e^x \, dx$, por meio de sistemas algébricos computacionais e depois utilizando o método de integração por partes, já vista no Capítulo 3.

Esse método será explorado como uma ferramenta essencial para resolver integrais que combinam funções exponenciais e polinomiais.

Exemplo 4.1: *Calcule integral*

$$\int (x^2 - 10) \cdot e^x \, dx.$$

Solução: Note que $(x^2 - 10)$ se torna mais simples quando diferenciado (enquanto e^x permanece inalterado quando o derivamos ou integramos). Assim, escolhemos

$$u = x^2 - 10, \qquad dv = e^x \, dx,$$

$$du = 2x \, dx, \qquad v = e^x.$$

Então, a integração por partes resultará em:

$$\int (x^2 - 10) \cdot e^x \, dx = (x^2 - 10) \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \, dx$$

$$= (x^2 - 10) \cdot e^x - 2\int e^x \, x \, dx. \qquad (4.1)$$

A integral obtida em (4.1) é mais simples que a integral original, embora ainda não seja óbvia. Portanto usaremos a integração por partes novamente, mas agora com $u = x$ e $dv = e^x \, dx$. Então $du = dx$, $v = e^x$, e assim temos:

$$\int e^x \, x \, dx = e^x \, x - \int e^x \, dx$$

$$= e^x \, x - e^x + C. \qquad (4.2)$$

Substituindo (4.2) em (4.1), temos:

$$\int (x^2 - 10) \cdot e^x \, dx = (x^2 - 10) \cdot e^x - 2\int e^x \, x \, dx$$

$$= (x^2 - 10) \cdot e^x - 2(e^x\, x - e^x + C)$$

$$= (x^2 - 10) \cdot e^x - 2xe^x + 2e^x + C_1$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x - 8e^x + C_1,$$

onde $C_1 = -2C$, sendo a constante de integração.

4.1 INTEGRAIS DO TIPO $\int x^n\, e^x dx$

Para avaliar a integral do tipo $\int x^n\, e^x dx$, com n sendo um inteiro positivo, é usado o método de integração por partes. Primeiramente utilizaremos um sistema algébrico computacional para avaliar algumas integrais desse tipo.

Exemplo 4.2*: Utilize um sistema algébrico computacional para avaliar as seguintes integrais*

a) $\int x\, e^x\, dx$

b) $\int x^2\, e^x dx$

c) $\int x^3\, e^x dx$

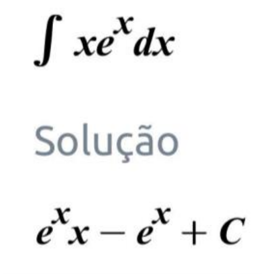
d) $\int x^4\, e^x dx$

e) $\int x^5\, e^x dx$

f) $\int x^6\, e^x dx$

Para avaliar as integrais citadas, utilizamos o sistema algébricos Symbolab e assim obtemos as seguintes respostas:

Figura 4.1: Integral de xe^x



Fonte: Autor

Figura 4.2: Integral de x^2e^x

$$\int x^2e^x dx$$

Solução

$$x^2e^x - 2\left(e^x x - e^x\right) + C$$

Fonte: Autor

Figura 4.3: Integral de x^3e^x

$$\int x^3e^x dx$$

Solução

$$x^3e^x - 3\left(x^2e^x - 2\left(e^x x - e^x\right)\right) + C$$

Fonte: Autor

Figura 4.4: Integral de x^4e^x

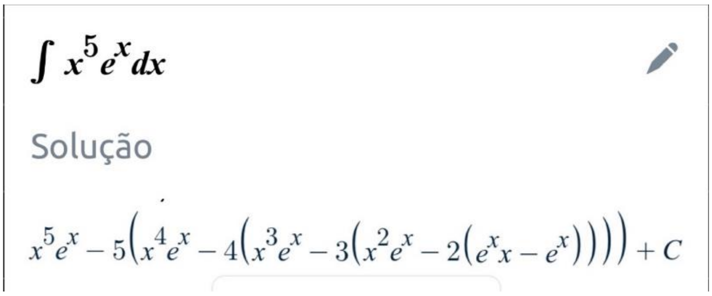
$$\int x^4e^x dx$$

Solução

$$x^4e^x - 4\left(x^3e^x - 3\left(x^2e^x - 2\left(e^x x - e^x\right)\right)\right) + C$$

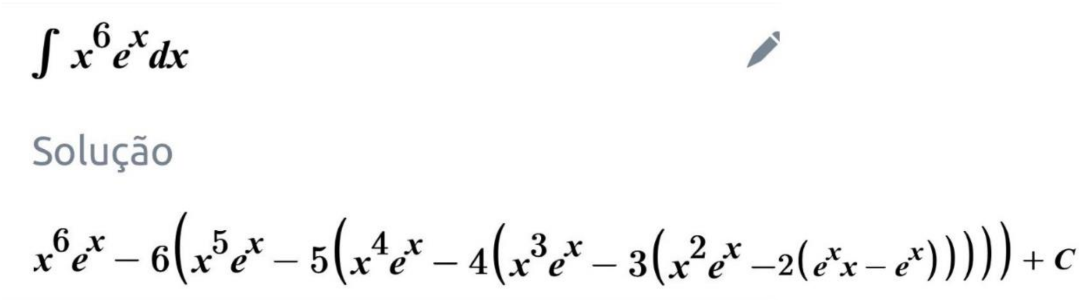
Fonte: Autor

Figura 4.5: Integral de x^5e^x



Fonte: Autor

Figura 4.6: Integral de x^6e^x



Fonte: Autor

Reescrevendo a solução da Figura (4.6), de uma forma mais simples, para uma melhor análise dos padrões posteriormente, obtemos

$$x^6e^x - 6x^5e^x + 6\cdot 5x^4e^x - 6\cdot 5\cdot 4x^3e^x + 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3x^2e^x$$

$$-6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2xe^x + 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2e^x + C =$$

$$= e^x(x^6 - 6x^5 + 6\cdot 5x^4 - 6\cdot 5\cdot 4x^3 + 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3x^2 - 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x + 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2) + C$$

$$= e^x\left(x^6 - \frac{6!}{5!}x^5 + \frac{6!}{4!}x^4 - \frac{6!}{3!}x^3 + \frac{6!}{2!}x^2 - \frac{6!}{1!}x + 6!\right) + C$$

$$= e^x 6!\left(\frac{x^6}{6!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x}{1!} + 1\right) + C.$$

Agora observamos alguns padrões:

- A solução final é dada pelo produto entre e^x e um polinômio completo de grau n, cujo coeficientes seguem determinado padrão;

- Os coeficientes da solução aparecem como frações, onde o numerador é $n!$ e o denominador corresponde ao fatorial do expoente de x, alternando os sinais entre positivo e negativo.

Exemplo 4.3: *Utilize um sistema algébrico computacional para avaliar a integral*

$$\int x^n \, e^x \, dx \ , \qquad com \ n \in \mathbb{Z}^+$$

Solução: Utilizando o sistema algébrico ChatGPT, obtemos o seguinte resultado:

Figura 4.7: Integral de $x^n e^x$

$$\int x^n e^x dx = e^x \left(x^n - n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} x^0 \right) + C$$

Fonte: Autor

Agora, mostraremos o que acontece no Exemplo 4.3 quando utilizamos o método de integração por partes e o método de indução. Vamos mostrar que:

$$\int x^n \, e^x \, dx = e^x n! \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + (-1)^{n-1} x + (-1)^n \right).$$

Para $n = 1$, temos a seguinte integral

$$\int x \, e^x \, dx,$$

de (4.2), temos que:

$$\int x \, e^x \, dx = e^x (x - 1) + C.$$

Suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$, seja válido a igualdade:

$$\int x^n \, e^x \, dx = e^x n! \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + (-1)^{n-1} x + (-1)^n \right). \qquad (4.3)$$

Vamos calcular a integral

$$\int x^{n+1} \, e^x \, dx. \qquad (4.4)$$

Considere $u = x^{n+1}$ e $dv = e^x\, dx$, então:

$$du = (n+1)x^n dx, \qquad v = e^x.$$

Integrando (4.4) por partes, temos:

$$\begin{aligned} \int x^{n+1} e^x\, dx &= x^{n+1}\, e^x - \int e^x\, (n+1)x^n\, dx \\ &= x^{n+1}\, e^x - (n+1) \int x^n e^x\, dx, \end{aligned} \tag{4.5}$$

utilizando a hipótese de indução (4.3) em (4.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \int x^{n+1} e^x\, dx &= x^{n+1}\, e^x - \int e^x\, (n+1)x^n\, dx \\ &= x^{n+1}\, e^x - (n+1) \int x^n e^x\, dx \end{aligned}$$

$$= x^{n+1} e^x - (n+1) \left[e^x n! \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + (-1)^{n-1} x + (-1)^n \right) \right]$$

$$= e^x \left[x^{n+1} - (n+1) n! \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + (-1)^{n-1} x + (-1)^n \right) \right]$$

$$= e^x \left[x^{n+1} - (n+1)! \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + (-1)^{n-1} x + (-1)^n \right) \right]$$

$$= e^x (n+1)! \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + (-1)^{n-1} x + (-1)^n \right].$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, temos que:

$$\int x^n\, e^x\, dx = e^x n! \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + (-1)^{n-1} x + (-1)^n \right),$$

é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre padrões em integrais, analisando diversas funções com o objetivo de identificar regularidades e estruturas recorrentes nos processos de integração, de modo a facilitar a resolução de determinadas integrais. Esse estudo, desenvolvido a partir de um projeto específico, proporcionou um bom material, contribuindo para uma análise mais eficiente dos padrões identificados.

Ainda, com o objetivo de tornar os padrões mais compreensíveis, utilizamos sistemas algébricos computacionais para resolver as integrais e, posteriormente, introduzimos integrais gerais. Essa abordagem permitiu demonstrar que os padrões identificados são aplicáveis a todas as integrais que compartilham uma determinada estrutura. Além disso, apresentamos diversos exemplos ao longo do trabalho para facilitar a identificação e análise dos padrões.

Portanto, o estudo dos padrões em integrais é essencial para a Matemática Aplicada, proporcionando resultados significativos e contribuindo para a resolução de problemas complexos. Esses padrões permitem explorar propriedades fundamentais das funções e, em contextos onde os métodos tradicionais exigem repetição exaustiva, oferecem estratégias mais eficientes para lidar com problemas difíceis de solucionar diretamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHATGPT. ChatGPT: Advanced AI Language Model. ChatGPT, [s.d.]. Disponível em: https://chatgpt.com/. Acesso em: 12 nov. 2024.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo. Volume 1. 5 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2001.

LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 1. 3ª ed. Editora Harbra LTDA, 1994.

STEWART, James. Cálculo. Volume 1. 5ª ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

SYMBOLAB. Integral Calculator. Symbolab, [s.d.]. Disponível em: https://pt.symbolab.com/solver/integral-calculator. Acesso em: 01 nov. 2024.

WOLFRAM ALPHA. Wolfram|Alpha: Computational Intelligence. Wolfram Alpha, [s.d.]. Disponível em: https://www.wolframalpha.com/. Acesso em: 04 nov. 2024.