

Espaços metrizáveis

Rodrigo Benites dos Santos ¹

Thales Fernando Vilamaior Paiva²

Abstract

This work presents an introduction to the main criteria that characterize the metrizability of topological spaces, highlighting the relevance of the separation and enumerability axioms in analyzing when a topology can be induced by a metric. In this sense, we examine classical metrizability results and present examples of applications, and finally, we highlight Urysohn's Metrization Theorem, the main result of the text.

Keywords: Topological spaces; metric spaces; metrizability.

Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução aos principais critérios que caracterizam a metrizabilidade de espaços topológicos, destacando a relevância dos axiomas de separação e de enumerabilidade na análise de quando uma topologia pode ser induzida por uma métrica. Nesse sentido, examinamos resultados clássicos de metrizabilidade e apresentamos exemplos de aplicações e, ao final, destacamos o Teorema de Metrização de Urysohn, principal resultado do texto.

Palavras-chave: Espaços topológicos; espaços métricos; metrizabilidade.

1 Introdução

O estudo dos espaços topológicos e, em particular, das condições que garantem a sua metrizabilidade, ocupa lugar central na Topologia Geral. Como coloca [5] em seu prólogo, a busca por condições necessárias e suficientes para a metrizabilidade de espaços topológicos é um dos problemas mais antigos e produtivos da topologia.

A noção de espaço métrico X , concebida a partir da definição de uma

¹Graduando em Licenciatura em Matemática pela UFMS, Campus de Aquidauana. E-mail: rodrigo.benites@ufms.br

²Doutor(a) em matemática pela UFSCAR. E-mail: thales.paiva@ufms.br

distância ou métrica (em X), que trata-se de uma função

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty),$$

satisfazendo condições bastante razoáveis (identidade, simetria e desigualdade triangular), possui forte apelo intuitivo e permite, dentre muitas questões teóricas, aplicar técnicas analíticas na investigação de propriedades topológicas. No entanto, desde as primeiras investigações é sabido que nem toda topologia é induzido por uma métrica. Nessa direção podemos mencionar os exemplos clássicos de espaços de funções que surgem naturalmente em contextos explorados pela análise funcional.

De forma geral, dada a sua relevância, diversas conclusões foram sendo obtidas ao longo dos anos, como os teoremas clássicos de metrização Urysohn (1925) e Nagata–Smirnov (1951), que desempenham papel fundamental na teoria. Tais resultados estabelecem condições necessárias e suficientes para que um espaço topológico (X, τ) seja metrizável, envolvendo propriedades como regularidade, normalidade, existência de bases numeráveis e os axiomas de separação (T_1 , T_2 , T_3 , etc.). E, além de fornecer caracterizações abstratas, teoremas de metrizabilidade também produzem ferramentas concretas.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar alguns desses critérios clássicos de metrizabilidade, com ênfase em caracterizações baseadas justamente nos axiomas de separação e de enumerabilidade. Ao final, damos um destaque para o enunciado e demonstração do Teorema de Metrização de Urysohn, que estabelece condições topológicas naturais sob as quais um espaço é garantidamente metrizável, oferecendo assim uma caracterização robusta e amplamente utilizada na teoria moderna.

2 Espaços Topológicos

Definição 2.1. Uma *métrica* em um conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada par $(x, y) \in X \times X$ associa um número real $d(x, y) \in \mathbb{R}$, satisfazendo aos seguintes axiomas:

- (i) $d(x, y) = 0$, $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

para quaisquer $x, y, z \in X$. Chamamos de *espaço métrico* ao par (X, d) em que X é um conjunto não-vazio e d é uma métrica em X .

Exemplo 2.1 (Métrica zero-um ou discreta). Qualquer conjunto não-vazio X pode ser equipado com uma métrica: basta definir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Essa métrica é chamada de métrica zero-um ou métrica discreta.

Exemplo 2.2. A reta real é talvez o exemplo mais relevante de espaço métrico, pois as construções mais gerais surgem naturalmente como uma generalização de sua métrica usual definida pelo valor absoluto, ou seja,

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|.$$

É uma tarefa simples¹ verificar que o par $(\mathbb{R}, d)$ é de fato um espaço métrico.

Uma generalização natural para o caso da reta real se dá por meio dos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$'s. Para $n = 1$ obviamente $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, para $n = 2$ temos o plano euclidiano equipado com a métrica

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

E, de um modo geral, para n um número inteiro positivo qualquer, $\mathbb{R}^n$ é o produto cartesiano de n cópias de $\mathbb{R}$, isto é,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) ; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

equipado com a métrica

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

para $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ quaisquer².

Definição 2.2. Sejam (X, d) um espaço métrico, $a \in X$ e $r > 0$ um número real positivo.

- (a) Chamamos de *bola aberta* de centro em a e raio r ao conjunto $B_r(a)$, dos pontos de X cuja as distâncias até o ponto a é menor que r . Ou seja

$$B_r(a) = \{x \in X ; d(x, a) < r\}.$$

¹Na verdade apenas a desigualdade triangular não é imediata, e uma demonstração desse resultado pode ser encontrada na em [4], p. 14.

²Veja [2], p. 22, para a demonstração completa.

- (b) Chamamos de *A bola fechada* de centro a e raio r ao conjunto $B_r[a]$, dos de X que estão a uma distância menor que ou igual a r do ponto a . Ou seja

$$B_r[a] = \{x \in X; d(x, a) \leq r\}.$$

Definição 2.3. Seja (X, d) um espaço métrico, dizemos que $A \subset X$ é aberto se, para todo $x \in A$, existir um número real $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Dizemos que $F \subset X$ é fechado se $X \setminus F$ é aberto.

Proposição 2.1. *Sejam (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $r > 0$. Então $B_r(x)$ é aberto e $B_r[x]$ é fechado.*

Proposição 2.2. *Seja (X, d) um espaço métrico. Dados quaisquer dois pontos $x, y \in X$, existem abertos A e B disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.*

Proof. Se existisse algum ponto $a \in A(x, r) \cap B(y, s)$, teríamos $d(x, a) < r$ e $d(y, a) < s$. Dai $d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, a) < r + s \leq d(x, y)$ oque é um absurdo. $\square$

Observação 2.1. Espaços que possuem a propriedade apresentada na proposição 2.2 são chamados de Espaços de *Hausdorff* ou T_2 , conforme a definição 2.17 mais geral para espaços topológicos. O que provamos, portanto, é que todo espaço métrico é Hausdorff. Em outras palavras, satisfazer tal propriedade é uma condição necessária para um espaço métrico.

Definição 2.4. Seja X um espaço métrico.

- (a) Um ponto $a \in X$ chama-se *ponto isolado* de X quando ele é uma bola aberta em X .
- (b) Dizemos que X é *discreto* quando todo ponto de X é isolado.

Definição 2.5. Um ponto a diz-se *aderente* a um subconjunto Y de um espaço métrico X quando $d(a, Y) = 0$.

Definição 2.6. O *fecho* (ou aderência) de um conjunto Y num espaço métrico X é o conjunto $\overline{Y}$ dos pontos de X que são aderentes a Y . Portanto, escrever $a \in \overline{Y}$ é o mesmo que afirmar que o ponto a é aderente a Y em X .

Proposição 2.3. *Seja X um espaço métrico. Dado $F \subset X$, tem-se $\overline{F} = F$ se, e somente se, $X \setminus F$ é aberto. Em outras palavras: um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes.*

Proof. É suficiente observar que $\overline{F} = F$ se, e somente se, os pontos que não pertencem a F não são aderentes a F . Isso, por sua vez, é equivalente a dizer que, para todo $a \in X \setminus F$, existe $r > 0$ tal que a bola aberta $B_r(a)$ não contém pontos de F , ou seja, para todo $a \in X \setminus F$, existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset X \setminus F \Leftrightarrow X \setminus F$ é aberto. $\square$

Proposição 2.4. *Os subconjuntos abertos de um espaço métrico X qualquer possuem as seguintes propriedades:*

- (i) *o espaço todo X e o vazio $\emptyset$ são subconjuntos abertos de X ;*
- (ii) *se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ for uma família qualquer (finita ou infinita) de subconjuntos abertos de X , a união $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um subconjunto aberto de X ;*
- (iii) *a interseção $A_1 \cap \dots \cap A_n$ de uma família finita de subconjuntos abertos $A_1, \dots, A_n$ em X é ainda um subconjunto aberto de X .*

Proof. Para (i), é claro que X é aberto; para mostrar que $\emptyset$ é aberto basta notar que um subconjunto qualquer de X só deixa de ser aberto quando existe uma bola tal que nenhuma bola de centro nele esteja contida no conjunto. Como não existe tal ponto, o conjunto vazio não viola tal propriedade.

Com relação a (ii), dado $x \in A$, existe um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe uma bola $B_\epsilon(x)$ contida em A_λ , logo $B_\epsilon(x) \subset A$.

Por fim, Seja $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe uma bola aberta $B_{\epsilon_i}(x)$ contida em A_i . Tomemos $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ de forma que $\epsilon > 0$ e $B_\epsilon(x) \subset B(x; \epsilon_i) \subset A_i$ para cada i , ou seja, $B_\epsilon(x) \subset A_1 \cap \dots \cap A_n$. $\square$

Corolário 2.1. *Os subconjuntos fechados de um espaço métrico X qualquer possuem as seguintes propriedades:*

- (a) *$\emptyset$ e X são conjuntos fechados;*
- (b) *a interseção arbitrária de conjuntos fechados é fechada;*
- (c) *a união finita de conjuntos fechados é fechada.*

Definição 2.7. Seja X um conjunto. Uma *topologia* em X é uma coleção τ de subconjuntos de X que satisfazem aos seguintes axiomas:

- (a) $\emptyset$ e X pertencem a τ

- (b) τ é fechado para interseções finitas, isto é, se $A_1, \dots, A_n \in \tau$ então $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$.
- (c) τ é fechado para uniões arbitrárias, ou seja, se $\mathcal{A} = \{A_i; i \in I\}$ é uma família de elementos de τ , então $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Um *espaço topológico* é um par (X, τ) em que X é um conjunto e τ é uma topologia em X . Nesse caso dizemos que os elementos de τ são os *abertos* do espaço topológico (X, τ) .

Observação 2.2. Na maioria das vezes iremos indicar um espaço topológico (X, τ) simplesmente por X , quando estiver claro qual é a topologia τ que está sendo considerada.

Exemplo 2.3 (Topologia catótica e topologia discreta). Todo conjunto pode ser equipado com ao menos duas topologias. De fato, se X é um conjunto qualquer, podemos sempre considerar

$$\tau = \{\emptyset, X\} \text{ e } \tau' = \{\{x\}; x \in X\},$$

que são chamadas respectivamente de *topologia caótica* e *topologia discreta* em X . É um exercício simples a verificação de que tais famílias constituem de fato topologias em X , segundo a definição 2.7.

Exemplo 2.4. Todo espaço métrico (M, d) é um espaço topológico, graças a Proposição 2.4. Nesse caso indicamos a topologia pelo símbolo τ_d . De forma geral, temos a seguinte definição.

Definição 2.8. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que X é *metrizável* quando existe uma métrica d em X tal que $\tau = \tau_d$.

Exemplo 2.5 (Um espaço não metrizável - espaço de Sierpiński). Conforme demonstramos na proposição 2.2 assim como na observação 2.1, todo espaço métrico é Hausdorff, dessa forma, se todo espaço topológico fosse metrizável ele seria também Hausdorff. Entretanto, considerando $X = \{0, 1\}$ com a topologia $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$, observe que este não é Hausdorff, portanto não deve existir nenhuma métrica d em X para a qual $\tau = \tau_d$. Este espaço é conhecido como *espaço de Sierpiński*. Para apresentar uma exemplo menos artificial, precisaremos de alguns conceitos preliminares que faremos a seguir.

Definição 2.9. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que um subconjunto $F \subseteq X$ é *fechado* se seu complementar $X \setminus F$ é aberto, ou seja, $X \setminus F \in \tau$.

Definição 2.10. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$.

(a) Chamamos de *fecho* de A ao subconjunto

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

onde $\mathcal{F} = \{F \subset X; F \text{ é fechado e } A \subset F\}$.

(b) Chamamos de *interior* de A ao subconjunto

$$\text{int}(A) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$$

onde $\mathcal{V} = \{V \subset X; V \text{ é aberto e } V \subset A\}$.

Proposição 2.5. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A}$ é um subconjunto fechado enquanto o interior $\text{int}(A)$ é um subconjunto aberto.

Definição 2.11. Seja X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Um ponto $x \in X$ é chamado de *ponto aderente* de A se para todo aberto V com $x \in A$, a interseção $V \cap A$ é não-vazia.

Proposição 2.6. Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A}$ é precisamente o conjunto dos pontos aderentes a A .

Definição 2.12. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma *base* para (X, τ) se, para cada aberto não vazio $A \in \tau$, existe uma família $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B.$$

Proposição 2.7. Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de τ é uma base de (X, τ) se, e somente se, para todo aberto não vazio $A \in \tau$ e para cada ponto $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Exemplo 2.6. Seja X um conjunto qualquer. A coleção formada por todos os subconjuntos unitários de X é uma base para a topologia discreta em X .

Definição 2.13. Seja X um espaço topológico. Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X é chamada de *sub-base* para X se o conjunto das interseções finitas de elementos de $\mathcal{B}$,

$$\{B_1 \cap \cdots \cap B_n; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\},$$

constitui uma base para a topologia em X .

Definição 2.14. Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $x \in X$. Dizemos que uma família $\mathcal{B}_x = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vizinhanças de x é uma *base local enumerável* em x se:

1. Cada B_n é uma vizinhança de x , isto é, $x \in \text{int}(B_n)$;
2. Para toda vizinhança V de x , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_n \subseteq V$.

Definição 2.15. Dizemos que um espaço topológico X é T_0 se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existir um aberto que contenha somente um dos pontos. Isto é, $x \in A$ e $y \notin A$ ou $x \notin A$ e $y \in A$.

Exemplo 2.7. Todo espaço com pelo menos dois pontos equipado com a topologia caótica não é T_0 , enquanto todo espaço (com pelo menos dois pontos distintos) discreto o é.

Proposição 2.8. Um espaço topológico X é T_0 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos e para quaisquer bases locais $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$, para x e y respectivamente, tem-se $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.

Definição 2.16. Dizemos que um espaço topológico X é T_1 quando para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existir um aberto $A \subseteq X$ tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

Proposição 2.9. Um espaço topológico X é T_1 se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é fechado.

Exemplo 2.8. Qualquer conjunto X equipado com a topologia cofinita é um exemplo de espaço T_1 .

Exemplo 2.9. Todo espaço métrico é T_1 . De fato, se (X, d) é um espaço métrico e $x \in X$ é um ponto qualquer, então dado $y \in X \setminus \{x\}$ temos $B_r(y) \subseteq X \setminus \{x\}$, para $r = d(x, y) > 0$, o que garante que o complementar de $\{x\}$ é aberto em X .

Definição 2.17. Dizemos que um espaço topológico X é T_2 ou de *Hausdorff* quando, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existirem abertos disjuntos $A, B \subseteq X$ tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Observação 2.3. A definição acima trata-se exatamente da generalização da propriedade homônima para os espaços métricos, conforme a proposição 2.2. A grande diferença é que nem todos os espaços topológicos gozam dessa propriedade, conforme o exemplo 2.5. Além disso, ser T_2 implica em ser T_1 , mas a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 2.10. Seja X um espaço topológico munido da topologia cofinita. Se X for infinito, então será T_1 mas não será T_2 . Com efeito, veja que se x e y são pontos distintos em X , então para A e B abertos que contenham x e y , respectivamente, então naturalmente $A = X \setminus F_1$ e $B = X \setminus F_2$, com F_1 e F_2 finitos. Então $A \cap B = X \setminus (F_1 \cup F_2)$, não satisfazendo portanto a condição para ser T_2 .

Definição 2.18. Dizemos que um espaço topológico X é T_3 quando para quaisquer $x \in X$ e $F \subset X$ fechado, com $x \notin F$, existem $A, B \subseteq X$ abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $F \subset B$. Se, além disso, X for T_1 , diremos que ele é um espaço *regular*.

Exemplo 2.11. Todo espaço métrico é regular. De fato, se (X, d) é um espaço métrico e $x \in X$ e F fechado com $x \notin F$, basta tomar

$$r = \frac{1}{2}d(x, F) = \frac{1}{2} \inf\{d(x, y) ; y \in F\} > 0$$

e definir os abertos $A = B_r(x)$ e $B = X \setminus B_r[x]$.

Proposição 2.10. Um espaço topológico X é T_3 se, e somente se, para todo $x \in X$ para todo aberto $V \subseteq X$ aberto com $x \in V$, existe um aberto $A \subseteq X$ tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset V$.

Definição 2.19. Dizemos que X é T_4 se, para quaisquer $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existirem A, B abertos disjuntos, tais que $F \subset A, G \subset B$. Se, além disso, X for T_1 então X é chamado de *espaço normal*.

Exemplo 2.12 (A reta de Sorgenfrey). No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais considere a topologia gerada a partir da base $\mathcal{B} = \{[a, b) ; a < b\}$. Tal espaço topológico é conhecido pelo nome de *A reta de Sorgenfrey*, e frequentemente indicada pelo símbolo $\mathbb{R}_S$. Vamos mostrar que $\mathbb{R}_S$ é normal.

Primeiramente note que é T_1 : Sejam F, G fechados disjuntos. Para cada $a \in F$ e cada $b \in G$, sejam $x(a)$ e $y(b)$ de forma que

$$[a, x(a)) \cap G = \emptyset \quad \text{e} \quad [b, y(b)) \cap F = \emptyset.$$

Podemos fazer isso pois os complementares de F e G são abertos. Sejam

$$A = \bigcup_{a \in F} [a, x(a)) \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{b \in G} [b, y(b)).$$

Note que $F \subset A$ e $G \subset B$, e que A e B são abertos. Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que não. Então existe $c \in A \cap B$. Para tanto, existem $a \in F$ e $b \in G$ tais que

$$c \in [a, x(a)) \cap [b, y(b)).$$

Caso $a < b$: então $x(a) < b$, pois $b \notin [a, x(a))$; logo $[a, x(a)) \cap [b, y(b)) = \emptyset$, absurdo. Se $b < a$, obtém-se uma contradição de maneira análoga. É claro que $a = b$ não pode ocorrer por estarmos supondo $F \cap G = \emptyset$.

Observação 2.4. Apesar da reta de Sorgenfrey ser normal, conforme vimos no exemplo anterior, é possível mostrar³ que o produto $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal. Em particular, produto de espaços normais não é necessariamente normal.

Definição 2.20. Dizemos que um espaço topológico satisfaz o *primeiro axioma de enumerabilidade* se, para todo $x \in X$, existe um sistema fundamental de vizinhanças (bases locais enumeráveis)

Exemplo 2.13. Todo espaço métrico (X, d) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Para isso basta notar que $\{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para cada $x \in X$.

Definição 2.21. Dizemos que X satisfaz o *segundo axioma de enumerabilidade* se admite uma base enumerável.

Exemplo 2.14. A reta real satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, já que $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base.

Definição 2.22. Seja X um espaço topológico e sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X . Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $x \in X$ se para toda vizinhança V de x existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $x_n \in V$. Notação $x_n \rightarrow x$.

Observação 2.5. Sabemos que o segundo axioma de enumerabilidade implica no primeiro: se B é uma base enumerável para a topologia de X , então o subconjunto de B formado por aqueles elementos da base que contém o ponto x é uma base enumerável em x . O segundo axioma, é de fato mais forte do que primeiro, pois ele é verificado em todo espaço métrico.

³Vide proposição 4.2.3 em [1].

Definição 2.23. Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é uma *cobertura* (ou *recobrimento*) de X se

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X.$$

Quando todos os conjuntos de $\mathcal{A}$ são abertos em X , dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *cobertura aberta*.

Definição 2.24. Um espaço topológico (X, τ) é dito *compacto* se, para toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de X , existe uma subcobertura finita $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ tal que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A = X.$$

Em outras palavras, é possível cobrir X com um número finito de abertos da cobertura inicial.

Exemplo 2.15. Subconjuntos finitos constituem os primeiros exemplos de compactos, por razões óbvias. Também qualquer intervalo fechado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ é compacto, com a topologia usual da reta, o que embora não seja um resultado imediato, assumiremos como verdadeiro⁴.

Proposição 2.11. *Sejam X um espaço compacto e $F \subset X$ um fechado. Então F é compacto.*

Proof. Considere $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de F . Para cada $A \in \mathcal{A}$, seja A^* um aberto em X tal que $A^* \cap F = A$. Defina $\mathcal{A}^* = \{A^* : A \in \mathcal{A}\}$. Observe que $\mathcal{A}^* \cup \{X \setminus F\}$ constitui uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, essa cobertura admite uma subcobertura finita. Logo, $\mathcal{A}$ também possui uma subcobertura finita, o que mostra que F é compacto. $\square$

Lema 2.1. *Sejam X um espaço de Hausdorff, $x \in X$ e $K \subset X$ um compacto tal que $x \notin K$. Então existem abertos A e B tais que $x \in A$, $K \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.*

Proof. Para cada $y \in K$, como X é de Hausdorff, existem abertos A_y e B_y tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como K é compacto, existem pontos $y_1, \dots, y_n \in K$ tais que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

⁴Para uma demonstração, veja o exemplo 1 na p. 210 de [3]

Defina então

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i} \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Os conjuntos A e B são abertos, com $x \in A$ e $K \subset B$. Suponha, por contradição, que $A \cap B \neq \emptyset$. Então existe $z \in A \cap B$, e portanto $z \in B_{y_j}$ para algum j . Mas como $z \in A \subseteq A_{y_j}$, temos $z \in A_{y_j} \cap B_{y_j}$, o que é impossível. Logo, $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Proposição 2.12. *Sejam X um espaço de Hausdorff e $F \subset X$ um compacto. Então F é fechado.*

Proof. Seja $x \in X \setminus F$. Pelo lema anterior, existem abertos A e B tais que $x \in A$, $F \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. Isso mostra que $x \in X \setminus B$, o qual é aberto, logo F é fechado. $\square$

Corolário 2.2. *Seja X um espaço compacto e Hausdorff. Um subconjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, F for compacto.*

Proposição 2.13. *Sejam X um espaço de Hausdorff e $F, G \subset X$ compactos e disjuntos. Então existem abertos A e B tais que $F \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.*

Proof. Como F e G são compactos e disjuntos, pelo Lema anterior, para cada $x \in F$ e $y \in G$ existem abertos A_y e B_y tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como G é compacto, existem pontos $y_1, y_2, \dots, y_n \in G$ tais que

$$G \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Definimos então

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i} \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Os conjuntos A e B são abertos, $F \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Proposição 2.14. *Todo espaço compacto de Hausdorff é normal.*

3 Funções contínuas

Definição 3.1. Sejam X e Y espaços topológicos. Diz-se que uma função $f : X \rightarrow Y$ é *contínua* em um ponto $x \in X$ se, para cada vizinhança B de $f(x)$ existe uma vizinhança A de x de forma que $f(A) \subseteq B$. De forma geral, diremos que f é contínua se for contínua em todo ponto, ou seja, quando para qualquer B aberto em Y a pré-imagem $f^{-1}(B)$ é aberto em X .

Exemplo 3.1. Para qualquer espaço topológico X , a função identidade $I(x) = x$, para todo $x \in X$, é obviamente contínua. Também qualquer função constante $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = y_0$, para todo $x \in X$ e $y_0 \in Y$ fixado, é contínua, uma vez que $\text{Im}(f) = \{y_0\}$ e $f^{-1}(B) = X$ para todo aberto $B \subseteq Y$ com $y_0 \in B$.

Observação 3.1. Note que a definição de continuidade de uma função está intrinsecamente associada às topologias dos espaços envolvidos. Além disso, se $f : X \rightarrow Y$ é uma função e se a topologia de Y é dada por uma base $\mathcal{B}$, então para verificar a continuidade de f é suficiente mostrar que a imagem inversa de cada elemento básico é aberta: um conjunto aberto arbitrário V de Y pode ser escrito como uma união de elementos básicos

$$V = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha.$$

Assim,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha)$$

de modo que $f^{-1}(V)$ é aberto sempre que cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ for aberto.

Analogamente, se a topologia sobre Y é dada por uma sub-base $\mathcal{S}$, então para verificar a continuidade de f é suficiente mostrar que a imagem inversa de cada elemento da sub-base é aberto: se um elemento básico B de Y pode ser escrito como uma interseção finita $B = S_1 \cap \dots \cap S_n$ de elementos da sub-base, deduz-se da equação

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \dots \cap f^{-1}(S_n)$$

que a imagem inversa de cada elemento básico é aberto.

Exemplo 3.2. Considere uma função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nas disciplinas de cálculo e análise, tradicionalmente a continuidade de f é definida mediante ao uso dos *epsilons* e *deltas*, o que pode contribuir para a percepção errônea de que trata-se de um conceito não geométrico. A fim de verificar que tal definição e a versão topológica que apresentamos aqui são equivalentes, seja $x_0 \in \mathbb{R}$, e dado $\varepsilon > 0$, o intervalo

$$V = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

é um conjunto aberto do espaço de chegada $\mathbb{R}$. Portanto, $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto no espaço de saída $\mathbb{R}$.

Como $f^{-1}(V)$ contém o ponto x_0 , ele deve conter algum elemento básico (a, b) ao redor de x_0 . Escolhemos δ como sendo o menor dos dois números $x_0 - a$ e $b - x_0$.

Assim, se $|x - x_0| < \delta$, então o ponto x deve pertencer a (a, b) , de modo que $f(x) \in V$, ou seja,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

mostrando que, de fato, a definição topológica trata-se generaliza o conceito de continuidade vista nas disciplinas introdutórias.

Proposição 3.1. *A composição entre funções contínuas é uma função contínua.*

Definição 3.2. Considere o conjunto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com a topologia gerada pelos conjuntos da forma $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ou $\{\infty\} \cup A$, em que $\mathbb{N} \setminus A$ é finito. Chamamos esse espaço de *espaço de sequência convergente*.

Proposição 3.2. *Seja X um espaço topológico e seja $f : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow X$ uma função. Então, f é contínua se, e somente se, $f(n) \rightarrow f(\infty)$ (i.e., a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que cada $x_n = f(n)$, é convergente para $x = f(\infty)$)*

Proposição 3.3. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in X$. Então $f(x_n) \rightarrow f(x)$*

Proof. Seja $\psi : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow X$, com $\psi(n) = x$ e $\psi(\infty) = x_n$. Note que h é contínua pela proposição anterior. veja também que $f \circ h$ é contínua, pela composição de funções contínuas. Note que $(f \circ \psi)(n) = f(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ e $(f \circ \psi)(\infty) = f(\infty)$. Pela proposição anterior $(f \circ \psi)$ temos $f(x_n) \rightarrow f(x)$. $\square$

Proposição 3.4. *Sejam X e Y espaços topológicos, onde X possui bases locais enumeráveis. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \rightarrow x$, tem-se $f(x_n) \rightarrow f(x)$.*

Proof. Já está feito supondo f contínua. Para a recíproca, sejam $x \in X$ e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base local para x . Seja A aberto em Y tal que $f(x) \in A$. Mostremos que existe V aberto tal que $x \in V \subset f^{-1}(A)$.

Suponha, por contradição, que não existe. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\bigcap_{k \leq n} B_k \not\subset f^{-1}(A)$. Seja $x_n \in \bigcap_{k \leq n} B_k$ tal que $f(x_n) \notin A$. Agora, observe que $x_n \rightarrow x$. De fato, seja $V \supset x$ aberto. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset V$. Portanto, para todo $m \geq n$, $x_m \in V$.

Note, também, que $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$. De fato, veja que $f(x) \in A$, que é aberto e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \notin A$, o que é contradição. $\square$

Definição 3.3. Sejam X e Y espaços topológicos e $A \subset X$ e $f : A \rightarrow Y$ uma função contínua. Dizemos que uma função contínua $g : X \rightarrow Y$ é uma *extensão* de f quando $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$.

Proposição 3.5. *Sejam X e Y espaços topológicos, com Y Hausdorff. Se $D \subset X$ é denso e $f, g : X \rightarrow Y$ são funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, então $f = g$. Isto é, os valores de f em um subconjunto denso determinam, no máximo, uma única função contínua.*

Proof. Admitamos, por contradição, que $f \neq g$. Então existe $x \in X$ com $f(x) \neq g(x)$. Como Y é Hausdorff, existem abertos disjuntos A e B com $f(x) \in A$ e $g(x) \in B$. Assim, $f^{-1}[A]$ e $g^{-1}[B]$ são abertos em X que contêm x . Portanto, existe $d \in f^{-1}[A] \cap g^{-1}[B]$. Mas como $d \in D$, temos $f(d) = g(d)$, o que é impossível. $\square$

Lema 3.1. *Seja X um espaço topológico e suponha que exista uma família de fechados $(F_s)_{s \in \mathbb{Q}}$ satisfazendo as condições*

1. $F_r \subset \text{Int}(F_s)$ sempre que $r < s$;

2. $\bigcup_{s \in \mathbb{Q}} F_s = X$;

3. $\bigcap_{s \in \mathbb{Q}} F_s = \emptyset$.

Então a função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in F_r\}$, é contínua.

Proof. Primeiro, note que φ está bem definida graças às condições (2) e (3). Para verificar a continuidade, tomemos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e mostremos que

$$\varphi^{-1}[[a, b]] = \bigcup_{(r,s) \in Q} (\text{Int}(F_s) \setminus F_r),$$

onde

$$Q = \{(r, s) \in \mathbb{Q}^2 : a < r < s < b\}.$$

De fato:

$\Rightarrow$ Se $x \in \varphi^{-1}[[a, b]]$, então $a \leq \varphi(x) \leq b$. Assim, podemos escolher racionais r, s tais que $a < r < \varphi(x) < s < b$. Como $\varphi(x) < s$, temos $x \in F_s \subset \text{Int}(F_s)$. Além disso, $\varphi(x) > r$ implica $x \notin F_r$. Portanto, $x \in \text{Int}(F_s) \setminus F_r$.

$\Leftarrow$ Se $x \in \text{Int}(F_s) \setminus F_r$ para algum $(r, s) \in Q$, então $x \in F_s$ e $x \notin F_r$. Isso implica $r < \varphi(x) \leq s$. Como $a < r < s < b$, obtemos $a \leq \varphi(x) \leq b$, logo $x \in \varphi^{-1}[[a, b]]$.

Assim, a igualdade está verificada, e concluímos que $\varphi^{-1}[[a, b]]$ é aberto, já que é união de abertos. Portanto, φ é contínua. $\square$

Proposição 3.6. *Seja X um espaço topológico T_4 , $A \subseteq X$ um fechado e $f : A \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua. Então existe uma extensão $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ de f .*

Corolário 3.1. *Um espaço topológico X é T_4 se, e somente se, para quaisquer fechados disjuntos F e G , existir uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(F) = \{0\}$ e $f(G) = \{1\}$.*

Proof. Como a função $g : F \cup G \rightarrow [0, 1]$, definida por $g(x) = 0$ se $x \in F$ e $g(x) = 1$ se $x \in G$ é contínua, qualquer extensão f de g segundo a proposição anterior satisfaz a condição. Reciprocamente, note que

$$f^{-1}[0, 1/2) \text{ e } f^{-1}f^{-1}(1/2, 1]$$

são abertos. $\square$

Definição 3.4. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Dizemos que f é um *homeomorfismo* quando é bijetora e sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é também contínua. Nesse caso, diremos que os espaços X e Y são *homeomorfos*, e indicamos pelo símbolo $X \cong Y$.

Observação 3.2. Em geral, mostrar que dois espaços topológicos são homeomorfos é menos custoso do que o contrário, já que basta exibir uma função que cumpre essa tal condição. Por conta disso faz-se uso de ferramentas que detectam características de espaços que eventualmente podem ser homeomorfos, isto é, são invariantes por homeomorfismos. Éssa é a motivação da próxima definição.

Definição 3.5. Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma propriedade $\mathcal{P}$ de X é um *invariante topológico* quando ela é preservada por homeomorfismos. Ou seja, se Y é um espaço homeomorfo a X , então também satisfaz $\mathcal{P}$.

Exemplo 3.3. Todos os axiomas de separação e as propriedades de enumerabilidade apresentados anteriormente são invariantes topológicos.

Proposição 3.7. *A metrizabilidade é um invariante topológico.*

Proof. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Suponha que X seja metrizável, isto é, existe uma métrica d em X tal que $\tau_X = \tau_d$. Definimos então a função $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_Y(y_1, y_2) = d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$$

para $y_1, y_2 \in Y$.

Veja que d_Y é uma métrica em Y , pois $(d_Y(y_1, y_2) = 0$ se, e somente se,

$$d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = 0,$$

o que ocorre se, e somente se, $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, isto é, $y_1 = y_2$. A simetria segue imediatamente da simetria de d , enquanto a desigualdade triangular é verificada da seguinte forma: para $y_1, y_2, y_3 \in Y$, veja que

$$\begin{aligned} d_Y(y_1, y_3) &= d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_3)) \\ &\leq d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) + d(f^{-1}(y_2), f^{-1}(y_3)) \\ &= d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3). \end{aligned}$$

Por construção, a aplicação f é uma isometria⁵ quando vista como uma aplicação entre os espaços métricos (X, d) e (Y, d_Y) , pois para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ vale

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d(f^{-1} \circ f(x_1), f^{-1} \circ f(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Portanto, por construção, a topologia induzida por d_Y em Y é exatamente a topologia de Y , ou seja, $\sigma = \sigma_{d_Y}$ e Y é metrizável. $\square$

Observação 3.3. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Se f é injetora, ma não necessariamente sobrejetora, então a função $\tilde{f} : X \rightarrow f(X) \subseteq Y$, que trata-se apenas de f com o contra-domínio restrito apenas à imagem de f , é um homeomorfismo. Ou seja, sempre que f for uma aplicação injetora, então é possível identificar X com a sua imagem $f(X)$ em Y .

Definição 3.6. Sejam X e Y espaço topológicos. Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um *mergulho* (topológico) quando $X \cong f(X)$.

⁵Isto é, f preserva as distâncias.

Exemplo 3.4. Sejam (X, τ) um espaço topológico e (Y, d) um espaço métrico. Se existir um mergulho $f : X \rightarrow Y$, então X é metrizable. Com efeito, basta verificar que

$$d_X(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$$

define uma métrica em X , de forma que $\tau = \tau_{d_X}$.

Observação 3.4. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. O conjunto de todos os subconjuntos da forma $A \times B$, onde $A \in \tau$ e $B \in \sigma$ é claramente uma topologia em $X \times Y$, que é chamada apropriadamente de *topologia produto*. Observe que se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ forem bases para (X, τ) e (Y, σ) , respectivamente, então

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2; B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

é uma base para a topologia produto em $X \times Y$. Além disso, esta é a menor topologia em $X \times Y$ que torna as projeções $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ contínua. Com efeito, os conjuntos em

$$\{\pi_X^{-1}[V]; V \text{ aberto em } X\} \cup \{\pi_Y^{-1}[W]; W \text{ aberto em } Y\}$$

geram tal topologia em $X \times Y$. Tal construção serve de motivação para a seguinte generalização.

Definição 3.7. Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de funções, onde X é um conjunto e cada (Y_α, τ_α) é um espaço topológico. A *topologia fraca* induzida por $\mathcal{F}$ é a topologia em X gerada pelos conjuntos

$$f_\alpha^{-1}[V], \quad \alpha \in A, V \in \tau_\alpha.$$

Observação 3.5. Por construção, cada f_α como na definição anterior é contínua relativamente à topologia fraca induzida pela família $\mathcal{F}$.

Definição 3.8. Seja $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos. A *topologia produto*⁶ em

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A}; x_\alpha \in X_\alpha \forall \alpha \in A\}.$$

é a topologia fraca na qual as projeções

$$\pi_\alpha : \prod_{\beta \in A} X_\beta \longrightarrow X_\alpha, \quad \pi_\alpha((x_\beta)_{\beta \in A}) = x_\alpha,$$

são todas contínuas, de forma que os conjuntos $\pi_\alpha^{-1}[U]$ com U aberto em X_α constituem uma subbase para essa topologia.

⁶Também chamada de topologia de *Tychonoff*.

Observação 3.6. Note que a topologia produto é gerada pelos conjuntos da forma $\prod_{\beta \in A} V_\beta$, onde

$$V_\beta = \begin{cases} V, & \text{se } \beta = \alpha, \\ X_\beta, & \text{se } \beta \neq \alpha, \end{cases}$$

com V aberto em X_α . Assim, $\pi_\alpha^{-1}[V] = \prod_{\beta \in A} V_\beta$.

Proposição 3.8. Se $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família de conjuntos fechados em X_α , então $\prod_{\alpha \in A} F_\alpha$ é fechado em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Proposição 3.9. Se cada espaço topológico X_α , $\alpha \in A$, é T_i , para $i = 1, 2, 3$, então o produto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é T_i , $i = 1, 2, 3$.

Proof. Veja a proposição 4.1.7 em [1]. □

Observação 3.7. Já sabemos pela observação 2.4 que o produto de espaços normais não é, necessariamente, normal.

Proposição 3.10. Se cada espaço topológico X_α , $\alpha \in A$, satisfaz o primeiro (resp. segundo) axioma de enumerabilidade, então o produto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ também o satisfaz.

Proof. Veja a proposição 4.2.1 em [1]. □

Theorema 3.1 (Tychonoff). Se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma família de espaços compactos, então o produto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é compacto.

Proof. Veja o teorema 5.2.1 em [1]. □

Observação 3.8 (Métrica em produto de espaços métricos). Se $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ são espaços métricos, então não é difícil perceber que a função

$$d : \prod_{i=1}^n X_i \times \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathbb{R}$$

$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = d_1(x_1, y_1) + \dots + d_n(x_n, y_n)$ define uma métrica em $\prod_{i=1}^n X_i$, que por razões óbvias é chamada de *métrica produto*.

O “problema” reside em reproduzir tal construção para um número infinito de espaços, pois não se pode garantir, em geral, que a série

$$\sum_{\alpha \in A} d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$$

seja convergente, para uma família qualquer de espaços métricos $\{X_\alpha, d_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Definição 3.9. Seja $\{X_\alpha, d_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de espaços métricos e suponha que, para cada $\alpha \in A$ exista, uma constante $c_\alpha > 0$ tal que a série $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha$ seja convergente e $d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \leq c_\alpha$ sejam quais forem $x_\alpha, y_\alpha \in M_\alpha$. Então a métrica em $M = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$,

$$d(x, y) = \sum_{\alpha \in A} d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha).$$

está bem definida, e torna o par

$$\left(M = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha, d \right)$$

um espaço métrico, chamado de *produto* da família $\{M_\alpha, d_\alpha\}$. A métrica d é chamada de *métrica produto*.

Exemplo 3.5 (Espaço de Hilbert e cubo de Hilbert). Chamamos de *espaço de Hilbert* ao espaço métrico H , constituído por todas as sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge, equipado com a métrica

$$d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

É possível mostrar (veja a p. 64 de [5]) que H é homeomorfo a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, o produto enumerável de cópias de $\mathbb{R}$.

Seja $\mathcal{J} \subset H$ das sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $0 \leq x_j \leq 1/j$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Este espaço, equipado com a métrica induzida (subespaço), é chamado de *cubo de Hilbert*, por ser homeomorfo ao produto $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Explicitamente, a função

$$g : \mathcal{J} \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}, \quad g(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$$

é um homeomorfismo, ou seja, $g : \mathcal{J} \cong H$.

Além disso, a métrica em $\mathcal{J}$ coincide com a métrica produto e, como cada intervalo $[0, 1]$ é compacto, segue pelo teorema 3.1 que $\mathcal{J}$ é um espaço métrico compacto.

4 O Teorema de Urysohn e aplicações

Observação 4.1. Já sabemos pela proposição 2.2 que todo espaço metrizável é T_2 . Este fato constitui talvez a obstrução mais simples para verificar se um espaço topológico é ou não metrizável, e pudemos verificar sua aplicação conforme o exposto nos exemplos 2.5 e 2.10. A seguir faremos a construção de um exemplo mais interessante.

Exemplo 4.1 (Convergência em quase todo ponto). Seja $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ o conjunto de todas as funções reais $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos uma topologia em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tomando como base os conjuntos da forma

$$U(f; F, \{I_x\}_{x \in F}) = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}; g(x) \in I_x \text{ para todo } x \in F\},$$

onde $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ é uma função dada, $F \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito e, para cada $x \in F$, o conjunto $I_x \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto.

Dessa forma, uma vizinhança básica de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ controla o valor da função apenas em um conjunto finito de pontos. Fora de F , nenhuma restrição é imposta.

Nesta topologia, dizemos que uma sequência (g_n) converge para f se, para cada n , $g_n(x) = f(x)$ para todos os valores de x fora de um conjunto finito (dependente de n).

É uma noção de convergência extremamente fraca, no sentido de que não exige controle uniforme nem controle pontual global.

Vejamos que tal topologia não é Hausdorff: Considere duas funções distintas $f, g \in Y$ tais que elas diferem apenas em um conjunto finito

$$K = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq g(x)\}$$

e vejamos que f e g não podem ser separadas por vizinhanças abertas distintas.

Seja $U(f; F, \{I_x\})$ uma vizinhança básica de f . Como F é finito, basta escolher F grande o bastante para conter o conjunto finito K onde f e g diferem. Nessa situação, teremos $g \in U(f; F, \{I_x\})$ sempre que cada intervalo I_x contém $f(x)$. E de modo semelhante, toda vizinhança de g contém f .

Explicitamente, considere as funções $f \equiv 0$ identicamente nula e $g(x) = 1$ se $x = 0$ e $g(x) = 0$ para todo $x \neq 0$. Observe que elas diferem apenas no ponto 0. Assim, se $0 \notin F$, então toda vizinhança básica $U(f; F, \{I_x\})$ de f contém g . Se $0 \in F$, basta tomar I_0 um intervalo aberto contendo 0 para que novamente g pertença à vizinhança. Portanto não há abertos disjuntos que separem f de g .

Proposição 4.1. *Todo espaço metrizável é normal.*

Proof. Seja (X, τ_d) um espaço topológico metrizável, com métrica d , e sejam A e B subconjuntos fechados disjuntos de X . Para cada $a \in A$, escolhemos $\varepsilon_a > 0$ de tal modo que $B_{\varepsilon_a}(a) \cap B = \emptyset$ e, similarmente, para cada $b \in B$,

escolhemos $\varepsilon_b > 0$ de tal modo que $B_{\varepsilon_b}(b) \cap A = \emptyset$. Definindo

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon_a/2) \quad \text{e} \quad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \varepsilon_b/2).$$

temos U e V conjuntos abertos que contêm A e B , respectivamente, e disjuntos. De fato, se existisse $z \in U \cap V$, então

$$z \in B(a, \varepsilon_a/2) \cap B(b, \varepsilon_b/2)$$

para algum $a \in A$ e algum $b \in B$. Pela desigualdade triangular, temos

$$d(a, b) < \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2}.$$

Mas se $\varepsilon_a \leq \varepsilon_b$, então $d(a, b) < \varepsilon_b$, de modo que a bola $B_{\varepsilon_b}(b)$ conteria o ponto a . Se $\varepsilon_b \leq \varepsilon_a$, então $d(a, b) < \varepsilon_a$, de modo que o ponto b estaria na bola $B_{\varepsilon_a}(a)$. Como nenhuma dessas situações é possível, segue o resultado. $\square$

Observação 4.2. Até agora, graças aos resultados dos exemplos 2.9, 2.11 e proposições 2.2 e 4.1 que todo espaço metrizável é T_1, T_2, T_3 e T_4 . Em símbolos, podemos sintetizar essa infirmação por

$$\text{Metrizável} \implies T_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Observação 4.3. Enquanto o exemplo 2.13 estabelece que todo espaço metrizável deve satisfazer o primeiro axioma de enumerabilidade, o mesmo não ocorre com o segundo axioma de enumerabilidade. De fato, se tomarmos a reta real com a métrica discreta veremos que este não satisfaz ao segundo axioma de enumerabilidade, já que a base $\{\{x\}; x \in \mathbb{R}\}$ é obviamente não-enumerável.

Proposição 4.2. (*Urysohn*) *Todo espaço de Hausdorff normal X , com base unenumerável, é homeomorfo a um subespaço do cubo de Hilbert C . Em consequência, X é metrizável.*

Proof. A estratégia da demonstração consiste em construir uma forma de mergulhar X no cubo de Hilbert, no sentido do exemplo 3.4, razão pela qual o resultado é conhecido na literatura como *teorema do mergulho de Urysohn* ou mesmo *teorema de metrização de Urysohn*. O resultado seguirá do fato de que o cubo de Hilbert é metrizável, conforme o exposto no exemplo 3.5.

Para isso, seja $\mathcal{B} = (B_n)$ uma base enumerável de X . Diremos que um par ordenado $P = (B_m, B_n)$ é admissível quando $B_m \subset B_n$. Evidentemente,

o conjunto dos pares admissíveis é enumerável. Escolhamos, de uma vez por todas, uma enumeração

$$(P_1, P_2, \dots, P_i, \dots)$$

dos pares admissíveis. Para cada par admissível $P_i = (B_m, B_n)$, podemos escolher uma função contínua $f_i : X \rightarrow C$ pondo, para todo $f_i(B_m) = 1$ e $f_i(X - B_n) = 0$. Definimos uma aplicação $f : X \rightarrow C$, por

$$f(x) = (f_1(x)/2, f_2(x)/2^2, \dots).$$

segue que f é contínua. Mostraremos que f é injetora.

Como X é de Hausdorff, dados $x \neq y$, existe i em $\mathcal{B}$ tal que $x \in B_m$, $y \notin B_n$. Assim, pelo corolário 3.1, existe uma função f_i tal que $f_i(x) = 1$ e $f_i(y) = 0$. Logo, $f(x) \neq f(y)$.

Finalmente, para provar que f é um homeomorfismo de X sobre $f(X)$, resta mostrar que f transforma abertos de X em abertos de $f(X)$. É suficiente considerar um aberto da forma B_k . Dado B_k , seja $J \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices i tais que existe um par admissível $P_i = (B_m, B_n)$ cujo segundo elemento é B_k . Note que, quando $i \in J$, o conjunto

$$A_i = \{y \in C; y_i > 0\}$$

é aberto em C , pois $f_i(X \setminus B_k) = 0$. Logo, $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ também é aberto em C . Afirmamos que

$$f(B_k) = A \cap f(X),$$

o que garantirá que $f(B_k)$ é aberto em $f(X)$. Ora, em primeiro lugar, se $x \in B_k$, então, pelo lema, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m \subset B_n = B_k$. Assim, $P_i = (B_m, B_n)$ é um par admissível, com $f_i(x) = 1$. Segue-se que $f(x) \in A_i \subset A$, donde $f(x) \in A \cap f(X)$. Isto mostra que

$$f(B_k) \subset A \cap f(X).$$

Reciprocamente, se $f(x) \in A \cap f(X)$ então existe $i \in J$ tal que $f_i(x) > 0$ e portanto $x \in B_k$. Portanto, $A \cap f(X) \subset f(B_k)$. $\square$

Definição 4.1. Chamamos de *variedade topológica* de dimensão n a qualquer espaço topológico X de Hausdorff que satisfaça o segundo axioma de enumerabilidade e que, além disso, para cada ponto $x \in X$, existam $U_x \subseteq X$ um aberto contendo x e um homeomorfismo $\varphi : U_x \rightarrow \varphi(U_x) \subseteq \mathbb{R}^n$. Tais espaços são

bastante relevantes constituem uma importante classe de espaços topológicos, podendo ser percebidos como uma generalização dos espaços euclidianos. Por essa razão podemos nos referir a eles como espaços localmente euclidianos.

Observação 4.4. Não é difícil perceber que toda variedade topológica é localmente compacta, ou seja, todo ponto possui uma vizinhança compacta. Basta, para isso, perceber que como $\varphi : U_x \rightarrow \varphi(U_x)$ é um homeomorfismo, então escolhemos uma bola aberta $B_r(\varphi(x)) \subset \varphi(U_x)$ de modo que

$$V_x = \varphi^{-1}(B_r[\varphi(x)])$$

será um compacto em X , pela continuidade de φ , com $x \in \text{int } V_x$, ou seja, uma vizinhança de x em X .

Proposição 4.3. *Todo espaço de Hausdorff localmente compacto é regular.*

Proof. Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Para $x \in X$ e F fechado com $x \notin F$, tome K um compacto em X tal que $x \in \text{int } K$. Como X é Hausdorff, para cada $y \in F \cap K$ podemos escolher abertos disjuntos U_y e V_y tais que $x \in U_y$ e $y \in V_y$.

Observando que $F \cap K$ é compacto (fechado em um compacto Hausdorff), e que os conjuntos $V_y \cap (F \cap K)$ formam uma cobertura aberta de $F \cap K$, então existe uma subcobertura finita, digamos $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$.

Sejam

$$V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} \quad \text{e} \quad U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i},$$

com $F \cap K \subseteq V$, $x \in U_y$ para cada $y \in F \cap K$, e $x \in U$. Além disso, como $U_y \cap V_y = \emptyset$, então também U e V são disjuntos.

Agora, considerando os conjuntos $U \cap \text{int } K$ e $V \cup (X \setminus K)$, observe que eles são abertos (pois são união de abertos). Além disso, como $x \in U$ e $x \in \text{int } K$, então $x \in U \cap K$.

Por fim, observe que, como $F \subseteq V \cup (X \setminus K)$, temos $\text{int } K \subseteq K$, $X \setminus K \subseteq X \setminus \text{int } K$ e portanto $\text{int } K \cap (X \setminus K) = \emptyset$. Com isso temos

$$(U \cap K) \cap (V \cup (X \setminus K)) = \emptyset,$$

que são os conjuntos disjuntos que separam x e F , como queríamos. $\square$

Corolário 4.1. *Toda variedade topológica é metrizável*

Proof. Segue imediatamente da proposição anterior juntamente com o teorema de Urysohn. $\square$

Corolário 4.2. *Para que um espaço compacto de Hausdorff X seja metrizável, é necessário e suficiente que X tenha base enumerável.*

Proof. Com efeito, se X possui uma base enumerável, então X é metrizável porque todo espaço compacto de Hausdorff é normal, graças à Proposição 2.14. Reciprocamente, basta notar que todo espaço métrico compacto possui uma base enumerável. $\square$

References

- [1] L. F. Aurichi. *Topologia Geral*. LF Editorial, São Paulo, 2022.
- [2] E. L. Lima. *Elementos de Topologia Geral*. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, 3 edition, 2009.
- [3] E. L. Lima. *Espaços Métricos*. IMPA, Rio de Janeiro, 4 edition, 2009.
- [4] E. L. Lima. *Análise Real, v. 1: Funções de uma Variável Real*. IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [5] L. A. Steen, J. A. Seebach, and L. A. Steen. *Counterexamples in topology*, volume 18. Springer, New York, 1978.