



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
DO SUL**

Campus de Três Lagoas - CPTL - MS

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE
PRIMEIRA ORDEM E ALGUMAS APLICAÇÕES.**

LUCAS BARRETO GOMES

TRÊS LAGOAS - MS

2024

LUCAS BARRETO GOMES

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE
PRIMEIRA ORDEM E ALGUMAS APLICAÇÕES.**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido
ao curso de Licenciatura em Matemática da
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
(UFMS), Campus de Três Lagoas.

Prof.Dr.Renato César da Silva
Orientador

TRÊS LAGOAS - MS

2024

Dedico este trabalho de conclusão de curso para meus pais, Aminadab Barreto dos Santos Gomes e Manoel Gomes.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem ele nada seria possível durante estes anos de graduação, em seguida aos meus pais, Manoel e Aminadab por todo apoio e incentivo para concluir este curso. Posteriormente, aos meus amigos que frequentam minha casa e a todos os professores do curso do departamento de matemática da UFMS-CPTL, em especial ao professor Renato César da Silva, que foi meu orientador durante dois anos em alguns trabalhos e também nesta monografia, e não poderia deixar de mencionar meus agradecimentos ao professor Antonio Carlos Tamarozzi e também ao professor Gilberto Rodrigues dos Santos.

Resumo

As equações diferenciais ordinárias são ferramentas úteis para modelagem de aplicações desde fenômenos naturais até laboratoriais. Diante disso, o objetivo deste trabalho é relacionar as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem classificadas em lineares ou não lineares com algumas aplicações, tendo em vista que, as soluções analíticas destas equações apresentadas são simplistas. A metodologia que abrange este trabalho é um levantamento bibliográfico referente as Equações Diferenciais, sob o auxílio de livros textos universitários, sendo as definições e teoremas relacionados ao livros de Boyce, Yartey, Chasnov e Doering, posteriormente, as aplicações retiradas dos livros universitários de Braun, Zill, Bassanezi e Tygel. Diante desses levantamentos bibliográficos, alguns resultados obtidos pelas soluções analíticas das equações diferenciais apresentadas é a interdisciplinarietà entre a teoria e a aplicação. Assim, destes levantamentos, é possível estabelecer uma relação entre as aplicabilidades destas equações diferenciais com a matemática aplicada.

Palavras chave: Equações Diferenciais; Aplicações; Matemática Aplicada.

Abstract

Ordinary differential equations are useful tools for modeling applications ranging from natural to laboratory phenomena. In view of this, the aim of this work is to relate first-order ordinary differential equations classified as linear or non-linear to some applications, bearing in mind that the analytical solutions of these equations are simplistic. The methodology used in this work is a bibliographical survey of differential equations, using university textbooks. The definitions and theorems are related to the books by Boyce, Yartey, Chasnov and Doering, and the applications are taken from the university textbooks by Braun, Zill, Bassanezi and Tygel. In view of these bibliographical surveys, some of the results obtained by the analytical solutions of the differential equations presented is the interdisciplinarity between theory and application. Thus, from these surveys, it is possible to establish a relationship between the applicability of these differential equations and applied mathematics.

Keywords: Differential equations; Applications; Applied Mathematics.

Sumário

1	Introdução	6
2	Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem	9
2.1	Algumas Classificações	9
2.2	Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Lineares	14
2.3	Modelo de Crescimento Populacional	19
2.4	Lei do Resfriamento de Isaac Newton	23
2.5	Circuitos Elétricos Resistência Circuito (RC) e Resistência Indutor(RL) . .	28
3	Equações Diferenciais Ordinárias Não Lineares de Primeira Ordem	34
3.1	Problemas de Valores Iniciais Não Lineares	34
3.2	Modelos Populacionais Não Lineares	37
3.3	Equação de Bernoulli	42
3.4	Trajetórias Ortogonais	47
4	Considerações Finais	52
5	Anexos	53
5.1	Anexo A	53
5.2	Anexo B	54

1 . Introdução

Algumas das diversas aplicações matemáticas vistas no cotidiano são modeladas por meio de Equações Diferenciais. De acordo com Oliveira (2010), a matemática é a linguagem principal que está por trás das ciências, conseqüentemente, existe uma infinidade de problemas em nosso cotidiano onde são necessários métodos matemáticos para fornecer as devidas soluções.

De acordo com Vargas (2005), a maioria das utilizações tecnológicas de teorias científicas são modeladas por Equações Diferenciais, e as dificuldades estão centradas em encontrar soluções para as equações que formalizam um vasto número de fenômenos naturais.

Ainda para Vargas (2005), no meio do século passado por meio de simplificações de modelos de Equações Diferenciais complexas observou-se o progresso da tecnologia, e verificou-se o sucesso da utilização de teorias científicas nas soluções de problemas técnicos.

Conforme Matos (2016), o estudo das equações diferenciais iniciou com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral pelo matemático e físico inglês Isaac Newton responsável pela formulação da teoria da gravitação universal, e também, por Gottfried Willian Leibniz filósofo alemão reconhecido como figura central na história da matemática no século XVII, por meio de conceitos de integração por somatórios correlacionados ao cálculo de volume de superfície, sendo a diferenciação correlacionada pelos problemas da reta tangente de algumas curvas.

Ainda para Matos (2016), desde a tempos antigos a matemática impressionava multidões com as aplicações relacionada a vida cotidiana devido a sua formalidade, tendo em vista que, grande parte das soluções destes problemas estavam relacionadas às necessidades da época, sendo que o cálculo obtido era a quadratura, um método específico para reduzir as soluções de problemas que envolviam cálculos de primitivas, destes fatos levou a descoberta para métodos matemáticos inovadores no século XIX.

Vale destacar que, o objetivo deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), é apresentar um levantamento bibliográfico das aplicações que envolve as Equações Diferenciais

Ordinárias de Primeira Ordem classificadas como Lineares ou Não Lineares, sendo apresentadas definições, exemplos, propriedades, teoremas clássicos (existência e unicidade de soluções) como base para compreender as aplicações presentes em cada capítulo.

No segundo capítulo no início é discutido as Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de primeira ordem, com algumas classificações referente à ordem das equações, linearidade, método de soluções para Problemas de Valores Iniciais (PVI) que envolvem tanto as equações homogêneas e não homogêneas por meio de alguns exemplos.

Assim, as seções do capítulo 2 são referentes as três aplicações classificadas como Lineares, dentre elas, a primeira trata do modelo de crescimento populacional representada pela Lei do crescimento Malthusiano em que é exibido as equações que utilizam deste método de solução. Em seguida, a Lei do Resfriamento de Isaac Newton com algumas definições e propriedades importantes da Terminologia relacionadas ao calor para um aquecimento ou resfriamento com a aplicação hipotética que envolve o trabalho de um perito criminal.

O capítulo 2 é encerrado pelas aplicações dos circuitos elétricos Resistência Circuito (RC) e Resistência Indutor (RL) através das formulações das equações, assim como os processos envolvidos para determinar tanto a corrente elétrica quanto a carga elétrica, principalmente, as ilustrações dos circuitos em conjunto com as equações que correspondem-as.

Diante disso, o capítulo 3 é tratado as Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira ordem, porém as classificadas como Não Lineares. É apresentado, um referencial bibliográfico sobre PVIs Não Lineares, resultados clássicos referente a problemas de existência e unicidade em um intervalo com exemplos e ilustrações de gráficos do comportamento das funções apresentadas.

As seções do capítulo 3 são referente as aplicações não lineares, a saber, Modelos populacionais não lineares, Equação de Bernoulli e trajetórias ortogonais. No início da seção é apresentado os modelos populacionais em que sua modelagem é realizada por equações diferenciais não lineares e de primeira ordem, tendo em vista que, este modelo é requerido para crescimentos de populações grandes, que considera fatores relacionados ao ambiente deste taxa de natalidade quanto a taxa de mortalidade.

Adiante, a segunda aplicação presente no capítulo 3 é a seção que trata sobre as

Equações de Bernoulli. Nesta seção, é discursado a transformação utilizada para solucionar estas equações que são não lineares representadas diante alguns PVIs.

Na sequência, o capítulo 3 encerra na seção das trajetórias ortogonais. Nela, é salientado as demonstrações dos métodos necessários para obter uma família de curvas ortogonais a uma curva, é exibido algumas aplicações deste tipo com algumas ilustrações por meio de gráficos.

2 . Equações Diferenciais Ordinárias

Lineares de Primeira Ordem

Nesta capítulo é tratado um estudo bibliográfico referente as Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem. Será apresentado desde as classificações quanto suas linearidades e métodos de soluções assim como algumas aplicações, a saber: Modelos populacionais, Lei do Resfriamento de Newton e Circuitos Elétricos (RC e RL).

2.1 Algumas Classificações

Seja uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem da forma,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.1)$$

onde f é uma função real definida em um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$. Considere $y = \phi(t)$ uma função diferenciável que satisfaz (2.1) para todo t em um intervalo I é chamada de solução.

Assim, é necessário classificar as EDO's tanto em relação à sua ordem quanto à sua estrutura, a fim de identificar métodos de soluções para determinados problemas.

Definição 1 : *A ordem de uma EDO é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação.*

Exemplo 1 : *A EDO dada por $y'' + y + \cos(t) = 0$ é classificada como EDO de segunda ordem de acordo com a definição (1) pois a ordem de sua maior derivada é y'' .*

Exemplo 2 *A EDO $2ty + y'2t + y''(t+1) + y'''(\sin(t))$ é classificada como EDO de terceira ordem pela definição (1) pois a ordem de sua maior derivada é y''' .*

Nesse sentido, classifiquemos a linearidade das EDO's de acordo com a definição a seguir.

Definição 2 *Uma EDO caracteriza-se como linear com respeito as variáveis, a saber,*

$$y, y', y'', \dots, y^{n-1}, y^n$$

consequentemente,

$$a_0(t)y + a_1(t)y' + a_2(t)y'' + \dots + a_n(t)y^n = f(t)$$

em que a_0, a_1, \dots, a_n e f são funções apenas de t .

Os exemplos 3 e 4 mostram exemplos relacionados, respectivamente, a linearidade e não linearidade de uma EDO de primeira ordem.

Exemplo 3 : *A EDO $y' + 4t = 0$ é dita linear pela definição (2).*

Exemplo 4 : *Seja $t^2y - yy' + 4y = 0$ é dita não linear pois é contrária a definição (2).*

Uma EDO reflete sobre o comportamento da derivada de uma função, tendo em vista que, o objetivo é encontrar uma solução que obedeça uma determinada equação. O exemplo (5) mostra a solução de uma EDO de primeira ordem linear.

Exemplo 5 : *Dada a EDO $y'' + y = 0$ uma equação que representa a solução é $y(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t)$ para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Observe que,*

$$y'' = -c_1\cos(t) - c_2\sin(t)$$

então,

$$y'' + y = (-c_1\cos(t) - c_2\sin(t)) + (c_1\cos(t) + c_2\sin(t)) = 0$$

como queríamos mostrar.

Veja que o exemplo (5) não fornece completamente a solução da equação, uma vez que em todos os casos apresenta-se um ou mais parâmetros diante a solução, e de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo a primitiva de uma função não é determinada devido a soma de parâmetros.

Com o intuito de obter uma resposta concreta é necessário informações adicionais além da equação, sendo um valor da função em um ponto, ou seja, $y(x_0) = y_0$.

Definição 3 : *Um problema de valor inicial (PVI) de uma equação diferencial de ordem n , é,*

$$y^n = f(x, y', y'', \dots, y^{n-1})$$

com as condições iniciais

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)} \end{array} \right.$$

onde $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{(n-1)}$ são valores dados, logo, a solução geral é uma família de n -parâmetros, e utilizando as condições iniciais é encontrado uma solução particular.

O exemplo (6) mostra a solução de um PVI que é encontrado a solução particular de uma EDO de primeira ordem linear.

Exemplo 6 : *Resolva $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2} = \frac{3}{2}$ adotando que $y(0) = 2$.*

Note que,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3-y}{2} \Rightarrow \frac{1}{3-y} dy = \frac{1}{2} dx$$

como as funções encontradas são contínuas então as mesmas são integráveis, isto é,

$$\int \frac{1}{3-y} dy = \int \frac{1}{2} dx \Rightarrow -\ln(3-y) = \frac{x}{2} + C \Rightarrow y(x) = 3 - \frac{1}{e^{\frac{x}{2}} \cdot K}, \forall K \in \mathbb{R}.$$

adotando $y(0) = 2$, temos,

$$3 - \frac{1}{K} = 2 \Rightarrow K = 1.$$

logo, a solução da EDO deste exemplo sob condição de $y(0) = 2$ é $y(x) = 3 - e^{-\frac{x}{2}}$.

O exemplo (6) é representado como uma equação separável dada pela definição a seguir.

Definição 4 : *As EDOs que podem ser escritas da forma*

$$g(y)y' = f(x) \Rightarrow g(y)dy = f(x)dx$$

são chamadas de equações separáveis estão separadas de modo que as variáveis x e y estão separadas.

Através da definição (3) é necessário estabelecer quando existe solução e a mesma é dita única num intervalo centrado, assim é enunciado os teoremas (1) e (2).

Teorema 1 : *Suponha que a função $f(x, y)$ é contínua num retângulo R ,*

$$R = \{(x, y) : x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\}$$

centrado em (x_0, y_0) . Então existe um número h_1 (possivelmente menor que h) tal que uma solução de $y = \phi(x)$ de (3) é definido em $(x_0 - h_1, x_0 + h_1)$.

Teorema 2 : Suponha que $f(x, y)$ e sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ sejam contínuas num retângulo R conforme o Teorema (1). Então existe um número h_2 (possivelmente menor que h_1) tal que uma solução de $y = \phi(x)$ na qual a existência é garantida pelo Teorema (1), posteriormente, a solução é única em $(x_0 - h_2, x_0 + h_2)$.

Veja que os exemplos (7) e (8) retratam referente a aplicação dos Teoremas (1) e (2) para existência e unicidade em um PVI definido em (3).

Exemplo 7 : Seja o PVI,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+1)}{y+1} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

observe que $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\cos(x+1)}{(y+1)^2}$ é contínua quando $x = 0$ exceto para $y = -1$. Logo, $f(x, y) = \frac{\cos(x+1)}{y+1}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0, 2)$, assim, os Teoremas (1) e (2) garantem tanto à existência quanto à unicidade para o PVI.

Exemplo 8 : O PVI dado por,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

note que, tanto $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{y^2}$ quanto $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ não são contínuas em $(1, 0)$, logo, possível concluir que nada afirma-se a respeito de possíveis soluções neste intervalo.

Adiante, as classificações abordadas nesta seção 2.1 estabelece um alicerce para a seção 2.2 que trata referente as soluções de uma EDO Linear que pode ser homogênea ou não homogênea.

2.2 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Lineares

A equação diferencial (2.1) pode ser escrita da forma,

$$y' = f(t, y)$$

onde f é uma função admitida em $A \subset \mathbb{R}^2$. Consideremos o caso em que $y' = f(t)$ e f seja integrável, então,

$$y' = f(t) \Rightarrow dy = f(t)dt \Rightarrow \int dy = \int f(t)dt \Rightarrow y(t) = F(t) + C, \forall C \in \mathbb{R}.$$

É importante destacar que, na maioria dos casos existem Equações Diferenciais impossíveis de solucionarmos de maneira analítica, então, é importante o auxílio de um computador que envolva os métodos numéricos para resolver. Nesta seção, é discutido as soluções de EDO lineares por métodos simplistas de solucionar.

Definição 5 : *Uma equação diferencial linear de primeira ordem é uma equação da forma,*

$$y' + a(t)y = b(t)$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas em um intervalo I .

A definição (5) é classificada como linear pois é possível escrevê-la da forma da equação (2.1), ou seja, $f(t, y) = -a(t)y + b(t)$, por outro lado, $g(t, y) = -a(t)y$ é linear em y , a saber,

$$g(t, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = -a(t)[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = -\alpha_1 a(t)y_1 - \alpha_2 a(t)y_2 = \alpha_1 g(t, y_1) + \alpha_2 g(t, y_2)$$

Destes fatos, pela definição (5) note o PVI a seguir,

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

de acordo com Teoremas (1) e (2) segue que $f(t, y) = -a(t)y + b(t)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = -a(t)$ são contínuas em t e y . A definição (6) trata referente a simplificação da equação dada pela definição (5).

Definição 6 : Dada uma equação diferencial linear escrita da forma,

$$y' + a(t)y = 0$$

é chamada de linear homogênea (L.H). Caso contrário, para $b(t) \neq 0$ é definida como linear não homogênea (L.N.H).

Seja $y \neq 0$, a solução geral para as Equações Diferenciais classificadas como Lineares Homogêneas é obtida do seguinte modo,

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} + \frac{a(t)y}{y} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt}(\ln|y(t)|) = -a(t) \Rightarrow \ln|y(t)| = - \int a(t)dt \Rightarrow y(t) = e^{-\int a(t)dt} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(t) = K.e^{-\int a(t)dt}, \forall K \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

assim, a equação diferencial apresentada na definição (6) tem solução geral dada pela função $y(t)$ em (2.2).

Exemplo 9 Seja o PVI,

$$\begin{cases} y' + \text{sen}(t)y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

note que $y' + \text{sen}(t)y = 0$ é uma equação diferencial linear homogênea de acordo com a

definição (6), então a sua solução geral é,

$$y(t) = K.e^{-\int \sin(t)dt} \Rightarrow y(t) = K.e^{\cos(t)}$$

atribuindo a condição inicial $y(0) = 2$, temos,

$$y(0) = 2 \Rightarrow K.e^{\cos(0)} = 2 \Rightarrow K = 2e^{-1}$$

diante disso, a solução geral é $y(t) = 2e^{-1}.\cos(t)$

As propriedades a seguir remetem a características importantes para EDO lineares homogêneas.

Propriedade 1 : O conjunto solução da equação $y' + a(t)y = 0$ verifica que,

I . Se y_1 e y_2 são soluções então $y_1 + y_2$ também são soluções.

II . Se y_1 é solução então cy_1 também é solução, $\forall c \in \mathbb{R}$.

III . A função $y(t) \equiv 0$ é solução.

Para o item I, adote que $y_1 = c_1.e^{-\int a(t)dt}$ e $y_2 = c_2.e^{-\int a(t)dt}$, isto é,

$$y'_1 = c_1.e^{-\int a(t)dt} \cdot (-a(t)), y'_2 = c_2.e^{-\int a(t)dt} \cdot (-a(t))$$

assim,

$$\begin{aligned} [y_1 + y_2]' + a(t)[y_1 + y_2] &= y'_1 + y'_2 + a(t)y_1 + a(t)y_2 = \\ &= c_1a(t)e^{-\int a(t)dt} - c_2a(t)e^{-\int a(t)dt} + c_1a(t)e^{-\int a(t)dt} + c_2a(t)e^{-\int a(t)dt} = 0. \end{aligned}$$

com isso, garantimos que $y_1 + y_2$ é solução como desejado.

Posteriormente, para a propriedade II vamos mostrar que cy_1 é solução para a EDO, isto é,

$$[c.y_1]' = cy_1' = c.e^{-\int a(t)dt} \cdot (-a(t))$$

assim,

$$cy_1' + a(t).cy_1 = c.(-c_1.a(t)).e^{-\int a(t)dt} + a(t).ce^{-\int a(t)dt} = 0.$$

logo, cy_1 é solução como desejado.

Analogamente, para a propriedade (1) do item III, temos que,

$$y \equiv 0$$

temos,

$$y' \equiv 0$$

nessas condições, $y' + a(t)y = 0$.

Pela definição (6) as EDOs podem ser lineares homogêneas ou lineares não homogêneas. Da definição (5), para $b(t) \neq 0$ é necessário a definição (7).

Definição 7 : *Seja $\mu(t)$ a função reconhecida como fator integrante para a equação não homogênea, em que, $\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$.*

Através da definição (7) manipulamos a expressão por meio da definição (6), isto é,

$$\mu(t).y'(t) + \mu(t).a(t).y = \mu(t).b(t)$$

note que,

$$(\mu(t).y)' = \mu'(t).y + y'.\mu(t)$$

destes fatos, obtemos que,

$$\begin{aligned}\mu(t).y' + a(t).\mu(t).y &= (\mu(t).y)' \Rightarrow \mu(t).y' + a(t).\mu(t).y = \mu(t).y' + \mu'(t).y \Rightarrow \\ &\Rightarrow a(t).\mu(t).y = \mu'(t).y\end{aligned}\tag{2.3}$$

considere que $y \neq 0$ para 2.3, ou seja,

$$\frac{a(t).\mu(t).y}{y} = \frac{\mu'(t).y}{y} \Rightarrow \mu'(t) - a(t).\mu(t) = 0\tag{2.4}$$

assim obtemos a expressão (2.4) que é uma EDO LH. Analogamente, para $\mu(t) \neq 0$ sob (2.4), obtemos,

$$\frac{\mu(t).a(t)}{\mu(t)} - \frac{a(t).\mu(t)}{\mu(t)} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\ln(\mu(t))) = a(t)$$

integrando ambos os membros, temos,

$$\ln|\mu(t)| = \int a(t)dt \Rightarrow \mu(t) = e^{\int a(t)dt}\tag{2.5}$$

Diante disso, pela definição (5) por meio de processos algébricos simples com (2.5), tal que,

$$\mu(t).y' + \mu(t).a(t).y = b(t).\mu(t) \Rightarrow (\mu(t).y)' = \mu(t).b(t)$$

integrando-a, temos,

$$\mu(t).y = \int \mu(t).b(t)dt \Rightarrow y = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t).b(t)dt \right)$$

ou ainda,

$$y = ce^{-\int a(t)dt} + e^{-\int a(t)dt} \cdot \int e^{\int a(t)dt} \cdot b(t)dt \quad (2.6)$$

logo, a expressão (2.6) é solução geral das EDO lineares não homogêneas.

2.3 Modelo de Crescimento Populacional

Nesta seção será tratado as equações diferenciais que governam o crescimento populacional sob condições específicas. Para Braun (1993) é impossível modelar o crescimento de uma espécie por intermédio de equações diferenciais pois uma ou outra espécie é modificada em quantidades inteiras.

Ainda, segundo Braun (1993) uma determinada espécie de população nunca pode ser diferenciável em função do tempo, porém se a população for grande e aumentada continuamente em tamanho um, essa modificação é relativamente pequena em comparação a população dada, assim, é obtido uma aproximação das mudanças contínuas de crescimentos de grandes populações.

Por conseguinte, será denotado o crescimento exponencial das populações através de Progressões Geométricas (PG). Segundo Nápoles (2018) este crescimento é limitado pela caracterização da taxa de crescimento num determinado instante e é proporcional à população total no mesmo momento.

Segundo Nápoles (2018), alguns obstáculos para o crescimento de uma população são guerras, epidemias, fatores econômicos, infantícidios e entre outros, por outro lado, o controle para a estabilização do crescimento de uma população é o casamento.

De acordo com Nápoles (2018), o modelo de progressão geométrica é destacado pelo crescimento populacional consecutivo, em que, r é uma constante da taxa de crescimento da população. Destes fatos, é necessário que considere em um ano n uma população fixa P_0 , na qual a recorrência linear dessas populações são dadas por, $P_1 = (1 + r) \cdot P_0$, $P_2 = (1 + r)^2 \cdot P_0$, generalizando, obtemos, $P_{n+1} = (1 + r)^n \cdot P_n$ dada por uma PG de razão $(1 + r)$.

Destes fatos, o modelo Matlhusiano é utilizado para manusear as expressões adiante

nesta seção, apesar de simples reata o comportamento da realidade em algum instante de tempo, ausente restrições específicas.

Suponha que, $P(t)$ represente a população de uma espécie em um tempo t , e $r(t, p)$ a diferença entre a taxa de natalidade e taxa de mortalidade. Para Braun (1993) dado uma população isolada, é adotado que $\frac{dP}{dt}$ a taxa de mudança da população é igual a $aP(t)$, então, é obtido a equação diferencial dada por,

$$\frac{dP}{dt} = aP(t) \quad (2.7)$$

Observe que a EDO (2.7) é linear devido a definição (2) e é classificada como homogênea pois podemos manipular a expressão de maneira análoga a definição (6), isto é,

$$P'(t) - aP(t) = 0$$

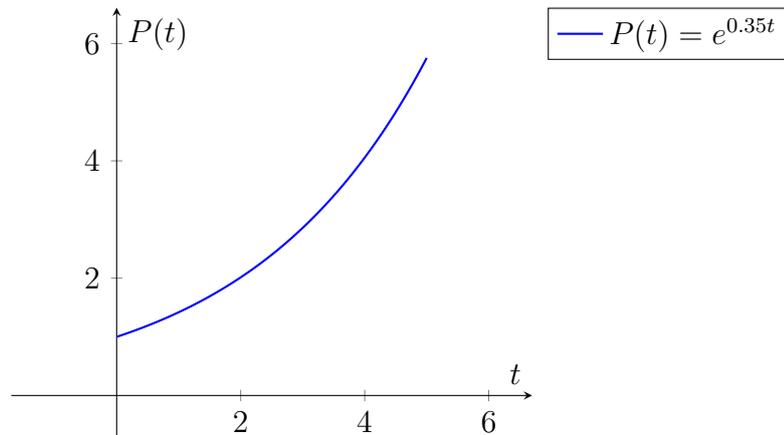
como $P(t)$ é uma função contínua, então, sua solução geral é obtida pelos métodos de solução apresentados em (2.2), logo,

$$P(t) = P_0 \cdot e^{a(t-t_0)}$$

em que $P_0 = e^c$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Essa equação diferencial apresentada, é nomeada por lei do crescimento populacional de Thomas Robert Malthus ou lei do crescimento Malthusiano.

O gráfico a seguir mostra o comportamento do crescimento exponencial de uma população arbitrária por meio do método Malthusiano, em que $P_0 = 1$ e $a = 0.35$. Observe que, à medida que o tempo t avança a população cresce de modo acelerada.

Gráfico 1: Comportamento do Crescimento Populacional Malthusiano



Fonte: Autoria própria.

Essa aplicação de EDO pode representar alguns modelos populacionais sem restrições, adiante, será especificado de maneira hipotética em quantos anos aproximadamente a Terra terá o dobro de sua população.

Aplicação 1 : *Suponha $P(t)$ a população da Terra em um tempo t . Foi determinado por um grupo de pesquisadores que aproximadamente a população da Terra em meados dos anos 1960 à 1970 estava aumentando a uma taxa de crescimento de 2% ao ano. Verifique a quantidade de habitantes na Terra estimado em centenas de anos.*

Considere que na época de 1965 a população da Terra esteja estimada em aproximadamente $3,34 \cdot 10^9$ habitantes. Aplicando o modelo de crescimento Malthusiano, temos, $t_0 = 1965$ e $a = 0,02$, ou seja,

$$P(t) = (3,34 \cdot 10^9) \cdot e^{0,02(t-1965)} \quad (2.8)$$

Da equação (2.8), considere que $t - 1965 = T$. Assim, a Terra dobrará o número de habitantes quando T for,

$$e^{0,02T} = 2 \Rightarrow 0,02T = \ln(2) \Rightarrow T \approx 36,65$$

logo, a equação prevê que em aproximadamente 36,65 anos a população da Terra será 2 vezes maior que o t_0 considerado.

Para Braun (1993) a equação prevê que a população da Terra será de 200 bilhões de habitantes em 2515, em contrapartida, sua superfície possui capacidade de 1.860.000 bilhões de pés quadrados sendo que 80% é composto por água.

Ainda assim, de acordo com Braun (1993) uma certa espécie de ratos (*Microtus Arvallis Pali*) reproduz rapidamente. Considere que, essa população de roedores cresça a 40% ao mês, e que existam dois roedores no início da observação, então, a taxa de crescimento dos roedores satisfaz o PVI dado por,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = 0,4P \\ P(0) = 2 \end{cases}$$

observe que o PVI pode ser escrito do seguinte modo,

$$P'(t) - 0,4P(t) = 0$$

é uma EDO linear não homogênea, então sua solução é obtida através dos métodos abordados na definição (6), isto é, $P(t) = P_0 \cdot e^{0,4 \cdot (t-t_0)}$. Adotando a condição inicial, tal que, $P(0) = 2$, temos,

$$P(t) = 2 \cdot e^{0,4 \cdot (t-t_0)}$$

Destes fatos, para Braun (1993) este modelo representativo do crescimento de uma determinada espécie, representa um proximidade da realidade, assim, tabela a seguir mostra dados de observações realizadas no passado desta espécie, por outro lado, os cálculos realizados com este modelo populacional.

A tabela (2.1) mostra a proximidade da realidade (observações) com os cálculos obtidos por meio do modelo de crescimento populacional Malthusiano.

Tabela 2.1: Observação e cálculos de modelos populacionais.

Meses	0	2	6	10
p Observações	2	5	20	109
p Cálculos	2	4.5	22	109.2

Fonte: Braun (1993).

2.4 Lei do Resfriamento de Isaac Newton

Nesta seção, é abordado a aplicação referente a Lei do resfriamento de corpos proposto pelo matemático e físico Isaac Newton.

De acordo com Silva (2010) Newton publicou um artigo que descreve métodos para medir temperaturas de até 100 °C, na época quase nenhum termômetro aferia elevadas temperaturas.

Vale ressaltar que, esse método é embasado sob a Lei de Variação da Temperatura de Newton. O enunciado reflete que a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre temperatura do corpo e do ambiente.

Assim, é destacado algumas situações do cotidiano que é utilizado a Lei de Variação da Temperatura de Newton através de um modelo de equações diferenciais ordinárias. Para Silva (2010), a taxa de resfriamento de um corpo depende fatores externos, tais como: diferença de temperatura entre o meio e o ambiente, condições que o corpo foi inserido, condutividade térmica do corpo e entre outros fatores.

As situações mais frequentes que abordam esta aplicação são as mudanças de temperatura em objetos que possuem maior grau de condutividade térmica de calor, haja vista que, calor é definido como energia térmica em trânsito.

Aplicações que são desde aquecer um metal até processos de revenimento em indústrias. Os cálculos são utilizados com o objetivo de prever o momento em que o objeto atinge a temperatura desejada, em que habilita encontrar a melhor utilização do forno em relação ao rendimento da produtividade da indústria.

Para Silva (2010), por outro lado o resfriamento é utilizado de maneira ampla, como por exemplo, permitir a conservação de propriedades quantitativas e qualitativas de um determinado material em estado aproximadamente inalterado.

Um corpo cuja a temperatura é T em que não possui fontes internas de propagação de calor, quando entra em contato com o ambiente, a temperatura T tende à temperatura do meio T_m . Então, para $T < T_m$ o corpo é aquecido, caso contrário, resfriará.

Segundo Silva (2010), experimentalmente foi verificado que quanto maior a diferença entre a temperatura do ambiente e a do corpo, mais rapidamente será a variação de sua temperatura ao longo do tempo ($T(t)$).

Um modelo simplificado para o fenômeno que expressa a variação de temperatura num corpo por ganho ou perda de calor para o ambiente, deve satisfazer algumas hipóteses cuja é apresentado na propriedade (2).

Propriedade 2 *Dado um corpo cuja a temperatura é T e a do ambiente T_m , deve satisfazer os seguintes itens:*

- I . A temperatura T é a mesma em todo interior do corpo e depende apenas e exclusivamente do tempo.*
- II . A temperatura do ambiente T_a , é constante com o tempo.*
- III . O fluxo de calor por meio das paredes do corpo é representado por $T' = \frac{dT}{dt}$ proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do ambiente, ou seja, $T' = -K(T - T_a)$ onde K é uma constante que depende das propriedades físicas do corpo.*

Vale ressaltar que, na propriedade (2) no item *III* o sinal negativo na equação é devido a transferência de calor de uma fonte quente para uma fonte fria, isto é, se $T > T_a$ obtemos que T decresce, caso contrário, T cresce.

Pelo item II da propriedade (2), veja que,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{(T - T_a)} = -K dt &\Rightarrow \ln|T - T_a| = -Kt + C \Rightarrow T - T_a = A.e^{-K.t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(t) = T_m + A.e^{-Kt} \end{aligned} \tag{2.9}$$

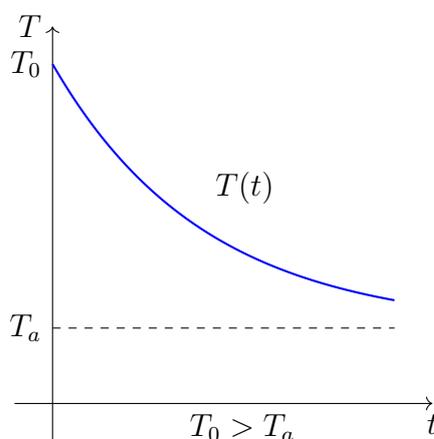
da equação obtida em (2.9), é instituído a condição inicial $T(0) = T_0$, isto é,

$$T(0) = T_0 \Rightarrow T_m + A = T_0 \Rightarrow A = T_0 - T_a$$

logo, a temperatura de um corpo em um instante de tempo t pode ser obtida pela expressão $T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-Kt}$.

O gráfico (2) representa a queda temperatura de um corpo, observe que, a medida que à curva $T(t)$ se afasta de T_0 aproxima cada vez da temperatura T_a em que $T_0 > T_a$.

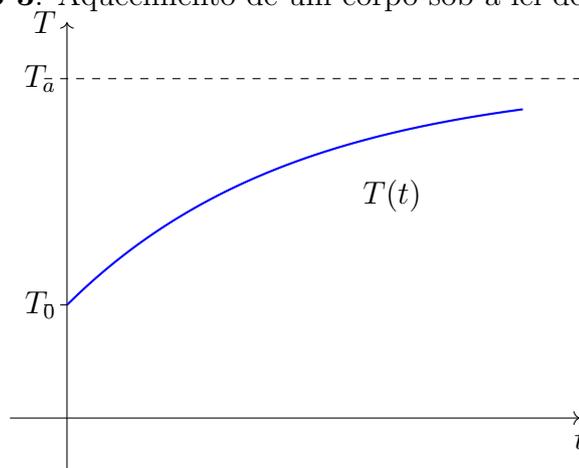
Gráfico 2: Curva de resfriamento de um corpo.



Fonte: Autoria própria.

Por outro lado, o gráfico (3) ilustra o aquecimento de um corpo, note que, a curva exponencial $T(t)$ aproxima de T_a que implica em $T_0 < T_a$.

Gráfico 3: Aquecimento de um corpo sob a lei de Newton



Fonte: Autoria própria.

Tanto no gráfico (3) quanto no Gráfico (4), a temperatura dada por $T(t)$ apresenta uma característica quando $t \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (T_a + (T_0 - T_a).e^{-K.t}) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} T_a = T_a \quad (2.10)$$

logo, a expressão obtida em (2.10) apresenta que $T(t)$ converge para a temperatura ambiente ao longo do tempo t , por consequente essa característica é reconhecida como temperatura de equilíbrio do corpo.

Assim, a Lei do Resfriamento de Newton é utilizada para aferir desde temperaturas mais baixas até mesmo as mais as elevadas. Algumas aplicabilidades desta Lei estão presentes em nosso cotidiano, tal como, o auxílio para peritos criminais investigar o local de algum crime. A aplicação (2) trata referente a descobrir o horário de um óbito.

Aplicação 2 : *A temperatura do local, onde faleceu uma pessoa, era constante e igual a $22,2^\circ C$. Pessoas que estavam próximas ao local relataram que havia um indivíduo no momento do ocorrido, no período entre 18h às 21h. Após uma intensa discussão entre as mesmas, o indivíduo deixou o local onde estava a vítima. Ainda por relatos de pessoas próximas ao local, afirmam que discussões não eram comum entre essas pessoas envolvidas. Um perito criminal chega ao local às 23h e mediu a temperatura do corpo que era de $34,8^\circ C$, uma hora mais tarde aferiu novamente a temperatura e registrou no relatório de ofício que era de $34,1^\circ C$. É possível afirmar que o indivíduo que entrou no local no horário da discussão, é o responsável pelo óbito da outra pessoa ?*

Suponha que temperatura normal do corpo seja $T_n = 35,6^\circ C$. Pela Lei de Resfriamento de Newton, temos,

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a).e^{-K.t} \Rightarrow T(t) = (34,8 - 22,2).e^{-K.t} + 22,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(t) = 12,6.e^{-K.t} + 22,2$$

o perito aferiu a temperatura uma hora após sua chegada e concluiu que era de $34,1^\circ\text{C}$, assim,

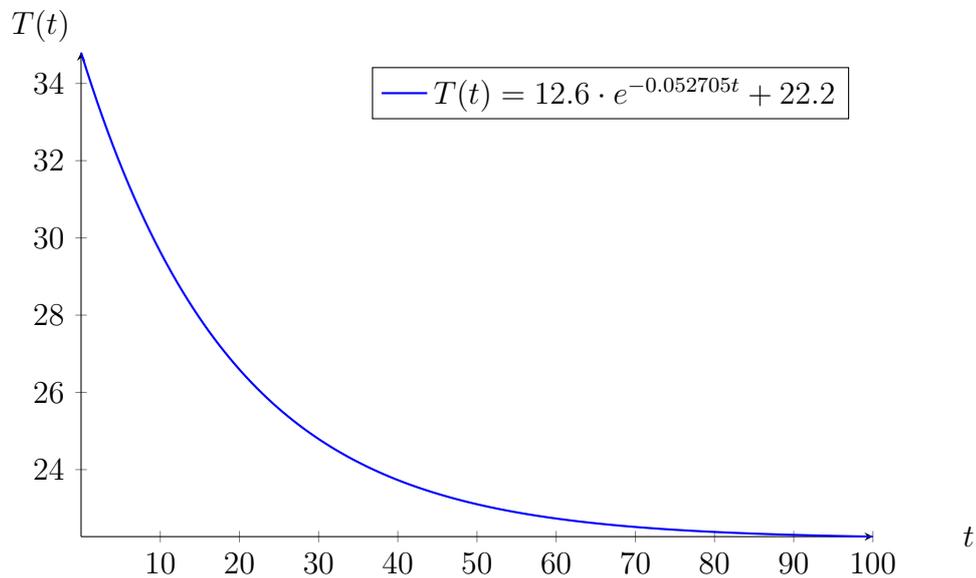
$$T(1) = 34,1 \Rightarrow 12,6 \cdot e^{-K} + 22,2 = 34,1 \Rightarrow 12,6 \cdot e^{-K} = 11,9 \Rightarrow e^{-K} = 0,9444 \Rightarrow K = 0,057205$$

logo, a equação (2.11) representa o ocorrido, isto é,

$$T(t) = 12,6 \cdot e^{-0,057205t} + 22,2 \quad (2.11)$$

A partir da equação (2.11) é obtido o gráfico 4 que ilustra o comportamento da temperatura do corpo em função do tempo t , isto é,

Gráfico 4: Comportamento da temperatura aferida pelo Perito.



Fonte: Autoria própria.

observe que do gráfico 4 o corpo diminui a sua temperatura ao longo do tempo pois $T_0 > T_a$.

Dado que a temperatura normal do corpo é $T_n = 36,5^\circ\text{C}$, então, o momento do óbito é obtido do seguinte modo,

$$T(t) = 36,5 \Rightarrow 12,6.e^{-0,057205t} + 22,2 = 36,5 \Rightarrow e^{-0,057205t} = 1,06349 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-0,057205t).lne = ln1,06349 \Rightarrow t = -1,076h \quad (2.12)$$

Sabemos que uma pessoa esteve no local entre 18h às 21h, e como $t = -1,076h$ então o corpo estava em óbito às,

$$23h - 1h55min \approx 21h55min$$

O perito deve concluir que a pessoa que estava no local com a vítima entre o horário das 18h às 23h não é a responsável pelo óbito.

2.5 Circuitos Elétricos Resistência Circuito (RC) e Resistência Indutor(RL)

Nesta seção é discutido a aplicação de circuitos elétricos do tipo Resistência Circuito (RC) e Resistência Indutor (RL) através de manipulações algébricas em equações diferenciais ordinárias de primeira ordem caracterizadas como lineares.

Definição 8 : *Os diagramas que representam o movimento das cargas elétricas em um caminho fechado é denominado circuitos elétricos.*

Em outras palavras, os circuitos elétricos tem o intuito de representar os caminhos de transferência de energia de um determinado local para outro, ou seja, a energia potencial elétrica é transferida por meio de uma fonte (gerador) até um outro dispositivo em que a energia é armazenada (receptor) ou até mesmo convertida em outros tipos de energia, como: luz solar, som e entre outros.

Seja um circuito elétrico simples de indutância L , resistência R e uma força eletromotriz constante E_0 , em que o mesmo é ligado no instante $t = 0$, é válido as características

admitidas na propriedade (3).

Propriedade 3 *Considere as seguintes propriedades para um circuito elétrico simples sob uma força eletromotriz constante:*

I . A queda de tensão através da resistência R é igual a RI .

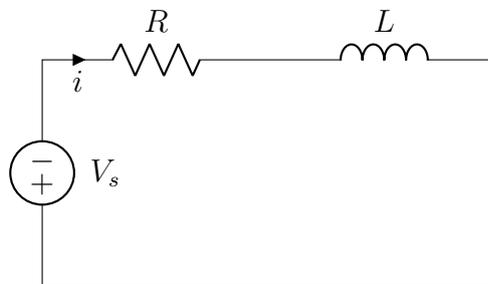
II . A queda de voltagem através de uma indutância L é igual a $L\frac{dI}{dt}$.

De acordo com propriedade (3), note que, a definição (9) auxilia na manipulação da equação diferencial que modela um circuito elétrico classificado como RL.

Definição 9 : *Para circuitos elétricos do tipo R.L em paralelo com a lei de Kirchhoff, diz que a soma da queda de tensão no resistor (R) e indutor (L) é igual a voltagem (V).*

A figura (1) ilustra um circuito elétrico simples RL, que possibilita encontrar as equações diferenciais desejadas para modelar essa aplicação tão utilizada.

Figura 1: Circuito elétrico Resistência Indutor (RL).



Fonte: Autoria própria.

assim, pela definição (9), a EDO que representa esse modelo, é dada por,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = \frac{E(t)}{L} \quad (2.13)$$

a equação diferencial obtida (2.13) é caracterizada como EDO linear não homogênea pela

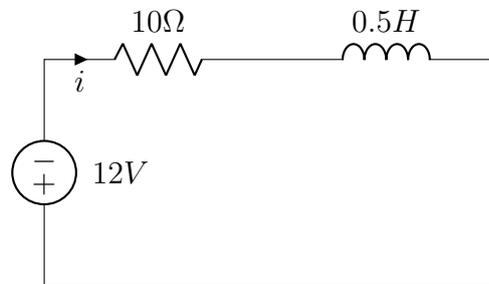
definição (7), pois $E(t) \neq 0$, caso contrário produziria uma queda de tensão no circuito para $E(t) = 0$.

A aplicação (3) reata sob um circuito elétrico simples RL, em que possibilita encontrar a corrente elétrica $I(t)$ durante um longo prazo de tempo t .

Aplicação 3 : Considere que uma bateria de 12 Volts é conectada por intermédio de um circuito RL, sendo a indutância de $\frac{1}{2}H$ e a resistência $R = 10\Omega$.

A figura a seguir, ilustra o esquema do circuito RL desejado, isto é,

Figura 2: Esquema do Circuito RL.



Fonte: Autoria própria.

Considere que a corrente elétrica inicial ($i(0) = 0$) e pela definição (7) o fator integrante é $\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$. Assim,

$$\frac{di}{dt} + \frac{10i}{\frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{di}{dt} + 20i = 24 \quad (2.14)$$

assim, da equação (2.14), o fator integrante é,

$$\mu(t) = e^{\int 20dt} \Rightarrow \mu(t) = e^{20t}$$

diante disso, ao operar a equação (2.14), é obtido,

$$e^{20t} \cdot \frac{di}{dt} + e^{20t} \cdot 20i = 24 \Rightarrow (e^{20t} \cdot i)' = 24 \cdot e^{20t} \Rightarrow i \cdot e^{20t} = 24 \cdot \int e^{20t} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{20t} \cdot i = \frac{24}{20} \cdot e^{20t} + C \Rightarrow i(t) = \frac{6}{5} + Ce^{-20t}$$

como a condição inicial indica que $i(0) = 0$,

$$i(0) = 0 \Rightarrow \frac{6}{5} + Ce^{-20 \cdot 0} = 0 \Rightarrow C = -\frac{6}{5}$$

logo, a equação (2.15) representa a corrente elétrica gerada no circuito RL da aplicação (3), isto é,

$$i(t) = \frac{6}{5} (1 - e^{-20t}) \quad (2.15)$$

Pelas propriedades de limite é possível determinar a corrente elétrica em um tempo distante t . Isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6}{5} (1 - e^{-20t}) = \frac{6}{5} \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-20t}) = \frac{6}{5} (\lim_{t \rightarrow \infty} 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-20t}) = \frac{6}{5}$$

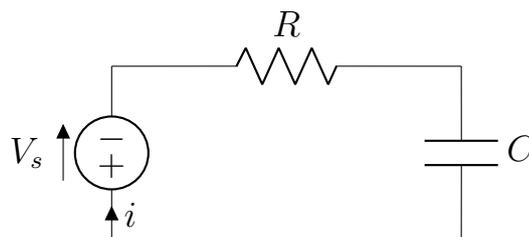
quando t tende a infinito (tempo distante) a corrente elétrica é $i(t) = \frac{6}{5} A$.

Por outro lado, o circuito elétrico Resistência Circuito (RC) contém uma resistência R , capacitor C e uma fonte eletromotriz geradora V_s . A definição (10) apresenta as características de um circuito simples do tipo RC.

Definição 10 : *Pela lei de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão no resistor e no capacitor é igual a voltagem.*

Através da definição (10) veja o esquema de um circuito RC na figura,

Figura 3: Circuito elétrico Resistência Circuito (RC).



Fonte: Autoria própria.

veja que, a soma de tensão sobre o resistência R e no capacitor C pela definição (10) implica em,

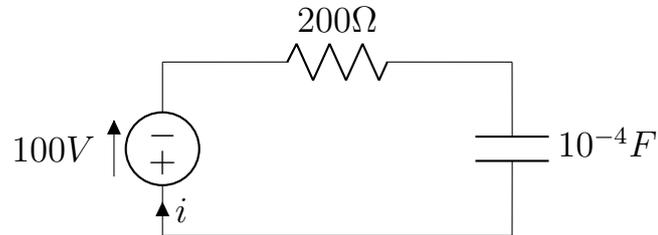
$$R\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{q}{C} = E(t) \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \frac{q}{R} = \frac{E(t)}{R} \quad (2.16)$$

observe que a equação diferencial (2.16) é uma EDO linear não homogênea de acordo com a definição (7), pois $E(t) \neq 0$.

A aplicação (4) trata referente a um circuito elétrico simples do tipo RC, com o intuito de encontrarmos a expressão da carga $Q(t)$ e a corrente elétrica $I(t)$.

Aplicação 4 : Uma força eletromotriz de $100V$ é aplicada a um circuito em série RC conforme ilustra a figura 4. A resistência do circuito $R = 200\Omega$, $E = 100V$ e $C = 10^{-4}F$.

Figura 4: Esquema Circuito (RC).



Fonte: Autoria própria.

Por meio da equação (2.16), a aplicação (4) é modelada por meio da equação diferencial dada, isto é,

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}} \cdot Q = \frac{100}{200} \Rightarrow \frac{dq}{dt} + 50Q = \frac{1}{2} \quad (2.17)$$

note que a equação (2.17) é classificada como linear não homogênea. Assim, pela definição (7) o fator integrante é,

$$\mu(t) = e^{\int 50dt} \Rightarrow \mu(t) = e^{50t}$$

por meio de manipulações algébricas simples na equação (2.17), temos,

$$\begin{aligned} e^{50t} \cdot \frac{dq}{dt} + e^{50t} \cdot 50Q &= \frac{1}{2}e^{50t} \Rightarrow (e^{50t} \cdot Q)' = \frac{1}{2} \cdot e^{50t} \Rightarrow Q \cdot e^{50t} = \int \frac{1}{2} \cdot e^{50t} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow Q \cdot e^{50t} &= \frac{1}{100} \cdot e^{50t} + C \Rightarrow Q(t) = 10^{-2} + C e^{-50t} \end{aligned} \quad (2.18)$$

suponha que $Q(0) = 0$, então,

$$Q(0) = 0 \Rightarrow 10^{-2} + C = 0 \Rightarrow C = -10^{-2}$$

logo, a equação $Q(t)$ representa o comportamento da carga elétrica deste circuito que é dada por,

$$Q(t) = 10^{-2} - 10^{-2}e^{-50t} \Rightarrow Q(t) = 10^{-2} \cdot (1 - e^{-50t}) \quad (2.19)$$

Da equação obtida em (2.19) a carga elétrica é dada por $\frac{dQ}{dt}$, isto é,

$$i = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{2}e^{-50t} \quad (2.20)$$

portanto, a expressão (2.20) caracteriza a corrente elétrica neste circuito RC.

3 . Equações Diferenciais Ordinárias

Não Lineares de Primeira Ordem

Este capítulo trata referente a um estudo bibliográfico das Equações Diferenciais Ordinárias classificadas como não lineares. Será apresentado nas seções deste capítulo alguns problemas de valores iniciais não lineares, os problemas de existência e unicidade e algumas aplicações, tais como: Modelos populacionais não lineares, Equação de Bernoulli e Trajetórias Ortogonais.

3.1 Problemas de Valores Iniciais Não Lineares

Seja o PVI não linear dado por,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

do sistema de equações (7) fornece um PVI, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, conseqüentemente, $(t_0, y_0) \in \Omega$ e a função f é dita não linear em y .

O exemplo (7) é um PVI caracterizado não linear, suas soluções são problemáticas devido tanto a existência quanto a unicidade.

Exemplo 10 : *Considere o PVI,*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Observe que, $y_1(t) \equiv 0$ é solução para o PVI. Note que, $y_2(t) = \left(\frac{1}{3}t\right)^3$ também é solução do PVI em (10), ou seja,

$$y'(t) - y^{\frac{2}{3}} = 0 \quad (3.1)$$

observe que da equação diferencial (3.1) y_2 é solução, pois,

$$y'(t) - y^{\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{3}t^2 = 0$$

o que mostra y_2 como uma solução de (10).

Teorema 3 : *Suponha que $f(x, y)$ é contínua e $f_x(t, y)$ é contínua em Ω . Se $(t_0, y_0) \in \Omega$ então existe uma única solução do PVI (3) representado a seguir,*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

que é definido num intervalo contendo t_0 .

Do exemplo (7) observe que $f(t, y)$ é contínua tal que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, por outro lado,

$$f_y(t, y) = \frac{2}{3y^{\frac{2}{3}}} \quad (3.2)$$

a derivada da função f em relação a y não está definida em $y = 0$. Logo, é contrário ao Teorema (3) o que não garante solução para $f(t, y)$.

Exemplo 11 : *Seja o PVI,*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

encontre a função $y(t)$ para esta condição inicial.

A solução do exemplo (11) é dada por,

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int dt \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{t+C}, \forall C \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

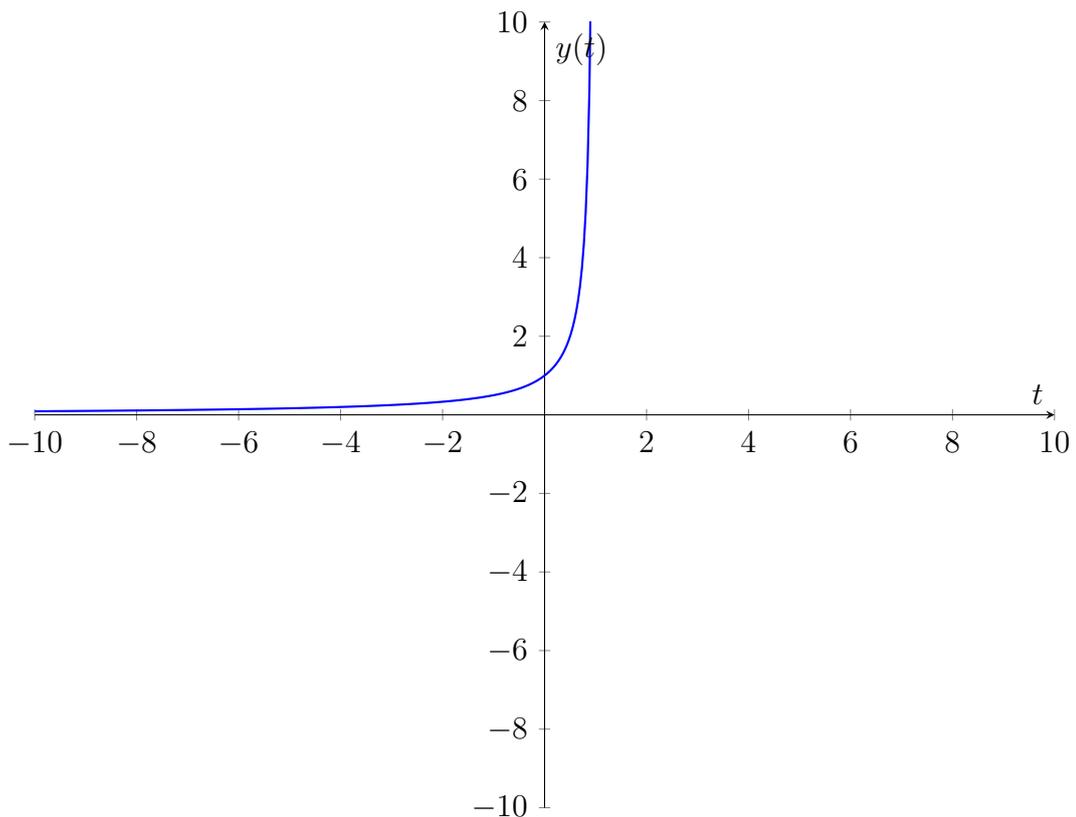
da condição inicial $y(0) = 1$ em $y(t)$ obtido em (3.3), temos,

$$\frac{1}{-C} = 1 \Rightarrow C = -1$$

logo, $y(t) = -\frac{1}{t-1}$ é a solução geral do PVI (11) para $t \in (-\infty, 1)$.

Observe que o comportamento do gráfico (5) para esta solução indica que a solução pode tender ao infinito num tempo finito t .

Gráfico 5: Comportamento da função $y(t) = -\frac{1}{t-1}$.



Fonte: Autoria própria.

3.2 Modelos Populacionais Não Lineares

Nesta seção será abordado a continuação da aplicação do capítulo 2, porém, para modelos que são baseados em equações diferenciais não lineares de primeira ordem. Vale ressaltar que, uma das aplicações vistas no capítulo 2 na seção 2.1, é o caso em que uma espécie de roedores vivem sob condições específicas em um ambiente, e o intuito estava destinado a encontrar o quão a população cresce naquele local.

Segundo Braun (1993), as observações realizadas devem ser precisas, pois, seu período de gestações são de três semanas, tendo em vista que, a realização do senso é extritamente menor.

Ainda para Braun (1993), os modelos populacionais modelados por equações diferenciais lineares são satisfatórios apenas para populações que não são tão grandes, caso contrário, são imprecisos, pois não consideram o fato de que os membros de algumas populações competem entre si devido ao espaço limitado de vida, tais como, recursos naturais e alimentos disponíveis.

A equação diferencial para representar este modelo deve conter uma constante que de competição dada por $-bp^2$, de modo que, uma estatística de encontros de dois membros desta espécie por unidade de tempo t é proporcional à p^2 , a equação é dada por,

$$\frac{dP}{dt} = ap - bp^2 \quad (3.4)$$

A equação diferencial (3.4) é reconhecida como Lei Logística do Crescimento Populacional. As constantes a e b são os coeficientes vitais das populações formulada pelo matemático e físico Verhulst.

Para Braun (1993), os termos a e b da equação (3.4), a constante b será muito menor que a , de modo que, $-bp^2$ seja desprezível em relação a ap , logo, a população crescerá exponencialmente, por outro lado, quando p é extremamente grande $-bp^2$ não é desprezível, e sua finalidade é desacelerar a taxa de crescimento de tal população.

Destes fatos, pelo modelo de Verhulst é possível descobrir o crescimento futuro de uma determinada população isolada. Considere que P_0 é a população no tempo t_0 , então, a população $P(t)$ é obtido num tempo t , que satisfaz o PVI (3.8). Isto é,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = ap - bp^2 \\ p(t_0) = p_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

do PVI (3.8), temos,

$$\frac{dP}{(ap - bp^2)} = dt \Rightarrow \int_{P_0}^P \frac{1}{(ap - bp^2)} = t - t_0 \quad (3.6)$$

da expressão (3.6) é solucionado pelo método das frações parciais, veja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{ap - bp^2} &= \frac{1}{p(a - bp)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{a - bp} = \frac{A(a - bp) + Bp}{p(a - bp)} = \\ &= \frac{Aa - Abp + Bp}{p(a - bp)} = \frac{Aa + p(B - ba)}{p(a - bp)} \end{aligned}$$

observe que $Aa + p(B - ba) = 1$ válida para todo p . Logo, $Aa = 1$ e $(B - ba) = 0$, consequentemente, $A = \frac{1}{a}$ e $B = \frac{b}{a}$. Assim, separadamente,

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^P \frac{1}{(ap - bp^2)} dp &= \int_{P_0}^P \frac{1}{ap} + \frac{1}{a} \left(\frac{b}{a - bp} \right) dp = \int_{P_0}^P \frac{1}{ap} dp + \int_{P_0}^P \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{b}{a - bp} \right) dp = \\ &= \frac{1}{a} \left[\int_{P_0}^P \frac{1}{p} dp + \int_{P_0}^P \frac{b}{a - bp} dp \right] = \frac{1}{a} \left[\ln \left| \frac{P}{P_0} \right| + \int_{P_0}^P \frac{-du}{u} \right] = \\ &= \frac{1}{a} \left[\ln \left| \frac{P}{P_0} \right| - (\ln|a - bp| - \ln|a - bP_0|) \right] = \frac{1}{a} \left[\ln \left| \frac{P}{P_0} \right| + \ln \left| \frac{a - bP_0}{a - bP} \right| \right] = \\ &= \frac{1}{a} \left[\ln \frac{P}{P_0} \left| \frac{a - bP_0}{a - bP} \right| \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

manipulando a expressão (3.6) por (3.7), obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} \left[\ln \frac{P}{P_0} \left| \frac{a - bP_0}{a - bP} \right| \right] &= t - t_0 \Rightarrow a(t - t_0) = \ln \frac{P}{P_0} \cdot \left| \frac{a - bP_0}{a - bP} \right| \Rightarrow \\
\Rightarrow e^{a(t-t_0)} &= \frac{P}{P_0} \cdot \frac{a - bP_0}{a - bP} \Rightarrow P(a - bP_0 + bP_0 \cdot e^{a(t-t_0)}) = P_0 \cdot a \cdot e^{a(t-t_0)} \Rightarrow \\
\Rightarrow P &= \frac{P_0 \cdot a \cdot e^{a(t-t_0)}}{a - bP_0 + bP_0 \cdot e^{a(t-t_0)}} = \frac{P_0 \cdot a}{(a - bP_0 + bP_0 \cdot e^{a(t-t_0)}) \cdot e^{-a(t-t_0)}} \Rightarrow \\
\Rightarrow P &= \frac{P_0 \cdot a}{a \cdot e^{-a(t-t_0)} - bP_0 \cdot e^{-a(t-t_0)} + bP_0} \Rightarrow P = \frac{P_0 \cdot a}{bP_0 + (a - bP_0) \cdot e^{-a(t-t_0)}}
\end{aligned}$$

logo, a equação $P(t)$ para este modelo de população é dada por (3.8), isto é,

$$P(t) = \frac{P_0 \cdot a}{bP_0 + (a - bP_0) \cdot e^{-a(t-t_0)}} \quad (3.8)$$

o comportamento de $P(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_0 \cdot a}{bP_0 + (a - bP_0) \cdot e^{-a(t-t_0)}} = \frac{P_0 \cdot a}{bP_0} = \frac{a}{b} \quad (3.9)$$

assim, o limite obtido em (3.9) representa a população limite num tempo distante.

De acordo com Braun (1993) essas previsões foram confirmadas com um protozoário (*Paramecium Caudatum*) num tubo de ensaio com $0,5\text{cm}^3$ de um meio nutritivo, e percebeu que ao passar 6 dias o número de indivíduos foi contabilizado diariamente, assim, foi observado que os protozoários aumentavam a uma taxa de 230,9% por dia, sendo que, este aumento foi perceptível apenas nos primeiros dias, enquanto no quarto dia atingiu um máximo de 375, promovendo a saturação do tubo de ensaio.

Destes fatos, aplicando o modelo populacional não linear, temos,

$$\frac{dP}{dt} = 2,309p - \left(\frac{2,309}{375}\right) \cdot p^2 \quad (3.10)$$

assim, da expressão $P(t)$ em (3.8), temos,

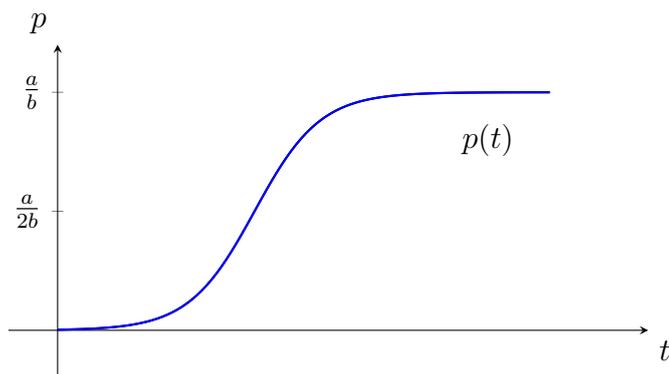
$$P(t) = \frac{2,309 \cdot P_0}{\frac{(2,309) \cdot P_0}{375} + \left(2,309 - \frac{(2,309 \cdot P_0)}{375}\right) e^{-2,309t}}$$

considerando que $P_0 = 5$ no momento desejado, ao operar algumas manipulações algébricas simples em $P(t)$, temos,

$$P(t) = \frac{2,309 \cdot 5}{\frac{(2,309) \cdot 5}{375} + \left(2,309 - \frac{(2,309 \cdot 5)}{375}\right) e^{-2,309t}} = \frac{375}{1 + 74e^{-2,309t}} \quad (3.11)$$

De maneira genérica é possível visualizar o comportamento desta população limite, o gráfico (6) ilustra o momento desta população de protozoários ao atingir o limite num tempo distante.

Gráfico 6: Representação para grandes populações.

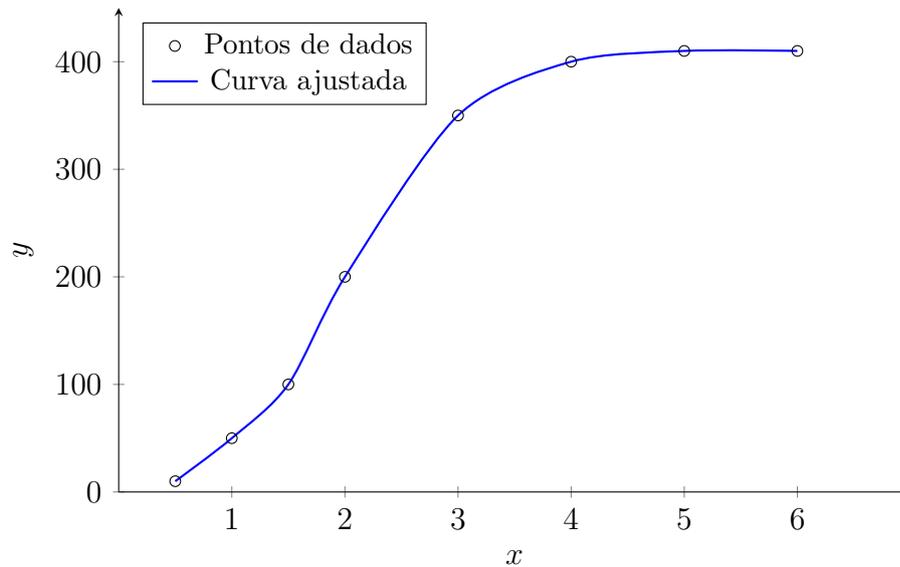


Fonte: Braun (1993).

A aplicação (5) trata referente a população limite da Terra, uma continuação da aplicação vista no capítulo 2.

De acordo com Braun (1993), o gráfico (7) compara $P(t)$ com (3.11) através de medições reais, isto é,

Gráfico 7: Comparação entre os crescimentos ajustados



Fonte: Braun (1993).

observe que, quando é atingido esse limite populacional a curva do gráfico está na fase acelerada, tendo em vista que, não havia atingido até o momento.

Aplicação 5 (Braun, 1993): *Seja $P(t)$ a população da Terra em um instante t . Alguns ecologistas afirmam que o valor de $a = 0,029$ e $b = 2,695 \cdot 10^{-12}$, e que a população da Terra aumenta 2% ao ano era de $3,34 \cdot 10^9$ de habitantes.*

A população limite em bilhões de habitantes da Terra nesta época é obtida de maneira análoga a (3.9), isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_0 \cdot 0,029}{2,695 \cdot 10^{-12} P_0 + (0,029 - 2,695 \cdot 10^{-12} P_0) \cdot e^{-0,029(t-t_0)}} = \frac{0,029}{2,695 \cdot 10^{-12}} = 1,076 \cdot 10^{10}$$

na qual é um valor estimado de acima de 10 bilhões de habitantes.

3.3 Equação de Bernoulli

Nesta seção será tratado referente as soluções das equações de Bernoulli, em que ao operar uma transformação torna a equação diferencial em linear sendo classificada homogênea ou não homogênea de acordo com as definições (11) e (12).

Definição 11 : *É denominado Equação de Bernoulli toda equação diferencial que pode ser colocada na forma,*

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)y^r$$

com $a(t)$ e $b(t)$ contínuas num intervalo $J \subset \mathbb{R}$.

Definição 12 : *Seja uma determinada Equação de Bernoulli, é válido os seguintes itens:*

I . Se $r = 0$ então a equação é dita linear não homogênea.

II . Se $r = 1$ então a equação é linear homogênea.

Por meio da definição (11) suponha $r \neq 0$ e $r \neq 1$, principalmente é necessário considerar que, $y(t)$ solução da equação em (11) e $y(t) \neq 0$. Isto é,

$$\frac{1}{(y(t))^r} \cdot (y'(t) + a(t) \cdot y(t)) = \frac{b(t) \cdot (y(t))^r}{(y(t))^r} \Rightarrow y'(t) \cdot (y(t))^{-r} + a(t) \cdot (y(t))^{1-r} \cdot y'(t) = b(t)$$

seja $Z(t) = (y(t))^{1-r}$, então,

$$Z'(t) = (1 - r) \cdot (y(t))^{-r} \cdot y'(t)$$

substituindo, temos,

$$\frac{Z'(t)}{(1 - r) \cdot (y(t))^{-r}} \cdot (y(t))^{-r} + a(t) \cdot Z(t) = b(t) \Rightarrow \frac{Z'(t)}{(1 - r)} + a(t) \cdot Z(t) = b(t) \quad (3.12)$$

Observe que, a equação (3.12) é classificada como Linear Não Homogênea vista no capítulo 2. Diante disso, sua solução é encontrada por $Z(t)$, em seguida por meio da substituição para $y(t) = (Z(t))^{\frac{1}{1-r}}$.

Aplicação 6 : *O PVI representa uma equação de Bernoulli,*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + y = ty^3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

encontre a função $y(t)$.

Da equação diferencial por manipulações algébricas simples, temos,

$$y'.y^{-3} + y^{-2} = t \quad (3.13)$$

considere a transformação de $Z(t) = y^{-2}$, então,

$$Z'(t) = -2y^{-3}.y' \Rightarrow -\frac{Z'(t)}{2} = y^3.y' \quad (3.14)$$

assim, substituindo (3.14) em (3.13), obtemos,

$$-\frac{Z'(t)}{2} + Z(t) = t \rightarrow Z'(t) - 2Z(t) = -2t \quad (3.15)$$

A equação diferencial (3.15) é classificada como linear não homogênea de acordo com a definição apresentada no capítulo 2. Assim, o fator integrante $\mu(t)$ é obtido da forma,

$$\mu(t) = e^{\int -2dt} \Rightarrow \mu(t) = e^{-2t} \quad (3.16)$$

ao multiplicar (3.15) por (3.16), produz a seguinte equação,

$$\mu(t).(Z'(t) - 2Z(t)) = -2t.\mu(t) \Rightarrow (Z(t).e^{-2t})' = -2t.e^{-2t} \Rightarrow (Z(t).e^{-2t}) = - \int 2t.e^{-2t} dt \quad (3.17)$$

assim, é realizado separado as integrações, pela regra do produto considere que $u = t$ e $dv = e^{-2t}dt$, isto é,

$$\int -2t.e^{-2t} dt = -2. \int t.e^{-2t} dt = t.e^{-2t} + \frac{1}{2}.e^{-2t} + C, \forall C \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

para $Z(t)$,

$$Z(t).e^{-2t} = t.e^{-2t} + \frac{1}{2}.e^{-2t} + C \Rightarrow Z(t) = t + \frac{1}{2} + C.e^{2t} \quad (3.19)$$

Como $Z(t) = y^{-2}$, então,

$$\frac{1}{Z(t)} = y^2(t) \Rightarrow y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{Z(t)}} \Rightarrow y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{t + \frac{1}{2} + C.e^{2t}}} \quad (3.20)$$

da condição inicial $y(0) = 2$, produz,

$$2 + 4C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

diante disso, a função que representa este PVI é,

$$y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{t + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}.e^{2t}}}$$

A aplicação (7) é análoga a aplicação (6), trata referente um PVI não linear que é realizado uma transformação afim de solucionar o mesmo.

Aplicação 7 : Seja o PVI representado a seguir,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} - ty = t^3 y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

utilize os métodos apresentados para solucionar uma equação de Bernoulli para encontrar a função $y(t)$.

Suponha que $y(t) \neq 0$, isto é,

$$y'(t) \cdot (y(t))^{-3} - t(y(t))^{-2} = t^3 \quad (3.21)$$

consequentemente, adote $Z(t) = (y(t))^{-2}$. Assim,

$$Z'(t) = -2 \cdot (y(t))^{-3} \cdot y'(t) \Rightarrow -\frac{Z'(t)}{2} = (y(t))^{-3} \cdot y'(t) \quad (3.22)$$

por substituição de (3.22) em (3.21),

$$-\frac{1}{2}[Z'(t) + 2t \cdot Z(t)] = t^3 \Rightarrow Z'(t) + 2t \cdot Z(t) = -2t^3 \quad (3.23)$$

note que, a equação diferencial obtida pela transformação $Z(t)$ em (3.23) é classificada como linear não homogênea. Diante disso, o fator integrante $\mu(t)$ é,

$$\mu(t) = e^{\int 2tdt} \Rightarrow \mu(t) = e^{t^2} \quad (3.24)$$

por manipulações algébricas em (3.23) com (3.24), obtemos,

$$\mu(t) \cdot Z'(t) + 2t \cdot Z(t) \cdot \mu(t) = -\mu(t) \cdot 2t^3 \Rightarrow [Z(t) \cdot e^{t^2}]' = -e^{t^2} \cdot 2t^3 \quad (3.25)$$

ao operar as integrações em (3.25),

$$Z(t).e^{t^2} = -2 \int e^{t^2}.t^3 \quad (3.26)$$

separadamente, em (3.26) considere $u = t^2$,

$$-2 \int e^{t^2}.2t.t^2 = - \int e^u.u.du = e^u.(u - 1) + K = e^{t^2}.(t^2 - 1) + K, \forall K \in \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

assim, (3.27) em (3.25),

$$Z(t).e^{t^2} = -[e^{t^2}.(t^2 - 1) + K] \Rightarrow Z(t) = 1 - t^2 + Ke^{-t^2} \quad (3.28)$$

logo, $y(t)$ é obtido por,

$$Z(t) = \frac{1}{(y(t))^2} \Rightarrow y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{Z(t)}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - t^2 + Ke^{-t^2}}} \quad (3.29)$$

da condição inicial $y(0) = 1$, temos,

$$1 + K = 1 \Rightarrow K = 0$$

diante disso, $Z(t) = 1 - t^2$. Portanto a solução geral é dada pela forma implícita, isto é,

$$\frac{1}{(y(t))^2} = 1 - t^2$$

3.4 Trajetórias Ortogonais

Seja uma família de curvas dada por,

$$F(x, y) = k \tag{3.30}$$

em (3.30) K é uma constante para todo número real. A definição (13) refere sobre uma curva ser ortogonal a uma família de curvas.

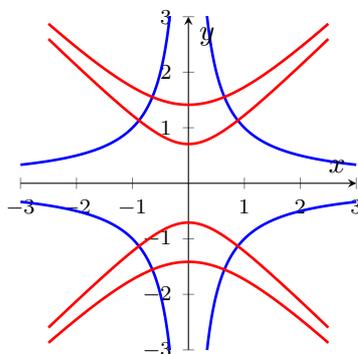
Definição 13 : *Uma curva é dita ortogonal a uma família de curvas dada em (3.30) se ela intercepta todas as curvas da família ortogonalmente.*

Pela definição (13) é possível obter uma família equação diferencial para a família de curvas. Isto é,

$$F_x(x, y) \cdot \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.31}$$

consequentemente, o objetivo é encontrar uma equação diferencial que represente as trajetórias ortogonais da equação (3.31). Observe o gráfico (7) ilustra uma família de curvas dadas por $y = \frac{c_1}{x}$ ortogonal as famílias dadas por $y^2 = x^2 + K$, isto é,

Gráfico 7: Família de curvas e trajetórias ortogonais.



Fonte: Autoria própria.

em outras palavras, existe um ponto de intersecção entre $y = \frac{C_1}{x}$ e $y^2 = x^2 + K$, pois existe uma reta tangente tanto para a trajetória ortogonal quanto para a família de retas.

Por meio da definição (13) essas curvas ao encontrar no ponto de intersecção são perpendiculares, isto é, o coeficiente angular tanto da família quanto das curvas é -1 , diante disso, para a equação diferencial em (3.31) é dada por,

$$F_x(x, y) + F_y \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 0. \quad (3.32)$$

ou seja, as consequências de (3.31) implica em (3.32). Diante disso, as aplicações (8), (9) e (10) trata referente aos métodos para encontrar as trajetórias ortogonais de uma família de curvas.

Aplicação 8 : *Seja a família de curvas dada por $x^2 + y^2 = K^2$. Encontre uma família de curvas que é ortogonal.*

Seja $F(x, y) = x^2 + y^2$. Observe que,

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.33)$$

do fato visto em (3.33), temos,

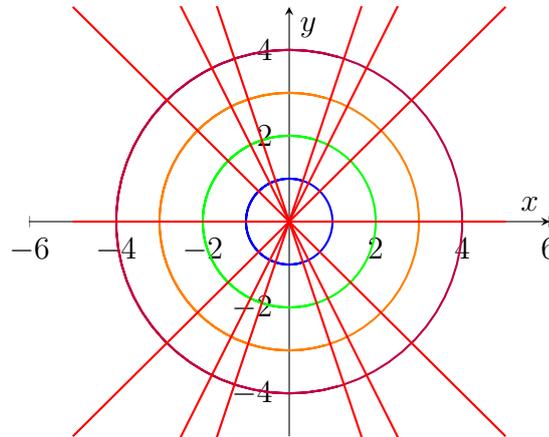
$$x + y \cdot \left(-\frac{dx}{dy} \right) = 0 \Rightarrow -y \cdot \frac{dx}{dy} = -x \Rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx \quad (3.34)$$

por integração em (3.33), obtemos,

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C \Rightarrow y = Kx, \forall K \in \mathbb{R}. \quad (3.35)$$

logo, em (3.35) é obtido as retas que passam pelo centro dos círculos concêntricos da figura (8) representa as trajetórias ortogonais.

Gráfico 8: Trajetórias Ortogonais à $x^2 + y^2 = K^2$



Fonte: Autoria própria.

Aplicação 9 : Seja $x = ky^2$ uma família de curvas encontre uma família de curvas que é ortogonal a ela.

Seja a família de curvas dada por $x = ky^2$ e $k = \frac{x}{y^2}$. Então,

$$x = ky^2 \Rightarrow 1 = 2ky \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{k2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \quad (3.36)$$

assim,

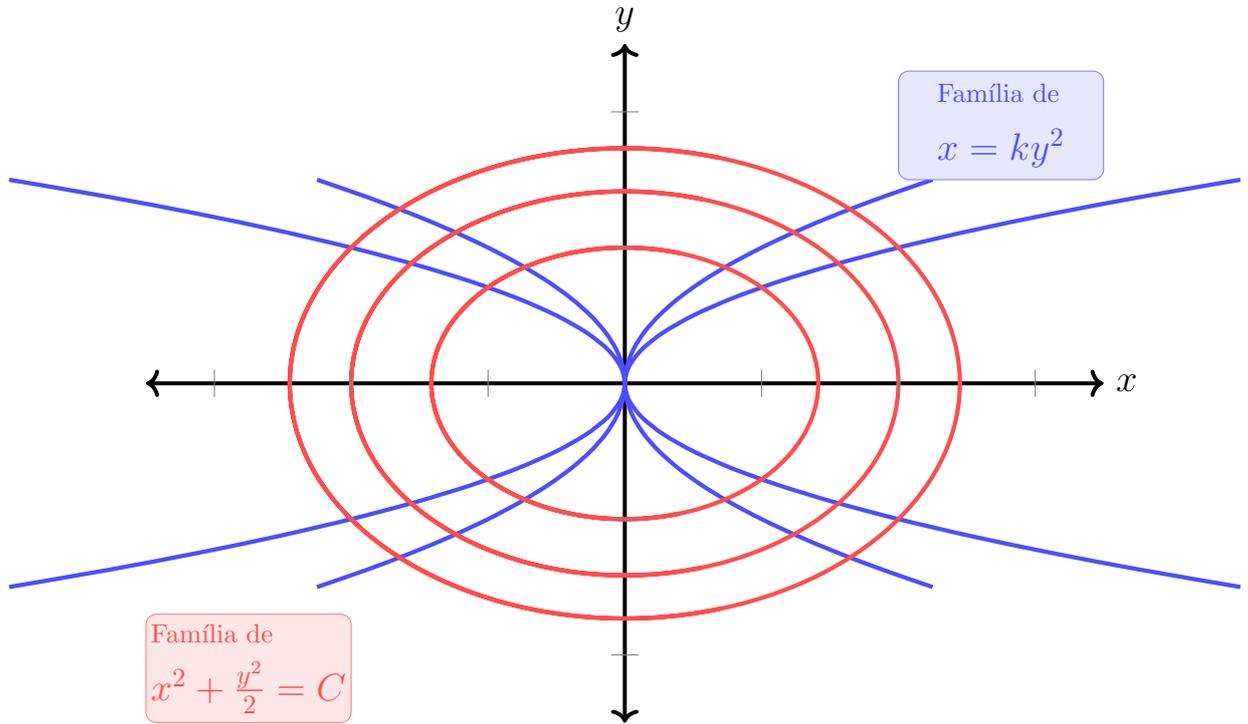
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{y}{2x}} \Rightarrow ydy = -2xdx \quad (3.37)$$

Por meio da integração, temos,

$$\int ydy = -\int 2xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -x^2 + K \Rightarrow \frac{y^2}{2} + x^2 = K, \forall K \in \mathbb{R}. \quad (3.38)$$

a figura (10) ilustra as curvas ortogonais a família de curvas obtida em (3.38).

Gráfico 10: Família de curvas ortogonais à $x = ky^2$.



Fonte: Autoria própria.

A aplicação (10) é encontrada no livro de Zill (2003) no capítulo 3 em que trata de curvas ortogonais.

Aplicação 10 : *Seja $y = c_1 \text{sen}(x)$ uma família de curvas. Encontre as famílias de curvas que são ortogonais a y .*

Seja $y = c_1 \cdot \text{sen}(x)$ e $c_1 = \frac{y}{\text{sen}(x)}$. Temos,

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \cdot \cos(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot \cos(x)}{\text{sen}(x)} \quad (3.39)$$

assim, de maneira análogo aos métodos apresentados em (3.33), obtemos,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x) \cdot y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\text{tg}(x)}{y} \quad (3.40)$$

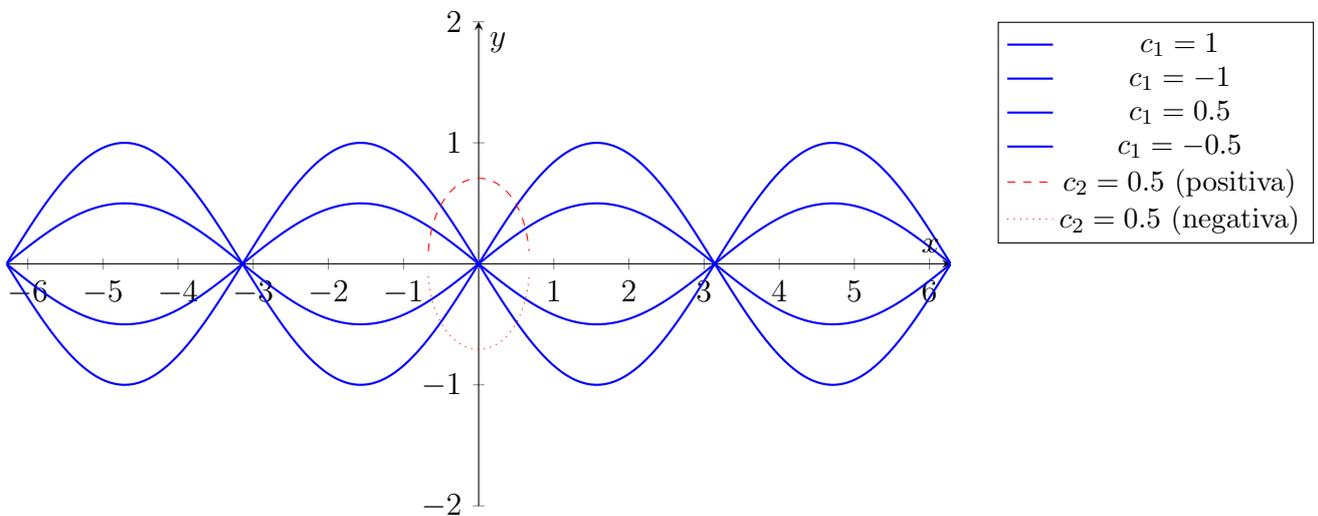
através do processo de integração em (3.40), é encontrado a curva y desejada. Isto é,

$$\int y dy = \int -tg(x) dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln(\cos(x)) + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 2\ln(\cos(x)) + C, C = 2K, \forall C, K \in \mathbb{R}. \quad (3.41)$$

Logo, a família de curvas ortogonal desejada é $y^2 = 2\ln(\cos(x)) + C$, o gráfico (11) ilustra o comportamento das trajetórias ortogonais sob $y = c_1 \cdot \text{sen}(x)$.

Gráfico 11: Trajetórias Ortogonais e Família de Curvas $y = c_1 \sin(x)$



Fonte: Autoria própria.

4 . Considerações Finais

Neste trabalho, foi realizado um levantamento bibliográfico referente as equações diferenciais ordinárias com objetivo de compreender as aplicações das equações lineares e não lineares. Assim, foram abordados desde conhecimentos prévios como definições, classificações das equações, teoremas clássicos (existência e unicidade de solução) quanto as aplicações incluídas nas seções do capítulo 2 e 3.

Ademais, as equações diferenciais lineares e não lineares discutidas no presente trabalho possuem um menor grau de complexidade de manipulações algébricas, pois não necessitam de auxílios de computadores para implementação de métodos numéricos. Suas soluções são analíticas, trazendo em paralelo um aperfeiçoamento aos conceitos estudados em Cálculo Diferencial e Integral.

Portanto, é possível compreender algumas aplicações abordadas por intermédio das equações diferenciais que são modeladas por possíveis métodos de soluções analíticas, assim como, ampliar a compreensão de fenômenos da natureza através de métodos matemáticos, tornando-os imprescindíveis para os conhecimentos de modelagem matemática.

5 . Anexos

5.1 Anexo A

Este anexo trata referente a submissão de um artigo completo submetido a revista Colloquium Hummanarum (ENEPE) em 2024 na UNOESTE, em que foi apresentado via Google Meet.



UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA
Reconhecida pela Portaria - 83/87 - D.O.U. - 16/02/87
PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO E AÇÃO
COMUNITÁRIA



Certificado de Apresentação de Trabalho

Certificamos que o trabalho intitulado ANÁLISE DA DINÂMICA DO CRESCIMENTO DE UM TUMOR EM ESTÁGIO INICIAL UTILIZANDO EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM, de autoria de LUCAS BARRETO GOMES, RENATO CÉSAR DA SILVA e EDIVALDO ROMANINI, foi apresentado no Encontro Nacional de Ensino, Pesquisa e Extensão (ENEPE/2024), cadastrado na PROEXT/SGEXT (Processo nº 23356/2024), realizado pela Universidade do Oeste Paulista - UNOESTE, no período de 21 a 24 de Outubro de 2024.

Tipo: Artigo completo

Natureza: Pesquisa (ENAPI)

Categoria: Comunicação oral (on-line)

Presidente Prudente, 24 de outubro de 2024.

Prof. Dr. Adilson Eduardo Guelfi
Pró-Reitor de Pesquisa, Pós-Graduação
Pró-Reitor de Extensão e Ação
Comunitária

Prof. Dr. José Eduardo Creste
Pró-Reitor Acadêmico

Prof. Dr. Jair Rodrigues Garcia Júnior
Docente Responsável pela Coordenadoria
de Pesquisa, Desenvolvimento e Inovação

5.2 Anexo B

Este anexo é referente a apresentação de um trabalho na modalidade de comunicação oral submetida a Semana Acadêmica de Matemática (SEMAT) em 2023.



DECLARAÇÃO

Lucas Barreto Gomes

portador do CPF 076.832.691-58 apresentou o trabalho intitulado "As Falsificações de Arte de Van Meegeren" de forma comunicação oral no evento Semana Acadêmica da Matemática - SEMAT no dia 18 de agosto de 2023 organizada pelos grupo PET Conexões de Saberes Matemática e PET Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/CPTL.



Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza
Tutor do Grupo PET Conexões de Saberes -
Matemática/CPTL



Referências Bibliográficas

BASSANEZI, R. C., AND JUNIOR, W. *Equações Diferenciais com Aplicações*, 1 ed., vol. 1. HABRA ltda, 1998.

BOYCE, W. E., AND DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, vol. 10. LTC Rio de Janeiro, 2010.

BRAUN, M. *Differential Equations and Their Applications*, 4 ed., vol. 11. Springer New York, 1993.

CHASNOV, J. R. *Differential equations for engineers*, 2019.

DOERING, C. I., AND LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. IMPA, 2014.

MATOS, M. M. L. *Equações diferenciais ordinárias – uma abordagem histórica*. Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade, 2017.

NÓBREGA, D. D. *Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações*. B.S. thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016.

OLIVEIRA, E., AND TYGEL, M. *Métodos matemáticos para engenharia*. rio de janeiro: Sbm.

VARGAS, M. *História da matematização da natureza*.

VILLATE, J. E. *Equações diferenciais e equações de diferenças*. 19 – 21.

YARTEY, J. N. A., AND RIBEIRO, S. S. *Equações diferenciais*.

ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. Cengage Learning Editores, 2003.