



2025

Análise de Flechas em Vigas de Concreto Armado: Influência da Retração e Fluência ao Longo do Tempo

Mateus Martins Venancio ^a; Andrés Batista Cheung ^b

^a Aluno de Graduação em Engenharia Civil, mateus.venancio@ufms.br

^b Professor Orientador, titulação, andres.cheung@ufms.br

Faculdade de Engenharias, Arquitetura e Urbanismo e Geografia. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Av. Costa e Silva, s/nº | Bairro Universitário | 79070-900 | Campo Grande, MS, Brasil.

RESUMO

O estudo das flechas em vigas de concreto armado é essencial para garantir a segurança e a durabilidade das estruturas, especialmente considerando os efeitos da retração plástica e da fluência. O presente artigo apresenta uma revisão teórica sobre esses fenômenos e propõe uma rotina de cálculo para estimativa das flechas em vigas de concreto armado considerando a retração e a fluência ao longo do tempo. São discutidos os principais modelos teóricos para a predição desses efeitos, incluindo os métodos simplificados baseados em coeficientes de fluência e os cálculos mais detalhados utilizando o Método do Módulo Efetivo Ajustado pela Idade (AEMM), e uma metodologia recomendada por Gilbert. Os resultados demonstraram divergências de 40,03 a 67,18% superiores com relação ao que é proposto na norma NBR 6118:2023 sem considerar a retração, variando com o nível de carregamento das vigas. Por fim, apresenta-se um exemplo numérico ilustrativo, validando os resultados obtidos com outro modelo da literatura.

Palavras-chave: Flechas em vigas de concreto, retração plástica, fluência, AEMM, EMM, estados-limite de serviço.

ABSTRACT

Studying deflections in reinforced concrete beams is essential to ensure the safety and durability of structures, especially considering the effects of plastic shrinkage and creep. This article presents a theoretical review of these phenomena and proposes a calculation routine for estimating deflections in reinforced concrete beams, taking shrinkage and creep into account over time. The main theoretical models for predicting these effects are discussed, including simplified methods based on creep coefficients and more detailed calculations using the Age-Adjusted Effective Modulus (AEMM) method, as well as a methodology recommended by Gilbert. The results demonstrated discrepancies of 40.03 to 67.18% higher than those proposed in the NBR 6118:2023 standard, excluding shrinkage, which vary with the beam loading level. Finally, an illustrative numerical example is presented, validating the results obtained with another model from the literature.

Keywords: Deflections in concrete beams, plastic shrinkage, creep, AEMM, EMM, serviceability limit states.

1. INTRODUÇÃO

O comportamento das vigas de concreto armado é fortemente influenciado por fenômenos dependentes do tempo, como a fluência e a retração. A correta estimativa das flechas dessas estruturas é fundamental para atender aos requisitos de serviço especificados nas normas técnicas.

A fluência é um fenômeno que ocorre quando o concreto, sob tensão constante, continua se deformando ao longo do tempo. Já a retração do concreto é um fenômeno caracterizado pela redução volumétrica do material ao longo do tempo,

ocorrendo mesmo na ausência de carregamento externo.

Neste artigo, são apresentados os principais conceitos teóricos sobre a fluência e a retração do concreto, suas implicações no cálculo de flechas e os métodos mais utilizados para sua predição.

2. Objetivo

O presente artigo tem como principal objetivo a comparação entre três metodologias de cálculo de flechas em vigas de concreto armado, o *Age-Adjusted Effective Modulus Method* (AEMM) a metodologia recomendada por Gilbert (2010), e a metodologia da norma NBR 6118:2023.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1. Fluência do Concreto

A fluência do concreto é um fenômeno reológico que se refere à deformação lenta e progressiva do concreto sob tensão constante ao longo do tempo (Neville e Brooks, 2010).

Esse comportamento é influenciado por fatores como a composição do concreto, as condições ambientais (umidade e temperatura), a idade do concreto no carregamento e a magnitude da tensão aplicada (Mehta e Monteiro, 2014).

Teoricamente, a fluência é explicada por mecanismos como a redistribuição da água nos poros do concreto, o deslizamento entre as partículas de gel de silicato de cálcio hidratado (C-S-H) e a micro fissuração interna (Bazant e Baweja, 1995).

Modelos matemáticos, como os propostos por ACI (*American Concrete Institute*) e CEB-FIP (*Comité Euro-International du Béton*), descrevem a fluência como uma função do tempo, considerando a relação entre a deformação elástica instantânea e a deformação adicional ao longo do tempo (ACI 209R-92, 1992; CEB-FIP, 1993). Esses fundamentos são essenciais para prever o comportamento estrutural de longo prazo, garantindo a segurança e a durabilidade das construções.

O coeficiente de fluência, representado por $\phi(t, t_0)$, é frequentemente utilizado para estimar a magnitude dessas deformações adicionais. De acordo com Gilbert e Ranzi (2010), a fluência pode ser modelada através da função de fluência $J(t, t_0)$, que relaciona a deformação acumulada ao longo do tempo.

3.2. Retração do Concreto

O processo de retração do concreto é influenciado por fatores como a perda de água por evaporação, a composição do concreto (relação água/cimento, agregados e aditivos), as condições ambientais (umidade relativa e temperatura) e a idade do concreto (Neville e Brooks, 2010). Ela pode ser dividida em duas fases principais: a retração plástica, que ocorre nas primeiras horas após a colocação do concreto, e a retração por secagem, que acontece ao longo de meses ou anos (Mehta e Monteiro, 2014).

Este fenômeno também pode ser classificado em retração autógena, plástica e por secagem. No contexto das flechas em vigas de concreto armado, a retração por secagem é a mais relevante, pois causa encurtamento dos elementos e pode induzir fissurações que afetam a rigidez estrutural.

Burns (2011) destaca que a retração em vigas pode ser agravada por efeitos de restrição, levando a tensões internas significativas e fissuração precoce.

3.3. Modelos de Previsão de Fluência e Retração

Devido à complexidade dos fenômenos, diversos modelos empíricos e semiempíricos foram desenvolvidos para prever a fluência e a retração. Alguns dos mais conhecidos incluem:

- **ACI 209R-92 (ACI Committee 209, 1992):** Modelo do American Concrete Institute.
- **CEB-FIP Model Code / Eurocode 2 (EN 1992-1-1):** Modelos europeus amplamente utilizados. O Eurocode 2 apresenta formulações para o coeficiente de fluência $\phi(t, t_0)$ e para a deformação de retração $\epsilon_{cs}(t, t_s)$.
- **Modelo B3 e B4 (Bazant e Baweja, 1995):** Modelos mais complexos e geralmente mais precisos, desenvolvidos por Bazant e colaboradores.
- **Modelo GL2000 (Gardner e Lockman, 2004):** Outro modelo reconhecido.
- **ABNT NBR 6118:2023 (Anexo A):** A norma brasileira apresenta um modelo para cálculo dos coeficientes de fluência e das deformações por retração, baseado em formulações do CEB-FIP Model Code 1990, com adaptações. Este anexo fornece equações para $\phi(t, t_0)$ e $\epsilon_{cs}(t, t_s)$ em função da resistência do concreto, umidade relativa, idade de carregamento e dimensões do elemento.

Para incorporar a fluência e a retração no cálculo de flechas diferidas, diferentes métodos podem ser empregados:

3.4. Método Simplificado – NBR 6118:2023

O método de estimativa de flechas em vigas e lajes de concreto armado que utiliza coeficientes empíricos é amplamente empregado na prática de engenharia, especialmente em projetos que seguem a norma ABNT NBR 6118:2023. Esse método considera os efeitos diferidos da fluência e da retração do concreto, que são fenômenos que aumentam as deformações ao longo do tempo.

A norma estabelece um fator multiplicativo (α_f) para estimar o aumento das flechas ao longo do tempo, baseado em parâmetros empíricos e simplificações práticas.

A expressão geral é dada por:

$$\alpha_f = \alpha_i(1 + \alpha_f) \quad \text{Eq.(1)}$$

Onde:

α_i é a flecha imediata, calculada considerando a rigidez da seção não fissurada ou fissurada, dependendo do nível de carregamento;

α_f é o fator empírico que considera os efeitos diferidos da fluência e da retração.

O valor de α_f depende de fatores como:

- A umidade relativa do ambiente;
- A espessura fictícia do elemento estrutural;
- A idade do concreto no momento do carregamento;
- O tempo de atuação do carregamento;

Bazant e Baweja (1995) destacam que métodos empíricos, como o fator multiplicativo da NBR 6118, podem superestimar as deformações em elementos com alta taxa de armadura ou concreto de alta resistência, pois não consideram adequadamente o aumento da rigidez proporcionado por esses fatores.

Além disso, Neville e Brooks (2010) afirmam que, em ambientes muito secos ou sob carregamentos prolongados, os efeitos da fluência e da retração podem ser significativamente maiores do que os previstos por métodos simplificados, levando à subestimação das flechas.

Ghali e Favre (1994) criticam a simplificação excessiva de métodos empíricos, que não consideram a variação da rigidez ao longo do tempo devido à fissuração progressiva ou à redistribuição de esforços. Ambos recomendam o uso de métodos mais refinados, como o AEMM (*Age Adjusted Effective Modulus Method*), para uma análise mais precisa.

Bazant (1972) ressalta que métodos empíricos não levam em conta o histórico de carregamento, o que pode levar a imprecisões em elementos sujeitos a carregamentos variáveis ou complexos.

Mehta e Monteiro (2014) destacam que métodos empíricos, como o da NBR 6118, não consideram adequadamente variações locais de umidade e temperatura, que podem afetar significativamente a fluência e a retração do concreto.

Esses autores destacam que, embora o método de coeficientes empíricos seja prático e amplamente utilizado, ele apresenta limitações significativas em casos específicos, como em elementos com alta taxa de armadura, sob carregamentos prolongados ou em ambientes com condições extremas. Para casos em que a precisão é crítica, métodos mais refinados podem ser utilizados, como:

- **Análise Numérica:** Utilização de modelos computacionais que consideram a não linearidade física e geométrica, além da evolução da fluência e da retração ao longo do tempo.
- **Método AEMM (*Age Adjusted Effective Modulus Method*):** Considera a variação do módulo de elasticidade efetivo do concreto ao longo do tempo, proporcionando uma estimativa mais precisa das deformações diferidas (Bazant, 1972).
- **Modelos de Fluência e Retração Avançados:** Como o Modelo B3 de Bazant, que leva em conta a história de carregamento e as condições ambientais de forma mais detalhada (Bazant e Baweja, 1995).

3.5. Método do Módulo de Elasticidade Efetivo (EMM – *Effective Modulus Method*):

É o método mais simples. A fluência é considerada utilizando um módulo de elasticidade efetivo para o concreto, $E_{c,ef} = E_{ci}/(1 + \phi(t, t_0))$, onde E_{ci} é o módulo de elasticidade na idade de carregamento t_0 . Este método é uma simplificação que assume que a tensão no concreto permanece constante, o que nem sempre é verdade, especialmente devido à redistribuição de tensões entre concreto e aço ao longo do tempo (Gilbert, 1988, Cap. 5; Rüsç et al., 1983, Cap. 4.3).

3.6. Método do Módulo de Elasticidade Efetivo Ajustado pela Idade (AEMM – *Age-Adjusted Effective Modulus Method*)

Proposto por Trost e popularizado por Bazant (Bazant, 1972), este método é mais preciso que o EMM, pois considera o envelhecimento do concreto (sua capacidade de fluir diminui com a idade) e a variação das tensões no concreto ao longo do tempo. O modelo utiliza um módulo de elasticidade efetivo ajustado pela idade, $E_{c,adj} = E_{ci}/(1 + \chi \cdot \phi(t, t_0))$, onde χ é o coeficiente de envelhecimento, que varia tipicamente entre 0,6 e 0,9 (frequentemente adotado como 0,8). Este método é mais adequado para análises onde se espera uma variação significativa das tensões

no concreto, como em seções com armadura de compressão ou em análises de perdas de protensão (Gilbert e Ranzi, 2010, Cap. 4.4).

Ou seja, o AEMM ajusta o módulo de elasticidade efetivo do concreto, levando em conta a fluência e a retração, permitindo uma análise mais precisa das deformações de longo prazo em estruturas (ACI 209R-92, 1992). Esse método é particularmente útil para projetos que exigem controle rigoroso de deformações, como pontes e edifícios altos.

O AEMM considera a variação do módulo de elasticidade do concreto ao longo do tempo, oferecendo maior precisão na predição dos efeitos diferidos. Segundo Gilbert e Ranzi (2010), esse método introduz o coeficiente de envelhecimento, que corrige a rigidez do concreto à medida que o tempo avança. A equação básica do AEMM é dada por:

$$E_{ef} = \frac{E_c}{1 + \chi \times \phi(t, t_0)} \quad \text{Eq.(2)}$$

Esse método propõe melhorar a precisão do cálculo de flechas em estruturas de concreto armado submetidas a carregamento prolongado.

Hipóteses:

- Seções planas permanecem planas, e como consequência, a distribuição de deformações é linear de acordo com a altura da seção. (O diagrama de deformações é uma reta)
- Existe uma ligação perfeita entre o aço e o concreto, portanto, as deformações de ambos são compatíveis. Trata-se de uma suposição razoável para cargas de serviço em elementos contendo barras de reforço de aço deformadas e/ou cordoalhas.
- A tensão de tração no concreto é ignorada, e portanto, a resistência à tração do concreto não deve contribuir para as propriedades da seção transversal.
- O comportamento do material é linear-elástico. Isso inclui concreto em compressão e armadura não protendida e protendida.

3.7. Métodos Passo a Passo (Step-by-Step Methods):

São métodos numéricos que dividem o tempo em pequenos incrementos e calculam as variações de deformação e tensão em cada passo, considerando as alterações nas propriedades do concreto e nas cargas. São os mais precisos, porém computacionalmente intensivos (Gilbert e Ranzi, 2010, Cap. 4.6).

A NBR 6118:2023, no item 17.3.2.1.2, sugere um procedimento simplificado para o cálculo da flecha diferida devido à fluência, que basicamente multiplica a flecha devido à carga de longa duração por um fator que depende do coeficiente de fluência e da taxa de armadura de compressão. Para a retração, a norma indica o cálculo da curvatura de retração.

Alguns trabalhos sobre o efeito de "*tension-stiffening*" podem desconsiderar a retração para simplificar a análise, mas em um estudo completo de flechas de longa duração, a retração é um componente importante (Gilbert e Ranzi, 2010).

3.8. Inércia de Branson (1965)

A inércia de Branson é um conceito utilizado para considerar o efeito da fissuração no cálculo da rigidez à flexão. Esse método leva em conta a redução da inércia da seção transversal devido à formação de fissuras no concreto tracionado, o que afeta diretamente a deformabilidade da estrutura (Branson, 1963).

A inércia efetiva proposta por Branson é uma média ponderada entre a inércia da seção não fissurada (estádio I) e a inércia da seção fissurada (estádio II), dependendo do nível de carregamento aplicado (ACI 209R-92, 1992).

A fórmula de Branson para o momento de Inércia efetivo é dada por:

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^a \times I_I + \left(1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^a\right) \times I_{II} \quad \text{Eq.(3)}$$

Onde:

I_I é a inércia da seção não fissurada;

I_{II} é a inércia da seção fissurada;

M_r é o momento de fissuração do concreto;

M_a é o momento fletor atuante.

a é um coeficiente adimensional que será adotado como 4, visto que serão feitas integrações numéricas.

Esse método é amplamente utilizado em projetos de engenharia para prever deformações em vigas de concreto armado, garantindo uma estimativa mais realista do comportamento estrutural em serviço (Neville e Brooks, 2010).

Além disso, o artigo de Barbosa et al. (2024) reforça que "A formulação de Branson, recomendada pela NBR 6118:2023, consiste em um excelente método

para determinação de flechas em vigas de concreto armado."

Apesar de sua ampla utilização, a formulação de Branson possui limitações. Conforme apontado por Barbosa et al. (2024) o método "acaba por subestimar as deflexões em condições nas quais a armadura esteja escoada ou quando a não-linearidade do concreto se torna mais evidente, o que pode ocorrer em seções com baixas taxas de armadura ou quando se utilizam concretos de alto desempenho."

Gilbert e Ranzi (2010) também discutem extensivamente as limitações de modelos simplificados de inércia efetiva. As principais críticas incluem:

- **Superestimação da Rigidez (Subestimação da Flecha):** Para elementos levemente armados ou submetidos a momentos próximos ao de fissuração, a equação de Branson pode superestimar a rigidez.
 - **A não Consideração Adequada da rigidez:** O efeito de contribuição do concreto entre fissuras (*tension stiffening*) é aproximado de forma empírica.
 - **Dependência do Momento Máximo:** A rigidez de todo o elemento é calculada com base no momento máximo, não refletindo a variação de rigidez ao longo do vão devido à variação do momento fletor e do nível de fissuração.
 - **Influência de Concretos de Alta Resistência:** O comportamento desses concretos pode não ser adequadamente capturado pela formulação original, pelo fato da formulação ter sido desenvolvida com concretos de resistência mais baixa.
- Das curvas tensão-deformação do concreto à compressão e do aço.
 - Da geometria da seção e das áreas de armadura.
 - Do nível de fissuração do concreto.

Para obter a relação $M-\kappa$:

1. Assume-se uma deformação na fibra mais comprimida do concreto (ou na armadura mais tracionada).
2. Considera-se a hipótese de manutenção da seção plana (distribuição linear de deformações).
3. Determina-se a posição da linha neutra (LN) a partir do equilíbrio de forças longitudinais na seção (Forças de compressão no concreto + Forças na armadura comprimida = Forças na armadura tracionada).
4. Calculam-se as tensões nos materiais a partir das deformações e das suas respectivas leis constitutivas.
5. A curvatura (κ) é dada pela inclinação do diagrama de deformações ($\kappa = \varepsilon_c/x$, onde ε_c é a deformação no topo e x é a profundidade da LN).

Este processo é repetido para diferentes níveis de deformação para construir a curva $M-\kappa$. Com a relação $M-\kappa(x)$ conhecida ao longo da viga (onde $M(x)$ é o diagrama de momentos fletores), a flecha pode ser calculada pela integração da curvatura, utilizando métodos numéricos como o da carga unitária (Princípio dos Trabalhos Virtuais) ou integração direta.

$$a = \int_0^l \kappa(x) \times \bar{M}(x) dx \quad \text{Eq.(4)}$$

Onde a é a flecha;

$\kappa(x)$ é a função da curvatura ao longo de x ;

$\bar{M}(x)$ é o diagrama de momento fletor devido a um carregamento unitário vertical aplicado em qualquer posição da viga onde se deseja calcular a flecha.

Outros modelos de inércia equivalente também existem e buscam aprimorar a estimativa da rigidez

3.9. Métodos Baseados na relação Momento-Curvatura

Para uma análise mais precisa das deformações, métodos que calculam a curvatura ($\kappa = \frac{1}{r}$) em diversas seções ao longo do vão e, posteriormente, integram essas curvaturas para obter a flecha, são considerados mais refinados (Gilbert, 1988).

A relação momento-curvatura ($M-\kappa$) de uma seção de concreto armado é não linear e depende:

efetiva, como o proposto por Bischoff, que é mencionado em estudos comparativos com Branson.

4. METODOLOGIA

4.1. Cálculo de flechas utilizando AEMM e Branson

O primeiro passo consiste em obter a matriz das ações atuantes na seção, considerando um esforço normal e um momento fletor atuante para o tempo inicial, definido como o tempo zero:

$$r_{e,0} = \begin{bmatrix} N_{e,0} \\ M_{e,0} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(5)}$$

$N_{e,0}$ é o esforço normal aplicado na seção.

$M_{e,0}$ é o momento fletor aplicado na seção.

Após isso, obtém-se a relação entre os módulos de elasticidade do aço e do módulo de elasticidade inicial do concreto:

$$n_s = \frac{E_s}{E_{c,0}} \quad \text{Eq.(6)}$$

A rigidez na seção transversal relacionada às áreas de aço pode ser definida com relação à cada uma das propriedades da seção onde $R_{A,s}$, $R_{B,s}$ e $R_{I,s}$ representam respectivamente a rigidez relacionada à área de aço, ao momento estático de área, e ao momento de inércia da área de aço:

$$R_{A,s} = \sum A_s \times E_s \quad \text{Eq.(7)}$$

$$R_{B,s} = \sum y_s \times A_s \times E_s \quad \text{Eq.(8)}$$

$$R_{I,s} = \sum y_s^2 \times A_s \times E_s \quad \text{Eq.(9)}$$

Encontra-se a linha neutra utilizando-se a igualdade dos momentos estáticos de área inferior e superior, válido tanto para o estágio I como estágio II

$$B_{inf} = B_{sup} \quad \text{Eq.(10)}$$

Linha neutra encontrada $y_{n,0}$, que pode ser diferente de d_{ref} , que é a profundidade do eixo de referência abaixo da fibra do topo da seção transversal (alguns valores podem ser calculados com relação a esse eixo de referência).

Encontra-se a área líquida de concreto da seção (seção retangular):

$$A_c = \begin{cases} b_w \times y_{n,0} - A_{s1}, & \text{se estiver no estágio II} \\ b_w \times h - A_{s1} - A_{s2}, & \text{se estiver no estágio I} \end{cases} \quad \text{Eq.(11)}$$

Onde A_{s1} é a área de aço comprimida e A_{s2} é a área de aço tracionada.

Calcula-se o momento estático de área da área líquida de concreto:

$$B_c = \sum_{i=1}^n y_i \times A_{ci} \quad \text{Eq.(12)}$$

Calcula-se o momento de inércia da seção líquida de concreto:

$$I_c = \begin{cases} \frac{b_w \times y_{n,0}^3}{12} + b_w \times y_{n,0} \times \left(\frac{y_{n,0}}{2} - d_{ref}\right)^2, & \text{Caso esteja no estágio II} \\ \frac{b_w \times y_{n,0}^3}{12} + \frac{b_w \times (h - y_{n,0})^3}{12} + b_w \times y_{n,0} \times \left(\frac{y_{n,0}}{2}\right)^2 + b_w \times (h - y_{n,0}) \times \left(\frac{h - y_{n,0}}{2}\right)^2, & \text{Caso esteja no estágio I} \end{cases} \quad \text{Eq.(13)}$$

Rigidez da seção no tempo zero:

$$R_{A,0} = A_c E_{c,0} + R_{A,s} \quad \text{Eq.(14)}$$

$$R_{B,0} = B_c E_{c,0} + R_{B,s} \quad \text{Eq.(15)}$$

$$R_{I,0} = I_c E_{c,0} + R_{I,s} \quad \text{Eq.(16)}$$

Com as isso, pode-se obter a matriz que correlaciona deformações com as ações internas na seção transversal no tempo 0:

$$F_0 = \frac{1}{R_{A,0}R_{I,0} - R_{B,0}^2} \times \begin{bmatrix} R_{I,0} & -R_{B,0} \\ -R_{B,0} & R_{A,0} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(17)}$$

Uma maneira alternativa de definir F_0 é em função da seção homogeneizada, sendo expresso por:

A_0 sendo a área da seção homogeneizada;

B_0 sendo o momento estático de área da seção homogeneizada em relação ao eixo de referência;

I_0 sendo o momento de inércia da seção homogeneizada em relação ao eixo de referência.

Portanto, a matriz que correlaciona deformações com as ações internas na seção transversal pode ser escrita como:

$$F_0 = \frac{1}{E_c \times (A_0 I_0 - B_0^2)} \times \begin{bmatrix} I_0 & -B_0 \\ -B_0 & A_0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(18)}$$

Por fim, obtém-se o vetor de deformações (no eixo de referência d_{ref} e a curvatura na seção desejada)

$$\varepsilon_0 = F_0 \times r_{e,0} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{r,0} \\ \kappa_0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(19)}$$

Em que $\varepsilon_{r,0}$ representa a deformação longitudinal no eixo de referência e κ_0 representa a curvatura no eixo de referência.

Ao aplicar o AEMM, utiliza-se as seguintes variáveis:

Deformação diferida no tempo κ :

$N_{e,\kappa}$ é o esforço normal aplicado na seção no tempo κ

$M_{e,\kappa}$ é o momento fletor aplicado na seção no tempo κ

$\varepsilon_{sh}(\tau_\kappa)$ é a deformação devido a retração no tempo κ
 $\varphi(\tau_\kappa, \tau_0)$ Coeficiente de fluência do concreto no tempo τ_κ para o concreto carregado em τ_0

$\chi(\tau_\kappa, \tau_0)$ Coeficiente de envelhecimento do concreto no tempo τ_κ para o concreto carregado em τ_0

O coeficiente de Envelhecimento do concreto é dado como:

$$\chi(\tau_\kappa, \tau_0) = \frac{\sigma_c(\tau_0)}{\sigma_c(\tau_0) - \sigma_c(\tau_\kappa)} - \frac{1}{\varphi(\tau, \tau_\kappa)} \quad \text{Eq.(20)}$$

Também é comumente expresso na literatura da seguinte maneira:

$$\chi(\tau_\kappa, \tau_0) = \frac{E_c(\tau_0)}{E_c(\tau_0) - R(\tau_\kappa, \tau_0)} - \frac{1}{\varphi(\tau, \tau_\kappa)} \quad \text{Eq.(21)}$$

Onde $R(\tau, \tau_\kappa)$ representa a função de relaxação definida como a tensão no tempo τ_κ devido a uma deformação unitária aplicada no tempo τ_0 e mantida constante no período. Trost (1967) recomenda utilizar χ entre 0,8 e 0,9 mas é comumente utilizado um valor constante de 0,8.

A partir do coeficiente de fluência e do coeficiente de envelhecimento do concreto, o módulo de elasticidade efetivo ajustado pela idade pode ser obtido:

$$\bar{E}_{e,\kappa} = \frac{E_{c,0}}{1 + \chi(\tau_\kappa, \tau_0)\varphi(\tau_\kappa, \tau_0)} \quad \text{Eq.(22)}$$

Fator de fluência ajustado pela idade:

$$\bar{F}_{e,0} = \frac{\varphi(\tau_\kappa, \tau_0)[\chi(\tau_\kappa, \tau_0) - 1]}{1 + \chi(\tau_\kappa, \tau_0)\varphi(\tau_\kappa, \tau_0)} \quad \text{Eq.(23)}$$

Esforços axiais e momentos resistidos pelo concreto no tempo τ_0

$$N_{c,0} = A_c E_{c,0} \varepsilon_{r,0} + B_c E_{c,0} \kappa_0 \quad \text{Eq.(24)}$$

$$M_{c,0} = B_c E_{c,0} \varepsilon_{r,0} + I_c E_{c,0} \kappa_0 \quad \text{Eq.(25)}$$

Analogamente aos cálculos da da seção no tempo 0, obtém-se a rigidezes da seção, e a matriz que correlaciona deformações com as ações internas na seção transversal no tempo κ :

$$R_{A,\kappa} = A_c \bar{E}_{e,\kappa} + R_{A,s} \quad \text{Eq.(26)}$$

$$R_{B,\kappa} = B_c E_{e,\kappa} + R_{B,s} \quad \text{Eq.(27)}$$

$$ER_{I,\kappa} = I_c \bar{E}_{e,\kappa} + R_{I,s} \quad \text{Eq.(28)}$$

$$F_\kappa = \frac{1}{R_{A,\kappa} R_{I,\kappa} - R_{B,\kappa}^2} \begin{bmatrix} R_{I,\kappa} & -R_{B,\kappa} \\ -R_{B,\kappa} & R_{A,\kappa} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(29)}$$

Da mesma maneira com a seção no tempo 0, pode-se definir no tempo κ :

$$F_\kappa = \frac{1}{\bar{E}_{e,\kappa} \times (A_\kappa I_\kappa - B_\kappa^2)} \times \begin{bmatrix} I_\kappa & -B_\kappa \\ -B_\kappa & A_\kappa \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(30)}$$

Com o fator de fluência ajustado pela idade, o vetor das ações no tempo κ , contando com a fluência em períodos anteriores pode ser obtido:

$$F_{cr,\kappa} = \bar{F}_{e,0} \begin{bmatrix} N_{c,0} \\ M_{c,0} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(31)}$$

Da mesma forma o vetor das ações no tempo κ , contando com a retração em períodos anteriores:

$$F_{sh,\kappa} = \begin{bmatrix} A_c \\ B_c \end{bmatrix} \bar{E}_{e,\kappa} \varepsilon_{sh,\kappa} \quad \text{Eq.(32)}$$

Por fim, obtém-se o vetor das deformações no tempo κ .

$$\varepsilon_\kappa = F_\kappa (r_{e,\kappa} - f_{cr,\kappa} + f_{sh,\kappa}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{r,\kappa} \\ \kappa_\kappa \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(33)}$$

Utiliza-se as curvaturas κ_0 e κ_k para calcular a flecha imediata e diferida, respectivamente.

Define-se a linha neutra no estádio I

$$x_I = \frac{bw \times \frac{h^2}{2} + \left(\frac{Es}{Eci} - 1\right) \times As \times d + \left(\frac{Es}{Eci} - 1\right) \times As' \times (d.1)}{bw \times h + \left(\frac{Es}{Eci} - 1\right) \times As + \left(\frac{Es}{Eci} - 1\right) \times As'} \quad \text{Eq.(34)}$$

Define-se o Momento de Inércia em relação à linha neutra no estádio I

$$I_I = \frac{bw \times x_I^3}{3} + \frac{bw \times (h - x_I)^3}{3} + \left(\frac{Es}{Eci} - 1\right) \times As \times (d - x_I)^2 + \left(\frac{Es}{Eci} - 1\right) \times As' \times (d' - x_I)^2 \quad \text{Eq.(35)}$$

Define-se a linha neutra no estádio II

$$x_{II} = \frac{-2 \times \left(\frac{Es}{Ecs} \times As\right) + \sqrt{\left(2 \times \frac{Es}{Ecs} \times As\right)^2 - 4 \times bw \times \left(-2 \times \frac{Es}{Ecs} \times As \times d + 2 \times \frac{Es}{Ecs} \times As' \times d'\right)}}{2 \times bw} \quad \text{Eq.(36)}$$

Momento de Inércia em relação à linha neutra no estádio II

$$I_{II} = \frac{bw \times x_{II}^3}{3} + \frac{Es}{Ecs} \times (As \times (d - x_{II})^2) + \frac{Es}{Ecs} \times (As' \times (d' - x_{II})^2) \quad \text{Eq.(37)}$$

Momento de Inércia da seção de concreto

$$I_c = \frac{b_w \times h^3}{12} \quad \text{Eq.(38)}$$

Inércia de Branson:

$$I_{eq} = \left(\frac{Mr}{M_a}\right)^a \times I_c + \left(1 - \left(\frac{Mr}{M_a}\right)^a\right) \times I_{II} \quad \text{Eq.(39)}$$

$$I_{eq} = \text{menor entre } \begin{cases} I_{eq} \\ I_I \end{cases}$$

$$I_{adotado} = \begin{cases} I_{eq}, \text{ para seção fissurada} \\ I_I \text{ para seção não fissurada} \end{cases}$$

$$y_{n,0adotado} = \begin{cases} x_{II}, \text{ para seção fissurada} \\ x_I \text{ para seção não fissurada} \end{cases}$$

Momento de Fissuração (para momentos positivos):

$$M_r = \frac{\alpha \times f_{ctm} \times I_c}{(h - x_I)} \quad \text{Eq.(40)}$$

Critério de fissuração adotado tanto para Branson como para o AEMM

$$\text{Critério de fissuração} \begin{cases} M_r < M_{atuante} \rightarrow \text{Seção não fissurada} \\ M_r > M_{atuante} \rightarrow \text{Seção fissurada} \end{cases}$$

Tensão na fibra mais superior pode ser definida como:

$$\sigma_{top} = \frac{M(x)}{I} \times (-y_{n0}) \quad \text{Eq.(41)}$$

Deformação na fibra mais superior:

$$\varepsilon_{top} = \frac{\sigma_{top}}{E_{cs}} \quad \text{Eq.(42)}$$

Raio de curvatura na fibra mais superior:

$$\rho = -\frac{y}{\varepsilon_{top}} \quad \text{Eq.(43)}$$

Curvatura na fibra mais superior:

$$\kappa_{branson} = \frac{1}{\rho} \quad \text{Eq.(44)}$$

Obtendo-se a curvatura na seção, aplicar a metodologia novamente de forma iterativa ao longo de toda a viga, a fim de se obter as flechas por meio do princípio dos trabalhos virtuais citado anteriormente utilizando a Eq.(4) em uma integração numérica. Dessa forma, é possível considerar a variação da rigidez ao longo da viga, e também considerar a variação da curvatura ao longo do tempo.

4.2. Cálculo de flechas utilizando a metodologia recomendada por Gilbert

Em seu artigo “Calculation of Long-Term Deflection”, R.I. Gilbert (2008) recomenda uma metodologia para o cálculo de flechas em vigas e faixas de laje em concreto armado. Ele cita que a equação de Branson superestima a rigidez após a

fissuração de elementos que contém quantidades relativamente pequenas de armadura de tração. Portanto, Gilbert (2010) sugere um modelo distinto baseado no que sugere Bischoff (2005) para o cálculo de uma nova inércia efetiva:

$$I_{ef} = \frac{I_{cr}}{1 - \beta \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_{un-cr}}\right) \left(\frac{M_{cr}}{M_s^*}\right)^2} \quad \text{Eq.(45)}$$

Onde:

I_{ef} é a inércia efetiva;

I_{cr} é o momento de inércia da seção fissurada;

I_{un-cr} é o momento de inércia da seção não fissurada;

M_s^* é o máximo momento fletor na seção, baseado no carregamento de serviço do projeto;

β é o termo utilizado para considerar tanto a fissuração induzida pela retração quanto a redução do enrijecimento por tração com o tempo. Segundo Gilbert (2010), para momentos antes dos 28 dias $\beta = 0.7$, e para idades maiores que seis meses $\beta = 0.5$.

O momento de fissuração M_{cr} é dado por:

$$M_{cr} = Z \left(f'_{ct,f} + \frac{P}{A_g} \right) + P \times e \geq 0.0 \quad \text{Eq.(46)}$$

Onde $Z = \frac{I_{un-cr}}{y_b}$, no qual y_b é a distância da linha neutra até a fibra mais tracionada;

$f'_{ct,f}$ é a resistência característica à flexão do concreto, definida como $0.6\sqrt{f_{ck}}$. P seria a força de protensão efetiva (se houver) e e seria a excentricidade da protensão na seção.

Um limite superior $I_{ef,max}$ é recomendado para o valor da inércia efetiva, que é dado por:

$$I_{ef,max} \leq \begin{cases} I_{un-cr}, se \rho' = \frac{A_s'}{bd} \geq 0,005 \\ 0,6 I_{un-cr}, se \rho' < 0,005 \end{cases} \quad \text{Eq.(47)}$$

A deflexão instantânea é calculada assumindo uma rigidez média uniforme para o vão chamada de $E_c(I_{ef})_{av}$, onde $(I_{ef})_{av}$ é a inércia efetiva média. Para uma viga ou laje com apoio simples, o valor médio $(I_{ef})_{av}$ para o vão é determinado a partir do valor de I_{ef} no meio do vão.

Para vãos internos de vigas ou lajes contínuas, $(I_{ef})_{av}$ é considerado metade do valor no meio do vão mais um quarto do valor em cada apoio. Para vãos finais de

vigas ou lajes contínuas, $(I_{ef})_{av}$ é considerado metade do valor no meio do vão mais metade do valor no apoio contínuo. Por fim para um balanço, $(I_{ef})_{av}$ é o valor no apoio.

Para as deflexões diferidas no tempo, é necessário calcular a curvatura induzida pela fluência, que é definida como:

$$\kappa_{cr}(t) = \frac{\kappa_{sus,0} \varphi(t, t_0)}{\alpha} \quad \text{Eq.(48)}$$

No qual $\kappa_{sus,0}$ é a curvatura instantânea devido ao carregamento de serviço, $\varphi(t, t_0)$ é o coeficiente de fluência no tempo t devido ao carregamento aplicado em t_0 da mesma forma como foi definido anteriormente, e α trata-se de um fator de modificação de fluência que leva em conta os efeitos da fissuração e resistência da armadura. A curvatura inicial na seção pode ser definida como:

$$\kappa_{sus,0} = \frac{M_s^*}{E_{ci} \times I_{ef}} \quad \text{Eq.(49)}$$

Para uma seção fissurada em flexão pura ($I_{ef} < I_{un-cr}$), $\alpha = \alpha_1$, onde:

$$\alpha_1 = [0,48\rho^{0,5}] \left[\frac{I_{cr}}{I_{ef}} \right]^{0,33} \times \left[1 + (12,5\rho + 0,1) \left(\frac{A_s}{A_s'} \right) \right] \quad \text{Eq.(50)}$$

Enquanto para uma seção não fissurada ($I_{ef} = I_{un-cr}$), $\alpha = \alpha_2$, onde:

$$\alpha_2 = 1 + [45\rho - 900\rho^2] \left[1 + \frac{A_s}{A_s'} \right] \quad \text{Eq.(51)}$$

Onde $\rho = \frac{A_s'}{bd_0}$ e d_0 é a profundidade da fibra mais comprimida até o centroide da camada mais externa de reforço de tração. A_s' é a área de aço comprimida, e A_s é a área de aço tracionada. A área de qualquer armadura considerada aderente na zona de tração (incluindo cordoalhas aderentes) não contida na camada mais externa da armadura de tração (uma profundidade d_1 menor que d_0 deve ser incluída no cálculo de A_{st} , multiplicando-se essa área por $\frac{d_1}{d_0}$. Para fins de cálculo de A_{st} , a zona de tração é aquela que estaria em tração devido ao momento aplicado atuando isoladamente.

Por fim, apesar de não atender ao escopo do presente artigo, para uma seção fissurada, parcialmente

protendida ou para uma seção fissurada sujeita a momento e compressão axial, α pode ser tomado como:

$$\alpha = \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \left(\frac{d_{n1}}{d_n} \right)^{2,4} \quad \text{Eq.(52)}$$

Onde d_n é a profundidade do concreto intacto comprimido na seção fissurada, e d_{n1} é a profundidade do concreto intacto comprimido na seção fissurada ignorando a compressão e/ou a força de protensão.

Por fim, a curvatura induzida pela retração em uma seção de concreto armado pode ser calculada aproximadamente por:

$$\kappa_{sh} = \left(\frac{\kappa_r \varepsilon_{sh}}{D} \right) \quad \text{Eq.(53)}$$

Em que D é a altura total da seção;

ε_{sh} é a deformação por retração;

κ_r depende da quantidade e da localização das armaduras tracionada e comprimida.

Para uma seção fissurada em flexão pura ($I_{ef} < I_{uncr}$), $\kappa_r = \kappa_{r1}$, onde:

$$\kappa_{r1} = 1,2 \left[\frac{I_{cr}}{I_{ef}} \right]^{0,67} \left[1 - 0,5 \frac{A_s}{A_s'} \left[\frac{D}{d_0} \right] \right] \quad \text{Eq.(54)}$$

Enquanto para uma seção não fissurada ($I_{ef} = I_{uncr}$), $\kappa_r = \kappa_{r2}$, onde:

$$\kappa_{r2} = \begin{cases} \left((100\rho - 2500\rho^2) \left(\frac{d_0}{0,5D} - 1 \right) \times \right. \\ \quad \left. \left(1 - \frac{A_{sc}}{A_{st}} \right)^{1,3} \right) \\ \quad \text{se } \rho \leq 0,01, \text{ ou} \\ \left((40\rho + 0,35) \left(\frac{d_0}{0,5D} - 1 \right) \times \right. \\ \quad \left. \left(1 - \frac{A_{sc}}{A_{st}} \right)^{1,3} \right) \\ \quad \text{se } \rho > 0,01 \end{cases} \quad \text{Eq.(55)}$$

Da mesma forma, para uma para uma seção fissurada, parcialmente protendida ou para uma seção fissurada sujeita a momento e compressão axial, κ_r pode ser dado como:

$$\kappa_r = \kappa_{r2} + (\kappa_{r1} - \kappa_{r2}) \left(\frac{d_{n1}}{d_n} \right) \quad \text{Eq.(56)}$$

Por fim, para o cálculo da deflexão diferida no tempo, Gilbert (2008) recomenda uma equação que representa uma estimativa que o mesmo julga razoável mesmo quando o diagrama da curvatura não é parabólico:

$$\Delta = \frac{l^2}{96} (\kappa_L + 10\kappa_M + \kappa_R) \quad \text{Eq.(57)}$$

Onde:

κ_L é a curvatura no apoio esquerdo;

κ_R é a curvatura no apoio direito;

κ_M é a curvatura no meio do vão.

De maneira análoga as demais metodologias, também é possível obter a curvatura seção por seção e calcular a flecha utilizando o princípio dos trabalhos virtuais por meio de integração numérica da Eq.(4).

5. ESTUDO DE CASO

A fim de validar os resultados, será apresentado um comparativo com uma faixa de laje ensaiada e calculada no artigo “Calculation of Long Term Deflection”, de R.I. Gilbert (2008).

No entanto, enquanto no artigo foi calculada apenas uma flecha da mesma viga e verificada com um ensaio, aqui será estudado o comportamento da mesma viga em uma simulação com um incremento de carga, comparando a metodologia de Branson com a metodologia de Gilbert aliada com integração numérica, e por fim com AEMM, também utilizando integração numérica em conjunto com a inércia de Bischoff.

Inicialmente, foram inseridos os dados de entrada do artigo, sendo eles os indicados como “adotado” para os cálculos das flechas de acordo com as metodologias de Branson e do AEMM.

Tabela 1 – Dados de Entrada

f_{ck} (MPa)	25,00
Seção	Retangular
q (kN/m)	0 a 20
P (kN)	0 a 50
$Q_{m\acute{a}x}$ (kN.m)	20
$P_{m\acute{a}x}$ (kN)	50
a (m)	1,17
h (cm)	16,10
b_w (cm)	40,00
L (m)	3,50
E_s (MPa)	200000,00
$\phi_{barr\grave{a}}$ (mm)	12,00
$\phi_{estribo}$ (mm)	5,00
f_{yk} (MPa)	500,00
cob (cm)	2,00
N° barras, adotado	3
$A_{s,adotado}$ (cm ²)	3,393
$A'_{s,adotado}$ (cm ²)	0,000
$f_{ct,m}$ (MPa)	2.5650
E_{ci} (MPa)	25200
$E_{ci,adotado}$ (MPa)	22820
M_r (kN.m)	6,81

Após isso, foi calculado os parâmetros da metodologia aplicada por Gilbert. Uma diferença importante de se ressaltar é que, na metodologia de Gilbert o cálculo do momento de fissuração resulta em um valor significativamente menor, e portanto, para manter a padronização com a norma brasileira, foi tomada a liberdade de adaptar a metodologia a fim de equalizar os momentos de fissuração.

Tabela 2 – Dados – Metodologia de Gilbert

$f_{ct,f}$ (kN/cm ²)	0,26
Z (cm ³)	1849,80
e (cm)	0.00E+00
Pp (kN)	0.00E+00
ρ_w	0,00652
ρ_{cw}	0,00000
ϵ_{cs}	8,25E-04
σ_{cs} (kN/cm ²)	0,20
M_{cr} (kN.m)	6,81
I_{ef} (cm ⁴)	3317,88
I_{cr} (cm ⁴)	3247,23

$I_{un\text{cr}}$ (cm ⁴)	14531,05
I_{efmax} (cm ⁴)	14531,05
$I_{ef,adotado}$ (cm ⁴)	3317,88
ρ'	6,52E-03
A_{sc} (cm ²)	0,00
A_{st} (cm ²)	3,39
α_1	5,94
α_2	0,90
D (cm)	16,10
d_0 (cm)	13,00
κ_{r1}	0,336
κ_{r2}	1,486

Os dados de Retração e Fluência estimados pela norma NBR 6118:2023 também divergiam dos dados estipulados pelo artigo do Gilbert, portanto, foram considerados os valores adotados experimentalmente por Gilbert. A rotina de cálculo desenvolvida considera os três seguintes casos respectivamente apresentados nas figuras 1, 2 e 3, e representando um carregamento uniformemente distribuído, um carregamento concentrado e dois carregamentos concentrados.

Figura 1

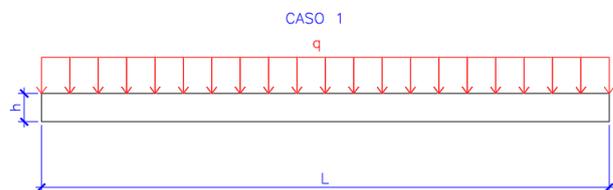


Figura 2

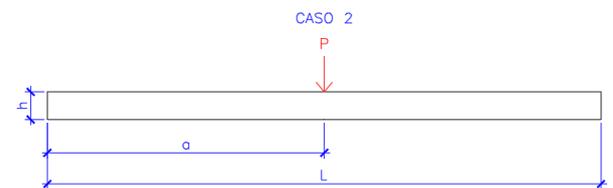


Figura 3

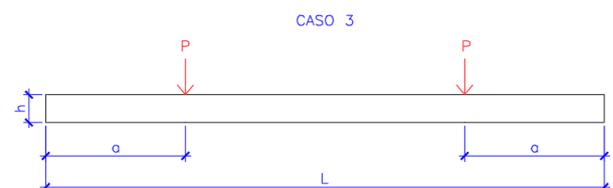
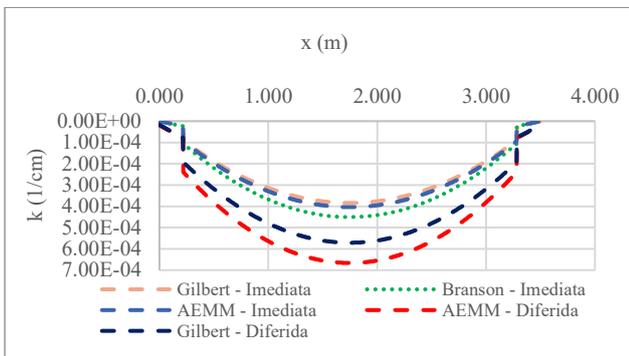


Tabela 3 – Dados de Retração e Fluência

Umidade média	0
Classe do concreto (MPa)	20 a 45
Tipo de Concreto	CPII
Abatimento	0 a 4 cm
Ambiente	Outro (U ≤ 90%)
t (dias)	400
t ₀ (dias) (Mínimo de 28)	28
Espessura Fictícia	40
φ (t _∞ , t ₀) - NBR 6118	2.053
ε _{CS} (t _∞ , t ₀) (‰) - NBR 6118	-1.84E-04
φ (t _∞ , t ₀) adotado	1.710
ε _{CS} (t _∞ , t ₀) adotado	-8.25E-04
χ(τ _k , τ ₀) adotado	0.80
α _f - NBR 6118	0.814

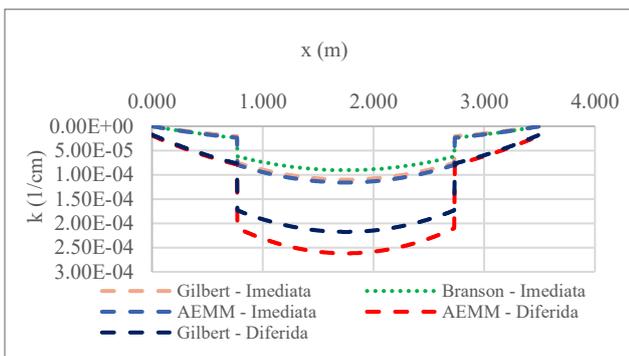
Por fim, foram comparadas as curvaturas a fim de identificar onde haviam divergências nas metodologias. Três curvaturas serão apresentadas, uma buscando uma seção mais fissurada, uma intermediária e outra com uma seção íntegra.

Gráfico 1 – Curvatura em função de x – q = 19 kN/m – Caso 1



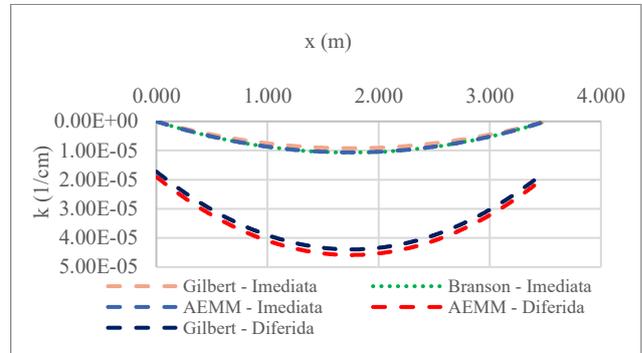
Pode-se notar que as curvaturas nas flechas imediatas são semelhantes, enquanto nas flechas diferidas começa a haver uma disparidade quando ocorre o momento de fissuração.

Gráfico 2 – q = 6,5 kN/m – Caso 1



Por outro lado, no gráfico 2, observa-se que a inércia de Branson realmente superestima a rigidez para cargas mais leves, colaborando com a afirmação de Gilbert.

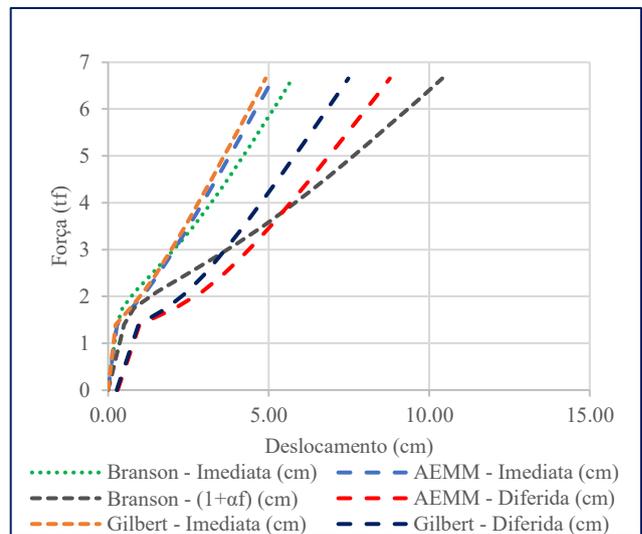
Gráfico 3 - Curvatura em função de x – q = 2 kN/m – Caso 1



Além disso, com todo o elemento estrutural não fissurado, todas as metodologias se tornam mais semelhantes.

Por fim, será apresentado um gráfico demonstrando como a flecha evoluiu com o aumento do carregamento a fim de comparar todas as metodologias:

Gráfico 4 – Comparação das metodologias – Caso 1



O cálculo das flechas refletiu a demonstração das curvaturas, com o adicional de também termos a flecha diferida da norma NBR 6118:2023, que considera apenas fluência. Observa-se que também as maiores divergências ocorrem após o momento de fissuração, sendo que a metodologia de Gilbert apresentou as menores deformações diferidas no tempo.

Além disso, foi desenvolvido na rotina de cálculo em excel outras formas que o carregamento pode agir, nos quais são mais comumente ensaiados em laboratório.

Para o caso 2, com carregamento concentrado no meio do vão (a rotina também considera carregamento em outras posições do vão), os resultados da curvatura obtidos são os seguintes, utilizando a mesma peça descrita no artigo de Gilbert:

Gráfico 5 – Curvatura em função de $x - P = 6 \text{ kN} - \text{Caso 2}$

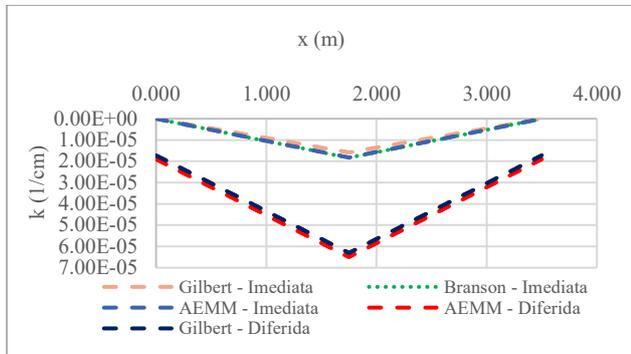
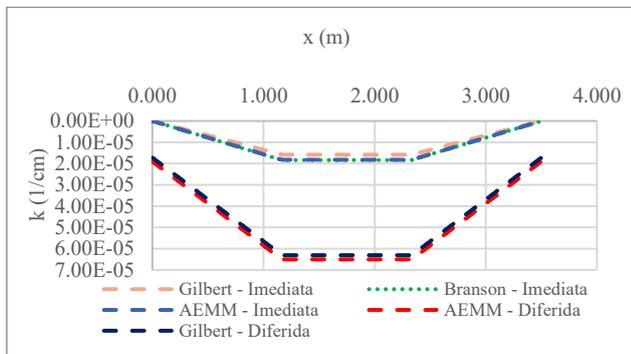


Gráfico 6 – Curvatura em função de $x - P = 9 \text{ kN} - \text{Caso 3}$



Como pode-se observar, a diferença entre as curvaturas é semelhante ao do carregamento uniformemente distribuído, com estimativas bem próximas tanto para as curvaturas imediatas como para as curvaturas diferidas.

Gráfico 7 - Curvatura em função de $x - P = 9 \text{ kN} - \text{Caso 2}$

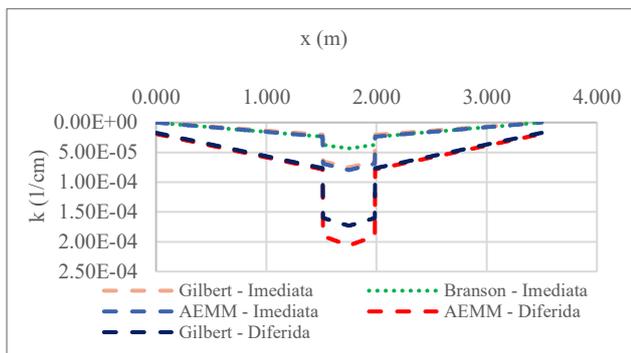
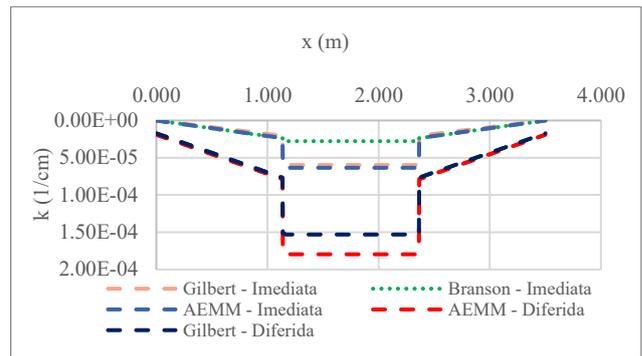


Gráfico 8 – Curvatura em função de $x - P = 12 \text{ kN} - \text{Caso 3}$



Para um carregamento onde começa a haver fissuração, o comportamento entre as curvaturas também é consistente com o comportamento no carregamento uniformemente distribuído.

Gráfico 9 – Curvatura em função de $x - P = 50 \text{ kN} - \text{Caso 2}$

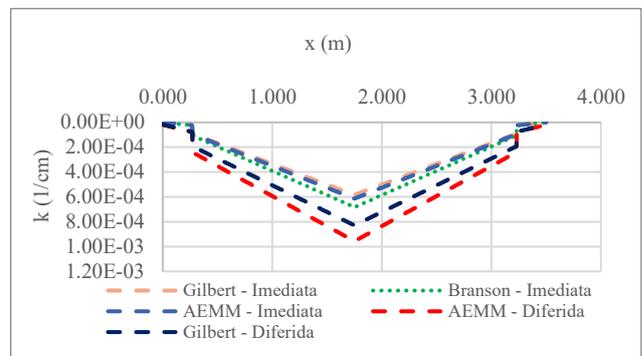
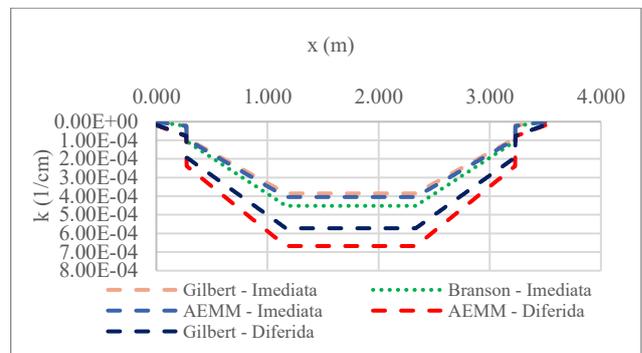


Gráfico 10 – Curvatura em função de $x - P = 50 \text{ kN} - \text{Caso 3}$



Quando a viga está quase que completamente no estágio II, as divergências entre as curvaturas tanto diferidas como imediatas também se tornam mais aparentes.

Gráfico 11 – Comparação das metodologias – Caso 2

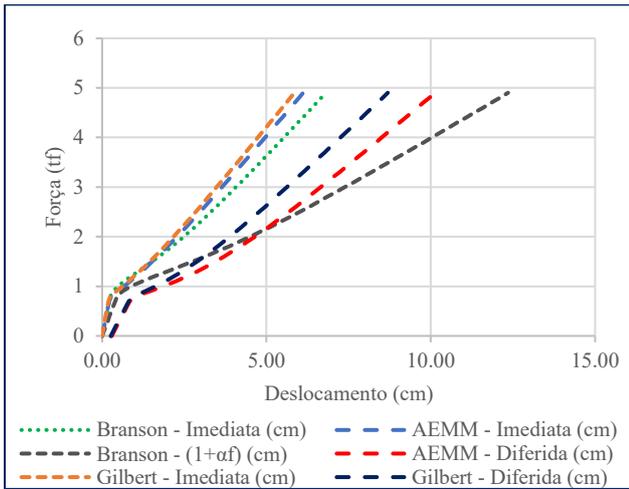
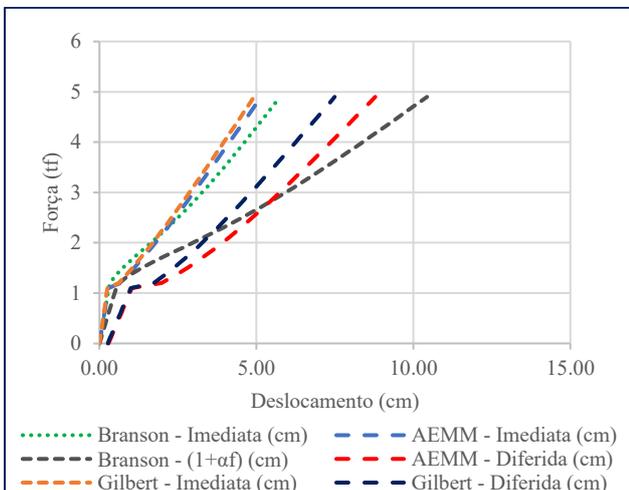


Gráfico 12 – Comparação das metodologias – Caso 3



Por fim, ao comparar como os deslocamentos evoluem com os acréscimos das cargas, nota-se que as metodologias convergem da mesma maneira que o com o carregamento uniformemente distribuído.

Numericamente, em média nos 3 casos discutidos, comparando com a flecha obtida com a inércia de Branson como referência, para as flechas imediatas os comportamentos tem sido o seguinte:

Tabela 4 - Comparativo com Branson – Flechas Imediatas

Comparativo com Branson	$\frac{Gilbert}{Branson}$	$\frac{AEMM}{Branson}$
Viga não fissurada	-13,42%	-0,73%
Viga parcialmente fissurada	+54,03%	+65,51%
Viga completamente fissurada	-14,31%	-10,37%

Como pode-se observar, quando se inicia a fissuração a inércia de Branson realmente superestima a rigidez em comparação à inércia de Bischoff utilizada no

AEMM e na metodologia de Gilbert, enquanto para seções completamente fissuradas a inércia de Branson subestima levemente a rigidez em comparação às demais metodologias.

Enquanto isso para as flechas diferidas, foi comparado com a flecha calculada pela inércia de Branson multiplicada pelo coeficiente α_f da norma NBR 6118:2023 calculado com os mesmos parâmetros do exemplo do artigo de Gilbert (2008).

Tabela 5 - Comparativo com Branson – Flechas Diferidas

	$\frac{Flecha\ comparada}{Branson \times (1 + \alpha_f)}$	
Flecha Diferida (cm) Branson	1.9487	-
Flecha Diferida (cm) AEMM	3.2578	+67.18%
Flecha Diferida (cm) Gilbert	2.7287	+40.03%

Na Tabela 5 - Comparativo com Branson – Flechas Diferida fica evidente a importância da consideração da retração que a norma não leva em conta, sendo que ambas as flechas que consideram este efeito se mostraram muito maiores do que considerando somente o coeficiente α_f da norma.

Enquanto no comparativo do AEMM com a metodologia recomendada por Gilbert, observa-se que o AEMM demonstra resultados muito próximos ao da metodologia de Gilbert, no entanto com o AEMM apresentando flechas recorrentemente superiores em todas as situações.

6. CONCLUSÕES

Os resultados da rotina se mostraram satisfatórios em comparação com os resultados dos cálculos da flecha simplificada da NBR 6118:2023, sendo possível ir além do que a norma propõe, considerando a retração plástica e o coeficiente de fluência no cálculo das flechas diferidas.

A comparação do AEMM com a metodologia recomendada por Gilbert demonstrou resultados consistentes até o momento de fissuração, no entanto superestimando um pouco mais as flechas após a fissuração e após o aumento contínuo dos carregamentos, no entanto ainda apresentando deslocamentos menores que os da NBR 6118:2023 para carregamentos mais elevados.

Além disso, a rotina de cálculo apresentou resultados consistentes para os 3 tipos de vigas mais comumente ensaiados: Vigas biapoias com carregamentos uniformemente distribuídos, com um carregamento concentrado, e com dois carregamentos concentrados, e mais ajustes podem ser feitos para que sejam

considerados os demais tipos de vigas e também a variação das seções transversais de aço ao longo da viga.

Por fim, o presente trabalho recomenda a utilização do *Age-Adjusted Effective Modulus Method* para o cálculo de flechas diferidas no tempo sabendo que a metodologia pode ser uma aplicação intermediária entre o que a NBR 6118:2023 propõe e o que a metodologia recomendada por Gilbert propõe, sendo demonstrado divergências de 40,03 a 67,18% superiores com relação ao que é proposto na norma sem considerar a retração. No entanto sugere-se uma análise de confiabilidade para uma maior validação da metodologia em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT **NBR6118:2023. Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**, 2023.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI). **ACI 209R-92: Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures**. Farmington Hills, MI: ACI, 1992.
- BARBOSA, Felipe Augusto da Silva; SERAFINI, Ramoel; WELTER, Nathanaell V. de C.; FIGUEIREDO, Antonio Domingues de; BITENCOURT JÚNIOR, Luís A. G. **Abordagens para análise não linear dos deslocamentos em vigas de concreto armado**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 65., 2024, São Paulo. Anais [...]. São Paulo: IBRACON, 2024.
- BAZANT, Z. P. **Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method**. ACI Journal, v. 69, p. 212-217, 1972.
- BAZANT, Z. P.; BAWEJA, S. **Creep and Shrinkage Prediction Model for Analysis and Design of Concrete Structures: Model B3**. Materials and Structures, v. 28, p. 357-365, 1995.
- BISCHOFF, P.H. (2005). **Reevaluation of deflection prediction for concrete beams reinforced with steel and FRP bars**. Journal of Structural Engineering, ASCE, 131(5), 752–76.
- BURNS, C. **Serviceability Analysis of Reinforced Concrete Based on the Tension Chord Model**. ETH Zurich, 2011.
- COELHO, J.D. **Confiabilidade de Vigas de Concreto Armado no Estado Limite de Serviço**. UFSC, Florianópolis, 2011.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (CEB-FIP). **CEB-FIP Model Code 1990: Design Code**. Lausanne: Thomas Telford, 1993.
- GILBERT, R. I.; **Calculation of Long-Term Deflection**. ACI Structural Journal, v.105, n.6, p.637-644, 2008.
- GILBERT, R. I.; RANZI, G. **Time-Dependent Behaviour of Concrete Structures**. Spon Press, 2010.
- MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concrete: Microstructure, Properties, and Materials**. 4th ed. McGraw-Hill Education, Berkeley, 2014.
- NEVILLE, A. M.; BROOKS, J. J. **Concrete Technology**. 2nd ed. Pearson Education LTD, London, 2010.
- TROST, H., **Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton, Beton - und Stahlbetonbau**. ETH, Zurich, 1967.

ANEXO A – PLANILHAS DE CÁLCULO

Segue o link no qual as planilhas desenvolvidas e utilizadas para os cálculos podem ser acessadas:

[Rotinas de Cálculo - Excel](#)