



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul



Curso de FÍSICA – BACHARELADO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Princípio dos Trabalhos Virtuais Revisitado

RAFAEL ARAUJO DE SOUSA

Orientador: Prof. João Vitor Batista Ferreira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física Bacharelado do Instituto de Física (INFI), da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS).

Campo Grande – MS
Novembro/2024



*“Ando devagar Porque já tive pressa E levo esse
sorriso Porque já chorei demais. Hoje me sinto
mais forte Mais feliz, quem sabe Só levo a certeza
De que muito pouco sei Ou nada sei”*

(Almir Sater)



AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Stélio Augusto Amorim de Sousa e Maria do Carmo Araújo de Sousa. Ao irmão e sobrinha Allan e Tainá Sousa e a minha esposa e enteado Fernanda Lopes e Lorenzo Gresele. Também dedico aos meus avós. Neste caso em especial, graduação em física, homenageio meu avô paterno Stélio Eleres de Sousa que trabalhou como professor de física durante um período da sua vida profissional sem não ter tido o diploma.

Também agradeço a todos os professores e colegas que me motivam a continuar estudando. Em destaque aos colegas Davi Sales, Ednaldo Barros Junior, Orival Medeiros, Luiz Antônio Tadaiesky, Ezequiel Belo, Bruno Wallacy, Cesar Juan e Luís Paulo. Agradeço em especial ao professor João Vítor Batista Ferreira, meu orientador e com quem fiz quatro disciplinas ao longo da graduação. Obrigado pela compreensão, correções e sugestões no trabalho e pelo exemplo em sala de aula.



RESUMO

Este trabalho revisita o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Isto é feito sobre o ponto de vista da engenharia onde se estuda a aplicação do PTV em sólidos deformáveis, em especial barras que compõem estruturas civis. Inicialmente, apresenta-se uma comprovação do PTV a partir do Princípio da Conservação de Energia e se mostra o Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementar (PTVC), que é bastante usado na engenharia. Refinamentos de análise estrutural como: apoios elásticos, efeitos térmicos e deslocamentos prescritos, também são considerados. Como forma de consolidar as diversas aplicações do PTV e do PTVC, exemplos com partículas, corpos rígidos e sólidos deformáveis são apresentados. Destaca-se como exemplo a explicação quantitativa do experimento massa-mola quando se considera a massa da mola.



ABSTRACT

This work revisits the Principle of Virtual Work (PTV). It is done from an engineering perspective, where the application of PTV in deformable solids is studied, especially bars that compose civil structures. Initially, a proof of PTV is presented based on the Principle of Energy Conservation and the Complementary Principle of Virtual Work (PTVC), which is widely used in engineering, is shown. Structural analysis refinements such as elastic supports, thermal effects and prescribed displacements are also considered. In order to consolidate the various applications of PTV and PTVC, examples with particles, rigid bodies and deformable solids are presented. One highlights an example, the quantitative explanation of the mass-spring experiment when considering the mass of the spring stands out.



LISTA DE FIGURAS E TABELAS

| | |
|---|----|
| TABELA 1. OS CINCO PRINCIPAIS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA NO BRASIL VERSUS SUAS BIBLIOGRAFIAS OBRIGATÓRIAS (PESQUISA VÁLIDA ATÉ O ANO 2019). | 11 |
| TABELA 2. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS VERSUS APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS NAS VERSÕES FORÇA E DESLOCAMENTO. | 12 |
| FIGURA 1 – (A) ELEMENTO ESTRUTURAL E (B) SEU MODELO COM DESTAQUE AO NÓ INICIAL I E FINAL J | 20 |
| FIGURA 2 – BARRA SOB FLEXÃO PURA COM DOIS TORQUES CONCENTRADOS APLICADOS NOS EXTREMOS NAS CONFIGURAÇÕES A) INDEFORMADA E B) DEFORMADA E O MODELO DA VIGA NAS CONFIGURAÇÕES C) INDEFORMADA E D) DEFORMADA (ADAPTADO DE BEER E JOHNSTON [23]). | 22 |
| FIGURA 3 – ENSAIO UNIAXIAL DE UMA BARRA RETA SOB O PONTO DE VISTA DAS ESCALAS <i>GLOBAL</i> E <i>INFINITESIMAL</i> , PASSANDO PELA ESCALA <i>LOCAL</i> | 29 |
| FIGURA 4 – ACRÉSCIMO DE FORÇA E DESLOCAMENTO NO ENSAIO UNIAXIAL DE UM ELEMENTO RETICULADO SOB O PONTO DE VISTA DAS ESCALAS <i>GLOBAL</i> E <i>INFINITESIMAL</i> | 31 |
| FIGURA 5 – DESTACA AS RESTRIÇÕES DE DESLOCAMENTOS NO PLANO ADOTADAS NESTE TRABALHO: A) DESLOCAMENTO VERTICAL IMPEDIDO, B) DESLOCAMENTO HORIZONTAL IMPEDIDO, C) ROTAÇÃO IMPEDIDA, D) DESLOCAMENTO IMPEDIDO NO PLANO E E) TODOS OS DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS (SITUAÇÃO DENOMINADA COMO ENGASTE). | 40 |
| FIGURA 6 – MÁQUINA DE ATWOOD, QUE CONSISTE DE DUAS MASSAS M_1 E M_2 PENDURADAS PELO EXTREMO DE UMA CORDA DE COMPRIMENTO L FIXA AO TETO POR UMA ROLDANA DE RAIO R (ADAPTADA DE LEMOS [4]). | 41 |
| FIGURA 7 – SISTEMA COMPOSTO POR DUAS BARRAS RÍGIDAS DE MASSA m COM ÂNGULO θ ENTRE ELAS FORMANDO UMA ESTRUTURA HIPOSTÁTICA CARREGADA POR UMA FORÇA HORIZONTAL P COM DESTAQUE PARA AS FORÇAS mg (ADAPTADA DE MERIAM E KRAIGE [12]). | 44 |
| FIGURA 8 – DETALHAMENTO LADO ESQUERDO, CONSIDERANDO SIMETRIA VERTICAL DO PROBLEMA E DETALHAMENTO POSTERIOR PARA DETERMINAR RELAÇÕES ENTRE AS GRANDEZAS VIRTUAIS. | 46 |
| FIGURA 9 – VIGA ISOSTÁTICA (ENGASTADA LIVRE) SUBMETIDA A UMA CARGA VERTICAL P NA EXTREMIDADE LIVRE, DESTACANDO AS REAÇÕES VERTICAL E O TORQUE NO APOIO. | 48 |
| FIGURA 10 – VIGA ISOSTÁTICA (ENGASTADA LIVRE) SUBMETIDA A UMA CARGA VERTICAL P NA EXTREMIDADE LIVRE, DESTACANDO AS REAÇÕES VERTICAL E O TORQUE NO APOIO E O SISTEMA VIRTUAL ONDE HÁ UMA ROTAÇÃO VIRTUAL IMPOSTA NO APOIO. | 48 |
| FIGURA 11 – VIGA ISOSTÁTICA (ENGASTADA LIVRE) SUBMETIDA A UMA CARGA VERTICAL P NA EXTREMIDADE LIVRE, DESTACANDO AS REAÇÕES VERTICAL E O TORQUE NO APOIO E O ESFORÇO CORTANTE V_S QUE OCORRE NUMA SEÇÃO S LOCALIZADA A UMA DISTÂNCIA x DO APOIO. | 49 |
| FIGURA 12 – VIGA ISOSTÁTICA (ENGASTADA LIVRE) SUBMETIDA A UMA CARGA VERTICAL P NA EXTREMIDADE LIVRE, DESTACANDO AS REAÇÕES VERTICAL E DE TORQUE NO APOIO E O MOMENTO FLETOR M_S QUE OCORRE NUMA SEÇÃO S LOCALIZADA A UMA DISTÂNCIA x DO APOIO. | 50 |
| FIGURA 13 – VIGA RÍGIDA ENGASTADA LIVRE SUBMETIDA À VARIAÇÃO UNIFORME ΔT E GRADIENTE DE TEMPERATURA g_T , APOIOS ELÁSTICOS COM RIJEZAS K_x E K_y , CARGA DISTRIBUÍDA Q DESLOCAMENTO PRESCRITO θ_p | 52 |
| FIGURA 14 – SISTEMAS VIRTUAIS QUE MEDEM ROTAÇÃO θ NA EXTREMIDADE LIVRE (NÓ J) DO PROBLEMA REAL. | 53 |
| FIGURA 15 – VIGA ENGASTADA LIVRE SUBMETIDA À VARIAÇÃO UNIFORME ΔT E GRADIENTE DE TEMPERATURA g_T COM APOIOS ELÁSTICOS, DESLOCAMENTO PRESCRITO E CARGAS EXTERNAS. | 56 |
| FIGURA 16 – SISTEMA VIRTUAL UTILIZADO PARA CALCULAR O DESLOCADO VERTICAL NA EXTREMIDADE LIVRE DA BARRA DO PROBLEMA REAL (NÓ J) COM O SEU RESPECTIVO DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR. | 57 |
| FIGURA 17 – SISTEMA MASSA MOLA APOIADA NA SUA EXTREMIDADE SUPERIOR COM UMA MASSA M NA EXTREMIDADE INFERIOR SUBMETIDO A GRAVIDADE G : A) MOLA DE COMPRIMENTO L , COM MASSA M E RIGIDEZ K E B) BARRA DE COMPRIMENTO L , COM MASSA M E RIGIDEZ AXIAL $k = (E.A)/L$ | 59 |
| FIGURA 18 – RELAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS <i>GLOBAL</i> E <i>LOCAL</i> A PARTIR DA DEFINIÇÃO DA SEÇÃO S DISTANDO x DA EXTREMIDADE SUPERIOR DA BARRA COM DESTAQUE AO DIAGRAMA DE ESFORÇO NORMAL (D.N.) E SUA EXPRESSÃO $N(x)$ | 60 |
| FIGURA 19 – SISTEMA VIRTUAL COM FORÇAS UNITÁRIAS EM EQUILÍBRIO, DESTACANDO A SEÇÃO S DISTANDO x DA EXTREMIDADE SUPERIOR DA BARRA COM DESTAQUE AO DIAGRAMA DE ESFORÇO NORMAL (D.N.) E SUA EXPRESSÃO $\bar{N}(x)$ | 61 |



FIGURA 20. MOSTRA A TELA DO PROGRAMA FTOOL COM O MODELO DO SISTEMA MASSA-MOLA APOIADA NA SUA EXTREMIDADE SUPERIOR COM UMA MASSA $M = 240$ G NA EXTREMIDADE INFERIOR, UMA BARRA DE COMPRIMENTO $L = 10$ CM, COM MASSA $m = 50$ G E RIGIDEZ AXIAL $k = E.A/L = 0,13$ N/M, SUBMETIDO A UMA CAMPO GRAVITACIONAL $g = 9,81$ M/S², RESULTANDO EM FORÇA DISTRIBUÍDA $Q = 4,90.10^{-3}$ N/M E FORÇA CONCENTRADA $P = 2,00.10^{-3}$ N NA EXTREMIDADE LIVRE. 63

TABELA 3. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS E ANALÍTICOS DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS AO LONGO DO COMPRIMENTO DA BARRA (MOLA) CALCULADOS A CADA METRO A PARTIR DA EXTREMIDADE SUPERIOR. 64

FIGURA A.1 – ELEMENTO RETICULADO PLANO SOB AÇÃO DE TEMPERATURA DIFERENTES NOS SEUS BORDOS SUPERIOR E INFERIOR. 68

FIGURA A.2 – EFEITO DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA EM UM ELEMENTO RETICULADO PLANO DE COMPRIMENTO INFINITESIMAL dx SOB AÇÃO DE TEMPERATURA DIFERENTES NOS SEUS BORDOS SUPERIOR E INFERIOR, DESTACANDO-SE A SEÇÃO S NAS POSIÇÕES S^1 E S^2 69

FIGURA B.1 – TRECHO DE UMA VIGA DE COMPRIMENTO x DEFINIDO ENTRE A SEÇÃO S E O APOIO EM QUE HÁ MOLAS. NA PARTE DE CIMA SE TEM UMA MOLA TRANSLACIONAL DE RIGIDEZ k_v E NA PARTE DE BAIXO TEM UMA MOLA ROTACIONAL DE RIGIDEZ k_r . EM AMBOS OS CASOS SE SEPARA O TRABALHO NULO REALIZADO PELA REAÇÃO DE APOIO E OS EFEITOS DESSAS REAÇÕES NAS MOLAS E PORTANTO, NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA VIRTUAL. 74

FIGURA B.2 – TRECHO DE UMA VIGA DE COMPRIMENTO x DEFINIDO ENTRE A SEÇÃO S E A EXTREMIDADE LIVRE EM QUE HÁ MOLAS SOLTAS. NA PARTE DE CIMA SE TEM UMA MOLA TRANSLACIONAL DE RIGIDEZ k_v E NA PARTE DE BAIXO TEM UMA MOLA ROTACIONAL DE RIGIDEZ k_r . EM AMBOS OS CASOS SE SEPARA O TRABALHO REALIZADO PELA FORÇA NO EXTREMO DA MOLA, QUE NÃO É NULO, E OS EFEITOS DESSAS FORÇAS NAS MOLAS E PORTANTO, NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA VIRTUAL. 75



SUMÁRIO

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul



| | |
|--|----------|
| AGRADECIMENTOS | 3 |
| RESUMO | 4 |
| ABSTRACT | 5 |
| LISTA DE FIGURAS E TABELAS | 6 |
| SUMÁRIO | 8 |
| 1. INTRODUÇÃO | 9 |
| 1.1. <i>Revisão Bibliográfica</i> | 10 |
| <i>A Tabela 2 relaciona as bibliografias pesquisadas com o Princípio dos Trabalhos Virtuais nas</i> <i>versões força e deslocamento e com a aplicação desses conceitos.</i> | 11 |
| 1.2. <i>Objetivo</i> | 13 |
| 2. DESENVOLVIMENTO | 14 |
| 2.1. <i>Definições</i> | 14 |
| 2.2. <i>Relações importantes entre forças, deslocamentos e entre as duas grandezas</i> | 20 |
| 2.3. <i>Apresentação do Princípio dos Trabalhos Virtuais “Generalizado” e sua comprovação</i> | 26 |
| 2.4. <i>Consequências do PTV e do PTVC</i> | 34 |
| 2.5. <i>Obtenção do trabalho realizado pela carga externa e pela energia de deformação elástica</i> ... | 35 |
| 3. APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS (PTV) | 40 |
| 3.1. <i>Partículas</i> | 41 |
| 3.2. <i>Corpos rígidos</i> | 43 |
| 3.3. <i>Sólidos deformáveis</i> | 56 |
| 4. CONCLUSÃO..... | 65 |
| REFERÊNCIAS..... | 66 |
| APÊNDICE | 68 |
| A. <i>Variação de temperatura</i> | 68 |
| B. <i>Elementos elásticos pontuais (molas)</i> | 73 |
| C. <i>Recalque de apoio</i> | 76 |



1. INTRODUÇÃO

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) é um tópico entre tantos abordados no estudo da Mecânica Clássica, disciplina obrigatória nos cursos de graduação em física. Em cursos de graduação em engenharia civil e mecânica, alguns tópicos de mecânica clássica são vistos em disciplinas como Resistência dos Materiais, Análise de Estruturas e em cursos introdutórios ao Método dos Elementos Finitos, que é um método numérico bastante conhecido na engenharia.

Como muitos tópicos da mecânica, o PTV pode ser aplicado à partículas e a corpos rígidos e deformáveis. O primeiro caso é visto na física em alguns cursos de mecânica clássica e, em geral, é associado ao Princípio de D'Alembert. Os últimos dois casos dificilmente são estudados na física, pelo menos nas bibliografias consultadas. Entretanto, eles são largamente utilizados nas engenharias.

Outro ponto importante que deve ser destacado é que o PTV é estudado na física a partir do Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV). Já nas engenharias, o PTV é utilizado tanto sob o conceito de deslocamentos quanto *forças virtuais*. Sendo este último mais comum.

Este trabalho apresenta uma demonstração ilustrativa e várias aplicações do PTV nas versões deslocamento e força virtual para problemas clássicos na física e na engenharia. Com destaque especial a este último caso.



1.1. Revisão Bibliográfica

Um relato histórico da origem do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) pode ser encontrado no artigo de Cindra [1] e nas referências citadas por este autor. Ele comenta que o conceito de Trabalho Virtual teve origem relacionada a solução de problemas de estática, antes que Newton propusesse suas três leis da mecânica. Em seguida, devido a contribuição de D'Alembert, estendeu-se o conceito para problemas de dinâmica. Em seu trabalho, Cindra cita as primeiras aplicações de deslocamento, velocidade e trabalho virtuais a partir dos trabalhos de Galileu, Stevin, Jean e Jaques Bernoulli, D'Alembert e finalmente Lagrange. Em seguida Cindra apresenta os conceitos de vínculo, deslocamentos real, possível e virtual. Seu trabalho termina com aplicações desses conceitos em problemas de mecânica e hidráulica.

Para uma discussão mais formal do PTV na física, pode-se buscar livros clássicos e de referência no Brasil, como: Sommerfeld [2], Lanczos [3] e Lemos [4]. Constata-se que sob o ponto de vista dessas obras, os conceitos deslocamentos e trabalhos virtuais são aprofundados para sistemas de partículas e corpos rígidos, mas sem aplicação a problemas de corpos deformáveis. Outros livros clássicos da área não possuem sequer citação a estes conceitos. Já pelo enfoque de engenharia, existem bastantes referências que definem e aplicam os conceitos de deslocamentos, forças e trabalhos virtuais principalmente para problemas de corpos deformáveis.

A apresentação do PTV e conceitos correlatos em cursos acadêmicos de física e engenharia segue a orientação das obras utilizadas nas respectivas áreas. A partir de uma busca na internet [5] que enumerou os cinco melhores curso de graduação em Física no Brasil, obteve-se uma lista das bibliografias obrigatórias dos cursos de Mecânica Clássica dessas universidades. Acrescentam-se a essa lista a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) e a Universidade Federal Fluminense (UFF). Três principais referências foram obtidas: Marion e Thornton [6], Goldstein [7] e Symon [8]. A Tabela 1 resume essas informações.



Tabela 1. Os cinco principais cursos de graduação em física no Brasil versus suas bibliografias obrigatórias (pesquisa válida até o ano 2019).

| Universidade | Marion e Thornton [2] | Goldstein [3] | Symon [4] |
|--------------|-----------------------|----------------|----------------|
| USP | ✓ | ✓ | ✓ |
| UNICAMP | ✓ | ✓ | ✓ |
| UFRJ | ✓ | – | ✓ |
| UFMG | Sem informação | Sem informação | Sem informação |
| UFRGS | ✓ | ✓ | ✓ |
| UFF | ✓ | – | ✓ |
| UFMS | ✓ | – | – |

Conforme a Tabela 1, a única universidade que não se conseguiu informação bibliográfica sobre o curso de Mecânica Clássica foi a UFMG. Além das três principais bibliografias usadas nessas universidades, os seguintes livros com enfoque físico também foram consultados: Taylor [9], Sommerfeld [2], Lemos [4], Lanczos [2] e Arnold [10].

As disciplinas de engenharia: Mecânica Técnica, Análise de Estruturas e Resistência dos Materiais têm como principais referências Meriam e Kraige [11], Timoshenko [12] e Soriano [13]. Além desses, mais oito livros clássicos foram consultados. Den Hartog [14], Weaver Jr e Gear [15], Tauchert [16], McGuire et al [17], Vieira Jr [18], Boresi e Schmidt [19] e Langhaar [20].

A Tabela 2 relaciona as bibliografias pesquisadas com o Princípio dos Trabalhos Virtuais nas versões força e deslocamento e com a aplicação desses conceitos.



Tabela 2. Referências bibliográficas versus aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais nas versões força e deslocamento.

| Enfoque | Bibliografia | Princípio dos Trabalhos Virtuais | | | | | |
|------------------|-------------------|----------------------------------|----------------|--------------------|-----------------|----------------|--------------------|
| | | Deslocamentos Virtuais | | | Forças Virtuais | | |
| | | Partículas | Corpos Rígidos | Corpos Deformáveis | Partículas | Corpos Rígidos | Corpos Deformáveis |
| Física | Marion e Thornton | - | - | - | - | - | - |
| | Goldstein | ✓ | ✓ | - | - | - | - |
| | Symon | ✓ | ✓ | - | - | - | - |
| | Taylor | - | - | - | - | - | - |
| | Sommerfeld | ✓ | ✓ | - | - | - | - |
| | Lemos | ✓ | ✓ | - | - | - | - |
| | Lanczos | ✓ | - | - | - | - | - |
| | Arnold | ✓ | ✓ | - | - | - | - |
| Engenharia | Meriam e Kraige | ✓ | ✓ | - | - | - | - |
| | Timoshenko | - | - | ✓ | - | - | - |
| | Soriano | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| | Den Hartog | - | - | - | - | - | - |
| | Weaver Jr e Gear | - | - | ✓ | - | - | ✓ |
| | Tauchert | - | - | ✓ | - | - | ✓ |
| | McGuire et al | - | ✓ | ✓ | - | ✓ | ✓ |
| | Vieira Jr | - | ✓ | ✓ | - | ✓ | ✓ |
| Boresi e Schmidt | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |



Langhaar

✓

✓

✓

✓

✓

✓

Nessa coletânea de livros de enfoque físico e de engenharia, buscou-se ver quais deles mostram os conceitos e aplicações de deslocamentos, forças e trabalhos virtuais. No próximo capítulo são apresentadas as definições dos conceitos de força, deslocamento e trabalho virtual. Em seguida se apresenta uma demonstração informal do Princípio dos trabalhos virtuais nas versões força e deslocamento virtual. Finalmente, mostram-se aplicações desses conceitos para exemplos tradicionalmente vistos em problemas relacionados a partículas, corpos rígidos e corpos sólidos deformáveis.

1.2. Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é estudar o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Como objetivo secundário, apresentam-se os Princípios dos Deslocamentos e das Forças Virtuais e suas diversas aplicações na engenharia e na física.



2. DESENVOLVIMENTO

Este capítulo é dividido em cinco seções. A primeira seção é usada para definir os principais conceitos físicos usados neste trabalho. A seção seguinte mostra as relações entre forças, deslocamentos e entre as estas duas grandezas físicas. A terceira seção apresenta uma demonstração informal e original do Princípio dos Trabalhos Virtuais nas versões deslocamento e força. Importante destacar que para isto se usou como referência o trabalho de Soriano [13]. A penúltima seção discute as consequências do PTV e do Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementar (PTVC). Finalmente, a quinta seção mostra como obter o trabalho virtual e a energia de deformação elástica conforme o que foi definido na primeira seção.

2.1. Definições

Essa seção começa com a definição de três tipos de deslocamentos e conceitos correlatos, conforme apresentado pela literatura utilizada nos curso de física [4].

a) Vínculos: são limitações à possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo a priori seu movimento. Vínculos podem ter duas classificações diferentes. A primeira diz se o vínculo é holônomo ou não holônomo. Já a segunda trata sobre a dependência temporal, podendo o vínculo ser estacionário (escleronômico) ou não estacionário (reônômico).

- Holônomo: a equação do vínculo é expressa por equações algébricas das coordenadas espaciais e eventualmente do tempo, conforme mostra a equação (1):

$$f(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1)$$

- Não Holônomo: a equação do vínculo não pode ser descrita exclusivamente por coordenadas e por igualdade;
- Estacionário (escleronômico): quando a equação do vínculo não depende explicitamente do tempo;



- Não estacionário (reonômico): quando a equação do vínculo depende explicitamente do tempo.

De acordo com essas classificações, os vínculos mais comuns em problemas de engenharia são holônomos e estacionários.

- b) Deslocamento possível (u): é um deslocamento que satisfaz apenas a equação de vínculo. Importante destacar que na notação usada por Lemos [4], u é velocidade;
- c) Deslocamento infinitesimal real ($d\mathbf{r}$): é um deslocamento compatível com a equação de vínculo e com as forças aplicadas sobre a partícula e ocorre sobre um intervalo de tempo infinitesimal. Está de acordo com o deslocamento possível;
- d) Deslocamento virtual ($\delta\mathbf{r}$): é um deslocamento infinitesimal imaginário (sem conexão com a realidade) de cada partícula que leva de uma configuração possível a outra configuração possível infinitesimalmente próxima no mesmo instante t .

A seguir são apresentados conceitos mais abstratos que normalmente são vistos na engenharia em disciplinas como Teoria da Elasticidade.

- e) Reação de apoio: é a “força” que surge em um ponto do sistema devido o mesmo ter alguma restrição de deslocamento. Ela pode ser força, se a restrição for de deslocamento translacional, ou torque, se a restrição for de rotação.
- f) Esforço: é a força ou torque resultante devido a distribuição de tensão mecânica em uma determinada seção S no interior de um sólido, ou seja, é um efeito externo que atua na seção S . Genericamente, essa grandeza será representada neste trabalho pela símbolo (Esf). Conforme sua definição, a unidade relacionada a ela é Newton (N) quando o esforço for uma força ou Newton vezes metro (Nm) quando for um torque.
- g) Tensor de Tensão Mecânica (σ): é um tensor cujas componentes são obtidas pela seguinte equação (ver página 12 em Tauchert [16]):



$$\sigma_{ij} = \lim_{\Delta A_j \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta E s f_i}{\Delta A_j} \right) \text{ e } \lim_{\Delta A_j \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta E s f_i}{\Delta A_j} \right) = 0 \text{ se } \Delta E s f_i \text{ for um torque,} \quad (2)$$

onde os índices i e j indicam que tanto a variação do esforço $\Delta E s f_i$ como a variação da área ΔA_j podem ser tomados em referência a qualquer uma das três coordenadas do sistema cartesiano, descrito genericamente aqui por (X_1, X_2, X_3) . Esses mesmos índices colocados no tensor indicam que sua representação é matricial. Dimensionalmente, cada componente do tensor de tensão é expresso em pascal (Pa), ou seja, N dividido por m^2 . Quando a componente de tensão for relacionada com torque, ela será relacionada com outra propriedade de área, momento de inércia por exemplo, tal que a unidade continue sendo Pa . Conforme a equação (2) e a definição de esforço, parece se ter um problema circular, pois em f) apresenta-se esforço a partir de tensão mecânica e aqui, define-se tensão mecânica a partir de esforço. Isso tudo está correto. Contudo, para evitar este problema, também é possível obter expressões das componentes do tensor das tensões a partir da solução do sistema de equações diferenciais parciais apresentado na equação (4).

h) Tensor de Deformação Infinitesimal (ϵ): é um tensor cujas componentes são obtidas pela seguinte equação:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right), \quad (3)$$

onde u_j e u_i são componentes do vetor deslocamento (definição b) e X_j e X_i são as coordenadas Cartesianas. As componentes de deformação são adimensionais. Esta equação é detalhada na equação (5).

A conexão entre os tensores σ e ϵ é dada pela Lei de Hooke Generalizada. Caso se adote materiais isotrópicos e se considere apenas uma análise linear (proporcional) elástica se obtêm quinze equações que caracterizam a Teoria da Elasticidade Clássica. Essas equações são resumidas a seguir a partir do uso da notação indicial. Para mais detalhes, ver Tauchert [16]:



- Equações de equilíbrio.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial X_3} + f_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial X_3} + f_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial X_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial X_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial X_3} + f_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \sigma_{ij,j} + f_i = 0. \quad (4)$$

onde f_1, f_2 e f_3 são forças inerciais (peso específico é um exemplo deste tipo de “força” [f_i] = N/m³) que podem ser diferentes para cada eixo ordenado. Além disso, o índice ij,j significa derivada da grandeza σ nos índices ij em relação a coordenada j .

- Equações deformação-deslocamento.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) \end{aligned} \right\} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (5)$$

- Lei de Hooke Generalizada para um material linear elástico isotrópico.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{E} (1 + \nu) \sigma_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{E} (1 + \nu) \sigma_{23} = \frac{1}{2G} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{E} (1 + \nu) \sigma_{31} = \frac{1}{2G} \sigma_{31} \end{aligned} \right\} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}], \quad (6)$$



onde E , G e ν são propriedades do material denominadas respectivamente de: Módulo de Elasticidade Longitudinal (Young), Módulo de Elasticidade Transversal e Coeficiente de Poisson. Ver Beer e Johnston [23]. O símbolo δ_{ij} é o Delta de Kronecker (notar que σ_{kk} indica soma).

Importante destacar que quando as componentes de tensão (σ) e deformação (ϵ) são cisalhantes, usam-se outras letras para representá-las. A saber, τ e γ são as tensões e deformações cisalhantes. Note que as componentes do tensor deformação estão definidas em termos de funções deslocamentos u_j e u_i que são grandezas desconhecidas. Já as equações de equilíbrio estão descritas em termos das componentes do tensor de tensão. Elas também podem ser expressas em termos de forças e torques que atuam externamente ao sólido. Para tanto, usam-se as equações de equilíbrio mostrada na equação (7):

$$\begin{aligned} \sum F_X = 0, \quad \sum F_Y = 0, \quad \sum F_Z = 0, \\ \sum M_X = 0, \quad \sum M_Y = 0, \quad \sum M_Z = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

onde F_X, F_Y e F_Z são, respectivamente, as forças aplicadas no sólido nas direções dos eixos X, Y e Z e M_X, M_Y e M_Z são os torques que atuam nos referidos eixos.

i) Escalas de análise: divide-se o problema de análise de estruturas em três escalas. A primeira escala é a escala *global*, onde se tem deslocamentos e forças externas globais como o peso próprio e forças de contato. Nessa escala se usa as coordenadas (X, Y, Z) que é uma forma diferente de expressar as mesmas coordenadas (X_1, X_2, X_3) . A segunda, é a escala *local* em que deslocamentos e forças são calculados tomando-se como referência uma seção reta do corpo elástico. Nesta escala, as coordenadas cartesianas são representadas por (x_L, y_L, z_L) e servem para orientar uma parte da estrutura, em geral um elemento estrutural, em relação as coordenadas (X, Y, Z) . As escalas *global* e *local* podem ser coincidentes e as equações (4) e (5) são válidas nessas duas escalas. A partir daqui, usa-se a escala *local* quanto essas relações aparecerem novamente. Finalmente, na escala *infinitesimal*, têm-se deformações (ϵ) e tensões mecânicas (σ), grandezas físicas obtidas a partir das equações (2) e (3). Nesta escala se obtêm relações diferenciais entre



deslocamentos e coordenadas (x_L, y_L, z_L) ou (X, Y, Z) . Portanto, esta escala é adimensional.

A seguir são apresentados alguns conceitos importantes na análise de estrutura e que ajudam na interpretação de problemas de corpos rígidos e sólidos deformáveis.

j) Corpo rígido: é um sólido composto por partículas que podem se movimentar, mas que durante este movimento as partículas não mudam de distância entre si. Em outras palavras, o corpo movimenta sem deformar.

k) Classificação de modelos estruturais: em análise de estruturas, elementos estruturais são representados por barras formadas pelos seus nós inicial e final. Um elemento estrutural pode ser composto por uma ou mais barras. De acordo com a possibilidade de ter deslocamento de corpo rígido e de se obter as reações de apoio (forças que surgem nos pontos onde se impede o deslocamento) a partir das equações mostradas na equação (7), classificam-se as estruturas em: hipostática, isostática e hiperestática. Para mais detalhes tem-se:

- Hipostática: é a classificação que se dá a uma estrutura que tem deslocamento de corpo rígido. Este deslocamento pode ser translacional ou rotacional;
- Isostática: é a classificação que se dá a uma estrutura que não tem deslocamento de corpo rígido e que tem suas reações obtidas a partir das equações apresentadas na equação (7);
- Hiperestática: é a classificação que se dá a uma estrutura que não tem deslocamento de corpo rígido e que as reações de apoio não são obtidas apenas pelo uso das equações (7), ou seja, este tipo de estrutura tem mais restrições de deslocamento que o necessário.



2.2. Relações importantes entre forças, deslocamentos e entre as duas grandezas

Para aplicar os conceitos vistos anteriormente se considera uma barra de comprimento L composta pelo nós inicial I e final J (ver Figura 1), cuja área da seção transversal (S) é constante com valor de área igual a $A \text{ m}^2$. Esse modelo serve para simular o comportamento de diversos elementos estruturais na engenharia civil.

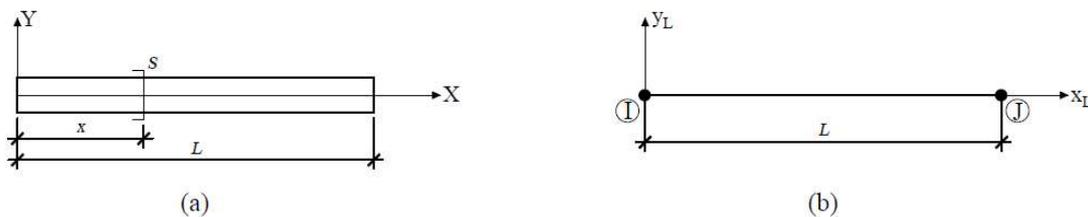


Figura 1 – (a) Elemento estrutural e (b) seu modelo com destaque ao nó inicial I e final J .

É importante, conforme se verá adiante, visualizar esta barra composta por infinitas fibras adjacentes de comprimento L de tal modo que a junção destas infinitas fibras gere uma seção transversal de área igual a $A \text{ m}^2$. O estudo deste modelo é dividido em várias etapas e é normalmente feito nos cursos de engenharia na disciplina denominada de Resistência dos Materiais. As etapas mudam conforme o tipo de *solicitação* da barra. Quatro casos são apresentados a seguir, sendo dois mostrados em detalhes. O que segue abaixo é fundamentalmente retirado do livro de Beer e Johnston [23].

a) Carregamento axial: a barra é solicitada axialmente por cargas externas aplicadas no centro geométrico (CG) das faces dos seus extremos.

Nesse tipo de solicitação, a única componente do tensor σ diferente de zero é a componente axial, denominada aqui de σ_{xx} , ou seja, a coordenada x_L (escala *local*) é utilizada para descrever as seções transversais ao longo do comprimento do elemento. Exceto em regiões próximas as cargas aplicadas, é bastante razoável supor σ_{xx} constante. Nesses casos, a partir da equação (2) é possível definir a resultante da distribuição de tensão N na seção transversal A por:



$$\int dN = \int_A \sigma_{xx} \cdot dA \Rightarrow N = \sigma_{xx} \cdot A. \quad (8)$$

A equação (8) expressa a forma de calcular o esforço normal N em função da tensão normal σ_{xx} . Dependendo da orientação da seção S de área A e do tipo de sollicitação, axial, flexão e/ou torção, obtêm-se relações diferentes.

Em relação ao deslocamento, apenas o que está na direção do comprimento da barra e descrito pela coordenada x_L é de interesse. Assim, a equação (3) pode ser reescrita por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx_L}, \quad (9)$$

que é exatamente a primeira das relações da equação (5) e onde u_x representa a função deslocamento na direção x_L . Se o conceito de diferencial total for usado, obtém-se:

$$du_x = \varepsilon_{xx} \cdot dx_L, \text{ onde } \varepsilon_{xx} = \lim_{\Delta x_L \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u_x}{\Delta x_L} \right) \quad (10)$$

é deslocamento na escala *infinitesimal* e a integral de du_x é o deslocamento na escala *global*.

Para o caso em estudo é bastante razoável supor que a deformação ao longo de toda peça é constante. Como resultado, tem-se que:

$$\int_{u_I}^{u_J} du_x = \int_0^L \varepsilon_{xx} dx \therefore \int_{u_I}^{u_J} du_x = \varepsilon_{xx} \int_0^L dx \therefore (u_J - u_I) = \varepsilon_{xx} \cdot L, \quad (11)$$

onde u_I e u_J são os deslocamentos do nó I e J na configuração deformada (final) do eixo x_L (não confundir com u_i e u_j da equação (3) que indicam funções deslocamentos nas direções x_L , y_L e z_L). Essa diferença entre os deslocamentos dos dois nós pode ser escrita como a diferença entre os comprimentos final (L') e inicial (L), ou seja, $u_J - u_I = L' - L$, resultando em:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_J - u_I}{L} \therefore \varepsilon_{xx} = \frac{L' - L}{L} \quad (12)$$

que é a fórmula aprendida em cursos de Resistência dos Materiais para definir deformação específica.

b) flexão pura: a barra é submetida a dois torques iguais em magnitude e de sentidos contrários que atuam no mesmo plano longitudinal (XY para ilustrar). A Figura 2 resume este caso e mostra (a) a viga indeformada submetida a dois torques nos seus extremos (momentos) e (b) a viga deformada conforme um arco de círculo com um raio constante de curvatura ρ . Além disso, também se mostra os casos indeformado (c) e deformado (d) para o modelo da viga.

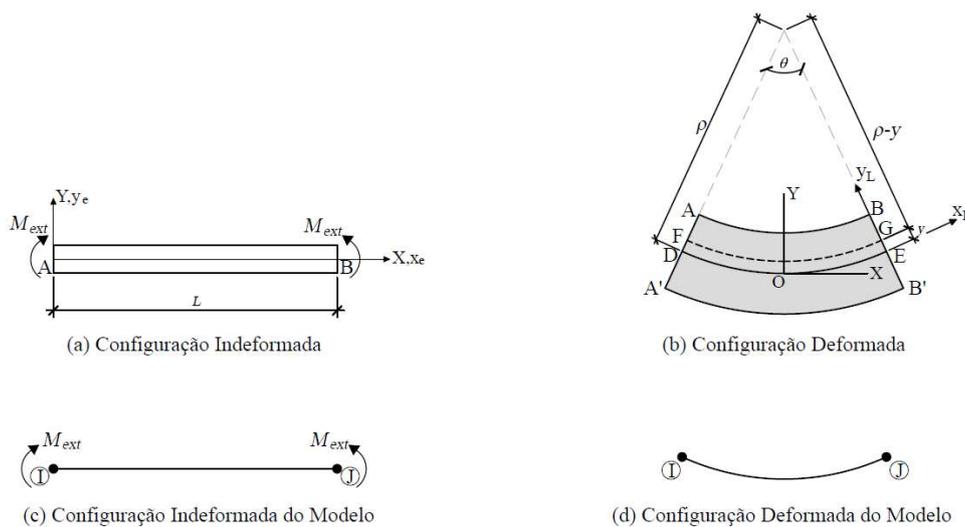


Figura 2 – Barra sob flexão pura com dois torques concentrados aplicados nos extremos nas configurações a) indeformada e b) deformada e o modelo da viga nas configurações c) indeformada e d) deformada (Adaptado de Beer e Johnston [23]).

De acordo com as hipóteses acima, os torques M_{ext} atuam em torno do eixo Z . Como o elemento está em equilíbrio, usa-se a equação $\Sigma M_z = 0$, ver equação (7) e se obtém o momento fletor M . Assim, as equações de equilíbrio que relacionam forças entre os sistemas *local* (momento fletor M) e *infinitesimal* (tensão normal σ_{xx}) deste problema são:



$$\begin{aligned} \sum F_X = 0 &\Rightarrow \int_A \sigma_{xx} \cdot dA = 0, \\ \sum M_Z = M &\Rightarrow \int_A \left[-y \cdot \underbrace{(\sigma_{xx} \cdot dA)}_{dN} \right] = M, \end{aligned} \quad (13)$$

em que dN é o infinitésimo de esforço normal gerado pela distribuição σ_{xx} e o sinal negativo indica que se σ_{xx} for positivo, tem-se tensão de tração. Caso contrário, tem-se tensão de compressão. Já a variável y é a distância entre dN e linha FG em que se está medindo deformação. As forças e torques nos demais eixos são nulos pela hipótese de carregamento.

A hipótese de comportamento da função deslocamento consiste que a barra deforma como um arco de círculo. Assim, após fletir em torno de um centro de curvatura O , uma das fibras que compõem a barra apenas mudará de forma, deixando de ser reta com comprimento L para ser curva de mesmo comprimento. Assim, vale que:

$$L = \rho \cdot \theta, \quad (14)$$

onde ρ é o raio de curvatura e θ é o ângulo de curvatura. A esta linha que apenas muda de forma, denomina-se Linha Neutra (LN). É nesta linha que se localiza a origem do sistema de coordenadas *global* (X, Y, Z). Todas as demais linhas irão mudar de tamanho. Umas irão alongar e outras encurtar. A equação que expressa a mudança de forma dessas linhas é dada por:

$$L' = (\rho - y) \cdot \theta, \quad (15)$$

onde $(\rho - y)$ é a distância da linha ao centro de curvatura. A mudança de comprimento, $u_J - u_I$, desta linha pode ser medida por:

$$u_J - u_I = L' - L = (\rho - y) \cdot \theta - \rho \cdot \theta \therefore u_J - u_I = -y \cdot \theta. \quad (16)$$

Substituindo o resultado acima na equação (12) se tem a deformação específica de cada linha para o caso da barra sob flexão pura.



$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_J - u_I}{L} = \frac{-y \cdot \theta}{\rho \cdot \theta} \therefore \varepsilon_{xx} = \frac{-y}{\rho}. \quad (17)$$

Nota-se que a deformação específica é negativa, de compressão, para uma fibra com $y > 0$ e com $M > 0$. Outra observação importante é que ε_{xx} varia linearmente com y .

Supondo $v = 0$ na primeira das equações (6), resulta que:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \therefore \sigma_{xx} = \frac{-y}{\rho} E. \quad (18)$$

Substituindo este resultado na primeira das equações (13), tem-se que:

$$\int_A \sigma_{xx} \cdot dA = 0 \therefore \frac{-E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0, \text{ como } \frac{-E}{\rho} \neq 0 \Rightarrow \int_A y \cdot dA = 0, \quad (19)$$

ou seja, a coordenadas y do centro geométrico da seção S de área A é zero, implicando que a linha neutra passa por ele. Substituindo o resultado da equação (18) na segunda equação em (13) resulta que:

$$\int_A (y \cdot \sigma_{xx}) dA = M \therefore \frac{-E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = M. \quad (20)$$

A integral na equação (20) é denominada de momento de inércia em relação ao eixo Z (I_Z) onde ocorre a flexão. Da equação (18) é possível constatar que $-E/\rho = \sigma_{xx}/y$. Assim, de posse dessas informações vale que:

$$\sigma_{xx} = \frac{M \cdot y}{I_Z}. \quad (21)$$

Esta equação indica que ocorre uma tensão longitudinal em cada fibra da barra em função do momento fletor M (determinado a partir do torque externo M_{ext}), do momento de inércia I_Z da seção S em relação ao eixo no qual a barra flete (eixo Z) e da distância y da fibra em relação a linha neutra (origem). É possível perceber que quanto mais longe da linha neutra maiores as tensões sobre a qual a fibra estará submetida.



Os demais casos clássicos de carregamento de um sólido são cisalhamento e torção. As relações importantes desses casos serão apenas explicitadas. Para demais dúvidas se sugere consultar um livro de Resistência dos Materiais, Beer e Johnston [23] por exemplo.

c) cisalhamento: ocorre quando a barra é submetida a um carregamento perpendicular ao seu eixo.

A equação usada relaciona o esforço cortante (Q), resultante de forças paralelas a seção S , com a componente do tensor de tensão correspondente, ou seja:

$$\int_A dQ = \int_A \sigma_{xy} \cdot dA \Rightarrow Q = \sigma_{xy} \cdot \tilde{A}, \quad (22)$$

onde dQ é o infinitésimo do esforço cortante atuante no infinitésimo de área dA . Destacando a relação entre esforço e tensão, tem-se:

$$Q = \tau_{xy} \cdot \tilde{A}, \quad (23)$$

onde \tilde{A} é a área da seção transversal com seu valor corrigido (para mais detalhes, ver Beer e Johnston [23]).



2.3. Apresentação do Princípio dos Trabalhos Virtuais “Generalizado” e sua comprovação

Esta subseção começa com a apresentação do Princípio da Conservação de Energia. Com base no que apresenta Langhaar [20], tem-se.

a) Princípio da Conservação de Energia (PCE): o trabalho realizado em um sistema mecânico por forças externas (W_{ext}) mais o calor (Q_c) que flui para o sistema a partir do seu exterior deve ser igual ao aumento da energia cinética (ΔE_C) mais o aumento da energia interna (ΔU_{int}).

Matematicamente, tem-se que:

$$W_{ext} + Q_c = \Delta E_C + \Delta U_{int}. \quad (24)$$

Neste trabalho se considera sistemas adiabáticos, ou seja, $Q_c = 0$ e cargas aplicadas lentamente, o que implica $\Delta E_C = 0$ (exceto para um exemplo em que se usará o Princípio de D'Alembert, ver definição c). Na energia interna (ΔU_{int}), assume-se que a configuração inicial (indeformada) tem energia nula. Assim, após essas hipóteses, reescreve-se a equação (24) por:

$$W_{ext} = U_{int}. \quad (25)$$

A seguir se define o Princípio do Trabalho Virtual (PTV) conforme apresentado por Tauchert [16]. Este autor chama atenção que o PTV não faz exigência de que os deslocamentos virtuais sejam condizentes com as condições de contorno.

b) Princípio do Trabalho Virtual (PTV): se um corpo está em equilíbrio e permanece em equilíbrio ao ser submetido a deslocamentos virtuais, o trabalho virtual externo (\overline{W}_{ext}) realizado pelas forças externas atuando na estrutura é igual ao trabalho virtual interno (\overline{U}_{int}) feito pelas tensões mecânicas.



Importante destacar que na definição feita por Tauchert [16], (\bar{U}_{int}) é a energia de deformação do sólido. Na convenção usada pelo autor, assim como será feito neste trabalho, o superescrito (-) indica grandeza virtual.

A versão matemática do PTV é expressa pela equação (26):

$$\bar{W}_{ext} = \bar{U}_{int}, \quad (26)$$

onde $\bar{U}_{int} = \bar{U}_{ela} + \bar{U}_{pla}$ em que \bar{U}_{ela} e \bar{U}_{pla} são, respectivamente, as energias virtuais de deformação elástica e plástica. Neste trabalho, apenas deformações elásticas são consideradas, ou seja, $\bar{U}_{pla} = 0$. Note a semelhança entre as expressões das equações (25) e (26).

Comparado com a definição acima, ressalta-se que Sommerfeld [2] e Lemos [4] definem o PTV de maneira mais restritiva. Eles separam as forças totais \mathbf{F}_i que atuam em partículas em forças aplicadas $\mathbf{F}_i^{(a)}$ e forças de vínculo \mathbf{f}_i , onde o índice i indica a i -ésima partícula. Depois eles se limitam ao conjunto de problemas em que o trabalho virtual das forças de vínculo é zero. Assim, esses autores definem o PTV matematicamente por:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (27)$$

Ao se fazer $\bar{U}_{ela} = 0$ na equação (26) obtém-se a equação (27), destacando que esta é um caso particular daquela.

Para uniformizar a notação, a partir daqui se usará apenas o superescrito (-) em cima da grandeza virtual. Por exemplo: $\delta \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}$. A seguir se apresenta outro conceito correlato ao PTV muito usado na física.

c) Princípio de d'Alembert: Lemos [4], página 18, mostra a generalização de d'Alembert. Matematicamente, tem-se que:



$$\sum_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^{(a)}) \cdot \bar{\mathbf{r}}_i = 0, \quad (28)$$

em que $\dot{\mathbf{p}}_i$ é a massa m_i multiplicada pela velocidade $\dot{\mathbf{r}}_i$ da i -ésima partícula num referencial inercial.

Ainda tomando como referência o trabalho de Tauchert [16], define-se a seguir força virtual e o Princípio do Trabalho Virtual Complementar (PTVC).

d) Força Virtual ($\bar{\mathbf{F}}$): é uma força imaginária de qualquer magnitude e orientação que satisfaz as equações (2) e (4). Ver página 24 de Mason e Souza [22].

e) Princípio do Trabalho Virtual Complementar (PTVC): o trabalho virtual complementar (\bar{W}_{ext}^C) feito por um sistema de forças virtuais externas sob a ação de deslocamentos reais de uma estrutura é igual ao trabalho complementar (\bar{U}_{int}^C) feito pelas tensões mecânicas virtuais sobre deformações reais.

A versão matemática do PTVC é expressa pela equação (29):

$$\bar{W}_{ext}^C = \bar{U}_{int}^C. \quad (29)$$

f) Sistema Virtual: é um problema idêntico ao real onde estão presentes apenas forças ou deslocamentos virtuais.

De posse das definições anteriores, apresenta-se a comprovação informal do PTV. Isso é feito a partir do ensaio uniaxial de tensão, que é bastante usado nas engenharias e que serve para determinar propriedades dos materiais. Este ensaio é normatizado e consiste em colocar uma barra composta de um material cujas características se deseja descobrir em uma prensa que traciona a barra até a ruptura. Para mais detalhes ver norma ISO 6892-1:2019 [25]. A grande vantagem de se raciocinar tomando como ponto de partida este ensaio, consiste no fato de que apenas uma componente de deformação e tensão não é nula.

A Figura 3 resume graficamente este ensaio mostrando a relação força versus deslocamento nas escala *global* (X, Y, Z), *local* (x_L, y_L, z_L) e *infinitesimal*. A barra do

ensaio é representada na parte superior esquerda da figura por um bloco retangular de comprimento L e que está submetido a duas cargas externas (P) que se equilibram e aplicadas no centro geométrico (CG) das seções extremas da barra. Isso é importante para que a barra seja submetida apenas a deformações axiais.

Note que em termos de deslocamentos (D), o nó I tem deslocamento restrito e o nó J não. Na parte debaixo da figura há três gráficos mostrando a relação entre força e deslocamento nas três escalas. O “ponto” de partida é a configuração sem carregamento, que corresponde a força e deslocamento nulos. Já $Pt. \alpha$ é uma configuração qualquer (D', P') onde a barra apresenta uma deformação (ε) linear e proporcional a (σ).

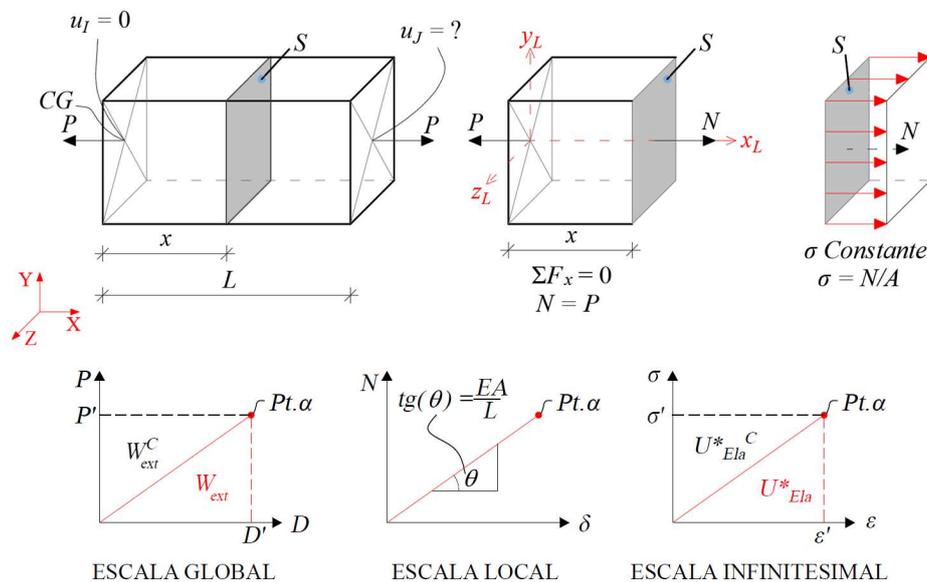


Figura 3 – Ensaio uniaxial de uma barra reta sob o ponto de vista das escalas *global* e *infinitesimal*, passando pela escala *local*.

A Figura 3 mostra o ensaio uniaxial de tração de uma barra reta sob o ponto de vista das escalas *global* e *infinitesimal*, em que o carregamento é aplicado lentamente até a configuração final $Pt. \alpha$. Em todos os estágios de carregamento o equilíbrio é mantido nas escalas *global*, *local* e *infinitesimal*. Para enfatizar a relação entre as escalas se destaca uma seção S distando x do canto esquerdo na escala *global*. Ao fim do carregamento, ponto α , temos as medidas do trabalho realizado pelas forças aplicadas W_{ext} e a energia de deformação elástica U_{ela} dadas por:



$$W_{ext} = \frac{P' \cdot D'}{2},$$

$$U_{ela} = \int_V U_{ela}^* \cdot dV \quad \text{onde} \quad U_{ela}^* = \int_0^{\varepsilon'} \sigma(\varepsilon) \cdot d\varepsilon, \quad (30)$$

é denominada de densidade de energia de deformação elástica (energia de deformação que ocorre em um infinitésimo de volume dV no interior do elemento). Essa grandeza pontual é obtida pela integração do produto $\sigma(\varepsilon) \cdot d\varepsilon$ do estado de deformação zero até o estado de deformação correspondente ao ponto α ($Pt.\alpha$), denominada de ε' .

Note que naturalmente se usa as escalas *global* e *infinitesimal* na equação do PTV. Portanto, não é necessário se preocupar com a escala *local* neste momento.

Também se destaca as grandezas W_{ext}^C e U_{ela}^C , denominadas como o trabalho complementar realizado pela carga externa e a energia de deformação elástica complementar. Do ponto de vista prático, essas grandezas são simplesmente obtíveis ao se escrever os deslocamentos em termos das forças, ou seja: $D = f(P)$ e $\varepsilon = g(\sigma)$ onde f e g representam apenas a relação de dependência, sendo a energia de deformação elástica complementar expressa por:

$$U_{ela}^C = \int_V U_{ela}^{*C} \cdot dV \quad \text{onde} \quad U_{ela}^{*C} = \int_0^{\sigma'} \varepsilon(\sigma) \cdot d\sigma. \quad (31)$$

De forma similar ao caso anterior, o limite de integração superior σ' é o nível de tensão correspondente ao ponto α ($Pt.\alpha$). Como o foco deste trabalho é a análise linear elástica considerando o comportamento linear elástico do material, o resultado das densidades de energia de deformação resultam em:

$$\left. \begin{aligned} U_{ela}^* &= \int_0^{\varepsilon'} \sigma(\varepsilon) \cdot d\varepsilon = \frac{\sigma' \cdot \varepsilon'}{2} \\ U_{ela}^{*C} &= \int_0^{\sigma'} \varepsilon(\sigma) \cdot d\sigma = \frac{\varepsilon' \cdot \sigma'}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{ela}^* = U_{ela}^{*C} \quad (32)$$

Essa igualdade se mantém para as energias de deformação elástica e sua versão complementar ao longo de todo elemento reticulado, implicando em:



$$\left. \begin{aligned} U_{ela} &= \int_V \left(\frac{\sigma' \cdot \varepsilon'}{2} \right) \cdot dV \\ U_{ela}^C &= \int_V \left(\frac{\varepsilon' \cdot \sigma'}{2} \right) \cdot dV \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{ela} = U_{ela}^C \quad (33)$$

Após estabilizar o carregamento no ponto α , faz-se um acréscimo de carga ΔP ao qual corresponde um acréscimo de esforço ΔN e tensão $\Delta \sigma$ e que não tem relação alguma com os valores de carga e deslocamento no $Pt.\alpha$. A cada um desses acréscimos de forças se tem acréscimos de deslocamentos ΔD e $\Delta \varepsilon$ correspondentes. Graficamente, um acréscimo representa partir do ponto α para o ponto β . O detalhe de todo início do carregamento, passando pelo ponto α , e terminando no ponto β é destacado na Figura 4. Apenas as relações de força versus deslocamento nas escalas *global* e *infinitesimal* são mostradas.

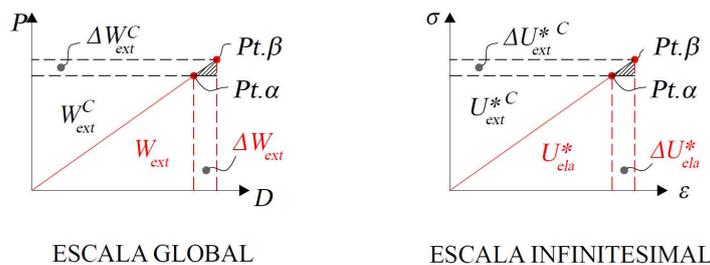


Figura 4 – Acréscimo de força e deslocamento no ensaio uniaxial de um elemento reticulado sob o ponto de vista das escalas *global* e *infinitesimal*.

Após transformar a densidade de energia de deformação elástica para todo o elemento e obter ΔU_{ela} , aplica-se o PCE, equação (25), para as áreas dos triângulos abaixo da reta da Figura 4. Assim, considera-se o trabalho e energia correspondentes ao se carregar a barra de 0 até a força correspondente ao estado representado pelo ponto β ($Pt.\beta$), resultando em:

$$\underbrace{W_{ext}}_{Tri.0 \text{ ao } Pt.\alpha} + \underbrace{\Delta W_{ext}}_{Trap.Pt.\alpha \text{ ao } Pt.\beta} = \underbrace{U_{ela}}_{Tri.0 \text{ ao } Pt.\alpha} + \underbrace{\Delta U_{ela}}_{Trap.Pt.\alpha \text{ ao } Pt.\beta}, \quad (34)$$

onde *Trap.* e *Tri.* indicam o trapézio e o triângulo da Figura 4. Procedendo de forma similar para as grandezas complementares (triângulos acima da reta), tem-se que:

$$\underbrace{W_{ext}^C}_{Tri.0 \text{ ao } Pt.\alpha} + \underbrace{\Delta W_{ext}^C}_{Trap.Pt.\alpha \text{ ao } Pt.\beta} = \underbrace{U_{ela}^C}_{Tri.0 \text{ ao } Pt.\alpha} + \underbrace{\Delta U_{ela}^C}_{Trap.Pt.\alpha \text{ ao } Pt.\beta}. \quad (35)$$



Contudo, considerando as igualdades obtidas na equação (30) aplicadas nas equações (34) e (35), tem-se finalmente que:

$$\Delta W_{ext} = \Delta U_{ela} \text{ e } \Delta W_{ext}^C = \Delta U_{ela}^C. \quad (36)$$

Expandindo as igualdades acima, resulta:

$$\underbrace{\frac{\overbrace{\Delta P \cdot \Delta D}^{Tri}}{2} + \overbrace{P' \cdot \Delta D}^{Ret}}_{Trap.Pt. \alpha \text{ ao } Pt. \beta} = \underbrace{\int_V \left(\frac{\Delta \sigma \cdot \Delta \varepsilon}{2} \right) dV}_{Trap.Pt. \alpha \text{ ao } Pt. \beta} + \underbrace{\int_V (\sigma' \cdot \Delta \varepsilon) dV}_{Ret} \quad (37)$$

$$\underbrace{\frac{\overbrace{\Delta P \cdot \Delta D}^{Tri}}{2} + \overbrace{\Delta P \cdot D'}^{Ret}}_{Trap.Pt. \alpha \text{ ao } Pt. \beta} = \underbrace{\int_V \left(\frac{\Delta \sigma \cdot \Delta \varepsilon}{2} \right) dV}_{Trap.Pt. \alpha \text{ ao } Pt. \beta} + \underbrace{\int_V (\Delta \sigma \cdot \varepsilon') dV}_{Ret}.$$

Replicando o PCE, equação (25), para os pequenos triângulos formados entre os pontos α e β (triângulos pequenos hachurados de preto), tem-se:

$$\frac{\Delta P \cdot \Delta D}{2} = \int_V \left(\frac{\Delta \sigma \cdot \Delta \varepsilon}{2} \right) dV. \quad (38)$$

Aplicando essa última igualdade nas equações (36) e (37) tem-se que:

$$P' \cdot \Delta D = \int_V (\sigma' \cdot \Delta \varepsilon) dV$$

$$\Delta P \cdot D' = \int_V (\Delta \sigma \cdot \varepsilon') dV. \quad (39)$$

A equação (39) é a expressão matemática do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e do Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementar (PTVC). Note que se partiu apenas da validade do Princípio da Conservação de Energia (PCE).

Devido a adoção de uma análise linear elástica, a partir deste instante as grandezas virtuais não serão tratadas apenas como grandezas infinitesimais. Como consequência, a grandeza virtual será representada, no restante do texto, com um traço em cima dela (conforme adotado anteriormente). Por exemplo força e deslocamento virtuais serão representados por \bar{P} e \bar{D} respectivamente. Assim, reescrevendo a equação (39) com esta nova notação e considerando o ponto $Pt.\alpha$ genérico, elimina-se a partir daqui a notação linha (').



A equação (40) apresenta o Princípio dos Trabalhos Virtuais quando os deslocamentos são virtuais e quando as forças são virtuais (superescrito C indicando uma grandeza complementar):

$$\underbrace{P \cdot \bar{D}}_{W_{ext}} = \int_V \underbrace{(\sigma \cdot \bar{\varepsilon})}_{U_{ela}} dV,$$
$$\underbrace{\bar{P} \cdot D}_{W_{ext}^C} = \int_V \underbrace{(\bar{\sigma} \cdot \varepsilon)}_{U_{ela}^C} dV. \quad (40)$$



2.4. Consequências do PTV e do PTVC

A primeira equação indica que o trabalho virtual realizado pela carga real em conjunto com o deslocamento virtual é igual à energia de deformação elástica virtual gerada pela tensão real associada com uma deformação virtual. Nessa igualdade, a força real da escala *global* é relacionada com a força real da escala *infinitesimal* (tensões) a partir das forças na escala *local*. Isso é mostrado na equação (8) para o carregamento axial. O deslocamento virtual, neste caso, entre as duas escalas é obtido da mesma forma que o seu correspondente real mostrado pela equação (12). Simplificadamente, elas são:

$$N = \sigma_{xx} \cdot A \quad \text{e} \quad \bar{\epsilon}_{xx} = \frac{\Delta \bar{L}}{L}, \quad (41)$$

onde $\Delta \bar{L}$ e L são respectivamente a variação virtual de comprimento e o comprimento real inicial da barra.

A segunda equação em (39) tem interpretação completamente análoga à primeira, com a diferença de que a grandeza virtual neste caso é a força. Simplificadamente, as duas equações em (39) serão denominadas aqui como o Princípio dos Trabalhos Virtuais na sua versão deslocamento virtual (primeira equação) e força virtual (segunda equação). A seguir destaca-se a principal característica do PTV nas suas duas versões.

Os resultados expressos pela equação (39) indicam que não há exigência alguma de relação entre as grandezas reais e virtuais. As grandezas virtuais podem ser quaisquer, sem nenhum comprometimento com os dados reais do problema. Contudo, em geral, é recomendável reproduzir boa parte do problema real.



2.5. Obtenção do trabalho realizado pela carga externa e pela energia de deformação elástica

O trabalho virtual realizado pelas cargas externas nas suas versões deslocamento e força virtual (\bar{W}_{ext} e \bar{W}_{ext}^C) são de imediata obtenção. Dado um sistema com um total de N_F forças e N_F deslocamentos, tem-se que:

$$\begin{aligned}\bar{W}_{ext} &= \sum_i^{N_F} P_i \cdot \bar{D}_i, \\ \bar{W}_{ext}^C &= \sum_i^{N_F} \bar{P}_i \cdot D_i,\end{aligned}\tag{42}$$

onde os pares (P_i, \bar{D}_i) e (\bar{P}_i, D_i) têm a única exigência de corresponderem ao mesmo ponto geométrico.

Elementos retos planos possuem, geralmente duas componentes de tensão e deformação relevantes, a saber: $(\sigma_{xx}, \varepsilon_{xx})$ e (τ_{xy}, γ_{xy}) . Dessa forma, a energia de deformação elástica virtual na versões força e deslocamento são:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ela} &= \int_V (\sigma_{xx} \cdot \bar{\varepsilon}_{xx} + \tau_{xy} \cdot \bar{\gamma}_{xy}) \cdot dV, \\ \bar{U}_{ela}^C &= \int_V (\bar{\sigma}_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} + \bar{\tau}_{xy} \cdot \gamma_{xy}) \cdot dV.\end{aligned}\tag{43}$$

Ao se considerar a análise apenas restrita à fase linear elástica do comportamento do material, tem-se que:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= E \cdot \varepsilon_{xx} \quad \text{ou} \quad \bar{\sigma}_{xx} = E \cdot \bar{\varepsilon}_{xx}, \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \quad \text{ou} \quad \bar{\tau}_{xy} = G \cdot \bar{\gamma}_{xy}.\end{aligned}\tag{44}$$

Substituindo os resultados da equação (44) na equação (43), resulta que:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ela} &= \int_V \left(\sigma_{xx} \cdot \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{E} + \tau_{xy} \cdot \frac{\bar{\tau}_{xy}}{G} \right) \cdot dV, \\ \bar{U}_{ela}^C &= \int_V \left(\bar{\sigma}_{xx} \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E} + \bar{\tau}_{xy} \cdot \frac{\tau_{xy}}{G} \right) \cdot dV.\end{aligned}\tag{45}$$



A equação (45) apresenta \bar{U}_{ela} e \bar{U}_{ela}^C descritas na escala *infinitesimal* e apenas em termos de força (tensão). Contudo, a escala mais interessante de descrever essas energias é a *local*. A razão para isto é que na engenharia, é comum descrever como variam os esforços ao longo de elementos estruturais.

Assim, conforme parágrafo anterior, é necessário expressar a energia virtual de deformação na sua versão força e deslocamento virtual em termos da escala *local*. Isso é feito a partir das equações vistas nas seções anteriores. Resumidamente, tem-se que:

$$\begin{aligned} N &= \sigma_{xx} \cdot A, \\ Q &= \tau_{xy} \cdot \tilde{A}, \\ M &= \frac{\sigma_{xx} \cdot I_z}{y}. \end{aligned} \quad (46)$$

Note que a tensão σ_{xx} pode ser descrita em função do esforço normal N quando há apenas carregamento axial ou em função do momento fletor M quando ocorrer flexão pura. Quando houver flexão com carregamento axial, σ_{xx} é descrita pela superposição dos efeitos, ou seja, somando-os. Assim, a partir das equações (46) é possível escrever:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{N}{A} + \frac{M \cdot y}{I_z} \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\bar{N}}{A} + \frac{\bar{M} \cdot y}{I_z}, \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{\tilde{A}} \quad \text{e} \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{\bar{Q}}{\tilde{A}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Note que a tensão normal é obtida a partir de N e M_z . Contudo, energeticamente falando, uma não influi na outra, o que implica que o produto $\sigma_{xx} \cdot (\bar{\sigma}_{xx}/E)$ tem apenas dois termos: um devido ao esforço normal e outro devido ao momento fletor. Substituindo a equação (47) na equação (46), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ela} &= \int_V \left(\frac{1}{E} \frac{N}{A} \frac{\bar{N}}{A} + \frac{1}{E} \frac{M \cdot y}{I_z} \frac{\bar{M} \cdot y}{I_z} + \frac{1}{G} \frac{Q}{\tilde{A}} \frac{\bar{Q}}{\tilde{A}} \right) \cdot dV, \\ \bar{U}_{ela}^C &= \int_V \left(\frac{1}{E} \frac{\bar{N}}{A} \frac{N}{A} + \frac{1}{E} \frac{\bar{M} \cdot y}{I_z} \frac{M \cdot y}{I_z} + \frac{1}{G} \frac{\bar{Q}}{\tilde{A}} \frac{Q}{\tilde{A}} \right) \cdot dV. \end{aligned} \quad (48)$$

A equação (48) vale para um elemento reto plano com variação na área da seção transversal. Contudo, apenas elementos retos planos de seção constante serão considerados neste trabalho. Consequentemente, vale que $dV = dA \cdot dx$, que substituído na equação (48) resulta em:



$$\begin{aligned}\bar{U}_{ela} &= \int_0^{L_B} \left[\int_A \left(\frac{1}{E} \frac{N}{A} \frac{\bar{N}}{A} + \frac{1}{E} \frac{M \cdot y}{I_z} \frac{\bar{M} \cdot y}{I_z} + \frac{1}{G} \frac{Q}{\tilde{A}} \frac{\bar{Q}}{\tilde{A}} \right) \cdot dA \right] \cdot dx, \\ \bar{U}_{ela}^C &= \int_0^{L_B} \left[\int_A \left(\frac{1}{E} \frac{\bar{N}}{A} \frac{N}{A} + \frac{1}{E} \frac{\bar{M} \cdot y}{I_z} \frac{M \cdot y}{I_z} + \frac{1}{G} \frac{\bar{Q}}{\tilde{A}} \frac{Q}{\tilde{A}} \right) \cdot dA \right] \cdot dx,\end{aligned}\tag{49}$$

onde L_B é o comprimento do elemento estudado. Em todos os termos acima, exceto y , todas as demais variáveis são constantes ao longo da área, logo tem-se que:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ela} &= \int_0^{L_B} \left[\frac{N \cdot \bar{N}}{E \cdot A^2} \int_A dA + \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I_z^2} \int_A y^2 dA + \frac{Q}{G \cdot \tilde{A}} \int_A \frac{\bar{Q}}{\tilde{A}} dA \right] \cdot dx, \\ \bar{U}_{ela}^C &= \int_0^{L_B} \left[\frac{\bar{N} \cdot N}{E \cdot A^2} \int_A dA + \frac{\bar{M} \cdot M}{E \cdot I_z^2} \int_A y^2 dA + \frac{\bar{Q}}{G \cdot \tilde{A}} \int_A \frac{Q}{\tilde{A}} dA \right] \cdot dx.\end{aligned}\tag{50}$$

As integrais que restaram têm significados físicos já conhecidos. O ponto importante que deve ser mencionado é que a integral de área referente ao cortante resulta no produto entre o esforço cortante pela área corrigida. Essa integral e as demais são indicadas na equação (51):

$$A = \int_A dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA, \quad \bar{Q} = \int_A \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\tilde{A}} dA \quad \text{e} \quad Q = \int_A \frac{\tau_{xy}}{\tilde{A}} dA.\tag{51}$$

Substituindo as equações (51) na equação (50), têm-se:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ela} &= \int_0^{L_B} \left[\frac{N \cdot \bar{N}}{E \cdot A} + \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I_z} + \frac{Q \cdot \bar{Q}}{G \cdot \tilde{A}} \right] \cdot dx, \\ \bar{U}_{ela}^C &= \int_0^{L_B} \left[\frac{\bar{N} \cdot N}{E \cdot A} + \frac{\bar{M} \cdot M}{E \cdot I_z} + \frac{\bar{Q} \cdot Q}{G \cdot \tilde{A}} \right] \cdot dx,\end{aligned}\tag{52}$$

em que $E \cdot A$, $E \cdot I_z$ e $G \cdot \tilde{A}$ são as rijezas axial, à flexão e ao cisalhamento.

Finalmente, considerando uma estrutura composta por N_B elementos retos reticulados planos, temos:



$$\begin{aligned}\bar{U}_{ela} &= \sum_{b=1}^{N_B} \int_0^{L_B} \left[\frac{N \cdot \bar{N}}{E \cdot A} + \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I_z} + \frac{Q \cdot \bar{Q}}{G \cdot \tilde{A}} \right] \cdot dx, \\ \bar{U}_{ela}^C &= \sum_{b=1}^{N_B} \int_0^{L_B} \left[\frac{\bar{N} \cdot N}{E \cdot A} + \frac{\bar{M} \cdot M}{E \cdot I_z} + \frac{\bar{Q} \cdot Q}{G \cdot \tilde{A}} \right] \cdot dx.\end{aligned}\tag{53}$$

A equação (53) contém as expressões da energia virtual de deformação elástica, nas suas versões deslocamento e força, aplicadas a qualquer estrutura composta de N_B elementos reticulados retos planos de seção transversal S de área constante A . Portanto, nesta equação se considera apenas a parcela de deformação elástica dos elementos reticulados planos devido aos esforços N , M e Q .

É possível considerar outros efeitos que ajudam a melhorar a simulação do comportamento estrutural. Os mais conhecidos são: apoio elástico, temperatura e recalque de apoio. O primeiro permite simular casos em que a estrutura não está sob um apoio ideal que permite parcialmente o deslocamento no ponto de conexão entre a mola e a barra. O segundo é muito importante em cidades onde há grande variação térmica (Campo Grande / MS é um bom exemplo). Finalmente, o terceiro simula o efeito de quando se tem o apoio ideal que impede por completo o deslocamento correspondente mas onde o próprio apoio se movimenta. Sob o ponto de vista prático, este caso ocorre em situações em que a fundação da estrutura está sobre um solo que movimenta.

Os dois primeiros efeitos são mais facilmente adicionados na energia de deformação elástica. A variação de temperatura impõe uma deformação real, logo seu efeito aparece na energia de deformação elástica no caso em que as forças são virtuais (\bar{U}_{ela}^C). Já o efeito de apoios elásticos pode ser considerado tanto quando as forças são virtuais (\bar{U}_{ela}^C) quanto as grandezas virtuais são os deslocamentos (\bar{U}_{ela}). Finalmente, devido ao recalque de apoio ser um deslocamento real possível na estrutura, quando ocorre ele aparece no trabalho virtual externo em que as forças são as grandezas virtuais (\bar{W}_{ext}^C). Assim, considerando esses efeitos e uma estrutura sujeita a N_F forças virtuais, composta por N_B elementos retos, com N_M apoios elásticos, com N_R recalques de apoio δp , as versões do Princípio dos Trabalhos Virtuais podem ser escrita por:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{N_F} P_j \cdot \bar{D}_j}_{\bar{W}_{ext}} = \underbrace{\sum_{b=1}^{N_B} \int_0^{L_B} \left[\frac{N \cdot \bar{N}}{E \cdot A} + \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I_z} + \frac{Q \cdot \bar{Q}}{G \cdot \tilde{A}} \right] \cdot dx}_{\bar{U}_{ela}} + \sum_{j=1}^{N_M} F_j \cdot \frac{\bar{F}_j}{k_j},\tag{54}$$



$$\underbrace{\sum_{j=1}^{N_R} \bar{R}_j \cdot \delta p_j + \sum_{j=1}^{N_F} \bar{P}_j \cdot D_j}_{\bar{W}_{ext}^C} = \bar{U}_{ela}^C \quad \text{onde} \quad (55)$$

$$\bar{U}_{ela}^C = \sum_{b=1}^{N_B} \int_0^{L_B} \left[\frac{\bar{N} \cdot N}{E \cdot A} + \frac{\bar{M} \cdot M}{E \cdot I_z} + \frac{\bar{Q} \cdot Q}{G \cdot \bar{A}} \right] \cdot dx +$$

$$\sum_{b=1}^{N_B} \int_0^{L_B} [\bar{N} \cdot \alpha \cdot \Delta T + \bar{M}_z \cdot \alpha \cdot g_T] \cdot dx + \sum_{j=1}^{N_M} \bar{F}_j \cdot \frac{F_j}{k_j}.$$

As equações (54) e (55) representam os casos mais gerais abordados neste trabalho para a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais nas versões deslocamentos e forças virtuais respectivamente. Nesta equação, os recalques de apoio são considerados e os

efeitos térmicos aparecem respectivamente em: $\sum_{j=1}^{N_R} \bar{R}_j \cdot \delta p_j$ e

$$\sum_{b=1}^{N_B} \int_0^{L_B} [\bar{N} \cdot \alpha \cdot \Delta T + \bar{M}_z \cdot \alpha \cdot g_T] \cdot dx, \text{ onde } \Delta T \text{ é a variação uniforme de temperatura e } g_T$$

é o gradiente de temperatura. Ambas grandezas são obtidas a partir das variações de temperaturas nos bordos superior (ΔT^s) e inferior (ΔT^i). ΔT é relacionada com a variação de comprimento e g_T com à flexão da barra.

Finalmente, o efeito do apoio elástico surge de duas formas. Na primeira, a deformação da mola é virtual. Na segunda é o contrário, quem é virtual é a força. Na equação elas aparecem, respectivamente, da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^{N_M} F_j \cdot \frac{\bar{F}_j}{k_j} \text{ e } \sum_{j=1}^{N_M} \bar{F}_j \cdot \frac{F_j}{k_j}.$$

Os detalhes de como esses efeitos são considerados nas versões do Princípio dos Trabalhos Virtuais foi deixado para o Apêndice deste trabalho.

Nos exemplos do próximo capítulo, o esforço cortante (Q) será zero ou não será levado em consideração. Isso ocorre pelo fato de que em estruturas reais, o efeito do esforço cortante é muito pequeno comparado com o do momento fletor (M) e esforço normal (N).



3. APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS (PTV)

Esta seção será dividida em três partes. A primeira apresenta a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais em sistemas de partículas. A segunda e terceira mostram a aplicação à corpos rígidos e deformáveis, respectivamente.

Em todos os casos, usam-se as convenções de restrições de deslocamentos adotadas por engenheiros. A Figura 5 destaca os principais casos.

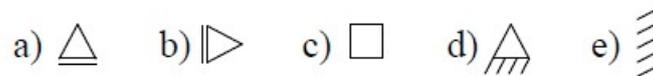


Figura 5 – Destaca as restrições de deslocamentos no plano adotadas neste trabalho: a) deslocamento vertical impedido, b) deslocamento horizontal impedido, c) rotação impedida, d) deslocamento impedido no plano e e) todos os deslocamentos impedidos (situação denominada como engaste).

Outra informação importante que aparecerão nos exemplos são os tipos de forças. As forças aplicadas ao sistema são indicadas por setas e os torques são representados por curvas com pontas. Quando essas forças forem reativas, ou seja, aparecerem devido a uma restrição de deslocamento, elas têm com um corte na linha.

Exceto no último problema deste trabalho, as seguintes convenções serão usadas nos problemas a seguir. Forças em sentido para cima e para a direita e torques girando no sentido anti-horário serão considerados positivos. Caso contrário, serão negativos.



3.1. Partículas

Apenas um exemplo é apresentado nesta seção, trata-se da máquina de Atwood, que é constituída de uma roldana fixa e duas partículas de massas m_1 e m_2 conectadas por uma corda de comprimento L fixo ($\bar{U}_{ela} = 0$). A Figura 6 ilustra os detalhes.

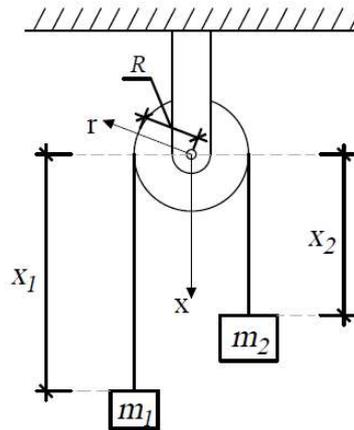


Figura 6 – Máquina de Atwood, que consiste de duas massas m_1 e m_2 penduradas pelo extremo de uma corda de comprimento L fixa ao teto por uma roldana de raio R (Adaptada de Lemos [4]).

Objetivo: obter as acelerações \ddot{x}_1 e \ddot{x}_2 das massas m_1 e m_2 .

Ferramenta: aplicar o Princípio de D'Alembert (ver equação (28)).

Para resolver este problema, define-se primeiro um eixo de referência que passa pelo pino que conecta a roldana a haste fixada no teto. A partir dele se definem as coordenadas x_1 e x_2 que localizam as posições das massas m_1 e m_2 .

A seguir a equação (56) apresenta os vetores posição das duas partículas.

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \hat{\mathbf{x}} \text{ e } \mathbf{r}_2 = x_2 \hat{\mathbf{x}}. \quad (56)$$

A equação (57) mostra a restrição de vínculo holônomo existente no problema.

$$x_1 + x_2 = L - \pi \cdot R, \quad (57)$$



onde L é o comprimento da corda que liga as duas massas e $\pi \cdot R$ é a metade do comprimento da circunferência da roldana. Considerando variação infinitesimal das posições na equação (57), tem-se:

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0 \therefore \delta x_1 = -\delta x_2. \quad (58)$$

O vetor de forças fictícias subtraída das forças aplicadas resulta em:

$$\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{F}^{(a)} = \begin{pmatrix} m_1 \ddot{x}_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} - \begin{pmatrix} m_1 g \\ m_2 g \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g \\ m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}. \quad (59)$$

Os deslocamentos virtuais podem ser as variações infinitesimais das posições das massas m_1 e m_2 , ou seja $\bar{x}_1 = \delta x_1$ e $\bar{x}_2 = \delta x_2$. Assim, na notação de grandezas virtuais adotada neste trabalho, define-se o vetor deslocamento virtual:

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}, \quad (60)$$

Portanto, o trabalho virtual correspondente ao vetor deslocamento virtual é expresso por:

$$\underbrace{(\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{F}^{(a)}) \cdot \bar{\mathbf{r}}}_{\text{Trabalho Virtual}} = (m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g \quad m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \therefore \quad (61)$$

$$\bar{W}_{ext} = (m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g) \bar{x}_1 + (m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g) \bar{x}_2.$$

Substituindo a equação (58) na equação (61) resulta em:

$$(\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{F}^{(a)}) \cdot \bar{\mathbf{r}} = [m_1(-\ddot{x}_2) - m_1 g](-\bar{x}_2) + (m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g) \bar{x}_2. \quad (62)$$

Pelo Princípio de D'Alembert, tem-se que:

$$\bar{W}_{ext} = 0 \therefore (\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{F}^{(a)}) \cdot \bar{\mathbf{r}} = 0 \therefore \quad (63)$$

$$[m_1(-\ddot{x}_2) - m_1 g](-\bar{x}_2) + (m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g) \bar{x}_2 = 0.$$

Isolando \bar{x}_2 na equação (63) e fazendo-o diferente de zero, pois se trata de uma variação arbitrária, tem-se que:



$$\begin{aligned} [(m_1 - m_2)g + (m_1 + m_2)\ddot{x}_2](\delta x_2) = 0 &\Rightarrow (m_1 - m_2)g + (m_1 + m_2)\ddot{x}_2 = 0 \therefore \\ \ddot{x}_2 = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)} \text{ e } \ddot{x}_1 = -\frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)}. \end{aligned} \quad (64)$$

3.2. Corpos rígidos

Esta seção é dividida em duas subseções. A primeira apresenta deslocamentos virtuais enquanto a segunda usa forças virtuais.

3.2.1. Deslocamentos Virtuais

Dois exemplos são apresentados neste subseção. No primeiro se tem uma estrutura hipostática e se deseja obter uma configuração que permita deixar a estrutura em equilíbrio. A segunda usa deslocamentos virtuais para obter forças reais (reações e esforços) da estrutura.

Exemplo 1: O primeiro exemplo utilizado é mostrado no livro do Meriam e Kraige [12]. A Figura 7 apresenta os dados do problema. Este problema tem como objetivo determinar o ângulo θ que mantenha o sistema em equilíbrio. Ele será resolvido de duas formas diferentes. A primeira usa relações geométricas para em seguida obter variações delas e usá-las no PTV. A segunda forma, impõe uma configuração virtual de deslocamento que satisfaz a hipótese de pequenos deslocamentos. A combinação dos deslocamentos desta configuração com as forças reais são usadas no PTV.

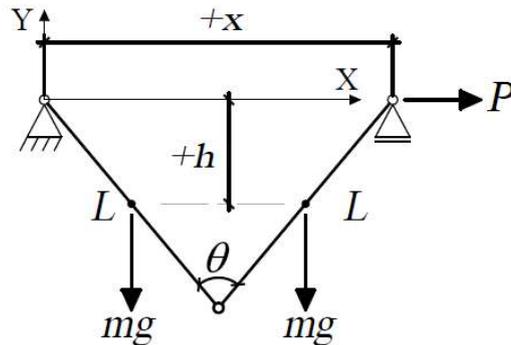


Figura 7 – Sistema composto por duas barras rígidas de massa m com ângulo θ entre elas formando uma estrutura hipostática carregada por uma força horizontal P com destaque para as forças mg (Adaptada de Meriam e Kraige [12]).

- Forma 1:

Ferramenta: aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais a partir de relações geométricas.

Neste problema, por se tratar de corpos rígidos, tem-se que:

$$\bar{U}_{ela} = 0. \quad (65)$$

Assim, é necessário obter deslocamentos virtuais correspondentes a cada uma das forças externas. Sejam \bar{x} e \bar{h} os deslocamentos virtuais correspondentes as forças P e peso (mg). Logo, o trabalho virtual realizado por essas forças é expresso por:

$$\bar{W}_{ext} = P \cdot \bar{x} + 2mg \cdot \bar{h}. \quad (66)$$

Aplicando o PTV, tem-se que:

$$\bar{W}_{ext} = 0 \therefore P \cdot \bar{x} + 2mg \cdot \bar{h} = 0. \quad (67)$$

Faz-se necessário expressar \bar{x} e \bar{h} em função de variável θ . Para isso, toma-se algumas relações trigonométricas conforme mostra a equação (68):



$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= L \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \therefore x = 2L \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ e} \\ 2h &= L \cdot \operatorname{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \therefore h = \frac{L}{2} \cdot \operatorname{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (68)$$

A partir das relações vistas na equação (68) é possível se obter os deslocamentos virtuais utilizando diferenciais. Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} dx &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta \theta} \right) d\theta \therefore \bar{x} = \left\{ L \operatorname{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \bar{\theta}, \\ \text{e} \\ dh &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta h}{\Delta \theta} \right) d\theta \therefore \bar{h} = - \left\{ \frac{L}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \bar{\theta}, \end{aligned} \quad (69)$$

onde $\bar{x} = dx$, $\bar{h} = dh$ e $\bar{\theta} = d\theta$. O sinal de menos na relação entre \bar{h} e $\bar{\theta}$ se deve ao fato de que ao se aumentar \bar{h} se diminui $\bar{\theta}$. Substituindo as relações da equação (69) na equação (67) resulta que:

$$\begin{aligned} P \left[L \operatorname{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \bar{\theta} \right] + 2mg \left[- \frac{L}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] &= 0 \therefore \\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{2P}{mg} \therefore \theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{2P}{mg} \right). \end{aligned} \quad (70)$$

O valor de θ mostrado na equação é a resposta do problema.

- Forma 2:

Ferramenta: aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais a partir de uma configuração virtual de deslocamento.

Nesta forma de resolver o problema se cria um sistema virtual de deslocamento em que esses deslocamentos obedecem as restrições cinemáticas do corpo rígido, fazendo com que as forças reais exerçam trabalho ao longo dessas grandezas virtuais. Como resultado, obtém-se o ângulo virtual necessário para deixar o sistema real de forças em equilíbrio. A Figura 8 compacta essas informações.

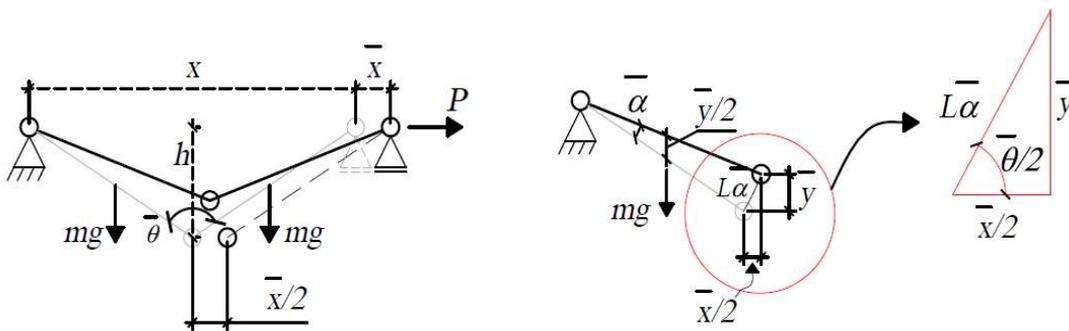


Figura 8 – Detalhamento lado esquerdo, considerando simetria vertical do problema e detalhamento posterior para determinar relações entre as grandezas virtuais.

Conforme destacado pela Figura 8, a equação (71) destaca as seguintes relações entre as grandezas geométricas virtuais:

$$\bar{y} = L \cdot \bar{\alpha} \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ e } \bar{x} = 2 \cdot L \cdot \bar{\alpha} \cdot \text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (71)$$

Novamente, como se está trabalhando com corpos rígidos (duas barras rígidas), tem-se que:

$$\bar{U}_{ela} = 0. \quad (72)$$



Já a força P e o peso mg das duas barras realizam trabalho virtual sob os deslocamentos virtuais \bar{x} e \bar{y} , respectivamente. A equação (73) apresenta este trabalho virtual:

$$\bar{W}_{ext} = (+P)(+\bar{x}) + 2(-mg)\left(+\frac{\bar{y}}{2}\right). \quad (73)$$

Note o uso da convenção de sinais de forças, pois P é positivo já que tem seu sentido para direita e mg é negativo pois tem sentido para baixo. Ao se substituir a equação (72) e a equação (73) na equação (26) do PTV tem-se:

$$\bar{W}_{ext} = \bar{U}_{ela} \therefore (+P)(+\bar{x}) + (-2mg)\left(+\frac{\bar{y}}{2}\right) = 0. \quad (74)$$

Substituindo os resultados da equação (71) na equação (74) obtém-se:

$$(P)\left(2 \cdot L \cdot \bar{\alpha} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + (-2mg)\left(\frac{L \cdot \bar{\alpha} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}\right) = 0 \therefore \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2P}{mg} \therefore \quad (75)$$

$$\frac{\theta}{2} = \arctan\left(\frac{2P}{mg}\right) \therefore \theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{2P}{mg}\right).$$

O valor obtido pelas duas formas apresentadas neste trabalho foi exatamente o mesmo, conforme esperado.



Exemplo 2: O segundo exemplo é uma barra isostática submetida a uma carga concentrada P na sua extremidade livre (canto direito). A Figura 9 mostra os detalhes do problema.

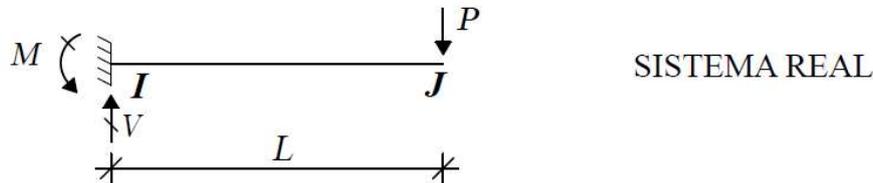


Figura 9 – Viga isostática (engastada livre) submetida a uma carga vertical P na extremidade livre, destacando as reações vertical e o torque no apoio.

Objetivo: a partir da utilização de três sistemas virtuais com deslocamentos virtuais, este exercício tem como objetivo obter forças reais.

Ferramenta: aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais a partir de uma configuração virtual de deslocamento.

A Figura 10 apresenta o problema real com o sistema virtual 1 em que o deslocamento virtual é uma rotação no apoio da esquerda.

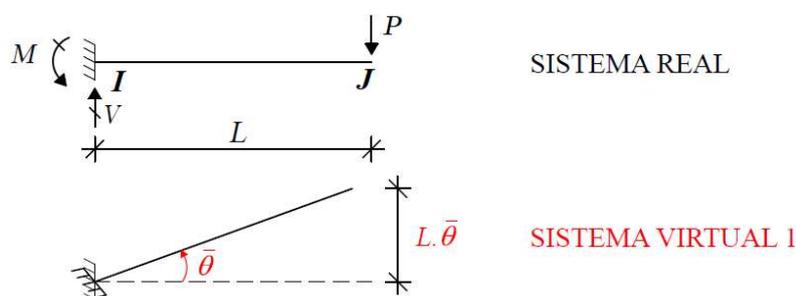


Figura 10 – Viga isostática (engastada livre) submetida a uma carga vertical P na extremidade livre, destacando as reações vertical e o torque no apoio e o sistema virtual onde há uma rotação virtual imposta no apoio.

Ao se combinar o sistema real com o sistema virtual 1, obtém-se o torque real que produz rotação nula no apoio da esquerda, ou seja, determina-se a reação de apoio no engaste. A equação (76) mostra os detalhes:



$$\underbrace{(0) \cdot (+V) + (+\bar{\theta}) \cdot (+M) + (+L \cdot \bar{\theta}) \cdot (-P)}_{\bar{W}_{ext}} = \underbrace{0}_{\bar{U}_{ela}}, \quad (76)$$

onde no lado esquerdo da equação se tem o trabalho virtual realizado pelas forças reais (\bar{W}_{ext}) e no lado esquerdo aparece a energia de deformação elástica virtual (\bar{U}_{ela}). Notar novamente que o sentido das forças reais está de acordo com a convenção de sinais. Logo:

$$(\bar{\theta}) \cdot (M - PL) = 0, \quad (77)$$

sendo $\bar{\theta} \neq 0$, tem-se que:

$$M = PL. \quad (78)$$

A Figura 11 apresenta o problema real com o sistema virtual 2 em que o deslocamento virtual é um deslocamento vertical relativo em uma seção S localizada a uma distância x do apoio (engaste). Observe o destaque dos esforços na seção S .

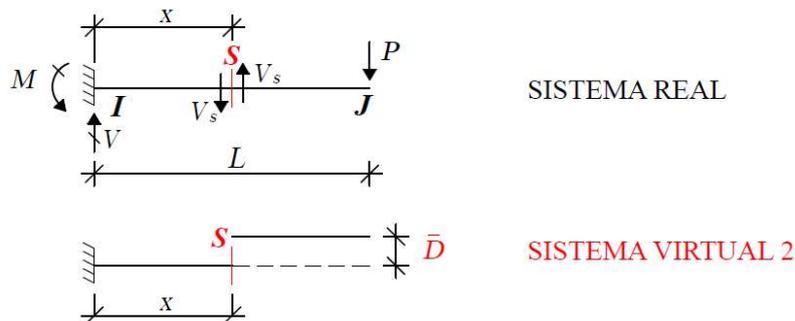


Figura 11 – Viga isostática (engastada livre) submetida a uma carga vertical P na extremidade livre, destacando as reações vertical e o torque no apoio e o esforço cortante V_S que ocorre numa seção S localizada a uma distância x do apoio.

Ao se combinar o sistema real com o sistema virtual 2, obtém-se o esforço cortante na seção S localizada a uma distância x do apoio da esquerda. A equação (79) mostra os detalhes:

$$\underbrace{(0) \cdot (+V) + (0) \cdot (+M) + (+\bar{D}) \cdot (-P) + (0) \cdot (-V_S) + (+\bar{D}) \cdot (+V_S)}_{\bar{W}_{ext}} = \underbrace{0}_{\bar{U}_{ela}}. \quad (79)$$



Note a convenção de sinais, V_s positivo e negativo e P negativo. V_s positivo indica o par do esforço que aponta para cima, enquanto que V_s negativo aponta para baixo. Simplificando, tem-se:

$$\bar{D} \cdot (V_s - P) = 0, \quad (80)$$

sendo $\bar{D} \neq 0$, tem-se que:

$$V_s = P. \quad (81)$$

A Figura 12 apresenta o problema real com o sistema virtual 3. Neste caso, o deslocamento virtual é uma rotação relativa em uma seção S localizada a uma distância x do apoio. Observe o destaque dos esforços na seção S .

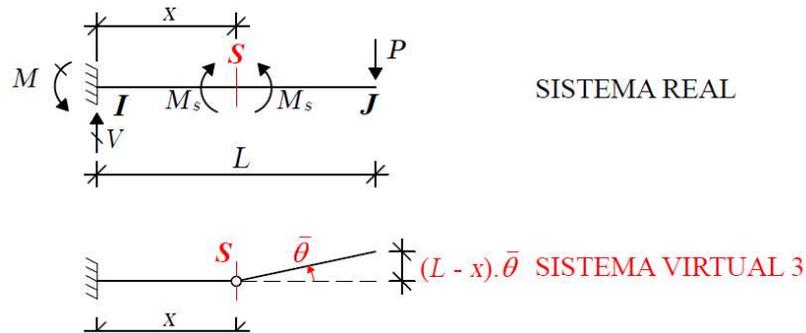


Figura 12 – Viga isostática (engastada livre) submetida a uma carga vertical P na extremidade livre, destacando as reações vertical e de torque no apoio e o momento fletor M_s que ocorre numa seção S localizada a uma distância x do apoio.

Nesta última combinação, ao se combinar o sistema real com o sistema virtual 3 se obtém o momento fletor M_s na seção S localizada a uma distância x do apoio da esquerda. A equação (82) mostra os detalhes:

$$\underbrace{(0) \cdot (+V) + (0) \cdot (+M) + [(L-x)\bar{\theta}] \cdot (-P) + (0) \cdot (-M_s)}_{\bar{W}_{ext}} + \underbrace{(0) \cdot (-M_s)}_{\bar{U}_{ela}} = \underbrace{0}_{\bar{U}_{ela}}. \quad (82)$$

Novamente, é importante destacar a convenção, pois M_s positivo é o par do momento fletor na seção S que gira no sentido anti-horário e M_s negativo a parte do par que gira no sentido horário. Simplificando, tem-se:



$$\bar{\theta} \cdot (M_S - P(L - x)) = 0, \quad (83)$$

sendo $\bar{\theta} \neq 0$, tem-se que:

$$M_S = P(L - x). \quad (84)$$



3.2.2. Forças Virtuais

Apenas um exemplo é resolvido nesta subseção. Contudo, dois sistemas de forças virtuais serão usados. Deseja-se mostrar com este exemplo a grande extensão do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), pois neste caso se têm forças virtuais, ver a equação (55). De acordo com o pesquisado na literatura básica relacionada ao ensino de física, este é um assunto pouco explorado. Este ponto é considerado com uma grande contribuição deste trabalho.

O exemplo é uma barra isostática submetida a variação uniforme ΔT e gradiente g_T de temperatura com apoios elásticos. Além disso a barra está submetida ao peso próprio q distribuído ao longo do comprimento L . Como hipótese simplificadora, considera-se a barra rígida, ou seja, não deforma axialmente nem flete. Matematicamente, isso significa fazer o módulo de rigidez axial $E.A$ (EA) e rigidez à flexão $E.I$ (EI) tenderem a infinito. A Figura 13 mostra os detalhes do problema juntamente com o diagrama de momento fletor (para mais detalhes na obtenção do diagrama da momento fletor, consultar qualquer livro de análise de estruturas com a carga distribuída constante).

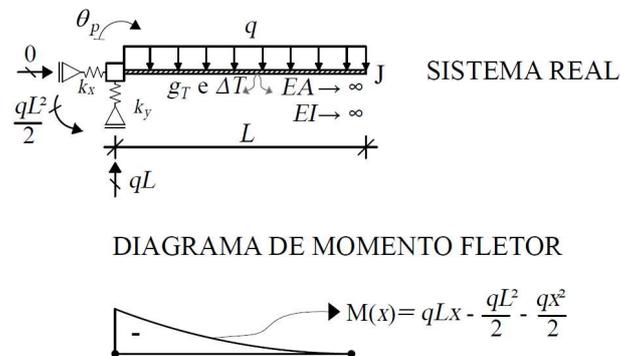


Figura 13 – Viga rígida engastada livre submetida à variação uniforme ΔT e gradiente de temperatura g_T , apoios elásticos com rigidezes k_x e k_y , carga distribuída q deslocamento prescrito θ_p .



Objetivo: obter a rotação θ (inclinação) da extremidade livre (nó final J) e mostrar que não há necessidade de qualquer referência as condições de contorno em deslocamento no sistema virtual.

Ferramenta: usar o Princípio dos Trabalhos Virtuais a partir de um sistema de forças virtuais.

Neste exemplo são usados dois sistemas virtuais. No primeiro, não há qualquer referência aos apoios, logo só há forças virtuais. No segundo, aplica-se o momento \bar{M} no nó final J e se determina as reações de apoio usando as equações de equilíbrio da estática. A Figura 14 apresenta os dois sistemas virtuais. Note que em ambos os casos o diagrama de esforço normal é zero. Logo, a variação uniforme de temperatura não aparecerá na energia de deformação elástica virtual.

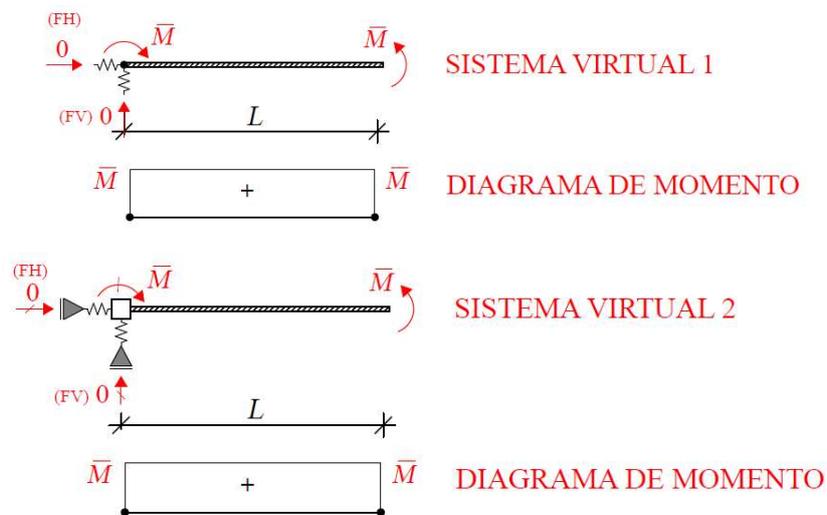


Figura 14 – Sistemas virtuais que medem rotação θ na extremidade livre (nó J) do problema real.

Para facilitar a obtenção da energia de deformação elástica que aparece na equação do PTV, as suas parcelas serão computadas separadamente. Isso é feito para os dois sistemas virtuais. Considere primeiro o trabalho virtual realizado pelas cargas externas.

- sistema virtual 1: o trabalho virtual realizado pelas cargas externas é dado por:



$$\bar{W}_{ext}^C = \underbrace{\overbrace{(\overline{FH})(0) + (\overline{FV})(0)}^{Desl.Presc.} + \underbrace{(-\bar{M})(-\theta_p)}_{\text{Forças Virtuais}}}_{\text{Desl.Presc.}} + \underbrace{(+\bar{M})(\theta)}_{\text{Forças Virtuais}} = \bar{M}(\theta_p + \theta), \quad (85)$$

onde FH e FV são as forças virtuais horizontal e vertical no nó inicial I . Essas forças multiplicam deslocamentos reais nulos porque no sistema real não há deslocamento nas pontas das molas k_x e k_y . Abaixo se considera a energia virtual de deformação elástica das molas.

$$\bar{U}_{ela}^{C,Molas} = \underbrace{(+0)}_{\substack{\text{Força} \\ \text{Virtual} \\ FH}} \cdot \underbrace{\left(\frac{0}{k_x}\right)}_{\text{Desl.Real}} + \underbrace{(+0)}_{\substack{\text{Força} \\ \text{Virtual} \\ FV}} \cdot \underbrace{\left(\frac{qL}{k_y}\right)}_{\text{Desl.Real}} = 0. \quad (86)$$

Note na equação anterior o destaque de onde se está tirando cada informação. Uma informação é força do sistema virtual e a outra é deslocamento do sistema real. Em seguida se considera a deformação elástica da viga devido à ação da variação de temperatura, considerando α e g_T constantes ao longo do comprimento da barra, tem-se:

$$\bar{U}_{ela}^{C,Temp} = \alpha \cdot g_T \int_0^L \underbrace{\bar{M}}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{Fletor} \\ \text{Virtual}}} \cdot dx = \bar{M}(\alpha \cdot g_T \cdot L). \quad (87)$$

Por último, calcula-se a energia virtual de deformação elástica devido à ação dos esforços, considerando EI muito grande ($EI \rightarrow \infty$), tem-se que:

$$\bar{U}_{ela}^{C,Esforços} = \lim_{E \cdot I \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{E \cdot I} \right) \int_0^L \underbrace{\bar{M}}_{\substack{\text{Mom.} \\ \text{Virtual}}} \cdot \underbrace{\left(q \cdot L \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{2} \right)}_{\text{Momento Fletor Real}} dx \right\} = 0. \quad (88)$$

Juntando todos os efeitos da energia virtual de deformação elástica complementar, ou seja $\bar{U}_{ela}^C = \bar{U}_{ela}^{C,Molas} + \bar{U}_{ela}^{C,Temp} + \bar{U}_{ela}^{C,Esforços}$ e colocando \bar{M} em evidência, resulta que:

$$\bar{U}_{ela}^C = 0 + \bar{M}(\alpha \cdot g_T \cdot L) + 0 = \bar{M}(\alpha \cdot g_T \cdot L). \quad (89)$$

Ao igualar o resultado da equação (85) com a equação (89) e considerando $\bar{M} \neq 0$, obtém-se:

$$\theta_p + \theta = \alpha \cdot g_T \cdot L. \quad (90)$$

Isolando θ , tem-se que:

$$\theta = \alpha \cdot g_T \cdot L - \theta_p. \quad (91)$$



Desse resultado é possível observar que não importa o carregamento externo que se considere, ele não influenciará a rotação em qualquer seção da viga. Apenas os deslocamentos prescritos e o efeito do gradiente de temperatura aparecerão nas expressões finais:

- sistema virtual 2: o trabalho virtual realizado pelas cargas externas é dado por:

$$\bar{W}_{ext}^C = \underbrace{\overbrace{(\overline{0})(0) + (\overline{0})(0)}^{FH} + \underbrace{(-\bar{M})(-\theta_p)}_{\text{Desl.Presc.}}}_{\text{Desl.Presc.}} + \underbrace{(+\bar{M})(\theta)}_{\text{Forças Virtuais.}} = \bar{M}(\theta_p + \theta). \quad (92)$$

Conforme o caso anterior, as reações FH e FV multiplicam deslocamentos reais nulos, pois não há deslocamentos nas pontas das molas no sistema real. Conseqüentemente, o trabalho virtual realizado pelas cargas externas será igual ao obtido para sistema virtual 1. De forma similar, a energia de deformação elástica também será igual ao que foi obtido pelo sistema virtual 1. Portanto, a rotação θ será a mesma para os dois sistemas.

Da comparação dos dois sistemas virtuais, conclui-se que no sistema virtual com presença de forças virtuais, não há a necessidade de qualquer referência aos apoios do sistema real. A diferença obtida entre os dois sistemas virtuais usados neste exemplo foi apenas teórica. No primeiro sistema virtual todas as forças são ações externas autoequilibradas. Já no segundo sistema, tem-se uma força virtual aplicada no nó final J para em seguida se calcular as reações de apoio.



3.3. Sólidos deformáveis

Dois exemplos são resolvidos nesta subseção. O primeiro é similar ao da subseção 3.2., diferenciando-se pelo fato de que agora a viga não é rígida à flexão. O segundo exemplo determina o deslocamento de um sistema massa mola ao longo do comprimento da mola. Novamente, aplica-se o PTV na versão complementar em que as grandezas virtuais são forças.

Exemplo 1: O exemplo é uma barra isostática submetida a variação uniforme ΔT e gradiente de temperatura g_T com apoios elásticos. Além disso a barra está submetida ao peso próprio e cargas concentradas. A Figura 15 mostra os detalhes do problema com efeitos separados das cargas no diagrama de momento fletor (para mais detalhes na obtenção do diagrama da momento fletor, consultar qualquer livro de análise de estruturas com a carga distribuída constante).

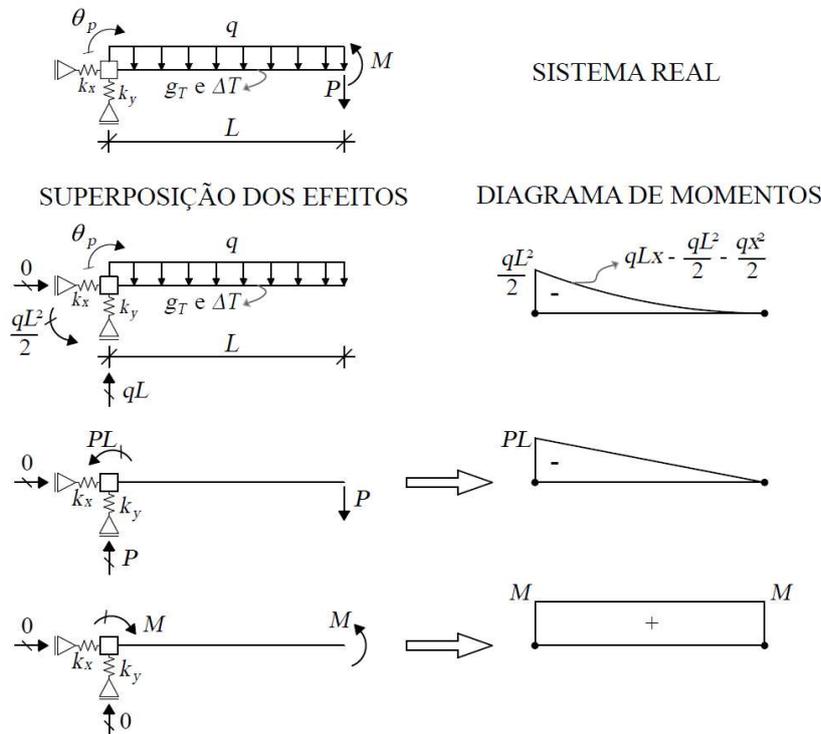


Figura 15 – Viga engastada livre submetida à variação uniforme ΔT e gradiente de temperatura g_T com apoios elásticos, deslocamento prescrito e cargas externas.



Objetivo: obter o deslocamento vertical D_V do nó final J e mostrar como considerar o efeito da deformação devido a flexão da viga na energia de deformação elástica complementar (\bar{U}_{ela}^C) .

Ferramenta: aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais na versão força virtual.

Para calcular o deslocamento real D_V necessita-se criar um sistema virtual adequado. A Figura 16 mostra o sistema virtual com o respectivo diagrama de momento fletor. Note que se aplica uma força unitária na extremidade livre (nó final J).

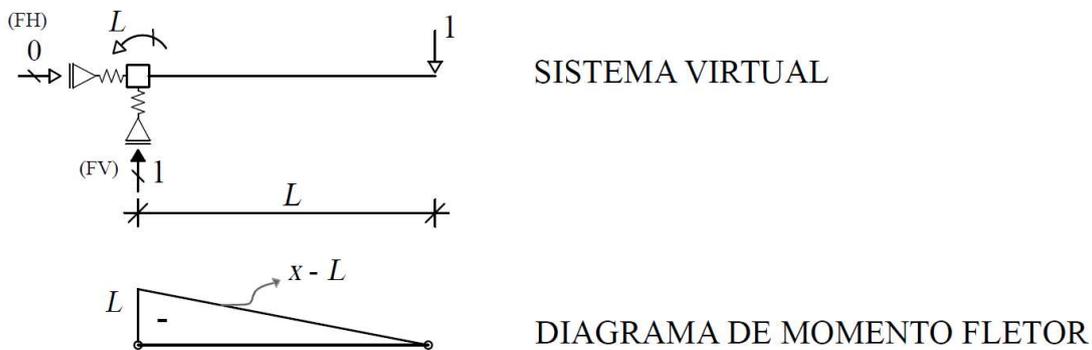


Figura 16 – Sistema virtual utilizado para calcular o deslocado vertical na extremidade livre da barra do problema real (nó J) com o seu respectivo diagrama de momento fletor.

Novamente as parcelas da energia de deformação elástica são computadas separadamente. A equação (93) apresenta o trabalho virtual realizado pelas cargas virtuais.

$$\bar{W}_{ext}^C = \underbrace{(+L)(-\theta_p)}_{\text{Desl.Presc.}} + \underbrace{\left(\overbrace{(0)(0)}^{FH} + \overbrace{(+1)(0)}^{FV} + \overbrace{(-1)(D_V)} \right)}_{\text{Forças Virtuais}} = -(L\theta_p + D_V), \quad (93)$$

A parcela da energia virtual de deformação elástica das molas é dada por:

$$\bar{U}_{ela}^{C,Molas} = \underbrace{(+1)}_{\text{Força Virtual}} \cdot \underbrace{\left(\frac{q \cdot L + P}{k_y} \right)}_{\text{Desl.Real}} = \left(\frac{q \cdot L + P}{k_y} \right). \quad (94)$$

Considerando α e g_T constantes ao longo do comprimento da barra, o seu efeito na energia de deformação elástica virtual é dado por:



$$\bar{U}_{ela}^{C,Temp} = \alpha \cdot g_T \int_0^L \underbrace{(x-L)}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{Fleitor} \\ \text{Virtual}}} dx = \alpha \cdot g_T \left[\frac{x^2}{2} - x \cdot L \right]_0^L = \left(\frac{-\alpha \cdot g_T \cdot L^2}{2} \right). \quad (95)$$

Por último, computa-se a energia virtual de deformação elástica devido à ação dos esforços.

$$\bar{U}_{ela}^{C,Esforços} = \left(\frac{1}{E \cdot I} \right) \left\{ \underbrace{\int_0^L \underbrace{(x-L)}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{Fleitor} \\ \text{Virtual}}} \cdot \underbrace{\left(q \cdot L \cdot x - \frac{q \cdot L^2}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2} \right)}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{Fleitor} \\ \text{Real}}} dx}_{\text{Efeito de } q} + \underbrace{\int_0^L \underbrace{(x-L)}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{Fleitor} \\ \text{Virtual}}} \cdot \underbrace{P(x-L)}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{Fleitor} \\ \text{Real}}} dx}_{\text{Efeito de } P} + \underbrace{\int_0^L \underbrace{(x-L)}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{Fleitor} \\ \text{Virtual}}} \cdot \underbrace{M}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{Fleitor} \\ \text{Real}}} dx}_{\text{Efeito de } M} \right\}. \quad (96)$$

Note a presença do símbolo (+) indicando a aplicação do Princípio da Superposição dos Efeitos (PSE). Todas as parcelas da energia de deformação foram consideradas neste exemplo. Simplificando a equação (96), tem-se que:

$$\bar{U}_{ela}^{C,Esforços} = \frac{1}{E \cdot I} \left[\frac{q \cdot L^4}{8} + \frac{P \cdot L^3}{3} - \frac{M \cdot L^2}{2} \right]. \quad (97)$$

Juntando todos os efeitos da energia virtual de deformação elástica, ou seja $\bar{U}_{ela}^C = \bar{U}_{ela}^{C,Molas} + \bar{U}_{ela}^{C,Temp} + \bar{U}_{ela}^{C,Esforços}$, resulta que:

$$\bar{U}_{ela}^C = \left(\frac{\bar{P}}{E \cdot I} \right) \left[\frac{P \cdot L^3}{3} + \frac{q \cdot L^4}{8} - \frac{M \cdot L^2}{2} - \frac{\alpha \cdot g_T \cdot L^2}{2} + \frac{q \cdot L + P}{k_y} \right]. \quad (98)$$

Evocando o PTV, tem-se que:

$$-L \cdot \theta_p - D_V = \frac{P \cdot L^3}{3E \cdot I} + \frac{q \cdot L^4}{8E \cdot I} - \frac{M \cdot L^2}{2E \cdot I} - \frac{\alpha \cdot g_T \cdot L^2}{2} + \frac{q \cdot L + P}{k_y}. \quad (99)$$

Isolando D_V , obtém-se:



$$D_V = \frac{M \cdot L^2}{2E \cdot I} - \frac{q \cdot L^4}{8E \cdot I} - \frac{P \cdot L^3}{3E \cdot I} + \frac{\alpha \cdot g_T \cdot L^2}{2} - \frac{q \cdot L + P}{k_y} - L \cdot \theta_p. \quad (100)$$

Exemplo 2: O exemplo é uma mola de massa m apoiada na sua extremidade superior com uma massa M na sua extremidade inferior submetido ao efeito da gravidade g . Para usar o PTV neste problema, usou-se uma barra no lugar da mola, de tal forma que se substituiu a rigidez k da mola pela rigidez $(E.A)/L$ da barra. Além disso, usou-se o FTOOL [21] que é uma ferramenta computacional bastante conhecida nos cursos de graduação de engenharia civil. Neste exemplo, para facilitar a interpretação do resultado final se adota como força positiva a força que aponta no sentido positivo do eixo x .

A Figura 17 apresenta detalhes do problema destacando a mola, o modelo com a barra com material de módulo de elasticidade E e área A constante da seção transversal. Além disso mostram-se as reações de apoio.

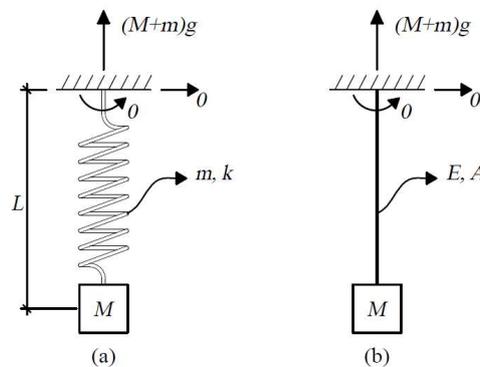


Figura 17 – Sistema massa mola apoiada na sua extremidade superior com uma massa M na extremidade inferior submetido a gravidade g : a) mola de comprimento L , com massa m e rigidez k e b) barra de comprimento L , com massa m e rigidez axial $k = (E.A)/L$.

Objetivo: obter o deslocamento vertical D_V ao longo da mola considerando a massa da mola de rigidez k .



Ferramenta: aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais na versão força virtual com associação da mola com uma barra de rigidez axial ($E.A/L$).

O resultado obtido pelo PTV é confirmado a partir do uso do programa de análise estrutural FTOOL [21] para verificar os resultados.

A Figura 18 mostra os detalhes do problema.

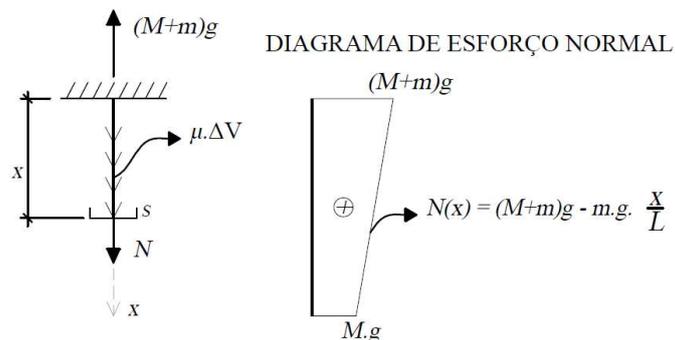


Figura 18 – Relação entre os sistemas *global* e *local* a partir da definição da seção *S* distando *x* da extremidade superior da barra com destaque ao diagrama de esforço normal (D.N.) e sua expressão $N(x)$.

O lado esquerdo da Figura 18 apresenta a relação de forças entre o sistema *global* ($(M + m).g$ e $\mu \Delta V$) e *local* (N) a partir definição da seção *S* distando *x* da origem do sistema de coordenadas cartesiano. A força $\mu \Delta V$ representa a força distribuída ao longo do comprimento *x* da barra, onde μ é o peso específico e $\Delta V = A \cdot x$, em que *A* é a área constante da seção transversal ao longo da barra. Assim, é possível reescrever essa força distribuída por:

$$\mu \cdot \Delta V = \left(\frac{m \cdot g}{V} \right) (A \cdot x) = \left(\frac{m \cdot g}{A \cdot L} \right) (A \cdot x) = \frac{m \cdot g}{L} x. \quad (101)$$

Assim, impondo equilíbrio entre os sistemas *global* e *local*, tem-se:



$$\sum Fx_L = 0 \therefore (M+m)g - N - \frac{m \cdot g}{L} x = 0 \therefore \tag{102}$$

$$N(x) = M \cdot g + \frac{m \cdot g}{L} (L - x).$$

A partir da equação (102) é possível verificar as condições mostradas no diagrama de esforço normal (D.N.). A equação (103) mostra essa verificação.

$$N(x=0) = M \cdot g + \frac{m \cdot g}{L} (L - 0) \therefore N(x=0) = (M+m)g, \tag{103}$$

$$N(x=L) = M \cdot g + \frac{m \cdot g}{L} (L - L) \therefore N(x=L) = M \cdot g.$$

Como se deseja obter os deslocamentos reais ao longo do comprimento da mola, cria-se um sistema virtual de forças. A Figura 19 destaca o sistema virtual de forças com diagrama de esforço normal correspondente.

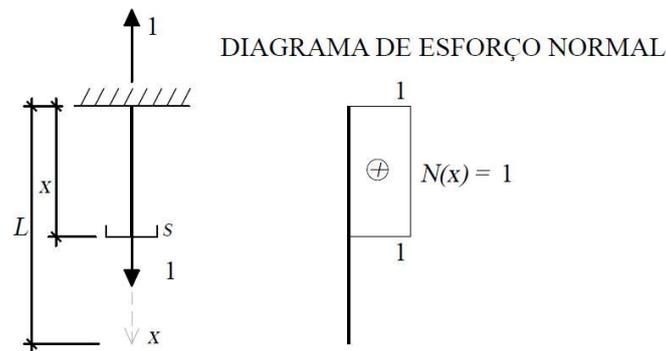


Figura 19 – Sistema Virtual com forças unitárias em equilíbrio, destacando a seção S distando x da extremidade superior da barra e o diagrama de esforço normal (D.N.) com sua expressão $\bar{N}(x)$ (Note que neste caso não se considera o peso específico).

De posse do problema (sistema real) e o sistema virtual, pode-se usar o PTV. A seguir se mostra o trabalho virtual:

$$\bar{W}_{ext}^C = \underbrace{(-1)}_{\text{Reação Virtual}} \cdot \underbrace{(0)}_{\text{Deslocamento Real no apoio}} + \underbrace{(+1)}_{\text{Força Virtual}} \cdot \underbrace{(D_V(x))}_{\text{Deslocamento Real Desconhecido}} \tag{104}$$



Note na equação acima a mudança de convenção em relação aos exemplos anteriores. Agora a força para cima é negativa e a força para baixo é positiva. Tudo isso ocorre devido a orientação do eixo x para baixo. A energia de deformação elástica virtual é obtida por (ver a equação (55)):

$$\bar{U}_{ela}^C = \frac{1}{E \cdot A} \int_0^x \underbrace{(+1)}_{\bar{N}(\tilde{x})} \cdot \underbrace{\left[(M+m)g - mg \frac{\tilde{x}}{L} \right]}_{N(\tilde{x})} d\tilde{x}. \quad (105)$$

Aplicando o PTV, tem-se que:

$$D_V(x) = g \cdot \frac{x}{E \cdot A} \left(M + m - m \frac{x}{2L} \right) = \frac{g \cdot x}{k \cdot L} M + \frac{g \cdot x \cdot m}{2 \cdot k \cdot L^2} (2L - x), \quad (106)$$

onde $k = (E \cdot A)/L$. Pode-se verificar os valores de D_V nas extremidades conforme mostra a equação (107):

$$\begin{aligned} D_V(x=0) &= 0. \\ D_V(x=L) &= g \cdot \frac{L}{E \cdot A} \left(M + m - m \frac{L}{2L} \right) \therefore D_V(x=L) = \frac{1}{k} g \left(M + \frac{m}{2} \right). \end{aligned} \quad (107)$$

Importante destacar o termo $m/2$ no deslocamento final, pois apesar de ser conhecido a importância da massa m no deslocamento final, não é qualquer referência que apresenta esta solução.

Finalmente, apresenta-se a seguir a solução numérica deste problema a partir do uso do programa computacional FTOOL. Neste programa se usa o Método dos Elementos Finitos que é um método numérico muito usado entre os engenheiros. A Figura 20 apresenta uma imagem do modelo construído no programa com os dados utilizados para sua solução.

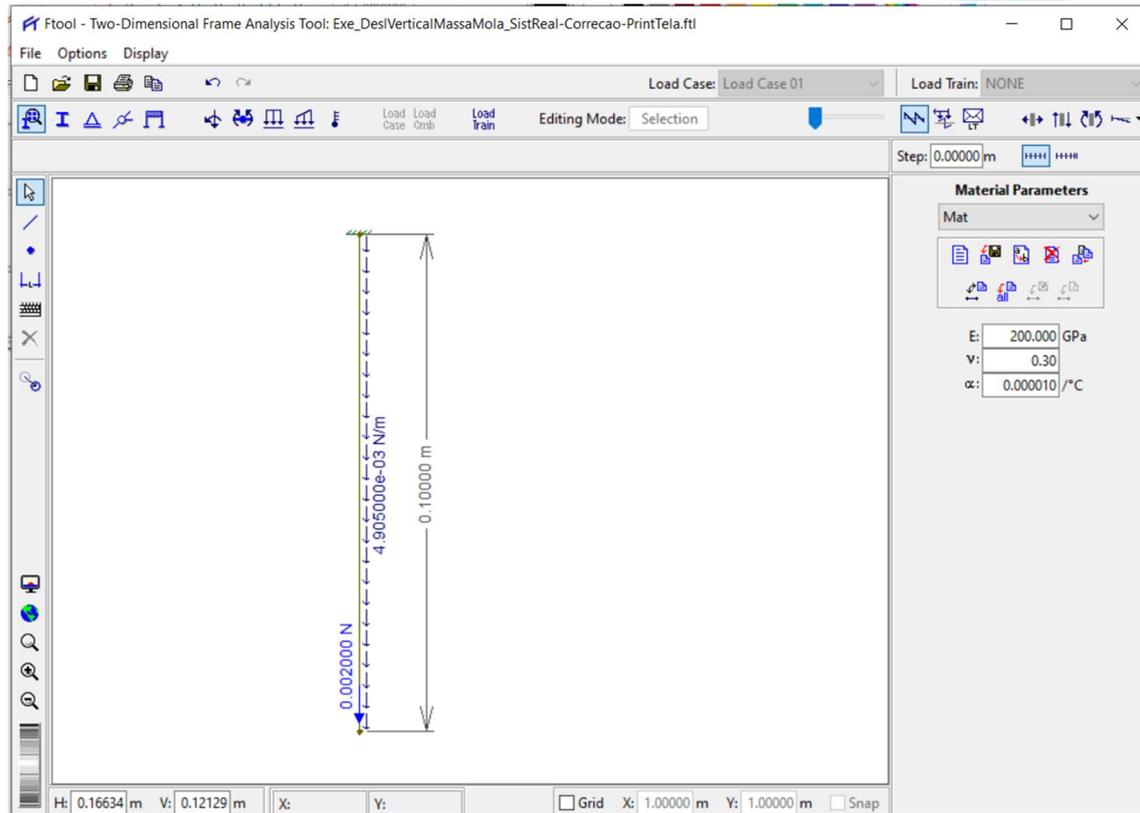


Figura 20. Interface do programa FTOOL com o modelo do sistema massa-mola apoiada na sua extremidade superior com uma massa $M = 0,240$ kg na extremidade inferior, uma barra de comprimento $L = 0,10$ m, com massa $m = 50 \cdot 10^{-3}$ kg e rigidez axial $k = E \cdot A / L = 0,13$ N/m, submetido a uma campo gravitacional $g = 9,81$ m/s², resultando em força distribuída $q = 4,90 \cdot 10^{-3}$ N/m e força concentrada $P = 2,00 \cdot 10^{-3}$ N na extremidade livre.

Ajustando a equação (106) para os dados do problema é possível escrever a solução analítica do problema, cuja expressão vale:

$$D_V(x) = (0,19x - 0,18x^2). \quad (108)$$

A Tabela 3 mostra os deslocamentos verticais obtidos numericamente e analiticamente ao longo do comprimento da barra calculadas a cada metro. A última coluna da tabela calcula o erro relativo tomando como referência o resultado analítico.



Tabela 3. Comparação dos resultados numéricos e analíticos dos deslocamentos verticais ao longo do comprimento da barra (mola) calculados a cada metro a partir da extremidade superior.

| Posição (m) | Numérico/FTOOL (m) | Analítico (m) | Erro Relativo (%) |
|-------------|--------------------|------------------|-------------------|
| 0,01 | $-1,86.10^{-3}$ | $-1,86.10^{-3}$ | 0,0 |
| 0,02 | $-3,69.10^{-3}$ | $-3,69.10^{-3}$ | 0,0 |
| 0,03 | $-5,49.10^{-3}$ | $-5,49.10^{-3}$ | 0,0 |
| 0,04 | $-7,24.10^{-3}$ | $-7,24.10^{-3}$ | 0,0 |
| 0,05 | $-8,96.10^{-3}$ | $-8,96.10^{-3}$ | 0,0 |
| 0,06 | $-10,64.10^{-3}$ | $-10,64.10^{-3}$ | 0,0 |
| 0,07 | $-12,29.10^{-3}$ | $-12,29.10^{-3}$ | 0,0 |
| 0,08 | $-13,89.10^{-3}$ | $-13,89.10^{-3}$ | 0,0 |
| 0,09 | $-15,46.10^{-3}$ | $-15,46.10^{-3}$ | 0,0 |
| 0,10 | $-17,00.10^{-3}$ | $-17,00.10^{-3}$ | 0,0 |

A partir da análise de Tabela 3, nota-se perfeita concordância dos resultados, mostrando toda eficiência da abordagem energética do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Importante destacar que o deslocamento aumenta à medida que a posição da barra se aproxima da extremidade livre.



4. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma revisão sobre o estudo do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e como ele é estudado nos cursos de graduação de bacharelado em física e nas engenharias. O PTV tem duas versões. Uma em que a grandeza virtual é o deslocamento e outra em que a grandeza virtual é a força. Em geral, sua aplicação é feita para o estudo de partículas, corpos rígidos e sólidos deformáveis. Na física, o PTV faz parte do conteúdo da disciplina Mecânica Clássica. Já nas engenharias, ele é visto na disciplina denominada de Resistência dos Materiais.

Com base numa pesquisa feita que elencou os principais cursos de bacharelado em física no Brasil, obtiveram-se as principais referências da disciplina de Mecânica Clássica e se constatou que as principais referências, quando tem alguma referência ao PTV fazem isso em relação a versão com deslocamentos virtuais e aplicados apenas a partículas e corpos rígidos.

A mesma pesquisa bibliográfica foi feita considerando os principais livros de Resistência dos Materiais e disciplinas correlatas. Verificou-se que a maioria dos livros apresentam o PTV nas versões força e deslocamento virtual. Já as aplicações são normalmente feitas em corpos rígidos e sólidos deformáveis. Ainda nas graduações em engenharia, o PTV é bastante usado para introduzir o aluno ao Método dos Elementos Finitos, um método numérico bastante comum nas engenharias para resolver problemas de Teoria da Elasticidade.

Após apresentar uma verificação do Princípio dos Trabalhos Virtuais e adicionar considerações que simulam de forma mais realistas modelos estruturais, este trabalho apresentou aplicações do PTV nas versões força e deslocamento virtual. Estes exemplos foram divididos em partículas, corpos rígidos e sólidos deformáveis.

Ao se usar o PTV na versão deslocamento virtual, obtiveram-se informações reais de forças. No exemplo em questão, determinaram-se a reação de apoio e os esforços do problema real. Já quando se usou a versão força virtual, criou-se um sistema virtual de



forças que não precisou fazer qualquer referência as restrições de deslocamento do problema real.

O último exemplo apresentado neste trabalho tratou de um sistema massa-mola em que se obteve os deslocamentos axiais ao longo da mola considerando a massa m da mola. O fator $m/2$ no deslocamento vertical da extremidade livre foi obtido a partir do PTV na versão complementar (forças virtuais). Estes deslocamentos analíticos foram comparados com os resultados obtidos pelo programa FTOOL, que é um programa computacional de análise de estruturas de livre acesso e que faz uso do Método dos Elementos Finitos.

REFERÊNCIAS

- [1] Cindra, J.L, Um esboço da história do conceito de trabalho virtual e suas aplicações. Revista Brasileira de Ensino de Física. 30 (2008). [HTTPS://DOI.ORG/10.1590/S1806-11172008005000010](https://doi.org/10.1590/S1806-11172008005000010).
- [2] Sommerfeld, A. Mechanics, Lectures on Theoretical Physics, Vol. 1, Universidade de Munique (1952).
- [3] Lanczos, C., The Variational Principles of Mechanics, 4ª edição, Universidade de Toronto (1970).
- [4] Lemos, N.A., Mecânica Analítica, 2ª edição, Livraria da Física (2013).
- [5] <https://ruf.folha.uol.com.br/2019/ranking-de-cursos/fisica/>. Acesso em: 17 maio. 2024.
- [6] Marion, B; Thornton, S.T., Dinâmica Clássica de Partículas, 5ª edição. Cengage Learning (2011).
- [7] Goldstein, H., Classical Mechanics, 2ª edição. Universidade de Columbia (2001).
- [8] Symon, K.R., Mechanics, 3ª edição. Campus (1982).
- [9] Taylor, J.R., Mecânica Clássica. Bookman (2013).
- [10] Arnold, V.I., Mathematical Methods of Classical Mechanics. 2ª edição. Springer-Verlag (1997).
- [11] Meriam, J.L.; Kraige, L.G., Mecânica. Estática, 4ª edição. (1999).
- [12] Timoshenko, S.P. Strength of Materials, Part 1: Elementary Theory and Problems. 3ª edição (2002).
- [13] Soriano, H.L., Análise de Estruturas: Formulações Clássicas. Livraria da Física (2016).
- [14] Den Hartog, J.P., Strength of Materials, edição de reimpressão (1977).
- [15] Weaver Jr, W.; Gear, J.M., Matrix Analysis of Framed Structures, 2ª edição, Macmillian (1980).
- [16] Tauchert, T.R., Energy Principles in Structural Mechanics, Indo American Books (2007).
- [17] McGuire, W.; Gallagher, R.H.; Ziemian, R.D., Matrix Structural Analysis, 2ª edição. John Wiley & Sons (2000).



- [18] Vieira Jr, L.C.M., Princípios dos Trabalhos Virtuais, Cinemática e Aplicações, Unicamp (2021).
- [19] Boresi, A.P; Schmidt, R.J., Advanced Mechanics of Materials, 6ª edição Wiley (2002).
- [20] Langhaar, H.L., Energy Methods in Applied Mechanics, Dover (2016).
- [21] <https://ftool.com.br/Ftool/>. Acesso em: 17 maio 2024.
- [22] Mason, J.; Souza, J.M., Métodos de Energia com aplicações a problemas elásticos, Interciência Ltda (1976).
- [23] Beer, F.P.; Johnston Junior, E.R, Resistência dos Materiais, Pearson 3ª edição (1995).



APÊNDICE

O apêndice deste trabalho é dividido em três seções. Cada uma apresenta um conceito que visa melhorar a simulação do modelo estrutural.

A. Variação de temperatura

A fórmula da expansão linear, obtível de qualquer livro de física básica, de uma barra metálica de comprimento L é expressa por:

$$\Delta L = L \cdot \alpha \cdot \Delta T, \quad (\text{A.1})$$

em que α é o coeficiente de dilatação térmica do material, ΔT é a variação de temperatura e ΔL é a variação de comprimento da barra. Se a variação de temperatura for negativa ela encurta. Caso contrário, alonga.

Na equação acima, assume-se que o comprimento é muito maior que a seção transversal e que esta variação de temperatura é constante ao longo de todo comprimento de uma face. Em estruturas reticuladas planares, adota-se como caso mais geral a situação em que há variação de temperatura constante ΔT^i na parte inferior e ΔT^s na parte superior do elemento reticulado plano, sendo $\Delta T^i \neq \Delta T^s$ como caso geral. A Figura A.1 apresenta de forma ilustrativa essa situação, destacando o sistema de eixos coordenados passando pelo centro geométrico (CG) da área da seção transversal que se considera constante ao longo do comprimento da barra.

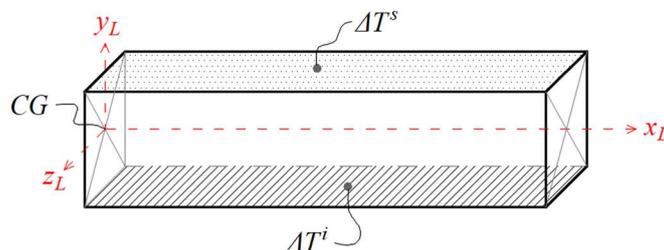


Figura A.1 – Elemento reticulado plano sob ação de temperatura diferentes nos seus bordos superior e inferior.



Considere um elemento infinitesimal de comprimento dx e que ΔT^i é maior que ΔT^s . Assim, os efeitos dessas variações neste elemento são de alongá-lo (encurtá-lo) e curvá-lo com curvatura positiva (negativa). A Figura A.2 mostra uma vista lateral de um elemento infinitesimal sob este efeito térmico. É importante destacar que se considera que a linha neutra, que passa no centro geométrico (CG) da seção transversal (S), está localizada na metade da altura da seção transversal. Isso ocorre pelo fato de se estar adotando uma seção retangular. Caso fosse usada outra seção transversal seria necessário determinar a localização do centro de massa da seção. Isso é normalmente feito em disciplinas como Cálculo 2, Física 1, Mecânica Geral e Resistência dos Materiais.

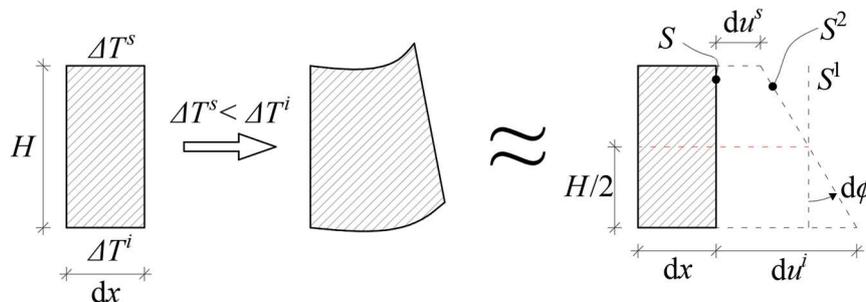


Figura A.2 – Efeito da variação de temperatura em um elemento reticulado plano de comprimento infinitesimal dx sob ação de temperatura diferentes nos seus bordos superior e inferior, destacando-se a seção S nas posições S^1 e S^2 .

No lado esquerdo da figura está um elemento reticulado plano infinitesimal. Após ser submetido à variações de temperatura diferentes nos seus bordos, ele deforma conforme mostra a figura intermediária. Contudo, devido à hipótese de pequenos deslocamentos, o Princípio da Superposição dos Efeitos (PSE) pode ser utilizado para separar os efeitos de alongamento e flexão. Os dois efeitos podem ser acompanhados separadamente (devido ao PSE) pela análise da seção S . O efeito de alongamento faz com que a seção S termine na posição S^1 . A flexão é medida pelo ângulo $d\phi$ que faz com que seção S^1 vire a seção S^2 .

Matematicamente, o alongamento médio (du^m) do elemento infinitesimal dx é medido por:



$$du^m = dx \cdot \alpha \cdot \Delta T \text{ onde } \Delta T = \frac{\Delta T^i + \Delta T^s}{2}, \quad (\text{A.2})$$

em que ΔT é denominada de variação uniforme de temperatura.

A flexão é medida pela variação do ângulo $d\varphi$. Portanto, usando a tangente do ângulo, tem-se que:

$$\tan(d\varphi) = \frac{du^i - du^m}{H/2}. \quad (\text{A.3})$$

Como se adota neste trabalho a hipótese de pequenos deslocamentos, vale que: $\tan(d\varphi) \approx d\varphi$. Substituindo essa simplificação nas expressões dos alongamentos du^i e du^m , resulta que:

$$d\varphi = \frac{2}{H} \left[\underbrace{\alpha \cdot \Delta T^i \cdot dx}_{du^i} - \underbrace{\alpha \cdot \left(\frac{\Delta T^i + \Delta T^s}{2} \right) \cdot dx}_{du^m} \right] = \frac{2\alpha}{H} \left[\frac{2\Delta T^i}{2} - \frac{\Delta T^i}{2} - \frac{\Delta T^s}{2} \right] dx. \quad (\text{A.4})$$

Simplificando, obtém-se:

$$d\varphi = \alpha \cdot g_T \cdot dx, \text{ onde } g_T = \left(\frac{\Delta T^i - \Delta T^s}{H} \right), \quad (\text{A.5})$$

em que g_T é denominado de gradiente de temperatura. Dividindo a primeira das equações (A.5) por dx e usando o fato de se estar utilizando pequenos deslocamentos, ou seja, $d\varphi/dx = 1/\rho$, onde ρ é o raio de curvatura, tem-se:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\rho} \therefore \frac{1}{\rho} = \alpha \cdot g_T, \text{ com o } \varepsilon_{xx} = \frac{y}{\rho}, \text{ resulta que } \varepsilon_{xx}^{g_T} = y \cdot \alpha \cdot g_T. \quad (\text{A.6})$$

Assim, conforme conhecido na Resistência dos Materiais:

$$du = \varepsilon_{xx} \cdot dx, \text{ onde } \varepsilon_{xx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \left(\frac{du}{dx} \right), \quad (\text{A.7})$$

onde ε_{xx} é deslocamento na escala infinitesimal e a integral de du é o deslocamento na escala *local*.

De acordo com a equação (A.6) e a equação (A.7), a deformação axial devido à variação uniforme de temperatura (ε_{xx}^m) e devido ao gradiente de temperatura ($\varepsilon_{xx}^{g_T}$) são dadas por:



$$\varepsilon_{xx}^m = \alpha \cdot \Delta T \quad \text{e} \quad \varepsilon_{xx}^{g_T} = y \cdot \alpha \cdot g_T. \quad (\text{A.8})$$

Devido ao PSE, tem-se que a deformação axial total devido à variação de temperatura com variações diferentes nos extremos é dada por:

$$\varepsilon_{xx} = \underbrace{\varepsilon_{xx}^m}_{PSE} + \varepsilon_{xx}^{g_T} \quad \text{ou seja} \quad \varepsilon_{xx} = \alpha \cdot \Delta T + y \cdot \alpha \cdot g_T. \quad (\text{A.9})$$

A deformação presente na equação (A.9) é uma quantidade real. Portanto, o problema de variação de temperatura com ΔT e g_T é aplicável diretamente à versão complementar da energia de deformação elástica virtual (forças virtuais). Desta forma, caso se considere uma estrutura plana composta de N_B elementos reticulados de seção S de área constante A de comprimento L_B , tem-se que a energia de deformação elástica complementar virtual para o problema de variação de temperatura é expressa por:

$$\bar{U}_{ela}^C = \sum_{b=1}^{N_B} \int_0^{L_B} \left[\int_A \bar{\sigma} \cdot \varepsilon \right] \cdot dx \quad (\text{A.10})$$

Substituindo as deformações reais devido a variação de temperatura e as tensões virtuais em função do esforço normal e do momento fletor, resulta que:

$$\bar{U}_{ela}^C = \sum_{b=1}^{N_B} \int_0^{L_B} \left[\int_A \left(\frac{\bar{N}}{A} \alpha \cdot \Delta T \right) dA + \int_A \left(\frac{\bar{M} \cdot y}{I_z} \alpha \cdot y \cdot g_T \right) dA \right] \cdot dx \quad (\text{A.11})$$

Exceto y que aparece no segundo termo da equação (A.11), todos os demais parâmetros são constantes ao longo da seção onde ocorre a integração. Como resultado, tem-se que:

$$\bar{U}_{ela}^C = \sum_{b=1}^{N_B} \int_0^{L_B} \left[\frac{\bar{N} \cdot \alpha \cdot \Delta T}{A} \int_A dA + \frac{\bar{M} \cdot \alpha \cdot g_T}{I_z} \int_A y^2 dA \right] \cdot dx. \quad (\text{A.12})$$

As integrais que restam na equação (A.12) já foram identificadas na equação (51). Substituindo esses resultados, tem-se que:

$$\bar{U}_{ela}^C = \sum_{b=1}^{N_B} \int_0^{L_B} \left[\bar{N} \cdot \alpha \cdot \Delta T + \bar{M} \cdot \alpha \cdot g_T \right] \cdot dx. \quad (\text{A.13})$$

A equação (A.13) é a expressão matemática que considera o efeito térmico (ΔT e g_T) em estruturas planas isostáticas compostas de N_B elementos reticulados retos de seção constante.



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul





B. Elementos elásticos pontuais (molas)

Consideram-se apenas apoios elásticos (molas externas), ou seja, não são considerados elementos elásticos internos à estrutura, como ligações semi-rígidas por exemplo. Dois casos importantes podem acontecer na presença de apoios elásticos. O primeiro acontece quando as molas estão conectadas ao meio externo por restrição de deslocamento. No segundo, as molas estão soltas. Em ambos os casos, a deformação elástica das molas é considerada no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) na energia de deformação elástica virtual. Isto vale tanto para o caso em que os deslocamentos são virtuais (\bar{U}_{ela}) quanto para o caso em que as forças são virtuais (\bar{U}_{ela}^C).

B.1) molas com restrições:

Pela propriedade elástica, a maneira mais natural de considerar seu efeito é acrescentá-lo na energia elástica de deformação. Portanto, seus efeitos elásticos para as versões deslocamento e força virtual são expressos por:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ela} &= \sum_{j=1}^{N_M} P_j \cdot \bar{D}_j, \\ \bar{U}_{ela}^C &= \sum_{j=1}^{N_M} \bar{P}_j \cdot D_j,\end{aligned}\tag{B.1}$$

em que P_j e \bar{P}_j são esforços reais e virtuais nas direções das molas e D_j e \bar{D}_j são alongamentos/encurtamentos (deslocamentos na escala *local*) reais e virtuais das molas. N_M é o número de apoios elásticos. Vale lembrar que P e D representam genericamente forças/torques e deslocamentos/rotações, respectivamente.

Os deslocamentos nas molas podem ser descritos em função das suas rizejas, resultando em:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ela} &= \sum_{j=1}^{N_M} P_j \cdot \frac{\bar{P}_j}{k_j}, \\ \bar{U}_{ela}^C &= \sum_{j=1}^{N_M} \bar{P}_j \cdot \frac{P_j}{k_j},\end{aligned}\tag{B.2}$$



em que k_j é a rigidez da j -ésima mola. Note o cuidado teórico de escrever P_j/k_j como deslocamento real na energia complementar e \bar{P}_j/k_j como deslocamento virtual caso contrário.

A Figura B.1 apresenta os detalhes deste caso. Repare que as reações P não realizam trabalho externo.

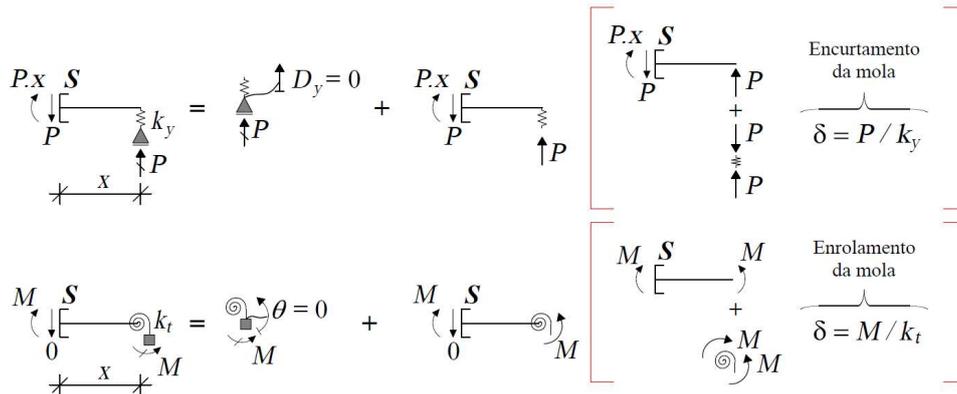


Figura B.1 – Trecho de uma viga de comprimento x definido entre a seção S e o apoio em que há molas. Na parte de cima se tem uma mola translacional de rigidez k_y e na parte de baixo tem uma mola rotacional de rigidez k_t . Em ambos os casos se separa o trabalho nulo realizado pela reação de apoio e os efeitos dessas reações nas molas e portanto, na energia de deformação elástica virtual.

Na parte de cima, destaca-se o momento fletor $P.x$ e o esforço cortante P que surgem na seção S gerados pela reação P no apoio. Já na parte de baixo, destaca-se o momento fletor M que surge de na seção S devido ao momento reativo M que ocorre na chapa (■).



B.2) molas soltas:

Neste caso, a carga externa P aplicada na mola não é uma reação de apoio. Portanto, não necessariamente o trabalho externo realizado por ela é zero. Assim, neste caso, a carga P terá dois efeitos. Externamente ela realizará um trabalho externo sobre o deslocamento genérico D . Internamente, essa carga gera força/torque na mola contribuindo para a energia de deformação elástica da estrutura. Portanto, neste caso, as versões do trabalho e da energia de deformação elástica nas versão deslocamento e força virtual são:

$$\begin{aligned} \bar{W}_E &= \sum_{j=1}^{N_M} P_j \cdot \bar{D}_j, & \bar{U}_{Ela} &= \sum_{j=1}^{N_M} F_j \cdot \frac{\bar{F}_j}{k_j} \quad \text{com } P_j = F_j \quad \text{e} \\ \bar{W}_E^C &= \sum_{j=1}^{N_M} \bar{P}_j \cdot D_j, & \bar{U}_{Ela}^C &= \sum_{j=1}^{N_M} \bar{F}_j \cdot \frac{F_j}{k_j} \quad \text{com } \bar{P}_j = \bar{F}_j. \end{aligned} \quad (B.3)$$

A Figura B.2 apresenta os detalhes deste caso. Repare que as forças P podem realizar trabalho e geram esforços nas molas de tal forma que contribuam para a energia de deformação elástica da estrutura.

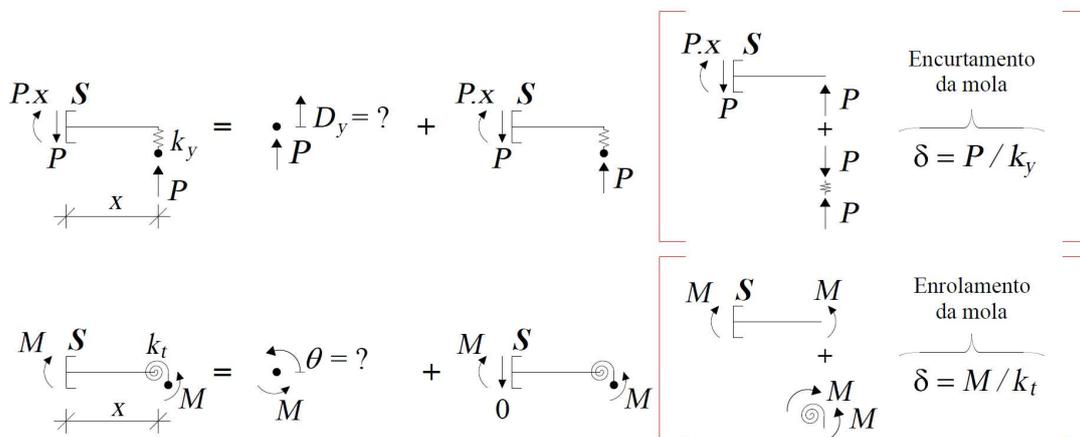


Figura B.2 – Trecho de uma viga de comprimento x definido entre a seção S e a extremidade livre em que há molas soltas. Na parte de cima se tem uma mola translacional de rigidez k_y e na parte de baixo tem uma mola rotacional de rigidez k_t . Em ambos os casos se separa o trabalho realizado pela força no extremo da mola, que não é nulo, e os efeitos dessas forças nas molas e portanto, na energia de deformação elástica virtual.



C. Recalque de apoio

Como o próprio nome já indica, recalques são deslocamentos reais que ocorrem em pontos externos à estrutura onde não deveria haver deslocamento (apoios que não são elásticos impõem deslocamentos nulos onde são colocados). Portanto, seus efeitos no PTV aparecem naturalmente no trabalho virtual realizado pelas cargas externas na versão força virtual. Logo, considerando o caso em que se têm N_R recalques, seus efeitos aparecem matematicamente por:

$$\bar{W}_{ext}^C = \sum_{j=1}^{N_R} \bar{R}_j \cdot \delta p_j, \quad (C.1)$$

onde \bar{R}_j é a j -ésima reação virtual correspondente ao j -ésimo recalque de apoio (δp_j).