

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Campus do Pantanal - CPan
Licenciatura em Matemática

Trabalho Final de Conclusão de Curso

Decomposição Espectral para Operadores Autoadjuntos

Petrick Monteiro Santos

Corumbá - MS

8 de Dezembro de 2025

Pettrick Monteiro Santos

Decomposição Espectral para Operadores Autoadjuntos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Câmpus do Pantanal, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Osmar do Nascimento Souza

FOLHA DE APROVAÇÃO

PETTRICK MONTEIRO SANTOS

DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL PARA OPERADORES AUTOADJUNTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Câmpus do Pantanal, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, sob a coordenação do prof. Osmar do Nascimento Souza.

Resultado: Aprovado

Corumbá, 8 de dezembro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Osmar do Nascimento Souza

Prof. Dr. Osmar do Nascimento Souza - Orientador (UFMS/CPAN)



Documento assinado digitalmente
ANDRE ASSMANN
Data: 10/12/2025 11:03:53-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. André Assmann - Membro externo

Thales FV Paiva

Prof. Dr. Thales Fernando Vilamaior Paiva - (UFMS/CPAQ).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela força e sabedoria concedidas ao longo de toda esta caminhada acadêmica. Aos meus pais e familiares, pelo apoio incondicional, incentivo e compreensão em todos os momentos.

Agradeço a todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática em especial ao **Professor Dr. Osmar do Nascimento Souza**, pela orientação, paciência e dedicação durante o desenvolvimento de todas as pesquisas que foram realizadas no campus e pelos auxílios incessantes durante toda a minha graduação e à **Professora Janan Bolivar Schabib Hany** que durante a graduação sempre ajudou com conselhos e palavras de sabedoria para o caminho acadêmico.

Aos colegas de curso e amigos que estiveram presentes nas conversas, estudos e trocas de ideias, contribuindo para o crescimento pessoal e intelectual ao longo desta jornada.

Corumbá, 2025.

“O reconhecimento da própria ignorância é a primeira prova de inteligência.”

— Santo Agostinho

RESUMO

O presente trabalho desenvolve um estudo introdutório sobre a **Decomposição Espectral de Operadores Autoadjuntos** em espaços com produto interno. A pesquisa busca compreender, de forma conceitual e aplicada, os fundamentos teóricos que envolvem operadores lineares, autovalores e autovetores, bem como suas propriedades de ortogonalidade e normalização. São revisitados conceitos essenciais da Álgebra Linear, como o produto interno e os operadores lineares, para então apresentar o **Teorema Espectral** aplicado a operadores autoadjuntos. Além da fundamentação teórica, o trabalho traz exemplos em $\mathbb{R}^n$ e operadores definidos por integrais, com demonstrações detalhadas e interpretações geométricas, a fim de ilustrar a relevância dessa decomposição no contexto matemático.

Palavras-chave: Operador autoadjunto; Teorema Espectral; Produto interno; Álgebra Linear; Autovalores.

ABSTRACT

This work presents an introductory study on the **Spectral Decomposition of Self-Adjoint Operators** in inner product spaces. The research aims to understand, both conceptually and practically, the theoretical foundations involving linear operators, eigenvalues and eigenvectors, as well as their orthogonality and normalization properties. Fundamental concepts from Linear Algebra, such as the inner product and linear operators, are reviewed to introduce the **Spectral Theorem** for self-adjoint operators. In addition to the theoretical framework, examples in $\mathbb{R}^n$ and integral operators are presented, with detailed demonstrations and geometric interpretations, highlighting the importance of this decomposition in the mathematical context.

Keywords: Self-adjoint operator; Spectral Theorem; Inner product; Linear Algebra; Eigenvalues.

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	Corpo de escalares (pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
V	Espaço vetorial
$\langle u, v \rangle$	Produto interno entre os vetores u e v
$\ v\ $	Norma do vetor v
T	Operador Linear
T^*	Operador Autoadjunto (ou Adjunto)
λ	Autovalor
$A^\top$	Transposta da matriz A
$\det(A)$	Determinante da matriz A
$P_n(\mathbb{R})$	Espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n
$\dim(V)$	Dimensão do espaço vetorial V
$\mathcal{B}$	Base de um espaço vetorial
$[T]_{\mathcal{B}}$	Matriz do operador T na base $\mathcal{B}$
$u \perp v$	Vetores ortogonais
I	Matriz Identidade
$S^\perp$	Complemento ortogonal do subconjunto S
$C[a, b]$	Espaço das funções contínuas no intervalo $[a, b]$
$C^1[a, b]$	Espaço das funções com primeira derivada contínua no intervalo $[a, b]$

$M_n(\mathbb{R})$ Conjunto das matrizes quadradas de ordem n sobre $\mathbb{R}$

$p(\lambda)$ Polinômio característico

∇ Operador gradiente

Sumário

	Agradecimentos	4
	Sumário	10
1	PRELIMINARES	14
1.1	Espaços Vetoriais	14
1.2	Combinação Linear	16
1.3	Transformações Lineares	19
1.4	Operadores Lineares	20
1.5	Autovalores e Autovetores	24
1.5.1	Interpretação Geométrica	24
1.5.2	Definição Formal	24
1.5.3	Formulação matricial	25
1.5.4	Polinômio Minimal	26
2	ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO	27
2.1	Produto Interno	27
2.1.1	Produto Interno em Espaços de Funções	28
2.1.2	Produtos Internos Envolvendo Derivadas	29
2.2	Ortogonalidade	31
2.3	Operador Adjunto	31
2.3.1	Operador Normal	32
2.4	Operadores Autoadjuntos	33
3	TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES AUTOADJUNTOS	35
3.1	Visão Geométrica	40

3.2	Prova geométrica do Teorema Espectral (versão para espaços com produto interno)	41
	Referências bibliográficas	43
	REFERÊNCIAS	44

Introdução

A Álgebra Linear constitui um dos pilares fundamentais da Matemática moderna, oferecendo ferramentas essenciais para a modelagem e a análise de sistemas em diversos campos da ciência, como a Física, a Engenharia, a Computação e a Estatística. Quando trabalhamos com um espaço vetorial V , é importante e útil encontrar maneiras de representar um operador linear $T : V \rightarrow V$ de forma mais simples. Isso facilita bastante os cálculos, ajuda a entender melhor as suas propriedades e o comportamento desse operador. Em alguns casos, podemos fazer isso escolhendo uma base de autovetores de V , de modo que a matriz que representa T nessa base seja diagonal. Nos casos mais simples, essa diagonalização está relacionada à diagonalização de matrizes.

Quando o espaço vetorial V admite um produto interno, é possível aprofundar esse estudo ao considerar operadores com propriedades adicionais, como os operadores autoadjuntos e normais. Nesse contexto, pode-se investigar a existência de bases ortonormais compostas por autovetores, o que conduz naturalmente às diferentes formulações do Teorema Espectral - um dos mais importantes e elegantes resultados da Álgebra Linear, com amplas aplicações teóricas e práticas.

O estudo foi desenvolvido por meio de leituras, resolução de exercícios e análise de Teoremas centrais, dos quais destacamos os chamados teoremas espectrais. Ao longo dessa monografia, são apresentados conceitos fundamentais da teoria, acompanhados de Exemplos e aplicações, buscando não apenas a compreensão matemática rigorosa, mas também o reconhecimento da relevância desses resultados em contextos científicos mais amplos.

O objetivo principal deste trabalho é explorar as condições que garantem a diagonalização de operadores lineares em espaços vetoriais com produto interno, com foco na formulação e nas consequências do Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos. Buscamos demonstrar a importância desse teorema, tanto na sua elegância matemática quanto na sua utilidade prática, apresentando o processo de diagonalização ortogonal e suas aplicações em Geometria e Análise Multivariada.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 1, revisamos brevemente tópicos preliminares sobre Espaços Vetoriais, Operadores Lineares, Autovalores e Autovetores, essenciais para os capítulos seguintes. No Capítulo 2, apresentamos definições, resultados e

exemplos referentes a espaços vetoriais com **Produto Interno**, bem como teoremas sobre diagonalização de operadores. Por fim, no último Capítulo [3](#), tratamos da definição de **Decomposição Espectral** e, por fim, do Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos e exemplos práticos desse resultado.

1 Preliminares

1.1 Espaços Vetoriais

Definição 1.1. Um *espaço vetorial* sobre um corpo $\mathbb{K}$ (tipicamente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é um conjunto não vazio V , cujos elementos são chamados de **vetores**, equipado com duas operações:

1. **Adição de Vetores** $(+): V \times V \rightarrow V$
2. **Multiplicação por Escalar** $(\cdot): \mathbb{K} \times V \rightarrow V$

Essas operações devem satisfazer os seguintes dez axiomas para quaisquer vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Axiomas da Adição:

- A1** $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ (*Fechamento Aditivo*)
- A2** $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (*Associatividade*)
- A3** Existe um vetor $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ (*Elemento Neutro*)
- A4** Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe $(-\mathbf{u}) \in V$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (*Elemento Oposto*)
- A5** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (*Comutatividade*)

Axiomas da Multiplicação por Escalar:

- M1** $\alpha \cdot \mathbf{u} \in V$ (*Fechamento Escalar*)
- M2** $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{u}$ (*Associatividade Escalar*)
- M3** $\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$ (*Distributividade I*)
- M4** $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$ (*Distributividade II*)
- M5** $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$, onde 1 é a identidade multiplicativa em $\mathbb{K}$ (*Elemento Neutro Escalar*)

Exemplo 1.2. O conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$, com a adição e multiplicação por escalar usuais (componente a componente), é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seu vetor zero é $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Exemplo 1.3. Considere $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais. Este é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, pois a soma de dois polinômios de grau ≤ 2 e a multiplicação por um escalar resultam em um novo polinômio com grau ≤ 2 . O vetor zero é o polinômio $0(t) = 0$.

Subespaço Vetorial

Definição 1.4. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um subconjunto W de V ($W \subseteq V$) é chamado de **subespaço vetorial** de V se W for ele próprio um espaço vetorial sob as mesmas operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V .

Teorema 1.5. Um subconjunto não vazio W de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se, e somente se, as seguintes condições de fechamento forem satisfeitas:

1. W contém o vetor nulo de V ($\mathbf{0} \in W$).
2. Se $\mathbf{u} \in W$ e $\mathbf{v} \in W$, então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ (Fechamento Aditivo).
3. Se $a \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{u} \in W$, então $a \cdot \mathbf{u} \in W$ (Fechamento Escalar).

Exemplo 1.6. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$ sobre o corpo $\mathbb{R}$. Seja W o conjunto de todos os vetores (x, y) que jazem sobre uma linha reta que passa pela origem e tem coeficiente angular m :

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}$$

Para verificar que W é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, usamos o Teorema de Subespaço:

1. **Vetor Nulo ($\mathbf{0} \in W$):** O ponto $(0, 0)$ satisfaz a equação $0 = m(0)$. Portanto, $\mathbf{0} \in W$.
2. **Fechamento Aditivo:** Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1) \in W$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2) \in W$. Então $y_1 = mx_1$ e $y_2 = mx_2$. A soma $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Verificamos se $y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2)$:

$$y_1 + y_2 = mx_1 + mx_2 = m(x_1 + x_2)$$

Logo, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.

3. **Fechamento Escalar:** Seja $\mathbf{u} = (x_1, y_1) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $y_1 = mx_1$. O produto $\alpha \cdot \mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$. Verificamos se $\alpha y_1 = m(\alpha x_1)$:

$$\alpha y_1 = \alpha(mx_1) = m(\alpha x_1)$$

Logo, $\alpha \cdot \mathbf{u} \in W$. Portanto, W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

1.2 Combinação Linear

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ vetores do Espaço Vetorial V e escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Chama-se **combinação linear** dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ ao vetor u definido por:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Dizemos ainda, nesse caso, que u é gerado pelos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$. O conjunto de todas as combinações lineares possíveis destes vetores é denominado *subespaço gerado* (ou *span*).

Subespaço Gerado (Span)

Definição 1.7. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ um subconjunto não vazio de V . O **espaço gerado** por S , denotado por $\text{span}(S)$, é o conjunto de todas as possíveis **combinações lineares** dos vetores de S .

$$\text{span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Teorema 1.8. O espaço gerado $\text{span}(S)$ é sempre um **subespaço vetorial** de V .

Exemplo 1.9 (Espaço Gerado em $\mathbb{R}^3$). Seja $S = \{v_1, v_2\}$ em $\mathbb{R}^3$, onde $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

O espaço gerado por S , $\text{span}(S)$, é o conjunto de todos os vetores da forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$:

$$\text{span}(S) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Geometricamente, $\text{span}(S)$ representa o plano xy (ou seja, o subespaço $z = 0$) dentro do espaço $\mathbb{R}^3$.

Dependência e Independência Linear (LD e LI)

Para verificar a dependência linear, analisamos a solução da equação vetorial homogênea:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

- **Linearmente Independente (LI):** O conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI se a equação acima admite **apenas** a solução trivial, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.
- **Linearmente Dependente (LD):** O conjunto é LD se existir pelo menos uma solução onde nem todos os escalares são nulos (solução não trivial). Isso indica que pelo menos um vetor é combinação linear dos outros.

Base

Definição 1.10. Um conjunto ordenado de vetores $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de um espaço vetorial V é uma **Base** de V se satisfizer as duas condições seguintes simultaneamente:

1. O conjunto $\mathcal{B}$ gera o espaço V (ou seja, $\text{span}(\mathcal{B}) = V$). Isso significa que todo vetor $\mathbf{v} \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad \text{onde } \alpha_i \in \mathbb{K}$$

2. O conjunto $\mathcal{B}$ é Linearmente Independente (LI). Isso significa que a única solução para a equação vetorial

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

é a solução trivial, onde $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Quando essas condições são satisfeitas, as coordenadas $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de $\mathbf{v}$ em relação à base $\mathcal{B}$ são únicas.

Exemplo 1.11 (Base Canônica de $\mathbb{R}^n$). A **base canônica** de $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathcal{E}$, é o conjunto ordenado formado pelos n vetores unitários:

$$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

Onde cada vetor e_i tem a i -ésima coordenada igual a 1 e todas as outras coordenadas iguais a 0.

- Para $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- Para $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

A base canônica é linearmente independente e gera $\mathbb{R}^n$.

Dimensão

Definição 1.12. A **Dimensão** de um espaço vetorial V , denotada por $\dim(V)$, é o número de vetores que compõem qualquer uma de suas bases.

- Se a base de V possui n vetores, então $\dim(V) = n$.
- Por convenção, o espaço vetorial nulo $\{\mathbf{0}\}$ tem $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

Nota Importante sobre a Invariância da Dimensão:

Esta definição faz sentido graças ao importante teorema da Álgebra Linear que segue, o qual garante que

Teorema 1.13. *Se um espaço vetorial V possui uma base com n vetores, então qualquer outra base de V também terá exatamente n vetores.*

Portanto, a dimensão é uma **propriedade intrínseca** do espaço vetorial, independentemente da escolha da base.

Teorema do Completamento de Base

O Teorema do Completamento de Base é um resultado fundamental que garante a **existência** e a **construção** de uma base para um espaço vetorial de dimensão finita, partindo de um conjunto linearmente independente (LI).

Teorema 1.14 (Teorema do Completamento de Base). *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, com $\dim(V) = n$. Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é um subconjunto **linearmente independente** (LI) de V , então S pode ser estendido a uma base $\mathcal{B}$ de V . Isto é, existem vetores $v_{k+1}, \dots, v_n \in V$ tais que o conjunto estendido*

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

*é uma **base** de V .*

1.3 Transformações Lineares

Definição 1.15. Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma transformação linear de U em V é uma função $T : U \rightarrow V$ que satisfaz as seguintes propriedades

- $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \forall u_1, u_2 \in U$
- $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall \alpha \in F \text{ e } \forall u \in U$

Exemplo 1.16. Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. A função nula $T : U \rightarrow V$ definida por $T(u) = 0, \forall u \in U$ é uma transformação linear. A função identidade $T : U \rightarrow U$ dada por $T(u) = u$ é uma transformação linear.

Exemplo 1.17. Verificar se a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (2x, 3y)$ é linear.

- $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), 3(y_1 + y_2)) = (2x_1 + 2x_2, 3y_1 + 3y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2);$
- $T(\lambda(x_1, y_1)) = T(\lambda x_1, \lambda y_1) = (2\lambda x_1, 3\lambda y_1) = \lambda(2x_1, 3y_1) = \lambda T(x_1, y_1).$

Logo, T é linear.

Teorema 1.18. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : U \rightarrow V$ é uma transformação linear se, e somente se, $T(\alpha u_1 + u_2) = \alpha T(u_1) + T(u_2), \forall u_1, u_2 \in U \text{ e } \forall \alpha \in K$*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que T seja uma transformação linear. Então, por definição:

$$\begin{aligned} T(\alpha u_1 + u_2) &= T(\alpha u_1) + T(u_2) \\ &= \alpha T(u_1) + T(u_2). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Suponha agora que $T(\alpha u_1 + u_2) = \alpha T(u_1) + T(u_2)$ para todos $u_1, u_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Vamos mostrar que T satisfaz as duas condições de linearidade.

- Para todos $u_1, u_2 \in U$, tome $\alpha = 1$:

$$T(u_1 + u_2) = T(1 \cdot u_1 + u_2) = 1 \cdot T(u_1) + T(u_2) = T(u_1) + T(u_2).$$

- Para todo $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tome $u_1 = u, u_2 = 0$:

$$T(\lambda u + 0) = \lambda T(u) + T(0).$$

Como $T(0) = 0$ (basta tomar $u = 0$ e $\lambda = 0$ na hipótese), então:

$$T(\lambda u) = \lambda T(u).$$

Portanto, T é linear. ■

1.4 Operadores Lineares

Definição 1.19. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação linear $T : V \rightarrow V$ é chamada de *operador linear*. Ou seja, um operador linear é uma transformação linear cujo domínio e contradomínio coincidem.

Teorema 1.20. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Fixada uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V , então existe uma única matriz quadrada $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que, para todo $v \in V$, temos:*

$$[T(v)]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}}.$$

Demonstração. Como $\dim(V) = n$, qualquer vetor $v \in V$ pode ser escrito como combinação linear da base $\mathcal{B}$:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Como T é linear, temos:

$$T(v) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n).$$

Assim, a ação de T sobre qualquer vetor é determinada pelos vetores $T(v_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Cada vetor $T(v_i)$ pode ser escrito como combinação linear da base $\mathcal{B}$, o que nos permite construir

a matriz associada A com as coordenadas de $T(v_i)$ como colunas. Portanto,

$$[T(v)]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}}.$$

■

Exemplo 1.21. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por:

$$T(x, y) = (2x + y, x - y).$$

Para encontrar a matriz associada a T na base canônica, aplicamos T aos vetores da base canônica:

$$T(1, 0) = (2, 1), \quad T(0, 1) = (1, -1).$$

Logo, a matriz associada a T é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.22. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por:

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z).$$

Aplicando T aos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$:

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 1), \quad T(0, 1, 0) = (1, 1, 0), \quad T(0, 0, 1) = (0, 1, 1).$$

A matriz associada a T na base canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema do Núcleo e da Imagem

Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear, onde V e W são espaços vetoriais.

Definição 1.23 (Núcleo de T). O **Núcleo** da transformação linear T , denotado por $\ker(T)$ (do alemão *Kern*), é o conjunto de todos os vetores $\mathbf{v}$ no domínio V que são mapeados para o vetor nulo de W :

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}$$

O Núcleo $\ker(T)$ é um **subespaço vetorial do domínio V** .

Definição 1.24 (Imagem de T). A **Imagem** da transformação linear T , denotada por $\text{Im}(T)$ ou $\text{Im}(T)$, é o conjunto de todos os vetores $\mathbf{w}$ no contradomínio W que são imagens de, pelo menos, um vetor $\mathbf{v}$ no domínio V :

$$\text{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W \mid \exists \mathbf{v} \in V, T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$$

A Imagem $\text{Im}(T)$ é um **subespaço vetorial do contradomínio W** .

Teorema 1.25. *A dimensão do domínio V é igual à soma da dimensão do núcleo de T com a dimensão da imagem de T .*

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

Demonstração:

Seja $n = \dim(V)$ e $k = \dim(\ker(T))$. Como o núcleo $\ker(T)$ é um subespaço de V , ele possui uma base. Seja $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ uma base de $\ker(T)$.

Pelo **Teorema do Completamento de Base**, podemos estender este conjunto LI para formar uma base de V . Sejam $v_1, \dots, v_r$ vetores tais que:

$$\mathcal{B}_V = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r\}$$

é uma base de V . Note que o número total de vetores é n , logo $n = k + r$.

Vamos agora provar que $\dim(\text{Im}(T)) = r$, mostrando que o conjunto $S = \{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$ é uma base da Imagem.

Afirmção 1: O conjunto S gera a Imagem.

Seja $w \in \text{Im}(T)$. Então existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Escrevendo v na base $\mathcal{B}_V$:

$$v = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^r \beta_j v_j$$

Aplicando T :

$$T(v) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underbrace{T(u_i)}_{\mathbf{0}} + \sum_{j=1}^r \beta_j T(v_j) = \sum_{j=1}^r \beta_j T(v_j)$$

Como $u_i \in \ker(T)$, $T(u_i) = \mathbf{0}$. Logo, $T(v)$ é combinação linear de S , e portanto gera $\text{Im}(T)$.

Afirmção 2: O conjunto S é LI.

Considere a combinação linear nula:

$$\sum_{j=1}^r c_j T(v_j) = \mathbf{0}_W \implies T\left(\sum_{j=1}^r c_j v_j\right) = \mathbf{0}_W$$

Isso implica que o vetor $\sum c_j v_j$ pertence ao $\ker(T)$. Logo, ele pode ser escrito como combinação linear da base do núcleo:

$$\sum_{j=1}^r c_j v_j = \sum_{i=1}^k d_i u_i \implies \sum_{j=1}^r c_j v_j - \sum_{i=1}^k d_i u_i = \mathbf{0}_V$$

Como o conjunto $\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k\}$ é a base $\mathcal{B}_V$ (e portanto é LI), todos os coeficientes devem ser zero. Logo, $c_j = 0$ para todo j . Concluimos que S é LI.

Portanto, $\dim(\text{Im}(T)) = r$. Como $n = k + r$, temos $\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$. ■

Exemplo 1.26 (Projeção em $\mathbb{R}^3$). Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x, y)$.

- **Domínio:** $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
- **Imagem:** O plano $\mathbb{R}^2$ inteiro. $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.
- **Núcleo:** $T(x, y, z) = (0, 0) \implies x = 0, y = 0$. Vetores $(0, 0, z)$. Base $\{(0, 0, 1)\}$. $\dim(\ker(T)) = 1$.
- **Verificação:** $3 = 1 + 2$.

Exemplo 1.27 (Derivada de Polinômios). Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios de grau ≤ 2 . Defina $D : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ tal que $D(p(x)) = p'(x)$.

- **Domínio:** O domínio é $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Sua base canônica é $\{1, x, x^2\}$. $\dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3$.
- **Núcleo ($\ker(D)$):** O núcleo é o conjunto de polinômios $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ cuja derivada é zero, ou seja, as funções constantes.

$$\ker(D) = \{p(x) = a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\}$$

Sua base é $\{1\}$. $\dim(\ker(D)) = 1$.

- **Imagem ($\text{Im}(D)$):** A imagem é o conjunto de todas as derivadas, que são polinômios de grau ≤ 1 ($ax + b$).

$$\text{Im}(D) = \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) = \{q(x) = a_1 x + a_0 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

Sua base é $\{1, x\}$. $\dim(\text{Im}(D)) = 2$.

- **Verificação (Teorema da Dimensão):**

$$\dim(\text{Domínio}) = \dim(\ker(D)) + \dim(\text{Im}(D))$$

$$3 = 1 + 2$$

O teorema é satisfeito.

1.5 Autovalores e Autovetores

Nesta seção estudamos um dos conceitos fundamentais da Álgebra Linear: as noções de autovalores e autovetores. Além da formulação algébrica clássica, apresentamos uma interpretação geométrica que permite visualizar o efeito da transformação linear sobre um vetor.

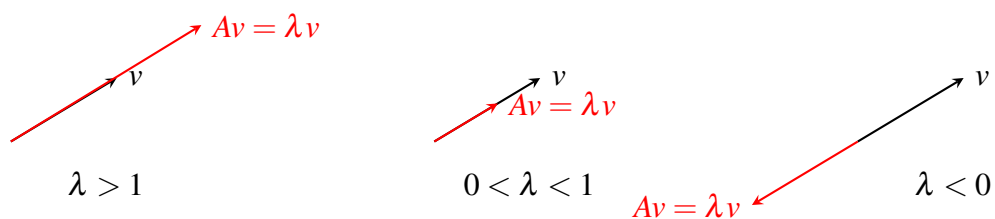
1.5.1 Interpretação Geométrica

Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$ representado por uma matriz A , dizemos que um vetor não nulo v é um autovetor se a ação de A sobre v preserva sua direção:

$$Av = \lambda v.$$

Assim, o autovalor λ descreve como o vetor é *esticado*, *comprimido* ou *invertido*. A seguir, ilustramos os três comportamentos possíveis.

Figura 1 – Interpretação geométrica de autovalores: esticamento ($\lambda > 1$), compressão ($0 < \lambda < 1$) e inversão ($\lambda < 0$).



1.5.2 Definição Formal

Definição 1.28. Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é um *autovalor* de T se existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que:

$$T(v) = \lambda v.$$

Neste caso, v é chamado *autovetor* associado ao autovalor λ .

1.5.3 Formulação matricial

Quando T é representado por uma matriz A , a equação

$$Av = \lambda v$$

é equivalente a

$$(A - \lambda I)v = \mathbf{0}$$

Esse sistema homogêneo possui solução não trivial se, e somente se, a matriz é singular, isto é:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

O polinômio

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

é chamado *polinômio característico* de A . Os zeros de p_A são os autovalores.

Exemplo 1.29. Considere agora:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é:

$$\det(B - \lambda I) = (6 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14.$$

As raízes são $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda = 7$:

$$(B - 7I)x = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2.$$

Autovetor:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda = 2$:

$$(B - 2I)x = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2.$$

Autovetor:

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1.5.4 Polinômio Minimal

Definição 1.30. O *polinômio minimal* de um operador linear T é o polinômio mônico de menor grau $m(x)$ tal que $m(T) = 0$.

Exemplo 1.31. Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

o polinômio característico é $\lambda^2 - 7\lambda + 10$, cujas raízes são $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 2$. Assim, o polinômio minimal é:

$$m(x) = (x - 5)(x - 2).$$

Note que $m(A) = (A - 5I)(A - 2I) = O$, em que I é a matriz identidade 2×2 e O é a matriz nula 2×2 .

Exemplo 1.32. Para a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

temos o polinômio característico:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0,$$

cuja única raiz é $\lambda = 4$ (raiz dupla). O polinômio minimal é:

$$m(x) = x - 4.$$

2 Espaços com Produto Interno

Em um curso de Vetores e Geometria Analítica, em geral, estudamos um produto especial entre dois vetores de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$), chamado produto escalar, que permite introduzir a ideia de distância, comprimento de um vetor e ângulo entre dois vetores. Nesse capítulo, estendemos esta noção para um espaço vetorial arbitrário, obtendo assim uma estrutura mais rica, denominada espaço vetorial com produto interno.

2.1 Produto Interno

Definição 2.1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um *produto interno* em V é uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz, para todo $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- **(Simetria)** $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
- **(Linearidade na primeira coordenada)** $\langle \alpha u + w, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$;
- **(Positividade)** $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

Quando munimos V de um produto interno, chamamos V de *espaço Euclidiano*.

Exemplo 2.2. O produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$ dado por $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Exemplo 2.3. Em $\mathbb{R}^2$, o produto interno usual é dado por:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Por exemplo, para $u = (1, 2)$ e $v = (3, 4)$:

$$\langle u, v \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11.$$

Exemplo 2.4. Considere os vetores $u = (2, -1, 3)$ e $v = (1, 4, 0)$ em $\mathbb{R}^3$. O produto interno usual é dado por:

$$\langle u, v \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 2 - 4 + 0 = -2.$$

Produto Interno em Espaços Complexos

Quando o corpo de escalares é $\mathbb{C}$, a definição de produto interno é ligeiramente alterada para garantir que a norma de um vetor, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, seja sempre um número real não negativo.

Definição 2.5. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Um *produto interno* em V é uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

que satisfaz, para todo $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$:

- **Simetria Conjugada/Hermitiana:** $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$;
- **Linearidade na primeira coordenada:** $\langle \alpha u + w, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$;
- **Positividade:** $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

(Note que $\langle v, v \rangle$ é sempre um número real devido à simetria conjugada).

Quando munimos V de um produto interno complexo, chamamos V de *espaço Unitário*.

Exemplo 2.6 (Produto Interno Usual em $\mathbb{C}^n$). O produto interno usual em $\mathbb{C}^n$ é dado por:

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i},$$

em que $\overline{w_i}$ é o conjugado complexo de w_i .

2.1.1 Produto Interno em Espaços de Funções

Além de $\mathbb{R}^n$, existem produtos internos definidos em espaços de funções. Esses exemplos são essenciais para aplicações em álgebra linear, equações diferenciais, análise funcional e processamento de sinais.

Exemplo 2.7 (Produto interno com integrais). No espaço $C[a, b]$, das funções contínuas em $[a, b]$, definimos:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Vamos verificar as propriedades:

- **Simetria:**

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b g(x)f(x) dx.$$

- **Linearidade:**

$$\langle \alpha f + h, g \rangle = \int_a^b (\alpha f(x) + h(x))g(x) dx = \alpha \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle.$$

- **Positividade:**

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx \geq 0,$$

e a integral é zero se, e somente se, $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo 2.8. Calcule o produto interno entre $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 2.9. Calcule $\langle f, g \rangle$ para $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ em $[0, \pi]$:

$$\langle \sin(x), \cos(x) \rangle = \int_0^\pi \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(2x) dx = 0.$$

2.1.2 Produtos Internos Envolvendo Derivadas

Produtos internos envolvendo derivadas são usados em métodos numéricos, EDOs, EDPs e na teoria de Fourier.

Exemplo 2.10 (Produto interno dependente da derivada). No espaço $C^1[a, b]$, definimos:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f'(x)g'(x) dx.$$

Esse produto mede a “variação conjunta” das funções.

Exemplo 2.11. Calcule o produto interno entre $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ em $[0, 1]$ para o produto interno derivado:

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 3x^2.$$

Então:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 2x \cdot 3x^2 dx = 6 \int_0^1 x^3 dx = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Exemplo 2.12 (Produto Interno Misto). Considere o espaço vetorial $V = C^1[0, 1]$, Definimos um produto interno $\langle f, g \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ pela seguinte integral mista, que combina o produto das funções e o produto de suas derivadas:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f'(x)g'(x) dx.$$

Esta definição satisfaz os axiomas de um produto interno em $C^1[0, 1]$.

Cálculo para funções específicas:

Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ vetores em $C^1[0, 1]$. Primeiramente, calculamos suas derivadas:

$$f'(x) = 1 \quad \text{e} \quad g'(x) = 2x.$$

1. Cálculo da Primeira Integral (Produto das Funções):

$$I_1 = \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx$$

$$I_1 = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

2. Cálculo da Segunda Integral (Produto das Derivadas):

$$I_2 = \int_0^1 f'(x)g'(x) dx = \int_0^1 1 \cdot (2x) dx = \int_0^1 2x dx$$

$$I_2 = \left[2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Resultado Final do Produto Interno: O produto interno $\langle f, g \rangle$ é a soma dessas duas integrais:

$$\langle f, g \rangle = I_1 + I_2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

Teorema 2.13 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja V um espaço com produto interno. Para quaisquer $u, v \in V$:*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

com igualdade se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.

Demonstração. Se $v = 0$, então ambos os lados da desigualdade são zero. Suponha $v \neq 0$ e considere a função:

$$f(t) = \|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv \rangle = \langle u, u \rangle - 2t\langle u, v \rangle + t^2\langle v, v \rangle.$$

Como $f(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o discriminante da parábola é não positivo:

$$\Delta = (-2\langle u, v \rangle)^2 - 4\langle v, v \rangle\langle u, u \rangle \leq 0,$$

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle\langle v, v \rangle.$$

Tomando a raiz quadrada em ambos os lados:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, o discriminante for zero, isto é, $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

2.2 Ortogonalidade

Definição 2.14. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que dois vetores $u, v \in V$ são *ortogonais* se $\langle u, v \rangle = 0$. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é dito *ortogonal* se cada par de vetores distintos é ortogonal entre si, ou seja, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$.

Teorema 2.15. *Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto ortogonal de vetores não nulos em um espaço com produto interno. Então esse conjunto é linearmente independente.*

Demonstração. Suponha que existam escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

Tomando o produto interno com v_j em ambos os lados:

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle = 0.$$

Como $v_j \neq 0$, temos $\langle v_j, v_j \rangle > 0$, logo $\alpha_j = 0$. Isso vale para todo $j = 1, \dots, n$, então o conjunto é linearmente independente. ■

Exemplo 2.16. Considere os vetores $v_1 = (1, 0, -1)$ e $v_2 = (1, 2, 1)$ em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Logo, v_1 e v_2 são ortogonais.

2.3 Operador Adjunto

Antes de definir o operador normal, introduzimos o conceito de adjunção, que é a generalização da transposta conjugada para operadores lineares em espaços com produto interno.

Definição 2.17 (Operador Adjunto). Seja V um espaço vetorial com produto interno sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que o operador $T^* : V \rightarrow V$ é o **operador adjunto** (ou **adjunta Hermitiana**) de T se a seguinte relação for satisfeita para todos os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$:

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T^*(\mathbf{v}) \rangle$$

- Em espaços euclidianos ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), o adjunto T^* corresponde à matriz **transposta** (A^T).
- Em espaços unitários ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), o adjunto T^* corresponde à matriz **transposta conjugada** (ou adjunta, A^*).

2.3.1 Operador Normal

O operador normal é a classe mais geral de operadores diagonalizáveis ortogonalmente em espaços complexos.

Definição 2.18 (Operador Normal). Um operador linear $T : V \rightarrow V$ em um espaço vetorial com produto interno é chamado de **Operador Normal** se ele comuta com seu adjunto T^* :

$$TT^* = T^*T$$

Relação com Outros Operadores:

A classe dos operadores normais inclui todos os operadores que nos interessam para a diagonalização ortogonal, pois ela engloba os seguintes casos especiais:

- **Operador Autoadjunto (Hermitiano):** Se $T = T^*$. (Todo operador autoadjunto é normal, pois $TT^* = TT = T^*T$).
- **Operador Unitário (Ortogonal):** Se $TT^* = T^*T = I$. (Todo operador unitário/ortogonal é normal).
- **Operador Antiautoadjunto (Anti-Hermitiano):** Se $T^* = -T$.

2.4 Operadores Autoadjuntos

Definição 2.19. Seja V um espaço vetorial com produto interno sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um operador linear $T : V \rightarrow V$ é dito *autoadjunto* se, para todo $u, v \in V$, tem-se

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle.$$

Teorema 2.20. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear autoadjunto em um espaço vetorial de dimensão finita, com produto interno. Então:*

- *Todos os autovalores de T são reais.*
- *Existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T .*

Ideia da demonstração. Como T é autoadjunto, o polinômio característico de T admite apenas raízes reais (em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). A prova completa envolve aplicar o Teorema Espectral e o Lema de Zorn ou o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt para garantir a existência de uma base ortonormal formada por autovetores. ■

Exemplo 2.21. Considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (4x, 3y)$. A matriz associada a T na base canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vamos verificar se T é autoadjunto usando o produto interno usual:

$$\langle T(u), v \rangle = \langle Au, v \rangle = (Au)^\top v, \quad \langle u, T(v) \rangle = u^\top (Av).$$

Como A é simétrica ($A = A^\top$), então $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ para todo u, v , e T é autoadjunto.

Exemplo 2.22. Seja $V = C[0, 1]$ com o produto interno dado por:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Considere o operador $T : V \rightarrow V$ dado por $T(f)(x) = xf(x)$. Então, para quaisquer $f, g \in V$:

$$\langle T(f), g \rangle = \int_0^1 xf(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)xg(x)dx = \langle f, T(g) \rangle.$$

Logo, T é autoadjunto.

Exemplo 2.23. Seja $T : V \rightarrow V$ definido por $T(f) = f'$, onde V é o conjunto das funções deriváveis em $[-\pi, \pi]$ com produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Temos:

$$\langle T(f), g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g(x)dx = - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g'(x)dx = -\langle f, T(g) \rangle.$$

Logo, $T^* = -T$ e T é dito anti-autoadjunto.

Observação 2.24. Todo operador autoadjunto é normal, mas o recíproco não é necessariamente verdadeiro. A simetria da matriz associada é uma condição suficiente para que o operador seja autoadjunto.

3 Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos

O Teorema Espectral é um dos resultados mais importantes da Álgebra Linear e da Análise Funcional. No contexto de espaços com produto interno de dimensão finita, ele caracteriza completamente os operadores autoadjuntos.

Teorema 3.1 (Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos). *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita, munido de produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considere $T : V \rightarrow V$ um operador linear autoadjunto, isto é, que satisfaz $\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{v}) \rangle$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.*

Uma formulação equivalente ocorre quando consideramos uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, que representa este operador T em alguma base ortonormal. O operador T será autoadjunto se, e somente se, a matriz A for simétrica, isto é, $A^\top = A$.

Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- 1. todos os autovalores de A são reais;*
- 2. autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais;*
- 3. existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A ;*
- 4. A é diagonalizável por uma matriz ortogonal, isto é, existe P ortogonal tal que*

$$P^\top A P = D,$$

em que D é uma matriz diagonal com os autovalores de A e vale

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle \quad \text{para todos } u, v \in V.$$

Demonstração. (1) Autovalores reais.

O objetivo é mostrar que, mesmo considerando o corpo dos complexos, os autovalores de uma matriz simétrica real são obrigatoriamente reais. Seja λ um autovalor (possivelmente complexo) e $v \neq 0$ o autovetor associado. Temos:

$$\begin{aligned}\lambda \langle v, v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle \\ &= \langle Av, v \rangle && \text{(pois } Av = \lambda v \text{)} \\ &= \langle v, Av \rangle && \text{(pois } A \text{ é autoadjunto/simétrica)} \\ &= \langle v, \lambda v \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle v, v \rangle && \text{(pela linearidade conjugada na 2ª variável).}\end{aligned}$$

Igualando o início e o fim da cadeia de igualdades:

$$\lambda \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle.$$

Como $v \neq 0$, sabemos que $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 > 0$. Podemos dividir ambos os lados por esse valor, resultando em:

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Um número complexo que é igual ao seu conjugado é, necessariamente, um número real. Logo, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) Ortogonalidade de autovetores distintos.

Sejam v_1 e v_2 autovetores associados a autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Calculamos o produto interno $\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle \\ &= \langle T(v_1), v_2 \rangle && \text{(pois } T(v_1) = \lambda_1 v_1 \text{)} \\ &= \langle v_1, T(v_2) \rangle && \text{(definição de autoadjunto)} \\ &= \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \\ &= \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle.\end{aligned}$$

Subtraindo o resultado final do inicial:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue que obrigatoriamente $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

(3) Existência de autovetor.

O polinômio característico é dado por:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, todo polinômio de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz complexa. Entretanto, pelo **passo (1)**, provamos que todas as raízes de A são reais. Logo, existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A - \lambda_1 I) = 0$. Isso implica que o sistema $(A - \lambda_1 I)v = 0$ possui solução não trivial. Portanto, existe um autovetor real $v_1 \neq 0$.

(4) Indução no complemento ortogonal.

Para construir a base completa, usamos indução matemática sobre a dimensão do espaço.

- **Base:** Tome o autovetor v_1 encontrado no passo (3) e normalize-o:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

- **Subespaço:** Considere o complemento ortogonal de u_1 :

$$V_1 = u_1^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, u_1 \rangle = 0\}.$$

- **Invariância:** Precisamos mostrar que T leva vetores de V_1 em vetores de V_1 . Seja $w \in V_1$. Verificamos se $T(w)$ continua ortogonal a u_1 :

$$\begin{aligned} \langle T(w), u_1 \rangle &= \langle w, T(u_1) \rangle && \text{(pois } T \text{ é autoadjunto)} \\ &= \langle w, \lambda_1 u_1 \rangle && \text{(pois } u_1 \text{ é autovetor)} \\ &= \lambda_1 \langle w, u_1 \rangle \\ &= \lambda_1 \cdot 0 && \text{(pois } w \in V_1 \implies w \perp u_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\langle T(w), u_1 \rangle = 0$, concluímos que $T(w) \in V_1$.

- **Conclusão:** O operador restrito $T|_{V_1}$ age em um espaço de dimensão $n - 1$ e continua sendo autoadjunto. Pela hipótese de indução, existe uma base ortonormal $\{u_2, \dots, u_n\}$ de V_1 formada por autovetores de T . Juntando com u_1 , obtemos $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, uma base ortonormal completa de V .

(5) Montagem da diagonalização ortogonal. Forme a matriz cujas colunas são os autovetores:

$$P = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n].$$

Como os u_i são ortonormais: $P^\top P = I$, portanto P é ortogonal. Além disso, $Au_i = \lambda_i u_i$, de modo que $AP = PD$, onde $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Multiplicando à esquerda por $P^\top$:

$$P^\top AP = D.$$

Assim, A é diagonalizada por uma matriz ortogonal. ■

Exemplo 3.2. Considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2x, 5y)$. A matriz associada a T é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Como A é simétrica, T é autoadjunto. Seus autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$, com autovetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$, que formam uma base ortonormal. Assim, T é diagonalizável na base $\{v_1, v_2\}$.

Exemplo 3.3. Seja $V = C^0([0, 1])$, o espaço das funções contínuas reais no intervalo $[0, 1]$, com produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Considere o operador $T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$. Este operador é linear e autoadjunto, pois:

$$\langle T(f), g \rangle = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt \right) g(x) dx = \int_0^1 f(t) \left(\int_t^1 g(x) dx \right) dt = \langle f, T(g) \rangle.$$

Este exemplo mostra que o Teorema Espectral também se aplica em contextos mais gerais, como operadores integrais.

Exemplo 3.4 (Diagonalização de uma matriz 2×2). Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

que é simétrica. Aplicaremos os cinco passos da prova matricial.

(1) Autovalores reais.

Calculamos o polinômio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Resolvendo $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ obtemos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, que são reais.

(2) Autovetores e ortogonalidade.

Para $\lambda_2 = 3$:

$$(A - 3I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

daí $-x + y = 0 \Rightarrow y = x$. Um autovetor correspondente é $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Para $\lambda_1 = 1$:

$$(A - 1I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

daí $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$. Um autovetor correspondente é $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Note que $\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$, confirmando a ortogonalidade.

(3) Existência de autovetor.

Já exibimos explicitamente autovetores não nulos: v_1 e v_2 . (O polinômio característico garante a existência, aqui o cálculo concreto os fornece.)

(4) Normalização e complemento ortogonal.

Normalizamos os autovetores para obter uma base ortonormal.

$$\|v_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Repare que $u_1^\top u_2 = 0$ e $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$.

(5) Montagem da matriz ortogonal e diagonalização.

Forme a matriz P com as colunas sendo os autovetores normalizados; aqui colocamos em ordem (u_2, u_1) para que a diagonal apareça com $(3, 1)$ na mesma ordem:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Então P é ortogonal: $P^\top P = I$.

Calculemos $D = P^\top AP$. Primeiro observe que

$$Au_2 = 3u_2, \quad Au_1 = 1u_1,$$

porque u_2 e u_1 são autovetores normalizados. Assim

$$AP = P \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando à esquerda por $P^\top$ obtém-se

$$P^\top AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D.$$

Portanto a diagonalização ortogonal foi obtida:

$$P^\top AP = D, \quad D = \text{diag}(3, 1).$$

3.1 Visão Geométrica

O Teorema Espectral descreve qualquer operador autoadjunto como:

- uma rotação ortogonal (mudança de base P),
- seguida de uma dilatação em direções ortogonais (matriz diagonal D),
- seguida da rotação inversa.

Assim, $A = PDP^\top$. Interpretado geometricamente:

- o operador não gira o espaço;
- apenas estica ou encolhe nas direções próprias;
- essas direções são mutuamente ortogonais.

Essa descrição é essencial em tensores, curvatura, vibrações e métodos numéricos.

3.2 Prova geométrica do Teorema Espectral (versão para espaços com produto interno)

Teorema 3.5 (Teorema Espectral – ideia geométrica). *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear autoadjunto, i.e.*

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle \quad \forall u, v \in V.$$

Então existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T ; em particular, todos os autovalores de T são reais e T é diagonalizável por uma matriz ortogonal.

Demonstração.

Passo 1 — existência do máximo: Defina $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \langle T(x), x \rangle$. Como S é compacto e f é contínua, existe $u_1 \in S$ tal que $f(u_1) = \max_{x \in S} f(x)$. Denotemos $\lambda_1 := f(u_1)$.

Passo 2 — u_1 é autovetor: Para provar que u_1 é autovetor, procedemos por argumento de variação em uma curva sobre a esfera. Seja $u_2 \in S$ tal que $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ (ou seja, qualquer vetor unitário ortogonal a u_1). Para $\theta \in \mathbb{R}$ definimos

$$w(\theta) = \cos \theta u_1 + \sin \theta u_2.$$

Note que $\|w(\theta)\| = 1$ para todo θ , logo a função

$$g(\theta) := f(w(\theta)) = \langle T(w(\theta)), w(\theta) \rangle$$

atinge máximo em $\theta = 0$. Calculamos $g(\theta)$ explicitamente:

$$g(\theta) = \cos^2 \theta \langle Tu_1, u_1 \rangle + \sin^2 \theta \langle Tu_2, u_2 \rangle + 2 \sin \theta \cos \theta \langle Tu_1, u_2 \rangle.$$

Como $\theta = 0$ é ponto de máximo, $g'(0) = 0$. Derivando:

$$g'(\theta) = -2 \sin \theta \cos \theta \langle Tu_1, u_1 \rangle + 2 \sin \theta \cos \theta \langle Tu_2, u_2 \rangle + 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \langle Tu_1, u_2 \rangle.$$

Logo, em $\theta = 0$ obtemos

$$g'(0) = 2 \langle Tu_1, u_2 \rangle = 0,$$

ou seja

$$\langle Tu_1, u_2 \rangle = 0 \quad \text{para todo } u_2 \perp u_1.$$

Pelo caráter do produto interno, a igualdade anterior implica que Tu_1 é ortogonal a todo vetor em $\{u_1\}^\perp$, portanto Tu_1 pertence ao espaço gerado por u_1 . Assim existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$Tu_1 = \lambda_1 u_1.$$

Note que $\lambda_1 = f(u_1) = \langle Tu_1, u_1 \rangle$ é real.

Passo 3 — invariança do complemento ortogonal: Seja agora $V_1 = \{u_1\}^\perp$. Tomemos $w \in V_1$ arbitrário. Então

$$\langle T(w), u_1 \rangle = \langle w, T(u_1) \rangle = \langle w, \lambda_1 u_1 \rangle = \lambda_1 \langle w, u_1 \rangle = 0.$$

Logo $T(w) \in V_1$, isto é, $T(V_1) \subset V_1$. Assim a restrição $T|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_1$ é autoadjunta.

Passo 4 — indução: Como $\dim V_1 = \dim V - 1$, aplicamos a hipótese de indução sobre $T|_{V_1}$ e obtemos uma base ortonormal de V_1 formada por autovetores de $T|_{V_1}$. Juntando u_1 (normalizado) com essa base obtemos uma base ortonormal de V de autovetores de T . Isso conclui a prova. ■

Considerações Finais

Neste trabalho, investigamos em profundidade o Teorema Espectral no contexto de operadores autoadjuntos definidos em espaços vetoriais de dimensão finita com produto interno. Foram revisados conceitos fundamentais como produto interno, autovalores, autovetores, operadores lineares e operadores autoadjuntos, construindo uma base teórica sólida para compreender a diagonalização de operadores por bases ortonormais. O Teorema Espectral revelou-se um resultado central, com implicações significativas tanto na teoria quanto em aplicações práticas. A demonstração do teorema, baseada em propriedades de autovalores reais e ortogonalidade de autovetores, mostrou o poder e a beleza da Álgebra Linear neste contexto.

Referências

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; RIBEIRO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 4. ed. São Paulo: Atual, 1983.

DETOGNI, G. T.; SALOMÃO, M. E. *O teorema espectral e suas aplicações*. Pôster apresentado na XI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2024.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1979.

LANG, Serge. *Linear Algebra*. 3. ed. New York: Springer-Verlag, 1987. (Undergraduate Texts in Mathematics).

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

MENDES, M. P.; ATIQUÊ, R. G. W.; MENEGATTO, V. A. *Álgebra linear*. São Carlos: ICMC-USP, 2003. Disponível em: <<https://repositorio.usp.br/directbitstream/03dbd042-17e0-4940-8c3a-b6ad11910c4e/1306632.pdf>>. Acesso em: 26 abr. 2025.

ZANI, S. L. *Álgebra Linear: notas de aula*. São Carlos: ICMC-USP, 2013.