

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

MARIZETE NINK DE CARVALHO

**GEOMETRIA DOS CURSOS COMPLEMENTARES AO ENSINO MÉDIO: ENTRE
LIVROS, PROGRAMAS, REFORMAS E MONSTROS – UMA TERAPIA**

**Campo Grande
2022**

MARIZETE NINK DE CARVALHO

**GEOMETRIA DOS CURSOS COMPLEMENTARES AO ENSINO MÉDIO: ENTRE
LIVROS, PROGRAMAS, REFORMAS E MONSTROS – UMA TERAPIA**

Tese apresentada ao curso de pós-graduação
em Educação Matemática da Universidade
Federal de Mato Grosso do Sul como requisito
parcial à obtenção do título de Doutora em
Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Pedro Pinto.

**Campo Grande
2022**

MARIZETE NINK DE CARVALHO

**GEOMETRIA DOS CURSOS COMPLEMENTARES AO ENSINO MÉDIO: ENTRE
LIVROS, PROGRAMAS, REFORMAS E MONSTROS – UMA TERAPIA**

Tese apresentada ao curso de pós-graduação
em Educação Matemática da Universidade
Federal de Mato Grosso do Sul como requisito
parcial à obtenção do título de Doutora em
Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Thiago Pedro Pinto (Orientador)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Antonio Miguel
Universidade Estadual de Campinas

Profa. Dra. Cláudia Regina Flores
Universidade Federal de Santa Catarina

Profa. Dra. Maria Célia Leme da Silva
Universidade Federal de São Paulo

Prof. Dr. João Ricardo Viola dos Santos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Thiago Donda Rodrigues (Suplente Interno)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Fernando Guedes Cury (Suplente Externo)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Campo Grande, 05 de julho de 2022.

DEDICATÓRIA

Aos pais – Francisco Paulo de Carvalho e Lindaura Nink de Carvalho,
Ao esposo (e pai zeloso) – Erno Delmar Scheffler,
As filhas (luzes de minha vida) – Carolina e Isadora.

AGRADECIMENTOS

Há tipos e modos de se poder agradecer.
Há também alguns que não sabem agradecer
e outros que não sabem receber agradecimentos.

Ademais, espero que aos que, ora agradeço,
estejam naquele grupo que entende e se alegra com a
lembrança, o carinho e o agradecimento.

Primeiramente agradeço a Deus – Senhor de tudo, do tempo, da vida. Que proporcionou a graça deste momento e a conclusão de um sonho.

Aos meus pais – que com muita luta e sacrifício proporcionaram e incentivaram a busca pela educação, e mesmo que não imaginassem onde poderíamos chegar, não podaram nossas assas, mas auxiliaram a que alcássemos voo.

Ao meu esposo – pelo amor, compreensão, ombro para chorar e por doar-se a este projeto como se dele fosse.

As minhas filhas Carolina e Isadora – as quais peço perdão pelas ausências.

Aos meus demais familiares – pelo apoio, carinho e auxílio em momentos de aflição.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Thiago Pedro Pinto – pela disposição em me acompanhar neste processo, pelas orientações, incentivo, compreensão diante de dúvidas, incertezas e até choros.

A banca examinadora – Prof. Dr. Antonio Miguel, Profa. Dra. Cláudia Regina Flores, Profa. Dra. Maria Célia Leme da Silva e o Prof. Dr. João Ricardo Viola dos Santos, que na diversidade apresentaram ricas contribuições a minha caminhada.

Aos professores do PPGEDUMAT – pelas partilhas, aprendizados e momentos únicos.

A todos os professores – que cruzaram meu caminhar, desde a educação infantil até este momento, que sem demérito a nenhum sequer, auxiliaram na formação da professora que hoje sou.

Aos meus colegas do doutorado Ana Maria, Cristiano, Dayane, Gresiel, Liana, Ricardo e Rosane – que aos poucos se transformaram em companheiros de lutas, tristezas e alegrias.

Ao Bueke e a Reinalda – que me acolheram e ampararam em Campo Grande nos difíceis momentos em que estava longe de minha família.

Aos amigos e amigas – que torceram, oraram, sofreram tantas vezes comigo, mas em muito mais vezes alegraram-se com minha alegria, que expressaram confiança e desejaram sucesso.

RESUMO

Este ser que se gerou, poderia tentar convencê-los de que ele foi criado, de alguma forma por mim, mas isso despenderia uma força tamanha que não sei se sou capaz de ter. Este ser, gerado, talvez, de forma sobrenatural, que ganha vida nestas páginas, tem por finalidade apontar para o Ensino Médio e busca referências em seus semelhantes, ou, talvez, diria antecessores, aos quais amoldando-se vai ganhando corpo até chegar ao que hoje conhecemos como Ensino Médio. Mas esses movimentos de ajustes e reformas que se vão impetrando à Educação Brasileira não se configuram em ruptura total com o passado, mas assentam-se sobre placas que se movimentam conforme as necessidades, as pressões, as influências, tanto da sociedade, quanto de grupos (econômicos, políticos, religiosos...). Este ser tentou se embrenhar em momentos distintos de nossa história, numa expectativa de apresentar alguns eventos, mesclados a fatos históricos que corroboraram, ou não, na perpetração de mudanças na educação. Além disso, ateu-se ao fato de olhar para os livros como material intrínseco das salas de aula, especialmente de matemática, convergindo, finalmente, para a geometria, como espinha dorsal, numa perspectiva de vislumbrar, não em termos totalitarista, como ela aparece nos livros didáticos no decorrer de quase um século (1930-2010). Então, dos períodos que estriamos a partir das reformas educacionais, elegemos uma obra, entre várias, (ao final orbitando sobre seis coleções de livros didáticos), tendo como mote a busca por semelhanças, diferenças, pontos em comum no modo de apresentação e abordagem dos conteúdos geométricos, balizados à luz dos escritos de Wittgenstein, e seu modo terapêutico de filosofar, de pensar, de ponderar sobre jogos de linguagem e suas nuances, onde conceitos e palavras são entrecortadas e carregadas de sentidos, de vidas que a entendem e a observam de formas semelhantes e diferentes, que a ressignificam e a introduzem em diferentes jogos, com a mesma, ou quiçá, outra[s] significação[ões]. Nesta jornada, este ser que fora gerado, é produto ou resultado de movimentos de construção e desconstrução, pensar e repensar do meu próprio ser, que tenta tocar em alguns pontos que talvez ainda não tenham sido explorados, ou se foram, andaram por outros caminhos e nuances do fazer matemático/geométrico. A linha que perpassa este caminhar não se atém a uma configuração totalizadora em que a propositura fosse apontar ou consolidar certezas e conclusões, mas terapeutizar, não para caracterizar uma geometria única, ou a correta, em detrimento de outras, mas de um lugar onde, de forma panorâmica, possamos nos mover como que dançando no gelo, em que qualquer movimento fora do previsto tem o poder de reverberar outras ideias, outros caminhos ou conceitos, diferentes dos almejados na propositura da tese, ou deveria dizer, deste ser, que ora extrapola o limite, o lugar seguro dos meus pensamentos, para adentrar a esfera pública.

Palavras-chave: Jogos de Linguagem. Semelhanças de Família. Rigor. Livros Didáticos. Geometria.

ABSTRACT

This being that has been generated, I could try to convince you that it was somehow created by me, but this would expend a strength so great that I do not know if I am capable of having. This being, perhaps supernaturally generated, that comes to life in these pages, has the purpose of pointing to High School and seeks references in its similar, or, perhaps, I would say predecessors, to which, molding itself, it gradually gains body until it reaches what we know today as High School. However, these adjustments and reforms that are being imposed on Brazilian Education are not a total rupture with the past, but are based on plates that move according to the needs, the pressures, the influences, both from society and from groups (economic, political, religious...). This being tried to delve into distinct moments of our history, in an expectation to present some events, mixed with historical facts that corroborated, or not, in the perpetration of changes in education. In addition, we looked at textbooks as intrinsic material of the classroom, especially of mathematics, converging, finally, to geometry, as the backbone, in a perspective of glimpsing, not in totalitarian terms, how it appears in textbooks over the course of almost a century (1930-2010). Then, from the periods of time we have studied since the educational reforms, we have chosen one work, among several, (at the end orbiting over six textbook collections), having as a motto the search for similarities, differences, points in common in the way of presentation and approach of geometric contents, based on the light of Wittgenstein's writings, and his therapeutic way of philosophizing, thinking, pondering over language games and their nuances, where concepts and words are intertwined and loaded with meanings, of lives that understand and observe it in similar and different ways, that re-signify it and introduce it into different games, with the same, or perhaps, other signification[s]. In this journey, this being that was generated is the product or result of movements of construction and deconstruction, thinking and rethinking of my own being, which tries to touch some points that perhaps have not been explored yet, or if they were, they walked through other paths and nuances of the mathematical/geometrical doing. The line that runs through this walk is not tied to a totalizing configuration in which the proposition would be to point or consolidate certainties and conclusions, but to therapize, not to characterize a single geometry, or the correct one, to the detriment of others, but a place where, in a panoramic way we can move as if dancing on ice, in which any movement outside the predicted range has the power to reverberate other ideas, other paths or concepts, different from those aimed at in the proposition of the thesis, or should I say, of this being, which now extrapolates the limit, the safe place of my thoughts, to enter the public sphere.

Keywords: Language Games. Family Resemblances. Rigor. Textbooks. Geometry.

SUMÁRIO

CARTA 1.....	9
RELATO DE UM SONHO... OU SERIA UM PESADELO?.....	11
CARTA 2.....	42
GEOMETRIA DOS CURSOS COMPLEMENTARES AO ENSINO MÉDIO: ENTRE LIVROS, PROGRAMAS, REFORMAS E MONSTROS – UMA TERAPIA.....	52
CARTA 3.....	204
REFERÊNCIAS	210

*Aos poucos fiz uma descoberta de importância
ainda maior. Descobri que aquela gente
dispunha de um método de comunicar
experiências e sentimentos uns aos outros, por
meio de sons articulados. Percebi que as
palavras que diziam produziam ora prazer,
ora dor, ora sorrisos, ora tristeza na mente e
no rosto dos ouvintes. Essa era, sem dúvida,
uma ciência divina, e desejei ardentemente
aprendê-la.*

[Frankenstein, Mary Shelley]

CARTA 1

16 de maio de 2022

Às vezes, parece-me que a qualificação foi um sonho. O pesadelo que vivi naqueles dias que antecederam o "embate" é digno de registro - talvez se compare com as mais épicas tragédias gregas. O fato é que não foi apenas nos dias precedentes à banca, mas cumulativo desde o momento de pisar o solo da UFMG e o primeiro dia de aula. A expectativa era tanta para aquele dia, e, como de costume, eu esperava o pior: seria reprovada! Para mim era certo que a banca - composta por nomes respeitados dentro da Educação Matemática, pelos quais passei a nutrir profunda admiração - não iria gostar do texto. Em meu pensamento, já havia um veredito sobre minha cabeça, uma sentença de condenação que, exaustivamente, aos gritos e ranger de dentes, seria pronunciado; e eu, atônita, de cabeça baixa no alto do cadafalso, corpo preso ao suporte da guilhotina onde a lâmina encontraria o pescoço e tudo estaria resolvido. Mas, antes deste final, ainda escutaria: "REPROVADA". Ou, em outras palavras: "REFAZ TUDO!" E o Frankenstein se diluiria. A minha suposta tese, ou eu mesma me esvaindo, sendo tragada pelo abismo do desespero e da comiserção. E os pensamentos, ah, os pensamentos! Como poderia olhar as pessoas nos olhos? A vergonha que carregaria para o resto de meus dias? Como conviver com meu esposo e minhas filhas, que sempre me apoiaram? Como iria dizer para minhas filhas que eu era uma derrotada? E tantos outros ais. Poderia outra solução existir? Talvez se eu me escondesse, a exemplo da criatura horrenda e repugnante, ou ainda ir a outro lugar, distante, afastado, isolado, onde poucos ou quase ninguém me conhecesse. Assim girava minha cabeça, meu ser todo a fervilhar em êxtase... E, repentinamente, isso, ou boa parte disso ruiu, ficou nas sombras, desatou-se, irrompeu a luz em meio às trevas. A criatura horripilante pareceu ganhar contornos e traços de gente e, mesmo cheio de remendos, hematomas, suturas e faixas, apresentou-se, de certa forma, bonita,

limpa, transparente e efemeramente bela. Como foi reconfortante ouvir as palavras, conselhos e orientações destes mestres...

Com isso, uma nova jornada teve início (pós-qualificação) – outras dores e dúvidas imperaram sobre a criatura e seu criador. A angústia agora era tentar descobrir para onde ir. No fim, este texto já não é mais o mesmo que foi apresentado naquela oportunidade. Todo ele foi atravessado pelas considerações apontadas pelos membros da banca e pelos autores que me foram sugeridos como leituras. Novos tecidos, de outros corpos, foram aqui costurados. De certo, não consegui me atentar a tudo o que foi falado ou ao que era esperado, pois, a partir do que foi proposto, posso ter ressignificado as ideias e enveredado por caminhos outros, para além das indicações propostas pela banca. O Frankenstein voltou ao laboratório, porém agora já não era mais uma matéria inanimada, ele já tinha vida, fez suas escolhas e seguiu o seu próprio caminho...

RELATO DE UM SONHO... OU SERIA UM PESADELO?

04 de maio de 2020, às 6 horas

Despertei-me em agonia. Tive um sonho. Poderia dizer que foi um pesadelo, por se tratar do medo que mais me atormenta desde que comecei o doutorado: a escrita da tese. Neste sonho/pesadelo estava conversando com a professora Cida, que acabara de ler a minha ilusória e futurística propositura, ainda não defendida e nem mesmo escrita. Perguntei a ela sua opinião a respeito do texto. Ela, então, meio constrangida, falou algo que deu a entender que não estava boa. Esforcei-me muito para lembrar suas palavras, mas não consegui, porém o sentimento, a angústia daquela "reprovação" não saía da minha mente. Tentei dormir novamente, mas foi em vão. Meus pensamentos insistiam em fervilhar. De que forma poderei escrever um texto, que dê conta de dizer tudo o que eu quero dizer e, ainda, que seja agradável ao meu imaginário leitor? Por favor, pensamentos, deixem-me dormir! Não estão satisfeitos por me atormentar ao me deitar, fazendo-me rolar na cama até altas horas da madrugada? Essas poucas horas desde o nascer do sol até minha filha acordar é o pouco tempo em que consigo descansar. Irá me tomar até isso?

Recuso-me a ficar a rolar na cama. Fui até o escritório e, olhando para o meu computador, comecei a refletir sobre o sonho/pesadelo. Algo que me intrigou foi o fato de ter sonhado com a professora Cida, já que esta não faz parte da minha linha de pesquisa. Não posso negar que tenho profunda admiração por ela, sempre atenciosa e disposta a ajudar os alunos. Seria por isso? Ou será pelo fato de ontem ela ter enviado um e-mail para os alunos da pós e, devido a isso, vi sua foto no perfil, então, minha mente trabalhou a partir dessa imagem? Enfim... acho que nunca saberei.

Outra coisa que também me intrigou foi o fato de que hoje minha tese ainda não está escrita. Mal consegui escrever algumas poucas linhas nas quais faço, literalmente, uma linha do tempo da origem do que atualmente chamamos de Ensino Médio. No fundo, essa minha formação matemática acaba falando mais

alto. Essa linearidade, essa maneira de tentar organizar os fatos e acontecimentos passados e tentar antecipar o futuro, em ordem cronológica, sempre esteve muito presente em minha vida. É assim que eu penso! Mas isso, no fundo, é uma contradição com o que pretendemos fazer na pesquisa, já que queremos nos estabelecer nos intervalos. No terreno estriado pelas reformas educacionais, a intenção não é caminhar dentro desses espaços, e, sim, passar por eles. Estranho, né? Estriar para depois romper as estrias? Não parece contraditório? Contradição... Esse, na verdade, deveria ser meu nome de meio, pois o que mais faço ultimamente é me contradizer. É que, por vezes, preferimos nos mover por espaços estriados. Assim, temos a sensação de que pertencemos a uma zona de conforto, que não nos obriga a romper com a característica de normatização e padronização das esferas onde existimos. Diria que temos nossos nós (cegos ou não), que talvez não se desatem ou, por outra ótica, não queiramos que sejam desatados. Então, a ideia é fugir disso, romper as estrias, enredar e desenredar...

Para isso, como primeiro passo, movimento inicial da pesquisa, tentei estriar o terreno, nominalmente, histórico da educação, balizando este movimento como parâmetros de referências as reformas educacionais, que perfazem este estriamento, que conduz a uma espécie de pacto e generalização da educação (e todos os aspectos formais que perfazem e impactam o fator educacional brasileiro - modelos de escola - formato do ano letivo - conteúdos - disciplinas - pedagogias - livros utilizados). Já o momento seguinte, ou segundo movimento, se apresenta enredado nos livros didáticos, num olhar que tenta romper com essas estrias, movendo-nos como nômades, de um ponto ao outro, explorando cada livro, fundamentos que imperam em tal obra, possibilidades para ser daquele jeito, parâmetros que a conduziram, o formato a que foi submetida.

O propósito é desfazer o movimento de seguir as regras, desfazer os nós (cegos ou não), os dogmas por trás das obras, as normas de confecção, a quem serve e a quem se destina. Este movimento que tencionamos na pesquisa é nos afastarmos do padrão, do encaixotamento, das linhas mestras a indicar e

balizar o caminho, do GPS que conduz ao ponto de destino, sem se ater às belezas do caminho. Também, como centro e norte, e, por certo, a nos conduzir estão as ideias de Wittgenstein, que fogem a todo tipo de caracterização, classificação, explicação massiva e, assim, tentamos andar, não para explicar, mas no intuito de apresentar (Não pense, veja!), de entender que as estrias estão aí, que os formatos padronizados são moldes, que podem e devem ser transpostos e/ou entrelaçados simbioticamente por espaços e movimentos lisos. Isso é o que pensamos fazer e desenvolver, fugir do tradicional, das cartas marcadas, e enveredar por caminhos inexplorados, que ainda conservam belezas exóticas e incertas.

Mas, voltando ao texto da minha tese, se este já estivesse pronto, mesmo que o resultado não fosse o esperado, já seria algo bom, pois significaria que já teria passado por todas as fases da pesquisa; mas ainda estou longe disso. Será que é precipitado ficar pensando em como escrever, se ainda nem tenho uma pesquisa? Sem ao menos conseguir pensar claramente o que vou fazer? Sem me contradizer o tempo todo? As perguntas são muitas, já as respostas...

Desde a minha conversa com meu orientador, no dia 29 de novembro de 2019, quando, em tom de brincadeira (pelo menos acho que foi uma brincadeira), flertou com a possibilidade de eu fazer um “Frankenstein de Marizete”, que isso não sai da minha cabeça. Depois dessa reunião de orientação, eu comprei o livro “Frankenstein ou o Prometeu Moderno”, de Mary Shelley, até então só conhecia a história de Frankenstein por filmes e desenhos animados, mas a história “original” ainda não conhecia¹. Assisti também aos filmes “Frankenstein de Mary Shelley”², de 1994, e “Mary Shelley”³, de 2017. Fiquei fascinada pela história!

¹ Nesta leitura, para minha surpresa, descobri que Frankenstein na verdade era o “criador” do “monstro/demônio” e não o monstro como retratado em algumas histórias de filmes e desenhos animados.

² “Apesar de algumas modificações, esta é a adaptação mais fiel do livro ‘Frankenstein; ou o Prometeu Moderno’, da escritora Mary Shelley. Assim, o longa aborda de forma interessante a evolução da ciência enquanto o homem desafia a ordem natural da vida – que é um dos temas centrais da obra da escritora britânica. Na visão da cineasta Kenneth Branagh, esta história ganha ares de drama existencialista, sem apostar em um terror mais claro, algo que pode atrair algumas pessoas e afastar outras. Visualmente deslumbrante e com um grande elenco (incluindo nomes como Robert de Niro, Tom Hulce, Helena Bonham Carter e o próprio Branagh), o filme foi indicado ao Oscar de Melhor Maquiagem.” Retirado em 06 de maio, 2020 de <https://www.filmmelior.com/pt/br/film/1563/frankenstein-de-mary-shelley>.

A busca de Victor Frankenstein pela criatura perfeita (se bem que esse é o enredo do filme, e não do livro). Aliás, a busca pela perfeição é algo que já me rendeu algumas sessões de terapia... Sempre achei a Matemática uma ciência perfeita... Eu gostava muito da escola e de estudar. Nas férias escolares, meu passatempo preferido era refazer todos os exercícios de matemática que tinha feito no decorrer do ano. Isso tinha um sabor único, rememorar o que havia ocorrido durante um ano, era muita coisa, mas possível, então meus cadernos, meus materiais da escola, eram-me lembranças, nem sempre agradáveis, mas particularmente repletas de momentos plenos, retilíneos (até bem pouco tempo ainda sentia assim), perfeitos e carregados de certezas. Algumas pessoas até estranhavam esse meu comportamento, e acredito que alguns alunos meus também não entendiam esse entusiasmo todo por uma disciplina, considerada por muitos como difícil. Era uma paixão, até certo ponto, cega, nunca burra, ou aprisionante – sem exigir nada, apenas a contemplação e o sentimento de que aquilo fazia sentido, talvez com uma concepção mais platônica – diria hoje, acreditava ser a matemática como algo quase que mágico, existente num plano superior, só a espera de ser descoberta. Lembro de, em uma aula do prof. Thiago, no meu primeiro ano do curso de doutorado, onde expus esse pensamento, de genuinamente acreditar na mesma matemática da minha infância, pura, capaz de mudar o mundo e as pessoas. Lembro também de, ingenuamente, pensar, quando entrei no curso de licenciatura, que eu já sabia muita matemática, e logo perceber que eu não sabia nada, e, mesmo estudando muito para conseguir me formar, o sentimento de total despreparo ao entrar numa sala de aula como professora era constante. Alguns anos depois, quando olhei para a estrutura curricular do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), novamente fui levada a pensar que seria fácil... Ledo engano. E, apesar de alguns colegas pensarem que escolhi cursar o doutorado em Educação Matemática por ser “mais fácil” (que de fácil não tem nada!), não foi por essa razão. Ai lembrei do

³ “Mary Wollstonecraft Godwin tinha só 16 anos quando quis viver um amor e se tornou Mary Shelley, a feminista ferrenha que escreveu “Frankenstein”. Estrelado por Elle Fanning, Douglas Booth e Stephen Dillane.” Retirado em 06 de maio, 2020 de <https://www.netflix.com/br/title/80224466>.

quanto era feliz na minha tenra infância a brincar de professora, se bem que, no fundo, não era uma brincadeira: eu realmente era uma professora de matemática e, apesar do riso de meus irmãos e primos diante da cena, parecendo até mesmo um quadro de algum pintor ou xilografista que despercebidamente capta um momento, uma nuance, um fato histórico no universo desbravado da Amazônia Ocidental, num mundo em que se podia brincar de tudo, até mesmo de ser professora. Eu tinha essa outra paixão de infância, mais forte e até anterior à da matemática, que é a de ensinar. Lembro que logo que entrei na escola, eu já decidi que queria ser professora, em vez de brincar de casinha eu brincava de escolinha. Minha prima, mais nova que eu, é que sofria nas mãos da exigente professora Marizete. Quando comecei a ensinar futuros professores de matemática, uma lacuna muito grande na minha formação ficou mais evidente, e foi em busca de preencher essa lacuna que entrei no doutorado. Mas não tinha ideia de como esse curso iria me afetar e alterar até a forma como via a matemática, e, como que por encanto, no espelho que dá forma à minha meninice, de repente, irrompeu um vinco, trincou, rachou, mas não apagou meus sonhos. Ainda me vejo a namorar os cadernos e sonhar com minha própria sala de aula, maravilhada com a ideia – um quadro, giz e alunos. Mas o tempo é malévolo e voa, e a saudade começa a doer, “tenho medo de me tornar tedioso alongando-me nessas circunstâncias preliminares; mas aqueles eram dias de relativa felicidade, e me lembro deles com prazer.”⁴ Esta caminhada no doutorado tem-se transformado numa longa travessia, entre confrontos e quebras de paradigmas (meus), e sentimentos, que sofreram tantos afetamentos... E se me perguntar a respeito da perfeição? A princípio, a perfeição não seria algo ruim, mas o dilema que eu vejo (que minha terapeuta me ajudou a ver) é conseguir definir: o que é essa perfeição? Outro problema que decorre disso é o sentimento de frustração quando não encontramos essa perfeição, até porque me parece que ela não existe. O que aconteceria se eu fizesse como o Victor Frankenstein e partisse em busca de uma Geometria Perfeita? Se olhasse para os livros didáticos de matemática do

⁴ (SHELLEY, 2012, p. 75)

século XX e, a partir deles, fizesse a minha Geometria? Seria ela perfeita? Ou acabaria como o Victor Frankenstein, caído em profunda desgraça, sentindo “a amargura da decepção; os sonhos que haviam sido meu alimento e meu repouso durante tanto tempo agora se haviam transformado num inferno para mim; e a mudança foi tão rápida; a derrota, tão completa!”⁵. Acho que estou delirando agora, deve ser o sono, o cansaço... Tem sido dias muito difíceis, não só para mim, mas para todo mundo. As pessoas trancadas em suas casas, isoladas, pelo menos aquelas que podem e que têm senso de responsabilidade social, com medo de um inimigo invisível que já vitimou tantas pessoas. Às vezes questiono a razão de continuar nessa empreitada. Mas é preciso seguir em frente. Talvez, se eu voltar ao projeto de pesquisa, eu consiga me re-orientar... Mas, antes de começar a ler o projeto, vou precisar de uma xícara de café...

(pequena pausa para tirar do fogo a chaleira que já apitava, indicando sua fervura, o indescritível cheiro do café invadindo todos os cômodos da casa me traz algum acalento)

1. INTRODUÇÃO

O século XX se apresentou como paradigma. Um misto de revoluções, excentricidades, evolução e retrocessos que permearam os campos do viver. Revoluções tecnológicas/científicas proporcionaram avanços significativos, possibilitando inclusive que a humanidade travasse as mais duras batalhas até então. As animosidades tiveram seu auge com a eclosão de duas guerras mundiais, tendo como palco principal o continente europeu. Esses conflitos exponenciaram a disseminação de ideias extremistas, políticas protecionistas, radicalismos, culminando com uma divisão geopolítica e o surgimento de blocos hegemônicos que passaram a ditar as regras e modelos econômicos referenciados por suas ideologias.

E, na esteira desses momentos, descortina-se um leque de eventos que direcionaria praticamente toda a segunda metade do século, polarizando o mundo, salvo algumas exceções, dividindo-o numa formatação entre Ocidente “capitalista”

⁵ (SHELLEY, 2012, p. 59)

(identificado especialmente com os EUA) e o Oriente “comunista/socialista” (tendo como representante maior a então URSS). Esse cabo de guerra, entre avanços e retrocessos, tem como vanguarda as viagens espaciais e a chegada do homem à lua. Essa corrida, disputa, acaba por tensionar ainda mais as relações entre os dois “mundos”, que viveriam momentos distintos, na assim denominada Guerra Fria.

A educação, de modo geral, esteve mergulhada nesse turbilhão. Era utilizada como “cavalo de troia”, na medida em que se buscava a instauração de modelos e métodos educacionais, a fim de corroborar, assim, os pensamentos e ideologias sob a ótica de ambos os lados.

No Brasil, isso não foi diferente, as (r)evoluções oriundas do assim chamado 1º Mundo sempre obtiveram ancoragem facilitada e campo fértil. A dinâmica adotada por aqui seguiu parâmetros e bases de uma conjuntura que determinava “mudanças” na forma de ensino, com um discurso supostamente modernista ou modernizador, permeado por lutas e embates evidenciados especialmente nas formas de vida de gestão político-administrativa, econômica, religiosa, perpassando questões éticas, sociais, étnicas, filosóficas, entre outros fatores que aprofundaram e, até certo ponto, romperam amarras e emolduraram os caminhos da educação.

É o caso ainda das 1ª e 2ª décadas do século XX, em que o Brasil é “invadido” por ideias e modelos educacionais provenientes da Europa, e ainda dos Estados Unidos (Pedagogia Tradicional, Pedagogia Nova e Pedagogia Libertária), conforme aponta Ghiraldelli Júnior (1992). Outro momento de forte impacto decorre na 2ª metade do século, na iminência do Movimento Matemática Moderna (MMM).

Não obstante todas essas influências, pressões, movimentos políticos e sociais, jogos de interesses, ideologias e metodologias que permearam esse período, na tentativa de direcionar ou alavancar uma possível evolução na educação brasileira, há quem diga que a matemática teria passado incólume, alheia a todo esse processo. É o que nos aponta Vilela (2013) acerca da existência de uma imagem de unicidade e neutralidade da matemática, ou seja, uma possível inviolabilidade.

[...] a matemática, como disciplina acadêmica, mantém-se, no que diz respeito ao seu processo de constituição e circulação, aparentemente independente em relação aos problemas sociais, políticos, éticos e pessoais, isto é, posiciona-se neutra e isenta frente a críticas e questionamentos. (VILELA, 2013, p. 17)

Nesse sentido, Vilela (2013) propõe a dissolução dessas imagens neutras, exclusivistas e privilegiadas, ao constatar diversas adjetivações dadas à matemática,

frequentemente, utilizadas em trabalhos no campo da Educação Matemática, cada uma relacionada a uma determinada prática social.

A sugestão, então, seria uma mudança para o uso da palavra “matemática”, que não mais convergiria para um sentido único, singular, mas, sim, para uma pluralidade de sentidos intrinsecamente relacionados aos jogos de linguagem e às formas de vida a eles correspondentes. Um exemplo disso pode ser observado nas expressões analisadas por Vilela (2013): “matemática escolar”, cuja presença era expressiva nas publicações em Educação Matemática, ora utilizada como par tensional com a “matemática acadêmica”, ora como sinônimas. Cada uma delas se configura em jogos de linguagem diferentes, pois estão ligadas a formas de vidas diferentes – a comunidade acadêmica e a comunidade de professores da escola. Na matemática acadêmica, predominam aspectos ligados ao formalismo, rigor e precisão, ao passo que na escolar predominam aspectos mais descritivos e intuitivos.

Em virtude dessa miscelânea, inquietações e questionamentos começaram a emergir: e se olharmos para dentro da mesma prática - a matemática escolar -, teria ela permanecido ilesa ao tempo? Teria ela atravessado fronteiras imaginárias (territoriais, temporais, geopolíticas, sociais) sem sofrer alterações? É possível identificar mudanças ocorridas em seu suposto âmago? Seriam essas mudanças apenas conveniência didática? Ou seria outra matemática escolar? Existiria, então, uma geometria escolar? Ou, ainda, existiria uma geometria do Ensino Médio? Essa geometria do Ensino Médio sofreu alterações no decorrer do século XX?

A partir desses pressupostos, colocamo-nos em um movimento de pensar a geometria do Ensino Médio, a partir dos jogos de linguagem presentes nos livros didáticos, o qual (acreditamos) possui significados diversos, decorrentes das diferentes formas de vida situadas em cada contexto histórico, movimento filosófico e epistemológico percorrido tanto pela matemática quanto pela educação. Posto isso, seria a geometria também atravessada por fatores conjunturais: social – ético – político – ideológico – cultural – educacional – filosófico – econômico?

Mas, diferentemente de Vilela (2013), que olha para as formas de vidas em atividades humanas diversas, o que nos move é o sentido de olhar para “a mesma” atividade – o ensino de geometria ou, ainda, o livro de matemática – e para as transformações sofridas durante o século passado, entrecortado por momentos históricos distintos e pelas suas nuances (excludentes, transformadores, separatistas, unionistas).

Ao vislumbrarmos os movimentos/reformas ocorridos na educação durante o século XX, tencionamos exercer o ofício de forma atemporal, em que se busca garimpar essas diferenças e multiplicidades. À primeira vista, poderia se pensar que um século seria um recorte temporal demasiadamente amplo e difícil de ser varrido em uma pesquisa de doutorado. Por outro lado, se voltarmos o olhar para o livro Elementos de Euclides, escrito por volta de 300 a. C., a dinâmica desse recorte se torna ínfima. No entanto, poderá configurar-se em grande potencial na pesquisa se pudermos observar e, quiçá, apontar que, em 100 anos, a geometria do Ensino Médio sofreu diversas alterações, a ponto de se constituir em diferentes jogos de linguagem.

Ainda, objetivando a exequibilidade da pesquisa, esse recorte se dá pelo fato da existência de uma vasta gama de materiais (livros didáticos, pesquisas) do século XX disponíveis, a exemplo dos acervos dos grupos de pesquisa GHOM (Grupo de História Oral e Educação Matemática) e o GHEMAT (Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática).

Na verdade, esse projeto foi/é o resultado de muitas idas e vindas, e começou a tomar forma a partir da ideia de analisar a coleção Geometria Moderna de Moise & Dows (1971), traduzida para o português por Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello, na época em que estava em evidência o Movimento Matemática Moderna. Porém, para entender as mudanças ocorridas (ou não) no conteúdo de geometria em decorrência do movimento, senti a necessidade de conhecer como eram apresentados, nos livros didáticos, os conteúdos de geometria antes e depois do MMM. Então, durante uma reunião de orientação, inspirados no trabalho de Maria Laura M. Gomes (2006), sob o título "Os números racionais em três momentos da história da matemática escolar brasileira", surgiu a ideia de tentar fazer uma "apresentação

"Uma fonte principal de nossa incompreensão é que não temos uma visão panorâmica do uso de nossas palavras. – Falta caráter panorâmico à nossa gramática. – A representação panorâmica permite a compreensão, que consiste justamente em "ver as conexões". Daí a importância de encontrar e inventar articulações intermediárias. O conceito de representação panorâmica é para nós de importância fundamental, designa nossa forma de representação, o modo pelo qual vemos as coisas. (É isto uma 'visão de mundo'?)" (WITTGENSTEIN, 1999, p. 67)

“Dito de outro modo, em sua função terapêutica, a análise nos mostra o que está errado – ou não regrado de acordo com a gramática – possibilitando, assim, realizarmos uma terapia. Em sua função panorâmica, a análise nos dá acesso às diferentes possibilidades da gramática, isto é, nos faculta o acesso, em termos wittgensteinianos, à essência que está expressa na gramática (IF § 371). Contudo, é importante salientar que essa função panorâmica da análise não nos dá acesso propriamente a um fato ou fenômeno, mas às “considerações gramaticais” que fazemos sobre os fenômenos (IF § 90). [...] Essa análise nos mostra as muitas e diferentes possibilidades de articulação da gramática de onde provêm a inteligibilidade com a qual damos sentido ao que ocorre em nossa forma de vida.” (CONDÉ, 2020, p. 200)

panorâmica”⁶ dos usos da palavra geometria em contextos de ensino, especificamente na etapa correspondente ao Ensino Médio no século XX, utilizando como material de análise os livros didáticos.

Essa escolha de olhar para livros didáticos é relevante para a pesquisa. Assim, na busca por caminhos e obras a serem consultadas, e até mesmo “estripadas”, acho apropriada uma reflexão acurada

no intuito de apresentar as entranhas e os modos como a matemática e, especialmente, a geometria foram sendo esculpidas, sofreram ações do tempo, das forças alheias a elas, e dos movimentos ocorridos dentro e fora da escola. Mas, por ora, é tempo de pausar, deixar a leitura do projeto descansar e ponderar a respeito dos livros didáticos, merecedores de redobradas noites de insônia e desespero em virtude das possíveis repercussões na apresentação final desta tese. Acho que é um bom momento para refletir, pausar, ponderar. Então, vou pensar sobre isso.

A História humana é isso, repleta de condicionantes e inferências que a deixam única e, ao

⁶ Apesar de utilizarmos como referência a tradução da obra de Wittgenstein feita por José Carlos Bruni, que utiliza o termo “representação panorâmica”, preferimos utilizar o termo “apresentação panorâmica”, pois, segundo Miguel, Vianna, Corrêa (2020, p. 16-17) “Almeida opta por traduzir a *übersichtliche Darstellung* de LW por “apresentação panorâmica”, sobretudo para se evitar a disseminação de “conotações representacionistas e cognitivistas” ou, mais amplamente, diríamos nós, *conotações psicológicas* vistas como inadequadas do conceito e do método de investigação por ele instaurado.” Numa tentativa livre de explicação, o que pretendemos com a utilização da expressão “apresentação panorâmica” é uma perspectiva de liberdade para expressar e apresentar, descrever, sem rótulos ou teorias pré-concebidas os usos da palavra geometria, ou seja, sem estar atrelado a uma pré-definição de ideias ou conceitos teóricos, nos afastando da tentativa de representação dos fatos, escritos, momentos históricos e a-históricos, teorias educacionais ou filosóficas que possam estar conectados ao contexto de ensino.

mesmo tempo, ampla. Com o surgimento da escrita, ou das formas mais antigas e diversas de registros (seja a configuração de desenhos e formas rupestres, hieróglifos, papiros, pergaminhos⁷, sejam as outras maneiras de preservar os feitos e descobertas), há um legado perpétuo às gerações futuras. É bem certo que a oralidade acompanhou o ser humano em todos os tempos, perpassando regras, estatutos, crenças, tradições, costumes, leis, que, agora, poderiam ser guardadas com maior segurança, até mesmo das distorções ou esquecimentos.

Então, uma das finalidades da escrita foi a de materializar a oralidade, a fim de servir como fonte de registro histórico desde tempos distantes. Com o advento da escrita, perpassando várias etapas e cenários, e com a posterior utilização de materiais diferentes para preservar o que foi escrito, chega-se ao momento da confecção e da encadernação de livros⁸. A partir desse salto - por meio do qual a humanidade consegue registrar e expandir o domínio sobre a escrita, bem como agregar novas formas para compilação e editoração de livros -, é possível vislumbrar o avanço das ciências e do conhecimento em geral (geográfico, histórico, cultural).

Então, apesar de todo avanço decorrido em diferentes áreas (técnicas, tecnológicas, científicas), parece-nos que pouco mudou no andamento em sala de aula, quando comparado com décadas anteriores: professor, alunos, lousa e, às vezes, um livro didático. Claro que existem exceções a essa regra e, principalmente, em outras áreas; diferentes recursos são utilizados: lousa digital, computador, internet, mas, quando olhamos para as aulas de matemática, a tríade livro – lousa – giz sobressai-se sobre os demais, e nos parece ser o livro didático o principal instrumento para além da lousa e giz.

Mas é necessário balizar nosso olhar também por outro prisma, como faz Freitag, Motta e Costa (1987), quando apresenta a ideia de que, se com o livro didático, o ensino está ruim, sem ele poderia ser bem pior. Para eles a dependência do livro é uma realidade:

Se com o livro didático o ensino no Brasil é sofrível, sem o livro será incontestavelmente pior: poderíamos ir mais longe, afirmando que sem ele o ensino brasileiro desmoronaria. Tudo se calca no livro didático. Ele estabelece o roteiro de trabalhos para o ano letivo, dosa as atividades de cada professor no dia-a-dia da sala de aula e ocupa os alunos por horas a fio em classe e em casa (fazendo seus deveres). (FREITAG; MOTTA; COSTA, 1987, p. 97-98).

⁷ Breve relato acerca dos diferentes materiais utilizados pelo ser humano no decorrer da história para registrar (escrever), pode ser encontrado em Caldeira (2002)

⁸ Artigo que relata o que poderia ser talvez o livro mais antigo do mundo, pode ser encontrado em Botelho (2006).

Isso parece ser um processo histórico. Ao rememorarmos nosso passado como alunos do Ensino Médio (antigo Segundo Grau), fica a indagação: como eram as aulas? Qual material utilizávamos na escola ou em casa? A evidência está em nossa própria percepção, no próprio fazer de estudante, em que o livro didático permeou toda trajetória de alunos e de profissionais da educação como o grande balizador dos trabalhos.

A dependência de um curso de matemática aos livros didáticos, portanto, ocorreu desde as primeiras aulas que deram origem a matemática hoje ensinada na escola básica. Desde os seus primórdios, ficou assim caracterizada, para a matemática escolar, a ligação direta entre compêndios didáticos e desenvolvimento de seu ensino no país. Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos. (VALENTE, 2008, p. 141)

Os livros de matemática como “opção”, em algumas realidades Brasil afora, talvez, tenham sido o único material disponível ao processo educacional. Para Imenes (1989, p. 65), “salvo exceções, ele é o único instrumento de trabalho de alunos e professores.”, uma característica própria perpassada e reafirmada por gerações, em que o debruçar-se sobre o livro permitia alçar voos para além das limitações de espaço físico e financeiro de pequenas e médias escolas. No entanto, quando é possível a utilização de diferentes recursos que não somente o livro didático, outras dinâmicas se permitem agregar às aulas, sobre as quais Choppin (2004) faz juízo ao referir que

O livro didático não é, no entanto, o único instrumento que faz parte da educação da juventude: a coexistência (e utilização efetiva) no interior do universo escolar de instrumentos de ensino-aprendizagem que estabelecem relações de concorrência ou de complementariedade influi necessariamente em suas funções e usos. Estes outros materiais didáticos podem fazer parte do universo dos textos impressos (quadros ou mapas de parede, mapas mundi, diários de férias, coleções de imagens, “livros de prêmios” – livros presenteados em cerimônias de final de ano aos alunos exemplares – enciclopédias escolares) ou são produzidos em outros suportes (audiovisuais, softwares didáticos, CD Rom, internet, etc). Eles podem, até mesmo, ser funcionalmente indissociáveis, assim como as fitas cassete e os vídeos, nos métodos de aprendizagem de línguas. O livro didático, em tais situações, não tem mais existência independente, mas torna-se um elemento constitutivo de um conjunto multimídia. (CHOPPIN, 2004, p. 553)

Se foi o livro didático o material que perpassou gerações de educadores, há que se considerar as heranças, os valores, as tradições e os momentos distintos, únicos e próprios ao seu tempo, o que se vivenciava e sobre que tipo de situação fora moldado e escrito. Choppin (2004, p. 566) traça uma referência importante a esse respeito, quando apresenta a ideia do livro didático como não sendo apenas um produto intelectual ou pedagógico, mas a confluência de diferentes

signos na perpetuação e validação de identidades nacionais, crenças religiosas, tradições e costumes.

De outra feita, seria crível, talvez, afirmar que a influência e a “pressão” das editoras, que surgem no decorrer das décadas do século passado⁹, se apresentam de uma forma expansionista, em que o livro deixa de ser um produto voltado apenas ao universo educacional e passa a ter uma relação mercantil capitalista, numa corrida frenética para abocanhar o maior número de escolas que surgiam, especialmente a partir das décadas de 1930 e 1940. Choppin (2004) aponta isso quando realça a universalização do livro, identificando *a priori* que “uma das razões essenciais é a onipresença — real ou bastante desejável — de livros didáticos pelo mundo e, portanto, o peso considerável que o setor escolar assume na economia editorial nesses dois últimos séculos”. (CHOPPIN, 2004, p. 551)

Como aumentava consideravelmente a demanda por educação, foi necessário ao Governo adequar-se a isso. Criação de leis, ajuste e manutenção dos prédios existentes, construções de novos locais para alcançar a grande leva de novos alunos, enfim, organizar toda cadeia relacionada à educação. Talvez nessa avalanche que se transformou os caminhos para a educação, as editoras tenham buscado estreitar relacionamentos com os governos, (nacional, estadual ou municipal), apresentando obras que agradassem ou perfilassem às “necessidades” do MEC – Ministério da Educação (ou órgãos equivalentes) nos períodos compreendidos a partir de 1930. Talvez o pensamento de Choppin (2004) possa parecer rude ou irônico, mas representa bem essa ideia de que

Escrever a história dos livros escolares — ou simplesmente analisar o conteúdo de uma obra — sem levar em conta as regras que o poder político, ou religioso, impõe aos diversos agentes do sistema educativo, quer seja no domínio político, econômico, lingüístico, editorial, pedagógico ou financeiro, não faz qualquer sentido (CHOPPIN, 2004, p. 561)

Uma expressão disso se dá em Miorim (2014), quando trata a respeito das revistas impressas por três editoras brasileiras para divulgação de livros e do universo da editora, com artigos, reportagens e propagandas referentes à educação. Chama atenção quando apresenta a revista Aula Maior, da EDART – Livraria Editora LTDA, que, em seu lançamento,

No editorial, intitulado “Uma revista Voltada ao Ensino e Divulgação da Ciência”, a editora esclarece que a linha editorial da revista é dirigida ao ensino secundário e à divulgação da Ciência, e que tem colaborado com a Universidade de Brasília

⁹ Talvez as mais importantes: Companhia Editora Nacional – Livraria Editora LTDA (EDART) – Editora Atual.

e o IBECC – Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura – “na campanha de renovação e métodos didáticos e do material do ensino para os nossos cursos secundários” (Aula Maior, ano 1, n. 1, set. 1965, p.4) **Colocando-se como uma parceira das iniciativas governamentais nas mudanças para o ensino médio, uma vez que considera estar nesse nível de ensino “as maiores falhas do sistema educacional brasileiro”** (Aula Maior, ano 2, n. 2, jun. 1966, p. 3) a EDART defende uma educação mais moderna, que valorize as ciências experimentais e contribua para o desenvolvimento e progresso do país. (MIORIM, 2014, p. 173)

O nicho educacional começava a despertar o interesse das editoras, pois era um mercado em ampla ascensão, com uma única obrigação, passar pelo crivo dos órgãos de fiscalização, ou seja, as publicações destinadas à educação deveriam seguir a liturgia do Governo e ter aprovação dos órgãos competentes, especialmente depois de 1930, quando são criados o INL e a CNLD¹⁰. A estes foram atribuídas competências para aprovar, reprovar ou solicitar modificações nos livros didáticos, conforme legislação específica. É o caso do Decreto-Lei nº 1006 de 30 de dezembro de 1938, em que é definida, dentre outras, sua ação de “examinar os livros que lhe forem apresentados, e proferir julgamento favorável ou contrário à autorização de seu uso.” (SILVA, 2016, p. 1000)

No decorrer dos anos, e com a alternância do poder na capital federal, as regras mudavam conforme a “ideologia” de quem governava, mas o controle, desde quando criado, manteve-se a todo vapor, ora pendendo para um lado, ora para outro. Nos anos do governo da Ditadura Militar, eram os acordos com os norte-americanos que ditavam a forma de controle, coerção, tanto que “o que os funcionários e assessores do MEC descreviam como ajuda da USAID era denunciado por críticos da educação brasileira como um controle americano do mercado livreiro, especialmente do mercado do livro didático.” (FREITAG; MOTTA; COSTA, 1987, p. 7)

Mas, apesar de todo esse aparato, o livro didático teve importância no desenvolvimento das atividades em sala de aula, uma vez que professores e alunos passaram a utilizar uma ferramenta que, de certa forma, “uniformiza” o ensino da matemática. É preciso explicar que essa uniformização não se dá na questão de conteúdo, didática ou sequência de assuntos, visto que cada obra, livro, autor, abrangia certos conceitos e assuntos em detrimento de outros. O termo gira em torno de uma padronização do livro como material áureo da sala de aula, apoiado no fato de que surge no horizonte uma proliferação de escolas por todo o país, não apenas patrocinadas pelo Governo, mas também pela iniciativa privada ou por ordens religiosas. Sendo assim, a proporção de livros editados

¹⁰ Respectivamente em 1937 e 1938 – Instituto Nacional do Livro e Comissão Nacional do Livro Didático.

aumenta consideravelmente, fato que Choppin (2004), ao escrever a respeito do livro no Brasil, apresenta que “os livros didáticos correspondiam, no início do século XX, a dois terços dos livros publicados e representavam, ainda em 1996, aproximadamente a 61% da produção nacional.” (CHOPPIN, 2004, p. 551)

Essa importância não se perdeu com a modernização ou a globalização. Se, na atualidade, os educadores, as escolas e os alunos dispõem de outras ferramentas que permitem transformar ou servir de apoio ao professor na maneira de fazer educação, é necessário apontar para o extremo, pois existe um outro lado, uma parcela considerável da população estudantil que continua tendo o livro como guardião do saber acadêmico em virtude da falta de acesso a essas modernas ferramentas. Então, é nesse ambiente que o livro didático cumpre o papel de ser este “ponto de apoio”, na mesma proporção imaginária sobre a qual Arquimedes teria exclamado: “Dêem-me um ponto de apoio e moverei a Terra”¹¹.

Outra escolha, determinante na pesquisa, é a restrição de olhar apenas para os conteúdos geométricos. Sabe-se que somos movidos por desafios e curiosidades, os quais, normalmente, estão relacionados entre si. Quando nos propomos a interagir com tais situações, buscamos, essencialmente, coisas e situações que nos proporcionam prazer e alegrias e, de outra sorte, tentamos nos afastar do que nos causa angústia e sofrimento. Nessa perspectiva, aponto para a geometria como essa situação de afinidade, alegria e prazer, que, nominalmente, traduz-se em minha preferência como profissional da educação. É claro que, para além desse fato, existem outras reflexões necessárias e que poderiam fazer parte do “panteão de nossas ideias”.

Tradicionalmente ocorre uma subdivisão da matemática em ramos: álgebra, geometria, trigonometria e aritmética. Nesses ramos, percebemos algumas regras próprias. É como se tivéssemos um conjunto de jogos de linguagem que chamamos de matemática escolar, a qual é composta por subconjuntos não disjuntos, ou seja, que possuem interseções. É impossível praticar o

¹¹ “Há outras histórias a respeito de Arquimedes. Uma delas diz que, quando Hierão lhe perguntou qual o tamanho de um peso que pudesse ser movido por uma pequena força, Arquimedes demonstrou como ele sozinho poderia puxar um navio de três mastros arrastado para a praia por vários homens.” (RONAN, 2001, p. 119)

jogo da geometria analítica sem praticar o da álgebra, e, até mesmo no da geometria “euclidiana” (plana e espacial), a aritmética é presente, mais atualmente do que nos tempos de Euclides, pois percebemos na escola a ênfase que é dada ao cálculo de áreas e volumes. No entanto, em nossa pesquisa, a fim de torná-la viável, já que pretendemos olhar atentamente para diversos livros didáticos de diferentes épocas, nos ateremos especificamente aos conteúdos geométricos com suas interseções.

Além disso, a geometria é um assunto em evidência nos trabalhos mais recentes do Grupo Hemep – História da Educação Matemática em Pesquisa, desde a dissertação de Moreira (2018), que inaugura este assunto, e isso acaba, de certo modo, por inserir determinado corte no grupo, porquanto, a partir desse momento, ocorrem outros trabalhos voltados ao tema. No entanto, as abordagens e os procedimentos metodológicos têm se definido de forma multifacetária, com múltiplas realidades e conceitos teóricos, apesar de momentos, épocas e direcionamentos distintos, ora margeando a Hermenêutica de Profundidade, ora a História Oral ou ainda os Jogos de Linguagem. (PINTO, 2022)

Acho que me estendi em meus devaneios! Após essa viagem, preciso retornar, encontrar terra firme, buscar o concreto e deixar o hipotético, preciso ancorar em algum porto seguro, onde haja noção e base para transitar. E este é o momento de balizar meus pensamentos. Se “navegar é preciso”¹², planejar e experienciar é a base lógica para o intento de se chegar ao destino. Mesmo sabendo que poderá haver mudanças do trajeto, e quem sabe, até do destino. No pouco que avancei nessa pesquisa, já me desviei do projeto em alguns pontos, como, por exemplo, do recorte temporal, que, necessariamente, não abrangerá

¹² No sentido que Fernando Pessoa traz em suas Memórias Poéticas (livro de mesmo título), ou talvez no sentido original, quando o General Romano Pompeo esbraveja: “navegar é preciso, viver não é preciso”. Penso que as duas sentenças têm suas similitudes, porém, grosso modo, são opostas. Navegar é preciso, pode-se inferir que a navegação era um caminho, ou talvez o único caminho para determinados locais e assim, era imperioso navegar, necessário navegar – de outra forma, tem-se a ideia de que o navegar é algo preciso na medida em que se faz uso de instrumentos e técnicas que darão norte as embarcações, fazendo deste navegar algo seguro e com precisão adequadas. Se observarmos ainda a premissa a seguir, na fala de Pompeo e que Pessoa também apresenta – viver não é preciso – numa leitura menos atenta, mais preguiçosa e menos acurada, pode-se chegar à ideia de que a vida não é necessária, pode ser dispensada (talvez no sentido estrito do afã heroico [ou louco]). Mas a tomo no sentido de expressar as várias vias ou metamorfoses que a vida pode tomar, dos rumos e dos ventos contrários que podem jogar com a vida e forçá-la a dar voltas. Também e de forma mais densa, intento a respeito da fragilidade que é o ato de viver e o cuidado que requer manter-se a vida... viva. Assim, desta forma, viver não é preciso, mas impreciso, que pode num instante chegar ao fim, perdida [numa bala], soterrada [num estalido de barragem de dejetos], sepultada [numa vala comum] em decorrência de uma gripezinha [que virou pandemia].

todo o século XX, mas respeitará a delimitação a que nos propomos – Ensino Médio –, pois tem-se, a partir de 1930, na Reforma Francisco Campos, a divisão do Ensino Secundário em dois ciclos. E é o segundo ciclo deste o nível de ensino que entendemos ser equivalente ao que hoje nos referimos como Ensino Médio.

Outra escolha foi abarcar ainda a década de 2000, pois, ao nos encontrarmos com Manoel Paiva (2003), em sua dissertação de mestrado, percebemos que ocorreram mudanças significativas nos livros didáticos, em decorrência da criação do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), em 1998, de modo que poderia ser um indicativo do estabelecimento de uma nova vulgata. Assim sendo, o nosso recorte temporal compreende o intervalo entre os anos de 1930 e 2010.

A percepção de que este período possa ser demasiado longo pode causar preocupação, mas nossa intenção não reside numa conceituação total ou num mapeamento de tudo o que ocorreu em tão grande período. Isso não seria uma empreitada exequível, mas o que almejamos ao final dos trabalhos é a possibilidade de relatar as diferenças, pequenas nuances que possam demarcar movimentos e diferenciações.

Quanto às mudanças no projeto, não me estranharia nem um pouco se ainda tantas outras ocorrerem. Porém, ao mesmo tempo em que isso tem um lado bom, pois a pesquisa vai se delineando e encontrando seus próprios caminhos, também traz desconfortos e inseguranças.

Falando em mudanças, o livro de Vilela (2013) foi importante no processo de desconstrução que experienciei (e continuo experienciando) desde que ingressei no doutorado. Posso dizer que a minha formação até então tendia mais para o lado “matemático” do que o “pedagógico”, apesar de ter cursado uma licenciatura e um mestrado profissional em matemática com vistas ao ensino. Desse modo, cheguei ao doutorado cheia de ideias equivocadas em relação à Educação Matemática e à própria matemática, as quais foram confrontadas desde o primeiro dia de aula. Meu caminhar é marcado por muitos embates e

estranhamentos, que, frequentemente, me desestabilizam, mas também me transformam. Acredito não ser mais a mesma de antes do doutorado. Então, pergunto-me se seria eu também uma criatura em transformação, um Frankenstein? A resposta mais provável, talvez, seja um retumbante sim. Apesar de essa afirmativa ser categórica, fica a expressa dúvida nebulosa à espera de confirmação. À qual esfera “transformatória” pertencço, pois indago qual seria a direção, se o caminho aponta para o monstro ou se afasta dele. O fato é que não sei bem quem sou no momento, se minha transformação ocorre em que de Frankenstein passo a ser um pouco mais humana, ou se o caminho inverso, a cada dia passo a ter mais traços da criatura/monstro. Algo que somente o futuro revelará.

Enfim, onde eu parei? Achei! Vou continuar com a leitura do projeto...

Ao nos apropriarmos desse ideário, e com o intuito de obter embasamento adequado sobre a temática, passamos a buscar elementos adicionais em pesquisas que abordassem assuntos semelhantes, tendo como percepção a matemática enquanto prática social. Satisfatoriamente descobrimos, no decorrer das leituras e dos movimentos, a existência de um número significativo de publicações versando sobre a temática, ou em partes, tendo como foro (ou pano de fundo) a Educação Matemática.

Este nos parece ser o caso explorado por Pinto (2009), no qual trabalha questões relacionadas à linguagem em sala de aula de matemática na educação básica. Com o foco na interação entre professor e aluno, sua pesquisa objetivou constituir um mapa dos diversos usos da linguagem na sala de aula de matemática. Para tanto, utilizou-se do recurso da filmagem, para registrar as aulas de matemática de um professor e uma professora de diferentes escolas. Após a gravação, procedeu ao tratamento do material, editando-os em cortes de momentos das aulas. Então, identificou diversos eventos significativos para as análises, os quais designou de “eventos críticos”, conforme a metodologia de análise de vídeos proposta por Powel, Francisco e Maher. Em suas considerações, inspirado nos escritos do segundo Wittgenstein e na teoria dos Modelos dos Campos Semânticos, proposto por Lins, constatou que a sala de aula de matemática tem uma linguagem própria, ou um jogo de linguagem, mas também indica a existência de outros jogos de fora do ambiente

escolar, os quais se entrecortam. E, mesmo que em determinado local tenha-se o mesmo conteúdo, a mesma série, os jogos apresentados serão diferentes, possuem regras diferentes.

Nessa pesquisa, não pretendo olhar especificamente para a sala de aula, mas, ao me aproximar das conclusões de Pinto (2009), posso aventar que um dos jogos de linguagem que se manifestam na sala de aula é introduzido pelos livros didáticos. E acredito que este exerce uma influência significativa no ensino da matemática e molda em grande medida aquilo que é falado em sala.

Já Moreira (2018) olha para dois manuais de geometria (Geometria Euclidiana Plana de João Lucas Barbosa (2006) e Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométrica de Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz (2000)) frequentemente utilizados em cursos de licenciatura em matemática. Nesses manuais, com o apoio da Terapia Bibliográfica inspirada em Wittgenstein, tenta vislumbrar as semelhanças e as diferenças, até a parte correspondente ao quinto postulado de Euclides. Desse modo, constata diferenças significativas nos jogos de linguagens neles praticados, levando-o a suspeitar da existência de múltiplas geometrias. Por outro lado, há também semelhanças destes jogos com outros, entre eles, aqueles praticados por Euclides e Hilbert.

Não é por acaso que existem aproximações entre a dissertação de Moreira (2018) e a minha pesquisa, pois somos integrantes do mesmo grupo de pesquisa (HEMEP) e participamos do Projeto Práticas sociais, [M]atemáticas e Escola: entre Perspectivas Decoloniais e Terapêuticas Desconstrucionistas, além de compartilharmos o mesmo orientador. Apesar das semelhanças, acredito que poderei contribuir, e até ampliar as discussões propostas por Moreira, pois a abrangência se dá em outra etapa de ensino (Médio), período (1930-2010) e obras. Embora essas aproximações evidenciem aspectos semelhantes, também ocorrem distanciamentos, mas o fato é que Moreira (2018) me proporcionou um primeiro contato com a terapia gramatical inspirada em Wittgenstein.

De sorte, os trabalhos de Vilela (2013), Pinto (2009) e Moreira (2018) como pontapé primevo nos provocaram a garimpar leituras sobre jogos de linguagem, terapia gramatical, terapia bibliográfica, inspiradas nos escritos do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein (1889-1951). Destarte, apropriamo-nos de exemplos de como esses métodos terapêuticos de filosofar, singulares a cada problema, operam numa pesquisa em Educação Matemática ou áreas afins.

Dessa forma, encontramos a pesquisa de Osório (2017), que apresenta a comunidade indígena Gunadule de Alto Caimán (Colômbia), que, na construção de um jogo ficcional de cenas, transparece sua cultura, ideias, crenças, saberes, mesclado aos conhecimentos que paulatinamente foram sendo incorporados por meio da colonização, evidenciando, assim, uma multiplicidade tanto de jogos de linguagem quanto da existência de formas de vidas entrelaçadas ou híbridadas. Além disso, apresenta a ideia de escola como aparelho ideológico produtor de conhecimento, que tenta manipular e homogeneizar as formas de vida, bem como reproduzir pensamentos com o intuito de justificar sua superioridade (apogeu) sobre as demais expressões culturais. Ademais, legitima como padrão de vida o do europeu, do colonizador, do conquistador superior às demais formas de vidas. Tais constatações nas análises têm como embasamento uma atitude terapêutico-desconstrucionista alinhada aos pensamentos de Ludwig Wittgenstein e de Jacques Derrida.

O trabalho de Osório (2017) trouxe reflexões acerca das formas de vida, conceito cunhado por Wittgenstein que desejo mobilizar em minha pesquisa. Nessa perspectiva da incorporação de outros conhecimentos, ocorre a hibridação nas formas de vida, visto que expressa a ideia de transformação, de apropriação das formas de vida de outras "culturas", concomitantemente à definição de uma cultura original, não no sentido de única, mas no sentido de ser a cultura local, herdada, enraizada naquele espaço/localidade. Esse conceito de espaço perpassa o significado de uma unidade física territorial e abrange signos, expressões (corporal, oral, cultural, escrita) que se manifestam em determinada região e que a faz ser (re)conhecida por essas características e signos (jogos de linguagem).

Transportando essas ideias para a minha pesquisa, acredito que as formas de vidas envolvidas no processo de idealização do livro didático também estão sujeitas a essa mescla, que se refaz no encontro com novos conhecimentos,

outras formas de vida, outros momentos e práticas culturais e definem uma transformação do conhecimento original, que, em sua raiz, talvez já nem mesmo tenha algo de original; passa, então, a assumir essa hibridação entre jogos de linguagem, de nativos aos importados (de forma consensual ou imposta). Não há dúvidas de que o livro didático, assim como a escola, participa disso.

Observamos ainda o trabalho de Corrêa (2015), que faz uma investigação terapêutico-arqueológica inspirada em Wittgenstein, Foucault e Derrida, sobre as condições de emergência da Educação Matemática. Corrêa, ao abordar a tese de Paul Ernest, de que a Educação Matemática seria filha da Guerra Fria, seguindo rastros de significações, conecta jogos de linguagens de diferentes formas de vida, por meio de semelhanças de família estabelecida entre eles. Ao utilizar uma abordagem historiográfica terapêutica pós-historicista, faz no intuito de apontar novas possibilidades, e tem como ponto inicial o que fora dito. Em outras palavras, baseia-se no que está produzido para, então, acrescentar ou vislumbrar outras formas e sentidos a partir de rastros de significações, na tentativa de apontar respostas, não como limites ou definições, mas como forma de ultrapassar, modificar e desconstruir conceitos.

A pesquisa de Corrêa (2015) me fez repensar os modos de se fazer historiografia na Educação Matemática, desse modo, a intenção é o distanciamento dos padrões empírico-verificacionistas, no sentido de comprovar ou refutar a hipótese de partida. Bem como, não pretende mapear as produções sobre estas épocas, esquadrihar períodos ou buscar

“Talvez, a única diferença significativa entre esses dois projetos seria que, diferentemente de uma investigação filosófica, uma investigação historiográfica requereria “evidências empíricas”. Penso, porém, que nada há que nos impeça lidarmos terapeuticamente com evidências empíricas”, ou melhor, com “arquivos ou fontes historiográficas” – e falo assim para nos afastarmos de uma imagem cientificista e empírico verificacionista da história - de uma maneira não-empírica, e também, não-semiótica.” (MIGUEL; VIANNA; CORRÊA, 2020, p. 81)

evidenciar causas e efeitos ou, ainda, produzir uma narrativa explicativa sobre os momentos estudados. Nossa operação é, antes de tudo, anacrônica, compara tempos diversos em busca de divergências nos jogos de linguagem propostos nos livros quanto ao estudo da geometria, e se lança numa discussão de natureza

filosófica de olhar o passado a partir de uma questão: a possibilidade de múltiplas geometrias.

Nesse íterim, é que pretendemos praticar uma terapia gramatical para descrever de forma panorâmica jogos de linguagem matemáticos/geométricos propostos em livros didáticos do Ensino Médio do século XX, movimentando-nos em uma direção onde as diferenças e semelhanças ditarão o caminho a ser trilhado. Imaginamos, neste primeiro momento, que estes movimentos nos levem ao encontro de um estudo de múltiplas geometrias, permitindo, dessa forma, descristalizar terapeuticamente a geometria em contextos de ensino.

Esta pesquisa integra-se ao projeto Práticas Sociais, [M]atemáticas e Escola: entre Perspectivas Decoloniais e Terapêuticas Desconstrucionistas, que surge a partir de discussões no âmbito do Grupo História da Educação Matemática em Pesquisa (HEMEP), Grupo História Oral e Educação Matemática (GHOEM) e Grupo Educação, Linguagem e Práticas Culturais (PHALA), e tenciona problematizar os discursos sobre uma matemática única e universal, na intenção de buscar modos diferenciados de se pensar práticas matemáticas distintas, localmente situadas, e relacionando-as com as formas de vidas que as praticam, como forma de transpor as amarras universalmente aceitas, aspirando colocar a comunidade e a escola local como formas de vida existentes, no centro deste fazer matemática.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

Descristalizar terapeuticamente a geometria do século XX em contextos de ensino.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- *Identificar, por meio de levantamento histórico, livros didáticos pertencentes a determinadas vulgatas escolares estabelecidas no decorrer do século XX que contemplem os conteúdos geométricos do Ensino Médio;*
- *Descrever de forma panorâmica jogos de linguagem matemáticos/geométricos presentes em livros didáticos do século XX das etapas finais da educação básica.*

Apropriadamente, tenho a impressão de que a comparação entre diferentes obras de diferentes momentos históricos, a priori, poderá apresentar

semelhanças e diferenças. E isso pode expressar a ideia de múltiplas matemáticas/geometrias. Com sorte, apontará ainda, que, nesses determinados momentos da história, os livros e consequentemente, a matemática (e a geometria) foram influenciados pelas formas de vida de gestão político-administrativa e econômica, entre outros fatores que afetaram a criação, a publicação e a utilização dos livros didáticos. Compreendendo que a caminhada em torno da edição e distribuição (venda) de livros envolve outros atores e fatores que poderão determinar ou moldar tais situações, julgo importante apresentar que, embora haja controvérsias, o livro também é um processo e um produto do meio em que será inserido. Vale, neste sentido, pensar se todas as ramificações ou influências deste ou daquele segmento, pedagogias novas ou ultrapassadas e a propensa ideia de que, ao envolver um número maior de profissionais ou classes segmentárias, bastaria para produzir uma obra (livro) em que a temática e as finalidades abarcassem uma totalidade absoluta, ou uma margem de assuntos, que ou coadunassem com o momento da educação brasileira ou extrapolassem esse momento para outra realidade.

O que nos propomos é embarcar na aventura de olhar, especular, dissecar, costurar e, talvez, sentir o odor, ou outro cheiro característico das entranhas dos livros (pensando metaforicamente no que seria remexer o interior de Frankenstein) os quais elegemos como base para este trabalho. Nesse sentido, ateremo-nos somente à forma de vida científico-acadêmica envolvida na prática de confecção de livros didáticos destinados ao Ensino Médio e seus equivalentes, no recorte temporal delimitado. Se ampliássemos esse debate a outras formas de vida ligadas às práticas marítimas, aeronáuticas, cartográficas, artísticas, semelhantemente ao que Vilela (2013) fez ao tensionar a oposição entre matemática escolar e a de grupos profissionais, poderíamos evidenciar, com ainda mais nitidez, as diferenças entre os jogos de linguagens que praticamos a partir dos livros didáticos (destinados a escola) e aqueles praticados pelos diversos profissionais. Acho que aí reside o nosso grande desafio: evidenciar,

dentro da mesma prática, as diferenças perceptíveis em decorrência das mudanças impostas às formas de vida, atuantes no meio escolar.

3. METODOLOGIA

Com o intuito de descrever de forma panorâmica os jogos de linguagem matemáticos/geométricos presentes em livros didáticos do século XX, praticaremos uma atitude terapêutico gramatical-desconstrucionista, inspirados em Miguel (2015a; 2015b; 2016) e nas ideias de Ludwig Wittgenstein e de Jacques Derrida.

A terapia gramatical-desconstrucionista não é um método estático, mecânico, com fronteiras delimitadas, no sentido de cercear os caminhos e descaminhos a serem percorridos pelo pesquisador, visto que a cada jogo de linguagem e a cada problema aplicam-se terapias adequadas e próprias a tais situações, evitando, dessa forma, generalizações ou ainda um modelo único de pensar a pesquisa. Para Miguel (2015a, p. 629) , tal atitude “sugere um modo não analítico de se lidar com os jogos de linguagem do arquivo cultural relativo a uma investigação.”

Ainda, segundo Miguel (2015a, p. 626), o pesquisador necessita definir seu problema ou questão de pesquisa e lançar mão de um arquivo cultural de partida (conjunto de jogos de linguagem relevantes à investigação) para dar início à investigação. Esse arquivo cultural não poderá se configurar em algo hermeticamente fechado, mas desconstruído, (re)construído e ampliado durante todo percurso da pesquisa. Para Miguel, esse método de investigação impacta em sentido amplo a pesquisa historiográfica, pois

Esses modos distintos, porém semelhantemente pós-epistemológicos, de se conceber a linguagem por parte de Derrida e Wittgenstein abrem o campo da pesquisa historiográfica a um conjunto ilimitado de novos objetos e fontes de investigação que sequer chegaram a ser incluídos nas histórias convencionais da Matemática e da Educação Matemática. (MIGUEL, 2016, p. 376)

Esta jornada apenas evidenciava seus primeiros passos, ainda tínhamos muito a percorrer, especialmente pelo fato do pouco contato com as obras a respeito da Terapia Gramatical-Desconstrucionista, tal como é mobilizada nos trabalhos do grupo PHALA (Grupo Educação, Linguagem e Práticas Culturais). E, mesmo no decorrer do tempo, e algumas leituras a mais, só consegui perceber a complexidade e a densidade das leituras, a ponto de pensar em desistir. Mas, no caminhar da pesquisa, me pareceu que o modo (auto) terapêutico de investigação

“E esse papel ‘desconstrucionista’ que Wittgenstein reserva à filosofia não o leva a constituir ou reivindicar uma outra filosofia ou teoria filosófica, mas tão somente a prática (auto)terapêutica de investigação gramatical – por ser ela vista como uma prática que investiga as gramáticas - de problemas que a nós se manifestam entretecidos, de formas múltiplas e diversas, em diferentes formas de vida. Dado que, para Wittgenstein, cada problema requer um tipo específico e idiossincrático de terapia, os diferentes modos de se praticá-la não podem constituir um método unitário, generalizável e prescritivo. [...] Ainda que “devido a esta idiossincrasia tópica ou local de uma atitude (auto)terapêutica na investigação de um problema, não é possível fundamentar, caracterizar ou descrever genericamente essa atitude e as práticas que ela instaura.” (MIGUEL; VIANNA; CORRÊA, 2020, p. 11)

gramatical de Wittgenstein se aproxima mais do que pretendo fazer. Obviamente, não estou querendo dizer que assim ficará mais fácil, que são leituras menos densas, pelo contrário, a cada texto, a cada discussão, sinto-me “como uma criança que cata conchinhas à beira do grande e inexplorado oceano da verdade”¹³.

Essa imagem me encanta e me assusta, pois é insano pensar que diante da imensidão do mar

fosse possível resgatar todas as conchinhas da areia que a maré joga todos os dias na praia, seria um trabalho penoso, incoerente, ineficiente e pouco produtivo, pois novamente a maré e as ondas trariam mais conchinhas e, talvez, até as mesmas que anteriormente eram resgatadas e jogadas ao mar, assim havia me colocado diante dos escritos de Wittgenstein, como a criança que pensa poder salvar todas as conchinhas da areia.

A tentativa de dar sentido ao meu pensamento, percorrendo caminhos e descaminhos que me direcionassem a possíveis certezas sofreram com ventos de todos os lados, a favor e contrário, levando minha nau à ruína. Como entender, como chegar ao âmago do pensamento de Wittgenstein, ou ainda, como chegar ao menos perto, próximo daquilo que comumente se concorda como sendo o pensamento dele. Mas aí me apego ao que muitos já escreveram, falaram dele, em que, ao utilizar seus modos terapêuticos de investigação, não tentou impor fórmulas, rótulos ou catalogações, ele apenas praticava, de modo único, variando essa prática diante das situações que se apresentavam. É por isso que essas

¹³ (SHELLEY, 2012, p. 41)

“LW usa a metáfora da doença para se referir ao problema a ser levado ao divã terapêutico e, por extensão, ao problema a ser investigado por uma historiografia terapêutica. Em ambos os casos, o problema assume a forma de uma doença, a fisionomia de uma doença. Uma doença, após manifestar os seus sintomas, os seus sinais, evolui, mas não necessariamente no sentido de sua cura, no sentido teleológico de um progresso ético para um bem, para um bom, para um estado melhor, não, portanto, no sentido de uma historiografia whig, inglesa, em que uma doença é vista como um estado de barbárie, de infantilidade, de loucura, de selvageria, de selvagem, de ameríndios que deve progredir para uma cura, para um estado sadio e são do corpo. Parece que LW vê, então, uma doença como um mal-entendido semântico, como confusão semântica, como falta de clareza de sua fisionomia, como falta de clareza de sua gramática. O seu remédio - nem determinista-otimista e nem determinista-catastrófico e, portanto, nem frazereano, nem spengleriano e nem freudiano – é o de exibir a apresentação panorâmica das conexões entre os sintomas, das conexões que mostram como e em que direções e sentidos os sintomas se transformam, que fisionomia assumem, tendo em vista, porém, que eles podem ser vistos de outras maneiras, adquirir outras fisionomias imprevisíveis e, portanto, não deterministas.” (MIGUEL; VIANNA; CORRÊA, 2020, p. 79)

leituras foram de suma importância para a realização desta pesquisa, não com o intuito de apropriar-me de um método de investigação, e, sim, de uma atitude terapêutica frente à doença (problema) a ser tratada (investigado).

Deste modo, ou a este modo tentarei dar ritmo a minha escrita, dar voz as minhas mais puras percepções, utilizando-me de todos os sentidos e emoções possíveis (o que vejo, o que sinto, o que escuto, o que sofro, o que me alegra...). E

neste processo de tentar elucidar minhas intenções e pensamentos e a partir disso colocar no papel, o que transparecerá entre as linhas, parágrafos e páginas são rastros de um espectro, que ao final de tudo se constituirá em nossas análises, num processo terapêutico de descrever analogicamente conexões entre retalhos, explorando as suas semelhanças e diferenças, mas, sem levantar hipóteses e teses para confirmá-las ou refutá-las.

Continuando a leitura do projeto...

Sendo assim, constituirão nosso arquivo cultural de partida os trabalhos publicados nos anais do ENAPHEM – Encontro Nacional de Pesquisa em Educação Matemática. No entanto, não nos prenderemos de forma restrita a esse material, pois a cada trabalho, a cada leitura, a cada fonte, vislumbramos experienciar diferentes e diversas formas que proporcionem ampliação desse cabedal de informações. O intuito

dessa compilação de dados, de ter um arquivo cultural é proporcionar caminhos alternativos às informações (pré)adquiridas, numa simbiose, em que se possa mesclar, fazer, refazer, desfazer, propositar alternativas perante cada nova informação adquirida.

A escolha por esse evento se deu em virtude de ser um importante espaço para divulgação, debate e troca de experiências entre pesquisadores em história da educação matemática, sendo que o I ENAPHEM ocorreu na cidade de Vitória da Conquista/BA dos dias 01 a 03 de novembro de 2012. A iniciativa para a realização deste evento partiu de professores brasileiros com pesquisas em história da educação matemática participantes no I CIHEM – Congresso Ibero-americano de História da Educação Matemática. Para se ter uma ideia da abrangência deste 1º evento, sinalizamos para as informações apontadas no site do próprio evento, em que constam 447 inscritos, 32 trabalhos aprovados na modalidade comunicação oral e 59 na modalidade pôster.

Ao nos aproximarmos de Valente (2016), observamos que o modo de tratamento da matemática na escola passou por vários movimentos ao longo do tempo. Portanto, lançaremos nosso olhar para o arquivo cultural tentando evidenciar os principais movimentos e/ou reformas educacionais ocorridos no século XX, tendo como norte aqueles que, de alguma forma, influenciaram o ensino da matemática. Buscaremos ainda pesquisas que apontem quais livros didáticos caracterizaram uma vulgata escolar nos diferentes momentos do referido século, pois, conforme aponta Valente (2004),

[...] numa dada época, para o ensino de uma disciplina, todos os livros didáticos “dizem a mesma coisa, ou quase isso”, trata-se do que Chervel denomina constituir o fenômeno da vulgata. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a organização da seqüência de ensino e dos capítulos, o conjunto de exemplos fundamentais utilizados ou o tipo de exercícios praticados são quase idênticos ou apresentam pouquíssima variação. (p. 173)

Talvez seja importante esclarecer que não pretendo fazer dos anais do ENAPHEM o foco das análises, mas, sim, o disparador de fontes, que me ajudarão a evidenciar as reformas educacionais ocorridas no recorte temporal e, assim, estabelecer os marcos temporais, ou, ainda, os cortes nos fluxos em que a educação brasileira estava posta. A partir disso, procurarei evidenciar uma obra, em especial, a que integra o fenômeno da

“Uma máquina-órgão é conectada a uma máquina-fonte: esta emite um fluxo que a outra corta.” (DELEUZE; GUATTARI, 2010, p. 11)

vulgata, de cada intervalo demarcado para constituir meu arquivo cultural de análise: a diferença na semelhança.

Esse exercício de olhar os artigos e livros me traz à mente a construção, confecção, materialização do Frankenstein, pois cada “pedaço” da história que

“O estudo dos conteúdos beneficia-se de uma documentação abundante à base de cursos manuscritos, manuais e periódicos pedagógicos. Verifica-se aí um fenômeno de “vulgata”, o qual parece comum às diferentes disciplinas. Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do corpus de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas. São apenas essas variações, aliás, que podem justificar a publicação de novos manuais e, de qualquer modo, não apresentam mais do que desvios mínimos: o problema do plágio é uma das constantes da edição escolar.” (CHERVEL, 1990, p. 203)

pretendo apontar neste texto abre um leque de possibilidades. É como se a união

“De modo que tudo é produção: produção de produções, de ações e de paixões; produções de registros, de distribuições e de marcações; produções de consumos, de volúpias, de angústias e de dores. Tudo é de tal modo produção que os registros são imediatamente consumidos, consumados, e os consumos são diretamente reproduzidos.” (DELEUZE; GUATTARI, 2010, p. 14)

das partes, os recortes, as junções e os comentários passassem a compor este ser único e exclusivo, diferente de qualquer outro, e ainda que pesquisado nos mesmos moldes, ou mesmo assunto, ou ainda mesma linha de investigação, mesmas perspectivas - o produto final, o ser-monstro existiria com características distintas de outro ser-

criatura, teria sua própria essência [ou de seu autor(a)], diferentemente de qualquer outra obra ou criação. Penso que, a partir do “descobrimento” da escrita e formas variadas de expressões (desenhos, figuras), passamos a criar e recriar cotidianamente infinitos Frankensteins, que, em seus relacionamentos com o mundo, sofrem e propõem transformações. O monstro Frankenstein é a máquina de máquinas, junção de pedaços, acoplamento de diferentes máquinas, aquela que recebe luz e a converte em sinais elétricos, a máquina que corta esse fluxo e o transporta para outra que o processa e converte em outros sinais elétricos, que são cortados por outra máquina, ou máquinas, que colocam um pé após o outro e transformam o monstro em uma máquina de andar.

De posse dos referidos livros, que, de certa forma, mobilizaram ideias, concepções, práticas e modos de ver a geometria na escola, realizaremos uma terapia gramatical, na perspectiva dos jogos de linguagem de Wittgenstein, de certa forma, comparando-os, porém não com a intenção de classificá-los ou hierarquizá-los, mas sim numa tentativa de elucidar semelhanças e dessemelhanças nos jogos de linguagem praticados a partir deles.

Os jogos de linguagem figuram muito mais como objetos de comparação, que, através de semelhanças e dessemelhanças, devem lançar luz sobre as relações de nossa linguagem. (WITTGENSTEIN, 1999, p. 68)

Esta é uma história que queremos contar, o caminho a ser percorrido, como na obra de Cervantes, em que o heroico andante, talvez delirante, Dom Quixote, investe contra moinhos de vento, pensando desafortunadamente serem gigantes. Assim agimos nós, na tentativa de lograr êxito, nos colocando, ou não, diante de “moinhos de ventos”, no trato daquilo que consideramos essencial para a jornada, ou seja, os jogos de linguagem de Wittgenstein.

4.RESULTADOS ESPERADOS

Ao compararmos os jogos de linguagem praticados a partir dos livros didáticos de matemática do século XX, se pudermos afirmar que foram forjados diferentes (ainda que preservem algumas semelhanças) modos de perceber e difundir o ensino de geometria, ao elucidar os jogos de linguagem ali praticados, de sorte, nos ocorrem questionamentos que, no decorrer da pesquisa, poderão ser confirmados, refutados ou ainda reformulados: será que tais diferenças acontecem apenas por conveniência didática? Ou o que temos são, em certo sentido, diferentes geometrias? Mas, para além de obter respostas, o que pretendemos é construir uma apresentação panorâmica do conjunto de jogos de linguagem conectados legitimamente por semelhanças de famílias¹⁴ nas práticas humanas.

¹⁴ Wittgenstein concebe a linguagem, na verdade, como um conjunto de jogos de linguagem, e alega não existir algo comum em todos esses jogos, que possa defini-los como linguagem ou partes da linguagem, “mas sim que estão aparentados uns com os outros de muitos modos diferentes.” (WITTGENSTEIN, 1999, p. 52). E no aforismo seguinte Wittgenstein tenta elucidar o que ele está querendo dizer com os parentescos entre os jogos de linguagem. “Considere, por exemplo, os processos que chamamos de “jogos”. Refiro-me a jogos de tabuleiro, de cartas, de bola, torneios esportivos etc. O que é comum a todos eles? Não diga: “Algo deve ser comum a eles, senão não se chamariam ‘jogos’”, – mas veja se algo é comum a eles todos. – Pois, se você os contempla, não verá na verdade algo que fosse comum a todos, mas verá semelhanças, parentescos, e até toda uma série deles. Como disse, não pense, mas veja! – Considere, por exemplo, os jogos de tabuleiro, com seus múltiplos parentescos. Agora passe para os jogos de cartas: aqui você encontra muitas correspondências com aqueles da primeira classe, mas muitos traços comuns desaparecem e outros surgem. Se passarmos agora aos jogos de bola,

Pronto! É isso que eu quero fazer. Agora resta descobrir o que eu vou fazer!

muita coisa comum se conserva, mas muitas se perdem. – São todos ‘recreativos’? Compare o xadrez com o jogo da amarelinha. Ou já em todos um ganhar e um perder, ou uma concorrência entre os jogadores? Pense nas paciências. Nos jogos de bola há um ganhar e um perder; mas se uma criança atira a bola na parede e a apanha outra vez, este traço desapareceu. Veja que papéis desempenham a habilidade e a sorte. E como é diferente a habilidade no xadrez e no tênis. Pense agora nos brinquedos de roda: o elemento de divertimento está presente, mas quantos dos outros traços característicos desapareceram! E assim podemos percorrer muitos, muitos outros grupos de jogos e ver semelhanças surgirem e desaparecerem. E tal é o resultado desta consideração: vemos uma rede complicada de semelhanças, que se envolvem e se cruzam mutuamente. Semelhanças de conjunto e de pormenor.” (WITTGENSTEIN, 1999, p. 52). No entanto, nos adverte Miguel, Vianna e Corrêa (2020, p. 68) “[...] embora seja metodologicamente legítimo *usar wittgensteinianamente este conceito* para estabelecer e descrever semelhanças ou diferenças entre aspectos de dois ou mais jogos de linguagem, é *ilegítimo* acioná-lo para tirar conclusões definitivas do tipo sim ou não, verdadeiro ou falso, existe ou não existe, real ou fictício.”

*Descansamos; um sonho tem o poder de envenenar o sono.
Levantamo-nos; um pensamento vagabundo polui o dia.
Sentimos, concebemos ou raciocinamos; rimos ou choramos,
Abraçamos a amorosa dor ou repelimos nossas preocupações;
É o mesmo: pois, seja alegria ou tristeza,
O caminho de saída continua livre.
O ontem do homem talvez nunca seja como o amanhã;
Nada persiste, salvo a mutabilidade!*

[Do poema “Mutability”, de Shelley]

CARTA 2

21 de abril de 2020

Hoje uma insegurança tomou conta de mim... Como que envolta por paredões de ondas intransponíveis de um oceano bravo que teima em levar meus pensamentos e sentimentos ao naufrágio. O medo é perverso e constante, e se não existir socorro, salvação? E torno a pensar... Será que estou fazendo certo a pesquisa? Será que existe um modo certo de pesquisar? Qual deveria ser o primeiro passo? Será que existe um caminho mais fácil? E as ondas pensadamente insistem em bater, bater, e jogar meu coração de um lado para outro, parece não haver no horizonte um fio de esperança, uma única chance de chegar a algum lugar, mas vou. Vou tentar explicar a direção que decidi seguir: como pretendo olhar para a geometria do Ensino Médio, pareceu-me muito razoável que o primeiro passo deveria ser o de entender as transformações ocorridas nessa etapa de ensino, e, gradativamente, ao me apossar de informações pertinentes ao andamento da pesquisa alargar os horizontes para os livros didáticos de matemática que poderiam ter sido referências daqueles períodos. Lá vou eu assombrar meus fantasmas, seria possível isso? Assustar os fantasmas que tanto me causam medo? Mas é necessário vasculhar, remexer em questões desconfortáveis, informações e dados que se mesclam a história do país, como é penoso e assustador. Pois bem, é preciso encarar os monstros, que eu mesma criei, pois me coloquei nesse rumo, e foi isso que eu fiz! Como planejado no projeto, comecei a revisar os trabalhos dos anais do ENAPHEM e, a partir deles, travar encontros com outras referências. Essa tarefa despendeu certos movimentos que margearam entre o rigorismo, o improviso, a criatividade, a passividade, numa metodologia própria, pois, ao mesmo tempo em que os artigos dos anais me indicavam caminhos que levavam a outros trabalhos interessantes, também proporcionaram, às vezes, um distanciamento do real foco que buscava, e isso pode ter sido uma falha minha... Ou seriam os fantasmas,

as aparições, as ondas bravias, ou os Frankensteins que eu pensava criar, e, mesmo antes de criá-los, já tinham poder sobre mim, pressionando e me deixando exausta por sequer tê-los criados? É certo que ficava muito perdida com tantas referências, e o primeiro ato, então, para tentar me organizar, foi criar uma tabela com as referências que, a princípio, poderiam me ajudar e os trabalhos nelas citados, mas ainda assim me via imersa nesses textos, na maioria das vezes, me afogando, e as ondas a caírem sobre minha cabeça, ficando sem fôlego, sem saída, sem perspectiva, só destruição e medo ao redor... E, quando recobrava a consciência e me tornava dona dos meus atos novamente, sentia que havia possibilidade de alcançar um porto, uma ilha, uma enseada. Uma outra tentativa de organização foi criar fluxogramas com essas referências e, à medida em que os revisava, marcações eram feitas. Então, de mergulho em mergulho, de sufoco em sufoco, foram se abrindo alternativas, e pude aproveitar águas mais serenas. Após a seleção dos trabalhos que poderiam pautar meu caminhar, iniciei uma leitura mais atenta dos artigos de Oliveira Filho (2012) intitulado "A Disciplina Escolar Matemática do Colégio e a Variação de sua Vulgata no Período 1930-1970" e Oliveira Filho (2014) intitulado "O Processo de Constituição da Disciplina Matemática do Colégio no Período 1943-1961", os quais me levaram a sua tese "A Matemática do Colégio: livros didáticos e história de uma disciplina escolar"¹⁵, defendida em 2013. Esses três textos foram responsáveis por me tirar o chão, como se eu estivesse flutuando, olhando a vida do alto, sob a ótica dos pássaros, pois, quando ainda estava pensando no projeto de pesquisa, uma escolha que fizemos (meu orientador e eu), até para percorrer um caminho seguro, foi procurar por pesquisas que falassem sobre o fenômeno das vulgatas dos livros didáticos de matemática do Ensino Médio. E foi nesse momento que meu caminho seguro desmoronou, pois, em suas conclusões, Oliveira Filho sugere que (no recorte temporal por ele estudado) só foram identificadas vulgatas nas décadas de 1940 e 1950. Inerte fiquei, talvez até catatônica - repentinamente o céu desabou, a tempestade virou furacão, o chão, outrora firme, virou lamaçal,

¹⁵ (OLIVEIRA FILHO, 2013)

atoleiro, pegajoso, pantanoso, assustador e perigoso, impróprio para a caminhada, e outra vez nossa jornada precisou ser redirecionada. Mas para onde? Não posso perder o rumo, este, para onde, me cerca, me encurrala e quase me deixa sem alternativas – tenho ideias, que somem quando penso em escrever, desejaria ter uma bússola para orientar meu rumo, sem variantes, sem caminhos errados ou atalhos para distrair. Então para onde, se em mente eu só tinha uma coisa: não estava em busca de generalizações, ou seja, de uma obra que representasse em sua totalidade o período estudado, pelo contrário, procurava a multiplicidade. Por ora, avancei nas leituras dos textos dos anais do ENAPHEM na esperança de encontrar alternativas. Mesmo assim, os trabalhos deste autor, para além da questão da vulgata, trouxeram informações importantes sobre as reformas educacionais e os livros didáticos, e ainda me levaram a outras referências que foram pertinentes para este trabalho. Continuei a leitura com o texto de Valentim Júnior e Oliveira (2012), sob o título “A Geometria Analítica do Ensino Secundário vista nos Livros Didáticos de 1940 a 1970”. Apesar de este ser sobre Geometria Analítica (e não a Geometria Plana e Espacial), o recorte temporal e o nível de ensino me chamaram a atenção e me levaram a ler também a dissertação de mestrado de Valentim Júnior (2013), intitulado “A Geometria Analítica como Conteúdo do Ensino Secundário: análises de livros didáticos utilizados entre a Reforma Capanema e o MMM”, que, além de trazer uma interessante explanação sobre as reformas educacionais ocorridas naquele período, também apresentou alguns livros didáticos, informações sobre os autores e as obras. Entre as referências encontradas, duas que merecem um destaque especial são Ghiraldelli Júnior (1992) e Romanelli (2003), que aparecem em uma parcela considerável dos artigos dos ENAPHEM, servindo como fontes dos acontecimentos, considerados pelos autores como relevantes na história da educação no Brasil. Outro trabalho que encontrei a partir de Oliveira Filho (2012; 2013; 2014) foi o de Valente (2011a), que consiste numa relação de livros didáticos de matemática, publicados entre os anos de 1930 e 1980, constantes no acervo do GEEMAT – Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática. Esse foi um momento de euforia. De certo modo, pude sentir alegria e alívio. Meu “problema”

agora seria apenas “procurar” por livros a partir da década de 1980, mas os que compunham o DVD estavam digitalizados parcialmente. E, para ter acesso ao livro na íntegra, deveria ser feita a consulta ao acervo do Grupo, porém as universidades estavam fechadas, o que fazer? Aguardar a pandemia acabar? Já se passaram semanas desde que foram adotadas medidas de isolamento social e estávamos sem perspectivas de quando tudo isso iria ter fim. Os planos precisavam ser redirecionados novamente, mas para onde? Este “para onde” é persistente. Talvez procurar em sebos online, mas a falta de critérios para a escolha das obras frequentemente me paralisava, e ainda havia o problema da falta de referências de livros publicados a partir de 1980. E a redoma posta sobre nossas cabeças: “não saia, não fale, não toque, use máscara”. Ordens e decretos a nos compelir para dentro de nós mesmos, como se num cárcere ou prisão, mas o sentimento é maior que isso e me levou a recordar alguns fatos históricos: campos de concentração da 2ª Guerra Mundial, guetos, apartheid e as tragédias mundiais. E agora, Marizete? Cadê os livros? Em dois momentos distintos em que apresentei a minha intenção de pesquisa (no SEEMAT – Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática/2019 e EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática/2019), fui alertada sobre a complexidade da tarefa a que estava me propondo, devido ao extenso recorte temporal e aos inúmeros livros publicados no período. Mas eu estava confiante, ou seria uma boa dose de teimosia? Porém, nesse momento, chego a pensar que, realmente, subestimei o trabalho que isso me daria. Estava já há meses nesta busca, e a cada semana que passava, aumentava ainda mais minha ansiedade e agonia. Parecia ser tarde para redirecionar a pesquisa. De outra forma, não tenho por hábito desistir do que me proponho a realizar. Passada mais uma crise de pânico, retornei ao trabalho. Agora procurando no banco de teses da CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior¹⁶ – por pesquisas que me indicassem obras publicadas a partir de 1980 e, assim, completar a composição do meu acervo. Nesse novo movimento de busca,

¹⁶ catalogodeteses.capes.gov.br

fui levada ao encontro da dissertação de Paiva (2003), que tem como título “*A Matemática Escolar e o ENEM (1998-2002): o aparecimento de uma nova vulgata?*”, a qual me surpreendeu com a informação dos impactos causados no livro didático após o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio). Dessa forma, decidi adentrar um pouco no século XXI. Assim, o recorte temporal ficou ainda maior, de 1930-2010. Nas buscas aleatórias, cheguei ao site do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), aos guias de escolha do livro didático e ao trabalho de Queiróz e Zuin (2018). Tudo isso me pareceu um bom caminho para adentrar na história do Ensino Médio que conto (ou reconto), que não parte de princípios dogmáticos ou totalitaristas, nem poderia, porque, como mencionei acima, sofri e sofro para apresentar as situações que envolvem história. Isso é o mesmo que estar olhando para o infinito à beira de um precipício, que sei estar ali, que reconheço pela topografia do local, pelo vento que fica mais agitado, com mais força, que sopra e, repentinamente, o tempo fecha e as brumas reiteradamente envolvem tudo e fico a buscar a saída, que sei onde está, porém é um percurso difícil e cansativo. E, então, lembro do Frankenstein e me coloco como se estivesse numa cena do romance, em que aguardo o contato com a criatura, num misto de medo, fascínio, loucura, expectativa, e o coração a palpitar, a respiração ofegante, os sons cada vez mais apontando para este momento. Sigo e persigo rastros e resquícios de histórias contadas pelos autores aos quais tive acesso a partir dos anais do ENAPTEM. Nessa empreitada, remexi um vasto cabedal de informações, leis, compêndios, teses, livros, e ainda, não menos importante, a minha experiência – primeiro como aluna e, depois, como professora do Ensino Médio. A partir disso, analiso, rememoro, espero, transpiro e vou construindo, ou desconstruindo, não sei ao certo a sequência desses fatos, vou enxertando peças aqui, recortando materiais acolá, como se, nesse processo de criação, pudesse surgir à minha frente um ser, que, angustiosamente, esperava criar, que, porém, fugia a esse fatídico momento como a caça foge do caçador. Este ser gera diferentes emoções, aflige-me e, ufanamente, torna-se meu desejo, insaciável, doentio, patológico, quando não esquizofrênico, que aprisiona, mas precisa nascer. Um texto – ele precisa nascer, ser gerido. Recito isso como um mantra, um rosário,

uma ladainha, uma prece alçada aos céus pedindo ajuda, socorro, e me contento se este texto nascer, ainda que esfarrapado, mesmo que grotesco, e por que não frankensteineano? Assim, em meio às informações que obtinha ao vasculhar os diferentes materiais, fui contemplando o que as tais reformas propuseram ou impuseram ao ensino no decorrer do século passado, oportunizando modificações até chegar ao que conhecemos como Ensino Médio, além dos livros que, de certo modo, foram balizadores no ensino da matemática. No entanto, acabei obtendo uma visão muito superficial da educação e, conseqüentemente, do Ensino Médio durante o período pesquisado, já que não me aproximei dos alunos, professores e tantos outros personagens da história da educação. E esse fato me pareceu contraditório, pois queria evidenciar as diferentes formas de vida, em cada época, para justificar os diferentes jogos de linguagem praticados nos livros didáticos de matemática, que é nossa hipótese inicial de pesquisa, pois, ao pensarmos na significação de uma palavra, ou nos usos que são feitos dela, precisamos do contexto que dá suporte a essa significação. Esse contexto está relacionado com as formas de vida que o habitam, podemos tentar aproximar o conceito de forma de vida com os campos de atividade humana, assim a significação depende das formas de vida que praticam o jogo de linguagem. Depois de tanto lutar contra as minhas limitações, resolvi aceitá-las, e o que passo a fazer é descrever superficialidades que, no entanto, me afetaram e mobilizaram na produção das análises. Os marcos temporais desta pesquisa foram determinados com base principalmente nas legislações educacionais promulgadas no período estudado, pois me pareceu haver nelas certos cortes no fluxo ao qual o sistema educacional estava posto.

“O termo “jogo de linguagem” deve aqui salientar que o falar da linguagem é uma parte de uma atividade ou de uma forma de vida.” (WITTGENSTEIN, 1999, p. 35)

“Pois se, em nossa investigação, tentamos compreender também a essência da linguagem – sua função, sua estrutura –, não é porém a isso que visa esta questão. Pois não vê na essência algo que já é evidente e que se torna claro por meio de uma ordenação. Mas algo que se encontra abaixo da superfície. Algo que se encontra no interior, que vemos quando desvendamos a coisa e que uma análise deve evidenciar.” (WITTGENSTEIN, 1999, p. 62)

Apesar de trazer os fatos, ou os atos legislativos em ordem cronológica, não pretendo dar ideia de evolução, no sentido de que experienciamos avanços na organização do sistema educacional; pelo contrário, a história da educação é marcada por retrocessos. Também acredito que a história não pode ser apresentada de maneira neutra e

“O que nos dá a ver o olho gramatical evolucionista telescopicamente humano? O que ele nos dá a ver são futuros, metas, classes, etapas, categorizações, hierarquias, desenvolvimentos, progressos, glórias, triunfos, evoluções, construções, edificações, estruturas, fortalezas, fundações, fundamentos. E, por extensão, produção, comércios, indústrias, tecnologias, excedentes, mais-valias, expansionismos, imperialismos, colonizações, dominações, guerras.” (MIGUEL; VIANNA; CORRÊA, 2020, p. 28)

objetiva, mas se refaz a partir dos encontros e desencontros com outras formas de ver e perceber os fatos e as realidades as quais se está exposto, de forma consensual ou arbitrária, tendo-se noção de que a manipulação de tais realidades pode ocorrer de ambas as partes (entrecruzar-se), ou seja, do meio ao qual se está inserido e, de outra parte, por aquele que se insere ao meio. Portanto, a narrativa construída é marcada por meus pressupostos, que estão carregados de neuroses, dúvidas, incertezas, inconstâncias, delírios e, algumas

“Ou seja, não mais uma narrativa... mas tão somente uma apresentação panorâmica completa, não-hipotética e prima facie, isto é, uma composição desfocada de um número ilimitado mas não exaustivo de descrições descontínuas, sobrepostas e gramaticalmente orientadas de imagens claras, distintas, instantâneas e sincrônicas do problema que se leva ao divã terapêutico.” (MIGUEL, VIANNA, CORRÊA, 2020, p. 70)

vezes, até mesmo deleites de crueldade comigo mesma, como que pedindo, implorando aos meus fantasmas e monstros que me devorassem ou, ao menos, me transformassem, e quiçá, pudesse ser agraciada com algum poder mágico, sobrenatural, a ponto de criar meu texto, factível, lógico, ou ilógico, sem maiores dores. De outro modo, apesar do esforço, não conseguimos nos afastar das

“O desejo do método terapêutico é, então, o de tão somente apresentar, isto é, dar a ver os dados na sua relação uns com os outros, resumi-los numa imagem panorâmica. LW não vê tal desejo em confronto com os dois outros, mas como uma terceira alternativa aos dois.” (MIGUEL, VIANNA, CORRÊA, 2020, p. 54)

correntes que arrastam e tragam as naus, desviando seu curso e mantendo-as presas ao relicário de um dogmatismo materialista dialético que se retroalimenta de

simbolismos, tornando-se refém das próprias lutas de classes e do pragmatismo

que delas emanam. Ou ainda, se opor a vertente que marginaliza a sociedade, pois apresenta a ideia de progressão meritocrática exponenciada pelo ideal dominador (explorador), tendo por características o tornar-se mais forte, mais capaz, mais inteligente, merecedor e, por conseguinte, ser o vencedor, aquele que garantiu por seus esforços ter o privilégio de estabelecer normas e regras. O que ficou marcado em mim foi que, nesses movimentos de organização e transformações do sistema educacional, pouco se olhava para as reais necessidades da sociedade, acima disso estavam os interesses dos grupos dominantes. Buscando metaforizar estas reformas com a ideia do "monstro" Frankenstein, é possível perceber que ambos procuram uma diferenciação - dar vida a um ser inanimado. Há por trás da criação do Frankenstein um desejo, não da criatura que não pode sentir ou desejar algo, mas do criador, que intenta inovação, algo distinto, diferente, uma criatura "perfeita" - impossível - e aí me contento, ou tento me contentar em criar e escrever um texto plausível, costurando daqui, recortando dali, esquartejando de lá... É assim que parecem andar as reformas educacionais, sendo costuradas e reviradas várias vezes no intuito de dar vida a um novo modelo, expectando como plausível o desejo ilusório de poder resolver os problemas educacionais do país. Para por um instante a observar e tento ordenar os pensamentos relendo o que escrevi, o sentimento e impressão marcados em mim podem ser traduzidas numa única palavra: incertezas perturbantes e recorrentes incertezas que beiram o desespero, ou seria loucura? O torpor deste momento só é interrompido por outro pensamento, pois percebo que a loucura é minha parceira de vida, de estrada, pois essa jornada eu escolhi, estes anos de doutorado fui eu que impus, não apenas a mim, mas a meu esposo, a minhas filhas. E um misto de tristeza, indignação, desespero, esperança e tantos outros sentimentos que não consigo enumerar brigam entre si para ver quem é que manda, embora nunca tenha um vencedor. Quanto à história do Brasil do século XX, sendo bastante simplista, poderia fazer uma divisão (em alguns aspectos sociais e econômicos) em três momentos que, a meu ver, alteram a dinâmica social do país: o primeiro deles compreende as primeiras décadas e é marcada por uma sociedade que, em sua

maioria, vive nas zonas rurais, dependentes das oligarquias da política do café com leite. Já o segundo, em meados do referido século, apresenta um nivelamento na balança, em que a população rural inicia um processo de migração para áreas urbanas (denominado êxodo rural), e isso foi um dos fatores do inchamento dos grandes centros. Esse deslocamento colocará duas nuances (dois atores) frente a frente: a crescente industrialização em busca de mão de obra (barata) e essa população (retirante) em busca de trabalho. E, por fim, o terceiro, mais no final do século XX e início do século XXI, temos uma sociedade que presenciou a modernização proporcionada pelas novas tecnologias, em especial, a das áreas de comunicação. Hoje temos o novo Ensino Médio¹⁷, mas como nem tudo é para sempre, é possível que em algum momento ressurgam brilhantes pensadores e ressuscitem ideias que aparentemente estavam sepultadas (por que insisto em remover temas que remetem o pensamento a coisas sinistras, sobrenaturais, além da imaginação, que povoam minha cabeça e me encham de temor?), ou se tenham novas. A história se encarregará de contar esse final... Ou não?

¹⁷A Lei n. 13.415 de 16 de fevereiro de 2017, alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, trazendo mudanças significativas ao Ensino Médio, criando assim o que ficou conhecido como novo Ensino Médio.

E assim, durante algum tempo, eu me ocupei com sistemas abandonados, misturando, como um incompetente, mil teorias contraditórias e debatendo-me desesperadamente num verdadeiro pântano de conhecimentos variados, guiado por uma imaginação ardente e por um raciocínio infantil, até que um novo acidente mudasse o curso das minhas ideias.

[Frankenstein, Mary Shelley]

GEOMETRIA DOS CURSOS COMPLEMENTARES AO ENSINO MÉDIO: ENTRE LIVROS, PROGRAMAS, REFORMAS E MONSTROS – UMA TERAPIA

*Num quarto solitário,
ou antes numa cela,
na parte superior da casa,
e separada de todos os outros aposentos
por uma galeria e uma escada,
montei a minha imunda oficina de criação;
meus globos oculares saltavam das órbitas
ao acompanharem os pormenores do meu trabalho.*

[Frankenstein, Mary Shelley]

A escada é uma coisa interessante, às vezes, irrelevante; por vezes, essencial. Pode atrapalhar, pode ser a salvação, pode simplesmente estar ali sem utilidade alguma, ser pedra de tropeço, que dificulta o caminho. Pode nem mesmo existir concretamente, pode ser um ente metafísico (a escada ideal), ou imaginária, mas ela está aí – separando, apartando, excluindo, unindo.



Fonte: Ricardo Ferraz, 1999¹⁸

¹⁸ Disponível em (<http://www.guiadoeducadorinclusivo.org.br/capitulos/capitulo-7>) acesso em 15 de fevereiro de 2022. A ideia é demonstrar que a escola e o próprio acesso a ela podem apresentar contradições, onde a escada como acesso pode também ser a barreira que limita e cerceia. A ideia de que a educação é para todos, na realidade não se concretiza em sua plenitude, por fatores diversos: elitização, concorrência, discriminação... Duas figuras (pessoas) apresentam signos aparentemente antagônicos - um deseja subir, alçar os degraus, chegar ao topo até a escola, mas não pode, é impedido, aparentemente ela não contempla acesso a quem é diferente, a quem necessita de um cuidado diferente – o outro já no alto da escada com ar pensativo e talvez depreciativo a si mesmo, desalentado, ou ainda, almejando uma solução para quem está ao pé da escada e não pode subir. Qual seriam esses pensamentos? Cheguei ao topo e agora? Para onde irei? Mesmo chegando ao final da escada, alcancei o que desejava? Cheguei aonde queria? Talvez outros tantos pensamentos poderiam sugerir este

Frequentemente, estamos a subir e descer degraus de escadas. Às vezes, a descida é mais cansativa que a subida. E isso me fez recordar do dia em que me aventurei a descer a escadaria da cascata do Caracol em Canela/RS, ignorando a minha falta de condicionamento físico decorrente do sedentarismo reinante em minha vida. A exaustão me consumiu já na descida. Na subida, a dor no peito era paralisante. Em diversos momentos, pensei em desistir, mas foi bom não ter desistido, pois a vista foi incrível.

Figura 2– Cascata do Caracol



Fonte: Arquivo pessoal

E esse pensamento, desistir, também me ocorreu várias vezes durante o doutorado, até mesmo antes de começar a cursá-lo, quando ocorreu a negativa do pedido de licença sem remuneração que meu esposo solicitou no trabalho dele. Como iria me mudar sozinha para outro estado? E com quem ficaria minha filha? Na época, ela tinha apenas 3 anos. E isso foi só o começo de muitos outros percalços nessa subida da escada-doutorado, uma escada que me levaria a patamares mais altos, onde conseguiria preencher uma lacuna em minha formação docente e, com isso, poderia ajudar no meu trabalho de formadora de professores. Mas também era uma escada que me proporcionaria melhores rendimentos salariais. No entanto, essa subida foi muito difícil. Está sendo muito difícil, talvez por ter ignorado a minha falta de conhecimento sobre a área Educação Matemática decorrente de minha formação anterior tender mais para o lado da matemática do que da educação; talvez por alguns preconceitos. Por ter família (esposo e filha, e já que as coisas estavam difíceis, dificultei mais um pouco, engravidando durante o doutorado, agora tenho duas lindas filhas). Muitas vezes, fiquei sem fôlego, e a dor no peito era insuportável. Mas que bom que não desisti!

semblante, preocupado? Desiludido? Como encontrar solução para aqueles que não conseguem acessar a escada...

E, assim como eu enxerguei o doutorado como um doutorado-escada que me levaria a lugares onde teria mais

“É comum dizer-se que a função das escolas é preparar as crianças e os adolescentes para a vida. Como se a vida fosse algo que irá acontecer em algum ponto do futuro, depois da formatura, depois de entrar no mercado do trabalho, tal como disse Charlie Brown. Mas a vida não acontece no futuro. Ela só acontece no aqui e no agora. O objetivo da aprendizagem é viver, não é preparar para um futuro a ser vivido. [...]. Viver é aprender. É nisso que está a excitação do viver. Caso contrário a vida é um tédio insuportável. Então a aprendizagem só pode acontecer no espaço-tempo em que a vida está sendo vivida.” (ALVES, 2004, p. 89)

conhecimento e um salário melhor, a escola também é frequentemente vista como uma escada, uma escola-escada. Mas, para onde essa escada leva?

“A reorganização do Estado devido ao advento da República, assim como a urbanização do país, foram os fatores decisivos para a criação de novas necessidades para a população, o que possibilitou que a escolarização aparecesse como meta almejada pelas famílias que viam nas carreiras burocráticas e intelectuais um caminho mais promissor para seus filhos.” (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1992, p. 16)

Se é que leva para algum lugar. Talvez para o céu, a glória, o Olimpo. A cada degrau se objetiva a esperança de subir na vida, ou preparar para a vida, a vida real. Existe vida na escola? Vive-se durante ela?

Figura 3 – A fuga de Truman - acesso a vida real¹⁹



Fonte: Cena do filme O Show de Truman²⁰

¹⁹ Cena final do filme: O Show de Truman - 1998, Paramount Pictures. A história se passa numa cidade cenográfica, ou melhor, o enredo todo envolve uma vida fictícia, em que o personagem principal interpretado por Jim Carrey é o único que não sabe que está sendo filmado 24 horas por dia e transmitido para o mundo numa espécie de reality show (talvez vislumbrando o que ocorreria nos anos seguintes com a difusão deste tipo de entretenimento). A história tem algumas nuances críticas quanto ao modelo de vida americano, especialmente dirigindo atenção a década de 1950-1960, o tal “sonho americano”. Mas o que nos interessa é, respectivamente, essa cena, onde o personagem principal finalmente consegue fugir daquele ambiente, que em determinado momento começa literalmente desmoronar. Ao navegar (o nome do barco é também uma alusão - Santa Maria - a Caravela tripulada por Cristóvão Colombo ao “descobrir” o novo mundo) encontra uma estranha escada, meio que encravada nas nuvens, que em seu final (topo) observa-se uma porta - seria a saída? Uma das saídas? O que haveria por detrás daquela porta? Analogamente assim nos parece existir uma escola-escada, que dá acesso a uma porta, ou diversas portas... e depois... depois o mundo.

A escola-escada pode bifurcar-se ou trifurcar-se, oferecer caminhos diferentes que levam a lugares diferentes. Ou será que é sempre para o mesmo lugar? Uns a enxergam como o caminho para chegar à universidade, ou a um curso profissionalizante (técnico), ou, quem sabe ainda, para tornar-se um cidadão pleno com ideais de patriotismo e civismo.

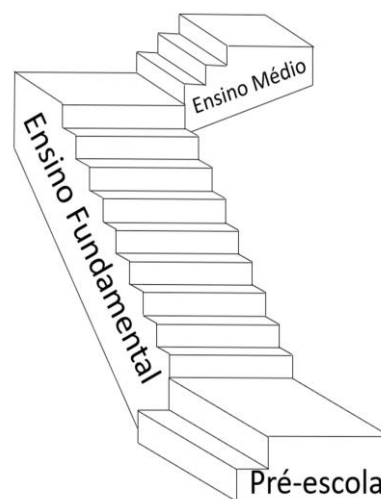
Existem diferentes tipos de escadas. Então como podemos afirmar se aquele objeto ou construção é uma escada? Seria uma característica comum a todas elas o fato de terem degraus? Estáticos? E o que dizer da escada rolante? A escola-escada também tem degraus? Diria que tem lances de degraus, e esse arranjo sofreu algumas alterações ao longo do período republicano, decorrentes de diferentes movimentos em diferentes momentos perpetrados por diferentes formas de vidas em diferentes ambientes que empunharam ideais e proposições indicando graus-degraus.

Atualmente a educação brasileira é dividida em duas etapas: Educação Básica e Educação Superior. A escola está associada a esta primeira etapa, que, por sua vez, é dividida em três níveis²¹: Pré-escola (4 a 5 anos); Ensino Fundamental (6 a 14 anos) e Ensino Médio (15 a 17 anos).

Em diferentes momentos de nossa história ocorreram variados movimentos e diretrizes que transformariam o processo educacional, ora ditando diretrizes nacionais (que pouco se sabe sobre sua efetividade localmente), ora com movimentos regionais que passam despercebidos pelas

normativas mais gerais da república. Assim, indicar padrões gerais e modelos fixos que pudessem abarcar a totalidade educacional brasileira nos parece produzir uma ficção

Figura 4– A escola-escada básica



Fonte: A autora

²⁰ Disponível em <https://pgl.gal/wp-content/uploads/2015/11/SHOW-DE-TRUMAN-Foto4.jpg>.

²¹ Essa organização é estabelecida na Lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996 (disponível em https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm.) alterada pela Lei 12.796 de 04 de abril de 2013 (disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/ato2011-2014/2013/lei/112796.htm).

indesejada, pois reducionista, uma imagem de todos e de ninguém, como as fotografias de Francis Galton (mobilizadas por Wittgenstein, Miguel (2012) e Pinto (2015)).

Então, o texto que passamos a (re)produzir, com seus modelos e estilos de escrita, se assenta sobre um exercício que gerou incertezas, porque foi uma viagem que pululava entre a busca quase que irracional para encontrar ressonância em momentos, textos e contextos que gerassem segurança e embasamento àquilo que (re)criava, como na sentença pronunciada por Lavousier²² "Na natureza nada se cria, nada se perde, tudo se transforma." (questionável ou não, ainda vigente ou não). Assim, tentei consolidar o que passava a escrever e a relatar, empregando situações e momentos, talvez únicos, ao tempo vivido ou à obra consultada.

Ao mesmo tempo, tentava evitar uma aproximação. Na realidade, buscava o oposto: ausentar-me para um local específico, um não-local, um refúgio, mas sem mesmo ter certeza da existência desse local, numa tentativa de evitar ser "contaminada" e passar ilesa aos afetamentos que certamente os materiais pesquisados aflorariam em mim. Como se fosse possível um ponto neutro, um local ou zona de escape em que pudesse não ser atingida e conseguisse ficar alheia a todos estes movimentos históricos e importantes ao desenrolar da escrita deste relatório de tese – ingenuamente busquei esse espaço, acessar uma escada que me levasse através dos tempos e permitisse não ser afetada por ele.

Estas escritas, e o ritmo que a elas imprimo, vão se sobressaindo a outras tantas que já escrevi, que junto, rejunto, rasgo, costuro, defino, redefino, ingiro e torno a regurgitar, num processo de internalização que, ao sobrepor umas sobre as outras, sinto emergir um produto novo, um resultado diferente daquele inicialmente planejado. Porém, este processo (sobrepor) não chega a ser metódico como a exemplo das criações fotográficas de Galton, que pretendia gerar um modelo com o qual pudesse enquadrar os tipos diferentes de seres humanos, catalogando-os neste ou naquele rótulo, que,

Figura 5 - Retrato composto



Fonte: <https://galton.org/composite.htm>

²² Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794), pesquisador francês, intitulado pai da química moderna.

por fim, não levou a lugar algum. O que faço é buscar na história subsídios para contar novas histórias, outras possibilidades de pensamento, que, perpassando as nuances da historicidade, permite este exercício de leitura, sempre que necessário, dos manuscritos da época à qual nos propomos pesquisar, com suas histórias, (des)semelhanças, afastamentos, formas de vidas.

Nossa intenção não é estabelecer uma relação de causa e efeito, como que, ao “olhar para o passado”, pudéssemos ver nele a mola propulsora para os anos seguintes e as transformações ocorridas como consequência deste passado, mas perceber que os fatos, os acontecimentos têm seu lugar de importância no desenrolar dos eventos que se seguem. O que nos propomos é evidenciar alguns cortes que foram impostos aos fluxos vivenciados pela educação brasileira nesses períodos, tendo como balizador os livros e os enredos que cercaram o momento da criação/edição de tais livros, que, de algum modo, impactaram o ambiente escolar e a própria educação.

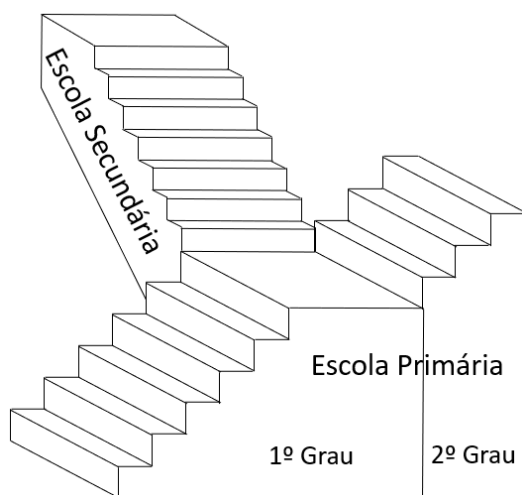
A história da escola formal pública como a conhecemos se mistura com a história da República. Se pensássemos esse percurso como uma escada, poderíamos demarcar como nosso degrau inicial a Primeira República. Segundo Martins (1984, p. 66-68), a primeira reforma educacional sob os auspícios republicanos se deu com Benjamim Constant²³. A escola deste período apresenta uma organização denominada escola primária de 1º grau (crianças de 7 a 13 anos) e de 2º grau (de 13 a 15 anos). Existia, ainda, além da escola primária, o Ensino Secundário, com duração de 7 anos, oferecido pelo Ginásio Nacional²⁴ e pelos ginásios dos estados que

“Entre outras coisas, essa reforma criou o ministério da Instrução, Correios e Telégrafos (que durou apenas de 1890 a 1892) e tentou a substituição do currículo acadêmico por um currículo enciclopédico com disciplinas científicas; organizou o ensino secundário, primário, normal; criou o Pedagogium (centro de aperfeiçoamento do Magistério). Tal reforma não se efetivou na prática, e suas intenções foram sufocadas com a extinção do Ministério da Instrução e com o arrefecimento do entusiasmo pela educação após 1894.” (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1992, p. 27)

²³ Decreto n. 981 de 08 de novembro de 1890 retirado em 30 de junho, 2020 de <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-981-8-novembro-1890-515376-publicacaoorigin al-1-pe.html>.

²⁴ Situado na cidade do Rio de Janeiro, foi criado em 02 de dezembro de 1837, recebeu inicialmente o nome de Imperial Collegio Pedro Segundo. Desde a sua criação configurou-se em um importante estabelecimento de ensino secundário no país, tornando-se referência para os demais, fossem eles públicos ou privados. Em 1889

Figura 6 – A escola-escada da Reforma Benjamin Constant



Fonte: A autora

seguiram os mesmos planos do Ginásio Nacional. Para o ingresso nesta etapa, era necessária a idade mínima de 12 anos, ter concluído a escola primária de 1º grau ou obter aprovação no próprio ginásio em todas as matérias do referido curso.

Esse final de século até a 2ª década do século seguinte foi marcado por intensa atividade na área educacional que influenciou direcionamentos e mudanças na dinâmica escolar. Amaro Cavalcanti, em 1898, organizou o Ensino Secundário através de dois

curso: Propedêutico ou Realista e o Clássico ou Humanista²⁵. Ocorreria aqui um dualismo na educação, em que a escola-escada se dividiria em dois caminhos, duas alternativas, duas formas de conclusão do Ensino Secundário. Isso não apenas impactaria a questão do tempo percorrido para finalizar esta etapa, já que o primeiro duraria seis (6), e o segundo, sete (7) anos, mas, para além deste fato, estão os desdobramentos e as finalidades que poderiam ser acessadas aos concluintes dos diferentes cursos. Em momento posterior, o ministro Epitácio Pessoa se utiliza da estrutura e conhecimento produzido pelo Ginásio Nacional para agregar e unificar o Ensino Secundário no país, exigindo a equiparação dos ginásios dos estados e dos ginásios particulares ao Ginásio Nacional, o que ficou regulamentado em 1901 com o Decreto nº 3.890²⁶ de 1º de janeiro (MARTINS, 1984, p. 73-77).

É um tanto contraditório olhar para essa escola-escada engessada ao ritmo do Colégio Pedro II como ditador de conteúdos e diretrizes a todos os estabelecimentos de ensino secundários do país (que detinham esta tentadora epígrafe de ser – escola equiparada ao Ginásio Nacional), em que todos deveriam seguir sua batuta, como no conto do Flautista de

passou a se chamar Instituto Nacional de Instrução Secundária, e logo em seguida, em 1890 de Gymnasio Nacional, retornando ao seu nome inicial - Colégio Pedro II - em 1911. Atualmente, por meio da lei 12.677/12 é equiparado aos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia. (Retirado em 05 de julho, 2020 de http://www.cp2.g12.br/historia_cp2.html.)

²⁵ Decreto nº 2.857, de 30 de março, 1898. Retirado em 02 de julho, 2020 de <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-2857-30-marco-1898-506934-publicacaooriginal-1-pe.html>.

²⁶ Retirado em 18 de julho, 2020 de <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1900-1909/decreto-3890-1-janeiro-1901-521287-publicacaooriginal-1-pe.html>.

Hamelim²⁷, ou seja, a cartilha da Capital Federal, com suas nuances, particularidades e diferenças ao restante do país. É de se imaginar esta escada sendo acessada ou tentando ser escalada por alunos dos distantes centros regionais do país onde a educação mal chegara e agora precisariam seguir os padrões oficiais, um nível talvez muito acima do que estariam acostumados.

Na segunda década do século XX, numa guinada radical, ocorre a desregulamentação da obrigatoriedade dos estabelecimentos do ensino secundário de seguirem o Colégio Pedro II, com a Lei Orgânica Rivadávia Corrêa (Decreto nº 8.659²⁸ de 05 de abril de 1911), que, segundo Maciel (2012, p. 19), propiciou a “liberdade na elaboração de planos de estudo e programas de ensino, fazendo-os perder o título de estabelecimento equiparado ao Colégio Pedro II”. E a escola-escada tem nova conformação, deixa de ser uma única escada para todo o país e passa a ter diferentes modos de perceber essa esca(la)da, agora reunindo situações próprias, regionais, que poderiam atentar (ou não) às peculiaridades dos alunos em seus diferentes habitats. Ainda nesse momento é criado o exame vestibular para ingresso ao Ensino Superior, tendo como exigência a idade mínima de 16 anos. Para Martins (1984, p. 82-86), o que se desprende desse fator é que o ensino secundário passou a ser o trampolim para exames vestibulares, já que o aumento do número de instituições de Ensino Superior se propagava pelo país.

Mas aí, em março de 1915, segundo Martins (1984, p. 86-88) o então ministro Carlos Maximiliano Pereira dos Santos reduz para cinco (5) anos o curso secundário e retoma a equiparação dos estabelecimentos de ensino²⁹, também mantém os exames vestibulares para ingresso nos cursos superiores. É fato que isso não durou muito. Outra vez ventos tempestuosos mudam o rumo da educação. A Lei Rocha Vaz, de 1925³⁰, estabelecia que o Ensino Secundário, com duração de seis (6) anos, deveria ter como foco a formação para a

²⁷ História na íntegra pode ser acessada em: http://alfabetizacao.mec.gov.br/images/conta-primim/livros/versao_digital/o_flautista_de_hamelin_versao_digital.pdf. Se ainda ficar curioso (como eu) e quiser saber o que há por detrás do conto, o mito, a lenda, o folclore, ou algo além, consultar (ou outro site qualquer): <https://g1.globo.com/mundo/noticia/2020/12/06/o-sumico-de-130-criancas-alemas-por-tras-da-lenda-magica-do-flautista-de-hamelin.ghtml>. Há possibilidade da história por trás do conto ter um fundo de verdade, porém envolvendo a população (jovem, adolescente, criança) da cidade de Hamelin. Isso faz pensar que também as reviravoltas de nossa legislação escolar possam ter algo por de trás, que faz a escola ser deste jeito e não de outro jeito. Porque a escola necessita ser assim num formato de escola-escada?

²⁸ Retirado em 15 de julho, 2020 de <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1910-1919/decreto-8659-5-abril-1911-517247-publicacaooriginal-1-pe.html>.

²⁹ Retirado em 07 de julho, 2020 de <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1910-1919/decreto-11530-18-marco-1915-522019-republicacao-97760-pe.html>.

³⁰ Retirado em 01 de julho, 2020 de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/1910-1929/D16782a.htm.

vida, visto que até então servia apenas como acesso ao nível Superior. Conforme aponta o art. 47 do referido Decreto, o Ensino Secundário serviria “de prolongamento do ensino primário, para fornecer a cultura média geral do país”. Segundo Nunes (2000, p. 44), com essa reforma, ocorreu uma “definitiva preparação do curso secundário como curso regular [...]. Ela foi antecedida por uma primeira proposta elaborada por comissão presidida por Ramiz Galvão e debatida publicamente por instituições e educadores”.

Ainda na esteira desses eventos, uma proposta apresentada pelos professores do Colégio Pedro II, conforme Martins (1984, p. 92-100), consegue modificar a seriação do curso Secundário, passando o sexto (6º) ano a ser um curso complementar preparatório para ingresso no Ensino Superior, isso através do Decreto nº 18.564³¹ de 15 de janeiro de 1929.

É neste turbilhão de leis que se tenta apresentar à nação um modelo de ensino que tenha como prerrogativas: ajustar as pessoas à sociedade e produzir cidadãos em consonância aos moldes da época, formando uma cultura que seria nivelada em padrões médios. Os diferentes momentos e modelos para gerir a educação desde o início da República se entrecortam e, muitas vezes, são espelhados em reformas posteriores. Do início onde o positivismo ascendeu sobre a escola, com a ideia de um rigorismo e uma obediência crassa, assumindo posteriormente duas vertentes, de um lado um ensino propedêutico visando à admissão em nível superior e de outro um modelo humanista norteado pelos clássicos da Antiguidade. Ainda há que considerar a variante do Ginásio Nacional, em que em alguns momentos se exigiu a equiparação dos ginásios estaduais a ele; noutro, ocorreu a alforria, tendo esses ginásios autonomia, para, em momento seguinte, retomar o sistema de inspeção federal.

O Ensino Médio, hoje a última etapa da Educação Básica ou, ainda, o último lance de degraus dessa escola-escada, é um momento de incertezas. O que espera o aluno por detrás daquela porta? Para onde ele vai após subir toda aquela escada? Para alguns, no fim dessa

³¹ Retirado em 20 de julho, 2020 de <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1920-1929/decreto-18564-15-janeiro-1929-502422-publicacaooriginal-1-pe.html>.

subida até podem existir várias portas, ou vários caminhos a seguir. Para outros, nem tantos assim. Para uns, essa subida é exaustiva, fazendo com que desistam; já outros, diria que se utilizam de uma escada rolante.

Decidimos, em nossa pesquisa, olhar para este último lance de degraus e evidenciar mudanças ocorridas no período de 1930-2010. Ele sempre se chamou Ensino Médio? Sempre teve as mesmas finalidades? É certo que não! Ele passou a se chamar Ensino Médio a partir da Lei n. 9.394 de 20 de dezembro de 1996³², contemplando as seguintes finalidades, apresentadas no art. 35:

- I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
- II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
- III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
- IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Mas e antes de 1996? De modo geral, sem atentar às especificidades, o então chamado Ensino Secundário, até a década de 1930, não era segmentado, ou seja, procurando por uma equivalência entre a organização desse período com a atual, poderíamos dizer que ele corresponderia à junção do Ensino Fundamental II com o Ensino Médio. Algo que viria a ser modificado a partir da década de 1930 e, através dessa (re)organização do Ensino Secundário, temos um corte importante na história do Ensino Médio.

A partir da assunção de Getúlio Vargas ao poder (1930), e diante de alguns movimentos que ocorriam no âmbito da educação (já mencionados anteriormente), foram sendo propostas reformas com intuito de modificar o modelo educacional vigente, não se desfazendo totalmente do praticado até o momento, porém apresentando ênfases e caminhos alternativos. Se na esfera político-econômica vivia-se sob os resquícios das oligarquias da política do café com leite³³, que beneficiava especialmente estes setores da produção primária, outro fator importante surge: uma crise sem precedentes envolvendo o cenário mundial influenciado pela quebra da Bolsa de Valores de Nova York (1929), o que, no decorrer da década de 1930, forjaria a iniciativa industrial brasileira. Assim, o país viu florescer a

³² Retirado em 12 de abril de 2020 de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm.

³³ “Grupos de proprietários e homens influentes em Minas Gerais (coronéis do leite) e em São Paulo (barões do café) se alternavam no controle da Presidência da República.” (GHIRALDELLI JÚNIOR, 2009, p. 19)

Este ímpeto de crescimento e diversificação teria outras importantes implicações: aumento da procura de trabalhadores mais qualificados, ampliação de serviços de apoio, aumento dos nexos de interdependência estrutural (agricultura-extração-indústria-serviços), entre outros. (CANO, 2012, p. 904)

produção industrial, que traria oportunidades e desafios, gerando possibilidades até então inexistentes e exigindo novas formas de mão de obra (com alguma qualificação ou que essencialmente tivesse o mínimo de escolaridade) que pudessem suprir a necessidade deste setor.

Mas não foi apenas a industrialização que proporcionou a amplitude para algumas mudanças educacionais. Existiam movimentos em favor de maior escolarização da população, não só na cidade, mas também no campo. A jovem indústria, talvez, apenas tenha endossado, ou exigido o que boa parte dos intelectuais e a própria população buscava: uma reforma que englobasse as séries iniciais (fundamental no campo e na cidade) até o ensino profissionalizante e superior.

As reformas oficializadas no governo Vargas, de certa forma, conseguem amenizar os conflitos de interesses, evidenciado nas discussões sobre a educação. Ghiraldelli Júnior (1992, p. 39-40) aponta que, de um lado, os liberais (intelectuais, defensores das teses da Pedagogia Nova) buscavam a reformulação das políticas educacionais, que, entre outras coisas, se colocava em defesa de um ensino laico e da escola pública obrigatória e gratuita. Na outra ponta da gangorra, estava a Igreja Católica como grande oponente, que, entre outros pensamentos, defendia a Pedagogia Tradicional e a inclusão do ensino religioso nas escolas. Para Romanelli (2003, p. 144), o que estava em questão era a manutenção da hegemonia de alguns setores que detinham a educação privada em suas mãos e que viam nestes movimentos do governo e de segmentos da sociedade um real perigo em perder seu filão. Mas, além disso, a pressão exercida se manifestava em dois sentidos, no que tange à manutenção dos privilégios que a elite brasileira dispunha desde sempre e de outro, evitando que as camadas desfavorecidas da população tivessem acesso às escolas e, quiçá, alçasse resquícios desses privilégios destinados às famílias abastadas.

Quanto às medidas educacionais propostas pelo governo getulista, tem-se que elas apresentavam uma disposição para que a educação ficasse em poder do Estado, pois, como aponta Ghiraldelli Júnior (1992, p. 45), a competência para legislar sobre o Plano Nacional de Educação seria de responsabilidade da União, bem como a fiscalização e a regulamentação das instituições de ensino particular. O Ensino Primário passa a ser obrigatório e gratuito,

estabelecendo a possibilidade de a gratuidade abranger tanto o Ensino Secundário quanto o Superior. Além disso, deveria ser reservado, no mínimo, do orçamento anual da União 10% para a educação, e, no caso dos Estados, esse percentual seria de 20%. As escolas rurais obtiveram visibilidade, e o ensino religioso passou a ter cadeira fixa nas escolas públicas. Outro destaque desse período se dá com a criação, em 1931, do Ministério da Educação e Saúde Pública (MESP), que ficaria nas mãos de Francisco Campos.

A ideia de ter no governo o caráter gerenciador da educação em todo território nacional era, ao que nos parece, indício de uma perspectiva ao desenvolvimento e definições de currículo e finalidades nos diferentes níveis escolares. Tais sinais nos incentivam a perceber uma mudança de paradigmas, em que a escolarização passou a ser tema recorrente das políticas públicas dos governantes, nem sempre com altruísmo legítimo de fazer a nação ultrapassar o *status* analfabético que carregava, mas com o intuito de acomodar interesses políticos, econômicos e sociais. Essa necessidade era premente, visto que a população passava a exercer determinada pressão em busca de educação, pois se intensificava a passagem da condição rural para urbana, especialmente de pequenos agricultores. As políticas de incentivo ao trabalhador rural não satisfaziam as necessidades de boa parte das famílias agricultoras (aqui ainda entraria a questão da seca no Nordeste, que fez com que uma porção considerável da população deixasse o sertão, os famosos retirantes) em busca por empregos nas indústrias.

Apesar de neste momento alguns movimentos voltarem-se às questões educacionais, visto que a interiorização e o aumento de vagas se tornam realidade constante, neste período, a escola-escada aparenta ser a portadora de uma propensa inclusão social com oportunidades para todos. No entanto, como nos aponta Dallabrida (2009), embora estas mudanças sejam processadas com intuito de alfabetizar a nação, não foram suficientes para romper com o caráter elitista, e a produção de um *habitus* burguês, mesmo com o surgimento de escolas secundaristas em praticamente todas as regiões do país, as classes operárias e camponesas ainda estavam à margem neste processo.

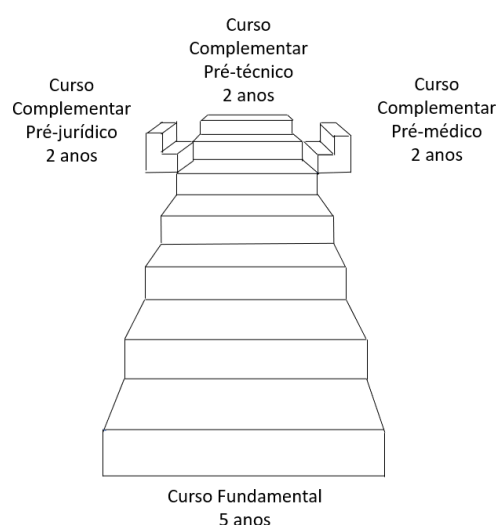
A tônica deste período se baseia nas reformas proporcionadas por Francisco Campos em que dois decretos são direcionados ao Ensino Secundário: n. 19.890 de 18 de abril de 1931³⁴ e n. 21.241 de 04 de abril de 1932³⁵, que dispõem sobre a sua organização:

³⁴ Retirado em 26 de abril de 2020 de <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html>.

O Ensino Secundário, que até então era único, foi dividido em Fundamental, com duração de cinco anos, igual e único a todos os alunos, e o Complementar, com duração de dois anos, múltiplo e com três opções: pré-jurídico, pré-médico e pré-politécnico. Tais cursos, assim especificados, funcionaram em anexos das faculdades às quais eram destinados e, na realidade, eram cursos preparatórios ao ensino superior. (OLIVEIRA FILHO, 2013, p. 67)

Com essa segmentação do Ensino Secundário, temos os cursos Complementares, cuja finalidade era a preparação para o ingresso no Ensino Superior. Se tomarmos a ideia de Dallabrida (2009) como um processo deliberado, poderíamos apontar a construção de uma escola-escada que preconizava o distanciamento entre as classes sociais, entre os estudantes do campo e da cidade, tornando a formação universitária inacessível a uma parcela considerável da população. Podemos, talvez, objetivar que estes cursos se aproximam do que atualmente chamamos de Ensino Médio, ao menos no fato de corresponder à última etapa

Figura 7– O curso Secundário da Reforma Francisco Campos



Fonte: A autora

que antecede o Ensino Superior, porém não necessariamente significa ser esta a origem dele, no entanto, visando atender os objetivos da pesquisa, estabelecemos o ano de 1931 e, consequentemente, a criação dos cursos Complementares, o primeiro corte que olharemos.

Em relação à produção de livros didáticos para os cursos Complementares, Valente (2009, p. 4-5) considera duas modalidades de elaboração: aqueles que reuniam os temas matemáticos do programa dos cursos num só livro, constituindo-se, assim, numa obra de preparação aos exames; e, na outra esfera, os que tratavam especificamente de um determinado tema da matemática.

Do segundo módulo, não foi possível localizar nas fontes consultadas indicações de livros que tratassem exclusivamente do tema Geometria Plana e Espacial (nosso interesse de pesquisa), destinada aos cursos Complementares, e sim abrangendo apenas a Geometria

³⁵ Retirado em 26 de abril de 2020 de <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-21241-4-abril-1932-503517-publicacaooriginal-81464-pe.html>.

Analítica. É o caso do livro “Elementos de Geometria Analítica”, de Roberto José Fontes Peixoto.

Em relação à primeira modalidade, localizamos a indicação dos seguintes livros: “Lições de Matemática”, de Thales Mello Carvalho (de acordo com o programa do curso Complementar de Engenharia); “Pontos de Matemática”, de Gumercindo Lima (segundo os programas para os cursos Complementares), e “Lições de Matemática”, de Alberto Nunes Serrão (para médicos e químicos).

Essas três obras, escritas em períodos próximos, alçaram seus autores a um patamar importante, tornando-os referência na matemática durante as décadas seguintes, influenciando diversos escritores da época. Thales Mello Carvalho era professor do Ensino Secundário do Distrito Federal (Rio de Janeiro), formado em Engenharia Civil e Geografia pela Escola Politécnica da Universidade Técnica Federal (atual Escola Politécnica da UFRJ). Gumercindo Lima era professor do Ginásio de Alfenas em Minas Gerais, e Alberto Nunes Serrão, que, além de professor-chefe da seção de Matemática do Colégio Universitário da Universidade do Brasil, era Docente-livre na Escola Nacional de Engenharia no Rio de Janeiro e ex-professor de Matemática do Curso Complementar do Colégio Pedro II. Sua formação ocorreu em Engenharia Civil e Geografia pela Escola Nacional de Engenharia. (OLIVEIRA FILHO, 2013, p. 95-96)

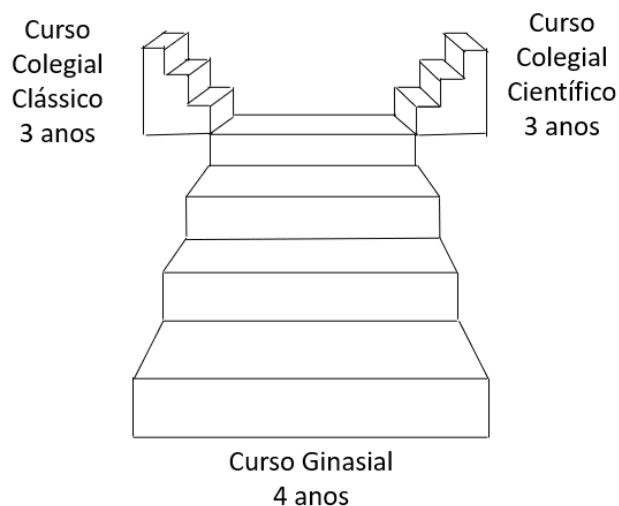
Oliveira Filho (2012, p. 10) aponta que “não foi possível o estabelecimento de uma *vulgata* norteadora para a produção didática da Matemática do Colégio, no período de vigência da Reforma Francisco Campos”, fato corroborado pela falta de padrão na abordagem e detalhamento dos conteúdos. Ainda segundo Oliveira Filho (2013), ao analisar as três obras citadas anteriormente, conclui-se que

Só um deles atende por completo os programas do Curso Complementar a que se destina (Livro 2 – Lições de Matemática, Gumercindo Lima). No tocante a metodologia de apresentação dos conteúdos e tipos de exercícios, bem como quanto à terminologia adotada na exposição dos conteúdos, os três livros apresentam diferenças. (OLIVEIRA FILHO, 2013, p. 99)

Então, no período em que vigorou a reforma de Campos, elegemos o livro de Gumercindo Lima para constituir nosso arquivo de análise, pois este se apresentou como material que melhor atendia ao que se delineava nos programas dos cursos Complementares. O autor, ao apresentar sua obra, faz sob a órbita da exigência dos cursos Complementares para admissão às Faculdades de Medicina, Farmácia, Odontológica e Engenharia.

Enquanto o mundo (especialmente Europa) está envolvido em conflitos (2ª Guerra Mundial), e o Brasil, vivendo momentos nebulosos (golpe de estado/Ditadura), a educação tem novo comandante, Gustavo Capanema, que assinala a Lei Orgânica do Ensino Secundário n. 4.244 de 09 de abril de 1942³⁶, em que dispunha que o Ensino Secundário manter-se-ia dividido em dois ciclos: Ginásial e Colegial. O primeiro, anteriormente denominado de Fundamental, passa ter a duração de 4 anos (na Reforma de Campos, a duração era de 5 anos). O Colegial, que tinha a duração de 2 anos e chamava-se curso Complementar, passa ter duração de 3 anos e divide-se em dois – Clássico e Científico.

Figura 8– O curso secundário da Reforma Capanema



Fonte: A autora

Uma diferença entre os cursos Clássico e Científico, nas palavras do Ministro Capanema, era que, no primeiro, “a formação intelectual dos alunos é marcada por um acentuado estudo das letras antigas, ao passo que, no segundo, a maior acentuação cultural é proveniente do estudo das ciências.”³⁷ Essa reforma configura-se em nosso segundo corte, pois trouxe ao âmbito da segunda etapa do Ensino Secundário mudanças não só em sua estrutura, mas também em suas finalidades, não mais direcionado apenas para o ingresso no ensino superior, como ocorria nos cursos Complementares, mas no sentido de “consolidar a educação ministrada no curso Ginásial e bem assim desenvolvê-la e aprofundá-la.” (art. 4º do Decreto-Lei n. 4.244, de 09 de abril de 1942). Somado a isso, o ensino profissionalizante, opção que corre paralelamente ao ensino tradicional, organizado através de quatro Leis Orgânicas que dispunham e normatizam as modalidades: Industrial – Comercial – Agrícola – Normal –, esta última tinha a primazia de grande parcela da população de classe média, principalmente para o público feminino.

³⁶ Retirado em 28 de abril de 2020 de <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html>.

³⁷ Retirado em 15 de maio de 2020 de <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-133712-pe.html>.

Apesar desse novo direcionamento para o ensino profissionalizante, o mercado de trabalho em expansão exigia profissionais capacitados e, como expressa Pavanello (1993, p. 11), “essa qualificação é necessária ao desenvolvimento industrial, principalmente porque as leis de imigração da década de 1930 e, depois, a eclosão da 2ª Guerra Mundial impedem o emprego de técnicos e especialistas estrangeiros nas indústrias brasileiras”. Assim, a profissionalização se torna não apenas uma opção, mas uma necessidade imediata.

O ensino profissionalizante atendia não de forma total, mas amenizava as pressões que o Governo sofria por parte dos industrialistas devido à escassez de trabalhadores qualificados, e, de outro modo, acomodava as massas, que pressionavam por trabalho. No entanto, segundo Ghiraldelli Júnior (1992, p. 87), essas medidas ainda eram insuficientes, devido à emergência de mão de obra qualificada. Era necessário acelerar esse processo, e a saída encontrada foi a criação de um sistema que oferecesse formação adequada e mais rápida diante das reais carências dos setores. Desse modo, nasce o sistema S (Senai – Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial / Senac – Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial).

Talvez o grande diferencial desse sistema fosse sua proposta, por meio da qual o aluno, notadamente das camadas mais pobres, buscava aprender um ofício, ter uma profissão e ser inserido no mercado de trabalho o mais rápido possível. Além disso, o que mais impactava ou tornava atraente essa modalidade era o fato de “que as escolas do SENAI e do SENAC eram as únicas nas quais os alunos eram pagos para estudar, o que funcionava como um grande atrativo para as populações pobres.” (ROMANELLI, 2003, p. 169). Esse modelo de entidade educacional profissionalizante atravessou décadas e propiciou a profissionalização e o abastecimento do mercado produtivo. Mas a indagação que fica é até que ponto isso auxiliou na educação, pois, ao que parece, essa poderia ser uma válvula de escape em que os alunos, após conseguirem ser inseridos no mercado de trabalho, abandonavam a escola por ter obtido a “profissionalização”, e, assim, não chegariam ao final da escola-escada.

Se pudéssemos elencar um ponto crucial da Reforma Capanema, talvez fosse possível asseverar que ela promoveu ou escancarou o que intrinsecamente era o reflexo da sociedade, a distinção entre as classes. Segundo Ghiraldelli Júnior (1992, p. 81-82), se, em 1934, a Constituição trouxe garantias para a educação brasileira, tendo no Estado o fiel da balança, agregando ganhos para a população, a Carta de 1937 desfez este processo, eximindo o poder público de garantir educação para todos, cristalizando, dessa forma, a divisão de classes.

Diante deste quadro, é possível argumentar que as ações do governo privilegiavam as elites brasileiras em detrimento das classes operária e média. Para Bomeny (1999, p. 140), “o caminho para recrutamento da elite deveria ser o ensino secundário, e o momento de aperfeiçoamento dessa mesma elite seria o ensino superior”. Com isso, parece-nos que essas medidas teriam por finalidade gerar uma casta intelectual de líderes para gerir o rumo do país nas próximas

“Para as elites o caminho era simples: do primário ao ginásio, do ginásio ao colégio e, posteriormente, a opção por qualquer curso superior. Havia ainda a chance de profissionalização, mais destinada às moças, que depois do primário poderiam ingressar no Instituto de Educação e, posteriormente, cursar a Faculdade de Filosofia. O caminho escolar das classes populares, caso escapassem da evasão, ia do primário aos diversos cursos profissionalizantes. Cada curso profissionalizante só dava acesso ao curso superior da mesma área.”
(GHIRALDELLI JÚNIOR, 1992, p. 84)

décadas. Seria a escola-escada, mais uma vez, direcionando os degraus? A impressão que fica ao seguir os rastros propostos por Romanelli, Ghiraldelli Júnior, Bomeny, entre outros, seria a escola-escada uma forma para manutenção do *status quo*? Em que, para as elites, as melhores oportunidades; para os demais, o que restar.

As mudanças oriundas ou impostas pela conjuntura internacional, na esteira das transformações educacionais que embalavam o período (pós-guerra), trazem evidências marcantes também ao livro didático, em que, no caso específico da matemática, a ênfase das edições orbitava a seriação e a fusão dos ramos matemáticos. Oliveira Filho (2014, p. 934) ainda ressalta que

“Devido à natureza da Reforma Francisco Campos, que tenta imprimir organicidade ao ensino secundário, estabelecendo definitivamente o currículo seriado, vão gradativamente desaparecendo os manuais didáticos referentes às áreas estanques da Matemática, isto é, os “Curso de Álgebra”, “Curso de Geometria” etc., escritos sob a influência direta dos manuais franceses da segunda metade do século XVIII, cedendo lugar aos manuais organizados de acordo com a série à qual destinavam-se.” (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 42)

as alterações provocadas pela Reforma Capanema tornaram “os programas de Matemática para o Colegial mais consistentes, organizados, estruturados, o que irá influenciar no processo de constituição da Matemática do Colégio.” Devido a isso, um vasto leque de opções transparece na publicação de livros didáticos de matemática. Entre as várias obras editadas nesse período destacamos três, que, em nossa percepção, se constituíram balizadoras do fazer matemático de educadores, pois transcendeu inclusive a referida década e manteve-se como padrão e referência nos anos 1950 – 1960. É importante salientar que todas se constituem em coleções de três volumes. Seria coincidência, talvez algo premeditado, ou ainda inusitado? Ou

uma questão de *marketing*, porquanto a compilação e a impressão dessa tríade se deram por diferentes editoras.

Posto isso, iniciamos, então, pela obra de Thales Mello de Carvalho, intitulada “Matemática para os cursos clássicos e científicos”, publicada pela Cia. Editora Nacional, que era paulista e buscava em solo carioca um autor de livros didáticos. Thales, citado anteriormente, não era inexperiente na arte da escrita, visto que já havia se aventurado na produção de livros na época dos cursos Complementares. Segundo Valente (2011b, p. 656), a coleção teve boa aceitação, tanto que chegou com fôlego ao início da década de 1960, proporcionando à Cia. Editora Nacional uma projeção que rivalizaria com as editoras do Rio de Janeiro, que, até a década de 1920, eram referência na produção de livros didáticos.

A segunda Coleção foi escrita por Algacyr Munhoz Maeder, “Curso de Matemática”, editada pelas Edições Melhoramentos. Segundo Longen (2007, p. 173), “Foram 10 anos em que as tiragens feitas pela editora praticamente se mantiveram, em um patamar que pode ser considerado elevado para a época.” Longen (2007) ainda apresenta que o professor Algacyr já havia escrito livros anteriormente, porém para o Ginásio (década de 1930). No total, foram publicados 19 livros no período de 1928 a 1962.

A última publicação da mencionada tríade é a “Matemática 2º ciclo”, de autoria de um quarteto, ou como se dizia na época, “a coleção dos 4 autores”, Euclides Roxo, Haroldo Lisboa Cunha, Roberto Peixoto e Cesar Darcoso Netto. Segundo Valente (2009, p. 8-9), a publicação ficou a cargo da Editora Francisco Alves, do Rio de Janeiro, que, durante as duas décadas seguintes, adaptou e reproduziu a obra várias vezes, proporcionando vida longa à Coleção, que, de certa forma, traduzia o modelo e a didática dos materiais produzidos pelo Colégio Pedro II como referencial no Ensino Secundário brasileiro.

As três coleções transpuseram as mudanças no decorrer dos anos e conseguiram sobreviver duas décadas desde sua edição. Porém, uma delas, a coleção dos 4 autores, se destacou em relação às demais. Ribeiro (2011, p. 239), ao analisar diversas obras da época, observou

indícios da formação da vulgata, com o surgimento de uma coleção de livros didáticos de Matemática, editados para os Cursos Colegiais, com edição entre 1944 e 1945, cujos autores eram Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Lisboa da Cunha e Cesar Darcoso Netto, que apresentavam uma nova organização e apresentação dos conteúdos matemáticos.

Diante da constatação da vulgata, elegemos para constituir nosso arquivo de análise a coleção dos 4 autores. É imprescindível apresentar, mesmo que sucintamente, os personagens que assinam tal obra. Segundo Valentim Júnior (2013, p. 59), Euclides Roxo era professor do Colégio Pedro II, participou ativamente da elaboração dos programas de reformas da educação de dois ministros, Campos (1931) e Capanema (1942). Considerado por muitos como o precursor dos educadores matemáticos brasileiros. Quanto a Haroldo Lisbôa da Cunha, além de ser colega de Roxo no Pedro II, foi também catedrático da Universidade do Brasil (atual UFRJ), onde chegou à reitoria. Já Roberto Peixoto foi professor do Instituto de Educação do Rio de Janeiro e autor de diversos livros para os cursos Complementares. E, finalmente, César Dacorso Netto, além do Instituto de Educação, também foi professor do Colégio São Bento.

“A necessidade, por um lado, de aliviar os deveres escolares que congestionam os atuais programas do Ensino Secundário, e, de outro, atribuir maior elasticidade e rendimento à execução, tantas vezes reclamada, quer pelos educadores, quer por alunos e seus pais, levou o Ministério da Educação a estudar a conveniência de proceder a uma revisão da matéria neles contida, de modo a possibilitar o desenvolvimento racional de suas finalidades educativas.” (INEP, 1952, p. 515 apud MARQUES, 2005, p. 51)

O próximo capítulo envolvendo o Ensino Secundário chega de uma forma menos incisiva, proporcionando pouca mudança, porém significativa. Vargas retorna ao poder, agora através do voto, e seu então Ministro da Educação e Saúde, Ernesto Simões Filho, cria uma comissão para revisão dos programas de conteúdos e orientações pedagógicas das disciplinas escolares do Ensino Secundário. Essa comissão era composta por um professor da Faculdade Nacional de Filosofia, do Colégio Pedro II, do Instituto de Educação do Distrito Federal e do Sindicato dos professores das escolas particulares. A consolidação dessa revisão se deu por meio das Portarias n. 966 e n. 1.045, que, ao final do ano de 1951, concluiu os trabalhos e apresentou uma reforma que seria conhecida no decorrer da história como “Programa Mínimo”.

Desse modo, a Reforma Simões Filho, nosso terceiro corte, não alterou a organização do sistema, apenas revisou e, de certa forma, reduziu ou reorganizou os programas das disciplinas com o fim de apresentar viabilidade e exequibilidade aos currículos. A produção didática neste período permanece em números expressivos. As três coleções citadas no período de 1942-1951 continuaram a ser reeditadas na década de 1950, adequando-se, é claro, às mudanças propostas pela Reforma Simões Filho. Oliveira Filho (2012, p. 12) esclarece que

no ano de 1951 tivemos a Reforma Simões Filho. O objetivo da mesma foi promover a reformulação dos programas do ensino secundário, tornando-os mais simples, mais acessíveis aos alunos; acolhendo uma crítica feita aos programas advindos da Reforma Capanema, que eram por demais abstratos, de difícil acesso pelo aluno. A Coleção dos 4 autores sofrerá pequenas modificações, dando ensejo a uma nova versão, mas não o suficiente para mudar o fato dela ser a vulgata do período 1943 – 1961.

No entanto, outro personagem ganha notoriedade dentro do grupo de autores de livros didáticos. Trata-se do Prof. Ary Norton de Murat Quintella, que, segundo Valente (2008, p. 154) , torna-se o autor de maior sucesso de vendas de livros didáticos para o Curso Colegial da Cia. Editora Nacional no período da Reforma Capanema.

Ary Quintella, paulista, termina o Ensino Secundário já no Rio de Janeiro. Aluno do Colégio Pedro II e da Escola Militar, inicia sua vida profissional no Colégio Militar do Rio de Janeiro. Mais tarde, lecionou no Instituto de Educação e foi colaborador na “organização dos programas de Matemática para os cursos comercial básico e técnico, a convite do Ministro da Educação, além de ter atuado em numerosas comissões e bancas de concursos de professores de Matemática.” (THIENGO, 2001, p. 111-114 *apud* VALENTE, 2008, p. 154)

Posto isso, apesar de a coleção dos 4 autores continuar sendo a vulgata no período de 1951-1961, optamos por selecionar, para constituir nosso acervo, a obra “Matemática para o Curso Colegial”, de Ary Quintella, por dois motivos: o primeiro, talvez de menor importância, mas assim mesmo relevante para a Cia. Editora Moderna, pois alcançou grande sucesso comercial, passando a ser o autor de maior vendagem no período da Reforma Capanema, no segmento de livros didáticos do curso Colegial. Já o segundo motivo é o que neste momento nos interessa, promover a multiplicidade de olhares para os diversos livros didáticos ofertados ao público, especialmente para os conteúdos de geometria. Caso estivéssemos percorrendo os principais nomes e movimentos, a fim de constituir uma história do ensino de geometria ao longo do período estudado, talvez a argumentação de Oliveira Filho (2012) fosse suficiente para a manutenção de apenas a Coleção dos 4 autores.

Paralelamente a essas mudanças na estrutura educacional, outras estavam sendo debatidas no Legislativo, pois, desde a promulgação da nova Constituição, em 1946, após o fim da era Vargas, em 1945, esperava-se a criação da primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação, porém foram 2 anos até a apresentação de um projeto de lei e mais 13 anos até sua aprovação no Congresso. Ghiraldelli Júnior (1992, p. 114-129) evidencia que este momento foi marcado por pressões e *lobby* ao Governo, para que não fechasse as portas aos grupos

políticos e econômicos que desejavam transformar a educação em comércio, pois defendiam a não interferência do Estado, ou ainda, que a gerência e provimento da educação deixasse de ser responsabilidade do Estado.

De outro lado, especialmente educadores, parcelas da população e alguns segmentos buscavam a manutenção por parte do Estado como provedor da educação em nível nacional. Em certo sentido, isso foi alcançado, no entanto, houve retrocessos em alguns aspectos, como por exemplo, o estabelecimento de casos de isenção da obrigatoriedade do Ensino Primário. Segundo Romanelli (2003, p. 181), “A sua única vantagem talvez esteja no fato de não ter prescrito um currículo fixo e rígido para todo o território nacional, em cada nível e ramo.” O Conselho Federal de Educação ficou incumbido da escolha de 5 disciplinas obrigatórias e comuns a todos os estados, enquanto os Conselhos Estaduais teriam a liberdade de compor o restante das bases curriculares com disciplinas conforme definido pela política local. Quanto à estrutura do ensino, manteve-se a divisão do Ensino Secundário em dois ciclos: Ginásial (4 anos) e Colegial (3 anos), este último abrangendo os cursos secundários, técnicos e de formação de professores para o Ensino Primário e Pré-Primário, algo que viria a mudar na década seguinte. E assim, nosso quarto corte é estabelecido, não só pelas mudanças proporcionadas pela LDBEN/61, mas também pelo Movimento Matemática Moderna (MMM), que agitou o debate entre os educadores sobre o ensino da matemática.

Nesse cenário, ficou evidenciado em nossas pesquisas que as reedições da obra de Ary Quintella e as constantes citações por outros autores o tornam referência para a época. Porém, Valente (2009, p. 10) apresenta que outro personagem ganha destaque, o Prof. Manoel Jairo Bezerra, que foi professor e diretor de uma escola particular no Rio de Janeiro. Apesar de ter lançado sua primeira publicação para o Colegial ainda em meados da década de 1950, é na década de 1960 que reúne os três volumes de sua obra para o curso Colegial em um único livro. Valente (2009, p. 10) aponta que “a obra, presente até hoje nos meios educacionais, a partir de muitas reformulações, teve um estrondoso sucesso de vendas. Por ter cor alaranjada, ficou conhecida como ‘tijolão’ em alguns estados brasileiros.”

Havia, até então, certa estabilidade da disciplina Matemática do Colégio no período de 1952-1960, evidenciada por Oliveira Filho (2013), que acaba sendo abalada pelo MMM, em que a proposta central buscava a renovação curricular visando a uma aproximação entre as matemáticas, aquela do nível superior com a outra, ensinada nas escolas.

A nosso ver, a espinha dorsal da disciplina, os conteúdos, é rompida e desestabilizada quando da entrada do Movimento da Matemática Moderna

no Brasil. Aquele rol de conteúdos estabilizado, resultado das modificações introduzidas pelas Portarias do Programa Mínimo, sofre uma desestruturação e acaba por se romper. Essa instabilidade curricular, originada pelo Movimento da Matemática Moderna, já relatada, acaba por comprometer a produção didática de Matemática para o Colegial, comprometendo também a constituição de uma *vulgata*. Sem um programa de conteúdos estável, sem uma *vulgata*, sem um padrão que chamamos de *metodologia de apresentação dos conteúdos*, concluímos que nessa fase a disciplina *perde a estabilidade e se desconstitui, indo buscar uma nova configuração*. (OLIVEIRA FILHO, 2013, p. 167)

Ao contemplar esse movimento, seria evidente que as edições didáticas comesçassem a reverberar os sons do MMM. Para Valente (2009, p. 12-13), Osvaldo Sangiorgi, que era líder e presidente do GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática), surge como pioneiro das produções didáticas para o curso Ginásial, porém no curso Colegial o mesmo não acontece, visto que a coleção “Matemática – Curso Moderno – 2º Ciclo”, assinada por Sangiorgi juntamente com Renate Watanabe e Jacy Monteiro, só foi publicada em 1970 e resultou num fracasso editorial.

Valente (2009, p. 13) ainda apresenta que a primeira coleção de livros editorada para o Colegial, com ideais do MMM, foi a tradução da obra: “Matemática – Curso Colegial”, do MSG (School Mathematics Study Group), originária dos EUA. Os responsáveis pelo feito foram os professores Lafayette de Moraes e Lydia Lamparelli. Sua publicação ocorreu a partir de 1964 pela editora da Universidade de Brasília, mas, ao que tudo indica, também não obteve sucesso editorial. Segundo Valente (2009, p. 15), uma coleção que parece ter ganho espaço no meio escolar foi a dos professores do curso Colegial, Scipione Di Pierro Neto, Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen Barbosa, que também tinham ligação com o GEEM. A obra “Matemática – Curso Colegial Moderno” foi publicada em 1967 pelo IBEP – Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas.

As referências que encontramos sugerem que a coleção com maior aceitação no período foi a de Bezerra. Porém, seguindo nossa linha de pensamento e primando pela multiplicidade, optamos por escolher uma obra que contemple os ideais do MMM. Dentre as três coleções pesquisadas, a obra de Rocha, Barbosa e Pierro Neto parece ter sido a mais aceita entre os professores, motivo pelo qual irá compor nosso arquivo cultural de análise.

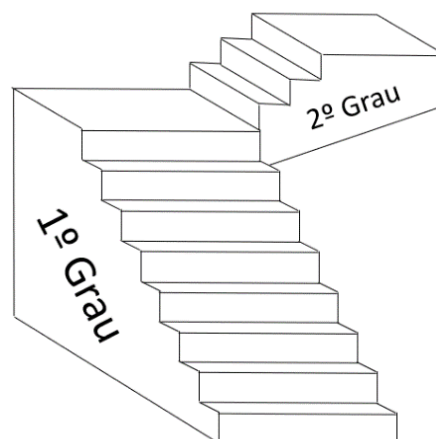
Com a saída de Getúlio Vargas do cenário político, que prefere “deixar a vida para entrar na história”, outros atores entram em cena. Segundo Ghiraldelli Júnior (1992, p. 130-131), com a eleição de Juscelino Kubitschek, ocorreu um período de desenvolvimento e abertura ao capital estrangeiro, o que propiciou o investimento nas indústrias pesadas. Para

Nunes (2018, p. 17), “ocorreram relevantes transformações no Brasil, tais como a industrialização, a urbanização, a imigração, o êxodo rural”. Este fator, o êxodo rural, passa a ser um problema social, pois, segundo Pavanello (1989, p. 122), as cidades, essencialmente os grandes centros, incham, e as favelas se proliferam, e isso promove desequilíbrios regionais por conta de uma aceleração da industrialização das regiões Central e Sul do país. Já na esfera educacional, percebe-se uma expansão do número de vagas, mais privadas que públicas. Nunes (2000, p. 47-48) sugere que

a expansão do ensino secundário foi considerada modificação do sistema escolar em decorrência dos impulsos modernizadores e progressistas da industrialização, mas uma outra leitura seria possível se deslocássemos nosso olhar para os seus efeitos excludentes. [...] Em nossa perspectiva, a expansão do ensino secundário era fruto das contradições da política populista e o atraso e a evasão dos alunos revelavam a grave situação econômica de suas famílias.

Assim, na esteira do momento, do crescimento da população, das diferentes migrações de brasileiros, alguns deixando o semiárido nordestino para inchar os grandes centros (principalmente São Paulo e Rio de Janeiro), agricultores do centro sul desbravando o meio oeste – norte, a efervescência no cenário político culminando com o Golpe Militar de 1964. Com isso, toda a configuração muda, o rigor passa ser a tônica das relações, e a educação sofre do mesmo mal. No auge do Governo Militar, é aprovado, no ano de 1971, a Lei de Diretrizes e

Figura 9– O Escola Básica da LDB/71



Fonte: A autora

Bases da Educação Nacional (LDBEN), que trouxe mudanças ao ambiente escolar, configurando-se em nosso quinto corte, em que a ênfase está na apropriação de conhecimentos e habilidades a fim de formar no aluno, no caso dos que não chegariam à universidade, um cabedal de informações que o tornaria útil para funções e trabalhos específicos à sua formação a fim de inserção ao mercado de trabalho. A presente Lei alterou o então Ensino Primário e Secundário (cursos Ginásial e Colegial) para Ensino de 1º Grau (Primário e Ginásial) e 2º grau (Colegial):

A busca pela padronização e organização continuou na 2ª LDB, publicada em 11 de agosto de 1971, que remodelou o ensino primário e secundário, dando origem ao ensino de 1º e 2º graus. As principais características da 2ª

lei de diretrizes da educação brasileira foram: Prevê um núcleo comum para o currículo de 1º e 2º graus e uma parte diversificada em função das peculiaridades locais (art. 4); Inclui a educação moral e cívica, a educação física, a educação artística e os programas de saúde como matérias obrigatórias do currículo, além do ensino religioso facultativo (art. 7); Institui o ano letivo de 200 dias (art. 24); Ensino de 1º grau obrigatório dos 7 aos 14 anos (art. 20). (VALENTIM JÚNIOR, 2013, p. 34)

Mas é a partir de 1972 que as mudanças aparecem com maior evidência, quando, na questão política, o tal “milagre econômico” começa a desmoronar, acentuando-se a crítica social ao Regime Militar. Ghiraldelli Júnior (1992, p. 182), referindo-se à criação da LDBEN, em agosto de 1971, afirma que ela “refletiu os princípios da Ditadura Militar verificados pela incorporação de determinações no sentido da racionalização do trabalho escolar e na adoção do ensino profissionalizante no 2º grau.” Com isso, o 2º Grau torna-se quase que totalmente profissionalizante.

Desse longo período, tivemos acesso a poucas referências de livros didáticos. Com isso, não estamos julgando a questão da quantidade de obras publicadas nem tampouco afirmando que não existam pesquisas desse intervalo. O fato é que localizamos apenas um trabalho nos anais do ENAPHEM a respeito da temática de livros didáticos de matemática do 2º Grau. Isso nos faz pensar se haveria alguma relação com o Regime Militar imposto na maior parte do período, ou, ainda, por se tratar de um passado mais recente, não tenha despertado interesse dos pesquisadores em História da Educação Matemática. Quanto à produção didática: será que foram publicados livros didáticos de matemática permeados pelos ideais profissionalizantes?

No trabalho de Valentim Júnior e Oliveira (2012, p. 16), verificamos uma citação da 33ª edição da obra de Manoel Jairo Bezerra, publicada em 1976, que, segundo os pesquisadores, não teve modificações se comparada com a edição de 1960, à exceção do título que passa a ser “Curso de Matemática para os cursos de 2º grau”, adequando-se, assim, à legislação vigente. Temos ainda outra citação, a coleção de Scipione Di Pierro Neto, agora em parceria com a professora Célia Contim Góes, publicada em 1972 pela Editora IBEP, com o título “Matemática na Escola Renovada”, que se destaca pelo maior número de ilustrações gráficas por página. (VALENTIM JÚNIOR, 2013, p. 92).

Encontramos ainda outra obra citada por Valentin Júnior (2013, p. 97), que, devido à grande influência que um de seus autores ainda exerce em tempos atuais, se constituirá em nossa escolha para análise, apesar de não termos encontrado ligações desta coleção com o

ensino profissionalizante. Tal autor é Gelson Iezzi, que, valendo-se de sua experiência como professor de cursos pré-vestibulares, aventura-se no ramo editorial no final da década de 1960. Sua coleção “Matemática – 2º Grau”, em parceria com os professores Osvaldo Doce, José Carlos Teixeira, Nilson José Machado, Márcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silveira Castro e Antônio dos Santos Machado, é reeditada algumas vezes. Foi utilizada até a década 1990.

Porém, com o fim da era militar, chegava ao seu final também o ensino de 2º grau exclusivamente profissionalizante. Se é que de fato ele vigorou nas escolas, ou apenas seria o mesmo ensino de 2º grau revestido ou travestido com uma fantasia profissionalizante? Apesar de uma nova Constituição ter sido promulgada em 1988, foi necessária quase uma década até a aprovação de uma nova LDB em 1996 e, portanto, nosso sexto corte, para que se efetivassem reformas e mudanças, pois ainda se vivia sob a regência das leis educacionais reiteradas pela LDBEN da era militar. Em termos de reorganização do sistema de ensino, a LDB/96 renomeou o então 1º Grau para Ensino Fundamental e o 2º Grau para Ensino Médio, permanecendo a duração de 8 e 3 anos, respectivamente. Porém, em 2006, por meio da Lei 11.274, a duração do Ensino Fundamental é ampliada para 9 anos, com matrícula obrigatória a partir dos 6 anos de idade.

O Ensino Médio parece reunir as finalidades dos cursos que o antecederam: espera-se o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental (cursos Clássico e Científico) e dar condições para o prosseguimento dos estudos (cursos Complementares); preparação básica para o trabalho (2º grau); formação cidadã e compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos (Colegial). Seria esse o andamento natural da escola-escada que, ao ser acessada, tem por “obrigação” ordenar a sequência da vida escolar: o que fazer, onde fazer e como fazer? Ou seria o Ensino Médio um Frankenstein? Pois, nos parece existir no âmago da educação brasileira uma tradição em enxertar, remexer, reviver procedimentos e práticas passadas para adequar os atuais níveis de ensino, como se diferentes momentos e circunstâncias pudessem coadunar-se, e desse processo resultasse a criação de um ser perfeito.

Essa construção de uma identidade, a busca por afirmação de ideais e sonhos de liberdade na educação passa por diversas e diferentes fontes. Em momentos afastou-se do que vivera anteriormente, em outros buscou aproximação. Paiva (2003) apresenta que a modalidade de ensino que se tem buscado é aquela que contemple em seu projeto pedagógico ideias de

flexibilidade, autonomia, identidade, diversidade, interdisciplinaridade e contextualização. A partir daí, pretende-se que o objetivo do Ensino Médio esteja vinculado ao mundo do trabalho e da prática social; os educadores devem preparar seus programas, atividades, projetos e currículos objetivando a “preparação básica para o trabalho” e o “exercício da cidadania” (PAIVA, 2003, p. 129)

Ainda é possível perceber a força do mercado, do capital, sobre a educação, numa simbiose entre formar, educar e preparar para o trabalho. Assim, na esteira das transformações, novos formatos e dispositivos são criados no sentido de municiar autoridades e governos delineando estratégias e alternativas na efetivação de mudanças. É o que nos parece ter acontecido em relação à LDBEN/96, quando do surgimento do ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, criado em 28 de maio de 1998, por meio da Portaria n. 438 pelo Ministério da Educação e do Desporto (MEC). Sucintamente, este dispositivo de avaliação externa tem por finalidade mapear os conhecimentos adquiridos no Ensino Médio e, a partir dos resultados obtidos nos exames, dar condições para que se analisem e elaborem rumos, adequando e modificando onde necessário. Se bem que ultimamente ele também se metamorfoseou, permitindo que sua estrutura fosse colocada a serviço das universidades, para fins de classificação de alunos. Paiva (2003) expressa

que entre a avaliação do raciocínio e a do conhecimento, o ENEM pretende situar-se mais próximo do primeiro. Com uma proposta de avaliação diferente das habituais provas tradicionais, esse exame se destina a avaliar 21 habilidades decorrentes de 5 competências, que, segundo a comissão organizadora, corresponde às possibilidades totais de cognição humana na fase de desenvolvimento próprio aos seus participantes. Sob o princípio de avaliar processos gerais de raciocínio, em vez de conteúdos memorizados, e privilegiando a interdisciplinaridade, as situações-problema e a contextualização, os enunciados apresentam, em boa parte das questões, as informações suficientes, que, interpretadas e relacionadas coerentemente, fornecem a solução. (p. 45)

Paiva (2003) ainda pesquisou a influência do ENEM no livro didático de matemática do Ensino Médio. E, após fazer comparações entre duas obras de diferentes autores publicadas antes da criação do ENEM e suas reedições do ano de 2002, conclui que

o livro didático registra a busca de uma nova identidade para a disciplina Matemática. Essa busca parece estar sendo realizada a partir das novas diretrizes do Ensino Médio, e seu modelo, ao que tudo indica, tem sido a matriz de competências e habilidades do ENEM. (PAIVA, 2003, p. 132)

Na análise de Paiva (2003), o que transparece é que os conteúdos não sofreram alterações entre uma edição e outra (anterior e posterior ao ENEM). O que ocorre é uma transformação na forma de contextualizar os assuntos, e, na busca por apresentar uma inter-

relação com outras disciplinas, sendo possível afirmar que os livros didáticos atuais, tendem apresentar enfoques relacionados às questões do ENEM, após análise dos exames de cada certame, passando a ser esse um diferencial destacado nas capas dos livros.

Estão entre as obras analisadas por Paiva (2003) o livro “Matemática Fundamental, 2º grau”, volume único, de José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni Jr., publicado pela editora FTD em 1994; e outro livro dos mesmos autores, publicado em 2002, com o título de “Matemática Fundamental: Uma Nova Abordagem, Ensino Médio”. O livro “Matemática 2º Grau, 1ª série”, versão azul, de Gelson Iezzi, José Carlos Teixeira, Nilson José Machado, Márcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silveira Castro e Antônio dos Santos Machado, publicado pela editora Atual em 1997, e o livro “Matemática Ciência e aplicação, 1ª série”, versão azul, publicado em 2002, dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Roberto Périgo, David Degenszajin e Nilze de Almeida.

Outro momento importante se dá em 2003, com a criação do PNLEM – Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio. Com isso, ocorre uma distribuição maciça e gratuita de livros didáticos a este nível de ensino, o que permite a universalidade de acesso ao livro. Não há como mensurar este feito, mas é possível imaginar o fato de o aluno ter em suas mãos um livro, e gratuito, algo que há pouco tempo parecia impossível nesse nível de ensino.

Aqui me veio a lembrança de quando estive sentada num banco escolar e comecei a dar conta de que o tempo passou... E como passa depressa! Em minhas recordações a impressão era de que fazia pouco tempo que fiz o Ensino Médio, no entanto, quando parei para fazer as contas, percebi que já faz 20 anos que iniciei o 1º ano do Ensino Médio. Nesse momento em que estou envolvida com minha pesquisa, comecei a refletir sobre as mudanças que ocorreram de lá para cá, e foram tantas! Quando penso que estou olhando para um período ainda maior... 90 anos! Será que estou sendo audaciosa? Mas hoje, em especial, estou pensando sobre os livros didáticos. Eu fiz todo meu Ensino Médio no período noturno e numa escola pública, porque trabalhava durante o dia. Sendo bem sincera, foi muito difícil, principalmente esse primeiro ano, eu tinha o costume de dormir cedo, então quando dava umas 9 horas eu já estava em “stand by”, chegava sempre atrasada para a primeira aula, falta de tempo para estudar, reformas na escola, falta de professores, enfim nada muito diferente do que ocorre com muitos jovens ainda hoje. Mas recordei que naquele tempo (meu Deus! Estou ficando velha mesmo!) os alunos não “ganhavam” livros didáticos. Quando fiz o Ensino Fundamental lembro que sim, mas no Ensino Médio não. Alguns professores pediam para os alunos comprar os livros, mas como a maioria não tinha condições financeiras, isso as vezes dava confusão.

Quanto isso irá impactar na aprendizagem e desenvolvimento escolar é uma avaliação que deverá ser realizada por meio de pesquisas voltadas a esse propósito. Mas o fato é que, apesar de tudo, nos parece que o livro didático continua sendo o material mais utilizado nas salas de aula em todo o país.

Então, a partir da implantação do PNLEM em 2004, que ocorreu de maneira gradativa e progressiva, ao passo que neste ano foram atendidos os alunos do 1º ano das regiões Norte e Nordeste. Não foi possível obtenção de maiores informações pois, o site do PNLD não apresenta maiores detalhes ou números efetivamente alcançados com a distribuição dos livros de matemática.

Exemplificando o relato anterior, ocorre que somente no ano de 2006 encontramos o guia para a escolha do livro didático, onde estão relacionadas as obras aprovadas, conforme segue:

- BIANCHINI, Edwaldo Roque; PACCOLA, Herval. Matemática. 3 vol. Editora Moderna;
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática. 3 vol. Editora Ática;
- GOULART, Márcio Cintra. Matemática no Ensino Médio. 3 vol. Editora Scipione;
- GUELLI NETO, Oscar Augusto. Matemática. 3 vol. Editora Ática;
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DOMINGUES, H. H.; PÉRIGO, R.; DEGENSZAJIN, D. M.; ALMEIDA, N. S. Matemática Ciências e Aplicações. 3 vol. Saraiva Livreiros Editores;
- LONGEN, Adilson. Matemática. 3 vol. Editora Nova Didática Ltda;

Recordei-me que comprei um livro de Física (que tenho até hoje), usei a Gramática de Língua Portuguesa que meu irmão mais velho havia comprado, as aulas de Geografia eram na forma de ditados (o professor ditava todo o texto e depois um questionário e nas avaliações caía algumas daquelas questões). Na aula de Matemática a professora passava tudo no quadro (definição, exemplo e exercícios). E o cansaço, não dava possibilidade para sonhar, com tanta coisa a copiar, escrever, reproduzir, quando conseguia entender o que o professor tentava ensinar já me considerava uma vencedora. E dez anos depois quando me tornei professora, eu dava aula para turmas de 8º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, no "regular" e na EJA, nos períodos vespertino e noturno, 10 turmas, quase 500 alunos e mais 4 turmas de uma escola particular no período matutino... Era uma loucura! Mas voltando ao assunto dos livros didáticos, os meus alunos do Ensino Médio dessa escola pública "ganhavam" os livros. Diante dessa constatação fiquei me perguntando: o que será que mudou nas políticas públicas? E quando mudou? Será que essa também foi a realidade de outras localidades? Ou era um caso particular de uma cidade do interior do Estado de Rondônia? E então percebi que essas mudanças começaram a ocorrer a partir da criação do PNLEM em 2004, ou seja, dois anos após eu terminar o Ensino Médio.

- LONGEN, Adilson. Matemática: Uma Atividade Humana. 3 vol. Base Editora Gerenciamento Pedagógico;
- PAIVA, Manoel Rodrigues Paiva. 3 vol. Editora Moderna;
- SILVA, C. X.; BARRETO FILHO, B.; Matemática Aula por Aula. 3 vol. Editora FTD;
- SMOLE, K. C. S.; VIEIRA, M. I. S.; KIYUKAWA, R. Matemática Ensino Médio. 3 vol. Saraiva Livres Editores;
- ZAMPIROLO, M. J. C. V.; SCORDAMAGLIO, M. T.; CÂNDIDO, S. L. Matemática. 3 vol. Editora do Brasil.

Uma lista com muitas opções, porém não conseguimos identificar qual dessas coleções foi a mais adotada em âmbito nacional, ou a que teve maior ênfase. Já no guia para escolha do livro didático de 2009, constam os seguintes títulos como aprovados:

- BARRETO FILHO, Benigno.; SILVA, Cláudio Xavier da. Matemática aula por aula. 3 vol. 2ª ed. Renovada. Editora FTD;
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática. Vol. Único. 1ª Ed. Editora Ática;
- GIOVANI, José Ruy.; BONJORNO, José Roberto. Matemática completa. 3 vol. 2ª ed. Renovada. Editora FTD;
- GOULART, Marcio Cintra. Matemática no ensino médio. 3 Vol. 2ª Ed. Editora Scipione, 2009;
- PAIVA, Manoel. Matemática. Vol. Único. 1ª Ed. Editora Moderna;
- RUBIÓ, Angel Pandés.; FREITAS, Luciana Maria Ternuta. Matemática e suas tecnologias. 3 vol. 1ª ed. Editora IBEP;
- SMOLE, Kátia Stocco.; DINIZ, Maria Ignez. Matemática ensino médio. 3 vol. 5ª ed. Editora Saraiva;
- YOSSEF, Antônio Nicolau.; SOARES, Elizabeth.; FERNANDEZ, Vicente Paz. Matemática. Vol. Único. 1ª Ed. Editora Scipione.

Nesse período, averiguamos que a obra mais utilizada foi a de Luiz Roberto Dante, por esse motivo, optamos por escolher essa obra para compor nosso arquivo cultural de análise.

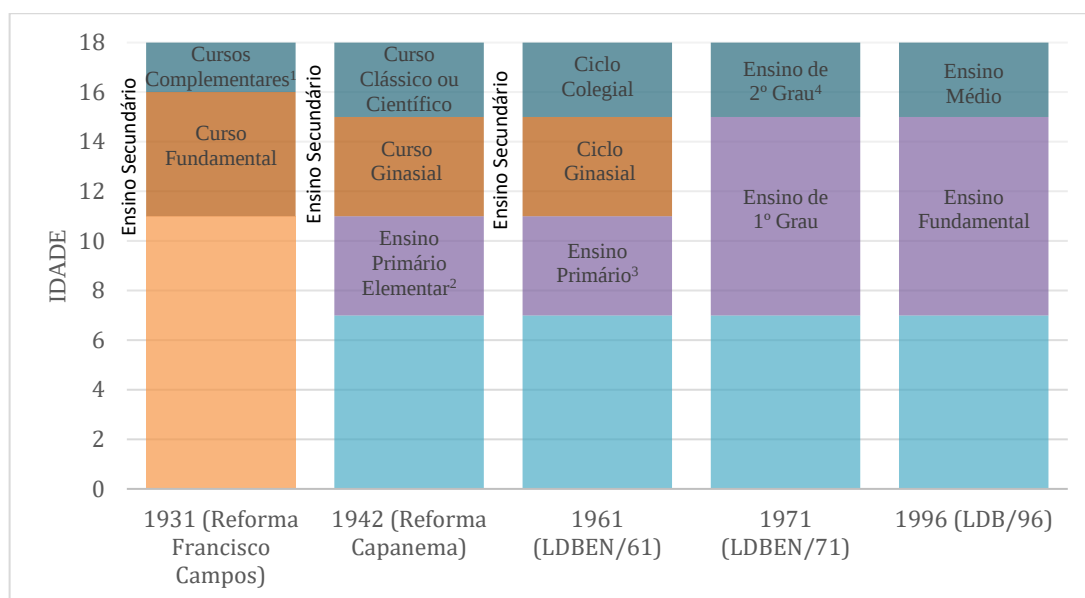
Então, diante de tudo isso, é possível perceber as reviravoltas que circundam a criação dos modelos educacionais brasileiros, em que seu enredo principal esteja postado sobre uma possível falácia – a ideia do poder central idealizador e garantidor da educação e, na outra ponta, a população, massificada e alienada na mesma proporção, à espera da obrigatoriedade governamental em proporcionar o salto de qualidade na vida dela através da meritocracia

escolar – da escada que, após acessada, necessariamente levará ao local de destaque, à vitória e ao triunfo sobre os demais “competidores”. Talvez seja possível parafrasear o ditado popular, “de louco e monstro todos têm um pouco”, mas ele soa apropriado pelo fato de que, em geral, e à margem dos tempos, os loucos e monstros sempre estão à solta (andam à espreita).

A preocupação central do projeto educativo da burguesia era a de exercer um controle ideológico eficaz sobre a formação escolar do denominado cidadão republicano civilizado. Mas esse controle deveria ser mascarado e aparentar-se ideologicamente neutro e comprovadamente meritocrático. E foi para atingir esse propósito de doutrinação massiva que este projeto instalou uma escolarização pública, laica, gratuita, universal, competitiva, etapista e compulsória. E para mascarar o seu propósito ideológico, essa educação se apresentou como um direito do cidadão e uma obrigação do Estado. Porém, este suposto direito à instrução pública era visto como uma condição prévia para o exercício da cidadania, para o acesso aos melhores postos de trabalho, para a melhoria das condições materiais de vida. De modo que esse direito era apenas a imposição de uma obrigação à concorrência, à participação em uma guerra difusa, invisível, em que o indivíduo deveria aprender a ver-se como o maior inimigo de si próprio. A consentir a ver-se como um soldado filho fiel que não foge à luta e nem teme a própria morte. (FERREIRA; MIGUEL; BRITO, 2020, 19 min)

Ao longo deste texto, elencamos as reformas ocorridas no sistema educacional brasileiro, que, a nosso ver, propiciaram algum tipo de mudança. É certo que nosso objetivo não está em mensurar a eficácia ou a abrangência de tais reformas, mas apresentar de forma sucinta alguns processos que impulsionaram propensas mudanças e alterações no universo educacional. Nesse processo, parece-nos que a educação, ou a teorização dos conceitos educacionais sempre estiveram no limiar de movimentos em busca de afirmações, porém, esse espectro aponta, na realidade, para um balançar de gangorra, ou seja, em momentos, alcançou em partes, sua finalidade, em outros, afastou-se destes. Talvez a tônica desses movimentos, em boa parte, assente-se sobre a forma de interesses pessoais, financeiros, ideológicos. E mesmo que em alguns momentos as reformas tendessem impulsionar a educação, parece-nos que o fator população esteve à margem dos acontecimentos e das decisões no binômio (que envolviam) escola/educação.

Apesar de olharmos para as reformas educacionais tendo como ponto de partida a República, optamos por demarcar como início do nosso recorte temporal o ano de 1931, quando da Reforma Francisco Campos, pelo fato de que a partir desse momento ocorre a divisão do Ensino Secundário em dois ciclos, culminando em 2010, após a criação do ENEM. No gráfico 1, apresentamos a divisão da Educação Básica de 1931 a 2010.

Gráfico 1 – Educação Básica no período de 1931-2010

Fonte: Elaborado pela autora

No Gráfico 1, o eixo vertical representa a idade mínima que o aluno deveria ter para cursar cada etapa. É possível também verificar a duração delas. Já no eixo horizontal, constam os anos que demarcamos como nossos cortes nos processos educacionais que estavam em fluxo, com exceção da Reforma Simões Filho, ocorrida em 1951, pois esta não alterou a organização da Educação Básica, e sim propôs alterações aos programas da disciplina Matemática.

Cabe ainda salientar algumas observações quanto aos cursos apresentados no Gráfico 1: (1) os cursos Complementares dividiam-se em três modalidades (pré-médico, pré-técnico e pré-jurídico), de acordo com aspiração ao Ensino Superior; (2) na Reforma Capanema, o Decreto-Lei 8.529, de 02 de janeiro de 1946, previa ainda um curso Primário Complementar, subsequente ao curso Primário Elementar, com duração de 1 ano; (3) a LDBEN/61 também previa que o Ensino Primário poderia estender sua duração até 6 anos; (4) a LDBEN/71 estabelecia que o Ensino de 2º Grau poderia ter uma 4ª série, dependendo da habilitação escolhida pelo aluno.

Ainda sobre o período de 1931 a 1942, em que vigorou a Reforma Francisco Campos, não localizamos referência a um dispositivo legal que estabelecesse as normas para o Ensino Primário. Como nosso foco é a última etapa do Ensino Básico, não investigamos de forma mais acurada esse nível inicial.

Ainda para melhor identificação, apresentamos a seguir as obras selecionadas com as quais iremos trabalhar, compreendendo o período de 1931 a 2010.

Quadro 1 – Livros selecionados para o arquivo cultural de análise

Período	Reformas educacionais	Denominação	Livros Escolhidos
1931-1942	Reforma Francisco Campos	Cursos Complementares (Pré-Médico, Pré-Técnico e Pré-Jurídico)	LIMA, G. Pontos de Matemática – segundo os programas dos Cursos Complementares. São Paulo: Soc. Imprensa Paulista Ltda, 1938.
1942-1951	Reforma Capanema	Curso Colegial (Clássico e Científico)	ROXO, E.; PEIXOTO, R.; CUNHA, H.; DACORSO NETTO, C. Matemática 2º Ciclo - 1ª Série. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1945. ROXO, E.; PEIXOTO, R.; CUNHA, H.; DACORSO NETTO, C. Matemática 2º Ciclo - 2ª Série. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944. ROXO, E.; PEIXOTO, R.; CUNHA, H.; DACORSO NETTO, C. Matemática 2º Ciclo - 3ª Série. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944.
1951-1961	Reforma Simões Filho “Programa Mínimo”	Curso Colegial (Clássico e Científico)	QUINTELLA, A. Matemática para o primeiro ano colegial. São Paulo: Companhia Editora Nacional. 1960. QUINTELLA, A. Matemática para o segundo ano colegial. São Paulo: Companhia Editora Nacional. 1957. QUINTELLA, A. Matemática para o terceiro ano colegial. São Paulo: Companhia Editora Nacional. 1958.
1961-1971	1ª LDBEN	Curso Colegial	PIERRO NETO, S.; ROCHA, L. M.; BARBOSA, R. M. Matemática – Curso Colegial Moderno, 1ª série. IBEP, 1967. PIERRO NETO, S.; ROCHA, L. M.; BARBOSA, R. M. Matemática – Curso Colegial Moderno, 2ª série. IBEP, 1968. ROCHA, L. M.; BARBOSA, R. M. Matemática – Curso Colegial Moderno, 3ª série. IBEP, 1970.

1971-1996	2ª LDBEN	2º Grau	IEZZI, G. e outros. Matemática – 1ª Série – 2º Grau. São Paulo: Atual, 1976. IEZZI, G. e outros. Matemática – 2ª Série – 2º Grau. São Paulo: Atual, 1976. IEZZI, G. e outros. Matemática – 3ª Série – 2º Grau. São Paulo: Atual, 1976.
1996-2010	LDB/96	Ensino Médio	DANTE, L. R. Matemática volume único. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2005.

Fonte: Elaborado pela autora

De posse dos referidos livros, que, de certa forma, mobilizaram ideias, concepções, práticas e modos de ver a geometria na escola, realizaremos uma terapia gramatical, na perspectiva dos jogos de linguagem de Wittgenstein, proporcionando, assim, uma apresentação panorâmica dos conteúdos geométricos presentes nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio. Alguns ponderamentos ainda ocorrem ao refletir a respeito: todos os autores abordaram a mesma geometria? O uso dessa geometria foi igualitário durante o período estudado?

E, assim, a escola-escada foi se remodelando por meio das reformas educacionais, no entanto, apesar dessas mudanças, a essência da escola parece ter permanecido a mesma, marcada por suas etapas, séries e degraus, ancorada no pensamento, como nos aponta Silva (2009, p.134), de que o conhecimento é algo que pode ser estocado de forma linear, e a escola, por meio de mecanismos, é capaz de verificar qual nível de conhecimento os alunos conseguiram guardar.

Silva (2009, p. 134-136) ainda apresenta três metáforas para exemplificar essa ideia de acúmulo de conhecimento. A primeira delas se refere ao balde, como se os conteúdos pudessem ser despejados como água dentro de um balde, que vai enchendo até chegar a um determinado nível. É importante salientar que o autor não contempla a questão do limite. E quando este balde encher? O que fazer, ou como aumentar a estrutura para novos conhecimentos serem despejados em seu interior? Mas o que ele aponta é que existe o balde, que vai acumulando conhecimentos, e a maneira de se saber quanto de conhecimento o aluno

já adquiriu ou conseguiu guardar é verificando isso com uma espécie de marcador, uma vareta com graduações que quantificam o valor a ser dado ao aluno.

Com isso, depreende-se que o conhecimento está com o professor, ele é o detentor dos conteúdos e vai gotejando, ou despejando conforme seu querer, e cabe aos alunos o ato de estocar, guardar, memorizar, mantendo a esfera de que somente ele, o professor, é quem sabe algo e que a tarefa dos alunos seja apenas o ato de aprender. A interação e a troca de informações e aprendizados nesse modelo é inexistente, não há transformação e, se o aluno, no final, não conseguir acumular nada, ou inferior ao esperado pelo professor e às regras vigentes, a culpa recai sobre o aluno, e não sobre o sistema ou o professor.

A segunda metáfora se refere a um edifício, tendo como ponto principal que se tenha uma boa base, o edifício precisa ter pontos de apoio bem estruturados para evitar correr riscos no momento da construção ou mesmo posterior. Essa ideia está muito ligada à matemática escolar, em que se tem esse escalonamento de conhecimentos em que um depende do outro para formar a base para novo conhecimento. Sendo que outras disciplinas não precisam disso, e são comparadas, na realidade, com outras formas de construção, como num condomínio em que as casas são independentes umas das outras, não necessitando necessariamente desse alicerce mais resistente, como no caso do edifício. De modo muito claro, este conceito apresenta a linearidade dos conhecimentos, sendo especialmente encontrado no fazer matemático.

A terceira metáfora seria uma cadeia de elos, no sentido de que um conteúdo depende necessariamente do outro como numa sequência sincronizada de elos que se unem um ao outro (pensemos numa corrente ou correia de bicicleta, onde se um destes elos estiver solto, a força proporcionada pela ação dos pés nos pedais da bicicleta não resultará em força motriz). A ideia de pré-requisitos é patente, conteúdos que dependem de outros conteúdos, mas ele aborda a ideia de que em algumas situações isso seja possível sem ter de recorrer a conteúdos e conhecimentos adquiridos anteriormente, desde que se tenha a vontade e se deixe de lado a questão do cumprimento das metas semanais, mensais ou semestrais dos projetos pedagógicos.

Refletindo sobre essas metáforas acerca do conhecimento, indagamo-nos se seria possível pensar a matemática escolar como uma escada? Uma matemática-escada, em que para chegar ao topo dela, precisamos subir degrau por degrau, ou seja, conteúdo por conteúdo. Teríamos, então, também uma geometria-escada com sua organização axiomática (axiomas -

definições - teoremas), além de ser ensinado primeiro a geometria plana, para depois a espacial e, por fim, a analítica. O que aconteceria se mudássemos a ordem dos conteúdos? Isso interferiria na aprendizagem? Será que, ao longo do período de 1930-2010, a sequência dos conteúdos estabelecidos nos programas da disciplina de matemática foi sempre a mesma? Ou, ainda, será que sempre foram ensinados os mesmos conteúdos? Os livros didáticos seguem essas determinações? Ou os autores estabelecem sua própria ordem dos conteúdos?

“Sobre a Geometria, por exemplo, é curioso perceber que o privilégio, até pouco tempo, era dado à Euclidiana Plana, deixando os estudos relativos à Geometria Espacial para um momento em que o aluno tivesse a experiência necessária no plano para “ampliar” seu conhecimento para o espaço. Ora, o que é mais natural, significativo e concreto: aprender Geometria Espacial ou Geometria Plana? Vivemos em um mundo tridimensional e, portanto, seria muito mais expressivo para o estudante perceber as formas existentes no mundo real e no seu cotidiano para poder, a partir delas, construir conceitos ligados à planificação desses objetos concretos que nada mais são que representações de conceitos matemáticos.” (SILVA, 2009, p. 137)

Atrelada às reformas ocorridas no decorrer do século passado que modificaram a organização do ensino, temos os programas das disciplinas, em particular a de Matemática, que, conseqüentemente, também sofreram alterações. Na Reforma Francisco Campos, que dividiu o ensino Secundário em curso Fundamental (5 anos) e Complementar (2 anos), ficou estabelecido no art. 10 do Decreto n. 19.890 de 18 de abril de 1931 que

Os programmas do ensino secundario, bem como as instrucções sobre os methodos de ensino, serão expedidos pelo Ministerio da Educação e Saude Publica e revistos, de tres em tresannos, por uma comissão designada pelo ministro e á qual serão submettidas as propostas elaboradas pela Congregação do Colegio Pedro II.

O recém-criado Ministério da Educação e Saúde Pública busca neste momento a unificação no que tange aos métodos de ensino, que até então ficavam a cargo de cada estado. Porém essas mudanças deveriam ocorrer paulatinamente, segundo Otone (2011, p. 72)

uma vez que a Reforma se applicava, em 1931, aos alunos da 1ª série do Ensino Secundário, estes chegariam sem repetência, à quinta série, em 1935; então, podemos presumir que o primeiro ano do Curso Complementar só passaria a vigorar a partir de 1936. Será visto, adiante, na prática do curso, não foi isto o que aconteceu.

E, de fato, a publicação dos programas para os cursos Complementares, que, segundo Nunes (2000, p. 44), assumiam “ares de um enciclopedismo especializado”, só ocorreu em 17 de março de 1936 por meio de uma portaria ministerial. Porém, como aponta Otone (2011), em algumas instituições, estes cursos foram instaurados alguns anos antes, como é o caso do curso Complementar pré-jurídico da Faculdade de Direito de São Paulo, que funcionou de 1933 até 1943, na Faculdade de Medicina de São Paulo de 1932 a 1943, o curso pré-médico, e durante os anos de 1934 a 1943, o curso pré-politécnico na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. A portaria ministerial também determinava o número de horas/aula por semana de cada disciplina, conforme apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 – Distribuição do tempo dos trabalhos escolares em 1936 por semana

Série	Curso Médico, Farmacêutico e Odontológico	Curso de Engenharia, Química Industrial e Arquitetura	Curso Jurídico
1 ^a	Alemão ou Inglês - 3 horas	Matemática - 6 horas	Latim - 4 horas
	Matemática - 4 h	Física - 3 h	Literatura - 4 h
	Física - 5 h	Química - 4 h	História da Civilização - 4 h
	Química - 6 h	História Natural - 4 h	Noções de Economia e Estatística - 4 h
	História Natural - 6 h	Geografia - 3 h	Biologia Geral - 3 h
	Psicologia e Lógica - 4 h	Cosmografia - 3 h	Psicologia e Lógica - 6 h
		Psicologia e Lógica - 4 h	
2 ^a	Alemão ou Inglês - 3 horas	Matemática - 6 horas	Latim - 4 horas
	Física - 5 h	Física - 4 h	Literatura - 6 h
	Química - 6 h	Química - 5 h	Geografia - 3 h
	História Natural - 6 h	História Natural - 4 h	Higiene - 3 h
	Sociologia - 3 h	Sociologia - 3 h	Sociologia - 4 h
	Desenho - 5 h	Desenho - 6 h	História da Filosofia - 4 h

Fonte: Elaborado pela autora (grifo nosso)

Observamos no Quadro 2 que, no curso pré-jurídico, não consta na programação aulas de matemática, diferentemente do que ocorre nos demais cursos. No pré-médico são 4 horas aulas na primeira série e no pré-técnico 6 horas na primeira e segunda série. Nesse primeiro momento, chamou atenção o fato de constar na grade a disciplina Desenho, então, além de analisarmos a disciplina Matemática, decidimos olhar também de forma mais acurada o programa da disciplina Desenho, pelo fato de vislumbrarmos uma possível aproximação com

os conteúdos de geometria. Tais programas são apresentados no Quadro 3, em que destacamos com realce de texto aqueles referentes a geometria.

Quadro 3 – Programas da disciplina Matemática em 1936

Série	Curso Médico, Farmacêutico e Odontológico	Curso de Engenharia, Química Industrial e Arquitetura
1ª	MATEMÁTICA 1. Números irracionais; operações. Aplicações. 2. Noções de cálculo numérico. Valores exatos e aproximados. Erro absoluto; erro relativo. Operações efetuadas com uma dada aproximação. Aplicações. 3. Noções de cálculo gráfico. Operações gráficas. Representações gráficas das expressões algébricas. Aplicações. 4. Noções de cálculo instrumental. Régua de cálculo; seu emprego. Máquinas de calcular. 5. Complementos de análise combinatória e noções de teoria dos determinantes. Aplicações. 6. Equações lineares. 7. Noções de cálculo vetorial. Operações sobre escalares e vetores. Aplicações. 8. Estudo complementar das séries. Caracteres de convergência. Séries de termos positivos, séries e alternadas e séries de termos quaisquer. 9. O n.º e. Limites de $1+\frac{1}{n}$ quando n tende para infinito; $1-\frac{1}{n}$ quando n tende para zero; $1+a\frac{1}{n}$ quando a tende para zero; $1+x\frac{1}{n}$ quando n tende para infinito. 9 a. Homogeneidade das fórmulas. Sistemas de unidades. Unidades derivadas. Equações de dimensão. 10. Concepção de Descartes. Sistemas de coordenadas, no plano e no espaço de três dimensões: coordenadas retilíneas e polares. 11. Representação geométrica das equações de duas e de três variáveis. Representação algébrica das linhas e das superfícies. Feixes de linhas e de superfícies. 12. Transformação de coordenadas no plano. 13. Teoria da linha reta no plano; problemas. 14. Circunferência, elipse, hipérbole e parábola; suas equações retilíneas e	MATEMÁTICA Números irracionais. Operações. Expoente irracional. Logaritmos. Teoria. Prática do sistema decimal. Linhas trigonométricas. Número. Operações sobre linhas trigonométricas. Equações trigonométricas. Resolução de triângulos. Números complexos. Operações. Expoente imaginário. Representações trigonométrica e exponencial. Logaritmos e linhas trigonométricas de números complexos. Aplicação das operações vetoriais no plano. Análise combinatória. Teoria e aplicações. Determinantes. Teoria e aplicações. Formas lineares. Equações lineares. Frações contínuas. Aplicação da representação dos números irracionais. Frações contínuas periódicas. Séries numéricas. Principais caracteres de convergência. Operações sobre séries. Cálculo numérico. Noções sobre os conjuntos lineares. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Extremos superior e inferior. Limites máximo e mínimo. Funções de uma variável real. Teorema de Weierstrass. Limites. Número e, limite de u^n; tipo 1. Funções contínuas. Noção da continuidade uniforme. Propriedades fundamentais. Operações sobre funções contínuas. Funções elementares. Diferença finita, derivada, diferencial. Cálculo das derivadas e das diferenciais. Aplicação das funções elementares. Diferenças, derivadas e diferenciais sucessivos. Aplicação às funções elementares. Teorema de Rolle. Fórmulas dos acréscimos finitos e de Cauchy. Fórmulas de Taylor e Maclaurin. Aplicação ao Cálculo numérico aproximado. Desenvolvimento em série. Séries de potência. Aplicação às funções elementares. Formas indeterminadas. Regra de L'Hopital.

polares. 15. Transformação de coordenadas no espaço de três dimensões. 16. Teoria do plano e da linha reta; problemas. 17. Esfera. Superfícies do 2.º grau; suas equações reduzidas. 18. Funções. Evoluções do conceito de função; ponto de vista atual. Continuidade. Classificação das funções; pontos de vista que podem ser adotados. Estudo elementar das funções exponencial e logarítmica. Funções circulares, diretas e inversas. 19. Derivadas e diferenciais das funções de uma variável; definições, notações e interpretação geométrica. 20. Funções de mais de uma variável. Derivadas e diferenças parciais. Diferencial total. 21. Derivadas e diferenciais sucessivas. 22. Desenvolvimento em série das funções de uma só variável. Fórmula de Taylor. Resto da fórmula de Taylor; expressão de Lagrange. Fórmula de Maclaurin. Aplicações das funções elementares. 23. Formas indeterminadas. Regra de L'Hopital. 24. Estudo das curvas definidas por equação de duas variáveis resolvidas em relação a uma delas. Tangentes e normais. Assíntotas. Concavidade. Máxima e mínima. Pontos de inflexão. Pontos notáveis. 25. Indagação das raízes numéricas das equações com uma aproximação dada. Métodos usuais. Processos gráficos. 26. Integrais definidas e indefinidas. Integrais imediatas. Integração por partes e por substituição. 27. Equações diferenciais, ordinárias e de derivadas parciais; sua formação. 28. Principais tipos integráveis, por quadraturas, de equações diferenciais ordinárias de 1.º ordem. 29. Equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes. 30. Equações de derivadas parciais. 31. Interpolação. Diferenças finitas sucessivas. Fórmula de Newton. Fórmula de interpolação de Lagrange. Aplicação da fórmula de Taylor à interpolação. Cálculo da função interpolatriz no caso dos fenômenos periódicos; aplicação da fórmula de Fourier. Extrapolação.	Comparação das funções exponencial e logarítmica com os polinômios. Cálculo numérico das raízes de equações algébricas ou transcendentais. Métodos clássicos de aproximação. Máximos e mínimos. Estudo da variação de uma função. Representação cartesiana. Funções elementares. Funções primitivas. Aplicações elementares. Geometria: Relações métricas nos polígonos, no círculo, nos poliedros e nos corpos redondos. Quadratura e cubatura. Transformação das figuras. Homotetia e semelhança. Relação harmônica. Homografia involução. Propriedades principais das cônicas. Pólos e polares. Álgebra vetorial: Escalares e vetores. Adição e subtração de vetores. Produtos escalares, vetoriais e mistos. Aplicações.
--	--

	32. Noções de cálculo das probabilidades e teoria dos erros. 33. Noções de estatística; suas aplicações à Biologia e à Medicina. 34. Movimento e força. Velocidade e aceleração. Trabalho. Composição de forças. Equilíbrio 35. Movimento retilíneo. Movimento curvilíneo. Composição de translações e rotações. Problemas e aplicação.	
2ª	DESENHO Desenho a mão livre 1- Estudo especial das formas e proporções, escalas, ampliação e redução de desenhos e objetos. Noções de perspectiva. 2- Esquédio de objetos e coisas peculiares às profissões médica, farmacêutica e odontológica. Emprego do colorido (lápis, aguda, aquarela). 3- Estudo sintético do corpo humano, em diversas posições. 4- Ligeiros esquemas anatômicos. 5- Partes do corpo humano (cabeça, mãos, pés, coração, etc.). 6- Desenho Especializado (dentes e dentaduras, órgãos do corpo, material de laboratório). Desenho Linear Geométrico 1- Desenho linear geométrico. 2- Objeto, importância e utilidade. Instrumentos empregados. Traçado das linhas retas e paralelas, suas combinações e divisões em parte iguais e proporcionais. 3- Traçado da circunferência e combinações com a linha reta, retificação e divisão em partes iguais, traçado dos ângulos, bissetrizes, divisão e medida. Construção dos triângulos e polígonos. Concordância. 4- Traçado gráfico das principais curvas geométricas, gráficas e artísticas. 5- Escalas. Construção de uma escala gráfica. 6- Exercícios do traçado gráfico das figuras resultantes da combinação de circunferência com linhas poligonais, redes curvilíneas e mistilíneas. Entrelaçados, rosáceas. Noções de desenho projetivo 7- Noções elementares da teoria das projeções; planos de projeção.	MATEMÁTICA Álgebra Superior Propriedades gerais dos polinômios. Princípio fundamental da teoria das equações. Composição das equações. Noções sobre a teoria das funções simétricas. Transformação das equações. Cálculo das raízes comuns de duas equações. Teoria das raízes iguais. Eliminação. Separação das raízes reais. Limites das raízes de uma equação. Cálculo das raízes reais. Cálculo das raízes imaginárias. Elementos de geometria analítica Concepção de Descartes. Coordenadas retilíneas e polares no plano. Transformação de coordenadas no plano. Lugares geométricos no plano; problemas. Teoria da linha reta no plano; problemas. Circunferência, elipse, hipérbole e parábolas; suas equações retilíneas e polares. Coordenadas retilíneas e polares no espaço de três dimensões. Transformação de coordenadas no espaço de três dimensões. Lugares geométricos. Generalidades sobre linhas e superfícies. Teoria da linha reta e do plano; problema. Esfera. Superfícies do 2º grau (equações simplificadas). DESENHO Cópia de modelos com a marcação de claro ou escuro. Cópia em barro de um ornato ou modelo de fácil execução. Desenho geométrico: Desenho linear; definição e objeto. Instrumentos empregados; descrição,

	Representação do ponto, reta e plano. 8- Figuras planas, verdadeira grandeza. 9- Cortes e seções planas. 10- Representação dos corpos simples.	verificação e aplicação. Representação do ponto e da linha. Traçado gráfico de retas perpendiculares e oblíquas; sua divisão em partes iguais e proporcionais. Traçado gráfico de retas paralelas; sua divisão em partes iguais. Traçado gráfico dos ângulos; sua medida e divisão em partes iguais; bissetrizes. Traçado gráfico das circunferências; seus elementos; suas combinações entre si e com a linha reta. Retificação da circunferência e processos para a sua divisão em número qualquer de partes iguais. Traçado gráfico dos polígonos inscritos e circunscritos; polígonos estrelados. Concordância das retas e das circunferências de círculo. Ducina, talão, scossia e traçados de vários arcos. Elipse: definição, propriedade, traçado, seus elementos, tangentes e normais. Hipérbole: definição, propriedades, traçados, seus elementos, tangentes e normais. Parábola: definição, propriedades, traçado, seus elementos, tangentes e normais. Traçado gráfico das ovas, tangentes, etc. Traçado gráfico da evolvente do círculo, tangentes, etc.. Traçado gráfico da cicloide e da epicloide, etc. Traçado gráfico das espirais. Tangentes e normais. Traçado gráfico das figuras semelhantes. Escala, construções de uma escala gráfica. Traçado gráfico das figuras provenientes da combinação de linhas retas; redes e entrelaçados retilíneos. Traçado gráfico das figuras formadas por circunferências; redes e entrelaçados curvilíneos. Traçados gráficos das figuras resultantes de circunferências em coroa, florões, centrais. Traçado gráfico da combinação da circunferência com linhas retas, redes e entrelaçados mixtilíneos. Traçado gráfico de ornatos simples; rosáceas, painéis e mosaicos; emprego dos lápis coloridos. Noções de Geometria Descritiva (Desenho de projeção): Definições e generalidades. Planos cortados; dupla projeção ortogonal; planos de projeção,
--	--	--

		bissetor, de perfil, etc. Representação do ponto. Teoremas relativos às projeções do ponto. Épura. Diferentes posições que um ponto pode ter em relação aos planos de projeção; épuras correspondentes. Representação das retas. Traços de reta. Diferentes posições que uma reta pode ter em relação aos planos de projeção. Épuras correspondentes. Posições relativas de duas retas; épuras correspondentes. Representação do plano. Traços do plano. Linhas importantes do plano. Diferentes posições que um plano pode ter em relação aos planos de projeção; épuras correspondentes. Posições relativas de dois planos. Intersecção de planos. Posição relativa de um plano e uma reta, de um plano e um ponto; épuras correspondentes. Problemas sobre a linha reta. Problemas sobre intersecção de planos. Problemas sobre retas e planos combinados. Figuras planas; mudanças de planos, rotações e rebatimentos; verdadeiras grandezas. Construção de um triedro, dados três elementos. Poliedros: representação dos corpos geométricos no espaço; seções planas. Noções de perspectiva linear rigorosa. Elementos que entram na obtenção de uma perspectiva. Perspectiva das linhas e figuras planas. Perspectiva dos principais corpos simples do espaço. Perspectiva cavaleira.
--	--	---

Fonte: Elaborado pela autora (grifo nosso)

Podemos observar no Quadro 3 que no programa de matemática do curso pré-médico não constam conteúdos de geometria, apenas de geometria analítica (realce laranja). Já no curso pré-técnico, os conteúdos de geometria no plano (realce verde) e geometria analítica (realce laranja) estão presentes. Também notamos que, nos programas da disciplina Desenho, os conteúdos apresentam certa aproximação com os conteúdos de geometria, o que nos levou a perguntar: esses conteúdos são abordados no mesmo livro de matemática? Ou existiriam livros didáticos específicos para a disciplina Desenho?

Embora o acesso à escada possa se dar ao mesmo tempo, por diferentes formas de vida, numa mesma “série/etapa” e possa ter o mesmo tempo para conclusão, necessariamente

não precisam seguir os mesmos caminhos e direcionamentos. Este parece ser o caso dos exemplos anteriores, onde, à guisa das informações, apresentam ênfases e destinos diferenciados para cada curso, apesar de se ter a mesma amplitude (tempo e carga horária). Ainda assim, é possível encontrar similaridade entre ambos, ou algum ponto de toque que os aproxime. Com a reorganização do sistema de ensino, promovida pela Reforma Capanema, uma nova configuração na distribuição do tempo dos trabalhos escolares semanais no curso Secundário foi estabelecida pela Portaria Ministerial 167 de 08 de março de 1943, publicada no DOU de 10 de março de 1943, conforme consta no Quadro 4.

Quadro 4 – Distribuição do tempo dos trabalhos escolares em 1943

Série	Curso Clássico com Grego	Curso Clássico sem Grego	Curso Científico
1 ^a	Português - 4 horas Latim - 4 horas Grego - 4 horas Francês ou Inglês - 3 horas Espanhol - 2 horas Matemática - 3 horas História geral - 3 horas Geografia geral - 2 horas Educação física - 3 horas	Português - 4 horas Latim - 4 horas Francês - 3 horas Inglês - 3 horas Espanhol - 2 horas Matemática - 3 horas História geral - 3 horas Geografia geral - 2 horas Educação física - 3 horas	Português - 4 horas Francês - 3 horas Inglês - 3 horas Espanhol - 2 horas Matemática - 4 horas Física - 3 horas Química - 3 horas História geral - 3 horas Geografia geral - 2 horas Educação física - 3 horas
2 ^a	Português - 3 horas Latim - 3 horas Grego - 3 horas Francês ou Inglês - 2 horas Matemática - 3 horas Física - 3 horas Química - 2 horas História geral - 2 horas Geografia geral - 2 horas Filosofia - 4 horas Educação física - 3 horas	Português - 3 horas Latim - 3 horas Francês - 2 horas Inglês - 2 horas Matemática - 3 horas Física - 3 horas Química - 2 horas História geral - 2 horas Geografia geral - 2 horas Filosofia - 4 horas Educação física - 3 horas	Português - 3 horas Francês - 2 horas Inglês - 2 horas Matemática - 4 horas Física - 3 horas Química - 3 horas Biologia - 3 horas História geral - 2 horas Geografia geral - 2 horas Desenho - 2 horas Educação física - 3 horas
3 ^a	Português - 3 horas Latim - 3 horas Grego - 3 horas Matemática - 2 horas Física - 2 horas Química - 3 horas Biologia - 4 horas História do Brasil - 3 horas Geografia do Brasil - 2 horas Filosofia - 2 horas Educação física - 3 horas	Português - 3 horas Latim - 3 horas Matemática - 2 horas Física - 2 horas Química - 3 horas Biologia - 4 horas História do Brasil - 3 horas Geografia do Brasil - 2 horas Filosofia - 2 horas Educação física - 3 horas	Português - 3 horas Matemática - 4 horas Física - 3 horas Química - 3 horas Biologia - 3 horas História do Brasil - 3 horas Geografia do Brasil - 2 horas Filosofia - 4 horas Desenho - 2 horas Educação física - 3 horas

Fonte: Elaborado pela autora (grifo nosso)

Ao compararmos os cursos Científico e Clássico, podemos observar que a disciplina Matemática foi privilegiada no primeiro, enquanto, no segundo, apesar de conter Matemática, ocorreu em menor quantidade, totalizando 12 horas aulas semanais no curso Científico e 8 horas no Clássico. Esse fato influenciará diretamente os programas da disciplina, proporcionalmente ao maior tempo de trabalho disponível incidirá maior rol de conteúdos a serem ensinados.

Em relação aos novos programas, o art. 18 do Decreto-lei n. 4.244, de 09 de abril de 1942, estabelecia que “Os programas das disciplinas serão simples, claros e flexíveis, devendo indicar, para cada uma delas, o sumário da matéria e as diretrizes essenciais.” Nunes (2000) aponta que esses programas não apresentavam “qualquer caráter de especialização” (p. 44), diferente do que se observava nos programas dos cursos Complementares. As alterações dos programas para a disciplina Matemática do curso Colegial – Clássico e Científico – foram publicadas através da Portaria ministerial nº 177, de 16 de março de 1943, no DOU de 18 de março de 1943, que descrevemos no Quadro 5, destacando em realce de texto os conteúdos de geometria.

Quadro 5 – Programas da disciplina Matemática em 1943

Série	Colegial Clássico	Colegial Científico
1 ^a	Aritmética Teórica Unidade I – A divisibilidade numérica; 1. Teoremas gerais sobre a divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m.m.c. e do m.d.c. 4. Teoria dos números primos; aplicações. Álgebra Unidade II – Os polinômios: 1. Operações algébricas sobre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Divisão de um polinômio inteiro em x por xa; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini. Unidade III – O trinômio do 2º grau: 1. Decomposição em fatores do 1º grau; sinais do trinômio; desigualdades do 2º grau. 2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2º grau; representação gráfica. Geometria Unidade IV – O plano e a reta no espaço: 1. Determinação de um plano. 2. Intersecção de planos e retas. 3.	Aritmética Teórica Unidade I – As operações aritméticas fundamentais: 1. Teoria da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros. 2. Sistemas de numeração. Unidade II – A divisibilidade numérica: 1. Teoremas gerais sobre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m.d.c. e do m.m.c. 4. Teoria dos números primos; aplicações. Unidade III – Os números fracionários: 1. Teoria das operações aritméticas sobre números fracionários. 2. Noções sobre cálculo numérico aproximado. Erros. Operações abreviadas. Álgebra Unidade IV – Os polinômios: 1. Operações algébricas sobre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Identidade de polinômios; método dos coeficientes a determinar; identidades clássicas. 4. Divisão de um polinômio inteiro em x por xa; regra e dispositivo de Briot-Ruffini. Unidade V – O trinômio do 2º grau: 1. Decomposição em fatores do 1º grau; sinais do trinômio; inequações do 2º grau. 2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2º grau; representação gráfica. 3. Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e

	Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Noções sobre ângulos poliédricos. Unidade V – Os poliedros: 1. Noções gerais. 2. Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos.	mínimos. Geometria Unidade VI – O plano e a reta no espaço: 1. Determinação de um plano. 2. Intersecção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Ângulos poliédricos; estudo especial dos triedros. Unidade VII – Os poliedros: 1. Noções gerais. 2. Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos. 3. Teorema de EULER; noções sobre os poliedros regulares.
2ª	Álgebra Unidade I – Progressões e logaritmos: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 3. Resolução de algumas equações exponenciais simples. Unidade II – O binômio de Newton: 1. Noções sobre análise combinatória. 2. Binômio de Newton. Geometria Unidade III – Os corpos redondos: 1. Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3. Estudo da esfera; área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera. Trigonometria Unidade IV – Vetor: 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noção de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslizantes sobre um eixo; medida algébrica; teorema de Charles. Unidade V – Projeções: 1. Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor. Unidade VI – Funções circulares: 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos de 30°, 45° e 60°. Unidade VII – Resolução de triângulos: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Uso das tábuas trigonométricas. 3. Resolução de	Álgebra Unidade I – A função exponencial: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas equações exponenciais. Unidade II – O binômio de Newton: 1. Noções sobre análise combinatória. 2. Binômio de Newton. Unidade III – Determinantes: 1. Teoria dos determinantes. 2. Aplicação aos sistemas de equações lineares; regras de Crammer; teorema de Rouché. Unidade IV – Frações contínuas: Noções sobre frações contínuas. Geometria Unidade V – Os corpos redondos: 1. Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3. Estudo da esfera; área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera. Trigonometria Unidade VI – Vetor: 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noção de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslizantes sobre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles. Unidade VII – Projeções: 1. Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor. Unidade VIII – Funções circulares: 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos pn. Unidade IX – Transformações trigonométricas: 1. Fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos; aplicações. 2. Transformação de somas em produtos; aplicação ao cálculo numérico. 3. Uso de tábuas trigonométricas. Unidade X – Equações trigonométricas: Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples. Unidade XI – Resolução de triângulos: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Resolução de triângulos

	triângulos retângulos.	retângulos. 3. Resolução de triângulos obliquângulos. 4. Aplicações imediatas à Topografia.
3 ^a	Álgebra Unidade I – Funções: 1. Noção de função de variável real. 2. Representação cartesiana. 3. Noção de limite e de continuidade. Unidade II – Derivadas: 1. Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2. Cálculo das derivadas. 3. Derivação das funções elementares. 4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples. Geometria Unidade III – Curvas usuais: 1. Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2. As secções cônicas. 3. Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica. Geometria Analítica Unidade IV – Noções fundamentais: 1. Concepção de Descartes. 2. Coordenadas; abscissas sobre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3. Distância de dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4. Determinação de uma direção; ângulo de duas direções. Unidade V – Lugares geométricos: 1. Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2. Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3. Equação da reta. 4. Equação do círculo. 5. Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.	Álgebra Unidade I – Séries: 1. Sucessões. 2. Cálculo aritmético dos limites. 3. Séries numéricas. 4. Principais caracteres de convergência. Unidade II – Funções: 1. Função de uma variável real. 2. Representação cartesiana. 3. Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidades de uma função racional. Unidade III – Derivadas: 1. Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2. Cálculo de derivadas. 3. Derivação de funções elementares. 4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples. Unidade IV – Números complexos: 1. Definição; operações fundamentais. 2. Representação trigonométrica e exponencial. 3. Aplicação à resolução das equações binômias. Unidade V – Equações algébricas: 1. Propriedades gerais dos polinômios. 2. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações. 3. Noções sobre transformações das equações; equações recíprocas; equações de raízes iguais. Geometria Unidade VI – Relações métricas: 1. Teorema de Stewart e suas aplicações ao cálculo das linhas notáveis no triângulo. 2. Relações métricas nos quadriláteros; teorema de Ptolomeu ou Hiparco. 3. Potência de um ponto; eixos radicais; planos radicais. Unidade VII – Transformações de figuras: 1. Deslocamentos, translação, rotação, simetria. 2. Homotetia e semelhança nos espaços de duas e de três dimensões. 3. Inversão pelos raios vetores recíprocos. Unidade VIII – Curvas usuais: 1. Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2. As secções cônicas. 3. Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica. Geometria Analítica Unidade IX – Noções fundamentais: 1. Concepção de Descartes. 2. Coordenadas; abscissa sobre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3. Distância entre dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4. Determinação de uma direção; ângulo de duas direções. Unidade X - Lugares geométricos: 1. Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2. Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3. Equação da reta. 4. Equação do círculo. 5. Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

Fonte: Elaborado pela autora (grifo nosso)

De fato, o programa do curso Científico era mais extenso que o curso Clássico. O mesmo acontece quando olhamos especificamente para os conteúdos de geometria. No primeiro ano, o tópico “Teorema de EULER; noções sobre os poliedros regulares” consta

apenas no programa do curso Científico, não sendo mencionado no curso Clássico. Já no terceiro ano, a diferença é ainda maior, compreendendo duas unidades inteiras: Unidade VI – Relações métricas e Unidade VII – Transformações de figuras. De outra forma, não constatamos diferenças quanto aos conteúdos de geometria analítica.

Porém, quando comparamos estes programas com os da década anterior, principalmente em relação à geometria, a diferença é notória, talvez pelo aumento de tempo do curso de 2 para 3 anos, ou ainda pelas diferentes finalidades dos cursos. Agora, os conteúdos de geometria no espaço constam nos programas do curso Colegial, o que não acontecia nos cursos Complementares. Na contramão, aparentemente em relação à geometria analítica, há uma simplificação e enxugamento dos conteúdos.

Na década seguinte, outra mudança é imposta, especificamente em relação aos programas das disciplinas, considerados muito extensos e impraticáveis. Por meio das Portarias n. 966 e n. 1.045 de 02 de outubro de 1951 e 14 de dezembro de 1951, respectivamente, novos programas para as disciplinas do curso Secundário foram expedidos, que ficaram conhecidos como Programas Mínimos. Consta na Portaria n. 1.045 o programa da disciplina Matemática, dos cursos Clássico e Científico, o qual descreveremos no Quadro 6, em que os conteúdos destacados em negrito se destinam apenas ao curso Científico, sendo os demais comum aos dois cursos e utilizamos ainda o realce de texto àqueles com referência à geometria.

Quadro 6 – Programas da disciplina Matemática em 1951

Série	Curso Clássico e Científico
1 ^a	I — Noções sobre o cálculo aritmético aproximado; erros. 1. Aproximação e erro. Valor por falta ou por excesso. Erro absoluto e erro relativo. Algarismos exatos de um número aproximado. Erro de arredondamento. 2. Adição, subtração, multiplicação e divisão com números aproximados. O cálculo da aproximação dos resultados e seu problema inverso; método dos erros absolutos. II — Progressões: 1. Progressões aritméticas; termo geral; soma dos termos. Interpolação aritmética. 2. Progressões geométricas; termo geral; soma e produto dos termos. Interpolação geométrica. III — Logaritmos. 1. O cálculo logarítmico como operação inversa da potenciação. Propriedades gerais dos logaritmos: mudança de base. Característica e mantissa. Cologaritmo. 2. Logaritmos decimais; propriedades. Disposição e uso das tábuas de logaritmos. Aplicação ao cálculo numérico. 3. Equações exponenciais simples; sua resolução com o emprego de logaritmos. IV — Retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais; definições e propriedades; áreas e volumes: 1. Reta e plano; postulado; determinação; interseção; paralelismo; distância: inclinação e perpendicularismo. Diedros e triedros. Ângulos sólidos em geral. 2. Generalidades sobre os poliedros em geral. Poliedros regulares: indicações gerais.

	3. Prismas; propriedades gerais e em especial, dos paralelepípedos; área lateral, área total; volume. 4. Pirâmides; propriedades gerais; área lateral; área total; volume. Troncos de prisma e troncos de pirâmide. 5. Estudo sucinto das superfícies era geral. Superfícies retilíneas e superfícies curvilíneas. Superfícies desenvolvíveis e superfícies reversas. Superfícies de revolução. Exemplos elementares dos principais tipos da classificação de Monge. 6. Cilindros; propriedades gerais; área lateral; área total; volume. Troncos de cilindro. 7. Cones; propriedades gerais: área lateral; área total; volume. Troncos de cone de bases paralelas. 8. Esfera; propriedades gerais. Área e volume da esfera e das suas diversas partes. V — Seções cônicas; definições e propriedades fundamentais. 1. Elipse; definição e traçado; círculo principal e círculos diretores; excentricidade; tangente. 2. Hipérbole; definição e traçado; assíntotas; círculo principal e círculos diretores; excentricidade; tangente. 3. Parábola; definição e traçado; diretriz; tangente. 4. As seções determinadas por um plano numa superfície cônica de revolução; teorema de Dandelin.
2ª	I — Análise combinatória simples. 1. Arranjos de objetos distintos; formação e cálculo do número de grupamentos. 2. Permutações de objetos distintos; formação e cálculo do número de grupamentos. Inversão. Classe de uma permutação; teorema de Bézout. 3. Permutações simples, com objetos repetidos; cálculo do número de grupamentos. 4. Combinações de objetos distintos; formação e cálculo do número de grupamentos. Relação de Stifel; triângulo aritmético de Pascal. II — Binômio de Newton. 1. Lei de formação do produto de binômios distintos. Fórmula para o desenvolvimento binomial no caso de expoente inteiro e positivo; lei recorrente de formação dos termos. 2. Aplicação do desenvolvimento binomial ao problema da somação de potências semelhantes de uma sucessão de números naturais. III — Determinantes; sistemas lineares. 1. Determinantes e matrizes quadradas; propriedades fundamentais. Regra de Sarrus. Determinantes menores. Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna. Transformação dos determinantes. Abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chio. 2. Sistemas de n equações lineares com n incógnitas. Regra de Cramer. 3. Sistemas de m equações lineares com n incógnitas, teorema de Rouché. IV — Noções sobre vetores; projeções; arcos e ângulos; linhas e relações trigonométricas. 1. Grandezas escalares e vetoriais. Vetores; propriedades. Operações elementares com vetores. Relação de Charles. 2. Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. Teorema de Carnot. 3. Generalização dos conceitos de arco e de ângulo. Arcos côngruos. Arcos da mesma origem e de extremidades associadas. 4. Linhas e funções trigonométricas diretas; definições e variação. Arcos correspondentes à mesma linha trigonométrica. Relações entre as linhas trigonométricas de um mesmo arco. Problema geral da redução ao 1.º quadrante. Cálculo das linhas trigonométricas dos arcos expressos pela relação x. V — Transformações trigonométricas em geral; equações trigonométricas simples. 1. Adição, subtração e multiplicação de arcos. Bissecção de arcos. Transformação de somas de linhas trigonométricas em produtos. 2. Disposição e uso de tábuas trigonométricas naturais e logarítmicas. 3. Equações trigonométricas simples; tipos clássicos. VI — Resolução trigonométrica de triângulos. 1. Relações entre os elementos de um triângulo retângulo. 2. Casos clássicos de resolução de triângulos retângulos. 3. Relações entre os elementos de um triângulo qualquer. Lei dos senos. Relações dos cossenos. Expressão trigonométrica da área. 4. Casos clássicos de resolução de triângulos quaisquer.
3ª	I — Conceito de função; representação cartesiana; reta e círculo; noção intuitiva de limite e de continuidade. 1. Conceito elementar de variável e de função. Variável progressiva e variável contínua; intervalos.

	Noção intuitiva de limite de uma sucessão; exemplos clássicos elementares; convergência. 2. Funções elementares; classificação. Representação cartesiana de uma função e equação de uma curva. Curvas geométricas e curvas empíricas; noção intuitiva de continuidade. Representação gráfica de funções usuais; função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas diretas. Acréscimo de uma função num ponto; funções crescentes e funções decrescentes. Tangente; inclinação da tangente. 3. Limite de variáveis e de funções; limites infinitos. Propriedades fundamentais. Exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto. Descontinuidade das funções racionais fracionárias. 4. A função linear e a linha reta em coordenadas cartesianas. Parâmetro angular e parâmetro linear. Formas diversas da equação da linha reta. Representação paramétrica: área de um triângulo em função das coordenadas dos vértices. Os problemas clássicos de inclinação, interseção, passagem e distância, relativos à linha reta. 5. A equação geral do 2º grau com duas variáveis e a circunferência de círculo em coordenadas cartesianas. Formas diversas da equação da circunferência de círculo. Interseção de retas e circunferências. II — Noções sobre derivadas e primitivas; interpretações: aplicações. 1. Definição da derivada em um ponto; notações; derivada infinita. Interpretação geométrica e cinemática da derivada. Diferença e diferencial; interpretação geométrica. Funções derivadas. Derivação sucessiva. 2. Regras de derivação; derivada de uma constante; de uma função de função; de funções inversas; da soma, do produto, e do quociente de funções. Aplicação à derivação de funções elementares. 3. Aplicação da teoria das derivadas ao estudo da variação da uma função. Funções crescentes e funções decrescentes; máximos e mínimos relativos: interpretação geométrica. 4. Funções primitivas; integral indefinida; constante de integração. Primitivas imediatas; regras simples de integração. 5. Integral definida. Aplicação ao cálculo de áreas e de volumes; exemplos elementares. III — Introdução à teoria das equações; polinômios; propriedades; divisibilidade por $x \pm a$; problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais. 1. Polinômios de uma variável; identidade. Aplicação ao método dos coeficientes a determinar. Divisibilidade de um polinômio inteiro em x, por $x \pm H$; a; regra e dispositivo prático de Ruffini. Fórmula de Taylor para os polinômios; algoritmo de Ruffini-Horner. 2. Polinômios e equações algébricas em geral; raízes ou zeros. Conceito elementar de número complexo; forma binomial; complexos conjugados; módulo; representação geométrica. Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios; número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas. Indicação sobre o número de raízes reais contidas em um dado intervalo; teorema de Bolzano; consequências. 3. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação; aplicação à composição das equações. Propriedades das raízes racionais inteiras e fracionárias. 4. Transformação das equações. Transformações de primeira ordem: aditivas, multiplicativas e recíprocas. 5. Equações recíprocas; classificação; forma normal: abaixamento do grau. 6. Cálculo das raízes inteiras. Determinação das cotas pelo método de Laguerre-Thibault. Regras de exclusão de Newton. Algoritmo de Pele-tarius.
--	---

Fonte: Elaborado pela autora (grifo nosso)

Novamente, é perceptível uma lista mais extensa de conteúdos, também em relação à geometria, no programa do curso Científico se comparado com o curso Clássico. A exemplo, tem-se o estudo das superfícies em geral e das seções determinadas por um plano com uma superfície cônica de revolução, constante apenas no primeiro.

Porém, quando comparamos com os programas da década anterior, nota-se uma redução significativa na lista dos conteúdos, o que já era esperado, pois o objetivo da referida

portaria era estabelecer os assuntos mínimos que deveriam ser trabalhados no curso Secundário. Olhando para os conteúdos geométricos, é possível perceber que foram excluídas da relação de conteúdos duas unidades inteiras: Unidade VI – Relações métricas e Unidade VII – Transformações de figuras, além da redução considerável de conteúdos de geometria analítica.

Outro fator que nos chamou atenção foi a não exposição dos conteúdos separados por blocos que se relacionam com os ramos da matemática, apesar dos conteúdos aparecerem em sequência. Acreditamos que isso pode ter relação com o movimento de unificação da matemática e a tendência em trabalhar os conteúdos de forma integrada. Pois, nos primeiros anos que seguiram a criação da disciplina Matemática, o que pode ser observado pelos programas da disciplina é que os ramos apareciam em blocos.

Com a publicação da primeira LDBEN em 1961, os estados passaram a ter certa autonomia para organizar os currículos, ou pelo menos parte dele, pois algumas disciplinas eram obrigatórias e definidas pelo Conselho Federal de Educação. Essa descentralização permitiu a inclusão de disciplinas diversificadas, possibilitando abordar temas que atentassem para as especificidades de cada estado ou região. O art. 35 da Lei 4.024, de 20 de dezembro de 1961, estabeleceu que

Art. 35. Em cada ciclo haverá disciplinas e práticas educativas, obrigatórias e optativas.

§ 1º Ao Conselho Federal de Educação compete indicar, para todos os sistemas de ensino médio, até cinco disciplinas obrigatórias, cabendo aos conselhos estaduais de educação completar o seu número e relacionar as de caráter optativo que podem ser adotadas pelos estabelecimentos de ensino.

§ 2º O Conselho Federal e os conselhos estaduais, ao relacionarem as disciplinas obrigatórias, na forma do parágrafo anterior, definirão a amplitude e o desenvolvimento dos seus programas em cada ciclo.

§ 3º O currículo das duas primeiras séries do 1º ciclo será comum a todos os cursos de ensino médio no que se refere às matérias obrigatórias. (BRASIL, 1961).

Conforme alterações impostas pelas normativas, as escolas dos estados estavam “livres” para andar e traçar o modo que os alunos acessariam e transporiam os degraus da matemática-escada. Mas será que essas escadas eram muito diferentes?

Essa descentralização, segundo Búrigo (2014, p. 25-27), favoreceu a propagação dos ideais do MMM, que, apesar de não estarem ancorados por um dispositivo legal, começa a ganhar força e obter grande aceitação por parte dos professores. Outros fatores que contribuíram para isso foram os debates ocorridos nos Congressos Nacionais de Educação e

os grupos de professores constituídos em diversos estados brasileiros, em especial o GEEM – Grupo de Estudo do Ensino de Matemática, criado em 1961, com sede no estado de São Paulo, tendo no professor Osvaldo Sangiorgi um dos principais líderes.

Esse grupo apresentou no IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, ocorrido nos dias 22 a 28 de julho de 1962, em Belém/PA, os assuntos mínimos para um moderno programa de matemática para o Ginásio e o Colégio, bem como orientações e sugestões para o seu desenvolvimento, o que ainda no mesmo ano viria a ser publicado na forma de livro, tendo como título: Matemática Moderna para o Ensino Secundário.

No Quadro 7, apresentamos a sugestão do programa da disciplina Matemática para o colégio produzido pelo GEEM. Este programa servirá de modelo de estudo para nossas análises, visto a impossibilidade de verificação das especificidades dos programas de matemática de todos os estados brasileiros neste período. Nossa escolha por este se dá em razão da influência do GEEM na divulgação do MMM no Brasil.

Quadro 7 – Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Colégio

Curso Colegial
1. Função do 2º grau. Estudo completo do trinômio do segundo grau e aplicações. 2. Coordenadas de um ponto da circunferência com centro na origem. Aplicação das razões trigonométricas nos triângulos. 3. Identidades, equações e inequações trigonométricas simples. 4. Introdução à Geometria Espacial; espaço e semi-espaço. Paralelismo e perpendicularismo de retas e planos. 5. Diedros, triedros e ângulos poliedricos. 6. Poliedros: prismas, pirâmides e troncos. Propriedades geométricas. 7. Corpos redondos. 8. Transformações pontuais: translação, rotação, simetria e homotetia. 9. Noção de sequência ou sucessão de números reais. Progressões. 10. Noção de potência no campo real. Operações inversas. Logaritmos. 11. Análise Combinatória e aplicações. 12. Elementos de Geometria Analítica Plana. Equação da reta e equação da circunferência. Equação reduzida das cônicas. 13. Medidas dos sólidos geométricos. 14. Sistema de equações lineares. Noção de matrizes; aplicações. 15. Números complexos: operações fundamentais; propriedades. 16. Estudo dos polinômios. 17. Equações algébricas. 18. Noção de limite, continuidade e derivadas. Elementos de cálculo integral; aplicações ao cálculo de áreas e volumes.

Fonte: Elaborado pela autora (grifo nosso)³⁸

³⁸ Dados extraídos do livro “Matemática Moderna para o Ensino Secundário” (GEEM, 1965, p. 96-100).

Quando comparamos os assuntos mínimos propostos pelo GEEM com os programas mínimos de 1951, verificamos que aparentemente ocorreu uma redução considerável de conteúdos nos programas, mas especificamente em relação à geometria. Percebemos que os conteúdos de transformações geométricas que deixaram de constar nos programas da década anterior, reapareceram, possivelmente devido ao MMM, já que este era um dos conteúdos valorizados pelo movimento, assim como o retorno de alguns conteúdos de geometria analítica. Outro fator a se considerar são os conteúdos sobre seções cônicas, pois, nas décadas de 1930 e 1940, estes apareciam tanto nos blocos de conteúdos de geometria como de geometria analítica, na década de 1950 somente na parte de geometria e, por fim, agora somente na parte de geometria analítica.

A segunda LDBEN, publicada em 1971, apesar de trazer mudanças na estrutura do sistema de ensino, por outro lado, manteve a descentralização iniciada com a LDBEN/61. O Conselho Federal de Educação apenas fixou por meio da Resolução n. 08, de 01 de dezembro de 1971, anexa ao Parecer 853/71, o núcleo comum para os currículos do ensino de 1º e 2º graus, definindo os objetivos e a amplitude

Art. 1º - O núcleo comum a ser incluído obrigatoriamente, nos currículos plenos do ensino de 1º e 2º graus abrangerá as seguintes matérias:

- a) Comunicação e Expressão;
- b) Estudos Sociais;
- c) Ciências.

§ 1º - Para efeito da obrigatoriedade atribuída ao núcleo comum, incluem-se como conteúdos específicos das matérias fixadas:

- a) em Comunicação e Expressão - A Língua Portuguesa;
- b) nos Estudos Sociais - a Geografia, a História e a Organização Social e Política do Brasil;
- c) nas Ciências - a Matemática e as Ciências Físicas e Biológicas.

§ 2º - Exigem-se também Educação Física, Educação Artística, Educação Moral e Cívica, Programas de Saúde e Ensino Religioso, este obrigatório para os estabelecimentos oficiais e facultativo para os alunos. (BRASIL, 1971b)

Ainda segundo o § 2º do Art. 6º desta resolução, “No ensino de 2º grau, admitir-se-ão variações não somente de carga horária como do número de períodos letivos em que seja incluída cada disciplina e, eventualmente, área de estudo ou atividade”

A LDB/96, mantendo os direcionamentos das anteriores, estabeleceu em seu art. 26 que

Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento

escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela.

§ 1º Os currículos a que se refere o *caput* devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil.

A Resolução CEB n. 3, de 26 de junho de 1998, que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, redefiniu as diretrizes curriculares nacionais, sendo agora a estrutura curricular organizada por áreas de conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso para o Ensino Fundamental e as Áreas de Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas para o Ensino Médio.

Outro importante instrumento são os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio publicados no ano de 2000 que, de acordo com o documento, “cumprem o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias.” (BRASIL, 2000, p. 4)

No ano de 2008, a Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação elaborou as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, propondo reflexões sobre a prática docente. Na parte destinada à disciplina Matemática orienta sobre a escolha e a forma de trabalhar os conteúdos, bem como a organização curricular. Quanto aos conteúdos básicos, estes foram organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade, salientando a necessidade desses blocos serem trabalhados de forma articulada. Sobre o conteúdo de Geometria sugere que

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Este estudo apresenta dois aspectos - a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. (BRASIL, 2008, p. 75)

Diante de todas essas articulações em torno do currículo e dos programas da disciplina Matemática, surgem questionamentos: esses instrumentos normativos influenciaram os autores na elaboração dos livros didáticos de matemática? A geometria ensinada na década de 1930 é a mesma das décadas seguintes? Quantos ou quais outros jogos normativos de linguagem se entrecruzam na elaboração desses programas? Há um determinado assunto (conteúdo) primordial na matemática, ou todos têm o mesmo peso e valor na esca(la)da do

processo educacional? A geometria é trabalhada como mais um degrau nessa escada ou vários lances de degraus? Tentaremos escarafunchar os livros e as entranhas deles em busca de vestígios que nos levem a alguns posicionamentos, respostas, mesmo que provisórias.

Após a definição de quais livros didáticos comporiam nosso arquivo cultural de análise, passamos a buscá-los em sebos *online* para adquiri-los, pois, como as universidades estavam fechadas devido à pandemia, era impossível ter acesso aos acervos (do GH OEM ou do GHEMAT, por exemplo). Com eles em mãos, passei a manuseá-los com o intuito de me familiarizar com os seus conteúdos e os elementos pré-textuais e, assim, identificar as diferenças que mais se evidenciavam com essas leituras, além de compará-los com os programas vigentes em cada período e tentar dialogar sobre essas alternâncias de conteúdo. Não pense! Veja³⁹ algumas características dos livros didáticos...

Mas quando os livros chegaram, percebi que havia criado um Frankenstein, meu arquivo cultural de análise! Angústia, medo, pavor, insegurança... o que fazer com esses livros? Por onde começar? Então lembrei da leitura da dissertação de Silva (2013), uma das primeiras que fiz, quando o projeto de pesquisa ainda se delineava. A autora analisou uma coleção de livros didáticos valendo-se da Hermenêutica de Profundidade, e como complemento olhou para os elementos pré-textuais dos livros inspirada nos paratextos editoriais de Gerard Genett. Decidi tentar seguir a mesma direção desse segundo movimento da autora, com o intuito de familiarizar-me com as obras, o conteúdo, os ensaios e assim identificar as diferenças que mais se evidenciariam nesta leitura.

A obra Pontos de Matemática de Gumerindo Lima, que era professor do Ginásio de Alfenas/MG, trata-se de um volume único que foi publicado em 1938 pela Sociedade Imprensa Paulista. O livro tem 16x22,5 cm de dimensões, capa simples, 375 páginas. Em seu prólogo o autor

Quando lia o livro "Pontos de Matemática", precisava estar com meu livro de geometria do mestrado ao lado para tentar entender o que ele dizia, eram conceitos complexos, que hoje nem aparecem nos livros, com uma linguagem direta, mas tão direta que não conseguia entender.

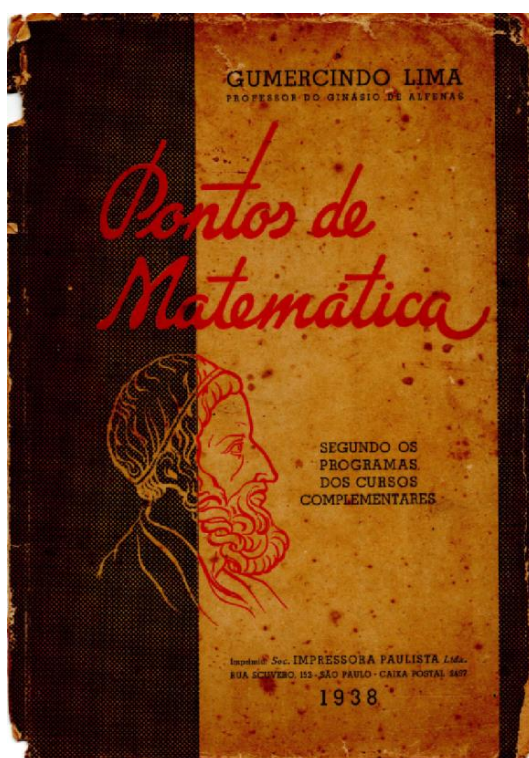
³⁹ "Aforismo de Wittgenstein (LW, IF-66) que caracteriza metonimicamente o seu modo (auto)terapêutico de filosofar." (MIGUEL; VIANNA; CORRÊA, 2020, p. 15)

esclarece ao leitor que

O que se vai ler não constitui propriamente um livro. É uma compilação de pontos exigidos pelos programas dos Cursos Complementares, para admissão às faculdades de Medicina, Farmácia, Odontologia e Engenharia. Nada encerra de meu a não ser simplificação cuidadosa e resumo conciso das teorias desenvolvidas magistralmente em obras como o “Cours de MathématiquesSpéciales” de **H. Commissaire** e **Cagna**. Limitei-me a joeirar em seára alheia, notadamente em **Boutroux** –, mestre a quem devo minha formação intelectual – cujos ensinamentos, com a licença, vou reproduzindo em muitas passagens do livro. (LIMA, 1938, p. 5)

O que enseja desse momento é que a educação brasileira, e a matemática, por excelência, tenha seus fundamentos alicerçados sob vertentes francesas, este prólogo é claro e objetivo em atestar essa influência, que perduraria durante parte do século XX e que só tomaria rotas alternativas a partir de eventos que implicaram uma nova geopolítica mundial.

Figura 10– Capa do livro Pontos de Matemática



Fonte: (LIMA, 1938)

Outra informação relevante é encontrada no prefácio de Christovam Colombo dos Santos, professor catedrático da Escola Nacional de Minas e Metalurgia da Universidade do Brasil e da Escola de Engenharia da Universidade de Minas Gerais e ainda, subscrito por Miguel Mauricio da Rocha, catedrático da Escola Nacional de Minas e Metalurgia da Universidade do Brasil.

O LIVRO do professor Gumerindo Lima, a que modestamente o autor chamou “PONTOS DE MATEMÁTICA”, a meu ver, vem quebrar o rigoroso jejum a que têm sido condenados os estudantes dos Cursos Complementares, pela escassez completa de compendios adaptados aos programas. É, talvez, o maior e mais louvável esforço levado a efeito no sentido de dotar a ciencia indígena de um compendio onde os professores e estudantes dos citados cursos encontrem amplamente explanado todo o assunto a versar. (LIMA, 1938, p. 7)

O que chama atenção é que está expresso, ou dá a entender que antes desta publicação, os alunos não tinham material disponível conforme os programas oficiais; ou que havia materiais, porém não atendiam as normas e programas. Talvez as duas assertivas contenham afirmações verdadeiras, visto que várias obras circulavam no território nacional, e não seria de estranhar que boa parte delas não contemplasse os programas oficiais do governo em sua totalidade.

O livro não possui sumário, porém o autor o dividiu em duas partes, e cada parte em capítulos, de modo que a obra tem a seguinte divisão interna:

PARTE PRIMEIRA

Capítulo I – Cálculo Combinatório

Permutações; Arranjos e Combinações.

Capítulo II – Determinantes

Desenvolvimento de um determinante do terceiro grau; Resolução de um sistema de equações do 1º grau e Sistemas de equações lineares.

Capítulo III – Operações Aproximadas

Adição; Subtração; Produto; Divisão; Potenciação; Radiciação; Aproximações; Adição e subtração; Erros relativos de produtos;

Capítulo IV – Noções sobre Conjuntos

Definição; Conjuntos lineares; Ponto de acumulação e Funções contínuas.

Capítulo V – Teoria dos Limites

Interpretação geométrica; Limites de uma variável; Limite das funções; Formas indeterminadas e Limites notáveis.

Capítulo VI – Logaritmos

Definição; Logaritmos de um número; Propriedades; Taboas de logaritmos; Propriedades dos Logaritmos de Briggs e Cologaritmo.

Capítulo VII – Frações Contínuas

Conversão em frações contínuas; Determinação da geratriz; Propriedades das reduzidas e Representação dos números irracionais.

Capítulo VII – Números Irracionais

Definição de G. Cantor; Definição de Dedekind e Operações com os números irracionais.

Capítulo VIII – Resumo de Trigonometria

Arcos orientados; Linhas trigonométricas; Arcos complementares; Relações entre as linhas trigonométricas; Soma e subtração dos arcos; Multiplicação; Divisão; Fórmulas de Transformação e Angulos auxiliares.

Capítulo IX – Equações Trigonômicas

Resolução de triângulos.

Capítulo X – Transformação das Figuras

Deslocamentos; Estudo geral das transformações; Mudança de escala; Homotetia e Semelhança.

Capítulo XI – Polo e Polar**Pólo e polar em relação ao círculo e Construção da polar.****Capítulo XII – Relação Anarmônica****Princípios gerais e Determinação de duas relações anarmônicas.****Capítulo XIII – Homografia****Determinação dos pontos correspondentes e pontos duplos.****Capítulo XIV – Involução****Potência de um ponto; Eixo radical; Involução; Ponto central e Ponto duplo.****Capítulo XV – Propriedades Principais das Cônicas****Definições; Propriedades da elipse; Propriedades da hipérbole; Propriedades da parábola e Propriedades comuns às 3 secções.****PARTE SEGUNDA****Capítulo I – Noções Gerais sobre Funções**

Variável e constante; Funções algébricas de uma variável; Noções de cálculo diferencial; Regras de diferenciação; Funções circulares e Funções ciclométricas ou circulares inversas; Funções implícitas; Máximos e mínimos; Teorema da media; Diferenciais; Formas indeterminadas e Regra de L'Hospital.

Capítulo II – Estudos das Séries

Séries convergentes; Comparação de duas séries; Critério de convergência de D'Alembert; Teorema de Cauchy; Séries alternadas; Convergência absoluta; Regras de convergência; Séries inteiras; Regras para achar o intervalo convergente; Desenvolvimento em série; Série de Taylor; Desenvolvimento da série exponencial; Série logarítmica; Desenvolvimento das funções trigonométricas e Desenvolvimento das funções ciclométricas.

Capítulo III – Aplicações da DerivadaInterpretação da derivada; Direção de uma curva; Geometria diferencial; Pontos de inflexão; Coordenadas polares; assíntotas; Pontos singulares; Centro de curvatura; Noções de cálculo integral; Determinação da constante de integração; Integral definida; Métodos de integração; Meio algébrico; Integração de diferenciais irracionais; Integração de função racional de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$; Integrações duplas; Integral curvilínea e Avaliação de comprimentos, áreas e volumes.**Capítulo IV – Equações Diferenciais**Integral geral; Equações de 1ª ordem; Equação redutível a uma equação diferencial homogênea; Equações lineares; Equações não contendo x ; Equação diferencial linear; Equações com 2º membro e Equações de derivadas parciais.**Capítulo V – Noções de Cálculo Gráfico**

Cálculo gráfico dos valores de um polinômio; Cálculo gráfico de uma função de uma variável; Funções de várias variáveis; Nomogramas de pontos alinhados; Integração gráfica e Gráfico de uma equação não linear.

Capítulo VI – Noções de Álgebra Superior – Teoria Geral das Equações – Propriedades Gerais

Composição das equações; Transformações; Polinômios derivados; Eliminação; Teorema de Descartes e Funções simétricas.

Capítulo VII – Diferenças

Expressão do termo geral; Diferenças dos polinômios; Interpolação; Fórmula de Newton; Fórmula de Lagrange e Estudo da equação do 3º grau.

Capítulo VIII – Resolução de Equações Transcendentes

Teoria das diferenças; Método de Newton e Substituições sucessivas.

Capítulo IX – Noções sobre Cálculo de Probabilidades

Probabilidades totais e compostas; Esperança matemática, Valor médio; Discrepância; Probabilidades contínuas; Probabilidade das causas e Teoria dos erros.

Capítulo X – Noções de Geometria Analítica

Concepção de Descartes; Coordenadas retilíneas; Coordenadas polares no plano; Transformação de coordenadas no plano; Lugares geométricos; Linha reta no plano; Equação da circunferência; Cônicas.

Capítulo XI – Noções de Álgebra Vectorial

Escalares e vectores.

Capítulo XII – Números Complexos

Capítulo XIII – Força e Movimento

De modo geral, nos capítulos X a XV da primeira parte destinados à geometria, são apresentadas as definições, propriedades, teoremas e algumas noções para deduzir as demonstrações. Não foram observados exemplos e/ou exercícios referentes aos conteúdos de geometria no plano. Ainda o Capítulo X da segunda parte é destinado à geometria analítica.

Quanto à organização e desenvolvimento dos conteúdos, nos livros editados para os Cursos Complementares, observou-se o excessivo rigor matemático, com a utilização de grande quantidade de símbolos e letras, sugerindo que o conteúdo constituía uma unidade autônoma. Não havia seriação e não havia elementos que eram retomados e aprofundados em outros volumes. (OTONE, 2011, p. 33)

Quando comparamos os assuntos abordados neste livro com o programa da disciplina Matemática para os cursos Complementares (pré-médico e pré-técnico), observamos que foram contemplados quase todos os conteúdos prescritos. Porém, eles não eram apresentados na mesma sequência proposta nos programas. Não foram encontrados no livro os assuntos relacionados à disciplina Desenho, o que nos leva a acreditar que existia material específico para ela.

Em relação à geometria, não constam no livro os seguintes conteúdos: Relações métricas nos polígonos, no círculo, nos poliedros e nos corpos redondos; Quadratura e cubatura. Por que razão Gumercindo Lima não abordou esses conteúdos? Seriam eles considerados irrelevantes para os cursos? Na verdade, seria a geometria menos importante que os demais ramos da matemática? Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 51-52), em um estudo sobre o ensino de Álgebra e Geometria no Ensino Secundário, nos mostram que

houve, durante todo o período anterior ao Movimento da Matemática Moderna, em nosso país, um *equilíbrio enciclopédico* no ensino dos ramos fundamentais da Matemática. Entretanto, apesar desse equilíbrio, não seria contraditório afirmar que o “pêndulo”, nesse período, oscilou levemente para a Geometria. São duas as razões fundamentais que sustentam essa afirmação. A primeira apóia-se no fato de que o equilíbrio enciclopédico tinha existência efetiva, apenas no plano legal, sendo que na prática escolar, o

ensino da Álgebra era menos favorecido uma vez que os professores, até o início deste século, pouco a conheciam. A segunda razão baseia-se no pensamento pedagógico nacionalista, dominante nesta época no Brasil, segundo o qual o ensino da Geometria desempenhava um papel mais nobre que o da Álgebra e da Aritmética. Mostramos as razões históricas e ideológicas desse fato e como elas acabaram gerando um dualismo metodológico fazendo com que Álgebra e Geometria fossem encaradas como dois campos distintos e independentes.

Assim, como estamos olhando apenas para o livro didático (e somente um), não podemos afirmar qual dos ramos da matemática tinha posição privilegiada na prática escolar. No entanto, ao observar a obra de Lima (1938), percebemos certa predominância da Álgebra, e até mesmo nos conteúdos geométricos é possível notar uma presença expressiva de preceitos algébricos.

A coleção “Matemática 2º Ciclo”, de Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Lisbôa da Cunha e Cesar Dacorso Netto, é composta por três volumes, uma para cada série do curso Colegial – Clássico e Científico.

A “coleção dos quatro autores” era tão extensa que tornava cansativa a leitura, os conteúdos também eram complexos.

Euclides Roxo era professor do Colégio Pedro II e foi o autor de outros livros: “Lições de Aritmética”; “Curso de Matemática – 3ª Série” (Geometria); “A Matemática na Educação Secundária” e “Unidades e Medidas”, além dos livros: “Matemática Ginasial” (1ª, 2ª, 3ª e 4ª séries); “Exercícios de Aritmética”; “Exercícios de Álgebra”, “Exercícios de Geometria” e “Exercícios de Trigonometria”, escritos em colaboração. Roberto Peixoto, professor do Instituto de Educação, além desta coleção, escreveu as seguintes obras: “Geometria Analítica a duas dimensões”; “Geometria Analítica a três dimensões”; “Exercícios de Geometria Analítica a duas dimensões”; “Exercícios de Geometria Analítica a três dimensões”; “Cálculo Vetorial” e “Questiúnculas matemáticas”.

Haroldo Lisbôa da Cunha, professor do Colégio Pedro II, era o autor dos livros: “Sobre as equações algébricas e sua solução por meio de radicais” e “Pontos de Álgebra Complementar”. Cesar Dacorso Netto, professor do Instituto de Educação, escreveu duas obras: “Elementos de Aritmética” e “Esboço sobre a transformação em matemática elementar”.

O primeiro volume da coleção é destinado para a 1ª série do Curso Colegial, e a edição a qual tivemos acesso foi a 2ª, publicada em 1945 pela Livraria Francisco Alves. O livro

possui 15x20,5 cm, capa dura e 404 páginas. Em seu índice consta que o livro é dividido em três partes, cada uma contendo os seguintes conteúdos:

Primeira Parte – Aritmética Teórica

Unidade I

Adição; Subtração; Multiplicação; Divisão; Potenciação; Radiciação e Sistemas de numeração.

Unidade II

Teoremas gerais sobre divisibilidade; Caracteres de divisibilidade; Máximo divisor comum; Mínimo múltiplo comum e Teoria dos números primos.

Unidade III

Números fracionários; Operações sobre frações; Frações decimais; Conversão das frações ordinárias em dízimas e Noções sobre cálculo numérico aproximado. Erros, operações abreviadas.

Segunda Parte – Álgebra

Unidade IV – Os Polinômios

Identidade de polinômios de uma variável; Identidade de polinômios de mais de uma variável; Métodos dos coeficientes a determinar; Identidades clássicas; Divisão de polinômios de uma variável; Divisão de polinômios de mais de uma variável; Divisão por $x \pm a$. Lei de Ruffini e M.d.c. e m.m.c. de dois polinômios de uma variável.

Unidade V – O Trinômio do 2º Grau

Decomposição do trinômio de 2º grau; Inequações do 2º grau; Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimo; Variação do trinômio do 2º grau; representação gráfica e Problemas elementares sobre máximos e mínimos.

Terceira Parte – Geometria

Unidade VI – O Plano e a Reta no Espaço

Determinação de um plano; Intersecção de retas e planos; Paralelismo de retas e planos; Reta e plano perpendiculares; Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano; Diedros; planos perpendiculares entre si; Projeções sobre um plano e Ângulos poliedricos. Estudo especial dos triedros.

Unidade VII – Os Poliedros

Noções gerais de poliedros; Prisma - áreas; Paralelepípedo - áreas; Pirâmide - áreas; Volumes e Teorema de Euler – Noções sobre poliedros regulares. (ROXO *et al.*, 1945, p. 403-404)

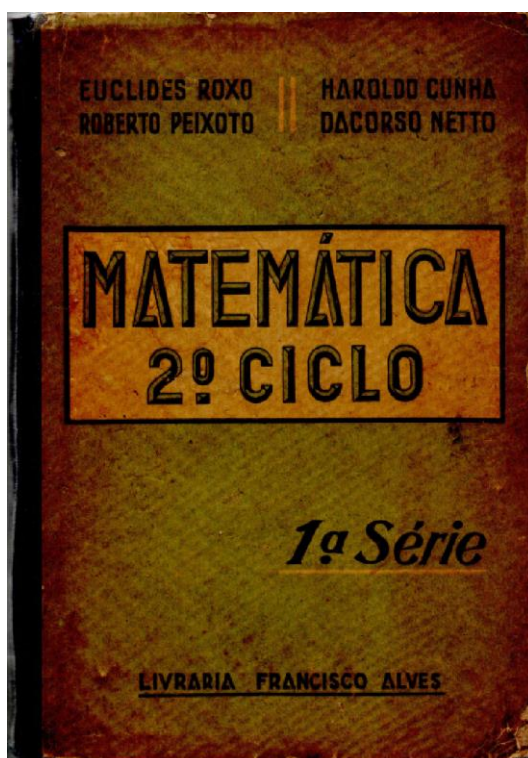
Esta obra tem por característica apresentar no final de cada unidade as soluções dos exercícios propostos pelos autores. Consta, ainda, advertência quanto ao andamento da obra e informações pertinentes aos alunos, da seguinte forma

Com o presente volume, inicia-se a série MATEMÁTICA – 2º CICLO, destinada aos alunos dos *Cursos científico e clássico*. A matéria não ficou adstrita, entretanto, aos títulos e sub-títulos dos atuais programas. Procuraram os autores sugerir alguns complementos e aplicações, sem se afastar, contudo, dos assuntos dos programas e sem quebrar a harmonia do conjunto. (ROXO *et al.*, 1945, p. 5)

Diferentemente do livro anterior, que afirmava seguir à risca os programas oficiais, aqui ocorre uma quebra, embora afirmação de seguir os parâmetros, há um eventual

distanciamento ao “sugerir alguns complementos e aplicações”. O que pretendiam os autores com essa escapada, premeditada ou ocasional? Seria uma forma, aparentemente inocente, de demonstrar a falta de alguns pontos que se julgava importante? Talvez especialmente as aplicações?

Figura 11– Capa do livro Matemática 2º Ciclo – 1ª Série



Fonte: Roxo *et al.* (1945)

O segundo volume é destinado para a 2ª série dos cursos Colegial – Clássico e Científico. Trata-se da 2ª edição, publicada em 1944, e possui 458 páginas. As dimensões e os elementos textuais acompanham a diagramação do volume 1 (dimensões iguais), com o acréscimo de uma página para a descrição do programa da segunda série. O índice está composto dos seguintes conteúdos:

Primeira Parte – Álgebra

Unidade I: Potências de expoente real; Progressões aritméticas; Progressões geométricas; Noção de função exponencial e de função inversa; Teoria dos logaritmos – Aplicações e Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II: Noções sobre análise combinatória e Potenciação de polinômios.

Unidade III: Teoria dos determinantes; Determinantes especiais e Aplicação aos sistemas de equações lineares – Regra de Cramer e Teorema de Rouchê.

Unidade IV: Frações contínuas – Noções de frações contínuas e Frações contínuas periódicas.

Segunda Parte – Geometria

Unidade V: Noções sobre geração e classificação das superfícies; Estudo do cilindro e do cone – Áreas e volumes; Estudo da esfera – Área da esfera, da zona e do fuso e Volume da esfera.

Terceira Parte

Unidade VI: Grandezas escalares e vetoriais – Noções de vetor, equipolência; Adição de vetores; Subtração de vetores; Produto de um vetor por um número real e Quociente de um vetor por um número real.

Unidade VII: Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo; Teorema de Carnot e Projeção de um vetor deslizante.

Unidade VIII: Generalizações das noções de arco e de ângulo: arcos côngruos, arcos de mesma origem e extremidade e de extremidades associadas; Linhas trigonométricas de um arco e Relações entre as linhas trigonométricas de um arco.

Unidade IX: Adição de arcos; Multiplicação e divisão de arcos; Transformação de produtos em somas e de somas em produtos; Tábuas trigonométricas e Tornar uma fórmula calculável por logaritmos.

Unidade X: Equações trigonométricas.

Unidade XI: Relações entre os elementos de um triângulo retângulo; Resolução dos triângulos retângulos (casos clássicos); Relação entre os elementos de um triângulo; Resolução dos triângulos obliquângulos (casos clássicos) e Aplicações à Topografia. (ROXO *et al.*, 1944a, p. 457-458)

Figura 12 – Capa do livro Matemática 2º Ciclo – 2ª Série



Fonte: Roxo *et al.* (1944a)⁴⁰

⁴⁰ O livro que tivemos acesso não tinha a capa original, assim retiramos a imagem que apresentamos de Oliveira Filho (2013, p. 333), pois ambas possuem o mesmo ano de publicação.

Um diferencial referente à obra anterior (1º volume) é que, além das respostas dos exercícios propostos em cada unidade, são apresentadas, ao final do livro, as tábuas dos senos, cossenos e tangentes.

O terceiro volume da coleção é destinado à terceira série dos cursos Colegial - Clássico e Científico, não traz referência à edição, porém sua publicação apresenta o ano de 1944, provavelmente trata-se da primeira edição. As dimensões e os elementos pré-textuais continuam acompanhando os dois volumes antecessores. Já o quantitativo de páginas é estendido a 563, seguindo aumento gradual constatado entre os volumes. O índice apresenta os conteúdos distribuídos do seguinte modo:

Primeira Parte – Álgebra

Unidade I

Sucessões; Cálculo aritmético dos limites; Limites singulares; Séries numéricas; Estudo da natureza de algumas séries clássicas; Estudo geral da convergência: Principais caracteres de convergência e Transformação das séries.

Unidade II

Função de uma variável real; Representação cartesiana; Teoria geral dos limites e Continuidade, pontos de descontinuidade, descontinuidade de uma função racional.

Unidade III

Derivadas: definição, interpretação geométrica e cinemática; Cálculo das derivadas; Derivação das funções elementares; Derivadas e diferenciais sucessivas; Propriedades gerais das derivadas; Limites de expressões indeterminadas e Máximos e mínimos, estudo da variação de algumas funções simples.

Unidade IV

Definição de número complexo; Representação trigonométrica e exponencial; Operações fundamentais e Resolução das equações binômias.

Unidade V

Propriedades gerais dos polinômios, equações algébricas; Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica, aplicação à composição das equações; Equações de raízes iguais e Aplicação ao cálculo das raízes iguais.

Segunda Parte – Geometria

Unidade VI

Teorema de Stewart e suas aplicações ao cálculo das linhas notáveis do triângulo; Relações métricas nos quadriláteros; Relações métricas nos polígonos regulares e Potência de um ponto, eixos radicais, planos radicais.

Unidade VII

Deslocamentos; Translação; Rotação; Simetria; Homotetia; Semelhança e Inversão por meio de raios vetores recíprocos.

Unidade VIII

Elipse; Hipérbole; Parábola; Secções cônicas e Hélice Cilíndrica.

Terceira Parte – Geometria Analítica

Unidade IX

Noções fundamentais. Conceções de Descartes; Coordenadas; Determinação de uma direção. Ângulo de duas direções e Distância de dois pontos. Ponto que divide um segmentos numa razão dada.

Unidade X

Equação natural de um lugar geométrico; Circunferência de círculo; Elipse; Hipérbole; Parábola; Linha reta; Problemas sobre a linha reta; Ângulos; Condição de paralelismo de duas retas; Condição de perpendicularismo de duas retas e Distâncias. (ROXO *et al.*, 1944b, p. 563)

Figura 13 – Capa do livro Matemática 2º Ciclo – 3ª Série



Fonte: Roxo *et al.* (1944b)

Como nos volumes anteriores, as respostas dos exercícios estão postas no final do livro. O dado principal que nos interessa, que é a geometria (conteúdos), está contemplado nos três volumes da coleção, tendo em Euclides Roxo sua autoria, e de modo geral, diferente da obra de Gumerindo Lima, traz apresentação detalhada dos conteúdos, com definições, postulados, propriedades, teoremas e demonstrações, além de propor exercícios aos alunos.

Nos livros editados para os Cursos Clássico e Científico, a matéria era ensinada mais diretamente, sem a excessiva utilização de símbolos matemáticos, de modo menos complexos, com exercícios resolvidos e a resolver, sugerindo que o professor teria que interagir mais intensamente com os alunos. Havia seriação e se encontravam elementos que seriam aprofundados em livros de outras séries. [...] Quanto à organização e o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, nota-se, nos livros editados para a Reforma Capanema, um menor rigor matemático do que aquele verificado nos livros dos Cursos Complementares. A metodologia utilizada

para o desenvolvimento da teoria: resumo da teoria, exemplo com a aplicação da teoria utilizando-se de números para os cálculos, exemplos resolvidos de alguns casos especiais da aplicação da teoria e, ao final da unidade, havia exercícios propostos sem a resolução, só com a resposta. (OTONE, 2011, p. 33-34)

A coleção atendeu a todos os conteúdos presentes nos programas vigentes e na mesma sequência por eles estabelecida. Quanto à geometria, percebemos maior quantidade de conteúdos em relação à obra de Gumerindo Lima, especialmente a parte destinada à geometria espacial, ausente na coleção anterior. Um fator que instigou nossa curiosidade foi que, apesar da criação da disciplina Matemática com a fusão da Álgebra, Aritmética e Geometria ser recente, percebemos que esses três ramos eram trabalhados isoladamente, em partes bem delimitadas, e que cada uma delas era de autores diferentes.

Interessante que Euclides Roxo, personagem importante no movimento para unificação da matemática, ainda traz os três ramos de forma separada. Se na concepção da obra havia essa prerrogativa, o que pensar da forma trabalhada nas escolas, possivelmente essa “unificação” também não foi praticada em sala de aula. Esse caminho parece ser, a nosso entendimento, invariavelmente, o cotidiano do fazer educação no país, em que se planeja e são criados meios para mudança de paradigmas e práticas, porém a execução não ocorre conforme planejado e se tem situações em que, ou se continuam do mesmo jeito, anterior ao planejado, ou se criam formas alternativas que tomam corpo para além do planejado.

A coleção Matemática para o curso Colegial de Ary Quintella também é composta por três volumes, publicada pela Companhia Editora Nacional de São Paulo. No verso da falsa folha de rosto, consta uma nota com a seguinte informação: “De acordo com os programas em vigor (conforme portarias n.º 966, de 2/10/51 e 1 045, de 14/12/51.)”. As figuras do texto são do Prof. Dr. Paulo Ferreira, e a capa é do arquiteto Hugo Ribeiro.

Ary Quintella foi professor catedrático do Colégio Militar do Rio de Janeiro e autor das seguintes obras: “Matemática para o Curso Ginásial” (primeira, segunda, terceira e quarta séries); “Matemática para o Curso Comercial Básico” (Aritmética Prática – Primeiro ano; Matemática – Segundo ano e Álgebra Elementar – Terceiro ano); “Coleção Madureza” (Guia de Matemática); “Curso Primário e Admissão” (Exercícios de Aritmética, Admissão e Quinta série primária), em colaboração com o Prof. Newton O’Reilly; “Concursos de Habilitação” (Questões de Concurso nas Escolas Superiores), em colaboração com o Prof. Vitalino Alves, e “Curso Normal” (Exercícios de Matemática – Conquista), em colaboração com o Prof. Francisco Junqueira.

O volume 1 é destinado ao primeiro ano colegial. Obtivemos acesso somente a 10ª edição, publicada em 1960, a qual passamos apreciar. O livro apresenta as dimensões 13,5x19,5 e capa dura. Na folha de rosto, aparece a informação de que o livro conta com:

- I - 650 exercícios e várias questões propostas nos Concursos de Habilitação das Escolas de Engenharia, Arquitetura, Filosofia e Química das Universidades do Brasil, Católica, do Distrito Federal, de São Paulo, de Minas Gerais, do Paraná e do Estado do Rio.
- II – Uma tábua de logaritmos a 4 decimais, fora do texto. (QUINTELLA, 1960, p. 5)

Ainda no início, há o acréscimo de uma página apresentando o programa de matemática para o primeiro ano do curso Colegial. No índice geral consta que o primeiro volume está dividido em cinco unidades, conforme segue:

Unidade I – Cálculo Aproximado

1. Aproximação. Erro; 2. Valor por falta e por excesso; 3. Erro absoluto; 4. Erro relativo; 5. Algarismos exatos; Erro de arredondamento; 7. Cálculo aproximado; 8. Supressão de algarismos ilusórios; 9. Adição; 10. Subtração; 11. Multiplicação e 12. Divisão.

Unidade II – Progressões

I) Progressões aritméticas

1. Definições; 2. Notações; 3. Diversos tipos de progressão; 4. Termo geral; 5. Fórmula do termo geral; 6. Problemas; 7. Propriedades das progressões; 8. Soma dos termos; 9. Problemas e 10. Interpolação.

II) Progressões Geométricas

11. Definições; 12. Notação; 13. Diversos tipos de progressão; 14. Termo geral; 15. Fórmula do termo geral; 16. Problemas; 17. Propriedades das progressões; 18. Produto dos termos; 19. Soma dos termos; 20. Problemas e 21. Interpolação.

Unidade III – Logaritmos. Equações exponenciais

I) Conceito. Propriedades gerais

1. Definições; 2. Sistemas de logaritmos; 3. Variação dos logaritmos; 4. Propriedades operatórias; 5. Característica e mantissa; 6. Cologaritmo e 7. Regra para o cálculo do logaritmo de um monômio.

II) Logaritmos decimais

8. Propriedades; 9. Logaritmo preparado; 10. Regra para achar o cologarítmo; 11. Operações com logaritmos; 12. Tábuas de logaritmos; 13. Achar o logaritmo de um número; 14. Achar o antilogaritmo; 15. Cálculo de expressões e 16. Mudança de base.

III) Equações exponenciais

17. Definição; 18. Resolução da equação $ax=b$; 19. Exponencial de segunda ordem; 20. Equação $a^2x+bx+c=0$; 21. Equação $ax+1-a^3-z=b$ e 22. Índices incógnitos.

Unidade IV – Retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais; definições e propriedades; áreas e volumes.

Capítulo I: RETA E PLANO. DIEDROS

I) Reta e plano

- 1. Plano; 2. Postulados do plano; 3. Determinação do plano; 4. Posições relativas de duas retas; 5. Posições relativas de uma reta e um plano e 6. Posições relativas de dois planos.**

II) Paralelismo de retas e planos

7. Retas paralelas; 8. Reta e planos paralelos; 9. Planos paralelos e 10. Ângulo de duas retas.

III) Reta e plano perpendiculares

11. Definições; 12. Teoremas e 13. Aplicações.

IV) Diedros. Planos perpendiculares

14. Definições; 15. Soma de diedros; 16. Propriedades dos diedros; 17. Aplicações; 18. Planos perpendiculares; 19. Teoremas; 20. Projeções; 21. Ângulo de reta e plano e 22. Distância de duas retas.

V) Ângulos sólidos. Triedros

23. Definições; 24. Triedros; 25. Triedros simétricos e suplementares; 26. Propriedades dos ângulos sólidos; 27. Aplicação e 28. Congruência de triedros.

Capítulo II: POLIEDROS

I) Generalidades

1. Definições; 2. Classificação e 3. Propriedades – Teorema de Euler.

II) Poliedros regulares

4. Teorema fundamental; 5. Elementos dos poliedros regulares; 6. Área poliedros regulares e 7. Poliedros conjugados.

Capítulo III: PRISMAS

1. Superfícies prismáticas; 2. Propriedade; 3. Secção reta; 4. Prisma; 5. Classificação dos prismas; 6. Paralelepípedos; 7. Congruência dos prismas; 8. Propriedades dos paralelepípedos; 9. Propriedade do paralelepípedo retângulo; 10. Área dos prismas e 11. Volume dos prismas.

Capítulo IV: PIRÂMIDES; TRONCOS

I) Pirâmide

1. Definições; 2. Elementos da pirâmide; 3. Classificação; 4. Pirâmide regular. Relações métricas; 5. Propriedades; 6. Áreas; 7. Volume e 8. Aplicações.

II) Troncos

9. Tronco de pirâmide; 10. Área lateral do tronco de pirâmide; 11. Área total do tronco de pirâmide; 12. Volume do tronco de pirâmide; 13. Troncos de prisma; 14. Área lateral do tronco de prisma; 15. Área total e 16. Volume do tronco de prisma.

Capítulo V: SUPERFÍCIES

1. Linha; 2. Superfície; 3. Família de superfícies; 4. Classificação das superfícies; 5. Superfícies retilíneas; 6. Superfícies de revolução e 7. Exemplos de superfícies de revolução.

Capítulo VI: CILINDRO

1. Definições; 2. Propriedades do cilindro; 3. Área lateral. Área total. Volume; 4. Secção meridiana; 5. Cilindro equilátero; 6. Semi-cilindro; 7. Cilindros semelhantes; 8. Relações entre as áreas e os volumes dos cilindros semelhantes; 9. Tronco de cilindro e 10. Desenvolvimento da superfície lateral.

Capítulo VII: CONE

1. Definições; 2. Propriedades do cone; 3. Área lateral. Área total. Volume; 4. Cone equilátero; 5. Cones semelhantes; 6. Relações entre áreas e volumes de cones semelhantes; 7. Troncos de cone e 8. Desenvolvimento da superfície lateral.

Capítulo VIII - ESFERA

I) Generalidades

1. Definições; 2. Propriedades; 3. Polos. Distância polar; 4. Posições da reta em relação à esfera; 5. Superfície cônica e cone circunscritos e 6. Superfície cilíndrica e cilindro circunscritos.

II) Área da superfície esférica e de suas partes

7. Teorema fundamental; 8. Aplicação: superfície gerada por uma poligonal regular; 9. Área da zona esférica; 10. Área da calota; 11. Área da superfície esférica e 12. Fuso esférico.

III) Volume da esfera e de suas partes

13. Teorema fundamental; 14. Aplicação: volume gerado por um setor poligonal; 15. Volume do setor esférico; 16. Volume da esfera; 17. Volume da cunha esférica; 18. Anel esférico e 19. Segmento esférico.

Unidade V – Secções cônicas

I) Elipse

1. Definições; 2. Traçado da elipse; 3. Eixos de simetria. Centro de simetria; 4. Comprimento dos eixos. Vértices; 5. Relações entre os eixos e a distância focal; 6. Excentricidade; 7. O ponto em relação à elipse; 8. Círculos da elipse; 9. Propriedades da elipse e 10. Traçado de tangentes à elipse.

II) Hipérbole

11. Definições; 12. Condição de existência da curva; 13. Traçado da hipérbole; 14. O ponto em relação à hipérbole; 15. Eixos de simetria. Centro de simetria. Vértices; 16. Comprimento dos eixos. Hipérbole equilátera; 17. Relação métrica entre os eixos e a distância focal; 18. Excentricidade. Variação; 19. Propriedade da hipérbole; 20. Tangentes à hipérbole; 21. Traçado de tangentes à hipérbole; 22. Assíntotas e 23. Hipérboles conjugadas.

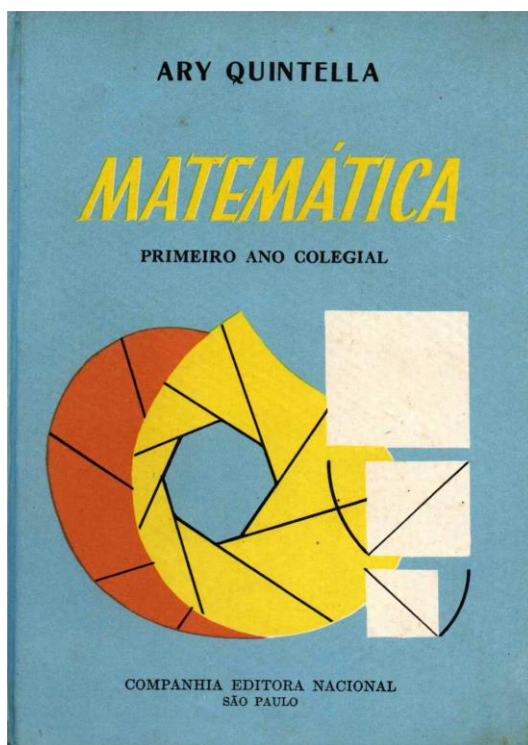
III) Parábola

24. Definições; 25. Traçado da parábola; 26. A parábola como lugar geométrico; 27. Eixo de simetria. Vértice; 28. Tangentes à parábola e 29. Traçado de tangentes à parábola.

IV) Secções Cônicas

30. Definições e 31. Teorema de Dandelin. (QUINTELLA, 1960, p. 7-10)

Figura 14 – Capa do livro Matemática para o curso Colegial – 1ª Série



Fonte: Quintella (1960)

O volume dois é destinado para o segundo ano do colegial. Não há menção ao número da edição, e sua publicação data o ano de 1957. A diferença em relação aos elementos pré-textuais é que não faz alusão aos exercícios na folha de rosto, como no primeiro volume. O índice apresenta o livro dividido em duas partes, com os seguintes conteúdos:

Primeira Parte – Álgebra

Unidade I: Análise combinatória simples

Definições; Arranjos simples; Permutações com objetos distintos; Inversão. Classe de uma permutação; Permutações com objetos repetidos e Combinações simples.

Unidade II: Binômio de Newton

Produtos de binômios distintos; Binômio de Newton; Termo geral; Propriedades do Binômio de Newton; Triângulo de Pascal e Soma das potências semelhantes.

Unidade III: Determinantes. Sistemas lineares

Definições; Cálculo do determinante de 2ª ordem; Cálculo do determinante de 3ª ordem; Propriedades fundamentais; Determinante menor. Adjunto; Desenvolvimento; Consequências do teorema de Laplace; Cálculo de um determinante; Regra prática de Chió; Sistemas lineares; Teorema de Cramer; Regra de Cramer e Teorema de Rouché.

Segunda Parte – Trigonometria

Unidade IV: Vetores. Funções circulares diretas

Vetores; Projeções ortogonais; Arcos e ângulos; Funções circulares diretas; Relações entre as funções de um mesmo arco e Cálculo das linhas dos arcos n.

Unidade V: Arcos de extremidades associadas. Aplicações

Arcos côngruos; Arcos associados; Relações entre as funções dos arcos associados; Redução ao primeiro quadrante; Arcos negativos; Arcos que correspondem a uma linha dada e Funções circulares inversas.

Unidade VI: Operações com arcos

Medida algébrica de um vetor; Adição de arcos; Subtração de arcos; Multiplicação; Fórmulas em função da tangente da metade e Divisão de arcos.

Unidade VII: Cálculo por logaritmos

Transformações de somas e diferenças em produtos; Tábuas de logaritmos e Cálculo de expressões por logaritmos.

Unidade VIII: Equações trigonométricas

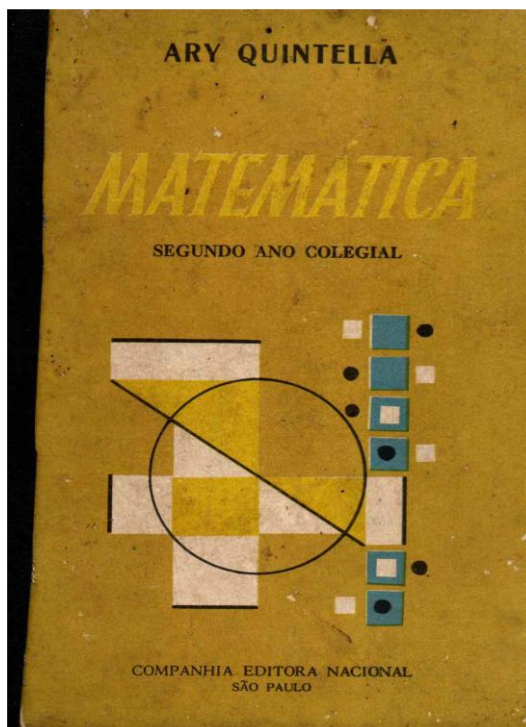
Definição; Equações com uma função do arco incógnito; Equações com mais de uma função do arco incógnito e Método da tangente da metade.

Unidade IX: Resolução de triângulos

Relações entre os elementos de um triângulo retângulo; Casos clássicos de resolução de triângulos retângulos; Relações entre os elementos de um triângulo obliquângulo e Casos clássicos de triângulos obliquângulos.

(QUINTELLA, 1957, p. 7-8)

Figura 15 – Capa do livro Matemática para o curso Colegial – 2ª Série



Fonte: Quintella (1957)

O volume três é destinado ao terceiro ano do colegial. Publicado em 1958, e assim como no volume dois, não apresenta número da edição, a semelhança com este continua quando na folha de rosto não faz menção a respeito de exercícios, diferente do que ocorre no volume um. Composto por 205 páginas, seu índice, distinto do modo como ocorre nos dois volumes anteriores, não apresenta divisão em partes, e sim por capítulos, 13 ao total, conforme segue:

1) Funções. Gráficos

1.1 – Intervalo; 1.2 – Variável. Constante; 1.3 – Variável progressiva; 1.4 – Representação gráfica duma variável real contínua; 1.5 – Função; 1.6 – Função real de variável real; 1.7 – Notação funcional; 1.8 – Função definida em um ponto; 1.9 – Função definida em um intervalo; 1.10 – Classificação das funções; 1.11 – Funções inversas; 1.12 – Funções periódicas; 1.13 – Funções pares e ímpares; 1.14 – Função de função e 1.15 – Representação gráfica das funções.

2) Limites. Continuidade

2.1 – Limite de uma variável; 2.2 – Tendência da variável para seu limite; 2.3 – Limite infinito; 2.4 – Infinitésimos; 2.5 – Propriedades dos limites; 2.6 – Operações com limites; 2.7 – Limite de uma função; 2.8 – Limites fundamentais; 2.9 – Limites laterais de uma função; 2.10 – Função contínua no ponto a ; 2.11 – Continuidade num intervalo; 2.12 – Pontos de descontinuidade e 2.13 – Classificação das descontinuidades.

3) Função Linear. Linha Reta

3.1 – Equação da linha reta; 3.2 – Casos particulares; 3.3 – Parâmetro angular e linear; 3.4 – Diversas formas de equação da reta; 3.5 –

Representação paramétrica. Problemas; 3.6 – Retas que passam num ponto; 3.7 – Reta que passa por dois pontos; 3.8 – Intersecção de duas retas; 3.9 – Distância de um ponto a uma reta; 3.10 – Ângulo de duas retas; 3.11 – Paralelismo; 3.12 – Perpendicularismo; 3.13 – Área do triângulo e 3.14 – Resumo.

4) Equação do 2º Grau. Circunferência de Círculo

4.1 – Distância entre dois pontos. Fórmula; 4.2 – Equação da circunferência de círculo em coordenadas cartesianas ortogonais; 4.3 – Equação geral do segundo grau a duas variáveis e a circunferência de círculo e 4.4 – Intersecções de retas e circunferências.

5) Derivadas

5.1 – Acréscimo; 5.2 – Derivada em um ponto; 5.3 – Regra geral de derivação; 5.4 – Interpretação geométrica; 5.5 – Interpretação cinemática. Regras de derivação; 5.6 – Primeiro grupo; 5.7 – Segundo grupo: funções algébricas; 5.8 – Terceiro grupo: funções transcendentais; 5.9 – Derivadas sucessivas; 5.10 – Diferencial e 5.11 – Interpretações geométricas.

6) Variação das Funções. Máximos e Mínimos

6.1 – Funções crescentes e decrescentes; 6.2 – Sinal da derivada; 6.3 – Máximos e mínimos; 6.4 – Cálculo dos máximos e mínimos; 6.5 – Interpretações geométricas; 6.6 – Pontos de inflexão e 6.7 – Estudo da variação de uma função.

7) Funções Primitivas. Integral

7.1) Função primitivas; 7.2 – Constante de integração. 7.3 – Propriedades elementares da integral; 7.4 – Integral de monômios e polinômios e 7.5 – Integral definida. Cálculo de áreas.

8) Números Complexos

8.1 – Imaginário puro. Unidade imaginária; 8.2 – Potências da unidade imaginária; 8.3 – Números complexos; 8.4 – Condições de igualdade e nulidade; 8.5 – Módulo e norma; 8.6 – Complexos conjugados; 8.7 – Operações racionais e 8.8 – Representação geométrica.

9) Polinômios: Identidade. Divisão por $x-a$. Fórmula de Taylor

9.1 – Polinômios de uma variável; 9.2 – Raízes ou zeros de um polinômio; 9.3 – Polinômio identicamente nulo; 9.4 – Polinômios idênticos; 9.5 – Condições de identidade; 9.6 – Método dos coeficientes a determinar; 9.7 – Divisão por $x-a$; 9.8 – Cálculo do resto; 9.9 – Regra de Ruffini; 9.10 – Dispositivo prático; 9.11 – Divisão por $bx+a$; 9.12 – Divisão pelo produto $x-a(x-b)$; 9.13 – Desenvolvimento de um polinômio $P(x)$ segundo as potências de um binômio $x-a$; 9.14 – Algoritmo de Ruffini-Horner e 9.15 – Fórmula de Taylor para os polinômios.

10) Equações Algébricas

10.1 – Forma canônica; 10.2 – Teorema fundamental da Álgebra; 10.3 – Decomposição de um polinômio em fatores binômios; 10.4 – Raízes múltiplas; 10.5 – Número de raízes; 10.6 – Raízes nulas; 10.7 – Raízes complexas; 10.8 – Relações entre os coeficientes e as raízes; 10.9 – Aplicações e 10.10 – Raízes racionais.

11) Equações Transformadas

11.1 – Equação transformada; 11.2 – Transformação aditiva; 11.3 – Transformação multiplicativa; 11.4 – Caso particular; 11.5 – Transformação recíproca e 11.6 – Transformações compostas.

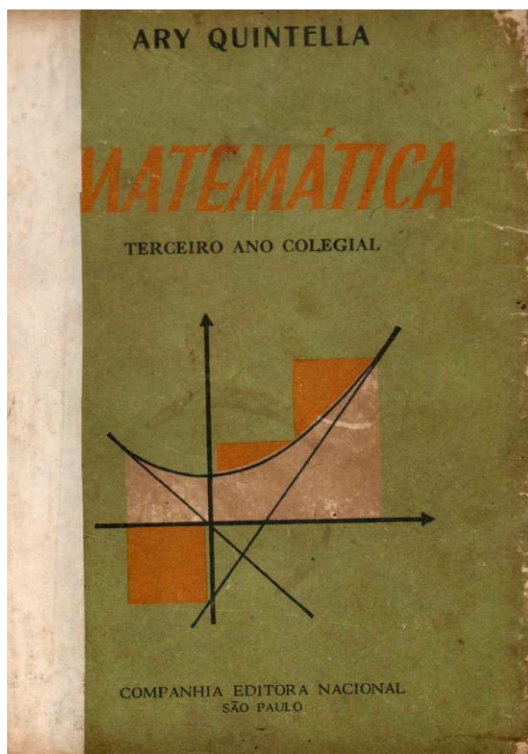
12) Cálculo das Raízes Inteiras

12.1 – Raízes inteiras; 12.2 – Raízes reais contidas num intervalo. Teorema de Bolzano; 12.3 – Consequências; 12.4 – Determinação das cotas das raízes reais. Método de Laguerre; 12.5 – Regras de exclusão de Newton; 12.6 – Algoritmo de Peletarius e 12.7 – Cálculo das raízes inteiras.

13 – Equações Recíprocas

13.1 – Definições; 13.2 – Condições para que uma equação seja recíproca. Classificação; 13.3 – Forma normal; 13.4 – Redução à forma normal e 13.5 – Resolução das equações recíprocas. (QUINTELLA, 1958, p. 7-10)

Figura 16 – Capa do livro Matemática para o curso Colegial – 3ª Série



Fonte: Quintella (1958)

Das obras de Quintella podemos perceber que os conteúdos de geometria aparecem somente no primeiro volume e ocupa quase 2/3 do livro. Outro fato que nos chamou atenção foi o fato de o autor seguir à risca as prescrições dos programas mínimos publicados em 1951, o que, conseqüentemente, faz com que haja diferença de conteúdos em relação à coleção Matemática 2º Ciclo. No entanto, Quintella também se utiliza da exposição clássica dos conteúdos para a geometria: definições – postulados – teoremas – demonstrações – exercícios (com as respostas finais).

A Coleção “Matemática Curso Colegial Moderno”, escrita por Scipione Di Pierro Neto, Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen Barbosa, foi publicada pelo IBEP – Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas de São Paulo. Os volumes possuem 14,5x21 cm de dimensão e capa simples. Os autores possuíam uma vasta experiência no ensino da matemática, a qual detalhamos a seguir:

O que mais me marcou nessa coleção foi a mudança da linguagem (pela introdução da teoria dos conjuntos) e o uso (quase que excessivo) de símbolos.

Scipione Di Pierro Netto – professor titular de Matemática do Colégio de Aplicação da FFCL – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP – Universidade de São Paulo, instrutor de Prática de Ensino da FFCL da USP e da FFCL de S. Bento da PUC – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e professor do Colégio Rio Branco. Além de ser autor de várias coleções de livros para o ensino ginasial, também escreveu, em parceria com Célia Contin Gomes, a coleção Matemática na Escola Renovada para o curso colegial.

Luiz Mauro Rocha – professor de Cálculo Infinitesimal da FEI – Faculdade de Engenharia Industrial e da FFCL da Fundação Santo André, instrutor de Cálculo Infinitesimal da Escola Politécnica da USP – Universidade de São Paulo e professor do Colégio Estadual de São Paulo. Ruy Madsen Barbosa – doutor em Matemática pela Universidade Católica de Campinas e Livre-Docente de Matemática da FFCL de Araraquara e professor do ensino Secundário oficial do Estado de São Paulo.

No volume um, destinado à primeira série do curso Colegial, não consta referência quanto a sua edição. A publicação remete ao ano de 1967, na apresentação do livro são expressas informações sobre a idealização da coleção

A idéia da publicação de uma série colegial de “Matemática Moderna”, em prosseguimento à “Matemática para a Escola Moderna”, do prof. Scipione Di Pierro Netto, tomou forma e se concretizou durante o transcurso do V Congresso de Ensino da Matemática, realizado em S. José dos Campos, no Centro Técnico de Aeronáutica, em 1966.

Naqueles dias, em contato com professores de quase todos os Estados, sentimos bem de perto a angústia com que os nossos colegas se referiam à dificuldade que encontravam para a atualização do ensino da matemática no colégio, dada a inexistência, ao seu alcance, de obras nacionais e estrangeiras.

De fato, só as livrarias especializadas das grandes capitais costumam receber as novidades bibliográficas que vêm sendo publicadas nos países mais desenvolvidos.

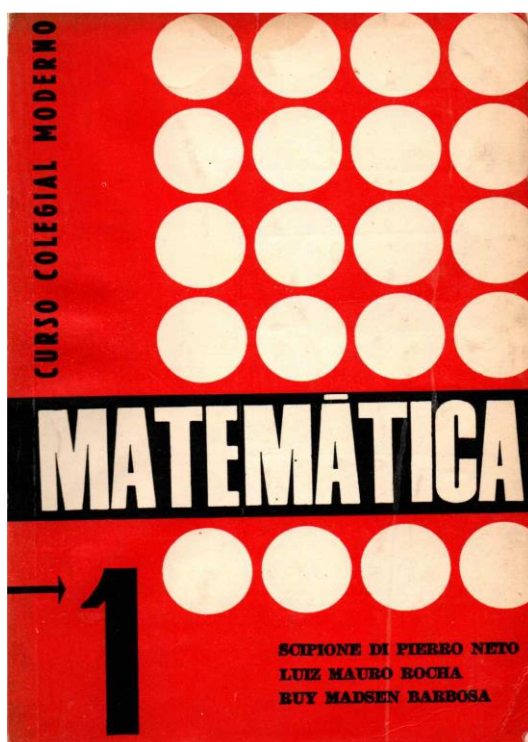
1. Apresentar, no início do primeiro volume, um capítulo de FUNDAMENTOS, destinado aos professores ainda não iniciados na “Matemática Moderna”, redigido em linguagem fácil e nível elementar – de modo a que possa ser aprendido e ao mesmo tempo ensinado, no todo ou em parte, aos alunos.
2. Estabelecer um programa global para o colégio, visando a introdução paulatina dos conceitos modernos de funções, relações, matrizes, estruturas algébricas, etc., através de exemplos simples e de numerosos exercícios. Só no terceiro ano, reunindo a experiência adquirida, o aluno terá a formulação exata dos conceitos de grupo, anel, corpo, espaço vetorial, etc., cuja utilidade irá sentir logo no início do curso superior.
3. Reduzir a extensão com que eram anteriormente tratados alguns assuntos de escasso interesse, em benefício de outros mais exigidos pela ciência moderna.

Não sabemos se conseguimos realizar esses objetivos. Uma coisa é pretender; outra, muito mais difícil, é conseguir pôr em prática o que se pretende.

De qualquer modo, acreditamos que estaremos concorrendo para agitar o problema da pesquisa de novos caminhos para o ensino da matemática no nosso país.

É de relevante interesse para nós que os colegas nos comuniquem os resultados de sua experiência com nosso curso, bem como sugestões para futuras alterações no texto. (ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1967, p. 7-8)

Figura 17 – Capa do livro Matemática curso Colegial Moderno – 1ª Série



Fonte: Rocha, Barbosa e Pierro Neto (1967)

Essa coleção traz uma proposta audaciosa: tentar um programa global para o colégio. Com todas as concepções diferentes sobre o MMM vigentes simultaneamente à ideia era de padronizar o ensino, ao menos em que pese questões de conteúdo, o que poderia facilitar o trabalho em sala de aula, de outra forma, também poderia podar iniciativas diferentes.

Diferente do que ocorreu no curso Ginásial, que contou com uma coleção que alcançou grande sucesso de vendas escrita por Osvaldo Sangiorgi, no curso Colegial, parece não ter ocorrido o mesmo. Acreditamos que isso reforça as informações dadas pelos autores em relação à angústia dos professores devido à dificuldade de encontrar materiais atualizados com os novos ideais para o ensino da matemática. Para além do título do livro, os autores

deixaram explícita a intenção de iniciar tanto os alunos quanto os professores na Matemática Moderna.

Composto por 270 páginas, o índice do primeiro volume apresenta uma divisão do livro em quatro partes, conforme segue:

Primeira Parte – Fundamentos

Capítulo I – Conjuntos e Lógica Matemática

Conjuntos; Conjuntos numéricos fundamentais; Um pouco de Lógica; Proposições compostas; Quantificadores; Sub-conjuntos; Interseção de conjuntos; Reunião de conjuntos; Diferença de conjuntos e Propriedades das operações com conjuntos.

Capítulo II – Produto Cartesiano; Relações Binárias; Aplicações e Funções
Produto cartesiano; Relações binárias e Aplicações e Funções.

Segunda Parte – Funções Elementares

Capítulo III – Função Linear

Capítulo IV – Função Quadrática

Capítulo V – Função Exponencial e Função Logarítmica

Equações exponenciais e Função logarítmica.

Terceira Parte – Trigonometria

Capítulo VI – Funções Trigonométricas

Arcos orientados; Função seno e cosseno; Outras funções trigonométricas e Tabela geral.

Capítulo VII – Relações Entre Lados e Ângulos de um Triângulo

Triângulos retângulos e Triângulos quaisquer.

Quarta Parte – Geometria

Capítulo VIII – Introdução à Geometria no Espaço

Conceitos primitivos e axiomas; Ângulos e diedros; Perpendicularidade e paralelismo; Teoremas fundamentais; Outros teoremas; Projeções e Triedros. (ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1967, p. 268-270)

O volume dois, destinado à segunda série do curso Colegial, também não traz referência à edição. Sua publicação, porém, é do ano de 1968 e, na apresentação do livro, estão registradas as seguintes informações

Neste segundo volume do nosso curso colegial, damos prosseguimento ao plano didático, de acordo com as modernas técnicas e tendências observadas em países e autores pioneiros na renovação no ensino da matemática.

Inicialmente, é apresentado um estudo bastante completo de seqüências, incluindo as progressões e noções sobre séries numéricas, com o emprêgo do símbolo somatório e do princípio de indução matemática.

O estudo das matrizes no curso secundário constitui novidade nos nossos programas, sendo no entanto justificável a sua introdução, em nível elementar, dadas as suas amplas aplicações, principalmente nos sistemas lineares.

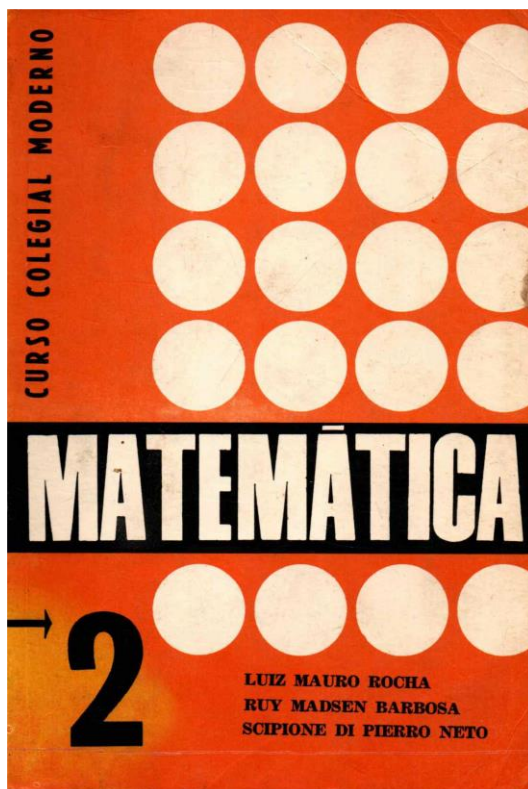
Na parte de geometria, introduziremos as primeiras noções de transformações geométricas e na parte métrica, usamos o princípio de Cavalieri.

No terceiro volume, completaremos o curso com os capítulos sobre Combinatória, Binômio de Newton, Estruturas, Números Reais e Complexos, Polinômios e Equações Algébricas, Noções de Cálculo Infinitesimal e Geometria Analítica.

Esperamos dos estudantes e professôres a mesma acolhida que dedicaram ao 1.º volume.

As críticas, favoráveis ou contrárias, nos serão igualmente valiosas, para futura orientação. (ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1968, p. 5)

Figura 18 – Capa do livro Matemática curso Colegial Moderno – 2ª Série



Fonte: Rocha, Barbosa e Pierro Neto (1968)

Novamente, os autores reforçam suas intenções de apresentar a matemática de acordo com as novas tendências, inclusive apontando um dado novo, em que “o estudo das matrizes no curso secundário constitui novidade nos nossos programas”, ênfase dada provavelmente em virtude do MMM, apesar de que nas duas coleções anteriores alguns conceitos sobre matrizes são encontrados nos conteúdos da teoria dos determinantes. Quanto à geometria, é destacado a introdução das noções de transformações geométricas, deixadas à parte na década anterior, também fortemente incentivadas nas propostas do MMM.

Composto por 301 páginas, seu índice indica a divisão do livro em quatro partes, conforme segue:

Primeira Parte

Capítulo I – Sequências e Séries

O conceito de sequências; Operações com sequências; O conceito de série; Somatórios e O método de indução completa.

Capítulo II – Progressões Aritméticas

Definição de P.A.; Termo geral e Soma dos termos.

Capítulo III – Progressões Geométricas

Definição de P. G.; Termo geral; Produto dos termos e Séries geométricas.

Segunda Parte

Capítulo IV – Logaritmos Decimais

A função logaritmo decimal; Característica e mantissa; Uso das tábuas e Anti-logaritmo.

Terceira Parte

Capítulo V – Matrizes

Elementos das matrizes; Igualdade de matrizes; Matriz diagonal – escalar – transposta; Operações com matrizes; Adição de matrizes e Multiplicação de matrizes.

Capítulo VI – Sistemas Lineares

Sistemas lineares 2×2 ; Determinantes; Sistemas lineares $n \times n$ – por determinantes; Inversão de matrizes; Sistemas lineares por triangulação.

Capítulo VII – Sistemas não Lineares

Sistemas do 2º grau; Elipse e hipérbole (optativo) e Sistemas com exponenciais e logarítmicas.

Quarta Parte

Capítulo VIII – Geometria

Segmentos orientados – vetores; Transformações geométricas; Simetria; Rotação; Homotetia e Produto escalar de vetores.

Capítulo IX – Superfícies

Superfícies cilíndricas; Superfícies cônicas e Superfícies de rotação.

Capítulo X – Prismas e Pirâmides

Prismas; Paralelepípedos; Pirâmides; Tetraedro regular; Troncos de pirâmides; Volumes; O princípio de Cavalieri e Volume do tronco de pirâmide.

Capítulo XI – Os Corpos Redondos

Cilindro; Cone; Esfera; Superfície esférica e Sólidos inscritos e circunscritos na esfera.

Capítulo XII - Poliedros

Superfícies poliédricas; Poliedros; Teorema de Descartes – Euler; Poliedros de Platão e Poliedros regulares. (ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1968, p. 302-303)

O volume três, destinado à terceira série do curso colegial, também não apresenta referência à edição. Sua publicação ocorreu no ano de 1970. Diferentemente dos volumes anteriores, este consta como autores somente os professores Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen Barbosa. Na apresentação do livro, constam informações sobre este volume:

Acreditando termos alcançado nossos objetivos, propostos quando iniciamos esta série para um Curso Colegial Moderno, sentimo-nos honrados ao entregar, aos nossos colegas de magistério e aos queridos alunos, este terceiro e último volume da coleção.

Dentro da orientação básica: Fundamentação (1º ano), Cálculos (2º ano) e Complementação (3º ano) oferecemos aos leitores:

Combinatória e Probabilidades com recursos modernos de contagem e os preciosos auxílios didáticos das árvores. Acrescentou-se ao final aplicações à genética, que o professor poderá tratar optativamente, em função do interesse de seus alunos.

Estudam-se questões de Geometria Analítica e Transformações Geométricas, dando continuidade à introdução realizada no primeiro

volume, apoiando-se agora na útil, potente e motivadora Teoria das Matrizes, estudada no 2º volume.

As Estruturas Algébricas, os Números Reais e os Complexos dão coroamento a vários estudos anteriores.

Estudam-se elementarmente as noções básicas de Cálculo Infinitesimal.

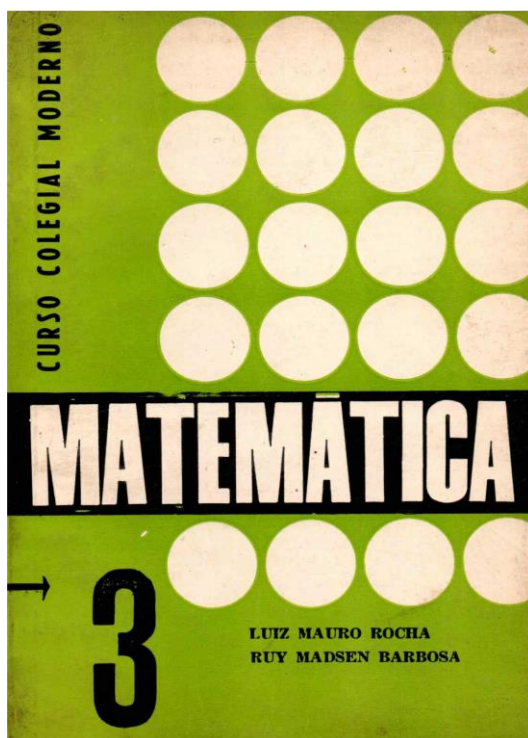
Os Polinômios são introduzidos com recursos das seqüências, preparando o material para um estudo simples e ao mesmo tempo avançado das Equações Algébricas e sua Resolução Numérica.

Não poderíamos deixar de, jubilosos, agradecer pela grande acolhida que tiveram os dois volumes anteriores aos ilustres colegas do magistério brasileiro.

Agradecemos também ao Prof. José Gaspar Ruas Filho sua colaboração na revisão das provas e exercícios.

Novamente, nos serão valiosas as críticas, para possíveis modificações. (ROCHA; BARBOSA, 1970, p. 3)

Figura 19 – Capa do livro Matemática curso Colegial Moderno – 3ª Série



Fonte: Rocha e Barbosa (1970)

Composto por 338 páginas, o livro não apresenta índice, porém, é dividido por capítulos conforme segue:

Primeira Parte

Capítulo I – Regras de Contagem

Regra da soma; Regra do produto e Árvore de possibilidades.

Capítulo II – Probabilidades

Espaço amostral – probabilístico; Probabilidade condicional e Árvore de probabilidades.

Capítulo III – Fórmulas do Cálculo Combinatório

Capítulo IV – Expansão Binomial

Binômio de Newton e Expansão por recorrência.

Segunda Parte – Geometria Analítica

Capítulo V – Elementos

Capítulo VI – Reta

Formas; Ângulo de duas retas e Distância de um ponto a uma reta.

Capítulo VII – Transformações Geométricas

Translação; Simetria; Rotação e Homotetia.

Capítulo VIII

Circunferência; Parábola; Elipse e Hipérbole.

Terceira Parte – Estruturas Algébricas e Números Complexos

Capítulo IX – Estruturas Algébricas

Introdução; Operações binárias e Principais estruturas algébricas.

Capítulo X – Números Reais e Complexos

O corpo dos números reais e O corpo dos números complexos.

Quarta Parte – Noções de Cálculo Infinitesimal

Capítulo XI – Noções de Cálculo Infinitesimal

Capítulo XII – Noções sobre Derivadas

Quinta Parte – Polinômios – Equações Algébricas

Capítulo XIII – Polinômios

Seqüências quase nulas e polinômios; Forma potencial dos polinômios; Divisibilidade de polinômios; Divisão de polinômios e Máximo divisor comum.

Capítulo XIV – Função Polinômio

Conceitos e propriedades gerais e Divisão por $x-a$.

Capítulo XV – Equações Algébricas

Elementos sobre equações algébricas; Raízes complexas de uma equação; Pesquisa de raízes racionais; Pesquisa de raízes reais e Aproximação das raízes. (ROCHA; BARBOSA, 1970)

Quando comparamos essa coleção com os assuntos mínimos propostos pelo GEEM, percebemos que os autores contemplaram todos os conteúdos sugeridos e ainda apresentaram acréscimos para além dos sugeridos no programa. A sugestão do GEEM estava inspirada nos ideais do MMM, temos, assim, a confirmação de que o Curso Colegial Moderno demonstra ser um bom exemplo de livros didáticos com tendências modernizadoras. Quanto à geometria, em referência à coleção anterior, os conteúdos de transformações geométricas retornaram, bem como o acréscimo de alguns conteúdos de geometria analítica. Na forma de apresentação, não foi notada diferença, mantendo a exposição clássica dos conteúdos: definições - postulados - teoremas - demonstrações - exercícios (com as respostas finais), porém com uma presença marcante da linguagem de conjuntos.

A coleção “Matemática 2º Grau” foi publicada pela Editora Atual, e conta com sete autores: Gelson Iezzi (Engenheiro Metalúrgico pela Escola

A coleção de Iezzi et al não me causou muitos estranhamentos, pois já havia trabalhado nas turmas de Geometria Plana e Espacial da Licenciatura com os volumes 9 e 10 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar dos mesmos autores, sendo que elas me pareceram semelhantes.

Politécnica da USP e Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP e autor de vários livros didáticos); Osvaldo Dolce (Engenheiro Civil pela Escola Politécnica da USP e Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP e autor de vários livros didáticos); José Carlos Teixeira; Nilson José Machado (Licenciado em Matemática e Doutor em Filosofia da Educação pela USP, professor da USP e autor de outros livros); Márcio Cintra Goulart; Luiz Roberto da Silveira Castro e Antônio dos Santos Machado (QUEIROZ; ZUIN, 2018, p. 58-59).

O volume um, destinado à primeira série do 2º Grau, trata-se da 4ª edição revisada publicada no ano de 1976. Possui capa simples e dimensões 15,5x21 cm. No prefácio, os autores tecem algumas considerações sobre a coleção

Ensinar Matemática tem sido freqüentemente uma tarefa difícil; às dificuldades intrínsecas somam-se os problemas causados por uma visão distorcida da matéria, estabelecida desde os primeiros contatos.

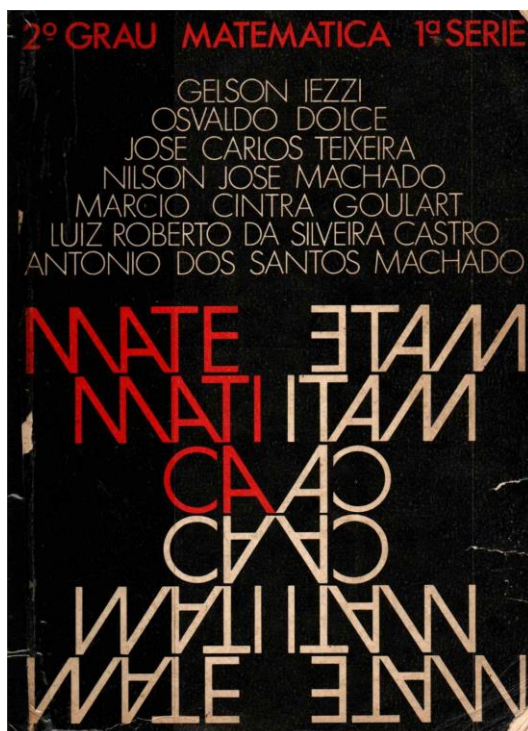
Os programas estabelecem o que deve ser ensinado; entretanto, o tratamento dispensado a cada assunto depende basicamente do enfoque dado à Matemática como um todo. Assim, enquanto alguns consideram que o conteúdo dos programas deve ser dissecado da forma mais completa, atual e elegante, outros acham mais importante a colocação oportuna dos assuntos, **de uma forma acessível a quem se dispõe a pensar, independentemente de ter ou não traquejo em lidar com símbolos.**

Ao escrever um livro para uma determinada população, necessita-se fazer uma escolha quanto ao tratamento a ser dado à matéria. Alunos do 2º grau que dominam todos os conceitos incluídos no programa do 1º grau e gostam de Matemática ou estão suficientemente motivados para ela existem, indubitavelmente. São muitos? Não acreditamos. Para afirmar isto, apoiamos na opinião de muitos colegas, professores secundários em colégios oficiais ou particulares. Procuramos ouvi-los através de um questionário e a colaboração que recebemos foi decisiva em muitos pontos. Decidimos escrever um livro acessível para o aluno normal do curso colegial, na maioria dos casos com deficiências de formação. Para atingirmos nossos objetivos **optamos por um tratamento onde a formalização, necessária, foi reduzida ao mínimo.** No desenvolvimento de cada assunto, procuramos chegar aos conceitos fundamentais através dos exemplos, muitas vezes não matemáticos, tentando tornar as definições as mais naturais possíveis. **Tivemos também a preocupação de apresentar sempre que possível, os vínculos da Matemática com outras ciências, notadamente a Física.** A teoria apresenta-se em doses nunca muito grandes, seguidas de exercícios que devem ser considerados parte integrante do texto. Procuramos apresentar exercícios resolvidos e propostos compatíveis com a teoria dada e o objetivo visado.

Disto tudo resultou nosso trabalho; entre o que tentamos fazer e o que realmente fizemos, certamente existem lacunas. As críticas dos colegas professores serão essenciais para a supressão de falhas e para nos aproximarmos mais e mais de uma realidade que queremos enfrentar. (IEZZI *et al.*, 1976a)

Parece haver, por parte dos autores, uma preocupação com o excesso de rigor e formalismo experienciado em livros didáticos anteriores e com questões relacionadas ao ensino. Assim, eles sugerem que seja utilizada uma linguagem acessível, privilegiando os exercícios e as aplicações que vão permeando os conteúdos.

Figura 20 – Capa do livro Matemática 2º grau – 1ª Série



Fonte: Iezzi *et al.* (1976a)

Destacamos a intenção dos autores em fazer livros acessíveis aos alunos e que contenham aplicações dos assuntos estudados a outras ciências. Transparecendo uma preocupação com a realidade dos alunos, e não apenas cumprir fidedignamente os conteúdos estabelecidos pelos programas. E isso nos traz à mente a escada, onde a impressão que fica é de que os programas (escadas) parecem não dar certeza a que lugar conduzem, ou as pessoas que ali acessam tal escada não tem noção para onde ir, e se vão conseguir subi-la. E a escola-escada tende ser bem semelhante, quando não aponta para seus fins, e, de outra forma, demarca apenas o imediatismo conteudista necessário para passar de ano, acumular algum conhecimento necessário às etapas seguintes, ser forma de acesso e transposição a outros níveis da escada com olhos focados ao prêmio final – o último degrau dessa escada-escola.

Composto por 327 páginas, o referido volume possui uma divisão interna por capítulos, conforme apresentado em seu índice:

1) Conjuntos

1. Introdução, 2. Conjunto - Elemento - Pertinência, 3. Determinação - Igualdade, 4. Universo - Unitário - Vazio, 5. Subconjuntos, 6. Complementar - Diferença, 7. Interseção - reunião, 8. Os símbolos da linguagem de conjuntos - resumo, 9. Considerações finais.

2) Números

1. Introdução - Naturais e inteiros, 2. Racionais, 3. Reais, 4. Ordenação dos reais, 5. Intervalos, 6. Módulo, 7. Considerações finais.

3) Relações e Funções

A. Noções básicas de Geometria Analítica. 1. Eixo e segmento orientado, 2. Abscissa de um ponto, 3. Medida algébrica, 4. Par ordenado, 5. Sistema cartesiano ortogonal, 6. Distância entre dois pontos, B. Relações. 7. Definição, 8. Domínio e imagem, 9. Produto cartesiano, 10. Gráficos de uma relação, C. Funções. 11. Preliminares, 12. Definição, 13. Notação, 14. Domínio, 15. Gráfico de uma função.

4) Função no 1º Grau

1. Introdução, 2. Função constante, 3. Função identidade, 4. Função linear, 5. Função afim, 6. Coeficientes da função $y=ax+b$, 7. Zero da função afim, 8. Função crescente e função decrescente, 9. Sinal da função afim, 10. Inequação produto e inequação quociente.

5) Função Quadrática

1. Conceito, 2. Gráfico, 3. Zeros, 4. Domínio e imagem, 5. Sinal, 6. Inequações do 2º grau, 7. Inequações redutíveis à quadrática, 8. Problemas máximos e de mínimos.

6) Função Modular

1. Função composta, 2. Função definida por várias sentenças, 3. Função modular, 4. Equações modulares, 5. Inequações modulares.

7) Função Exponencial

1. Potência com expoente inteiro, 2. Radicais, 3. Potência com expoente racional, 4. Potência com expoente irracional, 5. Potência com expoente real, 6. Equações exponenciais, 7. Comparação de potências com mesma base, 8. Função exponencial, 9. Gráfico da função exponencial, 10. Inequações exponenciais.

8) Função Logarítmica

1. Preliminares, 2. Definição, 3. Propriedades, 4. Sistemas de logaritmos, 5. Propriedades operatórias, 6. Mudança de base, 7. Funções inversíveis, 8. Função logarítmica, 9. Aplicações dos logaritmos.

9) Funções Circulares

A. Introdução à Trigonometria. 1. Noções fundamentais, 2. Seno, 3. Cosseno, 4. Relações entre o seno e o cosseno, 5. Tangente. 6. Considerações finais, B. As Funções Circulares. 7. Arcos e ângulos, 8. A função seno, 9. A função cosseno, 10. Propriedades das funções seno e cosseno, 11. A função tangente, 12. Outras funções trigonométricas, 13. Redução ao primeiro quadrante, C. Relações Fundamentais. 14. As cinco relações principais, 15. Relações decorrentes, 16. Identidade, D. Transformações Trigonométricas. 17. Fórmula de adição, 18. Consequências das fórmulas de adição, 19. Fórmulas de transformação em produto, E. Equações Trigonométricas. 20. Equação $\sin x=a$, 21. Equação $\cos x=a$, 22. Equação $\tan x=a$, 23. Equações redutíveis a uma equação do 2º grau (em $\sin x$, $\cos x$ ou $\tan x$), 24. Equação $a \sin x + b \cos x = c$, 25. Equações fatoráveis, 26. Observação, F. Inequações Trigonométricas, 27. Inequação: se $x > a$ ou $\sin x < a$, 28. Inequação: $\cos x > a$ ou $\cos x < a$, 29. Inequação: $\tan x > a$ ou $\tan x < a$, 30. Inequações que recaem nas anteriores, G. Funções Circulares Inversas. 31. Função arco-seno, 32. Função arco-cosseno, 33. Função arco-tangente,

H. Resolução de Triângulo, 34. Triângulos retângulos, 35. Triângulos quaisquer. (IEZZI *et al.*, 1976a)

O volume dois, destinado à segunda série do 2º Grau, possui as mesmas características do volume um: capa simples, dimensões 15,5x21 cm, 4ª edição revisada, publicação datada do ano de 1976. No prefácio, os autores apresentam o volume com as seguintes informações:

Este volume é a continuação do trabalho que começamos com o livro da 1ª série. Procuramos manter a mesma linha já utilizada: linguagem acessível, formalização reduzida ao mínimo necessário, exemplos introdutórios antes de cada conceito novo, vinculação da Matemática com outras Ciências e com a realidade vivida pelo aluno, teoria dividida em pequenas doses acompanhadas de exercícios que devem ser considerados parte integrante do texto. (IEZZI *et al.*, 1976b)

Figura 21 – Capa do livro Matemática 2º grau – 2ª Série



Fonte: Iezzi *et al.* (1976b)

Ainda no prefácio, os autores fazem algumas considerações sobre os assuntos tratados, dos quais destacamos aqueles destinados aos conteúdos de geometria no espaço.

A Geometria no Espaço encontra-se toda desenvolvida nos capítulos de 8 a 12. **Trata-se de um estudo intuitivo da Geometria Euclidiana.** Não achamos conveniente desenvolver este assunto de forma axiomática, fazendo dele um exemplo elementar de teoria matemática. Preferimos um caminho menos árido, sem muita preocupação nem com a ordem lógica nem em realizar todas as demonstrações, principalmente de propriedades evidentes com provas artificiosas. Esperamos, desta forma, que os colegas professores, apesar da extensão do programa e da exigüidade das aulas, consigam ter

tempo de tratar, ainda que parcialmente, de um assunto tão importante. (IEZZI *et al.*, 1976b)

Então, segundo os autores, o estudo sobre a geometria espacial se dará de modo intuitivo, transparecendo uma tendência dos autores, já evidenciada na coleção anterior, de abandonar ou flexibilizar o rigor e o formalismo matemático. Com 356 páginas, o livro é dividido em capítulos com a seguinte distribuição de conteúdo, exposto no índice.

1) Progressões

A. Progressões Aritméticas. 1. Conceitos, 2. Fórmula do termo geral. 3. Soma dos termos de P.A. finita, B. Progressões Geométricas. 4. Conceitos, 5. Fórmula do termo geral, 6. Soma dos termos de P.G. finita, 7. Soma dos termos de P.G. infinita, 8. Produto dos termos de P.G. finita.

2) Indução Finita

1. Introdução, 2. Princípio de indução finita, 3. Observações importantes.

3) Matrizes

1. Noção de matriz, 2. Representação, 3. Igualdade de matrizes, 4. Operações, 4.1 adição de matrizes, 4.2 multiplicação de número por matriz, 4.3 multiplicação de matrizes, 5. Matriz inversa.

4) Sistema Lineares

A. Conceitos Introdutórios. 1. Equações lineares, 2. Sistemas de equações lineares, 3. Sistemas homogêneos, B. Resolução de Sistemas Lineares. 4. Matriz associada a um sistema, 5. Sistemas e matrizes equivalentes, 6. Método da eliminação, 7. Transformações de matrizes, C. Classificação dos Sistemas Quanto ao Número de Soluções, D. Discussão de Sistemas Lineares, E. A Regra de Cramer. 8. Introdução, 9. Resolução de sistemas lineares 2×2 , 10. Cálculo de determinantes, 11. Regra de Cramer, 12. Aplicação em sistemas lineares homogêneos $n \times n$.

5) Combinatória

A. Aspectos Gerais do Problema da Contagem. 1. Introdução, 2. O Princípio Fundamental da Contagem, B. Combinações, Arranjos, Permutações. 3. Introdução, 4. Combinações, 5. Arranjos, 6. Permutações, 7. Resumo, 8. Conclusão, C. Cálculo Combinatório. 9. Introdução, 10. Cálculo de $A_{n,p}$, 11. Cálculo de P_n , 12. Cálculo de $C_{n,p}$, 13. Resumo, D. Complementos. 14. Combinações complementares, 15. Relação de Stifel, 16. Arranjos com repetição, 17. Permutações com elementos repetidos. E. Exercícios de Complementação.

6) Binômio de Newton

1. Produto de Stevin, 2. Fórmula do binômio de Newton, 3. Coeficientes binomiais, 4. Termo geral.

7) Probabilidades

A. Introdução. 1. Experimentos determinísticos e aleatórios, 2. Espaço amostral - Eventos, B. Probabilidades em um Espaço Amostral Finito. 3. Distribuição de probabilidades, 4. Cálculo de probabilidades, 5. Espaços equiprováveis, C. Complementos. 6. Probabilidade condicional, 7. Independência, D. Exercícios Complementares. 8. Exercícios resolvidos, 9. Exercícios propostos.

8) Introdução à Geometria Espacial

1. Noções e proposições iniciais, 2. Posições relativas de duas retas, 3. Determinação de planos, 4. Intersecção de planos.

9. Paralelismo e Perpendicularismo no Espaço

A. Definições e Consequências; Paralelismo de reta e plano, 2. Paralelismo de dois planos, 3. Perpendicularismo de reta e plano, 4.

Perpendicularismo de dois planos, B. Teoremas Fundamentais. 5. Paralelismo de reta e plano, 6. Paralelismo de dois planos, 7. Perpendicularismo de reta e plano, 8. Perpendicularismo de dois planos, C. Existências e Construções, D. Unicidade, E. Aplicações. 9. Projeção ortogonal, 10. Distâncias, 11. Ângulos.

10) Prisma e Pirâmide

A. Prisma. 1. Conceito e elementos, 2. Secção, 3. Superfícies, 4. Classificação, 5. Paralelepípedos, 6. Volume, B. Pirâmide. 7. Conceito e elementos, 8. Superfícies, 9. Classificação, 10. Secção transversal, 11. Volume, 12. Tronco.

11) Cilindro, Cone e Esfera

A. Cilindro. 1. Conceito e elementos, 2. Superfícies, 3. Classificação, 4. Secção, 5. Cilindro equilátero, 6. Áreas lateral e total, 7. Volume, B. Cone. 8. Conceito e elementos, 9. Superfícies, 10. Classificação, 11. Secção, 12. Cone equilátero, 13. Relações métricas, 14. Áreas e volumes, 15. Tronco de cone, C. Esfera. 16. Conceito, 17. Plano secante, 18. Polos, 19. Volume, 20. Áreas.

12) Poliedros

A. Diedros. 1. Conceito e elementos, 2. Secção, 3. Congruência, 4. Diedros adjacentes - bissetor, 5. Medida, B. Triedros. 6. Conceito e elementos, 7. Congruência, 8. Relações entre faces, C. Ângulos Poliédracos. 9. Conceito e elementos, 10. Congruência, 11. Relações entre as faces, D. Poliedros. 12. Poliedro convexo, 13. Relação de Euler, 14. Poliedros de Platão, 15. Poliedros regulares. (IEZZI *et al.*, 1976b)

No volume três, destinado à terceira série do 2º Grau, no que concerne à capa, dimensões, edição e publicação, seguem as mesmas características dos volumes um e dois. No prefácio, os autores destacam

Completamos com este volume o trabalho a que nos propusemos: escrever uma coleção de livros de Matemática para alunos do 2º grau, pensando também naqueles que não se encaminharão para um estudo superior de Matemática. Assim, na mesma linha dos volumes lançados anteriormente, a formalização foi reduzida ao mínimo necessário, a teoria foi desenvolvida em pequenas doses sempre acompanhadas de exercícios resolvidos e propostos, e mostramos, sempre que possível, aplicações práticas da matéria exposta. (IEZZI *et al.*, 1976c)

Ainda no prefácio, os autores fazem algumas considerações sobre os assuntos tratados no referido volume, do qual destacamos a parte correspondente à geometria analítica

Desenvolvemos a Geometria Analítica levando em conta que o aluno já teve contatos, embora esparsos, com o plano cartesiano, com gráficos e procuramos apenas organizar e aprofundar conhecimentos anteriores. Demos destaque aos estudos de retas e circunferências, porém limitamos as informações sobre cônicas que, de qualquer modo, teriam de ser incompletas. (IEZZI *et al.*, 1976c)

Figura 22– Capa do livro Matemática 2º grau – 3ª Série



Fonte: Iezzi et al. (1976c)

O volume é dividido em 11 capítulos nas 294 páginas que o compõe, conforme o índice são abordados os seguintes conteúdos:

1) O Ponto

1. Introdução, 2. Sistema cartesiano plano, 3. Propriedades, 4. Distância entre dois pontos, 5. Razão de seção, 6. Ponto divisor, 7. Ponto médio, 8. Baricentro de um triângulo, 9. Condição para o alinhamento de três pontos.

2) A Reta

1. Equação geral, 2. Interseção de retas, 3. Interseções com os eixos, 4. Equações paramétricas, 5. Coeficiente angular, 6. Condição de paralelismo, 7. Posições relativas, 8. Equação reduzida, 9. Equação de reta, dados um ponto e a direção, 10. Condição de perpendicularismo, 11. Ângulos de retas, 12. Distância entre ponto e reta, 13. Área do triângulo, 14. Bissetrizes, 15. Inequações do 1º grau.

3) A Circunferência

1. Equação da circunferência, 2. Reconhecimento de uma circunferência, 3. Posições relativas, 3.1 ponto e circunferência, 3.2 reta e circunferência, 3.3 duas circunferências, 4. Problemas de tangência.

4) As Cônicas

1. Elipse, 2. Hipérbole, 3. Parábola.

5) Polinômios

1. Conceitos preliminares, 1.1 função polinomial, 1.2 valor numérico de um polinômio, 1.3 grau de um polinômio, 2. Identidade de polinômios, 2.1 polinômio identicamente nulo, 3.1 adição, 3.2 multiplicação, 3.3 divisão, 4. Divisão de polinômios por binômios do 1º grau, 4.1 teorema do resto, 4.2 teorema de D'Alambert, 4.3 dispositivo prático de Briot-Ruffini.

6) Limites

1. Introdução, 2. Funções, 3. Limites, 4. Propriedades, 5. Continuidade de funções, 6. Limite trigonométrico fundamental, 7. Limites com $+\infty$ e $-\infty$, 8. Limite exponencial fundamental.

7) Derivadas

1. A derivada como uma taxa de variação, 2. Significado cinemático da derivada, 2.1 a velocidade como derivada, 2.2 a aceleração como derivada, 3. Significado geométrico da derivada, 4. A função derivada.

8) Regras de Derivação

1. Introdução, 2. Derivada de algumas funções elementares, 2.1 constante, 2.2 potência, 2.3 seno, 2.4 logarítmica, 3. Propriedades operatórias, 4. A derivada de uma função composta, 5. A derivada da função inversa, 6. Resumo, 7. Derivadas sucessivas.

9) Estudo da Variação das Funções

1. Introdução, 2. Crescimento e decrescimento, 3. Máximos e mínimos, 4. Observações.

10) Números Complexos

1. Introdução, 2. Conjunto dos números complexos, 3. Forma Algébrica, 4. Plano de Argand-Gauss, 4.1 módulo, 4.2 argumento, 4.3 forma trigonométrica, 5. Potenciação, 1a fórmula de Moivre, 6. Radiciação, 2a fórmula de Moivre, 7. Equações binômias e trinômias.

11) Equações Polinômias

1. Introdução, 2. Decomposição de um polinômio num produto de fatores do 1º grau, 3. Multiplicidade de uma raiz, 4. Raízes complexas, 5. Pesquisa de raízes racionais, 6. Relações entre raízes e coeficientes, 7. Raízes múltiplas.

(IEZZI *et al.*, 1976c)

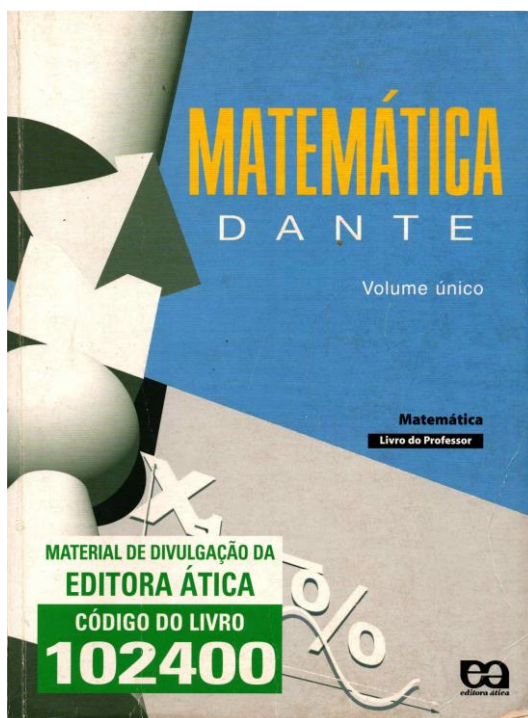
Percebemos nos índices dos três volumes que a geometria espacial é abordada no segundo volume e a geometria analítica no terceiro. Em comparação com a coleção anterior, identificamos que **os conteúdos de transformações geométricas não apareceram**. Na apresentação, principalmente dos conteúdos geométricos, permanece o modo clássico: Definição - Axiomas - Teoremas - Demonstrações - Exercícios. Uma diferença em relação às coleções anteriores é que esta contém exercícios resolvidos, em que os autores apresentam detalhes da resolução. Outro ponto a se destacar em relação às demonstrações é que os autores se valem da forma direta, identificando a hipótese e a tese a ser provada.

A coleção “Matemática”, de Luiz Roberto Dante, foi publicada em 2005 pela Editora Ática, e trata-se de volume único. Consta no catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio da disciplina Matemática que

A obra, apresentada em volume único, destaca-se pela abordagem inovadora dada aos conteúdos normalmente estudados no ensino médio. Há constante preocupação de dispô-los segundo um encadeamento lógico que privilegia a integração harmônica entre seus tópicos, não os esgotando em único capítulo, mas retomando-os sob distintas perspectivas em outros capítulos. A obra, contudo, não trata de limites nem derivadas. Os conteúdos apresentados em cada capítulo são invariavelmente iniciados com uma situação-problema contextualizada por fatos cotidianos ou interdisciplinares. Em seguida, desenvolve-se sistematicamente a teoria necessária à análise

daquela situação-problema, que é então aplicada para efetivamente fornecer a correspondente solução. [...] A articulação entre os conteúdos é levada a cabo de forma variada e permeia toda a obra. Nesse sentido, sobressaem-se a conexão entre os grandes campos temáticos, a comparação entre o conhecimento novo e o já abordado, a retomada de conceitos e procedimentos seguidos de aprofundamento e a valorização da interdisciplinaridade. (BRASIL, 2008, p. 56-57)

Figura 23 – Capa do livro Matemática – Volume Único



Fonte: Dante (2005)

De modo geral, o autor apresenta algumas definições, enuncia os teoremas, em alguns casos, demonstra-os, quando necessário, se apropria de algum axioma e propõe exercícios. Semelhante à coleção anterior, esta também contém exercícios resolvidos. Tem-se, ainda, segundo o catálogo, que

Também já tinha uma certa familiaridade com o livro do Dante, pois nos últimos anos em que atuei como professora da Educação Básica, trabalhei com a coleção “Matemática Contexto & Aplicações” de 3 volumes, publicada em 2011. A proximidade do período de publicação e o fato de terem o mesmo autor, tornam essas duas coleções muito semelhantes. Mesmo não querendo, no fim, acredito que a coleção do Dante e do Iezzi et al serão como uma espécie de régua de comparação, tudo que se afastar do que ali está apresentado, certamente me causará um estranhamento.

Cada capítulo é organizado em seções, sendo a primeira invariavelmente iniciada por uma situação-problema, contextualizada mediante situações cotidianas ou interdisciplinares. Os tópicos referentes a cada capítulo são desenvolvidos nas seções subsequentes, as quais contêm os boxes “Para refletir”, “Desafio em dupla” e “Desafio em equipe”, e seguidos de

problemas propostos. Geralmente, cada capítulo é finalizado com a seção “Leitura”. (BRASIL, 2008, p. 57)

Percebemos uma grande ênfase dada aos problemas, pois, neste exemplar, no final do livro, além de conter as respostas dos exercícios propostos, também há uma seção de questões do ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio. Se compararmos com as coleções anteriores, notamos que, na primeira obra analisada, há poucos exercícios, enquanto em períodos posteriores, as obras são editadas com um incremento considerável de exercícios. Ainda é importante ressaltar que foram notadas alterações nos tipos de problemas.

O livro possui capa simples, dimensões 20x27,5 cm. O exemplar acessado tratava-se do livro do professor, portanto dividido em duas partes: Livro do Aluno e Manual do Professor. A parte correspondente ao aluno é composta por 504 páginas, dividida em 8 unidades, cada uma, segundo o sumário, contempla os seguintes conteúdos:

Unidade 1) Álgebra (I)

1. Conjuntos e conjuntos numéricos; 2. Funções; 3. Função afim; 4. Função quadrática; 5. Função modular; 6. Função exponencial; 7. Logaritmo e função logarítmica; 8. Progressões.

Unidade 2) Geometria Plana

9. Propriedades de figuras geométricas; 10. Semelhança de triângulos; 11. Relações métricas no triângulo retângulo; 12. Polígonos regulares inscritos na circunferência e comprimento da circunferência; 13. Áreas: medidas de superfície.

Unidade 3) Trigonometria

14. Trigonometria no triângulo retângulo; 15. Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer; 16. Conceitos trigonométricos básicos; 17. Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica; 18. Relações e equações trigonométricas; 19. Transformações trigonométricas; 20. Senóides e fenômenos periódicos.

Unidade 4) Álgebra (II)

21. Matrizes; 22. Determinantes; 23. Sistemas lineares; 24. Análise combinatória; 25. Probabilidade.

Unidade 5) Estatística e Matemática Financeira

26. Noções básicas de Estatística; 27. Noções de Matemática Financeira.

Unidade 6) Geometria Espacial: de posição e métrica

28. Geometria Espacial de posição - uma introdução intuitiva; 29. Poliedros: prismas e pirâmides; 30. Corpos redondos: cilindro, cone e esfera.

Unidade 7) Geometria Analítica

31. Geometria Analítica: ponto e reta; 32. Geometria Analítica: circunferência; 33. Geometria Analítica: seções cônicas.

Unidade 8) Álgebra (III)

34. Números complexos; 35. Polinômios e equações algébricas. (DANTE, 2005, p. 4-8)

De imediato, chamou-nos a atenção o fato de o autor trazer conteúdos referentes à geometria plana, pois, nas coleções dos períodos anteriores, entre as que estamos analisando,

esses conteúdos não são abordados. Logo no início do capítulo 9, sobre propriedades de figuras geométricas, o autor alerta que o aluno já estudou as noções básicas de Geometria Plana, e, portanto, esse capítulo será destinado para recordar este estudo por meio de resolução de exercícios e problemas. Essas considerações nos levam a acreditar que tais conteúdos deveriam constar somente na etapa anterior ao Ensino Médio (ou etapa equivalente). No entanto, outros conteúdos da geometria no plano, que não aparecem nesta coleção, são apresentados nas anteriores, porém, apesar de estarem dentro do bloco da geometria, possuem intersecção com a álgebra, entre os quais: Transformações de Figuras, que são discutidas nas demais coleções, com exceção da obra de Quintella, e as Relações Métricas, que aparecem na obra de Roxo *et al.*

Nessa análise preliminar das obras, percebem-se dessemelhanças nos conteúdos abordados, seja na quantidade, ordem e/ou na forma de apresentação. Essas diferenças ora são ditadas pelas normas gerais existentes, às quais deveriam estar enquadrados os livros, ora por tendências educacionais ou por preferência dos seus autores.

Conhecidas algumas características de cada coleção, bem como a adequação ou não às prescrições normativas quanto aos programas da disciplina Matemática e as tendências educacionais, colocamo-nos em um movimento de pensar o que essas semelhanças e dessemelhanças já nos dizem. Assim, sintetizamos algumas comparações entre as obras, sendo que a primeira versa a respeito dos conteúdos abordados em cada uma delas.

Quadro 8 – Conteúdos de geometria no plano presentes nos livros analisados

Conteúdos	Lima (1938)	Roxo <i>et al</i> (1944a, 1944b, 1945)	Quintella (1957, 1958, 1960)	Rocha <i>et al</i> (1967, 1968, 1970)	Iezziet <i>al</i> (1976a, 1976b, 1976c)	Dante (2005)
Propriedades de figuras geométricas						
Semelhança de triângulos						
Relações métricas no triângulo retângulo						
Polígonos regulares inscrito na circunferência						
Áreas						
Teorema de Stewart e suas aplicações no cálculo das linhas notáveis do triângulo						

Conteúdos	Lima (1938)	Roxo <i>et al</i> (1944a, 1944b, 1945)	Quintella (1957, 1958, 1960)	Rocha <i>et al</i> (1967, 1968, 1970)	Iezziet <i>al</i> (1976a, 1976b, 1976c)	Dante (2005)
Relações métricas nos quadriláteros						
Relações métricas nos polígonos regulares						
Potência de um ponto, eixos radicais, planos radicais						
Polo e Polar						
Relação anarmônica						
Homografia						
Involução						
Deslocamentos						
Translação						
Rotação						
Simetria						
Homotetia						
Semelhança						
Inversão por meio de vetores recíprocos						
Segmentos orientados - vetores						
Produto escalar de vetores						
Elipse						
Hipérbole						
Parábola						
Seções cônicas						
Hélice Cilíndricas						

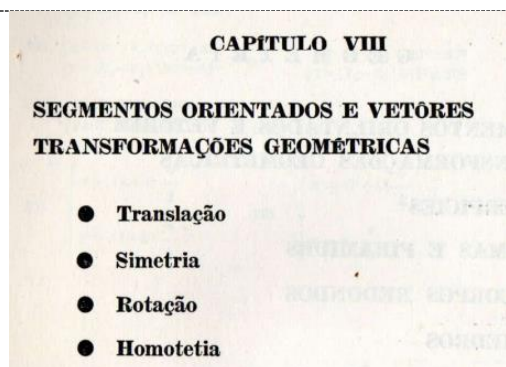
Fonte: Elaborado pela autora

Podemos observar, no Quadro 8, que os conteúdos de **geometria no plano** apresentam muitas variações, pois os que são abordados no livro de Dante (2005) não se faziam presentes nos livros das décadas anteriores, assim como a proposta de Iezzi *et al.* (1976a; 1976b; 1976c) que não abarca nenhum dos conteúdos apresentados pelos outros autores. Podemos ainda ver algumas semelhanças entre as obras de Lima (1938) e Roxo *et al.* (1945; 1944a; 1944b). Seria, então, a geometria plana do ensino médio diferente da geometria plana dos seus antecessores?

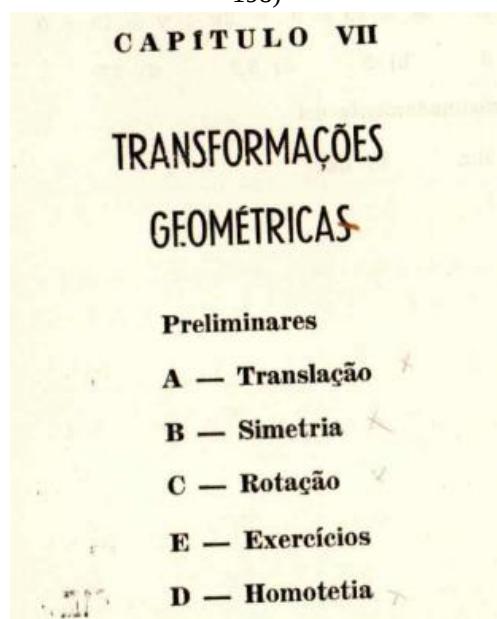
Outro fator que nos chamou a atenção foi com relação ao conteúdo de Transformações de Figuras ou Transformações Geométricas. A geometria foi um dos alvos do MMM, em que se recomendava que ela deveria ser ensinada por outras abordagens, e não mais baseada no modelo clássico de Euclides. Uma das sugestões foi a de ensinar a geometria por meio das transformações geométricas, pois “o estudo da geometria, via transformações geométricas, é uma abordagem que possibilita o tratamento da geometria pelas estruturas algébricas,

consideradas pelo MMM como elemento unificador da Matemática” (DUARTE; SILVA, 2006, p. 90).

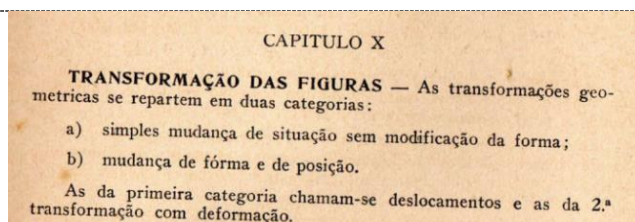
No entanto, podemos observar, no Quadro 8, que os conteúdos de Transformações Geométricas já se faziam presentes nas obras de Lima (1938) e Roxo *et al.* (1945; 1944a; 1944b), mas não aparecem na década seguinte na obra de Quintella (1960; 1957; 1958), assim como não aparecem nos programas mínimos da década de 1950. Já no período que coincide com a efervescência do MMM, eles tornam a aparecer na obra de Rocha, Barbosa e Pierro Neto (1967; 1968) e Rocha e Barbosa (1970). Assim, perguntamo-nos se essa ênfase dada às transformações geométricas pelo MMM seria no sentido de retomar o seu ensino nesta última etapa da educação básica ou seria para inserir seu ensino nas etapas anteriores? Ou, ainda, seria no sentido de mudar a sua abordagem por meio dos estudos matriciais?



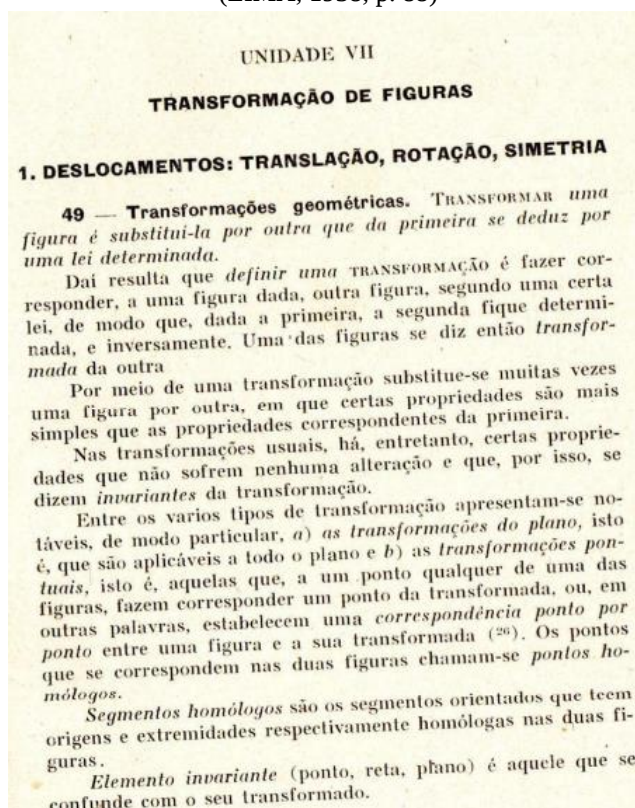
(ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1968, p. 198)



(ROCHA; BARBOSA, 1970, p. 110)



(LIMA, 1938, p. 88)



(ROXO *et al.*, 1944a, p. 315)

Há conteúdos, ou parte deles, que deixaram de compor os programas da disciplina Matemática do Ensino Médio, passando, provavelmente, a fazer parte do nível Superior. É possível que tais distinções de assuntos abordados nestas obras em décadas do século passado, sejam implicações do modelo educacional imprimido pelas políticas das épocas às quais pertencem as obras.

Quadro 9 – Conteúdos de **geometria no espaço** presentes nos livros analisados

Conteúdos	Lima (1938)	Roxo <i>et al</i> (1944a, 1944b, 1945)	Quintella (1957, 1958, 1960)	Rocha <i>et al</i> (1967, 1968, 1970)	Iezziet <i>al</i> (1976a, 1976b, 1976c)	Dante (2005)
Conceitos primitivos e axiomas						
Interseções e Inclusões						
Determinação de um plano						
Posições relativas de ponto, reta e plano no espaço						
Paralelismo no espaço						
Perpendicularidade no espaço						
Projeções sobre um plano						
Distâncias						
Diedros						
Triedros						
Poliedros						
Prismas						
Pirâmides						
Superfícies						
Cilindro						
Cone						
Esfera						

Fonte: Elaborado pela autora

Quando olhamos para os conteúdos de Geometria no Espaço, parece existir uma uniformidade maior nas obras das diferentes épocas e autores. Esse aspecto se torna evidente a partir de 1944, visto que, no livro de Lima (1938), esses conteúdos não são contemplados. Outro destaque são os conteúdos de interseções e inclusões, relacionados à teoria dos conjuntos, que começam a fazer parte da geometria, por influência do MMM, e passam a ser contemplados, em especial, na obra de Rocha, Barbosa e Pierro Neto (1967; 1968) e Rocha e Barbosa (1970), que dedica uma seção a respeito dentro do capítulo de Introdução à Geometria no Espaço.

157. Interseções e Inclusões

Usando a sua intuição do espaço ou construindo figuras, é muito fácil obter todas relações de igualdade, de inclusão e os conjuntos interseções de dois conjuntos x e y que sejam: duas retas, dois planos ou uma reta e um plano. Entretanto, vamos analisar os diversos casos, visando apresentar a *terminologia usual* na geometria, que nem sempre é a mesma da teoria dos conjuntos.

1.º) *Conjuntos iguais*. Se os símbolos a e b ou α e β representam a mesma reta ou (respectivamente) o mesmo plano, isto é, se

$$a = b \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta$$

dizemos que a e b são *retas coincidentes* ou que α e β são *planos coincidentes*.

2.º) *Inclusão estrita* — Se uma reta r é sub-conjunto de um plano α , indicamos:

$$r \subset \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha \supset r$$

e dizemos que a *reta está contida* no plano ou que o *plano contém a reta*.

3.º) *Interseção conjunto unitário* — Se a interseção de duas retas r e s ou de uma reta r com um plano α é um conjunto unitário P , escrevemos:

$$r \cap s = \{P\} \quad \text{ou} \quad r \cap \alpha = \{P\}$$

e dizemos que as duas retas são *concorrentes* ou que a reta e o plano são *concorrentes*.

4.º) *Interseção-conjunto vazio* — Se a interseção de dois planos α e β ou de uma reta r com um plano α é o conjunto vazio, indicamos:

$$r \cap \alpha = \emptyset \quad \text{ou} \quad \alpha \cap \beta = \emptyset$$

e dizemos que os dois planos são *paralelos* ou que a reta e o plano são *paralelos*.

Usamos também as notações respectivas:

$$\alpha // \beta \quad \text{ou} \quad r // \alpha$$

Para duas retas r e s , temos dois casos:

(1) $r \cap s = \emptyset$ e existe um plano α que contém ambas as retas: dizemos que as retas são *paralelas* e indicamos:

$$r // s$$

(2) $r \cap s = \emptyset$ mas não existe nenhum plano que contém ambas as retas: dizemos que as retas são *reversas* (entre si) e indicamos:

$$r \nparallel s$$

5.º) *Interseção não vazia de planos distintos* — Se dois planos distintos α e β não são paralelos, você verifica que a interseção deles é uma reta s . Esta propriedade pode ser demonstrada, usando os axiomas. Entretanto, nós vamos apenas enunciar-la corretamente e sugerir que você, num segundo estudo mais completo da geometria, procure a demonstração nos tratados que visam ao estudante de nível mais avançado.

(ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1967, p. 226-227)

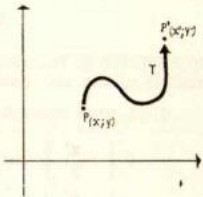
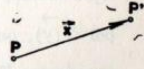
Outras mudanças podem ser verificadas na obra de Dante (2005), em que os conteúdos Diedros, Triedros e de Superfícies ficam de fora da referida edição.

Quadro 10 – Conteúdos de **geometria analítica** presentes nos livros analisados

Conteúdos	Lima (1938)	Roxo et al (1944a, 1944b, 1945)	Quintella (1957, 1958, 1960)	Rocha et al (1967, 1968, 1970)	Iezzi et al (1976a, 1976b, 1976c)	Dante (2005)
Concepção de Descartes						
Coordenadas retilíneas						
Coordenadas polares no plano						
Transformação de coordenadas no plano						
Lugares Geométricos						
Linha reta no plano						
Equação da circunferência						
Cônicas (elipse, hipérbole e parábola)						
Determinação de uma direção. Ângulo de duas direções						
Distância de dois pontos						
Translação						
Simetrias						
Rotação						
Homotetia						
Relação de um lugar transformado						

Fonte: Elaborado pela autora

Em relação aos conteúdos de geometria analítica, percebemos, na obra de Quintela (1957; 1958; 1960), em conformidade com os “programas mínimos” expedidos pelas Portarias n. 966 e n. 1.045, de 02 de outubro de 1951 e 14 de dezembro de 1951, uma menor ênfase sobre tal assunto, diferentemente dos demais autores. Outro fator que nos chamou a atenção foram os conteúdos de transformações geométricas, que anteriormente haviam sido abordados na geometria no plano, agora aparecem novamente na geometria analítica, isso na obra de Rocha, Barbosa e Pierro Neto (1967; 1968) e Rocha e Barbosa (1970), período que estava em evidência o MMM. Já em relação aos demais conteúdos e períodos, não há variações significativas, apenas os conteúdos de coordenadas polares que deixam de aparecer a partir da década de 1950.

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS 69. Preliminares: Consideremos um ponto P dado por suas coordenadas cartesianas x e y, e, seja P' de coordenadas x' e y' imagem de P por uma aplicação T. Diremos que P' é o transformado de P pela transformação T, e indicaremos: $P' = T(P)$  Fig. 32 Se consideramos uma outra transformação R que leve P' em P'', a transformação S que leve P em P'', é chamada produto de R por S e indicaremos: $S(P) = [RT](P) = R[T(P)] = R[P'] = P''$ Entre as transformações algumas recebem nomes especiais em vista de suas propriedades: a) Uma transformação T é identidade, se e somente se: $T(P) = P \text{ para qualquer ponto}$ Costuma-se indicar com I. b) Uma transformação R é inversa da transformação bijectora T, se somente se: $T(P) = P' \iff R(P') = P$ (ROCHA; BARBOSA, 1970, p. 111)	B. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS Uma lei que associa a cada ponto P do espaço E^3 univocamente um ponto P' é uma <i>aplicação</i>, que denominamos <i>transformação geométrica</i>. 1. TRANSLAÇÃO 97. Definição Dado um vetor $\vec{x}$, fica determinada uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de E^3 o ponto P' tal que $\vec{PP'}$ é um representante de $\vec{x}$. Essa transformação é uma translação. Indica-se a translação por T ou $T(\vec{x})$ ou $T(P, \vec{x})$ ou $T(P)$ e toda a transformação por: $T(\vec{x}): P \longrightarrow P' \text{ t.q. } \vec{PP'} \in \vec{x}$  Fig. 45 Cada vetor $\vec{x}$ define uma translação, que é: <i>aplicação</i> — pois cada ponto tem uma única imagem $P' = T(P)$. <i>injeção</i> de E^3 em E^3 — pois pontos distintos têm imagens distintas: $T(A) \neq T(B) \iff A \neq B$. <i>sobrejeção</i> de E^3 em E^3 — pois cada ponto do espaço é imagem de um ponto de E^3. O domínio é E^3 e este é também o contra-domínio $T(E^3)$. <i>bijectão</i> de E^3 em E^3 — por ser injeção e sobrejeção. (ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1968, p. 203)
---	---

No Quadro 11, colocamo-nos em outro movimento de comparação, em que olhamos para a totalidade de páginas de cada livro e buscamos elencar tanto a quantidade quanto o percentual destas destinados a cada segmento da geometria. E, dessa maneira, comparar a presença da geometria em relação aos demais ramos da matemática (aritmética, álgebra e trigonometria).

Quadro 11 – Quantitativo de páginas destinado aos conteúdos de Geometria

Coleção	Total de páginas da Coleção	Geometria no Plano		Geometria no Espaço		Geometria Analítica		Total %
		n. p.	%	n. p.	%	n. p.	%	
Lima (1938)	375	27	7,2	0	0	42	11,2	18,4
Roxo <i>et al.</i> (1945; 1944a; 1944b)	1425	198	13,9	230	16,1	87	6,1	36,1
Quintela (1957; 1958; 1960)	676	34	5,0	150	22,2	32	4,7	31,9
Rocha, Barbosa e Pierro Neto (1967; 1968) e Rocha e Barbosa (1970)	909	20	2,2	126	13,9	90	9,9	26,0
Iezzi <i>et al.</i> (1976a; 1976b; 1976c)	970	0	0	155	16,0	108	11,1	27,1
Dante (2005)	504	33	6,5	53	10,5	41	8,1	25,1

Fonte: Elaborado pela autora

No geral, podemos observar que a geometria tem uma presença significativa nos livros de matemática do Ensino Médio (e equivalentes), conforme transparece no Quadro 11, pois a menor porcentagem constatada foi de 18,4% das páginas da obra de Lima (1938), destinadas aos segmentos da geometria. Já o maior percentual, 36,1%, aparece nas páginas da obra de Roxo *et al.* (1945; 1944a; 1944b). O que ocorreu foi a variação na preferência desses segmentos. Alguns casos tiveram obras que não contemplaram pelo menos um deles. Como podemos ver na obra de Lima (1938), em que não se têm conteúdos de geometria no espaço e se apresenta o maior percentual de páginas destinadas à geometria analítica. Ou, ainda, na coleção de Iezzi *et al.* (1976a; 1976b; 1976c), em que não aparecem conteúdos de geometria no plano, e uma ênfase maior é dada a geometria no espaço.

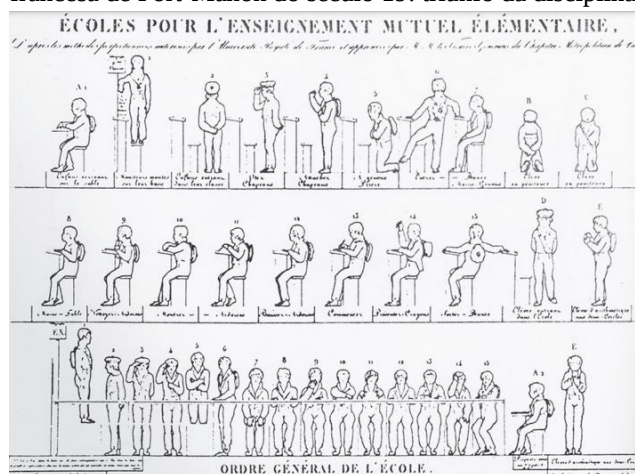
E foi naquele momento, após o primeiro dia de efetivo exercício de minha nobre profissão que decidi: dedicar-me-ia somente a aparar os pelos daqueles incapazes de fazê-lo de forma precisa e adequada. Nos primeiros meses houve escassez de clientela, afinal, o fato de ter que assumir que não se conseguia aparar os próprios pelos, a própria barba, era algo impensável naquele meio em que aparadores de pelo eram tão inexperientes ou mesmo inexistentes. Sim, sou muito experiente – e quem duvidar disto, que pegue sua navalha e tente deixar mais liso que minhas hábeis mãos! (GOMES, 2018, p. 36)

O que faz uma escola? O que faz uma instituição de **Educação Básica**? O mito da escola ideal não acha consenso nem mesmo entre os próprios educadores. Alguns defendem uma escola liberal, sem interferências (escola sem partido?), outras beiram o anarquismo, uma autogestão onde toda forma de poder central deve deixar de existir. Há quem defenda o rigor, a dureza e a obediência crassa, a docilização das mentes e dos corpos. Há, ainda, é claro, os da coluna do meio, que titubeiam entre as anteriores.

O rigor, no entanto, parece estar presente na maioria das escolas, seja quanto aos horários de entrada e saída, seja dos espaços que os alunos podem ou não frequentar, seja no desenvolvimento do trabalho, dos conteúdos, daquilo que é ou não possível (desejável) de ser escrito em uma prova.

O Brasil foi oficialmente católico até o ano de 1889 e é, ainda

Figura 24 - Esquema de postura corporal da escola francesa de Port-Mahon do século 19: triunfo da disciplina.



Fonte: (FOUCAULT, 2002)

hoje, um dos países com maior número de católicos no mundo e com um percentual crescente de evangélicos. A religiosidade se fundamenta também em critérios de rigor: os dez mandamentos, aqueles que podem ou não falar, aqueles que podem ou não acessar o reino dos céus. E a igreja sempre teve um lugar de relativa importância na educação. Em tempos idos, era ela que detinha a educação sob suas normas e preceitos. Os nobres, ou aqueles que buscavam as ordens religiosas, recebiam educação, os demais ficavam à mercê. Isso se torna evidente com as reformas religiosas no decorrer da história, em que a educação esteve sempre presente nos atos reformatórios de seus idealizadores. No Brasil um fato importante ocorre no início dos anos de 1930, quando, diante de um novo modelo de governo, a igreja tenta manter ou até mesmo alargar sua influência na educação. Havia um intenso e quase inflexivo (rigoroso?) debate entre governo, educadores, proprietários de escolas particulares e igreja na reformulação das bases para educação.

Ao abordarmos a questão do rigor escolar, é imprescindível lembrar que, entre as diversas disciplinas escolares, talvez a mais exigente, rigorosa, e até impiedosa seja a matemática, não apenas pela suposta aura que a envolve, mas por ela impor maior disciplina,

concentração e, sobretudo, pela necessidade infundida por ela própria em provar os resultados (rigorosos, provados por A+B). Essa aparência pode assustar, servindo de catalisador na propagação da propensa ideia de que os conceitos matemáticos são difíceis e que os profissionais da área são apresentados como antipáticos, rígidos e pragmáticos. Factível ou não, este parece ser um dos fatores que impacta diretamente na maneira como o aluno chega à sala de aula, recorrente a cada ano, e talvez seja um balizador para algumas dificuldades no andamento das aulas e das séries subsequentes. Seriam nossos alunos da

Educação Básica pequenos matemáticos que, desde muito cedo, precisam entrar em contato com a forma lógica de demonstração e com uma linguagem pura e universal, não passível de equívocos?

“Na literatura específica em educação Matemática, prova ou demonstração vêm sempre adjetivadas: são, assim, “rigorosas”. A necessidade ou não de uma tal adjetivação dependerá, em muito, dos aspectos que focamos: para uns – principalmente os matemáticos chamados “puros” –, uma prova é, já, prova rigorosa. Para outros, o rigor estabeleceria, entre as várias provas matemáticas possíveis, aquelas herdeiras diretas do programa estabelecido por Euclides, nOs Elementos, programa este plasmado numa concepção platônica, assegurado e elevado ao status de elemento essencial ao fazer matemático, principalmente pelo Formalismo que intervém, com maior familiaridade do que qualquer outra escola, no fazer cotidiano da sala de aula e no da própria Matemática.”
(GARNICA, 1996, p. 10)

“Agora, se a demonstração é um modelo, o que tem que contar é o que vale como reprodução correta da demonstração. Se na demonstração aparece, por exemplo, o sinal ‘|||||’, então não está claro se deve valer como a sua reprodução só um grupo ‘equinúmero’ de traços (ou, por exemplo, de cruzezinhas), ou vale também um outro número se não for muito pequeno. Etc. Todavia, a questão é sobre o que vale como critério de reprodução da demonstração, – de identidade da demonstração. Como devem ser comparadas para se estabelecer sua identidade? Elas são iguais se parecem iguais?” (WITTGENSTEIN, 2022, p. 212)

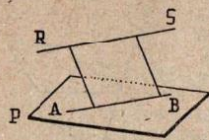
Tal proposição parece pairar como uma névoa ou nuvem de chuva sobre nossas escolas com maior ou menor intensidade em diferentes momentos. Se olharmos para os livros que compõem nosso acervo, poderíamos nos perguntar, por exemplo: que tipos de provas são apresentadas? Elas são rigorosas? Se olhássemos para o mesmo teorema em diferentes livros, de diferentes épocas, será que as provas são as mesmas em todos eles? São todas igualmente rigorosas? Seria o conceito de rigor não rigoroso?

Vejamos este teorema da geometria que estabelece as condições para que uma reta, não contida em um plano, seja paralela a ele.

14 — Condição de paralelismo de uma reta a um plano.
Para que uma reta seja paralela a um plano é necessário e suficiente que ela seja paralela a uma reta do plano.

Esse enunciado equivale ao seguinte: Para que um plano seja paralelo a uma reta, é necessário e suficiente que ele contenha uma paralela à reta.

1.º A condição é suficiente: toda paralela a uma reta de um plano é paralela a esse plano.



Seja RS uma reta paralela à reta AB do plano P . As retas RS e AB determinam um plano, cuja interseção com P é AB . Ora, a reta RS não poderia encontrar o plano P sem encontrar AB , contrariamente à hipótese. Logo RS é paralela ao plano P .

O enunciado desta proposição equivale ao seguinte: Se duas retas são paralelas, todo plano, que passa por uma delas, é paralelo à outra.

2.º A condição é necessária: todo plano paralelo a uma reta contém a paralela traçada, a essa reta, por um qualquer de seus pontos.

Referindo-nos à mesma figura, seja AB paralela a RS e traçada por um ponto A do plano P . Provemos que AB está contida no plano P . Seja AB' a interseção do plano RSA com o plano P : AB' é paralela a RS , porque estão no mesmo plano e não se poderiam encontrar sem que RS encontrasse o plano P , contrariamente à hipótese. Como por A não pode haver duas paralelas a RS , AB se confunde com AB' e, portanto, AB está contida no plano P .

(ROXO *et al.*, 1945, p. 271-272)

171. Teorema 5 — (Fundamental)

Uma reta não contida num plano é paralela ao plano SE E SOMENTE SE é paralela a uma reta do plano.

p : (relação principal) : $r // \alpha$

q : (condição) : Existem em α uma reta a tal que $r // a$.

1.ª parte — A condição q é necessária para a relação p , isto é:

$p \Rightarrow q$

Seja $r // \alpha$. Vamos escolher um ponto qualquer P em α e considerar o plano $\beta + pl.(P, r)$, que existe e é único pelo teorema 2.

Seja $a = \alpha \cap \beta$ a interseção dos dois planos (que existe e é única, pela Proposição no § B).

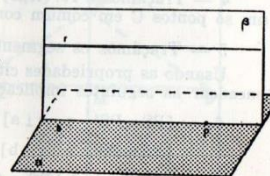


FIGURA 220

As retas r e a são paralelas, pois, se houvesse um ponto comum, ele pertenceria a r e α , o que é contraditório, pela hipótese ($r // \alpha$).

Portanto, $p \Rightarrow q$.

2.ª parte — (Suficiência da condição q):

$q \Rightarrow p$

Seja a reta de α tal que $r // a$, lembrando que r não está no plano.

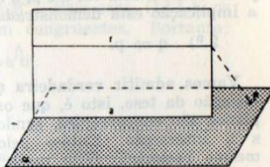


FIGURA 221

Uma reta do plano β só pode interceptar α num ponto pertencente à reta a .

Então, se admitirmos (por demonstração indireta) que r intercepta α , o ponto comum deverá estar em r e a , o que contradiz a hipótese ($r // a$).

Portanto: $r // \alpha$

e temos: $p \Rightarrow q$.

Concluimos, finalmente, que as proposições p e q são logicamente equivalentes:

$p \Leftrightarrow q$

(ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1967, p. 240-241)

Nesses dois livros didáticos, de autores e épocas diferentes, podemos ver uma característica comum em ambas as provas, que é o fato de os autores a dividirem em duas partes: **condição necessária** e **condição suficiente**. Porém, as semelhanças param por aí. Percebemos diferenças tanto na enunciação do teorema como no desenrolar da demonstração.

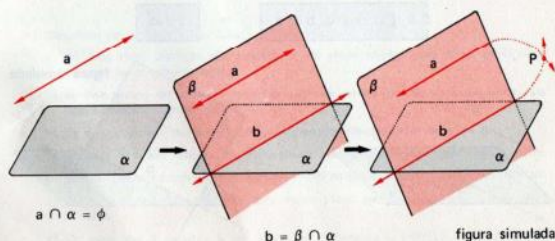
Na prova do segundo livro, os autores se utilizam de uma linguagem carregada de termos e símbolos da lógica matemática, além, é claro, dos símbolos da teoria dos conjuntos. Na primeira, vemos que os autores, inicialmente, demonstram a condição suficiente, para então demonstrar a condição necessária, o que, em termos lógicos, não teria relevância por se tratar de uma relação de equivalência lógica.

De outro lado, temos a obra de Quintella (1960) e Iezzi *et al.* (1976b):

5. PARALELISMO DE RETA E PLANO

[T - 1] Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

Hipótese $a \parallel \alpha$ $\Rightarrow$ Tese $\exists b \subset \alpha \mid a \parallel b$



Demonstração

Seja uma reta a paralela a um plano α ($a \cap \alpha = \phi$). Passemos por a um plano β que intercepta α numa reta b . Sendo $\beta \cap \alpha = b$, notemos que $b \subset \alpha$. As retas a e b estão em β e, portanto, são coplanares. ①

Se as retas a e b tivessem um ponto comum, este ponto pertenceria à reta a e ao plano α , o que é absurdo pois por hipótese $a \cap \alpha = \phi$. Logo, a e b não têm ponto comum. ②

De ① e ② vem que $a \parallel b$, isto é, existe uma reta $b \subset \alpha$, tal que, $a \parallel b$.

Observações

1) Em símbolos o [T - 1] pode ser escrito:

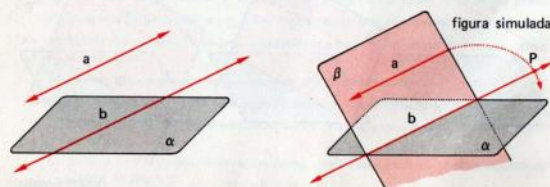
$$(a \parallel \alpha, a \subset \beta, b = \beta \cap \alpha) \Rightarrow a \parallel b$$

2) O método usado para se concluir que a e b não têm ponto comum é chamado *método indireto de demonstração* ou *método da redução a um absurdo*. Um absurdo é a negação de uma propriedade já aceita como verdadeira ou a negação da hipótese.

3) A representação (figura) de uma situação que recairá em um absurdo, é uma figura "fictícia", isto é, simulada.

[T - 2] Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

Hipótese $a \not\subset \alpha, a \parallel b, b \subset \alpha$ $\Rightarrow$ Tese $a \parallel \alpha$



Demonstração

Inicialmente notemos que a e b determinam um plano β e que $b = \alpha \cap \beta$. Provemos que $a \cap \alpha = \phi$ pelo *método indireto*.

Se a e α tivessem um ponto comum, este ponto pertenceria à reta a e à reta b , o que é absurdo contra a hipótese de $a \cap b = \phi$. Logo, a e α não têm ponto comum, ou seja, $a \parallel \alpha$.

Observação

Os teoremas [T - 1] e [T - 2] são teoremas recíprocos. Notemos que a hipótese de um é a tese do outro e vice-versa.

(IEZZI *et al.*, 1976b, p. 227-229)

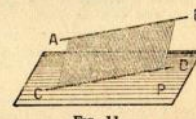
8. Reta e plano paralelos.

PRIMEIRO TEOREMA. A reta exterior a um plano e paralela a uma reta deste, é paralela ao plano.

Hip.: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ CD \text{ e } P \text{ são apostos} \end{cases}$ Tese: $AB \parallel P$.

Demonstração.

As paralelas AB e CD determinam um plano, cuja intersecção com o plano P é a reta CD (fig. 11). Assim, os pontos comuns aos dois planos estão todos situados sobre CD e, como AB não encontra CD em virtude da hipótese, também não pode encontrar o plano P .

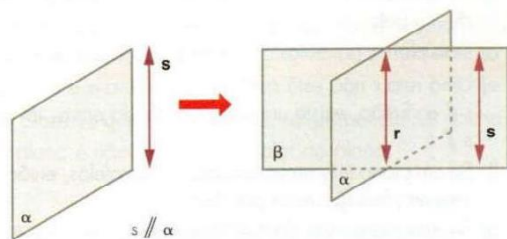


(QUINTELLA, 1960, p. 107)

Nestes dois outros livros, existe uma semelhança, pois os autores identificam qual a hipótese e a tese a ser provada, no entanto, o primeiro apresenta dois teoremas, e o segundo, apenas um. Nas demonstrações do teorema em comum, os autores usam do método indireto de demonstração ou método da redução ao absurdo, apesar de, no segundo, não fazer referência explícita a tal método, percebemos semelhanças entre as demonstrações.

2ª propriedade:

Quando uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a pelo menos uma reta desse plano.



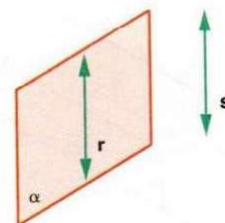
PARA REFLETIR

Todo plano β , que contém s e é secante com α , determina, em α , a reta r , paralela a s .

3ª propriedade:

A recíproca da afirmação anterior é também verdadeira.

Quando uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, ela é paralela ao plano.



(DANTE, 2005, p. 349-350)

Neste último livro, vemos também dois teoremas, com a enunciação muito semelhante ao do Iezzi *et al* (1976b), porém o autor não faz a demonstração deles, apenas a ilustração.

Nem sempre a geometria teve este modelo axiomático-dedutivo. Segundo Greenberg (1994, p. 6-8), a geometria da Antiguidade consistia em um conjunto de procedimentos práticos que, entre os meios utilizados para o seu desenvolvimento, estavam a observação de analogias, a adivinhação, a intuição, e a experimentação, apontando, assim, desdobramentos práticos à matemática. Decorria disso que os resultados eram mais empíricos e práticos, evidenciando quase que sempre respostas aproximadas, aceitáveis por todos, tendo como exemplo disso a geometria egípcia, que consistia num conjunto de regras para cálculo sem qualquer justificação. Posteriormente, na Grécia teriam os matemáticos buscado um formato mais sistematizado da geometria, tendo em Thales

“A tese clássica sobre os motivos para o surgimento da prova rigorosa – conhecida como “externalista” por não envolver diretamente a produção de conhecimento matemático – é dada na afirmação de que, naturalmente, ocorreria, na Matemática então produzida, a aplicação das regras do debate argumentativo que governava a vida política na cidade grega, a pólis. Por outro lado, a tese internalista, cuja pergunta é “qual problema (matemático) tornou necessária a demonstração?” – considera como gerador da transformação o obstáculo enfrentado com a questão da irracionalidade.” (GARNICA, 2000, p. 57)

de Mileto, Pitágoras e Euclides os expoentes, em seus períodos respectivos, em que acenavam com a ideia de que as proposições geométricas deveriam ser entendidas sistematicamente pelo raciocínio dedutivo, e não mais simplesmente por tentativas e erros. De outra forma, seria realmente necessário fundamentar através de uma prova, exclusivamente lógica, o êxito praxiológico de uma prática cultural que dá uma resposta adequada ao problema normativo que ela soluciona?

Divisão interessante é a proposta por Deleuze e Guatarri (1997) em seus Mil Platôs. À medida que indicam a geometria euclidiana como uma geometria de estado, que fixa, que trabalha com a axiomática, de outro lado, trazem Arquimedes, trabalhando com a contingência e com métodos próprios para cada problema abordado, uma geometria nômade.

O modelo axiomático é um método para provar que um resultado está correto – indubitavelmente. No entanto, existem alguns requisitos para se construir um modelo axiomático consistente, entre eles, uma atenção especial deve ser dada às definições dos

termos geométricos, evitando, assim confusões. No entanto, como precisamos de outros termos para definir os geométricos, chega um momento em que é preciso tomar alguns termos sem definição. (BICUDO, 2009, p. 82) Também é

“The following are the six types of justifications allowed for statements in proofs:

- (1) *“By hypothesis....”*
- (2) *“By axiom....”*
- (3) *“By theorem...” (previously proved).*
- (4) *“By definition....”*
- (5) *“By step...” (a previous step in the argument).*
- (6) *“By rule... of logic.””*

(GREENBERG, 1994, p. 41)

necessário, para demonstrar a veracidade das propriedades/proposições/teoremas, “acolher umas tantas proposições, no menor número exequível, sem demonstração e procurar provar todas as outras afirmações que venham a fazer a partir daquelas.” (BICUDO, 2009, p. 82)

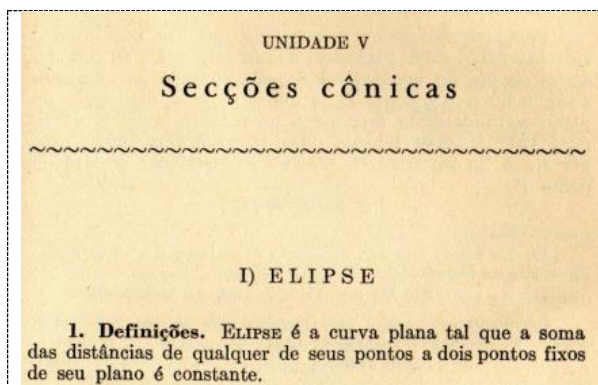
Euclides, nos Elementos, inicia o Livro 1 fazendo uma lista de 23 definições, 5 postulados e 9 noções comuns, para, a partir disso, construir seu sistema axiomático das proposições geométricas.

Definições	
1. Ponto é aquilo de que nada é parte. 2. E linha é comprimento sem largura. 3. E extremidades de uma linha são pontos. 4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma. 5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura. 6. E extremidades de uma superfície são retas. 7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma. 8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta. 9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo. 10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou. 11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto. 12. E agudo, o menor do que um reto. 13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa. 14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras. 15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.	16. E o ponto é chamado centro do círculo. 17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois. 18. E semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo. 19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas. 20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais. 21. E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos. 22. E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios. 23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Postulados	Noções comuns
1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta. 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo. 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos. 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.	1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si. 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais. 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais. 4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais. 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si. 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si. 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si. 8. E o todo [é] maior do que a parte. 9. E duas retas não contêm uma área.
(EUCLIDES, 2009, p. 97-99)	

Quando olhamos para os livros selecionados nesta pesquisa, percebemos que apenas 3 deles trazem conteúdos relacionados à geometria no plano, no entanto, os autores não iniciam a geometria plana do “início”, pois acreditamos que se subentende que os alunos já “subiram esse degrau” na etapa de ensino anterior. Assim, não constam definições ou apresentações de ponto, reta e plano, nem os axiomas, e, sim, diretamente a definição do conteúdo a ser estudado.

CAPITULO X TRANSFORMAÇÃO DAS FIGURAS — As transformações geométricas se repartem em duas categorias: a) simples mudança de situação sem modificação da forma; b) mudança de forma e de posição. As da primeira categoria chamam-se deslocamentos e as da 2.^a transformação com deformação. CAPITULO XI POLO E POLAR — De um ponto P, no interior de um ângulo, tiremos várias secantes, como ICD e tomemos sobre elas o conjugado harmônico tal como I de P, em relação ao segmento CD. O lugar do ponto I é o raio OK, conjugado de OPL, em relação aos raios OA e OB. CAPITULO XII RELAÇÃO ANHARMÔNICA — Pappus de Alexandria escreve a seguinte proposição, citada por Chasles em seu “Aperçu historique”: “Quando quatro retas de um plano partem de um mesmo ponto, formam sobre uma transversal traçada arbitrariamente no plano das retas, quatro segmentos que estão numa relação constante”. CAPITULO XIII HOMOGRAFIA — A relação anharmonica pôde escrever-se da seguinte forma: $(1) \quad \frac{CA}{CB} \div \frac{DA}{DB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \div \frac{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \gamma}$ segundo nos fornece a Trigonometria (form. 22), si chamarmos α, β, γ os ângulos formados pelas retas OE, OK, OT, OH. CAPITULO XV PROPRIEDADES PRINCIPAIS DAS CÔNICAS DEFINIÇÕES — Toda secção efetuada sobre um cône ou sobre um cilindro, denomina-se secção conica. (LIMA, 1938, p. 88, 93, 97, 102, 109)	UNIDADE VI Relações métricas: 1. Teorema de Stewart e suas aplicações ao cálculo das linhas notáveis do triângulo. 2. Relações métricas nos quadriláteros; teorema de Ptolomeu ou Hiparco. 3. Potência de um ponto; eixos radicais; planos radicais. TEOREMA DE STEWART E SUAS APLICAÇÕES AO CÁLCULO DAS LINHAS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO 1. — Generalidades. Sempre que se consideram segmentos marcados sobre uma reta, ou sobre retas paralelas, diz-se que todos esses segmentos tem a mesma direção. UNIDADE VII TRANSFORMAÇÃO DE FIGURAS 1. DESLOCAMENTOS: TRANSLAÇÃO, ROTAÇÃO, SIMETRIA 49 — Transformações geométricas. TRANSFORMAR uma figura é substituí-la por outra que da primeira se deduz por uma lei determinada. UNIDADE VIII CURVAS USUAIS 1 — DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DA ELIPSE, DA HIPÉRBOLE E DA PARÁBOLA. 142 — Generalidades. Denomina-se curva a trajetória de um ponto que se desloca. (ROXO et al., 1944b, p. 261, 315, 402) B. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS Uma lei que associa a cada ponto P do espaço E³ univocamente um ponto P' é uma aplicação, que denominamos <i>transformação geométrica</i>. (ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1968, p. 203)
--	--



(QUINTELLA, 1960, p. 251)

Em nenhuma das coleções, nos conteúdos de geometria no plano, os autores fazem a definição/apresentação de ponto, reta e plano, nem mesmo os axiomas que seriam a base da geometria plana.

UNIDADE 2

Capítulos

9. Propriedades de figuras geométricas

10. Semelhança de triângulos

11. Relações métricas no triângulo retângulo

Geometria plana

12. Polígonos regulares inscritos na circunferência e comprimento da circunferência

13. Áreas: medidas de superfícies

capítulo

9

Propriedades de figuras geométricas*

No ensino fundamental você já estudou as noções básicas de Geometria plana. Neste capítulo vamos recordar esse estudo, por meio de resolução de exercícios e problemas.

1 Ângulos opostos pelo vértice

Observe o desenho abaixo, de dois ângulos opostos pelo vértice (opv):

(DANTE, 2005, p. 154)

Já os conteúdos de geometria espacial, presentes em 5 das 6 coleções analisadas, são apresentados pelos autores com uma parte introdutória, como se fosse o primeiro contato dos alunos, ampliando os conceitos das figuras planas para as não planas; de modo que é feita a definição de alguns termos, são postuladas algumas afirmações para, então, apresentar os teoremas e, na maioria dos casos, estes são demonstrados. *Veja* como os autores apresentam os termos: ponto, reta e plano.

1. Plano. A noção de plano é primitiva.

O plano é ilimitado em todas as direções. Quando é necessário objetivar um plano, faz-se a perspectiva cavaleira de uma porção retangular do mesmo, como *P* na figura 1.

Não fala do ponto e da reta.

(QUINTELLA, 1960, p. 101-102)

1 — Superfície plana. Supomos adquirida pela observação a idéia intuitiva de *superfície plana*. Encontramos, na natureza, a imagem da superfície plana na superfície livre de uma porção de água tranquila e nas faces dos cristais.

2 — Plano. Imaginando indefinida uma superfície plana, concebemos a noção de *plano*. Este conceito é caracterizado por certas propriedades, denominadas *postulados do plano*.

(ROXO et al., 1945, p. 265)

Também não fala do ponto e da reta.

Os conceitos primitivos da geometria são o **ponto**, a **reta** e o **plano**.

Diremos que são *aceitos sem definição*, no sentido de que não podem ser explicados por meio de coisas mais elementares.

De certo modo, os conceitos primitivos ficam "definidos" ou bem caracterizados pelas leis ou propriedades que escolhemos para "personalizá-los": os *axiomas*.

Os pontos são representados por letras latinas maiúsculas:

A, B, C, ...

ou pelo gráfico indicado na figura ao lado (um sinalzinho)

A

FIGURA 182

As retas são representadas por letras latinas minúsculas:

a, b, c, ...

ou pelo gráfico da segunda figura (um traço feito com a régua)

FIGURA 183

Os pontos são representados por letras gregas minúsculas:

α , β , γ , ...

ou pelo gráfico ao lado.

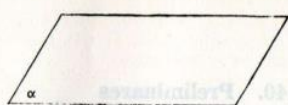


FIGURA 184

(ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1967, p. 221-222)

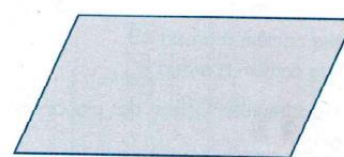
Interessante observar que nesta obra os autores alertam que os conceitos primitivos serão "definidos" pelos axiomas.

Neste capítulo, o estudo da Geometria de posição no espaço será feito de maneira intuitiva, baseado essencialmente na observação de modelos, figuras e objetos. Podemos usar um lápis ou uma régua para sugerir uma reta e a folha do caderno ou a parede para sugerir um plano.

Observe como as figuras serão representadas:

ponto (A, B, C, ...)

reta (r, s, p, ...)



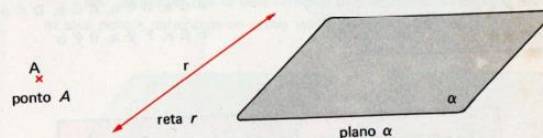
plano (α , β , γ , ...)

Você vai perceber também, no decorrer deste capítulo, termos não definidos, como ponto, reta, plano e espaço. As definições de outros termos serão baseadas neles. Vai se de-

(DANTE, 2005, p. 343)

Nestas duas obras, os autores consideram que os termos ponto, reta e plano não têm definição.

Para iniciarmos o estudo da Geometria Espacial precisamos formar idéia (ter noção) de **ponto**, **reta** e **plano**, e saber representá-los.



A reta e o plano não são limitados, eles não acabam onde as figuras terminam. As figuras acima são representações de ponto, reta e plano. O **ponto**, a **reta** e o **plano** são nossas noções iniciais.

(IEZZI et al., 1976b, p. 201)

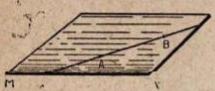
Os autores desses livros didáticos usam diferentes formas para representar os termos (ponto, reta e plano) ou para se referir a eles. No caso do ponto, apontam para um x ao lado de uma letra maiúscula do alfabeto latino, ou só para a letra, ou um minúsculo círculo também com uma letra. Quando tentam mostrar uma reta, apresentam um traço (reto) com setas (ou sem) nas pontas ao lado de uma letra minúscula do alfabeto latino. E no plano

"a significação de uma palavra é seu uso na linguagem. E a significação de um nome elucida-se muitas vezes apontando para o seu portador." (WITTGENSTEIN, 1999, p. 43)

temos um paralelogramo e uma letra minúscula do alfabeto grego, ou ainda uma letra maiúscula do alfabeto latino.

Eles ainda consideram que esses termos são "noções iniciais", "conceitos primitivos aceitos sem definição", "noções primitivas", "ideia intuitiva e o associa a elementos da natureza". Sendo que eles também são: "adimensionais", "sem começo nem fim" ou "ilimitados". No entanto, os usos desses termos serão delimitados pelos axiomas/postulados/proposições iniciais.

Veja quais axiomas/postulados/proposições iniciais são estabelecidos pelos autores na construção da axiomática da geometria espacial.

3 — Postulados do plano. Os postulados do plano são os seguintes: I. O plano é indefinido. O plano desta página pode conter um ponto situado em Washington ou na constelação do Cruzeiro do Sul. O plano é uma superfície ilimitada, e, por isso, não é possível representar um plano em toda sua extensão. Representamos o plano por uma porção de superfície plana tendo a forma de um retângulo P, visto em perspectiva.  II. Qualquer plano decompõe o espaço em duas regiões situadas de um lado e doutro desse plano. Cada uma dessas regiões é um semi-espaço e uma reta não poderia passar de um semi-espaço para o outro sem atravessar o plano. III. O plano contém inteiramente a reta determinada por dois quaisquer de seus pontos. Isso equivale a dizer: qualquer reta que tenha dois pontos, A e B, num plano, M, pertence ao plano, isto é, tem todos os seus pontos nesse plano.  IV. qualquer reta situada num plano decompõe o mesmo em duas regiões situadas de um lado e doutro da reta. Cada uma destas regiões é um semi-plano e uma segunda reta, situada no plano e que passe de uma a outra dessas regiões, cortará forçosamente a primeira. Esta é, para cada um dos semi-planos, a reta origem.	2. Postulados do plano. 1.º) Toda reta que tem dois pontos num plano fica inteiramente contida no plano. 2.º) Por três pontos não situados em linha reta passa um plano e somente um. 3.º) Todo plano pode ser levado a coincidir com outro, de modo que uma reta qualquer do primeiro coincida com qualquer reta do outro. 4.º) Um plano divide o espaço em duas regiões que podemos denominar semi-espaços. Uma reta que passa duma dessas regiões à outra, encontra necessariamente o plano.
(ROXO et al., 1945, p. 265-266) O autor apresenta apenas quatro postulados sobre o plano. Importante observar que, antes de enunciar esses postulados, não é feita nenhuma menção sobre o ponto e a reta (talvez tenham feito no livro do ginásial). Interessante que também não definiu o que é o espaço.	(QUINTELLA, 1960, p. 101) O autor também apresenta apenas quatro postulados sobre o plano, porém somente dois são semelhantes aos do livro de Roxo et al (II~4º; III~1º). Também não fez nenhuma menção sobre o que é ponto, reta e espaço. Postulado 1: Dados dois pontos distintos do espaço, existe uma, e somente uma, reta que os contém. Postulado 2: Dados três pontos não-colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém. Postulado 3: Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano. Dados um ponto P e uma reta r, temos $P \in r$ ou $P \notin r$. Dados um ponto P e um plano α, temos $P \in \alpha$ ou $P \notin \alpha$. (DANTE, 2005, p. 343;358) Novamente apenas quatro postulados. Podemos observar que o postulado 3 aparece nas obras de Roxo et al e Quintella e o postulado 2 se assemelha ao postulado 2º de Quintella.

142. Axioma 1

Existem infinitos pontos, infinitas retas e infinitos planos (no espaço E).

143. Axioma 2

Toda reta possui infinitos pontos.



FIGURA 185

144. Axioma 3

Entre dois pontos A e B de uma reta sempre existem outros pontos da reta.

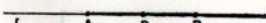


FIGURA 186

146. Axioma 4

Dados dois pontos distintos A e B, existe uma e uma só reta que possui esses dois pontos.

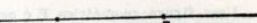


FIGURA 187

Diremos que a reta r é determinada pelos pontos A e B e a indicaremos por r ou por $rt.$ (A,B).

147. Axioma 5

Dados dois pontos A e B em r , existem pontos P e M em r tais que: A está entre M e B e B está entre A e P.



FIGURA 188

(Significa que existem pontos da reta r fora do segmento AB, "antes e depois do segmento").

148. Axioma 6

Dado qualquer ponto A, existem infinitas retas que possuem esse ponto.

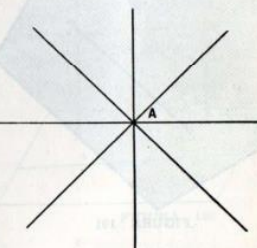


FIGURA 189

149. Axioma 7

Dado qualquer plano α existem infinitas retas contidas nesse plano.

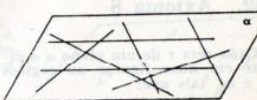


FIGURA 190

150. Definição 3

152. Axioma 8

Cada reta r de um plano α o divide em duas figuras ou regiões α_1 e α_2 , tais que:

- as duas regiões são convexas;
- A interseção delas é a reta r ;
- Se X e Y são dois pontos de α , fora de r , pertencentes um a cada região, a interseção do segmento XY com a reta r é um conjunto unitário {P}.

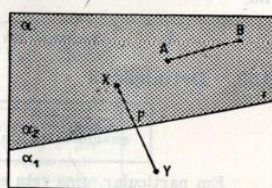


FIGURA 194

As duas regiões se denominam *semi-planos* e r é a origem de ambos os semi-planos.

Este axioma se denomina "axioma da divisão do plano".

O axioma 9 é o "axioma da divisão do espaço" e tem enunciado análogo:

153. Axioma 9

Todo plano α divide o espaço E em duas regiões E_1 e E_2 , convexas, sendo $E_1 \cap E_2 = \alpha$. Se X e Y são dois pontos de E, fora de α , pertencentes um a cada região, a interseção do segmento XY com o plano α é um conjunto unitário {P}.

E_1 e E_2 são semi-espaços. O plano α é a origem ou o contorno de ambos os semi-espaços.

$$E_1 \cup E_2 = E.$$

$$E_1 \cap E_2 = \alpha.$$

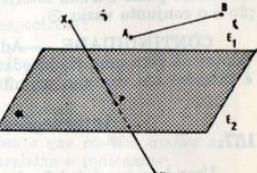
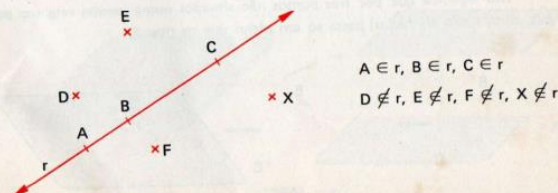


FIGURA 195

Precisamos também entender, aceitar e saber representar certas propriedades que o ponto, a reta e o plano possuem. Estas propriedades, que seguem com destaque, são nossas *proposições iniciais*.

Numa reta e fora dela existem tantos pontos quantos quisermos.

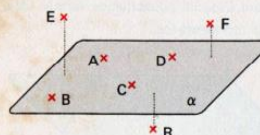
Esta propriedade nos possibilita "pegar" na reta os pontos que precisarmos, o mesmo ocorrendo para pontos fora da reta.



$$A \in r, B \in r, C \in r$$

$$D \notin r, E \notin r, F \notin r, X \notin r$$

Num plano e fora dele existem tantos pontos quantos quisermos.



$$A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha, D \in \alpha$$

$$E \notin \alpha, F \notin \alpha, X \notin \alpha$$

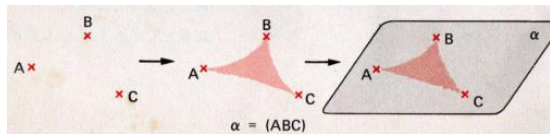
Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Com esta propriedade ficamos sabendo que, dados dois pontos distintos A e B, existe exatamente uma reta que os possui, ou que por eles "passa".



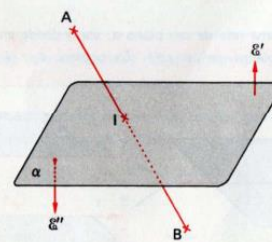
Três pontos não colineares determinam um único plano.

Isto significa que por três pontos não situados numa mesma reta (ou por três pontos não alinhados) passa só um plano que os possui.



Um plano separa o espaço em dois semi-espaços opostos e o plano é a origem dos dois semi-espaços.

Além disso, se um segmento de reta $\overline{AB}$ tem uma extremidade em cada semi-espaço e nenhuma na origem, então ele *intercepta*, *fura*, tem *traço* na origem (notemos que a origem dos semi-espaços é o plano α da figura abaixo).



$$\left. \begin{array}{l} A \in E' \text{ e } A \notin \alpha \\ B \in E'' \text{ e } B \notin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} \cap \alpha = \{I\}$$

154. Axioma 10

Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, a reta está contida no plano.

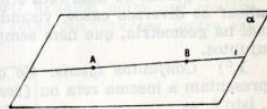


FIGURA 196

155. Axioma 11

Dados três pontos distintos e não alinhados A, B e C, existe um e um só plano α que possui os três pontos.

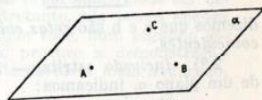


FIGURA 197

A expressão "não alinhados" significa: "não pertencentes à mesma reta."

Costuma-se enunciar o axioma 11 na forma: "Três pontos distintos e não alinhados determinam um e um só plano α ".

Esse plano se indica por α ou por pl. (A, B, C).

156. Axioma 12

(Das paralelas ou de Euclides)

Por um ponto P, não pertencente a uma reta r, existe uma única reta s, paralela à reta r.

Por definição, duas retas são paralelas quando estão contidas no mesmo plano e a sua interseção é o conjunto vazio $\emptyset$.

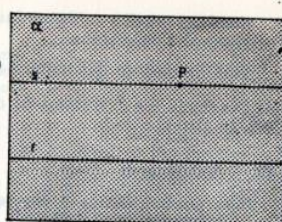


FIGURA 198

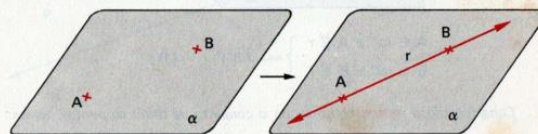
CONTINUIDADE — Admitimos para a distribuição dos pontos da reta uma propriedade denominada *continuidade*, que é também um conceito primitivo.

(ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1967, p. 222-226)

Esses autores trazem uma lista mais extensa com 12 axiomas. Buscando por semelhanças com as obras citadas anteriormente, percebemos que: o axioma 4 é semelhante ao postulado 1 do Dante; axioma 9 é semelhante ao postulado 4º de Quintella e ao postulado ii de Roxo et al; axioma 10 é semelhante ao postulado 1º de Quintella, postulado iii de Roxo et al e postulado 3 do Dante; axioma 11 é semelhante ao postulado 2º de Quintella e o postulado 2 do Dante. Importante observar o cuidado em postular várias afirmações que serão utilizadas no sistema axiomático, bem como são apresentadas as definições dos termos que aparecem nos axiomas.

Uma reta que possui dois pontos distintos num plano está neste plano.

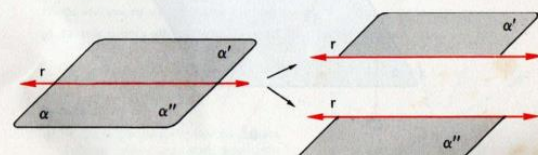
Isto quer dizer que se uma reta tem dois pontos distintos num plano, todos os seus pontos pertencem ao plano (ela está contida no plano).



$$(A \in \alpha, B \in \alpha, A \neq B, r = \overleftrightarrow{AB}) \implies r \subset \alpha$$

Uma reta de um plano separa-o em dois semi-planos e a reta é a origem dos dois semi-planos.

Assim, se r é uma reta de um plano α , ela o divide em dois semi-planos: α' e α'' . Os semi-planos α' e α'' são opostos e r é a origem comum.

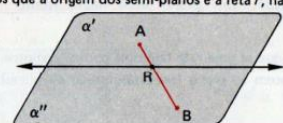


$$r \subset \alpha$$

r é a origem dos semi-planos

α' e α'' são semi-planos opostos

Além disso, se um segmento de reta $\overline{AB}$ tem uma extremidade num semi-plano, a outra no outro semi-plano e nenhuma delas na origem, então ele *intercepta* a origem (notemos que a origem dos semi-planos é a reta r , na figura abaixo).

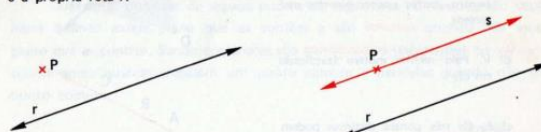


$$\left. \begin{array}{l} A \in \alpha' \text{ e } A \notin r \\ B \in \alpha'' \text{ e } B \notin r \end{array} \right\} \implies \overline{AB} \cap r = \{R\}$$

Considerando o *espaço* como sendo o conjunto de todos os pontos, temos:

Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

Com isto, dado um ponto P fora de uma reta r, por P podemos traçar (construir) uma e uma só reta paralela a r. Se o ponto P pertence a r, a paralela é a própria reta r.



$$\forall P, \forall r, \exists! s \mid s \parallel r \text{ e } P \in s$$

Observação

As proposições iniciais citadas são aceitas sem demonstração e são chamadas **postulados**. O último deles é conhecido por *postulado das paralelas* ou *postulado de Euclides* (300 a.C.).

(IEZZI et al., 1976b, p. 201-205)

Nesta obra os autores estabelecem 8 propriedades, que eles chamam de proposições iniciais, dessas apenas a "Numa reta e fora dela existem tantos pontos quanto quisermos." e a "Num plano e fora dele existem tantos pontos quanto

quisermos.” não aparecem em pelo menos uma das outras obras citadas anteriormente.

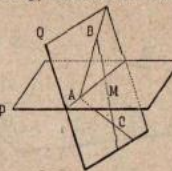
Quando olhamos para as cinco coleções e buscamos as afirmações aceitas como verdadeiras sem a necessidade de comprovação de tal veracidade, percebemos que, entre todas elas, apenas uma tem uma correspondente semelhante em todas as coleções. Tal afirmação se refere à condição para que uma reta esteja contida ou para que ela pertença a um plano. Se o conjunto dessas afirmações é a base do sistema axiomático, poderíamos ter sistemas iguais com bases diferentes?

Veja como a demonstração de um teorema das coleções articula essas afirmações a fim de provar a veracidade dele.

11 — Intersecção de dois planos. A intersecção de dois planos é uma reta.

Significa esse enunciado que, se dois planos distintos tiverem um ponto comum, terão uma reta comum e não terão nenhum outro ponto comum fora dessa reta.

Sejam P e Q dois planos distintos que tem um ponto comum A . Do ponto A , tracemos, sobre o plano Q , duas semi-retas situadas uma em cada um dos semi-espacos determinados pelo plano P . Se ligarmos um ponto, B , da primeira a um ponto, C , da segunda, dessas semi-retas, a reta BC encontrará o plano P em um certo ponto, M , que também pertencerá ao plano Q . A reta AM , tendo dois pontos em cada um dos planos P e Q , pertence a esses dois planos (n.º 3, III).



Acresce que os dois planos, P e Q , supostos distintos, não podem ter nenhum ponto comum fora da reta AM , pois, do contrário, eles se confundiriam (n.º 5, II).

(ROXO et al., 1945, p. 270-271)

“Sejam P e Q dois planos distintos que tem um ponto em comum A ” – Hipótese.

“Do ponto A , tracemos sobre o plano Q , duas semi-retas situadas uma em cada um dos semi-espacos determinados pelo plano P .” – Primeiramente preciso saber o que é uma semirreta, os autores não trazem esta definição nesta coleção. Em segundo, podemos ver que o postulado II garante que existem esses semiespacos, porém precisava também de uma garantia da existência dessas semirretas neste semiespaco.

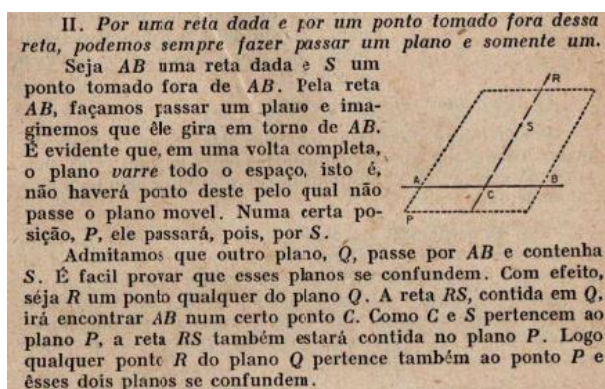
“Se ligarmos um ponto, B , da primeira a um ponto, C , da segunda, dessas semi-retas, a reta BC encontrará o plano P em um certo ponto, M , que também pertencerá ao plano Q .”

– É necessário fazer uma ressalva que estas duas semirretas não podem ser semirretas opostas, ou seja, que estão na mesma reta suporte, pois se caso fossem, esse ponto que intercepta o plano P seria o ponto A , que obviamente também pertence ao plano Q pela hipótese. E assim teríamos ainda apenas um ponto em comum nos planos. Lembramos aqui o postulado II que garante que “uma reta não poderia passar de um semi-espaco para o outro sem atravessar o plano.”

“A reta AM , tendo dois pontos em cada um dos planos P e Q , pertence a esses dois planos (n.º 3, III).” – Caso as semirretas não sejam opostas, teremos então a reta AM que passa

pelos pontos A e M que pertencem a ambos os planos P e Q, porém necessitaria de uma garantia da existência dessa reta que passa por AM e que ela é única. Por fim, como enunciado no postulado III o plano contém inteiramente a reta que possui dois de seus pontos pertencentes ao plano, assim a reta AM está contida tanto no plano P, como no plano Q.

“Acresce que os dois planos, P e Q, supostos distintos, não podem ter nenhum ponto comum fora da reta AM, pois, do contrário, eles se confundiriam (n.º 5, II).” – Aqui o autor, para justificar que não pode existir outro ponto na interseção dos planos que não pertença a reta AM, utiliza-se do resultado proposto na Propriedade do plano II, enunciado antes do teorema analisado, tal propriedade diz que:



(ROXO et al., 1945, p. 267)

Uma “propriedade” semelhante a esta é enunciada pelos demais autores, porém como axioma/postulado/proposição inicial admitida sem prova/justificação/demonstração. No entanto, Roxo et al propõe as seguintes argumentações para justificar tal propriedade:

“Seja AB uma reta dada e S um ponto tomado fora de AB .” – Hipótese.

“Pela reta AB , façamos passar um plano e imaginemos que ele gira em torno de AB .” – Enunciado na propriedade I do plano (veremos adiante o que diz essa propriedade).

“É evidente que, em uma volta completa, o plano varre todo o espaço, isto é, não haverá ponto deste pelo qual não passe o plano móvel.” – Propriedade I do plano.

“Numa certa posição, P , ele passará, pois, por S .” – Consequência da propriedade I do plano.

“Admitamos que outro plano, Q , passe por AB e contenha S .” – Hipótese contrária à conclusão que se pretende chegar.

“É fácil provar que esses planos se confundem.”

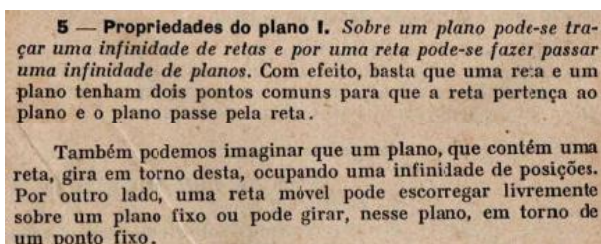
“Com efeito, seja R um ponto qualquer do plano Q ” – Seria necessário garantir que em um plano existem tantos pontos quanto se queira.

“A reta RS , contida em Q , irá encontrar AB num certo ponto C .” – A ilustração nos induz a ver que as retas RS e AB se interceptam nesse ponto C , mas eu poderia imaginar um ponto R , tal que as retas RS e AB fossem paralelas, assim não haveria a intercessão no ponto C . Além do mais, precisava garantir que a interseção de duas retas é um ponto.

“Como C e S pertencem ao plano P , a reta RS também estará contida no plano P .” – Se C e S pertencem ao plano P , pelo postulado 3, então a reta CS estaria contida no plano P , precisaria mostrar que o ponto R pertence a essa reta CS .

“Logo qualquer ponto R do plano Q pertence também ao ponto P e esses dois planos se confundem.” – Conclusão. Seria essa conclusão equivocada? Uma observação: acredito que o autor queria dizer que “qualquer ponto R do plano Q pertence também ao plano P ”, um equívoco, a meu ver, causado pelo fato de usar letras latinas maiúsculas tanto para representar o ponto como para o plano.

Vejamos agora o que diz a propriedade I do plano.



(ROXO et al., 1945, p. 266-267)

A primeira parte desta propriedade se assemelha ao axioma 7 do livro de Rocha, Barbosa e Pierro Neto. Os autores usam o seguinte argumento para justificar a veracidade da propriedade:

“Com efeito, basta que uma reta e um plano tenham dois pontos comuns para que a reta pertença ao plano (postulado III) e o plano passe pela reta.” – Seria necessário garantir que no plano tenha infinitos pontos, para podermos traçar essas infinitas retas.

“Também podemos imaginar que um plano, que contém uma reta, gira em torno desta, ocupando uma infinidade de posições. Por outro lado, uma reta móvel pode escorregar livremente sobre um plano fixo ou pode girar, nesse plano, em torno de um ponto fixo.” – Imaginação!

Agora vejamos como outro autor demonstra o teorema proposto nessa análise:

6. Posições relativas de dois planos.

TEOREMA. Quando dois planos têm um ponto comum, têm também uma reta comum que contém o mesmo ponto.

Hip.: O plano P e o das concorrentes AB e AC têm o ponto comum A . (fig. 7).

Tese: Os mesmos planos têm uma reta comum.

Demonstração.

No semi-espço inferior ao plano P consideremos o ponto D da reta AB . A reta CD pertence ao plano das concorrentes,

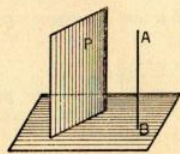


FIG. 6

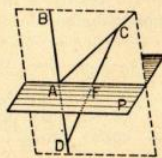


FIG. 7

por ter os dois pontos C e D no mesmo plano, e corta o plano P num ponto F , por passar de um a outro semi-espço (4.º postulado do plano).

O ponto F está, pois, situado ao mesmo tempo nos dois planos e o mesmo acontecerá à reta AF que tem os dois pontos A e F em ambos os planos.

Resulta dêsse teorema que dois planos distintos podem ocupar as duas seguintes posições relativas:

- 1.ª) têm uma reta comum; neste caso são *secantes* e a reta comum denomina-se *intersecção* dos dois planos;
- 2.ª) não têm ponto algum comum; neste caso dizem-se *paralelos*.

(QUINTELLA, 1960, p. 104-105)

“Hip.: O plano P e o das concorrentes AB e AC têm o ponto comum A .” – O autor anteriormente demonstrou que um plano pode ser determinado por duas retas concorrentes (veremos este teorema mais adiante).

“No semi-espço inferior ao plano P (garantido pelo postulado 2º) consideremos o ponto D da reta AB .” – Atentar que, por construção, os pontos B e C estão no semiespço superior ao plano P .

“A reta CD pertence ao plano das concorrentes, por ter os dois pontos C e D no mesmo plano (postulado 1º), e corta o plano P num ponto F , por passar de um a outro semi-espço (4.º postulado do plano).” – Já que C está no semiespço superior ao plano P e D no semiespço inferior ao plano P .

“O ponto F está, pois, situado ao mesmo tempo nos dois planos e o mesmo acontecerá à reta AF que tem os dois pontos A e F em ambos os planos.” – Devido o passo anterior.

Esta demonstração é semelhante ao do livro de Roxo *et al*, porém acredito que um detalhe fez com que esta prova fosse mais coerente que a primeira (mais rigorosa?), pois Quintella, ao fazer sua construção, tomou duas retas concorrentes AB e AC , já Roxo *et al* traçou duas semirretas, não descartando a possibilidade destas serem opostas.

Agora vejamos o teorema da determinação de um plano apresentado por Quintella:

3.ª) Duas retas concorrentes determinam um plano. Suponhamos as retas AB e CD (fig. 3). Consideremos a reta AB e um ponto qualquer C da segunda reta, que não seja a intersecção I das duas. A reta AB e o ponto exterior C determinarão um plano que conterá a reta CD , por estarem nele situados os dois pontos C e I da mesma reta.

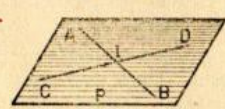


FIG. 3

(QUINTELLA, 1960, p. 102)

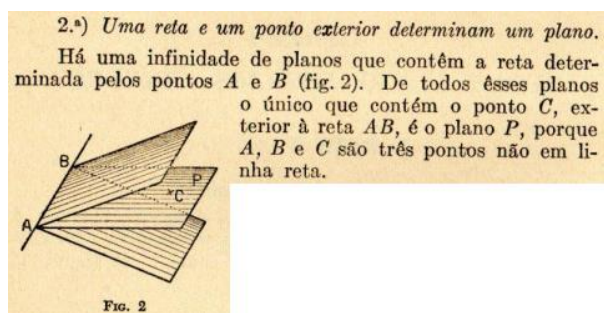
“Suponhamos as retas AB e CD (fig. 3).” – Por hipótese essas retas são concorrentes. Seria

necessário definir o que são retas concorrentes.

“Consideremos a reta AB e um ponto qualquer C da segunda reta, que não seja a intersecção I das duas.” – Por construção.

“A reta AB e o ponto exterior C determinarão um plano (resultado de outro teorema de determinação do plano) que conterá a reta CD , por estarem nele situados os dois pontos C e I da mesma reta (garantido pelo postulado 1º).”

Vejamos agora o outro teorema sobre determinação de um plano:



(QUINTELLA, 1960, p. 102)

“Há uma infinidade de planos que contêm a reta determinada pelos pontos A e B (fig. 2).”

– Somente apresenta a figura para justificar essa afirmativa.

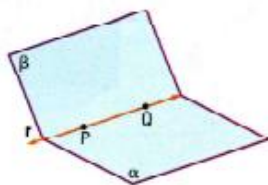
“De todos esses planos o único que contém o ponto C , exterior à reta AB , é o plano P , porque A , B e C são três pontos não em linha reta.” – Garantido pelo postulado 2º.

Vejamos agora a demonstração que Dante fez do teorema da intersecção de dois planos, na seção complementar do capítulo:

Teorema 5: Se dois planos distintos possuem mais de um ponto em comum, sua intersecção é uma reta.

Demonstração:

Considere os pontos P e Q comuns a α e β .



Pelo **postulado 3**, a reta r definida por P e Q está contida, ao mesmo tempo, em α e β e, portanto, em sua intersecção.

Por outro lado, se houvesse um ponto R comum a α e β que não pertencesse a r , os planos α e β seriam coincidentes, uma vez que, pelo teorema 1, r e R determinam um único plano. Portanto, r é a intersecção de α e β .

(DANTE, 2005, p. 359)

“Considere os pontos P e Q comuns a α e β .” – Dante considera dois planos que tenham

dois pontos em comum, e **não apenas um**, como considerado pelos autores dos livros analisados anteriormente, o que já reduz consideravelmente a complexidade da demonstração do teorema.

“Pelo postulado 3, a reta r definida por P e Q está contida, ao mesmo tempo, em α e β e, portanto, em sua intersecção.” – Garantido pelo postulado referido.

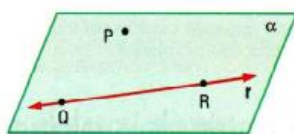
“Por outro lado, se houvesse um ponto R a α e β que não pertencesse a r , os planos α e β seriam coincidentes, uma vez, pelo teorema 1, r e R determinam um único plano.” – Faz referência ao teorema 1 que veremos mais adiante.

“Portanto, r é a intersecção de α e β .” – Conclusão.

Vejamos agora o teorema 1:

Teorema 1: Existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela.

Demonstração:



Considere P um ponto não pertencente à reta r .

Marque sobre r dois pontos distintos Q e R .

Os pontos P , Q e R não são colineares, pois, pelo postulado 1, r é a única reta que passa por Q e R e, por hipótese, P não pertence a r .

Pelo postulado 2, sabemos que existe um único plano α que contém P , Q e R . Como a reta r tem dois de seus pontos (Q e R) em α , o postulado 3 garante que r está contida em α . Assim, de fato existe um plano que contém r e P . Como este é o único plano que contém P , Q e R , ele é o único que contém P e r .

(DANTE, 2005, p. 358)

“Considere P um ponto não pertencente à reta r .” – Hipótese.

“Marque sobre r dois pontos distintos Q e R .” – Por construção.

“Os pontos P , Q e R não são colineares, pois, pelo postulado 1, r é a única reta que passa por Q e R e, por hipótese, P não pertence a r .” – Postulado 1.

“Pelo postulado 2, sabemos que existe um único plano α que contém P , Q e R .” – Postulado 2.

“Como a reta r tem dois de seus pontos (Q e R) em α , o postulado 3 garante que r está contida em α .” – Postulado 3.

“Assim, de fato existe um plano que contém r e P .” – Conclusão do passo anterior.

“Como este é o único plano que contém P , Q e R , ele é o único que contém P e r .” –

Conclusão do passo anterior.

Agora, diferentemente das três obras já citadas, nas duas próximas os autores não demonstraram o teorema da intersecção dos planos, apenas o ilustraram. *Veja!*

158. Proposição

Se dois planos distintos α e β têm um ponto P em comum, existe uma e uma só reta s contida em ambos os planos.

Dizemos que os planos são *concorrentes* e indicamos

$$\alpha \cap \beta = s.$$

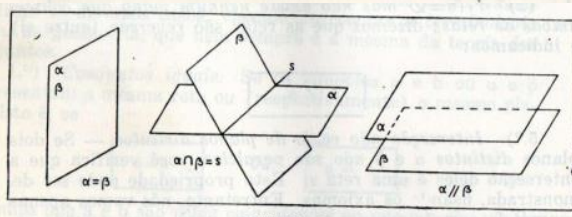
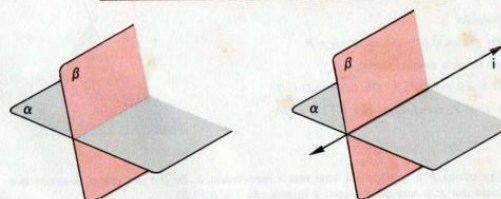


FIGURA 201

(ROCHA; BARBOSA, 1970, p. 227-228)

4. INTERSECÇÃO DE PLANOS

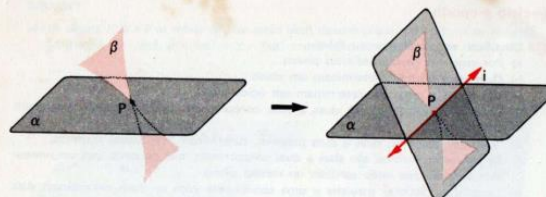
Se dois planos distintos se interceptam, então a intersecção deles é uma reta.



$$\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists i \mid \alpha \cap \beta = i$$

Com isto queremos dizer que:

- Se a intersecção de dois planos distintos não é um conjunto vazio, então esta intersecção é uma reta.
- Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles possuem uma reta comum. Esta reta comum é única e passa por aquele ponto.



$$(\alpha \neq \beta, P \in \alpha, P \in \beta) \Rightarrow \exists i \mid i = \alpha \cap \beta \text{ e } P \in i$$

Os dois planos, nesta situação, são chamados planos **secantes** (ou *concorrentes*) e a reta comum é dita **intersecção** (ou *traço*) destes planos.

(IEZZI et al., 1976b, p. 215-216)

Euclides também demonstrou essa proposição no livro XI. Veja quais argumentos ele usou:

Caso dois planos cortem-se, a seção comum deles é uma reta.

Cortem-se, pois, os dois planos AB, BC, e seja a linha DB a seção comum deles; digo que a linha DB é uma reta.

Pois, se não, fiquem ligadas do D até o B, por um lado, a reta DEB no plano AB, e, por outro lado, a reta DFB no plano BC. Então, as extremidades das duas retas DEB, DFB serão as mesmas e, muito evidentemente, conterão uma área; o que é absurdo. Portanto, as DEB, DFB não são retas. Do mesmo modo, então, provaremos que nem alguma outra sendo ligada do D até o B existirá, exceto a seção comum DB dos planos AB, BC.



Portanto, caso dois planos cortem-se, a seção comum deles é uma reta; o que era preciso provar.

(EUCLIDES, 2009, p. 484-485)

“Cortem-se, pois, os dois planos AB, BC, e seja a linha DB a seção comum deles; digo que a linha DB é uma reta.” – Reescrita do enunciado da proposição.

“Pois, se não, fiquem ligadas do D até o B, por um lado, a reta DEB no plano AB, e, por outro lado, a reta DFB no plano BC.” – Pelo postulado 1, essas retas existiriam, porém essa é uma hipótese contrária à conclusão que se pretende chegar.

“Então, as extremidades das duas retas DEB, DFB serão as mesmas e, muito evidentemente, conterão uma área; o que é um absurdo.” – Euclides usou o método de demonstração de redução ao absurdo, e usou como justificativa para o absurdo a noção comum n. 9.

“Portanto, as DEB, DFB não são retas.” – Conclusão do passo anterior.

“Do mesmo modo, então, provaremos que nem alguma outra sendo ligada do D até o B existirá, exceto a seção comum DB nos planos AB, BC.” – Por analogia se provaria a unicidade da reta DB?

“Portanto, caso dois planos cortem-se, a seção comum deles é uma reta; o que era preciso provar.” – Conclusão.

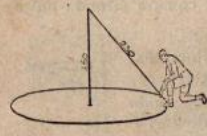
Quando olhamos para o sistema axiomático estabelecido pelos autores, percebemos algumas inconsistências devido ao fato de se dar por conhecidas algumas definições e afirmações, possivelmente por entenderem que, como os alunos já “subiram o degrau” da geometria plana, não seria necessário explicitá-los novamente. No entanto, é possível evidenciar que esse sistema axiomático é construído de formas diferentes pelos autores, e suas aplicações também variam na mesma medida.

Mediante essas evidências, ou estes traços seguidos pelos autores, quando jogamos os jogos de linguagem geométricos propostos nos livros, nos questionamos se seriam eles, o mesmo jogo de linguagem? Ou jogos diferentes? Como podemos ter um mesmo jogo com as regras, a base, as notações, as definições e o desenvolvimento diferentes? Seriam as semelhanças suficientes para chamarmos de *um mesmo* jogo? Se diante de um mesmo jogo, ou postulando ser o mesmo jogo, como evidenciar o privilégio de uns por determinados resultados em detrimento de outros, que apresentam resultados diferentes.

Ao nos depararmos com demonstrações/provas de teoremas/proposições em livros do Ensino Médio e os seus equivalentes, surgem-nos alguns questionamentos: qual a finalidade da presença dessas demonstrações nos livros didáticos? Seria um recurso de convencimento, para mostrar que o que está sendo apresentado é verdadeiro? Ou seria uma técnica ou uma

prática (ou um jogo de linguagem) em que se faz necessário aprender a demonstrar? Haveria um fascínio pela técnica e um declínio da crítica?⁴¹ O que era esperado dos alunos nesse processo de ensino e aprendizagem?

Nos livros didáticos de matemática, é muito comum encontrarmos os exercícios/problemas/atividades, tendo por objetivo fazer os alunos praticarem os conhecimentos matemáticos aprendidos. Será que, nos livros analisados, são propostos os mesmos tipos de exercícios? *Veja* quais temos na parte introdutória da geometria espacial:

Exercícios propostos. 1. Construir uma reta que passe por um ponto M e encontre duas retas dadas R e R'. 2. Determinar um plano que passe por uma reta dada R e seja paralelo a outra reta dada S. 3. Por um ponto M fazer passar um plano que seja paralelo a duas retas dadas R e S. 4. Construir uma reta que seja paralela a uma reta dada R e que encontre duas outras retas dadas S e S'. 5. Mostrar que os meios dos lados de um quadrilátero reverso são os vértices de um paralelogramo e que o centro desse paralelogramo é o meio do segmento que liga os meios das diagonais do quadrilátero. 6 — São dados dois pontos A e B e um plano P. Achar um ponto desse plano que seja equidistante de A e de B. 7 — De um ponto situado a 12 cm de um plano traçamos uma oblíqua de 20 cm de comprimento. Calcular o afastamento dessa oblíqua. 8. Coloca-se, em posição vertical, haste de 1,60m de comprimento, e prende-se na extremidade superior dessa haste uma corda de 2,5m de comprimento. Depois de esticar convenientemente a corda, traça-se no chão, com a extremidade livre, um círculo em torno da haste. Calcular a área deste. 9. Por um ponto, A, de um plano P, traçar, em P, uma perpendicular a uma reta dada, R. <i>Sugestão.</i> A reta pedida deve ser perpendicular a uma paralela a R, traçada por A. 10. Determinar o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes dos três vértices de um triângulo qualquer. 11. Determinar o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de duas retas concorrentes. Mesma questão para duas retas paralelas. 	Exercícios propostos. 1. Uma reta S' encontra um plano P num ponto M formando com esse plano um ângulo de 35°. A reta S forma com uma reta do plano um certo ângulo v. Qual é o maior valor de v? 2 — De um ponto A, situado sobre a face F de um diedro tiramos a perpendicular AB à outra face. Sabendo-se que o diedro mede 40°, calcular o ângulo que a reta AB forma com a face F. 3. O ângulo plano de um diedro mede 32°. De um ponto Q situado na abertura do diedro tiramos as retas QA e QB perpendiculares respectivamente às faces desse diedro. Determinar o ângulo AQB. Exercícios propostos. 1. A flecha de uma torre forma um ângulo sólido regular de 8 faces, cuja soma é igual a 90°. Pede-se o valor de cada um dos ângulos das faces laterais na base da flecha. 2. Num ângulo sólido regular $VABCD$ a soma das faces é igual a 120°. Calcular os ângulos do triângulo isósceles VAB. 3. Determinar o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes das arestas de um triedro. 4. A soma dos ângulos que uma semi-reta, que parte do vértice de um triedro, faz com as três arestas está compreendida entre a soma das faces do triedro e a metade dessa soma. <i>Sugestão:</i> escrever as desigualdades resultantes da consideração de cada um dos triedros formado pela semi-reta com duas arestas do triedro.
--	--

(ROXO et al., 1945, p. 284-285; 296-297; 308)

A técnica mais explorada nesses exercícios é a construção, seguida obviamente da argumentação de que essas construções são soluções verdadeiras para os problemas.

Esse autor propõe um total de 18 exercícios. Basicamente apresentava questões para que os alunos apontassem as seguintes ações: **construir**, **determinar**, **mostrar**, **achar**, **calcular**, **traçar**. Lembrando que nesse livro é feita a demonstração de praticamente todos os teoremas propostos, e o fato de ter poucos exercícios para os padrões atuais sugerem uma preferência em o aluno observar – ouvir/ver – do que fazer. No entanto, diferentemente de

⁴¹ Temática explorada por Garnica (1996) ao problematizar a importância da prova rigorosa na formação de professores de matemática.

Euclides (nos Elementos), aparecem alguns exercícios de aplicações em problemas práticos, onde se pede para calcular.

EXERCÍCIOS

1. Quantos planos distintos são definidos por quatro pontos A, B, C, D , não complanares? *Resp.: 4.*
2. Três retas AB, BC e BD são concorrentes em B e não complanares. Quantos planos distintos elas definem? *Resp.: 3.*
3. Duas retas AB e CD são paralelas. Uma reta EF é concorrente com as duas paralelas. Quantos planos as três retas definem? *Resp.: 1.*
4. Unem-se os pontos médios de dois lados consecutivos de um quadrilátero não plano $ABCD$. Provar que o segmento obtido é paralelo ao plano determinado pelos dois outros lados.
5. Três planos paralelos determinam sobre uma reta S segmentos de 7 dm e 5 dm. Calcular os segmentos que os mesmos planos interceptam sobre uma segunda reta S' sabendo que o segmento da mesma compreendido entre os planos extremos mede 15 dm. *Resp.: 6,25 dm e 8,75 dm.*
6. Os planos paralelos P, Q, R e S determinam sobre uma reta os segmentos AB, BC e CD . Os pontos A e C são conjugados harmônicos do segmento BD . Calcular os segmentos $A'B', B'C'$ e $C'D'$ de uma reta interceptada pelos mesmos planos, sendo: $BD = 8$ m, $AC = 8,4$ m e $A'D' = 13$ m. *Resp.: 5,57 m; 2,23 m e 5,2 m.*
7. Dadas duas retas não complanares, conduzir por uma delas um plano paralelo à outra.
8. Por um ponto dado conduzir um plano paralelo a duas retas dadas.
9. Dois planos respectivamente paralelos a dois planos secantes são também secantes e sua intersecção é paralela à dos dois outros. Provar.
10. Calcular a distância de um ponto do espaço ao plano de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é a , sabendo-se que as oblíquas traçadas do ponto aos vértices do triângulo formam ângulos de 60° com o mesmo plano. *Resp.: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.*
11. Calcular a distância de um ponto do espaço ao plano de um triângulo equilátero de 6 m de lado, sabendo-se que o ponto equidista de 4,5 m dos vértices do triângulo. *Resp.: 2,8 m.*
12. Calcular a distância de um ponto A do espaço ao ponto B de um plano M , sendo dados:
 - 1) a distância do ponto A ao plano M é de 36 m;
 - 2) o ponto B está situado a 12 m do ponto de contacto da tangente ao círculo, cujo centro é o pé da perpendicular baixada do ponto A ao plano M e cujo raio é de 9 m. *Resp.: 39 m.*
13. Em um plano M está traçado um triângulo, cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente. O ponto A , exterior ao plano, é equidistante dos três vértices do triângulo e a distância comum é igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo. Calcular a distância do ponto A ao plano M . *Resp.: $5\sqrt{3}$ cm.*
14. Do ponto A , exterior ao plano M , descreve-se uma circunferência sobre o plano. Traça-se uma tangente BC à circunferência e une-se o ponto A ao ponto C . Calcular AC , com erro menor que um centímetro, sabendo-se que a distância do ponto A ao plano é de 12 m, que o raio OB tem 7 m e a tangente BC , 6 m. *Resp.: 15,13 m.*
15. Achar o lugar dos pontos do espaço equidistantes de dois pontos dados. *Resp.: Plano mediador.*
16. Achar o lugar dos pontos de um plano equidistantes de dois pontos dados fora do plano. *Resp.: Intersecção do plano dado com o mediador do segmento que une os dois pontos.*
17. Três planos paralelos são dispostos de modo que as distâncias do intermediário para cada um dos outros são, respectivamente, de 5 m e 9 m. Calcular os segmentos que os mesmos planos determinam sobre uma reta que lhes é oblíqua, sabendo que o segmento da mesma compreendido entre os planos extremos é de 25 m. *Resp.: 8,93 m e 16,07 m.*
18. De um ponto interior são traçados duas semi-retas perpendiculares às faces de um diedro. As perpendiculares formam um ângulo de $56^\circ 27'$. Qual a medida do diedro? *Resp.: $123^\circ 33'$.*
19. Uma reta perpendicular a uma das faces de um diedro forma com o plano bisetor do mesmo um ângulo de 36° . Calcular o retilíneo do diedro. *Resp.: 108° .*
20. Uma reta, perpendicular ao bisetor de um diedro, forma com uma das faces um ângulo de $48^\circ 36'$. Calcular o retilíneo do diedro. *Resp.: $82^\circ 48'$.*
21. O retilíneo de um diedro mede 120 gr. Calcular o ângulo que uma perpendicular ao bisetor forma com cada uma das faces. *Resp.: 40 gr.*
22. Demonstrar que qualquer ponto situado no bisetor de um diedro é equidistante das faces.
23. Dado um triedro triretângulo pergunta-se a que distâncias do vértice, sobre as arestas, deve passar uma secção para que os lados do triângulo obtido tenham 8 m, 12 m e 10 m respectivamente. *Resp.: 3,16 m, 7,35 m e 9,49 m.*
24. Achar o lugar dos pontos equidistantes das faces de um diedro.
25. Achar o lugar dos pontos equidistantes das faces de um triedro.
26. Em todo triedro ao maior diedro opõe-se a maior face e reciprocamente. Provar.
27. Determinar o lugar dos pontos equidistantes das arestas de um triedro.
28. Num triedro, as faces a e b medem respectivamente 88° e 73° . Entre que valores está compreendida a face c ? *Resp.: $15^\circ < c < 161^\circ$.*
29. Num triedro, as faces a e b medem respectivamente 108° e 112° . Entre que valores poderá variar a face c ? *Resp.: $4^\circ < c < 140^\circ$.*
30. Três faces de um ângulo sólido tetraédrico medem respectivamente 140° , 70° e 30° . Entre que valores está compreendida a quarta face? *Resp.: 120° e 40° .*
31. Podem os diedros de um triedro medir respectivamente 50° , 30° e 20° ? *Resp.: Não.*
32. Dois diedros de um triedro medem respectivamente 140° e 120° . Entre que valores pode variar o terceiro diedro? *Resp.: 80° e 160° .*
33. Os diedros A e B de um triedro medem respectivamente 40° e 70° . Entre que valores pode variar o diedro C ? *Resp.: $70^\circ < C < 150^\circ$.*
34. Se um triedro for birretângulo, entre que valores pode variar o diedro não reto? *Resp.: 0° e 180° .*
35. Num triedro $V-ABC$, o menor diedro é A . Entre que valores pode variar a face a , se tivermos $b = 80^\circ$ e $c = 74^\circ$. *Resp.: $12^\circ < a < 74^\circ$.*
36. Num triedro $V-ABC$, a maior face é a . Entre que valores pode variar o diedro A , se tivermos $B = 90^\circ$ e $C = 120^\circ$. *Resp.: $120^\circ < A < 150^\circ$.*
37. Qual o caso de congruência de triedros que não tem correspondente nos triângulos? *Resp.: quarto caso.*
38. Se uma reta formar ângulos iguais com três outras que passam por seu pé num plano, será perpendicular ao plano. Demonstrar. (E. F. de Fil. da U. Minas Gerais, 1952).
39. Num triedro $V-ABC$, duas faces medem respectivamente 90° e 36° . Entre que valores poderá variar a terceira face? *Resp.: 54° e 126° .*
40. Corta-se um triedro triretângulo por um plano de tal modo que a secção obtida seja um triângulo equilátero de lado igual a 6 m. Achar as distâncias do vértice aos pontos de intersecção do plano secante com as arestas e ao plano da secção. *Resp.: 4,24 m e 2,44 m.*
41. Do centro O de um triângulo equilátero de lado 6 cm levanta-se uma perpendicular OS ao plano do triângulo. Calcular o comprimento de OS de modo que o triedro de vértice S , obtido unindo o ponto S aos vértices do triângulo, seja triretângulo. *Resp.: $OS \approx 2,44$ cm.*
42. Do centro O de um quadrado $ABCD$ de lado igual a 6 cm levanta-se a perpendicular ao plano do quadrado. Sobre essa perpendicular toma-se o segmento OS de 4 cm. Calcular a distância do ponto O ao plano SAB . *Resp.: 2,4 cm.*

Questões de Concurso em 1958:

43. Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são (E. N. E.).
44. A distância entre duas retas não complanares é dada (E. N. E.).
45. Um plano fica determinado por: 1... 2... 3... 4... (E. N. E.).
46. Ângulo de uma reta com um plano é, por definição, (E. N. E.).
47. Para que uma reta seja paralela a um plano é necessário e suficiente que (E. N. E.).
48. Bissetor de um diedro é o lugar geométrico (E. Flu. E.).
49. Se de um ponto traçarmos perpendiculares às faces de um diedro, o ângulo plano formado e o retilíneo do diedro são (E. Flu. E.).
50. Um ângulo polidrico é convexo quando (E. Flu. E.).
51. O lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de três pontos não colineares é (E. P. U. C.).
52. Ângulo polidrico é (E. P. U. C.).

Aqui a técnica mais explorada é a de calcular. Já as questões de concurso são exercícios teóricos.

(QUINTELLA, 1960, p. 141-144)

Quintella propõe um total de 52 exercícios. Destes, 9 são destacados como sendo questões de Concurso de 1958, talvez uma inovação. Aqui também o autor segue os passos dos exercícios do livro apresentado anteriormente, em que pede para **calcular**, **provar**, **conduzir**, **achar**, **demonstrar**, com preponderância para exercícios que necessitem calcular. Um diferencial é que a lista de exercícios é bem mais extensa. Poderia dizer que há uma valorização da prática, ainda que em casos hipotéticos.

164. Exercícios — Sequência 12

Indicar com (V) as proposições verdadeiras e com (F) as falsas:

- 1 — a) Dados dois pontos distintos A e B, existe um (pelo menos) plano que os possui. ()
 b) Um ponto A e uma reta r determinam um plano. ()
 c) Três pontos A, B e C, distintos, determinam um e um só plano. ()
 d) Um ponto e uma reta determinam um e um só plano. ()
 e) Existe um e um só plano que contém um triângulo dado. ()
- 2 — a) Se duas retas distintas não são paralelas, elas são concorrentes. ()
 b) Se os símbolos r e s indicam retas cuja interseção não é vazia, as retas são concorrentes. ()
 c) Duas retas não coplanares são reversas. ()
 d) Se a interseção de duas retas é o conjunto vazio, elas são paralelas. ()
 e) Se três retas são paralelas, existe um plano que as contém. ()
- 3 — a) Se três retas distintas são duas a duas concorrentes, elas determinam um e um só plano. ()
 b) Se três retas distintas são duas a duas concorrentes e nenhum ponto pertence a todas elas, existe um e um só plano que contém as três retas. ()
 c) A condição $a \cap b = \emptyset$ é necessária para que a e b sejam reversas. ()
 d) A condição $a \cap b = \emptyset$ é suficiente para que a e b sejam reversas. ()
 e) A condição «a e b são coplanares» é necessária e suficiente para a negação da condição «a e b são reversas». ()
- 4 — a) O número mínimo de plano que pode limitar uma parte finita do espaço é três. ()
 b) As interseções obtidas com três planos distintos, interceptando-se dois a dois, são três retas distintas. ()
 c) Os pontos A e B pertencem, respectivamente, às retas reversas a e b. A interseção dos planos (A,b) e (B,a) é a reta (A,B). ()
 d) A interseção de um diedro com um plano é um ângulo. ()
 e) A interseção de um diedro com um plano concorrente com a aresta é um ângulo. ()
- 5 — a) Dados três pontos não alinhados A, B e C, o conjunto {A, B, C} é convexo. ()
 b) Toda reta é um conjunto convexo. ()
 c) Um quadrado divide o plano em duas partes convexas (interna e externa). ()
 d) A interseção de duas figuras convexas é uma figura convexa. ()
 e) A reunião de figuras convexas é convexa. ()

165. Respostas

- 1) V V F F V
- 2) F F V F F
- 3) F V V F V
- 4) F F V F V
- 5) F V F V F

186. Exercícios — Sequência 13

I. Assinalar com um $\otimes$ a proposição que constitui a negação da proposição inicial:

- 1) p: «Todos os alunos do primeiro colegial serão aprovados».
 (A) — Nenhum aluno do primeiro científico será aprovado.
 (B) — Apenas um aluno será aprovado.
 (C) — Pelo menos um aluno será aprovado.
 $\otimes$ (D) — Pelo menos um aluno será reprovado.

NOTA: A resposta certa é (D). Para facilitar a resolução, convém usar quantificadores:

U = conjunto-universo (1.º cient.)
 x = aluno genérico = variável de U .
 p : $\forall x, x \in U \Rightarrow x$ aprov.
 $\sim p$: $\exists x, x \in U, \text{ t.q. } x$ não aprov.

- 2) p: «Pelo menos um aluno do 1.º científico será aprovado».
 $\otimes$ (A) — Todos serão reprovados.
 (B) — Um e apenas um será reprovado.
 (C) — Todos serão aprovados.
 (D) — Pelo menos um será reprovado.

p : $\exists x, x \in U \text{ t.q. } x$ aprov.
 $\sim p$: $\forall x, x \in U \Rightarrow x$ reprov.

- 3) p: «A reta r é perpendicular a todas as retas do plano, concorrentes com r».
 (A) — A reta r é perpendicular a uma reta do plano.
 (B) — A reta r não é perpendicular a nenhuma reta do plano.
 (C) — A reta r é paralela ao plano.
 (D) — A reta r não é perpend. a pelo menos uma reta do plano.
- 4) p: «As retas r e s são distintas e uma e uma só delas é perpendicular ao plano α ».
 (A) — r e s são perpendiculares a α .
 (B) — ambas ou nenhuma é perpendicular a α .
 (C) — r e s não são perpendiculares a α .
 (D) — uma e uma só delas não é perpendicular a α .
- 5) p: «r e s são duas retas e $r \cap s = \emptyset$ ».
 (A) — «r e s são concorrentes».
 (B) — «r e s não são paralelas».
 (C) — «r e s não são reversas».
 (D) — «r e s são concorrentes ou iguais».

II. Admitindo verdadeira a proposição:

- 6) p: «As retas r e s são reversas e r está contida no plano α », a conclusão verdadeira é:
 (A) — O plano α é concorrente com s
 (B) — O plano α é concorrente com s ou paralelo a s
 (C) — O plano α pode conter s
 (D) — O plano α é paralelo a s.
- 7) h: «O plano α contém quadrado ABCD e os segmentos AA' e CC' são perpendiculares a α e estão no mesmo semi-espaço de origem α ».

Então, é verdade que:

- (A) — A reta $r = rt.(A',C')$ é paralela ao plano.
 (B) — r é concorrente com α .
 (C) — r é ortogonal com a reta $s = rt.(B,D)$.
 (D) — r e s são reversas, mas não necessariamente ortogonais.
- 8) h: «A reta r é perpendicular à face α do diedro $(\alpha\beta)$ ».
- Podemos concluir que:
- (A) — $r \perp \beta$
 (B) — $r \parallel \beta$
 (C) — $r \subset \beta$
 (D) — $r \subset \beta$ ou $r \parallel \beta$ ou r concurr. com β .

III. Novos testes «verdadeiro ou falsos».

- 9 — a) Uma reta pode ser paralela a ambas as faces de um diedro. ()
 b) Uma reta pode ser perpendicular a ambas as faces de um diedro. ()
 c) Uma reta perpendicular a uma reta de um plano é perpendicular ao plano. ()
 d) Uma reta perpendicular a uma reta de um plano não é perpendicular ao plano. ()
 e) Uma reta ortogonal a uma reta de um plano pode ser paralela ao plano. ()
- 10 — a) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si (no espaço). ()
 b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas ou ortogonais. ()
 c) Num cubo, cada aresta é ortogonal com outras duas arestas. ()
 d) Uma reta r é ortogonal aos lados de um quadrado; então r é perpendicular ao plano do quadrado. ()
- 11 — a) Duas retas reversas não podem ser paralelas à mesma reta. ()
 b) Duas retas reversas não podem ser paralelas ao mesmo plano. ()
 c) Duas retas reversas não podem ser perpendiculares ao mesmo plano. ()
 d) Duas retas reversas não podem ser perpendiculares à mesma reta. ()
- 12 — a) Se uma reta e um plano são perpendiculares a um terceiro plano, a reta é paralela ao primeiro plano. ()
 b) Uma reta é perpendicular a um plano; então, existe outro plano, perpendicular ao primeiro, que contém a reta. ()
 c) Se uma aresta de um diedro é perpendicular à aresta de um diedro, ela está contida numa seção normal do diedro. ()
 d) Se dois pontos A e B são equidistantes de um plano, a reta (A,B) é paralela ao plano. ()
- 13 — a) Se três pontos pertencem ao mesmo semi-espaço e são equidistantes do plano origem, eles determinam um plano paralelo à origem. ()
 b) Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, eles são paralelos. ()
 c) Se duas retas paralelas são perpendiculares a dois planos distintos, estes não são paralelos. ()
 d) Se dois planos são paralelos e uma reta é paralela a um deles, é paralela ao outro. ()
 e) Um plano divide dois lados de um triângulo ao meio; ele é paralelo ao terceiro lado. ()

195. Exercícios — Sequência 14

- 1) Uma reta r forma um ângulo de medida m° com uma reta perpendicular ao plano α . Qual o «ângulo da reta r com o plano α »?
- 2) Uma reta r é paralela a um plano α . Prove que todos os seus pontos são equidistantes de α .
- 3) Dados dois pontos A e B, um em cada face de um diedro reto e equidistantes da aresta, prove que a reta (A,B) tem a mesma inclinação em relação a ambas as faces do diedro.

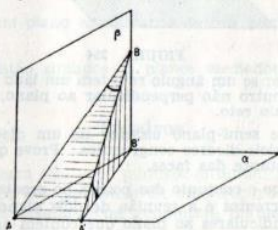


FIGURA 252

- 4) Prove que o conjunto ou lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de três pontos não alinhados A, B, C é a reta perpendicular ao plano (A, B, C), pelo centro da circunferência que possui esses pontos (circuncentro).

- 5) Dado um plano horizontal α e um plano β , oblíquo a α , trace por um ponto de β , fora da interseção, a reta r , perpendicular à

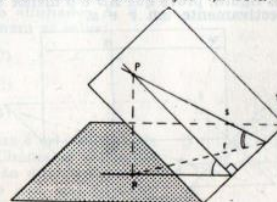


FIGURA 253

interseção e uma reta s , oblíqua à mesma interseção. Prove que a reta r tem maior declividade em relação a α do que a reta s . — (Usar o T.33 (c) e (d)).

- 6) Prove que duas retas paralelas entre si, r e s , não perpendiculares ao plano projetante, se projetam sobre ele numa mesma reta ou em retas paralelas.

- 7) Prove que as projeções de um ângulo sobre dois planos paralelos são ângulos iguais (ou duas semi-retas paralelas ou ainda duas retas paralelas).

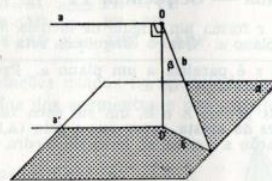


FIGURA 254

- 8) Prove que: se um ângulo reto tem um lado paralelo ao plano de projeção e o outro não perpendicular ao plano, a projeção ortogonal é um ângulo reto.

- 9) Chama-se semi-plano bissetor de um diedro o semi-plano que o divide em dois diedros congruentes. Prove que todo ponto do bissetor é equidistante das faces.

- 10) Prove que o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de duas retas concorrentes é a reunião de dois planos perpendiculares entre si e perpendiculares ao plano que contém as duas retas.

- 11) Prove que o conjunto dos pontos equidistantes de dois pontos A e B é o plano perpendicular ao segmento AB, pelo seu ponto médio (plano mediador).

- 12) Uma reta r é paralela a um plano α ; r' é a sua projeção sobre α e s é uma reta de α reversa com r . Prove que a reta perpendicular ao plano α , pelo ponto comum a r' e s , é perpendicular às duas retas reversas.

- 13) Na mesma figura, prove que AB é o menor segmento com as extremidades respectivamente em r e s .

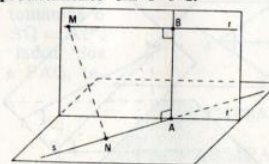


FIGURA 255

Sugestão: $a \perp c, a \perp b \Rightarrow a \perp \beta$; $a' \perp a \Rightarrow a' \perp \beta$.

- 14) Traçar, por um ponto dado, um plano perpendicular a um plano dado.

Sugestão: Pelo ponto dado, traçar uma reta x no plano e a reta r perpendicular ao plano. Construir o plano (r,x) . Provar que ele é solução. Mostrar que há infinitas soluções.

- 15) Por uma reta dada, não perpendicular a um plano dado, traçar um plano perpendicular ao plano dado. Mostra que a solução é única.

- 16) Por um ponto dado, traçar uma reta paralela a um plano dado (o ponto não está no plano). Provar que os pontos da reta são equidistantes do plano. Prove também que a solução não é única.

- 17) Por um ponto dado, fora de um plano dado, traçar um plano paralelo ao primeiro. Provar que a solução é única. Prove também que todos os pontos do plano construído são equidistantes do primeiro.

- 18) Qual o conjunto dos pontos equidistantes de dois planos paralelos?

- 19) Trace um plano equidistante de três pontos não alinhados A, B e C.

- 20) Como estão situados os planos mediadores das cordas de um círculo?

Respostas — sequência 13 — (pág. 249).

- 3) D 4) B 5) D 6) B 7) C 8) D
 9) F F F V
 10) F F V V
 11) V F V F
 12) F V F F
 13) V F F F V

Aqui a maioria dos exercícios é para provar, além daqueles mais teóricos com o intuito de explorar a axiomática construída.

Esses autores propõem um total de 38 exercícios, nos quais pedem para o aluno **calcular**, **provar** e **traçar**, além daqueles em que é para **classificar** as afirmações como verdadeira ou falsa ou **escolher** uma alternativa correta, um diferencial em relação aos livros apresentados anteriormente. Porém, percebemos que a predominância é daqueles em que o resultado deve ser provado, o que indicaria uma valorização da *prova rigorosa* em detrimento das aplicações práticas? Seriam tais mudanças incorporadas em decorrência das influências do MMM na produção didática?

Exercício proposto

P.274 Classificar em verdadeiro ou falso (procure fazer figuras).

- Dado um ponto P , existe uma única reta passando por ele.
- Dados dois pontos A e B distintos, existe um plano que os possui.
- Fora de uma reta há infinitos pontos.
- Num plano há infinitos pontos.
- Três pontos não em linha reta determinam um plano.
- Existe um único plano que contém um triângulo dado no espaço.
- O plano contém infinitas retas.
- No espaço há tantas retas quisermos.
- Uma reta qualquer separa um plano em dois semi-planos.

Exercício proposto

P.275 Classificar em verdadeiro ou falso.

- Se duas retas distintas não são paralelas, então elas são concorrentes.
- Dois retas não coplanares são reversas.
- A condição $r \cap s = \emptyset$ é necessária para que duas retas r e s sejam reversas.
- A condição $r \cap s = \emptyset$ é suficiente para que duas retas r e s sejam reversas.
- A condição $r \cap s = \emptyset$ é necessária para que duas retas r e s distintas sejam paralelas.
- A condição $r \cap s = \emptyset$ é suficiente para que duas retas r e s distintas sejam paralelas.
- Dois retas coplanares são paralelas ou concorrentes.
- Dois retas que formam ângulo reto são perpendiculares.
- Dois retas que são perpendiculares formam ângulo reto.
- Dois retas que são ortogonais formam ângulo reto.
- Dois retas que formam ângulo reto são ortogonais.
- Se duas retas reversas formam ângulo reto, então elas são ortogonais.
- Se duas retas formam ângulo reto, então elas são perpendiculares ou ortogonais.

Exercício proposto

P.276 Classificar em verdadeiro ou falso.

- Por uma reta passam infinitos planos.
- Dois retas distintas determinam um plano.
- Um ponto e uma reta determinam um único plano.
- Se três retas distintas são duas a duas concorrentes, então elas determinam um único plano.
- Três retas distintas, duas a duas paralelas, determinam três planos distintos.
- Se três retas distintas são duas a duas concorrentes, não passando por um mesmo ponto, então elas estão contidas no mesmo plano.
- Dois retas distintas paralelas e uma concorrente com as duas, determinam dois planos distintos.
- As retas que contêm as diagonais de um quadrilátero reverso são reversas.
- Dois semi-planos quaisquer são coplanares.
- Dois retas reversas e uma concorrente com as duas, determinam dois planos distintos.

Exercícios propostos

P.277 Classificar em verdadeiro ou falso.

- Se dois planos distintos têm um ponto comum então eles têm uma reta comum que passa pelo ponto.
- Dois planos distintos que têm uma reta comum são secantes.
- Dois retas reversas e uma concorrente com as duas determinam dois planos secantes.
- Um ponto P é o traço de uma reta r num plano α . As intersecções de α com os planos que contêm r passam pelo ponto P .

P.278 Num plano α há dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ não contidos em retas paralelas e fora de α há um ponto P . Qual é a intersecção dos planos $\beta = (PAB)$ e $\gamma = (PCD)$?

P.279 Duas retas r e s são reversas. Em r há um ponto R e em s há um ponto S . Qual é a intersecção dos planos $\alpha = (rS)$ e $\beta = (sR)$?

Exercício proposto

P.280 Classificar em verdadeiro ou falso.

- uma reta e um plano que têm um ponto comum são concorrentes.
- uma reta e um plano secantes têm um único ponto comum.
- uma reta está contida num plano quando eles coincidem.
- uma reta e um plano paralelos não têm ponto comum.
- um plano e uma reta secantes têm um ponto comum.
- quando uma reta está contida num plano, eles têm um ponto comum.
- se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta do plano.
- se um plano é paralelo a uma reta, qualquer reta do plano é reversa à reta dada.
- se uma reta é paralela a um plano existe no plano uma reta concorrente com a reta dada.
- se uma reta e um plano são concorrentes, então a reta é concorrente com qualquer reta do plano.

Exercício proposto

P.281 Classificar em verdadeiro ou falso.

- Dois planos distintos paralelos tem um ponto comum.
- Se dois planos distintos são paralelos, então uma reta de um deles é paralela ao outro.
- Se dois planos distintos são paralelos, então uma reta de um e outra reta do outro podem ser concorrentes.
- Se dois planos distintos são paralelos, uma reta de um e uma reta do outro são reversas ou paralelas.
- Dois planos secantes têm um ponto comum.
- Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente com o outro.
- Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser concorrente com uma reta do outro.
- Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser reversa com uma reta do outro.
- Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.

Exercício proposto**P.282** Classificar em verdadeiro ou falso.

- Para uma reta ser perpendicular a um plano, é necessário que sejam secantes.
- Uma reta é perpendicular a um plano quando é perpendicular a todas as retas do plano.
- Uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a uma reta do plano.
- Uma reta perpendicular a um plano é reversa a todas as retas do plano.
- Uma reta perpendicular a um plano é ortogonal a todas as retas do plano.
- Uma reta perpendicular a um plano forma ângulo reto com qualquer reta do plano.
- Se um plano contém uma reta perpendicular a outro plano, então ele é perpendicular a este outro.
- Se dois planos são secantes, então eles são perpendiculares.
- Se dois planos são perpendiculares, então eles são secantes.
- Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
- Se uma reta é perpendicular a um plano, por ela passam infinitos planos perpendiculares ao primeiro.

Exercícios propostos**P.283** Abaixo seguem três hipóteses (1, 2, 3) e três conclusões (a, b, c). Associar a cada uma das hipóteses a conclusão que mais lhe convier.**Hipóteses**

- Se duas retas distintas são paralelas e um plano paralelo à primeira tem um ponto comum com a segunda, então ...
- Se por um ponto P , fora de uma reta a , conduzirmos uma reta b e um plano α paralelos à reta a , então ...
- Se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ...

Conclusões

- ela é paralela à intersecção dos planos.
- este plano contém a segunda.
- a reta b está contida em α .

P.284 Classificar em verdadeiro ou falso.

- Se duas retas distintas são paralelas e um plano contém uma delas, então ele é paralelo ou contém a outra.
- Se dois planos são secantes e uma reta de um deles é paralela ao outro, então esta reta é paralela à intersecção.
- Se duas retas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
- Se duas retas são reversas, qualquer plano que passa por uma, intercepta a outra.
- Dados uma reta e um plano quaisquer, existe no plano uma reta paralela à reta dada.
- Dadas duas retas distintas quaisquer, existe plano que passa por uma e é paralelo à outra.
- Se uma reta é paralela a um plano ela é paralela a infinitas retas do plano.

Exercícios propostos**P.285** Associar a cada uma das hipóteses a conclusão que mais lhe convier.**Hipóteses:**

- Se um plano contém duas retas concorrentes ambas paralelas a um outro plano, então ...
- Se dois planos distintos são paralelos e uma reta é concorrente com um deles, então ...
- Se dois planos distintos são paralelos e um plano é secante com um deles, então ...
- Se dois planos paralelos são interceptados por um terceiro plano, então ...

Conclusões

- ele é secante com o outro.
- esta reta é concorrente com o outro.
- as intersecções são paralelas.
- estes planos são paralelos.

P.286 Classificar em verdadeiro ou falso.

- Se um plano contém duas retas paralelas a um outro plano, então estes planos são paralelos.
- Se um plano contém duas retas distintas paralelas a um outro plano, então estes planos são paralelos.
- Uma condição suficiente para que dois planos sejam paralelos é que duas retas distintas de um sejam paralelas ao outro.
- Se duas retas de um plano são, respectivamente, paralelas a duas retas concorrentes de outro plano, então estes planos são paralelos.
- Se dois planos são paralelos, toda reta paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.
- Se dois planos são paralelos a uma reta, então são paralelos entre si.
- Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta que tem um ponto comum com um deles, tem um ponto comum com o outro.

Exercícios propostos**P.287** Associar a cada uma das hipóteses a conclusão que mais lhe convier.**Hipóteses:**

- Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ...
- Num plano há duas retas concorrentes. Se uma terceira reta é perpendicular a uma delas e ortogonal à outra, então ...
- Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ...
- Se uma reta forma ângulo reto com duas retas concorrentes de um plano, então ...
- Se dois planos são perpendiculares a uma reta, então ...
- Se dois planos são paralelos e uma reta é perpendicular a um deles, então ...
- Se duas retas são perpendiculares a um plano, então ...
- Se duas retas são paralelas e um plano é perpendicular a uma delas, então ...

Conclusões:

- eles são paralelos.
- ela é perpendicular ao plano.
- essa terceira reta é perpendicular ao plano.
- elas são paralelas.
- ele é perpendicular à outra.
- ela é perpendicular ao outro.

P.288 Classificar em verdadeiro ou falso.

- Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
- Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas e distintas de um plano, então ela está contida no plano.
- Se uma reta é ortogonal a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
- Uma reta ortogonal a duas retas paralelas e distintas de um plano pode ser paralela ao plano.
- Dadas duas retas distintas de um plano, se uma outra reta é perpendicular à primeira e ortogonal à segunda, então ela é perpendicular ao plano.
- Se uma reta forma ângulo reto com duas retas de um plano, distintas e que têm um ponto comum, então ela é perpendicular ao plano.
- Duas retas reversas são paralelas a um plano. Toda reta ortogonal a ambas é perpendicular ao plano.
- Duas retas não paralelas entre si são paralelas a um plano. Se uma reta forma ângulo reto com as duas, então ela é perpendicular ao plano.
- Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano ou está contida nele.
- Uma reta e um plano perpendiculares a uma outra reta em pontos distintos são paralelos.
- Dois planos respectivamente perpendiculares a duas retas paralelas, são paralelos.

Exercícios propostos**P.289** Associar a cada hipótese a conclusão que mais lhe convier.**Hipóteses:**

- Se dois planos são perpendiculares e uma reta de um deles é perpendicular à intersecção, então ...
- Se dois planos são perpendiculares e uma reta perpendicular a um deles tem um ponto comum com o outro, então ...
- Se por um ponto P , fora de um plano α , conduzirmos uma reta a e um plano β perpendiculares a α , então ...
- Se dois planos secantes são perpendiculares a um terceiro plano, então ...
- Se um plano é perpendicular a dois planos secantes, então ...

Conclusões:

- ela está contida neste outro plano.
- ele é perpendicular à intersecção.
- a intersecção é perpendicular a este terceiro plano.
- ela é perpendicular ao outro.
- a reta a está contida no plano β .

P.290 Classificar em verdadeiro ou falso.

- Dois planos perpendiculares a um terceiro, são perpendiculares entre si.
- Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são paralelos.
- Se dois planos são perpendiculares, então toda reta perpendicular a um deles é paralela ao outro ou está contida neste outro.
- Se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles, é perpendicular ao outro.
- Uma reta e um plano são paralelos. Se um plano é perpendicular ao plano dado então ele é perpendicular à reta.

Exercícios propostos

Nota: Nos exercícios que seguem aconselhamos, quando possível, a aplicação dos exercícios anteriores sem necessitar a respectiva repetição.

P.291 Dadas duas retas reversas r e s :

- a) construir por r um plano paralelo a s ;
- b) provar que o plano construído é único.

Construir
e provar!

P.292 Considere duas retas reversas r e s . Por r passa um plano γ paralelo a s e por s passa um plano δ paralelo a r . Sendo P um ponto fora de γ e de δ :

- a) construir por P um plano paralelo a r e a s ;
- b) provar que o plano construído é único.

P.293 Nas condições do problema anterior:

- a) conduzir por P uma reta que se apoia em r e s ;
- b) provar que a reta conduzida é única.

P.294 Dados uma reta a e um plano α concorrentes, e um ponto P fora de a e de α :

- a) traçar por P uma reta paralela a α e concorrente com a ;
- b) provar que a reta traçada é única.

P.295 Dados dois planos β e γ secantes numa reta i e um ponto P :

- a) obter um plano que passa por P e é perpendicular a β e a γ ;
- b) provar que o plano obtido é único.

P.296 Dadas duas retas reversas b e c e um ponto P :

- a) construir por P uma reta que forma ângulo reto com b e c ;
- b) provar que a reta construída é única.

P.297 Dados uma reta a e um plano α oblíquos, e um ponto P fora de a e de α :

- a) construir por P um plano paralelo à reta a e perpendicular ao plano α ;
- b) provar que o plano construído é único.

Exercício proposto

P.298 Classificar em verdadeiro ou falso:

- a) A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é um ponto.
- b) A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é uma reta.
- c) Quando uma reta é perpendicular ao plano de projeção, sua projeção ortogonal é um ponto.
- d) A projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano, sobre este plano, é menor que o segmento.
- e) Se um segmento tem projeção ortogonal congruente a ele, então ele é paralelo ou está contido no plano de projeção.
- f) Se as projeções ortogonais de duas retas, sobre um plano, são paralelas, então as retas são paralelas.
- g) Se os planos projetantes de duas retas sobre um plano, são paralelos, então as projeções dessas retas são paralelas.
- h) A projeção ortogonal de um triângulo, sobre um plano, é sempre um triângulo.
- i) Se dois segmentos não-congruentes são oblíquos ao plano de projeção, então o maior tem projeção ortogonal maior.
- j) Se dois segmentos são congruentes, então suas projeções ortogonais sobre qualquer plano são congruentes.
- k) Se dois segmentos congruentes, $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, oblíquos a um plano α , tem as extremidades A e B em α , então suas projeções ortogonais, sobre α , são congruentes.
- l) Se dois segmentos não congruentes, $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, oblíquos a um plano α , tem as extremidades A e B em α , então o maior tem projeção ortogonal, sobre α , maior.

Exercício proposto

P.299 Classificar em verdadeiro ou falso:

- a) Se $\overline{PA}$ é um segmento oblíquo a um plano α , com A em α , então $\overline{PA}$ é a distância entre P e A .
- b) Se $\overline{PA}$ é um segmento oblíquo a um plano α , com A em α , então $\overline{PA}$ é a distância entre P e α .
- c) A distância entre um ponto e um plano é a distância entre o ponto e qualquer ponto do plano.
- d) A distância entre um ponto e um plano é a reta perpendicular ao plano pelo ponto.
- e) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer do plano e a reta.
- f) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer da reta e um ponto qualquer do plano.
- g) A distância entre reta e plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer da reta e o plano.
- h) A distância entre dois planos paralelos é a distância entre um ponto qualquer de um e um ponto qualquer do outro.
- i) A distância entre dois planos paralelos distintos é igual a distância entre uma reta de um deles e o outro plano.
- j) A distância entre duas retas reversas é a distância entre um ponto qualquer de uma e a outra reta.
- k) Todo plano que passa pelo ponto médio de um segmento tem os seus pontos equidistantes dos extremos do segmento.
- l) Todo plano que passa pelo ponto médio de um segmento é equidistante dos extremos do segmento.
- m) O plano que passa pelo ponto médio de um segmento e é perpendicular a ele tem os seus pontos equidistantes dos extremos do segmento.

Exercício proposto

P.300 Classificar em verdadeiro ou falso:

- a) Se dois segmentos são oblíquos a um plano, então o maior forma com o plano ângulo maior.
- b) Se dois segmentos são congruentes, então eles formam ângulos congruentes com o plano.
- c) Se dois segmentos congruentes, $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, oblíquos a um plano, têm as extremidades A e B no plano, então eles formam ângulos congruentes com o plano.
- d) Se dois segmentos não congruentes, $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, oblíquos a um plano, têm as extremidades A e B no plano, então o maior forma com o plano ângulo menor.
- e) Se uma reta r é oblíqua a um plano α em A , então o ângulo agudo que r forma com a sua projeção ortogonal r' , sobre α , é menor que o ângulo agudo que r forma com qualquer outra reta de α que passa por A .
- f) Dois planos α e β são oblíquos e sua interseção é uma reta i . Das retas de α que passam por um ponto P deste plano, aquela que forma maior ângulo com β é a reta perpendicular à interseção i .

(IEZZI *et al.*, 1976b, p. 205-206; 210-211; 213-217; 224; 226; 229-231; 233-235; 244; 246; 248; 250)

Aqui os exercícios parecem ter por finalidade fixar a teoria e aprimorar as técnicas de provar e construir.

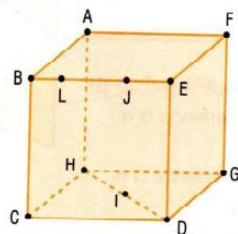
Iezzi *et al* propõe 27 exercícios. Duas situações sobressaem-se: a primeira, em que a maioria dos exercícios propõe **classificar** as afirmações em verdadeiro ou falso, além dos de **construir**, **provar** e **associar** a hipótese a conclusão. Esse tipo de exercício também apareceu em grande quantidade na obra anterior. Percebemos ainda a ausência daqueles do tipo de calcular. A segunda apresenta um diferencial, visto que nesta obra ocorre a inclusão de mais 16 exercícios resolvidos neste capítulo, de certa forma, apontando as regras para os alunos de como resolver o problema proposto.

Exercícios propostos

1. Observe os pontos de A a L nos vértices, arestas e faces do cubo abaixo.

Verifique se os pontos indicados em cada item são ou não colineares e coplanares.

- A e D
- A, F e E
- H, I e D
- B, C e D
- E, J e L
- B, E, L e J
- C, H, F e E
- B, C, H e I
- H, D, I e E



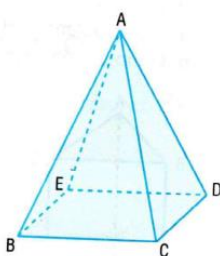
2. Considere que os pontos, as retas e os planos citados são distintos e verifique se cada afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F):

- Por 2 pontos passa uma única reta.
- 3 pontos são sempre colineares.
- 3 pontos nunca são colineares.
- 3 pontos podem ser colineares.
- Existem 5 pontos coplanares.
- Existem 5 pontos não-coplanares.
- Existem 3 pontos não-coplanares.
- Pontos colineares são coplanares.
- Pontos coplanares são colineares.
- Pontos coplanares podem ser colineares.

Exercício proposto

3. Observe a pirâmide de base quadrada e verifique se as retas indicadas em cada item são paralelas, concorrentes ou reversas.

- $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$
- $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{ED}$
- $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{ED}$
- $\overleftrightarrow{EC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$
- $\overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{AE}$
- $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{BE}$
- $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AE}$
- $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AC}$
- $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$



Exercício proposto

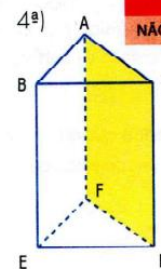
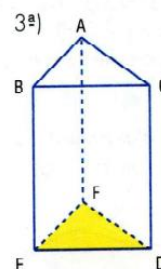
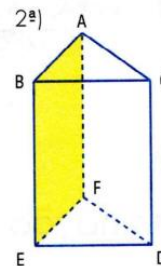
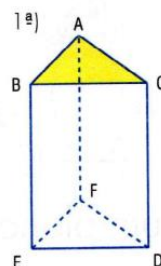
4. Observe as figuras e considere:

α : plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{ED}$ e o ponto $F \notin \overleftrightarrow{ED}$

β : plano determinado pelas retas paralelas $\overleftrightarrow{AF}$ e $\overleftrightarrow{CD}$

γ : plano determinado pelas retas concorrentes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$

δ : plano determinado pelos pontos não-colineares B, A e E



ATENÇÃO!

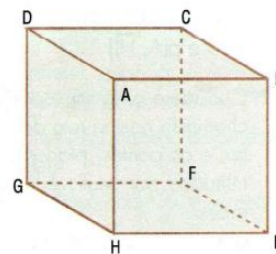
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Identifique em cada figura (1ª, 2ª, 3ª ou 4ª) qual é o plano correspondente à face pintada (α , β , γ ou δ).

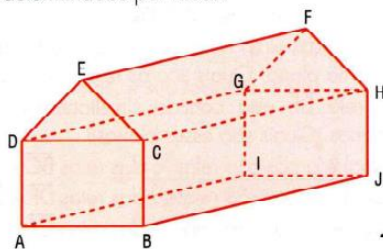
Exercícios propostos

5. Observando o cubo da figura seguinte, responda:

- Dos planos determinados pelas faces, quais são os pares de planos distintos e paralelos?
- Cite três pares de planos secantes.
- Os planos determinados pelas faces CDGF e EFGH são secantes? Em caso afirmativo, qual é a reta intersecção?
- A reta $\overleftrightarrow{AD}$ é intersecção dos planos determinados por quais faces?

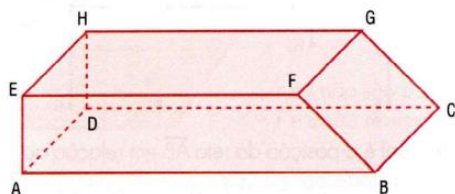


6. Observando a figura espacial abaixo, responda usando planos determinados por faces:



- Qual é a posição relativa dos planos determinados pelas faces EFHC e DEFG?
- A reta $\overleftrightarrow{AI}$ é intersecção de quais planos?
- Qual é o plano paralelo ao determinado pela face ADGI?
- Qual é a reta de intersecção dos planos secantes determinados por BCHJ e ECHF?
- Há algum plano paralelo ao plano determinado pela face ABJI? Em caso afirmativo, qual é esse plano?

7. Observando a figura espacial seguinte, responda:

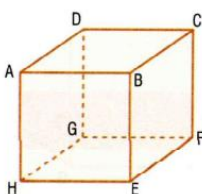


- Qual a posição relativa dos planos determinados pelas faces ABCD e ADHE?
 - Os planos BCGF e EFGH são secantes? Em caso afirmativo, qual é a reta de intersecção?
 - Há algum plano paralelo e distinto do plano determinado por EFGH? Qual?
8. Verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações:
- Se r e s são retas tal que $r \cap s = \emptyset$, então r e s são paralelas.
 - Se α e β são dois planos e r é a reta tal que $\alpha \cap \beta = r$, então α e β são concorrentes.
 - Uma reta e um ponto determinam um plano.
 - Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.
 - Dois planos podem ter um único ponto comum.

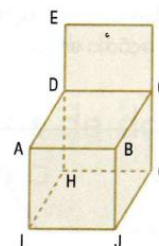
Exercícios propostos

9. Observando o cubo, cite:

- cinco retas paralelas ao plano determinado pela face ADGH;
- cinco retas que estejam contidas no plano determinado pela face CDGF;
- cinco retas que intersectem o plano determinado pela face ABCD.

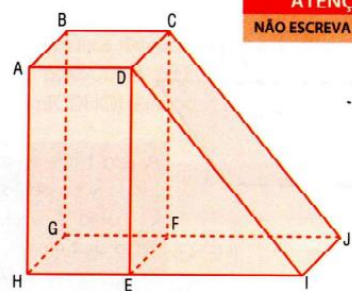


10. Observando a figura abaixo e sua representação matemática, verifique se a reta está contida, é paralela ou intersecta o plano em cada item.



- | | |
|--|--|
| a) $\overleftrightarrow{EF}$ e $p(IJGH)$ | e) $\overleftrightarrow{BD}$ e $p(HIJG)$ |
| b) $\overleftrightarrow{DE}$ e $p(EFGH)$ | f) $\overleftrightarrow{HI}$ e $p(IJ, G)$ |
| c) $\overleftrightarrow{HI}$ e $p(EFCD)$ | g) $\overleftrightarrow{IC}$ e $p(\overleftrightarrow{ED}, \overleftrightarrow{CF})$ |
| d) $\overleftrightarrow{GH}$ e $p(EFCD)$ | h) $\overleftrightarrow{EC}$ e $p(\overleftrightarrow{DG}, \overleftrightarrow{CH})$ |

11. Na figura dada, A, B, C, D, E, F, G e H são os vértices de um paralelepípedo e C, D, E, F, J e I são vértices de um prisma reto de base triangular.

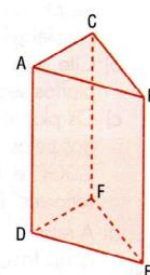


ATENÇÃO!
NÃO EScreva NO LIVRO.

Dê a posição relativa dos pares de figuras em cada item.

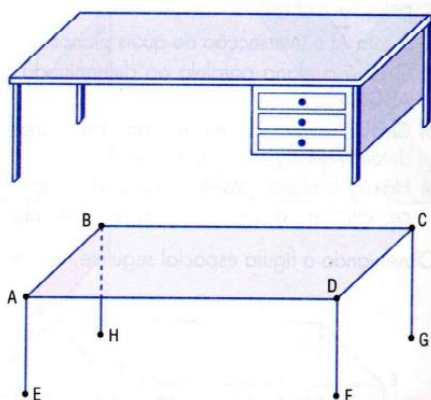
- | | |
|---|--|
| a) $\overleftrightarrow{DE}$ e $p(EFGH)$ | e) $\overleftrightarrow{AC}$ e $p(A, B, D)$ |
| b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GF}$ | f) $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{IJ}$ |
| c) $p(A, D, H)$ e $p(\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CJ})$ | g) $p(CDIJ)$ e $p(EFCD)$ |
| d) D e $p(A, HI)$ | h) $\overleftrightarrow{HE}$ e $\overleftrightarrow{IE}$ |

12. Considere a figura espacial ao lado, chamada prisma reto de base triangular, e os pontos, planos e retas determinados por seus vértices, arestas e faces.



- Qual é a posição da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em relação ao plano determinado pela face EFD?
- Qual é a posição da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em relação ao plano determinado pela face ABC?
- Qual é a posição da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em relação ao plano determinado pela face ACFD?
- Cite duas retas, nessa figura, que estejam furando o mesmo plano. Quais são as retas e qual é o plano?
- A reta $\overleftrightarrow{DF}$ está contida simultaneamente em dois planos. Quais são esses planos?
- Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{FE}$?
- Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{DF}$ e $\overleftrightarrow{EF}$?
- Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{CF}$ e $\overleftrightarrow{DE}$?

13. Observe a figura seguinte e sua representação matemática:



- Qual é a posição da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em relação ao plano determinado por ABCD?
- Cite duas retas que estejam furando o plano determinado por ABCD.
- A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a intersecção de infinitos planos. Cite dois desses planos.
- Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BT}$?
- Cite uma reta que seja reversa à reta $\overleftrightarrow{AD}$.
- Cite um plano paralelo ao plano determinado por ABCD.
- A reta $\overleftrightarrow{DF}$ está simultaneamente em vários planos. Cite dois desses planos.
- Cite duas retas paralelas ao plano determinado por ABCD.

Exercício proposto

14. Diga se são verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações:

- Se dois planos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.
- Se dois planos são paralelos, qualquer reta que intersecta um deles intersecta o outro.
- Se dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.
- Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.
- Uma reta r não está contida num plano α e é tal que $r \parallel \alpha$. Então, existe uma reta s , contida em α , tal que $s \parallel r$.
- Se um plano intersecta dois planos paralelos, então as intersecções são retas paralelas.
- Se dois planos são paralelos, então toda reta que é paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.
- Por um ponto P fora de um plano α podemos passar um único plano β tal que $\alpha \parallel \beta$.
- Se uma reta r é paralela a cada um de dois planos secantes, então r é paralela à reta de intersecção dos planos.
- Se dois planos distintos são paralelos, uma reta de um deles pode ser reversa a uma reta do outro.

- Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
- Se dois planos são paralelos, toda reta paralela a um deles é paralela ao outro.

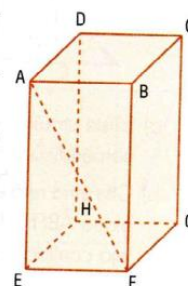
Exercícios propostos

15. Associe V ou F a cada uma das afirmações:

- Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são coplanares.
- Por um ponto passa uma única reta perpendicular a um plano dado.
- Se uma reta pertence a um plano, toda perpendicular a ela será perpendicular ao plano.
- Se dois planos distintos, α e β , são paralelos, então toda reta r perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.
- Por um ponto passa um único plano perpendicular a uma reta dada.
- Se uma reta é perpendicular a um plano, ela é perpendicular a todas as retas desse plano.
- Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas.
- Se uma reta é perpendicular a uma reta do plano, então ela é perpendicular a esse plano.
- Se uma reta e um plano são paralelos, toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.

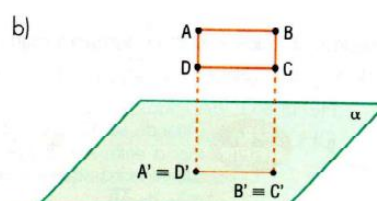
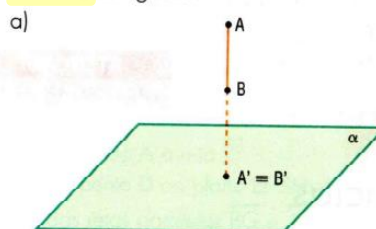
16. A figura seguinte é um paralelepípedo.

- Cite duas retas que sejam perpendiculares ao plano EFGH.
- A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular ao plano determinado por BCGF. Cite um outro plano perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$.
- A reta $\overleftrightarrow{AF}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{FG}$? Justifique a resposta.



Exercícios propostos

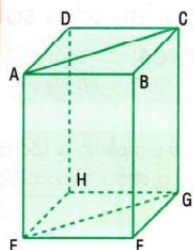
20. Observe as figuras:



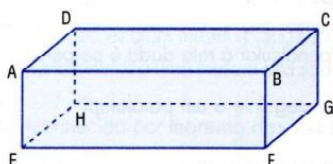
Exercícios propostos

17. Considerando o paralelepípedo abaixo e os planos determinados pelas faces, resolva as questões:

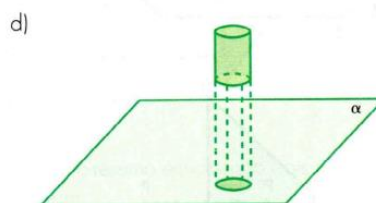
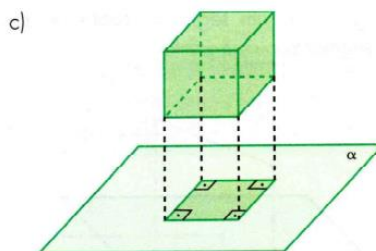
ATENÇÃO!
NÃO EScreva NO LIVRO.



- Cite todos os planos perpendiculares a $p(ABFE)$.
 - Quais são os dois planos que contêm a reta $\overleftrightarrow{DH}$ e são perpendiculares ao plano $EFGH$?
 - O plano diagonal $ACGE$ é perpendicular ao plano $EFGH$? Por quê?
 - A reta $\overleftrightarrow{CG}$ é perpendicular ao plano $EFGH$. Qual é a posição dos planos $CDHG$, $ACGE$ e $BCGF$ em relação ao plano $EFGH$?
18. Associe V ou F a cada uma das afirmações:
- Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles que for perpendicular à intersecção será perpendicular ao outro.
 - Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.
 - Dados um plano α e uma reta r , existe um plano β que contém r e é perpendicular a α .
19. Observando o paralelepípedo da figura seguinte, resolva:



- Existe um único plano que contém a reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que é perpendicular ao plano $ADHE$. Qual é esse plano?
- Cite uma reta e um plano que são perpendiculares ao plano $ABFE$, de tal forma que a reta considerada esteja contida no plano citado.
- Existe um único plano que contém a reta $\overleftrightarrow{CG}$ e que é perpendicular ao plano $ADHE$. Qual é esse plano?
- Os planos $ADHE$ e $EFGH$ se intersectam segundo a reta $\overleftrightarrow{EH}$. Cite um plano que seja perpendicular a cada um dos planos dados e perpendicular à reta $\overleftrightarrow{EH}$.
- Qual a posição da reta $\overleftrightarrow{EH}$ em relação ao plano $BCFG$?
- Qual é o único plano perpendicular ao plano $ABCD$ e que contém a reta $\overleftrightarrow{GH}$?
- Cite uma reta contida no plano $BCGF$ e que seja perpendicular ao plano $ABCD$.



Do item **a** podemos afirmar: a projeção ortogonal de um segmento sobre um plano pode ser um ponto.
O que podemos afirmar dos itens **b**, **c** e **d**?

21. Verifique se cada afirmação é verdadeira ou falsa.
- A projeção ortogonal de um triângulo sobre um plano pode ser um segmento.
 - A projeção ortogonal de uma circunferência sobre um plano pode ser um ponto.
 - Se a projeção ortogonal de $\overleftrightarrow{AB}$ sobre α é $\overleftrightarrow{A'B'}$, então a medida de $\overleftrightarrow{A'B'}$ é menor do que a de $\overleftrightarrow{AB}$.
 - Se a projeção ortogonal do $\triangle ABC$ sobre um plano α é o $\triangle A'B'C'$ e $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, então o $\triangle ABC$ está contido em α ou está contido em um plano distinto e paralelo a α .
 - A projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.
 - As projeções de três pontos não-colineares sobre um plano podem ser três pontos colineares.

22. Considere um plano α , uma reta r e um ponto P tal que $r \not\subset \alpha$, $P \notin \alpha$ e $P \notin r$.

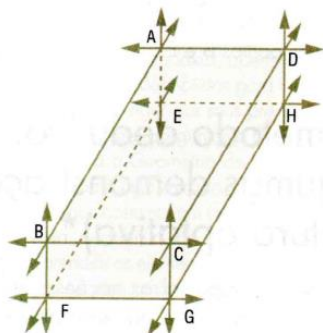
Assinale todas as possibilidades quando se faz a projeção ortogonal respectivamente de r e P sobre α .

- Uma reta e um ponto fora dela.
- Um único ponto.
- Dois pontos distintos.
- Uma reta.
- Dois retas distintas.

ATENÇÃO!
NÃO EScreva NO LIVRO.

Exercícios propostos

23. Observando o paralelepípedo da figura seguinte, indique um segmento que determina a distância:

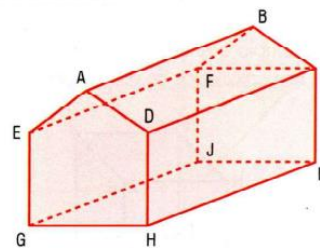


- entre os pontos C e D .
- do ponto A à reta $\overleftrightarrow{EF}$.
- do ponto D ao plano $FFGH$.
- das retas paralelas $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{AH}$.
- do ponto D ao plano $BCGF$.
- da reta $\overleftrightarrow{AB}$ ao plano $DCGH$.
- da reta $\overleftrightarrow{BC}$ ao plano $ADHE$.
- da reta $\overleftrightarrow{AF}$ ao plano $CDHG$.
- entre os planos $ABCD$ e $FFGH$.
- entre os planos $ABFE$ e $CDHG$.
- entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.
- entre as retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{AD}$.

ATENÇÃO!
NÃO EScreva NO LIVRO.

O autor privilegia o ver, na maioria dos exercícios apresenta uma imagem para ilustrar o problema, mediante a observação são exploradas as questões teóricas.

24. Observando a figura abaixo, indique um segmento que determina a distância:

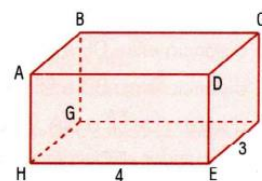


- da parede da frente à parede dos fundos da casa.
- entre as paredes laterais.
- da cumeeira ao piso (ponto A ao plano $GHJI$).

25. Considere um paralelepípedo com as medidas indicadas na figura abaixo.

Determine as distâncias:

- entre os pontos A e B .
- entre os pontos H e F .
- entre os pontos C e E .
- entre os pontos D e H .
- do ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$ à reta $\overleftrightarrow{CD}$.
- do ponto médio de $\overleftrightarrow{BC}$ à reta $\overleftrightarrow{HE}$.
- do ponto F ao plano $p(A, B, G)$.
- entre as retas $\overleftrightarrow{HE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$.
- entre as retas $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{BH}$.
- da reta $\overleftrightarrow{BD}$ ao plano $p(E, F, H)$.
- entre os planos $p(A, D, E)$ e $q(B, G, F)$.
- entre as retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{BD}$.
- entre os pontos B e E .



Exercício proposto

26. Demonstre o teorema 3:

Duas retas paralelas distintas determinam um único plano.

Desafio em dupla

(UFPE) Sejam π_1 e π_2 planos que se interceptam em uma reta t e formam um ângulo de 45° . Em π_1 escolha pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 distando respectivamente 3 cm, 7 cm, 8 cm, 15 cm e 21 cm de t . A reta perpendicular a π_1 passando por P_1 intercepta π_2 em um ponto Q_1 . Qual o valor, em cm, de $P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 + P_4Q_4 + P_5Q_5$?

PARA REFLETIR

Pesquise o significado de ângulo entre dois planos concorrentes.

(DANTE, 2005, p. 344-345; 347-348; 350; 353-359)

Já Dante propõe 27 exercícios, sendo um deles um desafio para ser feito em dupla. A maior parte se destina a **observar** e **identificar**, **determinar** ou **responder** o que se pede, além de **classificar** as afirmações em verdadeira e falsa, tendo apenas uma demonstração na sessão optativa. Observamos que Dante, antes de propor os exercícios, faz a apresentação do conteúdo, na maioria das vezes, por exemplificação e não por demonstração, ou seja, em vez de provar que o teorema é verdadeiro, ele mostra o resultado dele por meio de imagens, assim

também parece ser a tendência nos exercícios, observar para ver, de modo que são recorrentes enunciados que dizem: “observe a figura”, “considere o paralelepípedo”.

Ainda assim, é possível perceber, com exceção no livro do Dante, que o mesmo rigor da prova empregado nas demonstrações dos teoremas/proposições é esperado nos exercícios. Um rigor na escola que também disciplina os corpos, que tenta uniformizar e subordinar todos os alunos às regras do jogo escolar. Que regula vestimenta, posturas, costumes, como se pudesse, assim, produzir futuros cidadãos condizentes com o formato

necessário ao padrão que se imaginava ser o ideal naqueles momentos.

Figura 25 - Uniforme do Colégio Pedro II em 1962



Fonte:

http://www.cp2.g12.br/images/comunicacao/memoria_historica/img/uniformes/1962.jpg

“Em suma, a arte de punir, no regime do poder disciplinar, não visa nem a expiação, nem mesmo exatamente a repressão. Põe em funcionamento cinco operações bem distintas: relacionar os atos, os desempenhos, os comportamentos singulares a um conjunto, que é ao mesmo tempo campo de comparação, espaço de diferenciação e princípio de uma regra a seguir. Diferenciar os indivíduos em relação uns aos outros e em função dessa regra de conjunto — que se deve fazer funcionar como base mínima, como média a respeitar ou como o ótimo de que se deve chegar perto. Medir em termos quantitativos e hierarquizar em termos de valor as capacidades, o nível, a “natureza” dos indivíduos. Fazer funcionar, através dessa medida “valorizadora”, a coação de uma conformidade a realizar. Enfim traçar o limite que definirá a diferença em relação a todas as diferenças, a fronteira externa do anormal (a “classe vergonhosa” da Escola Militar). A penalidade perpétua que atravessa todos os pontos e controla todos os instantes das instituições disciplinares compara, diferencia, hierarquiza, homogeniza, exclui. Em uma palavra, ela normaliza.”
(FOUCAULT, 2002, p. 152-153)

Se a escola, aparentemente, apresenta um rigorismo por natureza, buscar uma forma de ser mais rigorosa ainda poderia ser o caminho para a educação talvez “entrar nos trilhos”? A pergunta é inevitável neste momento diante de notícias que apresentam um aumento do número de escolas cívico-militares no país nos últimos anos. Em reportagem da BBC News Brasil⁴², ficou latente a ênfase de pais, mas também de alunos que optaram por estudar numa escola com esta

⁴² O avanço das escolas cívico-militares na rede particular de ensino. Camilla Veras Mota e Leandro Machado. BBC News Brasil em São Paulo. 14 junho 2020. Disponível em <https://www.bbc.com/portuguese/brasil-51822924>.

conformidade por conta da disciplina, das regras, do rigor.

Essa disciplina escolar, natural ou criada, talvez tenha em sua gênese a busca pela uniformização, a ordem, os horários, as tarefas, os modelos pedagógicos, o livro, uso do material padronizado, a sala de aula e o professor que replica o jeito ao qual fora ensinado, em que ele é a figura central, que denota reter supostamente o conhecimento e a cada ano recebe novos pupilos para, então, repassar seus conhecimentos. Este parece ser um dogma inconcebível de mudanças, é como se essa padronização fosse um mantra que deve ser seguido à risca, repetido de Norte a Sul do país, para que a escola mantenha sua aura de escola, e o passado seja perpetuado, atuando no presente.

A geometria tem como um dos personagens principais de sua história Euclides e o seu modelo formal de apresentação da matemática constante nos Elementos, segundo o qual se acredita que “Os elementos de Euclides não só constituem a mais antiga obra matemática grega importante a chegar até nós, mas o texto mais influente de todos os tempos.” (BOYER, 1996, p. 82) Essa influência chega ao ensino de matemática no Brasil, especialmente na organização dos livros didáticos. Imenes (1989, p. 208) alude que “de um modo geral o ensino de matemática está fortemente marcado pelo modelo euclidiano. Isso é visível na organização interna de cada capítulo, como já foi exemplificado, mas é também marcante na organização do currículo tradicional como um todo.” No entanto, Imenes (1989, p. 298) aponta que esta influência, ainda sentida em dias atuais, trouxe grandes dificuldades, corroborando para o fracasso do ensino da matemática no país devido ao modelo formal euclidiano de apresentação da matemática.

Mas, talvez, não apenas a formalidade de Euclides, mas a própria forma da matemática, seu andamento, rigor, sua verticalização e dificuldade a cada ponto acrescentado, a cada novo conteúdo, que “depende” de algum conhecimento pré-existente adquirido. Se a

“o sentido da consistência dessa disciplina está ligado à correlação, imperfeita mas perfeitamente explícita, dos conteúdos que ela produz e dos sistemas operatórios que ela propõe. Assim, ela continua a fornecer às outras ciências um paradigma de conhecimento rigoroso, mesmo sabendo que o rigor é sempre relativo e que o fundamento absoluto não é alcançado.” (GRANGER, 1994, p. 70)

disciplina Matemática é tida como rigorosa, talvez a maior de todas, há ainda a questão das provas, aqui não no sentido matemático de provar as respostas, teoremas ou proposições, mas expresso a questão da avaliação a que o aluno é submetido a cada bimestre (e o professor necessariamente precisa aplicar) para “medir” o nível de conhecimento adquirido. Este é um capítulo à parte da arte de ser professora de matemática. Um teatro de horrores parece emanar na sala de aula quando chega a famigerada prova – olhares de desespero, de não sei o que fazer, de não sei se corro ou desmaio, de desleixo “tô nem aí”, e assim por diante – transparece no rosto de boa parte dos alunos.

A geometria de Euclides reinou por um longo tempo, mas não sem sofrer críticas e questionamentos. O postulado das paralelas, talvez o mais polêmico, foi alvo de discussões entre os geômetras, muitos, acreditando ser ele um teorema, tentaram em vão provar a sua veracidade. *Veja* como os autores dos livros analisados abordam a questão do paralelismo entre retas no espaço:

10 — Observação. O postulado das paralelas: Por um ponto, P , tomado fora de uma reta, R , só se pode traçar uma paralela a essa reta ainda é verdadeiro no espaço. Com efeito: a paralela a R , traçada por P , determina, com a reta R um plano que é o mesmo determinado por P e R e nesse plano o postulado é verdadeiro.

(ROXO et al., 1945, p. 270)

Nesta obra não é feita a definição de retas paralelas, provavelmente por ser dado como conhecido já que os alunos tiveram contato com a geometria plana na etapa de ensino anterior. Porém o autor faz uma observação onde enuncia o postulado das paralelas no plano e afirma que este também é válido no espaço, e justifica tal afirmativa usando o resultado do teorema da determinação de um plano.

156. Axioma 12

(Das paralelas ou de Euclides)

Por um ponto P , não pertencente a uma reta r , existe uma única reta s , paralela à reta r .

Por definição, duas retas são paralelas quando estão contidas no mesmo plano e a sua interseção é o conjunto vazio $\emptyset$.

CONTINUIDADE — Admitimos para a distribuição dos pontos da reta uma propriedade denominada *continuidade*, que é também um conceito primitivo.

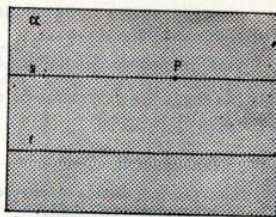


FIGURA 198

(ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1967, p. 226)

7. Retas paralelas.

PRIMEIRO TEOREMA. Por um ponto situado fora de uma reta pode-se traçar uma paralela a esta reta e somente uma.

Demonstração.

Sejam a reta S e o ponto exterior A (fig. 8).

Qualquer paralela a S determina com ela um plano; logo, se a paralela traçada passar no ponto A , o plano das

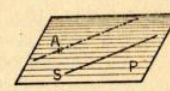


FIG. 8

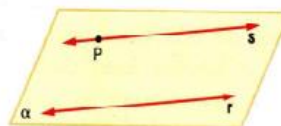
duas paralelas confundir-se-á com o plano P , determinado por S e A . Em virtude do postulado de Euclides, a paralela a S que contém o ponto A , é única.

(QUINTELLA, 1960, p. 105-106)

Teorema 4: Por um ponto P fora de uma reta r do espaço passa uma única reta s paralela a ela.

Demonstração:

Considere r uma reta do espaço e P um ponto não pertencente a r . Pelo teorema 1, existe um único plano α que contém P e r ; nesse plano, existe uma, e somente uma, reta s paralela a r passando por P (resultado da Geometria plana).



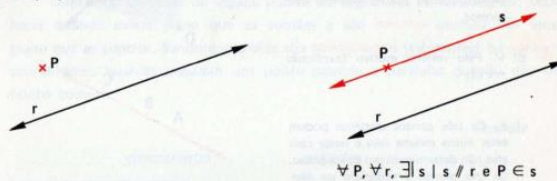
Por outro lado, não existem retas paralelas a r passando por P que não estejam contidas em α , já que, pelo teorema 2, todas as retas coplanares com r passando por P estão contidas em α .

Portanto, a reta s é a única reta do espaço que contém P e é paralela a r .

(DANTE, 2005, p. 359)

Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

Com isto, dado um ponto P fora de uma reta r , por P podemos traçar (construir) uma e uma só reta paralela a r . Se o ponto P pertence a r , a paralela é a própria reta r .



$\forall P, \forall r, \exists ! s \mid s \parallel r \wedge P \in s$

Observação
As proposições iniciais citadas são aceitas sem demonstração e são chamadas **postulados**. O último deles é conhecido por **postulado das paralelas** ou **postulado de Euclides** (300 a.C.).

(IEZZI et al., 1976b, p. 205)

Já nas obras de Rocha, Barbosa e Pierro Neto e Iezzi et al., a afirmativa é tomada como verdadeira sem a comprovação de sua veracidade. Sendo ela denominada de axioma na primeira e de postulado na segunda. Em ambas não há referência ao espaço.

Quintella e Dante também não definem retas paralelas (Quintella até menciona que a definição de retas paralelas é dada no livro da 3ª série da coleção para o ginásio). De modo semelhante esses autores enunciam a questão do paralelismo entre retas no espaço como um teorema e apresentam a demonstração dele. Em ambas, apesar de algumas diferenças, é utilizado o teorema da determinação do plano e o postulado das paralelas de Euclides como justificativa.

Apesar de os autores se referirem a Euclides, o postulado das paralelas de Euclides no plano tem uma redação bastante diferente das que aqui foram apresentadas.

5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

(EUCLIDES, 2009, p. 98)

E, no Livro XI, ao tratar da geometria espacial, Euclides não enuncia um novo postulado sobre o paralelismo de retas no espaço. A redação proposta pelos autores dos livros didáticos se assemelha mais com o axioma do paralelismo de Hilbert, sendo que os matemáticos o consideram equivalente ao postulado original de Euclides.

IV. (Axioma de Euclides). Seja a uma recta qualquer e A um ponto exterior a a ; então, no plano determinado por a e A há, no máximo, uma recta que passa por A e não corta a .¹¹

(OLIVEIRA, 2003, p. 26)

E foi a partir da negação do quinto postulado de Euclides que outras geometrias surgiram – as “não euclidianas”.

Em meados do século 19, o olhar altaneiro que Félix Klein lançou sobre as diferentes geometrias que haviam sido produzidas ao longo da história – a geometria euclidiana, com o seu olhar arquitetônico plano e planificador da *physis* e indiferente ao mundo praxiológico; a geometria analítica cartesiana com o seu olhar algébrico-sintético-cartográfico conquistador-explorador de terras e mares distantes nunca antes navegados; a geometria projetiva com o seu olhar qualitativo-descritivo arquitetônico-representacional de cenas, paisagens, terrenos e construções civis e militares; a geometria topológica com o seu micro e macro-olhar geotopográfico demarcador de fronteiras, vizinhanças e limites territoriais de todos os espaços possíveis; as geometrias não-euclidianas que alargando os horizontes do infinito potencial euclidiano, lançou o seu olhar à exploração de todos os novos horizontes de espaços infinitos atuais, de espaços transfinitos – deu-nos a ver, em perspectiva panorâmica luminosa e dourada, a real fisionomia genérica e abstrata da razão geométrica metamórfica que havia orientado, desde o Renascimento, o projeto colonizador bélico expansionista europeu que conquistou o poder político global através de todas as revoluções liberais burguesas que se sucederam a partir da francesa, ocorrida em 1789, bem como das revoluções republicanas de independência das colônias, a partir da revolução americana de 1776. (MIGUEL; VIANNA; CORRÊA, 2020, p. 58)

Refletindo sobre essa variedade de geometrias, nos questionamos sobre as que são praticadas hoje em dia: quais delas ainda são euclidianas? A geometria ensinada na escola é euclidiana? O que faz uma geometria ser euclidiana? Alargando um pouco mais esses questionamentos temos: qual matemática é ensinada na escola? Será que é a mesma praticada pelos matemáticos? Ou, ainda, aquela descrita nos livros de história da matemática? Quando ouvimos a palavra matemática, o que nos vem em mente, a prática dos matemáticos ou aquilo que vimos no tempo de escola? Seria o rigor? A disciplina metódica no aprendizado? A ciência Matemática é diferente da disciplina escolar Matemática?

Assim como nos questionamentos anteriores, poderíamos nos perguntar em relação aos diversos momentos políticos de nosso país: se as decisões emanadas do poder influenciaram diretamente nas escolas (nas disciplinas, no rigor)? Ou apenas auxiliaram as mudanças que já estariam em curso ao natural? Mas, e a sociedade, que, diferentemente da escola, teria como escolher não seguir as regras e as ordens impostas? Ou necessariamente deveria seguir a cabresto?

Primeiramente é importante ressaltar que o rigor dos governos é latente as suas ações e omissões em governar. O Brasil já vivenciou diferentes momentos e diferentes governantes, desde os mais rigorosos aos menos rigorosos ou menos preocupados. Já tivemos aquele que

iria “varrer a bandalheira”⁴³, o que “acabaria com os marajás”⁴⁴, mas tivemos um período realmente rigoroso, onde o lema – ordem e progresso, talvez devesse ser trocado por – rigor e repressão. Este período, talvez o mais emblemático (coercitivo) de toda era republicana, onde o cerceamento à liberdade foi o ponto constante na agenda das decisões governamentais.

Embora tenha sido um período nefasto (1964-1985), é necessário lembrar que os governos ditatoriais estenderam-se por diferentes momentos (Era Vargas) em que o rigor sempre foi posto à mesa, mas talvez nenhum deles tenha sido tão violento e repressivo. Alguns problemas enfrentados pelos militares no poder não eram novos, embora tenham se acentuado e pressionado o governo, entre eles o grande acúmulo de pessoas nos principais centros urbanos ocasionado pelo êxodo rural, e com isso, tudo ficava mais difícil: a moradia, o trabalho, o transporte, as escolas, segmentos que já demandavam anteriormente a 1964 políticas voltadas a sanear os déficits, mas agora demonstravam maior problemática. Nesta conjuntura, tentando apaziguar os ânimos, os militares vislumbraram a escola como grande aliada, pois, se antes, o ambiente escolar comungava a ideia de liberdade e conhecimento, agora, paulatinamente, transforma-se em arena, campo de batalha, passava a ser local de repressão, cerceamento de expressão e liberdade. Trabalhadores, educadores ou não, sofriam vigilância constante, repressão à liberdade de manifestação e expressão. Essa rigidez se torna mais perceptível a partir do Decreto/Lei n. 477, de 26 de fevereiro de 1969:

O artigo primeiro desse Decreto denominou “infração disciplinar” de professores, alunos e funcionários dos estabelecimentos de ensino público e particular, o “aliciamento e incitamento à greve”; o “atentado contra pessoas, bens ou prédios”; os “atos destinados à organização de movimentos subversivos”; a confecção ou simplesmente a distribuição ou a retenção de “material subversivo”; o seqüestro; o uso do recinto escolar para “fins de subversão”. A punição, após processo sumário, consistiu na demissão e proibição de readmissão em serviço da mesma natureza em qualquer outro estabelecimento por um prazo de cinco anos. O processo sumário, que oficializou a delação e o terrorismo em cada unidade, consistia na delegação do poder ao dirigente da unidade de conferir poderes a qualquer funcionário do estabelecimento para num prazo de 20 dias apurar as infrações e comunicar os superiores para a instalação do Inquérito Policial Militar (os IPMs). (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1992, p. 179)

⁴³ Jânio Quadros - 22º presidente do Brasil de 31 de janeiro de 1961 a 25 de agosto de 1961. Slogan de sua campanha a vassoura: “Varre, varre, varre vassourinha! Varre, varre a bandalheira! Que o povo já tá cansado de sofrer dessa maneira”.

⁴⁴ Fernando Collor de Mello - 32º Presidente da República do Brasil durante os anos de 1990 a 1992. 1º presidente eleito (pós ditadura militar) pelo voto direto.

Se a sociedade passou a ser gerida através da perseguição e coerção, e o modo de governar se deu pela força, intimidação e quase extinção da oposição, a escola parece ter sido utilizada, de um lado, como aparelho repressor e, de outro, como forma de arrefecer os ânimos da sociedade, através de um programa de massificação de escolas. Conforme aponta Búrigo (2014, p. 29), “o governo implementava sua estratégia de desenvolvimento dependente, que tinha como um vetor a política de expansão do acesso à escolarização”. Com a publicação da nova lei de diretrizes e bases da educação nacional, a escola retomou a ideia da profissionalização em nível secundário, que, de um lado, ofereceria ao mercado o profissional em abundância, de outro, fechava as portas ao nível superior. A profissionalização seria uma espécie de compensação às famílias das camadas populares, pelo fato de que seus filhos não teriam acesso ao nível superior. O ministro do Planejamento Roberto Campos, em 1968, expressa seu ponto de vista:

O ensino médio, segundo Campos, deveria atender à massa, enquanto o ensino universitário fatalmente deveria continuar reservado às elites. Além do mais, o ensino secundário deveria perder suas características de educação “propriamente humanista” e ganhar conteúdos com elementos utilitários e práticos. (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1992, p. 169)

Este período teve como mote a forte repressão, baseado na ideia de frear um avanço comunista, tendo no rigor e na força (armada) o poder para atropelar a liberdade de expressão e o debate livre. Como forma de autenticar o discurso contra o perigo da China vermelha e da URSS, o governo imprime leis que reprimem manifestações, opiniões contrárias, deflagrando perseguições aos partidos políticos de vertente esquerdista - alguns são extintos e seus adeptos passam a viver na clandestinidade.

Penso que a escola reflete o andar da sociedade, o contrário também é válido. A concorrência, a busca por melhores condições, as especializações tentando apresentar um currículo recheado e atraente para alcançar a qualificação necessária aos melhores postos de trabalho e o inculcamento de que ser o primeiro garantirá um futuro melhor. A competição se acirra a cada ano e a escola não fica fora deste espetáculo – competições escolares, provas e medalhas, méritos e louros para quem se classifica e, mais ainda, destaque nacional, reportagens sobre os campeões das modalidades (inclusive das olimpíadas de matemática).

Percebendo este cenário dogmatizado, é quase inconcebível pensar a escola de modo diferente, sem a estrutura atual, sem o aparato, e até mesmo sem as disciplinas escolares. Uma escada, é o que visualizo ao observar a escola e a matemática escolar, sempre um degrau atrás do outro, ou melhor, acima, ou abaixo, dependendo do ângulo ou posição que se olhe a escada, e apesar do debate constante e insistente estender-se ano após ano, recorrente nos encontros de diferentes segmentos e pensadores da educação, ainda não se conseguiu efetivar um modelo alternativo capaz de romper com o presente quadro. Ferreira, Miguel e Brito (2020), durante uma *live* do V ENAPHEM - Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática, trazem uma figuração interessante de como é esta criatura (Frankensteiniana?), que eles denominam escola whig, na qual se percebe uma configuração que agracia a poucos e exclui a maioria.

E quando se olha de fora o edifício dessa escola whig, o que se vê é a imagem de uma educação disciplinar, cientificista, conteudista, verbalista, psicológica, hierárquica, etapista, progressivista, propedêutica, liberal, concorrencial, meritocrática, mercadológica, nacionalista, fascista, racista, xenofóbica, misógina, homofóbica, patriarcal, excludente e anti-democrática, que não prepara, a rigor, nem para o trabalho, nem para a cidadania e nem para o enfrentamento dos problemas vitais que se apresentam para as diferentes formas de vida. (FERREIRA; MIGUEL; BRITO, 2020, 30 min)

Por trás dessa escola whig, está a ideia colonizadora que se perpetua em ações e omissões, vivenciada e repassada através de atos, falas, tradições e documentos. A escola-escada que emerge deste processo traz os signos e prerrogativas curriculares que engessam e empenham apenas uma maneira de andamento. Talvez seja compreensível esta escola, porém não a legitima, mas o fato é que há uma necessidade de empregar modelos que possam transcender as lacunas existenciais relacionadas às diferenças de como os alunos chegam à escola, em boa parte com níveis escolares diferentes. A gênese desse processo, talvez, não esteja somente na escola, mas na essência familiar, na falta de contato dos pais com a escola e com a educação em geral, com a matemática e a aversão (generalizada) a ela. A opção de a escola permanecer como sempre foi não deveria sequer ser opção – e a desconstrução deste modelo colonialista não está apenas em mudar o andamento da escola, mas passa também pela dimensão familiar e, em termos mais abrangentes, da própria sociedade em geral.

Ao abordar o assunto, do modo como a escola está posta, Miguel (2021), em uma palestra para o Ciclo de Palestras 2021 do GPSEM – Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática, afirma que é necessário “jogar fora a escada whig-colonizadora da educação matemática escolar” e encontrar outra forma de educar. Talvez isso

não seja tão fácil, porquanto, na educação brasileira, parece existir algumas caixas de Pandora⁴⁵, que ninguém deseja abrir, e assim, a escola continua nos passos da mesma escada, que não é rolante, nem cravejada de diamantes, nem mesmo de ladrilhos, mas é feita de pedra e pó, de difícil acesso, onde o simples fato de o aluno chegar ao final dela, por si só, já deveria ser encarado como um prêmio, um troféu. E, após isso, a escada, talvez como diz Wittgenstein e Miguel, em uma espécie de vislumbre utópico, deveria ser jogada fora.

Mas, se, e enquanto esta continua sendo a única escola que conseguimos “construir”, talvez até tenhamos nos acostumados a ela: alunos, professores, sociedade; é até difícil imaginar outra forma de ensino, alternativa, diferente, pois esta maneira é a que conhecemos e mantemos – a própria escola e o ensino como andamento signatário de “sempre”. Embora a crítica continue frente ao sistema atual, fica a indagação: como fazer surgir no ambiente escolar algo diferente no tocante às disciplinas escolares? Neste contexto, naturalizado e pouco afeito a mudanças, sentimo-nos inclinados a vasculhar em registros históricos como se deu a “origem” da disciplina de Matemática. No entanto, neste processo de busca por informações acerca do tema, deparamo-nos com os seguintes questionamentos: o que é uma disciplina escolar? Do que ela difere da ciência que leva o mesmo nome? Para Chervel (1990)

A disciplina escolar é então constituída por uma combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de várias constituintes; um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação e um aparelho docimológico, os quais, em cada estado da disciplina, funciona evidentemente em estreita colaboração, do mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades. (p. 207)

Nas palavras de Chervel (1990), transparece que a medida para a constituição de uma disciplina passa por diferentes etapas e modos de apresentação. Ampliando esse espectro para além dos aspectos metodológicos, expositivos e finalidades, há que se considerar a adequação do currículo escolar e, conseqüentemente, das disciplinas escolares ao quadro nacional e suas

⁴⁵ Existem vários relatos e diferentes modos de contá-los. Em suma, a tal caixa de Pandora era um artefato (caixa ou algo parecido) em que foram depositados pelos deuses do Olimpo todos os tipos de males (desgraças, guerras, doenças, tristezas) e que se fosse aberta permitiria que estes males rodassem o mundo infligindo dores ao ser humano, que não sabia qual conteúdo continha a tal caixa, havia apenas a expressa ordem de Zeus para não abri-la. Pandora, primeira mulher, criada pelos deuses foi quem teve o dissabor de abrir tal artefato e liberar assim todos os males. Ao perceber o que fez, fecha a caixa e prende apenas um, sem saber que este não era um mal, mas um dom – o da esperança.

necessidades, ou ainda, aos interesses pessoais diante deste ou daquele modo de perceber o momento político-social-econômico, pois que em todos os momentos e movimentos que proporcionaram transformações na condução da educação, não se podem excluir destes os pressupostos e ideário dos envolvidos. E, de outra forma, apesar das propensas mudanças que ocasionalmente ocorreram, em maior ou menor grau, há que se considerar algumas semelhanças entre si, não como forma de contradição, mas como ponto de toque no sentido de arregimentar a construção de um mesmo estrado – a melhoria no ensino da matemática.

A história das disciplinas escolares, colocando os conteúdos de ensino no centro de suas preocupações, renova as problemáticas tradicionais. Se é verdade que a sociedade impõe à escola suas finalidades, estando a cargo dessa última buscar naquela apoio para criar suas próprias disciplinas, há toda razão em se pensar que é ao redor dessas finalidades que se elaboram as políticas educacionais, os programas e os planos de estudo, e que se realizam a construção e a transformação históricas da escola. (CHERVEL, 1990, p. 219).

Diante desse quadro, somos postos a pensar que as transformações ocorridas na sociedade reverberam, sim, na escola⁴⁶, se não na amplitude desejada, sem o poder para revolucionar a educação, conceitos e práticas escolares, mas como perspectiva mínima ou até parcial influenciando seu andamento. Como exemplo, os acontecimentos⁴⁷ da década de 1930, que, além de ser um marco importante para o Ensino Médio, trouxe na bagagem uma disciplina “nova”, a de Matemática, que até então estava dividida em Álgebra, Aritmética e Geometria.

A mudança da didática da Matemática no Brasil, em termos da fusão da Aritmética, com a Álgebra e a Geometria, parece estar ligada à mudança cultural, ou por outra, à transformação da hegemonia francesa no currículo brasileiro, à penetração de ideias pedagógicas norte-americanas nos anos 1930. (OTONE, 2011, p. 45)

⁴⁶ Um exemplo disso é o que ocorreu na Colômbia em 2015, conforme nos apresenta Osorio, Quiceno e Tamayo (2019, p. 1-2) quando dá criação da *Cátedra de la Paz* como disciplina obrigatória nas instituições de ensino no país, a fim de fomentar a paz dentro destas instituições. Essas autoras se referem a escola como porta voz das necessidades e expectativas da sociedade, e de outra forma, como representante de políticas públicas que são criadas e aplicadas em prol dessa sociedade. Mas, também salientam que embora a escola possa refletir o que a sociedade almeja, sonha, e as próprias demandas sociais ampliam o leque das ações e percepções no âmbito escolar, ela apresenta seu próprio ritmo e demandas, sendo além disso, transpassada por jogos políticos e os conceitos derivados desse fato.

⁴⁷ Nos referimos a “uma série de revoluções e movimentos armados que durante o período compreendido entre 1920 e 1964, se empenharam em promover vários rompimentos políticos e econômicos com a velha ordem social oligárquica” (ROMANELLI, 2003, p. 47) que se convencionou chamar de Revolução de 1930.

É corrente que os primeiros passos rumando à unificação, segundo Otone (2011, p. 27), se dão no final do ano de 1927, sob comando de Euclides Roxo, que consegue convencer boa parte da Congregação de professores do Colégio Pedro II a transformar o ensino de Aritmética, Álgebra e Geometria em uma única disciplina. Porém não bastava apenas o apoio do Colégio, era necessária aprovação em níveis superiores, então, em 1928, o Departamento Nacional de Ensino e a Associação Brasileira de Educação tornaram favoráveis seus pareceres, que, porém, só a partir de janeiro de 1929, com o Decreto nº 18.564, oficializou ao Pedro II unificar o ensino de matemática.

Com a reforma Francisco Campos, em 1931, essa transição que corria paulatinamente no Pedro II, foi imposta a todos os estabelecimentos de ensino e, de forma abrupta, os conteúdos foram unificados nos programas da “nova disciplina” do Ensino Secundário (OTONE, 2011, p. 22). Ainda segundo Otone (2011), que estudou a disciplina Matemática no 2º ciclo do Ensino Secundário do período de 1930-1960 sob a ótica de Chervel, chegou-se às seguintes conclusões: nos cursos complementares não foi estabelecido um padrão para a matemática escolar; desse modo, não se constituindo como uma disciplina escolar. Já no curso Colegial ocorre uma uniformização das práticas pedagógicas, havendo, assim, a constituição da disciplina. E aí nos questionamos: se nos cursos Complementares a matemática não se constituiu em uma disciplina escolar, então o que ela era?

Retomando questões de 1930, um destaque desse período se dá com a criação, em 1931, do Ministério da Educação e Saúde Pública (MESP), que ficaria nas mãos de Francisco Campos, implementando no ano seguinte uma reforma na educação nacional que

teve a marca de seu idealizador na medida em que realizou uma centralização e homogeneização do ensino secundário inédita em nível nacional, tonificando o Estado educador. Esse traço intervencionista e autoritário de Francisco Campos se revelaria ainda mais claro na Constituição de 1937 - sustentáculo jurídico do Estado Novo -, elaborada por ele como titular do Ministério da Justiça do Governo Getúlio Vargas. Por outro lado, Francisco Campos imprimiu uma perspectiva escolanovista na reforma de ensino secundário de 1931, em que estimulava a utilização de métodos ativos e individualizantes no processo de aprendizagem. (DALLABRIDA, 2009, p. 190)

Esse espectro democrático durou pouco, a década seguinte apontaria novos rumos tanto no Brasil quanto em boa parte do mundo. Se no início da década de 1930, Vargas, mesmo tomando o poder “à força”, manteve certo ar de respeito as instituições políticas e a constituição, apesar de em 1934 promulgar outra Constituição (denominada de liberal),

alargando os direitos trabalhistas e civis (com boa ênfase em relação à educação de nível médio e superior). Porém, as mudanças imprimidas com a emergência do Estado Novo evidenciaram pressupostos ditatoriais, e, a partir disso, os direitos civis e o poder da sociedade se diluem junto com a “democracia”, graças ao apoio das Forças Armadas (nesse momento). As discrepâncias deste período são transparentes, perpassando o rigorismo, o cerceamento à liberdade, o autoritarismo e, de outro modo, projetos e leis são criados em benefício do trabalhador (salário mínimo, jornada diária de 8 horas, férias remuneradas anualmente, carteira de trabalho e leis trabalhistas)

em síntese, se preocupou com os direitos sociais e trabalhistas, mas os direitos civis e políticos, somados ao conceito de liberdade e aos direitos culturais, direitos coletivos e da coletividade, que integram a conquista da igualdade entre os cidadãos, foram pouco definidos e não assegurados durante a vigência constitucional. (CÂMARA DOS DEPUTADOS, 2008)

Enquanto o mundo está envolto em combates bélicos, especialmente em solo europeu, onde a 2ª Guerra Mundial causou profundos impactos e prejuízos, no Brasil a industrialização se beneficia deste momento para incrementar e diversificar a produção industrial. Em relação à educação, o ministro Gustavo Capanema reorganiza o sistema educacional tendo como escopo a ordenação sobre o Ensino Primário, Secundário, Industrial, Comercial, Normal e Agrícola. Esse modelo de ensino foi tomando corpo entre 1942-1946, ficando conhecida como Reforma Capanema.

A reforma atribui ao ensino secundário a sua finalidade fundamental, que é a formação da personalidade adolescente. [...] O que constitui o caráter específico do ensino secundário é a sua função de formar nos adolescentes uma sólida cultura geral, marcada pelo cultivo a um tempo das humanidades antigas e das humanidades modernas, e bem assim, de nêles acentuar e elevar a consciência patriótica e a consciência humanística.⁴⁸

No entanto, a disciplina Matemática continuou sofrendo influências internas e externas com o propósito de aperfeiçoá-la. Quando olhamos para os registros, percebemos que sua história segue trilhos próprios, que não são aqueles percorridos pela ciência Matemática. Especialmente no Brasil,

“Para melhor explicar esse momento histórico convém assinalar que o movimento modernista acabou se tornando difuso e diversificado em função das formas diferenciadas pelas quais foi assimilado pelos diferentes países e, dentro de cada país, pelos vários grupos que se formaram com o propósito de operacionalizá-lo.” (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 49)

⁴⁸ Retirado em 15 de junho de 2020 de <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-133712-pe.html>.

poderíamos dizer que ela vai tomando corpo, entre mudanças e alterações influenciadas por ideias de além-fronteiras, que, mescladas às nativas, irão moldar o jeito de fazer educação no país. Talvez o exemplo mais retumbante disso seja o Movimento Matemática Moderna (MMM), o qual poderíamos chamar de movimentos, que, a partir do final da década de 1950, teve sua implantação no país com o intuito de “aproximar a matemática desenvolvida na escola básica com a matemática produzida pelos pesquisadores da área.” (DUARTE; SILVA, 2006, p. 88)

O Brasil importou esse movimento, pois, como aponta Valente (2016, p. 9-11), o que se percebe dos relatos e dos documentos é que, na década de 1950, o mote em relação à matemática era o MMM, sendo implantado com grande ênfase em muitos países. Eram tempos de pós-guerra, e diversas nações buscavam alavancar reformas curriculares no ensino da matemática. Eventos foram criados para divulgar, incentivar e estudar a maneira de implementar tais mudanças, sendo o Seminário de Royaumont (em 1959 na França) um marco importante neste sentido. O ponto forte do MMM talvez tenha sido o de trazer na bagagem uma valorização do rigor, da linguagem dos conjuntos e das estruturas matemáticas.

O *modus operandi* foi influenciado diretamente pelos moldes norte-americanos. Segundo Oliveira Filho (2013, p. 152-153), a participação de alguns professores brasileiros em estágios nas universidades americanas parece ter sido o pontapé inicial. Além disso, as coleções de livros do SMSG – School Mathematics Study Group – que, posteriormente, foram traduzidos para o português também corroboraram para a disseminação do MMM. No entanto, aponta Búrigo (1989), se referindo ao estudo de D’Ambrósio (1987):

Ao examinar a propriedade dessa adoção no caso brasileiro, D’Ambrósio conclui pela inadequação de uma transposição feita acriticamente de projetos elaborados em países com alto nível de desenvolvimento tecnológico, onde se tinha em vista a produção de uma geração de quadros científicos e técnicos mais qualificados, para um contexto onde sequer o ensino primário era generalizado e onde as necessidades básicas como saúde, habitação e alimentação adequada não estavam ao alcance da maioria da população. (BÚRIGO, 1989, p. 132)

O que D’Ambrósio (1987) expressa realça nosso sentimento de que os movimentos, as buscas por transformações se alicerçam primeiramente no desejo individual, ou ainda de um grupo, que por um motivo ou outro se apossa de movimentos e ideais e passa a produzir e buscar apoio na tentativa de pavimentar um caminho em direção ao ponto almejado. Neste caso, um modelo pronto, acabado, alicerçado numa cultura e contexto oposto ao nosso, que

talvez aos olhos de seus idealizadores brasileiros, fora comprado com o intuito de que bastava apenas um toque para transformar pedras em ouro⁴⁹.

Inicialmente o movimento ganhou força no país. Segundo Búrigo (2014, p. 25-27), alguns fatores que facilitaram adoção dos ideais do MMM podem estar relacionados à descentralização proporcionada pela LDBEN/61; a realização dos congressos nacionais de educação a partir da década de 1950; e a criação dos grupos de professores de matemática, entre eles o GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - na cidade de São Paulo. Esse grupo teve na figura do professor Osvaldo Sangiorgi, que participou de seminários de verão nos Estados Unidos, uma importante liderança. O GEEM se utilizou de cursos de aperfeiçoamento para professores para apresentar as propostas de reformulação do ensino. Segundo Garnica e Souza (2012):

Outros grupos, em diferentes estados, também desempenharam esse papel como o Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM), no Paraná; o Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre (GEEMPA); e o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM), no Rio de Janeiro. (p. 237)

Búrigo (1989) aponta, referindo-se ao GEEM e a proposta por eles apresentada, que, segundo seus líderes, estaria adequada às necessidades de ensino do país, no entanto, “nessa adaptação, alguns elementos do discurso original da matemática moderna foram enfatizados em detrimento de outros; alguns foram omitidos; novos elementos foram introduzidos.” (p. 236)

Mas o MMM não teve vida longa, pois logo começaram a surgir críticas de vários setores ao movimento. A ênfase que outrora fora depositada começa a perder fôlego, não apenas no Brasil (que irá sentir isso, posteriormente aos demais países), mas em boa parte dos países que o adotaram, pois já no ano de 1973, nos EUA, é publicado um livro, de autoria de Morris Kline, enfatizando o fracasso do MMM. Como nos parece costumeiro, demoramos a receber e incorporar as novidades que em outros países já são comuns, e somos um dos últimos que as abandonam⁵⁰ quando estas novidades deixam de ter importância. Como aponta

⁴⁹ Segundo a mitologia grega, o rei Midas teria o poder de transformar o que tocasse em ouro. (Presente recebido do deus Baco). Por conta disso até mesmo o alimento ou o vinho que tentava beber transformava-se em ouro. Sua filha por descuido tocou nele e virou uma estátua de ouro. Assim como havia recebido do deus Baco esse poder, implorou ao mesmo que tirasse dele tal sina e assim ocorreu.

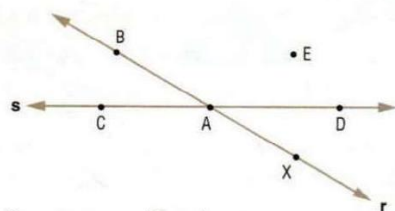
⁵⁰ Outro exemplo disso trata-se do uso da hidroxiquina para o tratamento da covid-19, que mesmo com estudos científicos comprovando sua ineficácia para essa doença, no Brasil ainda é comum a indicação do seu uso.

Schubring (2003, p. 18), “é um fenômeno bem conhecido que uma idéia que já foi descartada em seu lugar de origem seja perseguida ainda ardentemente em algum lugar da “periferia””. Assim foi com o MMM, quando nos EUA e em outros países já se pensava em abandoná-la, ou se tinha a ideia de que o movimento não trouxe melhorias esperadas, o Brasil ainda insistiu mais alguns anos e algumas mudanças implementadas continuaram em nossos livros.

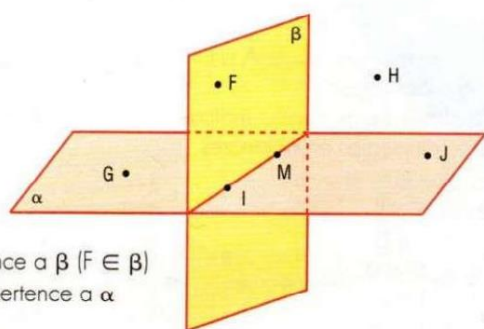
2 Posições relativas: ponto e reta; ponto e plano

Dados um ponto P e uma reta r , temos $P \in r$ ou $P \notin r$.
 Dados um ponto P e um plano α , temos $P \in \alpha$ ou $P \notin \alpha$.

Veja alguns exemplos:



B pertence a r ($B \in r$)
 B não pertence a s ($B \notin s$)
 E não pertence a r ($E \notin r$)
 E não pertence a s ($E \notin s$)

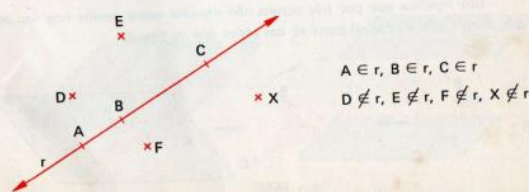


F pertence a β ($F \in \beta$)
 F não pertence a α ($F \notin \alpha$)
 H não pertence a α ($H \notin \alpha$)
 H não pertence a β ($H \notin \beta$)

(DANTE, 2005, p. 343-344)

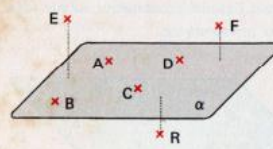
Numa reta e fora dela existem tantos pontos quantos quisermos.

Esta propriedade nos possibilita “pegar” na reta os pontos que precisarmos, o mesmo ocorrendo para pontos fora da reta.



$A \in r, B \in r, C \in r$
 $D \notin r, E \notin r, F \notin r, X \notin r$

Num plano e fora dele existem tantos pontos quantos quisermos.



$A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha, D \in \alpha$
 $E \notin \alpha, F \notin \alpha, R \notin \alpha$

(IEZZI *et al.*, 1976b, p. 201-202)

Apesar do fracasso do MMM, a linguagem dos conjuntos continuou presente nos conteúdos de geometria dos livros posteriores ao movimento.

Um dos fatores que levaram o MMM a ser criticado no país foi o tratamento dado à geometria. “Abaixo Euclides!”, teria exclamado Jean Dieudonné durante o Seminário de Royaumont em 1959 na França. Segundo Ubiratan D’Ambrósio, esta frase de impacto teria sido mal interpretada como sugestão de abolir a geometria dos programas escolares. Para

D'Ambrósio, ela se referia ao método de tratar a geometria baseado no livro “Os Elementos”, de Euclides, que já não correspondia ao estado evolutivo da matemática naquele momento (MIGUEL *et al.*, 2004). A recomendação era de usar outras abordagens para o ensino de geometria, como, por exemplo, a das transformações geométricas. No entanto, segundo Pavanello (1989):

A orientação de trabalhar a geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela maioria dos professores secundários, acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a álgebra - mesmo porque, como a Matemática Moderna fora introduzida através desse conteúdo, enfatizara sua importância. A Lei 5692/71, por sua vez, facilita este procedimento ao permitir que cada professor adote o seu próprio programa “de acordo com as necessidades da clientela”. (p. 164-165)

Interessante observar que a descentralização conquistada na LDBEN/61 e mantida na LDBEN/71, segundo Búrigo (2014, p. 30), permitiu a institucionalização da matemática moderna, é apontada por Pavanello (1989, p. 165) como facilitadora para o não cumprimento dos ideais do movimento, pelo menos não em sua totalidade, principalmente no que concerne à geometria. Porém, não podemos afirmar ter sido esta a situação vivenciada em todo território nacional. Carvalho (2019), ao realizar um levantamento dos artigos publicados nos anais do ENAPHEM – Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática, que versavam sobre o ensino de geometria nos diferentes níveis no país durante o MMM, percebeu que os artigos abordavam

diversas práticas em diferentes localidades, desde a elaboração dos livros didáticos aos cadernos dos alunos, do ensino presencial ao ensino a distância (por televisão), das práticas dos professores nas salas de aulas do sul país ao nordeste. Ao vasculhar esses trabalhos percebemos que nessas práticas se evidencia tanto o que preconizava o MMM, bem como em certos momentos ocorria um distanciamento deste, ou mesmo o abandono do ensino da geometria. (p. 11)

Porém, como nos aponta Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 52), o MMM também trouxe consequências para o ensino da Álgebra, “uma vez que o projeto fundamentalista, ao tentar superar o algebrismo presente no ensino, acabaria imprimindo-lhe um caráter austero, formal e estéril aos olhos dos alunos: Perderia, inclusive, o que tinha de positivo: seu valor instrumental para a resolução de problemas.” Mesmo após o seu declínio, o MMM continua sendo tema recorrente de pesquisas, porém ele não foi o único movimento para modernização do ensino da matemática. Algumas décadas anteriores, o ensino de matemática sofreu influências de outros ideais modernizadores em contraposição ao ensino tradicional.

Quando, em 1930, Vargas assume o poder, algumas transformações estão em curso, especialmente no Colégio Pedro II (facultado a ele apenas), mas as novidades transpuseram os muros, chegando a diferentes locais do país. Com a criação do Ministério de Educação e Saúde Pública, iniciou-se campanha para reforma do ensino brasileiro, e, conforme Miorim (1998, p. 93 *apud* CARVALHO, 2003, p. 125), o ministro “acatou, em sua reforma para o ensino secundário, todas as idéias modernizadoras presentes na proposta da Congregação do Colégio Pedro II, na parte relativa ao ensino de Matemática”.

Como aponta Valente (2003, p. 69-73), parece que os primeiros sinais de modernização ocorrem a partir deste momento e desta instituição educacional. Em 1923, o Colégio Pedro II adota como livro: Lições de Arithmetica de Euclides Roxo, que permaneceu até 1929 como principal compêndio, visto ainda existir outros manuais, ademais, este livro serviu de referência nacional para o ensino de aritmética no país. Em 1927, já como Diretor do Externato do Colégio Pedro II, Roxo propõe alterações para o ensino da matemática e busca subsídios nos debates internacionais, especialmente os apresentados pela Alemanha nos congressos ocorridos anteriormente.

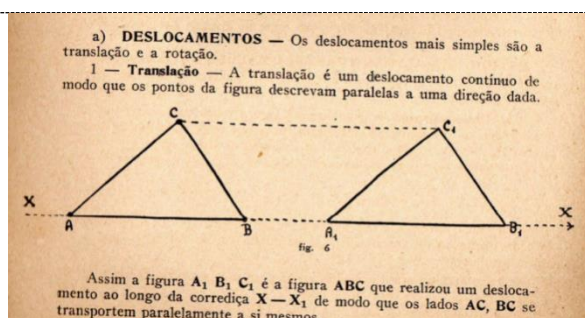
Considerando que urge adotar, entre nós, os métodos de ensino da matemática elementar introduzido pela grande reforma que o professor Klein iniciou na Alemanha há cerca de trinta anos e que já se acham adotados em quase todos os países civilizados do mundo. (VALENTE, 2003, p. 74)

O livro de Euclides Roxo, Curso de Matemática, apresentava um aditivo relevante, uma inscrição de que sua elaboração estaria “de acordo com os programas atuais do Colégio Pedro II” (VALENTE, 2003, p. 76), ainda “tinha assim a finalidade de objetivar a proposta de modernização do ensino no Brasil. A intenção principal era a de reestruturação da seqüência de conteúdos a ensinar, visando à fusão dos vários ramos (aritmética, álgebra, geometria) até então separados.” (VALENTE, 2003, p. 79) Ainda sobre os ideais modernizadores de Félix Klein, em relação à geometria, tem-se que

Até então, a geometria euclidiana era a única geometria digna desse nome, dado ser ela vista como a única teoria verdadeira acerca das formas e das relações morfológicas idealizadas entre as formas presentes no espaço físico. Mas a geometria euclidiana era um estudo intramórfico, isto é, um estudo das propriedades essenciais internas das formas de objetos idealizados e de suas partes. A novidade introduzida pelas investigações de Klein foi a de passar de um estudo intramórfico das formas para um estudo metamórfico das formas, submetendo uma forma típica a um conjunto sucessivo de transformações espaciais com o propósito de se verificar que propriedades originais da forma primitiva mantinham-se invariantes após cada tipo de transformação a ela imposta, estudo este que passou a ser posteriormente

conhecido como geometria pelas transformações". (MIGUEL; VIANNA; CORRÊA, 2020, p. 56)

O que nos ocorre diante destes dois momentos e movimentos, distintos no tempo e com características próprias, é perceber semelhanças e propósitos entre o método de ensino modernizante de Klein com o MMM, ao menos em relação à geometria, onde em ambos é dada grande ênfase na geometria das transformações. No entanto, percebemos diferenças significativas na abordagem desse conteúdo nas três obras analisadas em que ele aparece, sendo que, na coleção Curso Colegial Moderno, isso ocorre em dois momentos, na 2ª e na 3ª série, de modos diferentes. Veja como os autores abordam o tema de translação.



(LIMA, 1938, p. 88)

Lima, de modo bem sucinto, apenas diz o que é translação de uma figura e apresenta um exemplo. Procedendo da mesma forma para o restante do conteúdo.

TRANSALAÇÃO

53 — Definições. Chama-se **TRANSALAÇÃO** de uma figura o deslocamento em que todos os pontos da figura descrevem segmentos orientados equipolentes.

Postulamos a possibilidade de tais deslocamentos, isto é, que sem deformar uma figura F , podemos submeter todos os seus pontos a tal deslocamento.

54 — Como se determina uma translação. Para determinar uma translação basta dar um dos segmentos orientados, $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, ..., todos equipolentes entre si, que tem como origem a posição inicial e como extremidade a posição final de um ponto qualquer da figura, ou, melhor, basta dar o vetor livre $\vec{u}$ desses segmentos orientados, o qual se denomina **vetor representativo** de translação.

Também se designa a translação pela notação de um desses segmentos ou pelo vetor livre deles. Diremos no caso acima: a translação $\vec{AA'}$, ou $\vec{BB'}$, ..., ou a translação $\vec{u}$, ou, ainda, segundo a notação de Grassmann, $A' - A$, ou $B' - B$.

Como sabemos, a igualdade $A' = A + \vec{u}$ exprime que o vetor livre $\vec{u}$ transporta o ponto A para o ponto A' .

Admitimos como evidente (2º) a **reversibilidade** da translação: se a translação $\vec{u}$ transforma F em F' , a translação $-\vec{u}$ transforma F' em F .

Na obra de Roxo et al o estudo sobre as translações é mais extenso. Primeiramente os autores postularam que existe este tipo de deslocamento, em seguida determinam uma translação utilizando o conceito de vetores, para então apresentar algumas propriedades.

55 — Propriedades da translação. I. Se F' é a transformada de uma figura F , por translação, qualquer segmento orientado de F' é equipolente ao segmento homólogo de F .

Em outras palavras, durante uma translação, todos os segmentos da figura se deslocam paralelamente a si mesmos.

Sejam A e B dois pontos quaisquer de F e A' e B' os pontos homólogos de F' .

De acordo com a definição de translação, os segmentos $\vec{AA'}$ e $\vec{BB'}$ são equipolentes, o que,

pela notação de Grassmann, se exprime escrevendo

$$A' - A = B' - B \quad (\alpha)$$

O quadrilátero $AA'B'B$ é, pois, um paralelogramo, logo $\vec{AB}$ e $\vec{A'B'}$ são equipolentes. Isto, aliás, resulta **algebricamente** de (α) , que, por transposição, nos dá

$$B - A = B' - A'$$

Reciprocamente, se qualquer segmento orientado de uma figura F é equipolente a um segmento orientado de F' , F se transforma em F' por uma translação.

Com efeito, sendo A e B dois pontos quaisquer de F , haverá, por hipótese, dois pontos de F' tais que

$$B' - A' = B - A$$

donde

$$B' - B = A' - A = \vec{u}$$

e o vetor $\vec{u}$ define a translação que leva F a F' .

II. A **sucessão de duas translações equivale a uma translação**.

É uma consequência imediata da recíproca acima. Com

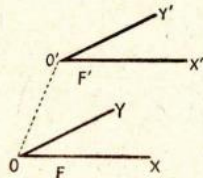
feito, se A e B , A' e B' , A'' e B'' são respectivamente pontos de F , de F' e de F'' , tais que

$$\vec{AB} = \vec{A'B'} \text{ e } \vec{A'B'} = \vec{A''B''},$$

dai resulta $\vec{AB} = \vec{A''B''}$

III. Se duas figuras congruentes, F e F' são tais que dois ângulos homólogos $\angle xOy$ e $\angle x'O'y'$ tenham seus lados paralelos de mesmo sentido, uma se transforma na outra por translação.

Com efeito, efetuemos sobre F a



(Fig. 41)

translação $\vec{OO'}$. De acordo com a propriedade I, Ox cairá sobre $O'x'$ e Oy sobre $O'y'$. A nova posição F'' de F terá então duas semi-retas, $O'x'$ e $O'y'$, não colineares, comuns com F' . Sobre essas duas semi-retas será então possível marcar três pontos não colineares e, em virtude do teorema I do nº 52, as figuras congruentes F' e F'' coincidem e, como F'' resulta de uma translação de F , o mesmo se dá com F' .

56 — **Corrediças.** Seja u o vetor representativo da translação que transforma uma figura F em F' . Sejam, ainda, R uma reta paralela a $\vec{u}$, M um ponto de F situado sobre R e M' o seu homólogo em F' . Temos, de acordo com a definição de translação (nº 53), $\vec{MM'} = \vec{u}$; logo o ponto está situado sobre R . Concluímos que, na translação, toda reta R , paralela à translação, escorrega sobre si mesma.

Reciprocamente, se uma figura F se desloca de modo que certa reta R da figura ou a ela invariavelmente ligada, escorregue sobre uma reta fixa ou escorregue sobre si mesma, e o mesmo acontece a um plano P que passe por R , tal deslocamento é uma translação. É o que resulta imediatamente da propriedade III do nº 55, desde que se tome, para Ox , a semi-reta de suporte R e de mesmo sentido que o deslocamento, e Oy perpendicular a P .

Essa condição necessária e suficiente para que um deslocamento seja uma translação é, às vezes, tomada como definição. Diz-se, então, que a reta R é uma *corrediça* da transla-

ção, podendo-se em certos casos, distinguir a *corrediça fixa* e a *corrediça móvel*.

57 — **Composição das translações.** Dados vários vetores livres $u, v, w, \dots$ e uma figura F , podemos imprimir, sucessivamente, a F , as translações definidas por esses vetores transformando sucessivamente F em $F', F'', \dots, F^{(n)}$.

Das definições de resultante de vários vetores (2ª S., III, 6) e de translação, é fácil concluir que F se pode transformar diretamente em $F^{(n)}$ por uma translação única, definida pelo

vetor r , resultante de $u, v, w, \dots$

A translação r é a *resultante* (nº 51) das translações $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$

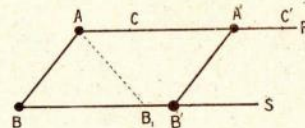
A *resultante* de várias translações sucessivas é, pois, uma translação.

Para se comporem (nº 51) várias translações, ou para se achar a sua resultante, basta que se somem geometricamente os vetores representativos das translações dadas.

As translações gozam das mesmas propriedades dos vetores. Assim, a *resultante* de duas ou mais translações é independente da ordem em que se efetuam.

68 — **Translação no plano.** Para que uma figura plana invariável seja animada de um movimento de translação em seu plano, basta que dois de seus pontos se desloquem sobre retas paralelas.

Seja uma figura plana invariável, F , cujos pontos A e B se deslocam sobre as paralelas AR e BS traçadas no plano.



(Fig. 49)

O segmento invariável AB , compreendido entre as paralelas AR e BS só poderia tomar duas direções diferentes: a direção primitiva AB e a da reta AB_1 que formam com AB o triângulo isósceles ABB_1 ; mas AB não poderia passar à posição AB_1 sem que o ponto B saísse de BS , o que é contrário à hipótese. Logo, no deslocamento suposto, AB se desloca paralelamente a si mesma.

Tomando-se, sobre AR , um outro ponto C invariavelmente ligado a F . Quando o ponto A chegar a A' , AB tomará a posição $A'B'$ paralela a AB e, como o ângulo invariável BAC é igual a $B'A'R$, AC toma, sobre AR a posição $A'C'$, isto é, AC desliza sobre si mesma e, portanto, de acordo com a proposição do nº 56 (recíproca), o deslocamento efetuado é uma translação.

APLICAÇÃO. Para realizar materialmente a translação de uma figura plana em seu plano, traça-se a figura sobre uma folha de papel, que se aplica e se faz deslizar, sobre uma folha fixa, de modo que dois pontos quaisquer da folha móvel deslitem sobre a mesma reta ou sobre retas paralelas.

Em seguida apresenta a definição de corrediças e deduz a composição das translações a partir da definição de resultante de vários vetores e da própria translação. Após isso, os autores abordam o tema de rotações, e então retomam com a definição de translação no plano, a qual se assemelha com a definição proposta por Lima (1938).

(ROXO et al., 1944b, p. 318-321, 328)

1. TRANSLAÇÃO

97. Definição

Dado um vetor $\vec{x}$, fica determinada uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de E^3 o ponto P' tal que $\vec{PP'}$ é um representante de $\vec{x}$. Essa transformação é uma translação.

Indica-se a translação por T ou $T(\vec{x})$ ou $T(P, \vec{x})$ ou $T(P)$ e toda a transformação por:

$$T(\vec{x}): P \longrightarrow P' \text{ t.q. } \vec{PP'} \in \vec{x}$$

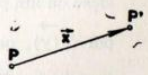


Fig. 45

Cada vetor $\vec{x}$ define uma translação, que é:

aplicação — pois cada ponto tem uma única imagem $P' = T(P)$.

injeção de E^3 em E^3 — pois pontos distintos têm imagens distintas: $T(A) \neq T(B) \iff A \neq B$.

sobrejeção de E^3 em E^3 — pois cada ponto do espaço é imagem de um ponto de E^3 . O domínio é E^3 e este é também o contra-domínio $T(E^3)$.

bijeção de E^3 em E^3 — por ser injeção e sobrejeção.

Decorre do fato de uma translação ser sempre bijetora que, dada uma translação $T = T(\vec{x})$, existe a *translação inversa* $T^{-1}(\vec{x})$ ou $T(-\vec{x})$:

$$T^{-1}(P') = P \iff P' = T(P).$$

O vetor nulo $\vec{0}$ define a *translação nula* $T(\vec{0})$, que é a *transformação idêntica*: associa a cada ponto P de E^3 esse mesmo ponto.

98. Observações

- 1) Para indicar que a translação $T(\vec{x})$ leva o ponto P em P' , escrevemos também:

$$P' = P + \vec{x}$$

- 2) Dadas duas translações $T(\vec{x})$ e $T(\vec{y})$, teremos para cada ponto P de E^3 :

$$P' = P + \vec{x}$$

$$P'' = P' + \vec{y}$$

e então a transformação que leva P em P'' é uma composição ou um *produto* de $T(\vec{x})$

por $T(\vec{y})$, que é uma nova

translação: $T(\vec{x}) \cdot T(\vec{y})$.

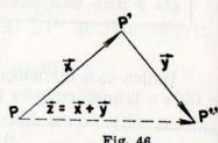


Fig. 46

- 3) O vetor $\vec{z}$ de representante $(P'' - P)$ se denomina soma dos vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ e escrevemos:

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$$

- 4) Temos então, para o produto de translações:

$$T(\vec{x}) \cdot T(\vec{y}) = T(\vec{x} + \vec{y}).$$

(ROCHA; BARBOSA; PIERRO NETO, 1968, p. 203-204)

71. A — Translação

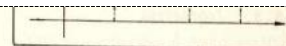


Fig. 34

A.1. Definição:

Uma transformação T é uma translação de matriz $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ se e somente se todo ponto $P(x; y)$ é transformado num ponto $P'(x'; y')$ dado por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A.2. — Interpretação Geométrica

Construamos os pontos $M(a; b)$, $P(x; y)$ e $P'(x'; y')$

Da fórmula de definição obtemos:

$$\begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x' - x = a \\ y' - y = b \end{matrix}$$

que significa que o segmento orientado $\vec{PP'}$ é equipolente ao segmento orientado $\vec{OM}$ (paralelos, de mesmo sentido e congruentes).

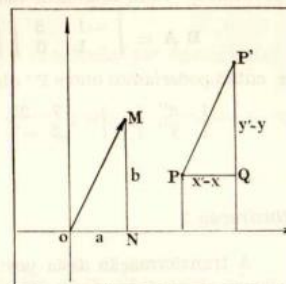


Fig. 35

Em outras palavras, a transformação é tal que ela se processa como se fizesse P deslocar-se até P' paralelamente, no mesmo sentido e da mesma distância de OM .

Ao vetor de OM ou à matriz coluna correspondente denominamos *vetor-translação*.

A.3. Isometria

Da fórmula de definição obtemos para dois pontos A e B e seus transformados A' e B'

$$x'_B - x'_A = x_B - x_A \text{ e } y'_B - y'_A = y_B - y_A$$

portanto, elevando ao quadrado e somando, obtemos:

$$(A'B')^2 = (AB)^2 \Rightarrow A'B' = AB$$

ou que, a translação conserva as distâncias

A.4. Ilustrações

Ilustração 1:

Seja a matriz $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ da translação, e o ponto $P(4; 1)$

O transformado P' será dado por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ilustração 2: (Produto de Translações)

Apliquemos ao ponto P' da ilustração 1 uma outra translação de matriz $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ obtendo o transformado P'' .

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Nesta coleção o tema translação é apresentado no volume 2 e no 3, mas com abordagens diferentes, no primeiro percebe-se um estudo por meio de vetores, com algumas diferenças em relação a obra de Roxo et al e com uma linguagem carregada de símbolos. Já no terceiro volume esse conceito é trabalhado a partir de estudos matriciais, fato que não ocorre em nenhuma das outras obras analisadas.

Poderíamos também fazer de outra maneira em vista da associatividade da adição de matrizes

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que nos mostra, que o produto das translações é uma outra translação de matriz igual à soma das matrizes das translações.

Geomêtricamente corresponde a empregarmos a regra do paralelogramo de vetores.

(ROCHA; BARBOSA, 1970, p. 113-115)

Seguindo rastros de significação da palavra matemática, quando comparamos a disciplina Matemática com a ciência Matemática, percebemos que para a matemática enquanto ciência adentrar no campo das disciplinas escolares necessariamente transforma-se, incorporando ou tendendo a materializar finalidades distintas, com fim de atender propósitos que não essencialmente seriam os seus originais, e assim, passa a configurar-se em matemática escolar. Nesta direção, Vilela (2013, p. 52-66) apresenta as concepções de dois pesquisadores: Chevallard (1991) e Valente (2002). Para o primeiro, a matemática científica deve ser didatizada para se transformar em matemática escolar, porém esta não é uma produção autônoma em relação à primeira. Já Valente aponta para distinções entre as duas matemáticas em seus objetivos, rigor, linguagem, conteúdo e forma de apresentação, em que uma está ligada ao ofício dos matemáticos e a outra ao ofício dos professores de matemática. Nas conclusões de Vilela (2013), essas matemáticas constituem jogos de linguagem diferentes, cada um com regras próprias e ligados a diferentes formas de vida.

Teríamos, então, duas matemáticas distintas⁵¹: a científica e a escolar. Em nossa pesquisa, aproximamo-nos da matemática escolar, ou mais especificamente, da geometria escolar, no entanto, não olhamos todos seus aspectos, e sim, apenas para os livros didáticos, que acreditamos, ao ser usado na sala de aula, se configura em um dos jogos de linguagem

⁵¹ Na realidade existem tantas outras. Vilela (2013) por exemplo faz referência, além dessas duas, a matemática de grupos profissionais e a matemática do dia a dia.

que compõem a matemática escolar. Pois, conforme nos aponta Pinto (2009), podemos falar em um jogo de linguagem da sala de aula da matemática que se caracteriza por:

- Possuir semelhanças de família com outros jogos de linguagem: o da matemática acadêmica/científica, da rua, de um grupo profissional etc.;
- Utilizar-se (apropriar-se) de termos “próprios” a estes outros jogos de linguagem;
- Aceitar a linguagem gestual como modo de comunicar e como apoio a outras expressões faladas e/ou escritas;
- As definições são mais comumente dadas pelo uso; marcadas pela ausência de questionamento do “que são” estes objetos, priorizando o “como” usá-los e o “para que” servem;
- Existirem acordos implícitos, quanto à linguagem, que auxiliam a comunicação, mas que também podem comprometê-la;
- A fala tende a indicar a procedimentalização e os materiais de apoio (didáticos) são “re-lidos” buscando-se evidenciar procedimentos a serem executados;
- Comumente faz-se referência a um “Ele” externo, autor das atividades, quem as justifica, em detrimento a um “nós” ou um “eu” (pronomes que ocorrem com menos frequência);
- Haver uma preocupação – às vezes aparentemente exacerbada – com os registros gráficos e com as várias “representações” de um objeto;
- 97 • Haver referências frequentes a objetos concretos em detrimento a objetos abstratos/conceituais; (PINTO, 2009, p. 96-97)

A disciplina Matemática é normalmente entendida nos ambientes escolares como aquela que apresenta coerência e lógica, e dentro disso, ou partindo dessa premissa, então, não haveria muito o que se diferenciar, ou tentar diferenciar em sala de aula. Nosso pensamento apresenta outra rota, outros rumos, nuances que se mesclam e se refazem diante das infinitas possibilidades de jogos de linguagem que cada composição escolar possa admitir. Cada grupo escolar, cada sala de aula, cada professor, cada aluno, cada livro.

Assim, concordamos com Vilela (2013) quando expressa que a matemática não possui um sentido único, singular, mas apresenta caminhos e comportamentos sensoriais diversos, que através de instrumentais e instrumentadores, impulsionam ou imprimem uma pluralidade de significados e sentidos (ou seja, de jogos de linguagem). E, num caminho tensional, da matemática ocidental, de imprimir ou impor jogos hegemônicos de linguagem, chega-se ao ponto de reprimir tantas outras formas de vida e seus próprios jogos.

Porém, especificamente em relação à matemática escolar, embora os manuais, os livros, e todo o ritual da sala de aula, em nosso modo de ver, talvez não seja possível afirmar que exista uma única e sistematizante forma de apresentação ou jogo de linguagem. Os diferentes grupos, individualidades, perspectivas, vivências, contextos, finalidades se diluem frente às formas de vida que ali se manifestam.

Diríamos, então, que a linguagem matemática que se manifesta na da sala de aula é fruto de um entrecruzamento entre manifestações de várias naturezas,

possui (e se constitui por) semelhanças com outras formas de comunicação, como a linguagem natural, a do matemático profissional, a das representações pictóricas, gestuais etc. (PINTO, 2009, p. 11)

Assim, a geometria escolar, a que é praticada em sala de aula, também é fruto de uma miscigenação de ideias, de entrecruzamentos com diferentes formas e modos, podendo então denotar em várias geometrias. Pois é aí que o jogo se desenvolve, o jogo que abrange entre outras, o livro didático, o material que o professor utiliza, os métodos para apresentar e desenvolver as atividades, a vivência dos alunos.

Porém, esse jogo de linguagem, jogado a partir do livro didático, é também constituído do entrecruzamento de diversos jogos (editorial; comercial; político; tradução ou criação...). As esferas de poder que emergem dos embates, legitimando, ou não, a decisão de um material específico, para atender a um discurso, manifestam em sentido amplo um determinado jogo de linguagem, estabelecido em detrimento a outros, como modo de fundamentar a práxis do discurso. O livro pode exercer influência sobre a escola e de outra forma ser influenciado por ela. Os pressupostos da escrita, edição, compilação e comercialização acompanham diferentes caminhos e jogos. O livro tem servido de guia mestre para a educação brasileira desde sempre, ainda em momentos coloniais, ou hoje, a influência e a excelência que detém em sala de aula pode ser percebida pela força do mercado editorial, pela dedicação de profissionais cada vez mais articulados, pelos orçamentos e incentivos em pesquisa e tendências, pelo esforço em adequar-se as propostas educacionais do Ministério da Educação.

Posto isso, acreditamos que o programa da disciplina Matemática, instituído inicialmente a nível nacional e depois descentralizado a nível de estado, é uma das regras do jogo de linguagem, que jogamos com o livro didático, que dentre outras, determina o que é válido ou não, quais jogadas são permitidas. Diria que é uma regra externa imposta ao jogo interno do livro, pois no conteúdo apresentado também são criadas regras específicas. O livro, elemento importante para a educação brasileira, contempla novos e variados jogos de linguagem que se refazem em perfis diferentes, atrelado às mudanças e aos programas disciplinares. Por sua vez, na produção desse programa, a atividade humana ali praticada configura-se em outro jogo, de modo que nesse jogo de quem influencia quem, ou é

“O fato fundamental aqui é que fixamos regras, uma técnica, para um jogo e que, quando seguimos as regras, as coisas não se passam como não havíamos suposto. Que portanto nos aprisionamos, por assim dizer, em nossas próprias regras. Este aprisionamento em nossas regras é o que queremos compreender, isto é, aquilo de que queremos ter uma visão panorâmica.” (WITTGENSTEIN, 1999, p. 67)

influenciado, outros jogos são possíveis, e outras tantas formas de influenciar são postas à mesa, nem mesmo sendo possível enumerar ou quantificar tais, nem quais as variantes que perpassam estes processos.

Ao considerar a existência de uma geometria escolar, acredito poder retomar a algumas das questões levantadas anteriormente: a geometria escolar é euclidiana? O que faz uma geometria ser euclidiana?

Para tentar responder a essas perguntas, vamos nos valer das discussões propostas em uma publicação do ano de 1987, nos Estados Unidos, composta de 20 artigos⁵², em que o Conselho Nacional de Professores de Matemática propõe algumas sugestões para o ensino de geometria. Em um dos artigos, Usiskin (1994) apresenta uma abordagem alternativa para a geometria escolar utilizando-se dos conceitos de transformações. No entanto, esse autor relata que em diversas ocasiões a abordagem por transformações não foi considerada geometria euclidiana. Para Usiskin (1994, p. 29), há “uma confusão entre um método de demonstração e aquilo que é demonstrado, entre a abordagem e os resultados.” E que

“a geometria euclidiana é um sistema matemático que fornece os teoremas estabelecidos por Euclides em seus *Elementos*. [...] Ao estudarmos as demonstrações que se encontram nos *Elementos*, estamos estudando a geometria euclidiana segundo umas das abordagens possíveis.” (USISKIN, 1994, p. 29)

Para nós, essa abordagem alternativa se constitui em um jogo de linguagem diferente, não necessariamente ela deixa de ser uma geometria euclidiana (se fizer tanta questão por essa adjetivação), mas sim que são geometrias (euclidianas) diferentes que, no entanto, possuem semelhanças de famílias. Pois, assim como a palavra jogo pode denominar um conjunto vasto de atividades, tais

“[...] ao estabelecer essa analogia entre diversas características no interior de um jogo de linguagem ou entre vários jogos, o autor [LW] [...] não está propriamente buscando a identidade, a igualdade de um jogo para outro, mas a diferença que, apesar de existir, ainda permite compreender aquela atividade como um jogo de linguagem no interior do qual os usos das palavras estabelecem as significações”. Em outros termos, ainda que uma semelhança de família possibilite analogias, ela também permite perceber as diferenças. E é dentro desse jogo de semelhanças e diferenças que nos situamos, estabelecendo nossa racionalidade.” (MIGUEL; VIANNA; CORRÊA, 2020, p. 67)

⁵² LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (org.). Aprendendo e Ensinando Geometria. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

como o jogo de xadrez, jogo de futebol, jogos de cartas, a palavra geometria (euclidiana) também pode representar um conjunto de jogos de linguagens geométricos que possuem semelhanças (mas não é igual) ao jogo de linguagem praticado por Euclides. Assim, quando nos propomos a olhar para os livros didáticos de matemática, especialmente para os conteúdos geométricos, nos interessava essas diferentes abordagens, e é o que tentamos evidenciar nesta pesquisa.

E ao ponderarmos sobre as transformações da educação brasileira e, por conseguinte, no ensino da matemática, é possível conjecturarmos a existência de um Frankenstein (a matemática). Quando analisados os momentos e as transformações ocorridas em decorrência de leis, de modelos, que tentam dar uma forma “moderna” ao ensino de matemática, valendo-se de um amontoado de retalhos, cortes, recortes e costura. Então, é nesse espectro que visualizamos a possibilidade real da existência deste Frankenstein⁵³. E, se existe, deve andar à solta, é plausível que ninguém possa pará-lo – inutilizá-lo – muito menos domesticá-lo. Inevitável seria negá-lo, o que resta é aceitá-lo, criatura grotesca, incompreensível, e que tem da parte dos seres humanos uma repulsa, um remorso, mas, fato é que a criatura nem mesmo culpa tem, pois não teve origem em si mesmo, não poderia gerar-se por conta própria, necessitou de alguém que soprasse o fôlego em suas narinas. E, agora, após criado, costurado e remendado, tenta-se apresentá-lo com uma aparência mais amena, talvez até meiga, é como se estes movimentos (intra)reformatórios suscitassem um propenso poder de extirpar sua feiura tornando sua aparência menos monstruosa. Seria possível? Ou mero devaneio?

⁵³ Lins (2004) trata este tema como pactual, apresenta a ideia de um jardim onde simbolicamente habitam monstros (matemática), e que neste jardim, bem poucos podem adentrar, devido a existência do monstro. Este ser, que ao público em geral causa dor, medo e angústia, tem o estranho poder de ao mesmo tempo repelir esta vasta multidão e de outra sorte aproximar, atrair aos matemáticos, como se a estes, o monstro fosse apenas um bicho de estimação. Este simbolismo ultrapassa o nível do imaginário para tornar-se real nos afazeres diários de alunos dos diferentes locais do país.

CARTA 3

05 de maio de 2022

Refletindo sobre o que foi construído até aqui, essa metamorfose que ocorreu no processo se constituiu num longo e penoso ciclo de romper o casulo e vagarosamente iniciar outro processo, agora o de agitar as asas ainda meio que irreconhecíveis, batê-las e iniciar voo. Aparentemente este processo pode parecer algo simples, natural, indolor e fácil, mas é repleto de transformações internas até, finalmente, o externo aparecer, em graça, majestade, leveza e beleza. Quicá eu também pudesse sentir-me assim, adjetivada, depois dessa jornada, após transpirar e refazer internamente conceitos e (in)certezas, para nesta nova pele irradiar ares de liberdade e graça. E o início dessa jornada, essa é história para muito papel e pouco tempo, mas ela iniciou, diria, um tanto quanto atabalhoada. É que meus conhecimentos a respeito do programa de doutorado em Educação Matemática eram bem diferentes do que vivi, talvez eu tenha imaginado um mundo meu, das minhas convicções a respeito da área e, quando me vi num outro mundo, que eu não sabia exatamente como ele girava, se era pra direita ou para esquerda, se este mundo girava ao redor do sol, ou se o sol é que girava, fiquei desnorteada, minhas certezas transformaram-se em um amontoado de IN - incerto - insuficiente - insegurança - insipiente - intransigente - introspectiva - instigante - inspiração - inseparável - indubitável e tantos outros... E a produção em si, a escrita desta tese para apresentar diante da banca, de tantas idas e vindas, em conversas e devaneios, receios e expectativas, busca por auxílio junto ao professor orientador, várias ideias surgiram, algumas até mesmo com assuntos e caminhos bem diferentes do que acabei por intentar (outro IN), mas a ideia que começou a prosperar foi o de analisar a coleção de livros de geometria de Moise & Dorns, que chamava a atenção pelo seu título "Geometria Moderna" e o fato de, aparentemente, não fazer uma separação rígida da geometria no plano, no espaço e a analítica. Mas eu ansiava por algo a mais, ir além, não ficar apenas com uma determinada obra, então novas ideias foram

sendo colocadas na mesa, e se olharmos para além deste tempo e para antes dele. Assim, fomos sendo levados neste bater de asas, como se nosso voo perdurasse apenas um dia (senso comum que as borboletas têm apenas um dia de vida). Hipoteticamente, vivi assim, como se cada dia seria o último, meu último voo, então ele precisaria ser rápido, veloz, belo, que pudesse neste único dia alçar as estrelas, outros mundos, realidades paralelas, sem preocupação com fatídicos e enfadonhos buracos negros e lá do alto, do mais alto que pudesse chegar deliciar-me com a vista, o horizonte, a curvatura natural da terra. Que visão ampla e panorâmica se tem lá do alto, que privilégio olhar a vida por outro prisma, e, então, em meio a devaneios e impressões surrealistas, percebo que é necessário voltar, refletir e, ao olhar as pilhas de livros e rascunhos sobre minha mesa, percebi que precisava continuar. Era hora de encarar os medos e finalizar o que durante estes últimos 4 anos fora minha sombra - A T&E - e como se fosse possível, numa visão panorâmica vislumbrar tudo que havia para escrever ou tudo aquilo que desejava escrever - e mergulhar, descer, uma queda livre, um voo rasante - e aí o fim. A pesquisa percorreu vários (des)caminhos, várias obras, épocas, reformas, programas... E o desejo de entender como eram os conteúdos de geometria antes e pós MMM, posso dizer que foi satisfeito, pois, de fato, o MMM alterou o jogo de linguagem, jogado quando colocamos em uso os livros de matemática, principalmente nos conteúdos de geometria, sendo possível encontrar resquícios desse movimento até hoje nos livros didáticos. É como se esse jogo de linguagem geométrico fosse uma velha cidade, que constantemente tem sua estrutura remendada, remodelada, novos formatos, novas cores, novos moradores convivendo com os pioneiros, fundadores... Assim, acredito que as geometrias praticadas nas seis coleções escolhidas apresentam muitas semelhanças, que

“Nossa linguagem pode ser considerada como uma velha cidade: uma rede de ruelas e praças, casas novas e velhas, e casas construídas em diferentes épocas; e isto tudo cercado por uma quantidade de novos subúrbios com ruas retas e regulares e com casas uniformes.”
(WITTGENSTEIN, 1999, p. 32)

poderíamos chamar de semelhanças de família, mas também foi possível constatar diferenças, sejam relacionadas às prescrições normativas, outras a tendências educacionais instauradas em âmbito nacional e internacional. Então, por causa dessas semelhanças é que podemos chamá-las todas de “geometrias” e, mesmo não conseguindo identificar algo comum a todas elas, pois até mesmo os elementos - ponto, reta e plano são representados de formas diferentes pelos autores, e ainda os postulados - axiomas - propriedades que teriam a finalidade de

“A filosofia não deve, de modo algum, tocar no uso efetivo da linguagem; em último caso, pode apenas descrevê-lo. Pois também não pode fundamentá-lo. A filosofia deixa tudo como está.”
(WITTGENSTEIN, 1999, p. 67)

determinar ou caracterizar tais elementos também não são comuns. O que vemos são semelhanças, traços comuns que no limiar dos anos desaparecem, abrindo espaço a que outros surjam. E a educação viaja em um túnel, entre as montanhas e o mar, entre o campo e a cidade, entre a liberdade e a prisão, entre o mérito e a

“Uma afirmação: uma matemática há. Muitas matemáticas vão habitando livros e tradições e percursos históricos e grupos culturais e salas de aula e pesquisas matemáticas e pesquisas em educações matemáticas e academias e escolas e e.... Muitas matemáticas operando na lógica do E, instaurada no e pelo rizoma, que destitui a busca pelo marco zero, fundamento ou origem, assim como a busca por finalidades e fins.” (CLARETO; ROTONDO, 2021, p. 2)

concorrência, entre o saber engessado e a inocência de saberes escondidos. E os livros de matemática trilharam caminhos diversos, abordando os conteúdos de diferentes formas, demonstrando olhares permeados por ideais, experiências, modelos e enquadramentos ao momento político-

social-educacional do país. Algumas mudanças ou “aperfeiçoamentos” nas obras se deram em virtude destes eventos, destas configurações, conforme o vento soprava, (para o lado geopolítico - ideológico) levava junto a educação. Nesse movimento, vi que os cortes identificados na História do Ensino Médio não representaram uma ruptura total entre os períodos, porém, alguns elementos rompem essas limitações temporais e adentram em outros terrenos. E a minha caminhada para o doutoramento acabou por percorrer rotas alternativas, apesar de ter o projeto de pesquisa para me conduzir, algumas um tanto quanto sombrias, noutras, era possível ver o sol brilhante do amanhecer. Em cada etapa

da pesquisa, quando as surpresas e os percalços apareciam, era necessário buscar por outras saídas, outros rumos, outros voos. E, quando finalmente pude olhar para os livros, inspirada no modo terapêutico de filosofar de Wittgenstein, via coisas interessantes, diferenças, semelhanças... Mas, quando precisava abordar estas coisas, me via imersa numa profunda escuridão... Eu precisava de uma luz, de um socorro para conseguir (re)escrever, (re)produzir, (re)criar... Apenas um pequeno fecho de luz no infindável e tenebroso túnel para iluminar... E o que afastou as trevas? Além das longas horas de conversa com o meu orientador, foram algumas leituras (ainda que ingênuas) de textos de Deleuze e Guattari, que me mobilizaram a criar esse texto que carinhosamente nomeei de - DER... E, assim, posso dizer que produzi uma narrativa historiográfica do Ensino Médio por meio das produções de outros autores os quais encontrei nos anais do ENAPHEM e em suas referências, escolha metodológica que influenciou diretamente no produto final, se nossas fontes fossem outras, possivelmente teria outro resultado. Esta produção, apesar do meu desejo de fazer diferente, acabou se dando de forma cronológica, talvez pelo meu modo de ser, um tanto cartesiano. Já no movimento direcionado às produções dos autores dos livros didáticos selecionados para a pesquisa, que, por sua vez, devem ter sido influenciadas pelas produções circulantes na época, e ainda as produções de outras naturezas como os programas e reformas educacionais, ocorreu de forma anacrônica. As análises que produzimos foram feitas a partir de tantas outras produções (Garnica, Euclides, Greenberg, Imenes, Wittgenstein, Pinto, Miguel, Fiorentini...), que balizaram nosso olhar em direção das definições, axiomas, teoremas, provas, exercícios, figuras... Num processo de fluxos e cortes... A narrativa historiográfica do Ensino Médio que produzimos também foi construída pensando nos fluxos e nos cortes, havia um determinado fluxo, um modo, em termos legais, homogeneizado e, então, acontecia um corte... Uma reforma, um movimento, que alterava esses fluxos, que, por sua vez, também influenciavam no fluxo da produção dos livros didáticos que deveriam se enquadrar nestas novas regras vigentes. Um exemplo... Quando da mudança dos cursos Complementares para o curso Colegial, a alteração no tempo de duração do

curso e em suas finalidades, emergiu uma necessidade de mudanças nos livros didáticos, além da variação e extensão dos conteúdos, agora, em sua maioria, teriam coleções de livros em três volumes, uma para cada série. Minha escrita também foi pensada nessa ideia de fluxos e cortes. Assim, influenciada por diferentes abordagens e com a vontade de produzir algo que fosse pertinente ao meu ser, à minha vida, ao meu modo de agir, pensar, me posicionar, é que saiu esse ser - talvez um Frankenstein que, costurado de forma grosseira, sem aparelhagem, material e técnicas adequadas quase rompiam-se os pontos a ponto de esvaírem-se as entranhas ao solo, em outros uma costura mais delicada, com passagens sutis. Essa é a tese em carne, osso, desejos, sonhos, corpo e espírito envoltos em metamorfose(s) à espera de que a realidade transforme-se nesse voo que, ilusoriamente, alcei (ou desejava alçar) e depois... Depois não poderia deixar de citar o poeta pantaneiro, "ando devagar porque já tive presa, e levo este sorriso porque já chorei demais". Talvez isso seja o prêmio, sorrir, entregar-me ao ócio e contemplar a natureza, o voar das borboletas, a beleza do sol, a leveza das nuvens, o encanto das estrelas, a maciez da chuva, os contornos, as formas... A geometria das coisas.

*Foi numa monótona noite de novembro que via a
consumação de meus esforços. Com uma
ansiedade que beirava a agonia, reuni ao meu
redor os instrumentos de vida que poderiam
infundir uma centelha de ser na coisa inanimada
que jazia a meus pés. Já era uma da manhã; a
chuva tamborilava lugubrementemente contra as
vidraças, e minha vela já estava quase consumida,
quando, pelo fraco clarão da luz quase extinta, vi
abrirem-se os fundos olhos amarelados da
criatura; ele respirou fundo e um movimento
convulsivo agitou-lhe os membros.*

[Frankenstein, Mary Shelley]

REFERÊNCIAS

- ALVES, Rubem. **Aprendiz de mim**: Um bairro que virou escola. Campinas: Papirus, 2004.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- BICUDO, Irineu. Introdução. In: **EUCLIDES Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009. p. 15-96.
- BOMENY, Helena Maria Bousquet. Três decretos e um ministério: a propósito da educação no Estado Novo. In: PANDOLFI, Dulce (org) **REPENSANDO o Estado Novo**. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1999. cap. 8, p. 137-166.
- BOTELHO, José Francisco. I Ching: o Livro mais Antigo do Mundo. **Super Interessante**, São Paulo, dezembro 2006. Disponível em: <https://super.abril.com.br/historia/i-ching-o-livro-mais-antigo-do-mundo/>. Acesso em: 12 junho 2020.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2ª. ed. São Paulo: Blücher, 1996.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000.
- BRASIL. **Matemática**: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2009. Brasília: MEC, 2008.
- BRASIL. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, v. 2, 2008.
- BÚRIGO, Elisabete Zardo. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 1989.
- BÚRIGO, Elisabete Zardo. A Matemática Escolar nos Tempos da Ditadura Militar: modernização imposta ou consentida? In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2014. **Anais** [...]. Bauru: Faculdade de Ciências, 2014. p. 172-184.
- CALDEIRA, Cinderela. Do Papiro ao Papel Manufaturado. **Espaço Aberto**, São Paulo, outubro 2002. Disponível em: <http://www.usp.br/espacoaberto/arquivo/2002/espaco24out/vaipara.php?materia=0varia>. Acesso em: 09 junho 2020.
- CÂMARA DOS DEPUTADOS. A História da Câmara dos Deputados: A 3ª República, 2008. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/a-camara/conheca/historia/a3republica.html>. Acesso em: 15 maio 2020.
- CANO, Wilson. Da Década de 1920 à de 1930: Transição Rumo à Crise e à Industrialização no Brasil. **Revista Economia**, Brasília, v. 13, n. 3b, p. 897-916, set-dez 2012.
- CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Euclides Roxo e as Polêmicas sobre a Modernização do Ensino da Matemática. In: VALENTE, Wagner Rodrigues (org.) **Euclides**

Roxo e a Modernização do Ensino de Matemática no Brasil. São Paulo: SBEM, 2003. cap. 3, p. 86-158.

CARVALHO, Marizete Nink de. Abaixo Euclides ou Igual Euclides? Algumas Impressões sobre o Ensino de Geometria em Tempos de Matemática Moderna. *In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 23., 2019. **Anais** [...]. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, Campos Anália Franco, 2019.

CHERVEL, A.. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.** Buenos Aires: Aique, 1991.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Revista Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set-dez 2004.

CLARETO, Sônia Maria; ROTONDO, Margareth Aparecida Sacramento. O que Torna uma Matemática Digna de Ocupar Lugar em um Currículo de Licenciatura em Matemática? **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 35, 2021.

CONDÉ, Mauro Lúcio Leitão. A Gramática do Acaso: Análise, Aleatoriedade e Indeterminismo no Segundo Wittgenstein". *In: MIGUEL, A.; VIANNA, C. R.; CORRÊA, J. F. (Orgs.) Uma Historiografia Terapêutica de Acasos.* Uberlândia: Navegando Publicações, 2020. p. 199-211.

CORRÊA, Júlio Faria. **He War.** Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2015.

DALLABRIDA, Norberto. A Reforma Francisco Campos e a Modernização Nacionalizada do Ensino Secundário. **Educação**, Porto Alegre, v. 32, n. 2, p. 185-191, mai-ago 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** 1ª. ed. São Paulo: Ática, v. Único, 2005.

DELEUZE, Gilles ; GUATTARI, Félix. **Mil Platôs: Capitalismo e Esquizofrenia.** Tradução de Peter Pál Pelbart e Janice Caiafa. São Paulo: Editora 34, v. 5, 1997.

DELEUZE, Gilles ; GUATTARI, Félix. **O anti-Édipo: capitalismo e esquizofrenia.** Tradução de Luiz B. L. Orlandi. São Paulo: Editora 34, 2010.

DUARTE, Aparecida Rodrigues Silva; SILVA, Maria Célia Leme da. Abaixo Euclides e Acima Quem? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento Matemática Moderna. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 1, n. 1, p. 87-93, jan-jun 2006.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

FERREIRA, Ana Cristina; MIGUEL, Antonio ; BRITO, Arlete de Jesus. 1 vídeo (126 min). 5 Enaphem - Live ~ L. **Publicado pelo canal 5 Enaphem**, 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=w1eUo7qMsak>. Acesso em: 20 maio 2020.

FOUCAULT, Michel. **Vigiar e Punir: nascimento da prisão.** Tradução de Raquel Ramalhe. 26ª. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

FREITAG, Barbara ; MOTTA, Valéria Rodrigues; COSTA, Wanderly Ferreira da. **O Estado da Arte do Livro Didático no Brasil**. Brasília: INEP, 1987.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: um Estudo sobre a Prova Rigorosa na Formação do Professor de Matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 5, p. 7-28, jan-jun 1996.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. É necessário ser preciso? É preciso ser exato? In: CURY, Helena N. (org.) **Formação de professores de matemática: uma**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2000. p. 49-87.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; SOUZA, Luzia Aparecida. **Elementos de História da Educação Matemática**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.

GEEM. **Matemática Moderna para o Ensino Secundário**. 2ª. ed. São Paulo: LPM, v. Série Professor n. 1, 1965.

GHIRALDELLI JÚNIOR, Paulo. **História da Educação**. 2ª. ed. São Paulo: Cortez, 1992.

GHIRALDELLI JÚNIOR, Paulo. **Filosofia e História da Educação Brasileira: da Colônia ao Governo Lula**. 2ª. ed. São Paulo: Manole, 2009.

GOMES, Danilo Olímpio. Nas Dobras de Práticas de Licenciatura em Matemática: Um Exercício Narrativo Antropofágico de Rigor. **Alexandria**, Florianópolis, v. 11, n. 3, p. 33-54, dezembro 2018.

GOMES, Maria Laura Magalhães. Os Números Racionais em Três Momentos da História da Matemática Escolar Brasileira. **Bolema**, Rio Claro, v. 19, n. 25, p. 17-44, 2006.

GRANGER, Gilles-Gaston. **A Ciência e as Ciências**. Tradução de Roberto Leal Ferreira. São Paulo: UNESP, 1994.

GREENBERG, Marvin Jay. **Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history**. 3ª. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1994.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática: 1ª Série, 2º Grau**. 4ª rev. ed. São Paulo: Atual, v. 1, 1976a.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática: 2ª Série, 2º Grau**. 4ª rev. ed. São Paulo: Atual, v. 2, 1976b.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática: 3ª Série, 2º Grau**. 4ª rev. ed. São Paulo: Atual, v. 3, 1976c.

IMENES, Luiz Márcio Pereira. **Um Estudo sobre o Fracasso do Ensino e da Aprendizagem da Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista. São Paulo. 1989.

LIMA, Gumercindo. **Pontos de Matemática**. São Paulo: Soc. Imprensa Paulista, 1938.

LINS, Romulo Campos. Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho **Educação Matemática: Pesquisa em Movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 92-120.

LONGEN, Adilson. **Livros Didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um Olhar da Educação Matemática**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná. Curitiba. 2007.

MACIEL, Viviane Barros. Liceu de Goiás e Colégio Pedro II: Uma História Glocal da Álgebra Escolar no Brasil (1846-1918). In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2012. **Anais** [...]. Vitória da Conquista: UESB, 2012.

MARQUES, Alex Sandro. **Tempos Pré-Modernos: A Matemática Escolar dos anos 1950**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2005.

MARTINS, Maria Antonieta Meneghini. **Estudo da Evolução do Ensino Secundário no Brasil e no Estado do Paraná com Ênfase na Disciplina de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná. Curitiba. 1984.

MIGUEL, A. *et al.* A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 70-93, set-dez 2004.

MIGUEL, Antonio ; FIORENTINI, Dario ; MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? **Pro-Posições**, Campinas, v. 3, p. 39-54, março 1992. ISSN 1.

MIGUEL, Antonio ; VIANNA, Carlos Roberto; CORRÊA, Júlio Faria. Uma apresentação panorâmica da fisiognomia de uma historiografia terapêutica. In: MIGUEL, Antonio; VIANNA, Carlos Roberto; CORRÊA, Júlio Faria **Uma historiografia terapêutica de acasos**. Uberlândia: Navegando Publicações, 2020. p. 15-106.

MIGUEL, Antonio. O GHOEM e suas pesquisas: outros olhares. In: MESA REDONDA DO EVENTO GHOEM 10 ANOS: PRODUÇÕES E PERSPECTIVAS, 2012. **Anais** [...]. Rio Claro: UNESP.

MIGUEL, Antonio. A Terapia Gramatical-Desconstrucionista como Atitude de Pesquisa (Historiográfica) em Educação (Matemática). **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 8, n. Temático, p. 607-647, 2015a.

MIGUEL, Antonio. Uma Encenação Terapêutica da Terapia Wittgensteiniana na Condução de Pesquisas Historiográficas. **Revista de História da Educação Matemática**, São Paulo, n. 1, p. 203-255, 2015b.

MIGUEL, Antonio. Historiografia e Terapia na Cidade da Linguagem de Wittgenstein. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 368-389, ago 2016.

MIGUEL, Antonio. 1 vídeo (112 min). GPSEM - Ciclo de Palestra 2021. **Publicado pelo Canal do GPSEM**, 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=cfcF7af0tMU>. Acesso em: 10 fevereiro 2022.

MIORIM, Maria Ângela. Atualidades Pedagógicas, Aula Maior e Edart: a Divulgação de Livros Didáticos de Matemática no Brasil. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2014. **Anais** [...]. Bauru: Faculdade de Ciências. p. 172-184.

MOISE, Edwin E.; DOWNS JR, FLOYD L. **Goemtria Moderna**. Tradução de Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello. São Paulo: Edgar Blücher Ltda, v. 1, 1971.

MOREIRA, Person G. S. **Jogos de Linguagem e Geometria Euclidiana Plana: Um Olhar Terapêutico Wittgensteiniano para dois Manuais Didáticos usados em Cursos de**

Licenciatura em Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande. 2018.

NUNES, Clarice. O “velho” e “bom” ensino secundário: momentos decisivos. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 14, p. 35-60, mai-ago 2000.

NUNES, Leonardo Dias. **Progresso, Planejamento e Desenvolvimento no Brasil de JK (1956-1961).** Tese (Doutorado em Desenvolvimento Econômico) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2018.

OLIVEIRA FILHO, Francisco de. A Disciplina Escolar Matemática do Colégio e a Variação de sua Vulgata no Período 1930-1970. *In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 1., 2012. **Anais** [...]. Vitória da Conquista: UESB, 2012.

OLIVEIRA FILHO, Francisco de. **A Matemática do Colégio: Livros Didáticos e História de uma Disciplina Escolar.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo. 2013.

OLIVEIRA FILHO, Francisco de. O Processo de Constituição da Disciplina Matemática do Colégio no Período 1943-1961. *In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2014. **Anais** [...]. Bauru: Faculdade de Ciências, 2014. p. 929-939.

OLIVEIRA, A. J. Franco de. **Fundamentos da Geometria David Hilbert.** Lisboa: Gradiva, 2003.

OSORIO, Carolina Tamayo. **Venha, Vamos Balançar o Mundo, Até que Você se Assuste: Uma Terapia do Desejo de Escolarização Moderna.** Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2017.

OSORIO, Daniela Montoya; QUICENO, Ángela María; TAMAYO, Carolina. Paz y Educación Matemática. *In: CONFERENCIA INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 15., 2019. **Anais** [...]. Medellín: Universidade de Antioquia, 2019.

OTONE, Maryneusa Cordeiro. **Uma história da constituição da Matemática do Colégio no Cotidiano Escolar.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2011.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **A Matemática Escolar e o ENEM (1998-2002): o aparecimento de uma nova vulgata?.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2003.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino de geometria no Brasil: uma visão histórica.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 1989.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, São Paulo, n. 1, p. 7-17, 1993.

PINTO, Thiago Pedro. **Linguagem e Educação Matemática: UM mapeamento de usos na sala de aula.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2009.

PINTO, Thiago Pedro. Produção de histórias na Educação Matemática: um exercício com os Projetos Minerva mobilizando texto ficcional e fotografias compósitas. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 8, n. Temático, p. 862-881, 2015.

PINTO, Thiago Pedro. Análise de Livros e Manuais Didáticos do Grupo HEMEP. In: GUTIÉRRES, R. E., PRIETO, J. L. (Comps) **Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática**. Maracaibo: Asociación Aprender en Red, 2022. p. 577-591.

QUEIROZ, Rogéria Teixeira Urzêdo; ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Equação/Função Exponencial em Livros Didáticos de 1930 a 1980**: apontamentos para formação inicial e continuada de professores de Matemática e áreas afins. Belo Horizonte: PUC-MINAS, 2018.

QUINTELLA, Ary. **Matemática para o segundo ano colegial**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, v. 2, 1957.

QUINTELLA, Ary. **Matemática para o terceiro ano colegial**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, v. 3, 1958.

QUINTELLA, Ary. **Matemática para o primeiro ano colegial**. 10^a. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, v. 1, 1960.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas: UNICAMP, 2000.

RIBEIRO, Denise Franco Capello. **Um estudo da contribuição de livros didáticos de matemática no processo de disciplinarização da matemática escolar do colégio – 1943 a 1961**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2011.

ROCHA, Luiz Mauro; BARBOSA, Ruy Madsen. **Matemática Curso Colegial Moderno**. São Paulo: IBEP, v. 3, 1970.

ROCHA, Luiz Mauro; BARBOSA, Ruy Madsen; PIERRO NETO, Scipione Di. **Matemática Curso Colegial Moderno**. São Paulo: IBEP, v. 1, 1967.

ROCHA, Luiz Mauro; BARBOSA, Ruy Madsen; PIERRO NETO, Scipione Di. **Matemática Curso Colegial Moderno**. São Paulo: IBEP, v. 2, 1968.

ROMANELLI, Otaíza de Oliveira. **História da Educação no Brasil**. 28. ed. Petrópolis: Vozes, 2003.

RONAN, Colin A. **História Ilustrada da Ciência da Universidade de Cambridge**. Tradução de Jorge Enéas Fortes. Rio de Janeiro: Zahar, v. 1, 2001.

ROXO, Euclides *et al.* **Matemática 2º Ciclo - 2ª Série**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, v. 2, 1944a.

ROXO, Euclides *et al.* **Matemática 2º Ciclo - 3ª Série**. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, v. 3, 1944b.

ROXO, Euclides *et al.* **Matemática 2º Ciclo - 1ª Série**. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, v. 1, 1945.

SCHUBRING, Gert. O Primeiro Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática e o Papel da Alemanha. *In*: VALENTE, Wagner Rodrigues (org.) **Euclides Roxo e a Modernização do Ensino de Matemática no Brasil**. São Paulo: SBEM, 2003. cap. 1, p. 11-45.

SHELLEY, Mary. **Frankenstein ou o Prometeu Moderno**. Tradução de Roberto Leal Ferreira. 2ª. ed. São Paulo: Martin Claret, 2012.

SILVA, Everaldo Paulo da. Bibliografia Específica de Escola: Produção de uma Fonte para a Análise de uma Trajetória Histórica, Profissional e Institucional. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016. **Anais** [...]. São Mateus: SBHMat. p. 998-1006.

SILVA, Marcio Antonio da. **Currículos de Matemática no Ensino Médio: em busca de critérios para escolha e organização de conteúdos**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2009.

SILVA, Tatiane Taís Pereira da. **Os Movimentos Matemática Moderna: Compreensões e Perspectivas a partir da Análise da Obra "Matemática - Curso Ginásial" do SMSG**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2013.

USISKIN, Zalman. Resolvendo os Dilemas Permanentes da Geometria Escolar. *In*: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (orgs.) **Aprendendo e Ensinando Geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. cap. 2, p. 21-39.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: AnnaBlume, 2002.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Euclides Roxo e o Movimento de Modernização Internacional da Matemática Escolar. *In*: VALENTE, Wagner Rodrigues (org.) **Euclides Roxo e a Modernização do Ensino de Matemática no Brasil**. São Paulo: SBEM, 2003. cap. 2, p. 46-85.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Mello e Souza e a Crítica aos Livros Didáticos de Matemática: demolindo concorrentes, construindo Malba Tahan. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 4, n. 8, p. 171-187, 2004.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro Didático e Educação Matemática: uma História Inseparável. **Zetetiké**, São Paulo, v. 16, n. 30, p. 149-171, jul-dez 2008.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A matemática do colégio através dos livros didáticos: subsídios para uma história disciplinar. *In*: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009. **Anais** [...]. Brasília: UCB, 2009.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A Matemática do Colégio: Livros Didáticos para a História de uma Disciplina. **Site da Unifesp**, 2011a. Disponível em: http://www2.unifesp.br/centros/ghemat/DVD_s/HISTORIA/inicio.html.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A Matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares? **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 11, p. 645-662, 2011b.

VALENTE, Wagner Rodrigues. OS MOVIMENTOS DA MATEMÁTICA NA ESCOLA: do ensino de matemática para a educação matemática; da educação matemática para o ensino de matemática; do ensino de matemática para a Educação Matemática; da Educação Matemática para o Ensino de Matemática? **Pensar a Educação em Revista**, Curitiba/Belo Horizonte, v. 2, n. 2, p. 3-23, abr-jun 2016.

VALENTIM JÚNIOR, Josélio Lopes. **A Geometria Analítica como Conteúdo do Ensino Secundário: análise de livros didáticos entre a Reforma Capanema e o MMM.**

Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2013.

VALENTIM JÚNIOR, Josélio Lopes; OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de. A Geometria Analítica do Ensino Secundário vista nos Livros Didáticos de 1940 a 1970. *In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2012. **Anais [...]**. Vitória da Conquista: UESB, 2012.

VILELA, Denise Silva. **Usos e Jogos de Linguagem na Matemática: diálogo entre Filosofia e Educação Matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2013.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas.** Tradução de José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Observações sobre os Fundamentos da Matemática.** Tradução de João José Rodrigues Lima de Almeida. 1ª. ed. Curitiba: Horle Books, 2022.