



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul



Curso de FÍSICA - BACHARELADO
Trabalho de Conclusão de Curso

O potencial nucleon-nucleon devido à troca de um pión:
cálculo e características

João Pedro Gualti Scalabrini

Orientadora: Prof. Dr^a Isabela Porto Cavalcante

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso
de Física Bacharelado do Instituto de Física (INFI), da
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS).

Campo Grande – MS
Janeiro/2025



*“Conhecimento pouco é algo perigoso, beba muito
ou não experimente da fonte das musas,
lá os poucos goles intoxicam a mente,
e beber muito nos deixa sóbrios novamente.”*

(Alexander Pope)



Para meus avós:
Luís,
Gracinda,
Sebastião (*in memoriam*),
Elena (*in memoriam*)



AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Marcos e Daniele, por todo o apoio e ajuda que tive no decorrer da faculdade e da minha vida. Eu amo vocês.

Aos meus avós, minha irmã Ana, tios e primos por estarem sempre ao meu lado.

A todos os meus professores, que contribuíram para meu desenvolvimento me passando seus conhecimentos, não apenas sobre física, mas também sobre a vida. Obrigado por tudo.

À minha orientadora, professora Isabela, que teve total calma e compreensão em me ajudar no desenvolvimento desse trabalho. Assim como também agradeço a seus outros orientandos, e acima disso, meus amigos, Guilherme, Rebeca e Cássio.

Aos meus amigos, Glícia, Glinka, Kauê, Mateus, e a todos que me acompanharam nessa etapa, tenham minha gratidão.

A todos os membros do PET Física, pois, mesmo eu não sendo do projeto, me senti parte do grupo. Obrigado por todos os momentos de risadas e pela companhia ao longo dessa trajetória.

E agradeço a Deus, porque, sem Ele, provavelmente eu não teria chegado até aqui.



RESUMO

A física nuclear tem como peça fundamental a interação entre nucleons (nome que designa indistintamente prótons e nêutrons). Do ponto de vista da física de partículas, essas interações são realizadas pela troca de partículas, sendo a mais importante, nesses processos, o pión.

Partindo desta premissa, foi realizado o desenvolvimento dos cálculos necessários para se encontrar o potencial nucleon-nucleon devido à troca de um pión (do inglês: *One Pion Exchange Potential*, OPEP), iniciando com um levantamento de conceitos necessários para a realização do cálculo, como notação de Dirac e regras de Feynman. Todo o cálculo segue as técnicas da Teoria Quântica de Campos. O procedimento foi realizado passo a passo para facilitar a compreensão do assunto por aqueles que queiram iniciar os estudos nessa área.

O resultado final é um potencial envolvendo duas das cinco estruturas espaciais que compõem o potencial NN : o potencial central e o potencial tensor. Ambos são descritos a partir da função de Yukawa, que é essencialmente um potencial como o eletrostático (ou seja, com comportamento $1/r$) multiplicado por uma exponencial decrescente, com coeficiente (no expoente) inversamente proporcional à massa do pión, em pleno acordo com o curto alcance observado na interação forte. Apresentamos o comportamento desses termos do OPEP para distâncias até 7 fm. A função de Yukawa é singular na origem, o que decorre das limitações do OPEP, ou seja, pela aproximação não relativística, e devido aos nucleons serem considerados partículas pontuais. Apresentamos aqui uma maneira usual de contornar este problema, que é a utilização dos chamados fatores de forma. Eles impõem matematicamente um tamanho efetivo para os nucleons.



ABSTRACT

Nuclear physics has as its fundamental piece the interaction between nucleons (name used to designate indistinctly protons and neutrons). From the point of view of particle physics, these interactions are carried out by the exchange of particles, the most important in these processes being the pion.

Based on this premise, the necessary calculations were developed to find the nucleon-nucleon potential due to the exchange of a pion (*One Pion Exchange Potential*, OPEP), starting with a survey of concepts necessary to perform the calculation, such as Dirac notation and Feynman rules. The entire calculation follows the techniques of Quantum Field Theory. The procedure was carried out step by step to facilitate the understanding of the subject by those who want to begin studying this area.

The final result is a potential involving two of the five spatial structures that make up the NN potential: the central potential and the tensor potential. Both are described by the Yukawa function, which is essentially a potential like the electrostatic one (i.e., with $1/r$ behavior) multiplied by a decreasing exponential, with a coefficient (in the exponent) inversely proportional to the pion mass, in full agreement with the short range observed in the strong interaction. We present the behavior of these OPEP terms for distances up to 7 fm. The Yukawa function is singular at the origin, which arises from the limitations of OPEP, i.e., the non-relativistic approximation, and because nucleons are considered point particles. We present here a common way to get around this problem, which is the use of the so-called form factors. They mathematically impose an effective size for the nucleons.



LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 1.	Representação dos modelos atômicos de Thomson e Rutherford.....	11
Figura 2.	Esquematização da estrutura do próton, nêutron e mésons π^+ e π^-	18
Figura 3.	As três regiões de um campo elétrico geradas por uma partícula carregada.....	22
Figura 4.	Diagrama de Feynman demonstrando o espalhamento πN	34
Figura 5.	Diagrama da Figura 4, apresentado de forma desmanchada.....	35
Figura 6.	Potencial devido a troca de um e de dois píons.....	43
Figura 7.	Conteúdo dinâmico dos potenciais de Bonn e Paris.....	45
Figura 8.	Diagrama de Feynman da interação entre dois nucleons pela troca de um píon.....	46
Figura 9.	Função de Yukawa sem fator de forma.....	62
Figura 10.	Função de Yukawa associada ao potencial tensor sem fator de forma.....	62
Figura 11.	Comparação gráfica das funções $U(r)$ e $U_2(r)$ sem o fator de forma.....	63
Figura 12.	Função de Yukawa com fator de forma.....	64
Figura 13.	Função de Yukawa associada ao potencial tensor com fator de forma.....	64
Tabela 1.	Apresentação de valores matemáticos para cada seção do diagrama de Feynman.....	36
Tabela 2.	Elementos do potencial NN	40



SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	4
RESUMO	5
ABSTRACT	6
SUMÁRIO	8
1. INTRODUÇÃO	9
1.1. <i>Uma breve retrospectiva histórica da física nuclear</i>	9
1.2. <i>Uma breve retrospectiva histórica da física de partículas</i>	15
1.3. <i>O conceito de campo</i>	20
2. OBJETIVO	25
3. METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO	26
3.1. <i>Notação de Dirac</i>	26
3.2. <i>Regras de Feynman</i>	33
3.3. <i>Estrutura e propriedades dos potenciais NN</i>	37
3.4. <i>Principais modelos dos potenciais NN</i>	43
3.5. <i>O Cálculo do OPEP</i>	45
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	61
5. CONCLUSÃO	65
REFERÊNCIAS	67



1. INTRODUÇÃO

As interações entre prótons e nêutrons no núcleo atômico são o elemento básico da física nuclear, e para se compreender o funcionamento e a natureza dessas interações levaram-se décadas de estudos. Foi realizada no decorrer desse tempo uma busca incessante por uma teoria que descrevesse essas interações de forma precisa [1]. No melhor dos casos seria o descobrimento de uma teoria análoga à Eletrodinâmica Quântica (do inglês: *Quantum Electrodynamics*, QED), a qual explica as interações eletromagnéticas, no entanto, no caso das interações nucleares, o problema é mais complexo pelo fato de que os prótons e os nêutrons não são, e não devem ser, considerados partículas fundamentais [2]. Ou seja, eles possuem uma estrutura interna, e esta estrutura é particularmente complexa, como comentamos na seção 1.2.

Esta área de estudo é conhecida como física de energias intermediárias, sendo uma convergência entre a física nuclear e a física de partículas [3]. Para uma melhor compreensão do assunto é necessário um breve conhecimento sobre a teoria de relatividade especial (TRE). Inicialmente, realizamos uma recapitulação histórica do desenvolvimento da física nuclear e da física de partículas.

1.1. Uma breve retrospectiva histórica da física nuclear

Não existe um evento determinante que pode ser considerado como um marco inicial para a Física Nuclear. No decorrer do século XX houve uma série de descobertas importantes e estudos voltados para esta área sendo difícil apontar um evento ou uma data fixa que tenha marcado seu nascimento. Mas houve dois marcos bem importantes que se destacam entre os outros:

- Entre 1911 e 1913, foi construído um modelo atômico (Rutherford-Bohr) com base em resultados experimentais e análises quantitativas que tinha a proposta de um núcleo de tamanho finito e com configuração eletrônica estável.
- Em 1932, o nêutron foi descoberto, permitindo a elaboração das primeiras teorias nucleares.



Com os resultados experimentais obtidos pelos físicos Hans Geiger e Ernest Marsden, Ernest Rutherford inferiu a existência do núcleo atômico e determinou seu tamanho. Até aquela época o modelo atômico predominante era o modelo de Joseph John Thomson, propondo que os elétrons estavam distribuídos uniformemente dentro de uma esfera de carga positiva. Geiger e Marsden experimentaram bombardear folhas de ouro com partículas α (posteriormente identificadas como átomos de hélio ionizados). Eles esperavam que, de acordo com o modelo de Thomson, as partículas α passassem pela folha com desvios mínimos devido à distribuição difusa da carga positiva. Porém, os resultados não foram próximos do que se esperava. A maioria das partículas α passavam pela folha como era esperado, mas algumas eram desviadas em ângulos grandes, e outras eram ricocheteadas de volta para a fonte. Isso indicava que a força que espalhava uma partícula α , e que era responsável pelas deflexões maiores, tinha origem de uma colisão em uma região bem menor que o tamanho do átomo vinda do seu interior, e não devido à soma de vários espalhamentos.

O espalhamento de partículas α a grandes ângulos ocorre quando estas chegam bem próximas do núcleo. A maioria não sofre espalhamento pois atravessa regiões no interior do átomo que são blindadas pelos elétrons, resultando em uma interação bem menos intensa relativamente à força devida à carga colombiana do núcleo.

O experimento era composto por três componentes principais:

1. Fonte de partículas α : Material radioativo que emite partículas α .
2. Folha de ouro: Uma folha extremamente fina feita de ouro, servindo como alvo para as partículas.
3. Detector: Uma tela revestida com material fluorescente que brilha quando atingida pelas partículas, permitindo observar o padrão de dispersão

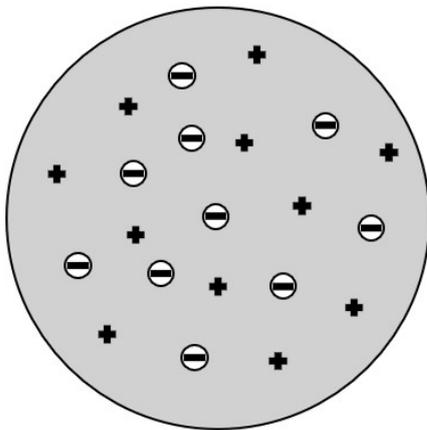
O espalhamento das partículas alfa é descrito pela seção de choque diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, que representa a fração de partículas α defletidas por unidade de tempo e fazendo um ângulo θ com a direção de incidência do feixe (em um elemento de ângulo sólido $d\Omega$). A seção de choque diferencial é dada pela fórmula abaixo.



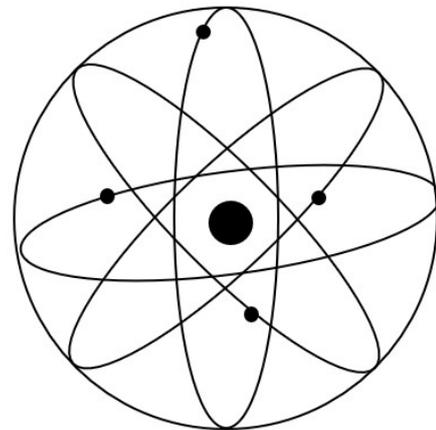
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4T}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (1.1)$$

para partículas pontuais, com energia cinética T e carga ze , espalhadas após a incidência sobre um centro espalhador fixo pontual de carga Ze . Este modelo explicaria, por exemplo, a detecção de partículas espalhadas a grandes ângulos, o que não seria possível se a carga positiva estivesse distribuída por todo o átomo, como no modelo de Thomson.

Por outro lado, as colisões frontais ($\theta = \pi$) de partículas α por diversos materiais mais leves que o ouro, que permitissem uma aproximação máxima, mostraram uma discordância em relação à fórmula de Rutherford, Equação (1.1), e assim Rutherford concluiu que os núcleos atômicos não são objetos pontuais infinitesimais, mas possuem tamanho finito com raio menor que 10^{-14} m, ou seja, próximo de 50 mil vezes menor que o tamanho do átomo [4]. Portanto, o núcleo seria muito pequeno em comparação ao tamanho do átomo, mas teria uma estrutura onde quase toda a massa do átomo estaria concentrada, possuindo uma carga elétrica positiva, tornando o átomo predominantemente vazio. Os modelos atômicos estão representados na Figura 1.



Modelo de Thomson



Modelo de Rutherford

Figura 1: Representação dos modelos atômicos de Thomson (esquerda) e Rutherford (direita).

Em 1913, Niels Hendrik David Bohr buscou aperfeiçoar o modelo proposto por Rutherford introduzindo o conceito de órbitas eletrônicas quantizadas para explicar a estabilidade atômica, respondendo assim à questão sobre a emissão e a absorção de



radiação em *quanta* de energia. Bohr postulou que as órbitas dos elétrons apenas existem a distâncias específicas do núcleo. Em 1915 e 1916, William Wilson e Arnold Sommerfeld aprimoraram tal modelo, independentemente, introduzindo fatores relativísticos, permitindo assim, a existência de orbitais elípticos. Este ficou conhecido como modelo de Bohr-Wilson-Sommerfeld, sendo o principal modelo atômico da velha teoria quântica. Para o leitor interessado, em um artigo recente, os autores refazem a análise do modelo atômico de Sommerfeld utilizando a dinâmica de Euler-Lagrange [5].

Entre os anos de 1911 e 1932, houve muitos avanços no estudo da estrutura atômica e suas propriedades, porém muitos dos modelos apresentavam falhas, falta de explicações convincentes e falta de evidências observacionais para a formulação de uma teoria convincente.

No ano de 1932 e 1933, aconteceram grandes descobertas que permitiram um avanço acelerado das pesquisas em Física Nuclear e em Partículas Elementares. As principais descobertas foram as seguintes [4]:

1. James Chadwick descobre o nêutron (tendo sua existência já sido especulada teoricamente). O nêutron possui uma massa próxima à do próton, mas eletricamente neutra, foi detectada incidindo partículas α em núcleos de berílio-9, como apresentado abaixo.



O processo nuclear apresenta uma partícula α sendo absorvida por um átomo de berílio-9, formando, portanto, um átomo de carbono-13. A seguir, o átomo instável de carbono-13 decai para um átomo estável de carbono-12 emitindo um nêutron no processo.

2. No mesmo laboratório em que Chadwick descobriu o nêutron, foi realizada a primeira desintegração nuclear artificial por John D. Cockroft e Ernest T. S. Walton. Construíram um acelerador de prótons e verificaram a ocorrência da reação:



tendo como significado que o próton foi absorvido por um núcleo de lítio-7, o que resultou na desintegração do sistema emitindo duas partículas α possuindo uma energia cinética de aproximadamente 8,5 MeV cada uma.

3. Carl D. Anderson e Seth H. Neddermayer descobriram o pósitron e^+ , elétron com carga positiva, partícula já prevista por Paul A. M. Dirac a partir da sua equação relativística para o elétron, a famosa equação de Dirac.
4. Descobrimto do deutério pelo químico Harold C. Urey, um átomo de hidrogênio que possui em seu núcleo um nêutron junto ao próton.
5. Werner Heisenberg sugere que um núcleo atômico seria constituído por A nucleons (partículas que compõem o núcleo: prótons e nêutrons), dos quais Z seriam prótons e $N = A - Z$ nêutrons, que se manteriam unidos devido à existência de uma força forte de caráter atrativo, para se contrapor à força de repulsão colombiana que atua entre os prótons.
6. No ano de 1933, Enrico Fermi desenvolve sua teoria sobre o decaimento β dos núcleos radioativos, propondo a existência de um novo tipo de interação entre as partículas elementares, a interação fraca. Por decaimento β entende-se o fenômeno da transmutação de um elemento com Z prótons em um elemento com $Z + 1$ prótons, com a emissão de um elétron e uma outra partícula chamada neutrino (assim chamada pois sua carga elétrica é neutra e sua massa extremamente menor que a do nêutron), e foi proposta hipoteticamente para balancear o princípio de conservação de momento no decaimento β , mas sendo detectada apenas em 1956.

Adicionalmente, significativas descobertas experimentais e avanços teóricos foram alcançados nesta área entre os anos de 1900 e 1932 e que tiveram forte influência sobre seu progresso. Max Planck, em 1900, elaborou uma hipótese teórica para explicar



a radiação do corpo negro, introduzindo a noção de quantum de energia, porém de uma forma ainda bem limitada. Albert Einstein, em 1905, publicou a teoria da relatividade especial e a equivalência entre massa e energia, $E = mc^2$ (onde m é a massa da partícula e c é a velocidade da luz no vácuo). Em 1922, Otto Stern e Walther Gerlach descobriram a “quantização do espaço” em um experimento no qual eles verificaram que alguns tipos de átomos possuem um grau de liberdade intrínseco que se manifesta quando um feixe desses átomos é passado por um campo magnético não uniforme. Esta quantização seria o ponto inicial para a introdução da propriedade de *spin* das partículas nucleares e elementares e da quantização do momentum angular.

George Uhlenbeck e Samuel Goudsmit, em 1925, previram que o elétron possuiria mais um grau de liberdade, este chamado de *spin*, sendo descoberto mais tarde que o próton, o nêutron e todas as outras partículas elementares também possuíam *spin*. Com o surgimento da mecânica quântica, entre os anos de 1925 e 1927, ampliaram-se os conceitos da velha teoria quântica. Tornando a mecânica quântica, uma teoria extremamente precisa para descrever e prever os fenômenos que não estão no alcance da física clássica [4].

Após 1932, a Física Nuclear se encontrava em um cenário o qual a estrutura corpuscular dos nucleons ainda não estava totalmente compreendida, eram classificados como partículas elementares que interagem em curtas distâncias por uma força nuclear com caráter atrativo. Para distâncias ainda menores essa força nuclear tornava-se de caráter repulsivo. Em 1935 houve uma mudança de paradigma: a substituição do conceito de ação a distância, proposto por Newton, pelo de campo. Hideki Yukawa procurou explicar a origem da força nuclear, apresentando uma teoria inspirada na teoria eletromagnética, na qual o campo de interação entre os nucleons seria constituído de um conjunto de outras partículas de massas intermediárias maiores que a do elétron e menores que a dos próprios nucleons, as partículas vieram mais tarde serem chamadas de Mésons. A força teria alcance inversamente proporcional a sua massa. Mais tarde, o méson deixou de ser uma partícula específica e tornou-se uma classe de partículas, sendo descoberto em 1947 o *méson- π* (píon), identificado experimentalmente por Cesar G. M. Lattes, Cecil Frank Powell e Giuseppe P. S. Occhialini. Na física nuclear de baixas energias é considerado que todas essas partículas são pontuais e elementares, não havendo



preocupação com suas estruturas internas, mas elas possuem propriedades físicas bem definidas, como carga, massa e spin [4].

1.2. Uma breve retrospectiva histórica da física de partículas

Quando dizemos partículas elementares, estamos nos referindo a partículas sem estrutura, ou seja, partículas que não apresentam indícios, através de análises e observações experimentais, que sejam compostas por outras partículas. No decorrer do tempo, aquelas partículas que achamos serem fundamentais, foram sendo substituídas por outras novas, menores e mais complexas. No final do século XIX, os átomos em si eram considerados partículas elementares, por supostamente constituírem os blocos fundamentais da matéria. Com o avanço tecnológico, novos aparelhos mais precisos foram criados, e com o experimento de Geiger, Marsden e Rutherford, mudou-se essa concepção, demonstrando-se que o átomo era composto de elétrons e um núcleo não pontual. Com a descoberta do nêutron, mostrou-se que o núcleo era composto de dois tipos de partículas, os prótons e os nêutrons, que supostamente seriam partículas elementares.

Na metade do século XX, um experimento de Robert Hofstadter, o qual fazia o elétron colidir sobre prótons e nêutrons, demonstrou que esses não eram pontuais, mas possuíam uma estrutura, deixando de serem considerados elementares. Porém, o elétron, e^- , ainda manteve as características de partícula elementar, junto com duas novas partículas descobertas posteriormente, o *múon*, μ , e o *tau*, τ , que possuíam propriedades em comum, sendo diferenciados pelas massas. Junto a eles, como partículas elementares também existem os neutrinos associados ao elétron, ao múon e ao tau respectivamente, ν_e, ν_μ, ν_τ . Os quarks, os quais compõem os nucleons, embora não possam ser detectáveis diretamente, possuem sua existência provada a partir de medições de propriedades de partículas compostas. Existem vários tipos de quarks, e eles podem ser distinguidos por uma propriedade chamada *sabor* (up, down, strange, charm, botton e top), e carregam um tipo de carga chamada *cor*, análoga à carga elétrica, e responsável pela interação forte, como será explicado mais adiante. O Modelo Padrão, no tempo atual, prevalece para descrever a composição da matéria utilizando partículas elementares, com as quais é



possível explicar a existência de muitas outras partículas e antipartículas não elementares, entre essas os nucleons e os mésons- π [3].

Depois de Chadwick descobrir o nêutron, e a primeira teoria para a estrutura do núcleo ser elaborada, Yukawa, em 1935, propôs uma teoria em que, analogamente ao campo eletromagnético, onde partículas de campo são os fótons, a força nuclear, responsável por manter os nucleons contidos, deveria ser devida à troca de partículas de um campo nuclear. Em seus cálculos, deduziu que a partícula de campo nuclear deveria ter spin zero e uma massa cerca de 200 vezes a massa do elétron, e chamou-a de *méson*. No ano de 1947, em uma estação meteorológica no monte Chacaltaya na Bolívia, em uma análise de placas expostas à incidência de raios cósmicos durante o intervalo de um mês, Lattes, Powell e Occhialini identificaram a partícula teorizada por Yukawa.

No final da primeira metade do século XX, os mésons π^+ e π^- foram produzidos artificialmente no acelerador cíclotron da Universidade de Berkeley. Os mésons- π são produzidos na colisão de prótons com outros nucleons, como mostrado a seguir. (Essas reações são conhecidas como colisões NN , N sendo um nucleon) [4].



Após esse acontecimento, foram construídos novos aceleradores de partículas que possuíam detectores sensíveis para captar a presença de novas partículas resultantes de colisões com alvos específicos e detectar padrões em suas propriedades, dando início a uma nova era marcada por inúmeras descobertas de novas partículas com propriedades variadas.

No ano de 1951, um grupo de pesquisadores monitorado por Fermi realizou experimentos envolvendo colisões πN (píon-nucleon), devido à montagem de um acelerador cíclotron que permitia a produção de feixes de píons, levando à descoberta de partículas com tempo de vida extremamente curto, que foram chamadas de partículas Δ (delta). As reações são mostradas a seguir.



- a) $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$
 - b) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$
 - c) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$
 - d) $\pi^- + p \rightarrow \gamma + n$,
- (1.5)

onde a) e b) são espalhamentos elásticos, em c) há transferência de carga e em d) há captura radiativa. Observando as seções de choque que variavam com a energia incidente foram observados picos, cada qual identificado com a produção de uma nova partícula que possuía tempo de meia vida de aproximadamente 10^{-22} s, essas partículas foram identificadas como ressonâncias πN [3].

Nos anos 60, como dito anteriormente, o entendimento das partículas recém-descobertas, que supostamente eram partículas elementares, ainda estava em aberto. A única certeza era que essas interagiam fortemente com nucleons, diferentemente do fóton, elétron, neutrino e múon. Foi necessário encontrar uma forma de classificação e de relacionar todas essas partículas, foi criado o grupo chamado de *hádrons*, ao qual essas partículas pertenciam, os *hádrons* se dividiam em dois subgrupos: os *mésons* e os *bárions*. No ano de 1961, Murray Gell-Mann e Yuval Ne'eman desenvolveram, de forma independente, um esquema de classificação dessas partículas “elementares”, utilizando uma teoria de grupos chamada SU (3) [4]. Três se refere ao número de diferentes cargas da interação forte, que foram poeticamente denominadas “cores”, uma vez que a mistura equilibrada das três cargas produz um objeto que não apresenta carga, ou “cor”. A carga da interação forte não é observada diretamente, na natureza.

A figura abaixo apresenta esquematicamente as imagens do próton e do nêutron (partículas pertencentes ao grupo dos Bárions, os quais são formados por três quarks), e dos mésons π^+ e π^- (partículas pertencentes ao grupo dos mésons, sendo formados por um par quark-antiquark), também é demonstrado o cálculo de seus *spins* e cargas. Os prótons e nêutrons, bem como os quarks, possuem spin $\frac{1}{2}$. Na figura são apresentados um próton e um nêutrons com spin “para cima”.

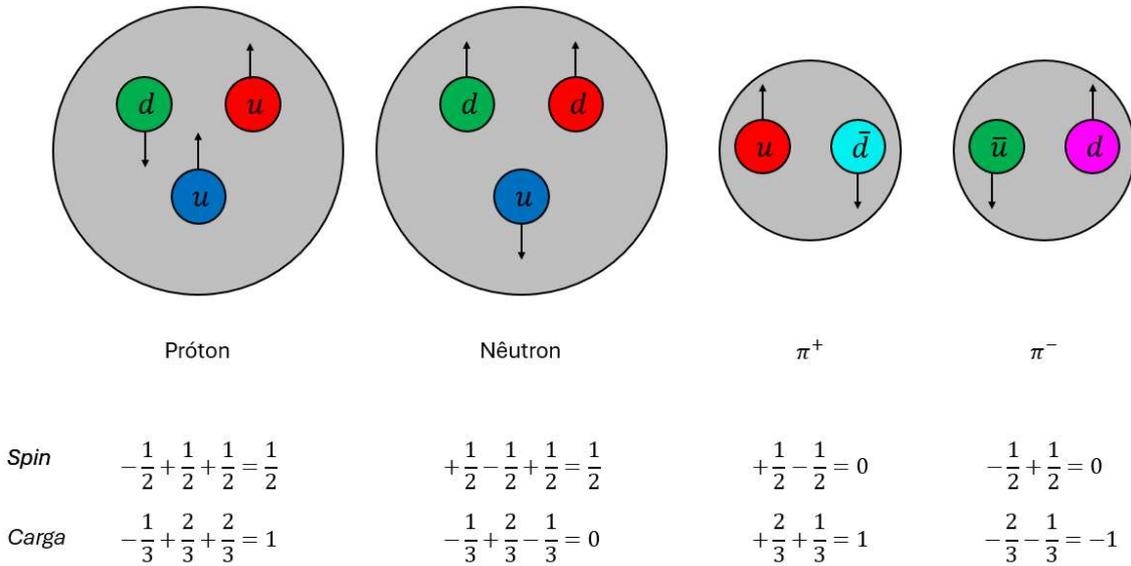


Figura 2: Esquemática da estrutura do próton, nêutron e dos mésons π^+ e π^- , onde as flechinhas indicam se o spin é “para baixo” ou “para cima”, e a soma das cores dos quarks que formam o próton e o nêutron resulta no branco, assim como nos mésons, os quais são formados por uma cor e uma anti-cor.

Mesmo existindo inúmeras partículas do grupo dos bárions, a maioria dos fenômenos nucleares possuem como “protagonistas” os prótons, nêutrons e deltas. E uma característica muito importante desse grupo é que o número de bárions somado com o número de antibárions em um dado sistema deve permanecer constante, ou seja, é uma situação análoga à conservação da carga elétrica total em um sistema fechado, portanto, costumamos atribuir um número bariônico aos bárions, $B = +1$, aos antibárions, $B = -1$, e aos mésons, $B = 0$.

Essa conservação do número bariônico torna possível reações nucleares do tipo $\pi^+p \rightarrow \pi^0\Delta^{++}$, ou seja, $(0 + 1 = 0 + 1)$, mas impede que aconteçam reações como: $\pi^+p \rightarrow pp$, ou seja, $(0 + 1 \neq 1 + 1)$. Para a física nuclear usual, não tratamos processos que envolvam antipartículas, portanto, a conservação do número bariônico equivale à conservação do número total de nucleons [1].

Para o próton e o nêutron, suas massas são muito próximas. O próton possui massa $m_p = 938,28 \text{ MeV}$ e o nêutron possui massa $m_n = 939,54 \text{ MeV}^1$ [6]. O próton é estável

¹ Em física nuclear e de partículas utilizamos a equivalência entre massa e energia e indicamos a massa com unidade de energia, estando subentendido que se trata da massa multiplicada por c^2 .



enquanto o nêutron possui tempo de meia vida de $\tau = 918$ s. A meia vida do nêutron é extremamente grande em comparação com os tempos das interações fortes, da ordem de 10^{-23} s, isso faz o próton e o nêutron serem partículas quase idênticas, desprezando interações eletrofracas. Portanto, vemos a necessidade da implementação de uma nova grandeza para diferenciar esses dois nucleons, o isospin. Esse formalismo é bem parecido com o de spin, o próton tendo sua terceira componente (componente z) do isospin “para cima” e o nêutron tendo sua terceira componente do isospin “para baixo”, podendo ser representados por dois elementos de um duplete de isospin $\frac{1}{2}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ n &\rightarrow \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Existem cargas diferentes para cada um dos três tipos de píons: $+e$, zero e $-e$. Sendo as massas de π^+ , π^- e π^0 respectivamente, $m_{\pi^-} = m_{\pi^+} = 139,57$ MeV e $m_{\pi^0} = 134,96$ MeV [6]. Os três estados de carga do pión correspondem a um estado tripleto, com isospin 1, como apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow |1, 1\rangle \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \\ \pi^0 &\rightarrow |1, 0\rangle \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \pi^- &\rightarrow |1, -1\rangle \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Os píons não carregam número bariônico por serem mésons. O pión apenas decai por interações eletrofracas, visto, portanto, como estável, no âmbito das interações fortes. Dando um pequeno *spoiler* do que é apresentado mais à frente, o pión possui a massa associada ao alcance das interações nucleon-nucleon, portanto, em muitos casos é



interessante medi-la em fm^{-1} ²: $(m_{\pi^+} + m_{\pi^-} + m_{\pi^0})/3 = 0,7 \text{ fm}^{-1}$. Essa massa é bem pequena em relação ao grupo hadrônico, sendo $1/7$ da massa do nucleon.

Existe muitos outros fatores históricos, descobertas e pesquisas que nos permitiram chegar aonde estamos hoje, muitas outras áreas foram surgindo ao decorrer da segunda metade do século XX, assim como a *Eletrodinâmica Quântica*, a *Cromodinâmica Quântica*, *Teoria Eletrofraca* e o *Modelo Padrão*. Mas essas partes já estão muito além do objetivo desse trabalho, vamos então dar uma pausa na contextualização histórica e dar prosseguimento para o real objetivo deste texto.

Para finalizarmos a introdução, falamos um pouco sobre o conceito de campo e como ocorrem as interações entre partículas.

1.3. O conceito de campo

As interações entre nucleons ocorrem através de potenciais, sendo a base da física nuclear, portanto, podemos interpretar os nucleons como fontes de campo forte. Ou seja, essas partículas são capazes de criar ao seu redor uma influência espacialmente distribuída, sendo algo capaz de preencher todos os pontos do espaço em volta da matéria e com uma variação da intensidade dependendo da distância de sua fonte. É possível fazer uma analogia com campos eletromagnéticos e cargas elétricas.

Uma partícula carregada eletricamente, assim como um elétron, tem em sua volta um campo elétrico, e uma característica do campo é que ele sempre estará lá, independente se houver ou não outras partículas carregadas por perto que poderão senti-lo. Portanto, o campo é uma propriedade da partícula, sendo impossível separar um do outro. O campo elétrico é uma parte real, porém não material, do elétron preenchendo o espaço ao seu redor. Uma forma clássica de representar a existência de campos é por meio de linhas de campo e, considerando esse elétron parado, essas linhas se distribuem uniformemente em todas as regiões do espaço.

Quando a partícula se move com velocidade constante, vamos dizer que ela está viajando com uma velocidade v no eixo x , portanto, a aparência das linhas de campo terá

² Esta unidade vem de fazermos $\frac{h}{2\pi}c = 1$, por conveniência; em termos das unidades de energia MeV e comprimento fm, numericamente temos $\frac{h}{2\pi}c = 197,3 \text{ MeV fm}$ sendo este valor numérico o fator de conversão entre MeV e fm^{-1} [6].



um formato diferente, ficando mais aglomeradas no plano perpendicular ao movimento (eixos x , y e z). Este efeito é a chamada contração relativística do espaço. Consideremos uma partícula se movendo a uma velocidade constante v ao longo do eixo x , e imaginemos o espaço contendo uma rede quadrada. Observando a partícula, em movimento uniforme, a partir do referencial da Terra, a rede nos planos xz (e xy) fica contraída, carregando consigo as linhas de campo. As linhas de campo, agora, aparecem mais concentradas próximo ao plano contendo a partícula e perpendicular ao movimento. Isso significa que as linhas de campo apresentam uma simetria cilíndrica, em torno do eixo x . Essa redistribuição de linhas de campo relativamente à situação não relativística é tal que corresponde a um campo elétrico mais intenso que o colombiano na direção perpendicular ao movimento e menos intenso que ele na direção do movimento [7].

Agora vamos supor que essa nossa partícula que está se movendo com velocidade v no eixo x se choque com um obstáculo e freie quase instantaneamente. Depois de um intervalo de tempo longo, com a partícula parada, o campo em sua volta deve ser eletrostático e suas linhas de campo espalhadas novamente de forma uniforme. Mas e se observássemos o campo da partícula em um intervalo de tempo bem curto após a colisão da partícula com o obstáculo? As linhas de campo já estariam distribuídas isotopicamente ao redor da partícula? A TRE, em seus postulados, propõe que não. Pois não existe a possibilidade da troca de informação de forma instantânea, essa troca se dá com velocidade menor ou igual à velocidade da luz no vácuo, c . Portanto, se é preciso um intervalo de tempo para que a informação de que a partícula parou se propague no espaço entre a partícula e um ponto qualquer, se este ponto estiver demasiadamente longe, a informação demorará mais tempo para chegar.

Mas como é a característica do campo elétrico em um ponto próximo da carga, em um instante de tempo depois que ela parou e antes de chegar essa informação em tal ponto? Se ainda não chegou a informação de que a carga começou a desacelerar, em tal ponto considerado, então o comportamento do campo elétrico nesse ponto será o mesmo da carga em movimento, como se houvesse um *delay* (atraso). As linhas de campo que passam por essa região do espaço onde está o ponto, irão apontar para a posição em que a partícula carregada deveria estar caso ainda estivesse se movimentando uniformemente.

Após o instante em que a partícula carregada para seu movimento, o espaço estará dividido em três regiões: a região que já foi informada que a carga parou, ou seja, a região



mais perto da carga, a região mais longe da carga que ainda não recebeu a informação e, portanto, o campo possui o mesmo comportamento esfericamente simétrico de quando a carga estava em movimento, e o campo de transição, o qual é a informação se “espalhando” no espaço, que está entre as duas regiões anteriores. As três regiões estão representadas na figura a seguir.

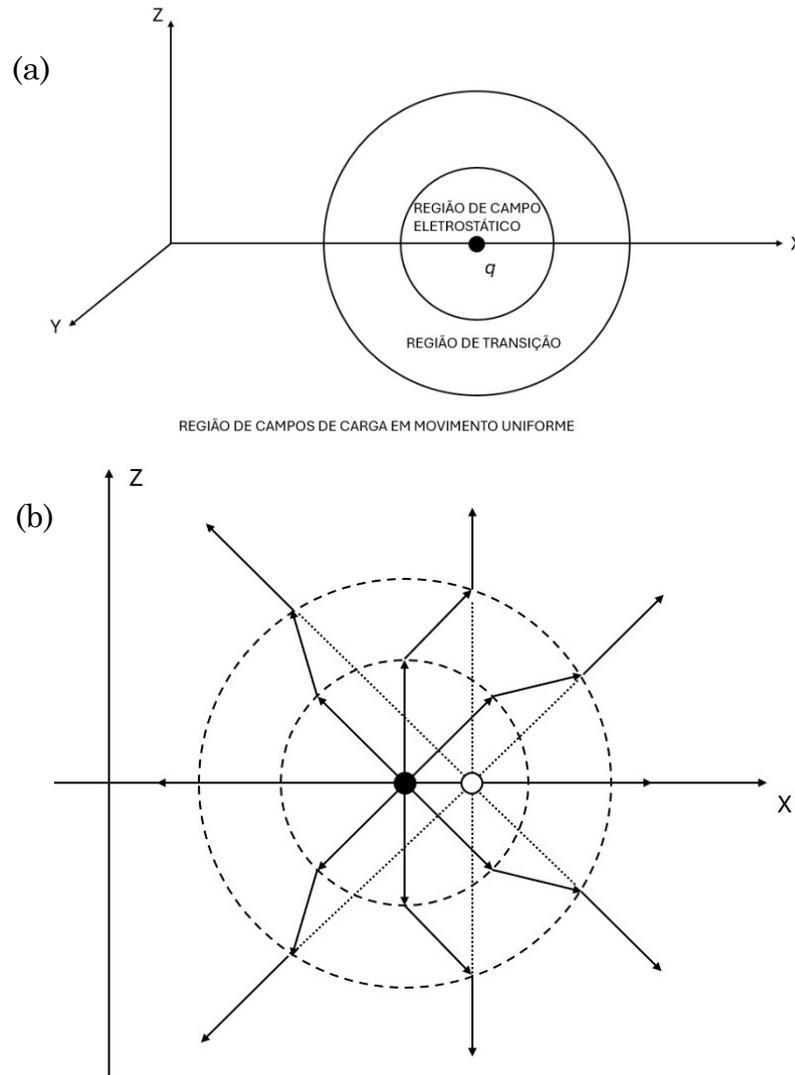


Figura 3: (a) Uma carga, q , viajando próximo da velocidade da luz, colide perdendo toda a sua velocidade. O campo da carga parada irá demorar um intervalo de tempo maior para chegar em pontos mais distantes da carga. (b) Linhas de campo de uma carga desacelerada. Na região interna, o campo é o de uma carga parada; na região mais distante, o campo é de uma carga ainda em movimento.



A teoria eletromagnética estabelece que as linhas de campo apenas podem “nascer” e “morrer” em cargas elétricas. Logo, no problema apresentado acima, as linhas de campo devem se alastrar até o infinito, e por isso as linhas de campo devem ser contínuas ao longo das três regiões; assim, elas se deformam na região de transição, para garantir a continuidade das linhas, é o chamado campo de radiação.

Essa discussão sobre o campo eletromagnético tem como finalidade apresentar esses dois modos diferentes em que ele pode se comportar. Ele pode, por um lado, ser o mediador da interação colombiana, que cai inversamente proporcional ao quadrado da distância. E, por outro lado, na forma de radiação, ir até distâncias muito longas. O campo da radiação depende do tempo e se propaga, por outro lado o campo colombiano não depende do tempo e não se propaga [3]. Porém os dois campos, tanto o radiante quanto o colombiano, são manifestações diferentes do próprio campo eletromagnético. Cumpre ressaltar que toda essa discussão foi feita dentro do contexto clássico.

Em um contexto quântico, há dois níveis distintos de efeitos. No primeiro nível, consideramos o caráter do elétron como onda-partícula e, portanto, obedecendo a uma equação de movimento tal como a equação de Schrödinger. Neste nível é possível considerar o campo do elétron como sendo clássico, e se distribuindo no espaço de forma contínua.

O segundo nível em que se pode tratar esse problema é aquele em que o campo também é quantizado. Nesse contexto o campo do elétron não é mais contínuo, mas sim uma estrutura que é dada pela soma das probabilidades de diversos efeitos diferentes, envolvendo fótons.

Por exemplo, consideramos um elétron livre com momento bem definido no espaço de configuração. O elétron é uma onda plana e pode ser representado pelo seu vetor de onda. Observando do ponto de vista quântico, existe a possibilidade desse elétron se propagar sem emissão nenhuma, ele também pode emitir e reabsorver fótons ao seu redor, como também pode emitir um fóton que decai em um par e^+ e e^- , que se aniquilam emitindo um outro fóton que é reabsorvido pelo elétron inicial. Além dessas, existe uma quantidade vasta de outras possibilidades, tendo cada uma delas uma probabilidade específica de ocorrer.

A maior diferença entre os campos está no fato de que, no caso clássico, o campo é visto como se fosse uma “substância eletromagnética” com uma só estrutura, enquanto



no caso quântico, é preciso fazer um esforço para especificar a estrutura do campo em termos de partículas. É comum chamar um elétron rodeado por um campo quântico de elétron “vestido”, ou também dizer que este elétron está cercado por uma “nuvem” de fótons e outras partículas.

Na eletrodinâmica quântica (do inglês: *Quantum electrodynamics*, QED), pensa-se que os elétrons emitem e reabsorvem fótons. Também sabemos que por outro lado os fótons são partículas de luz. Então como é possível não sermos capazes de enxergar fótons que uma carga emite no escuro? Vamos lembrar que no caso clássico existem duas manifestações do campo eletromagnético possíveis, e apenas a manifestação radiante pode ser vista. No caso quântico possuímos casos análogos, existem duas qualidades de fótons, os virtuais e os reais correspondendo aos campos coulombiano e radiante, respectivamente. Diferentemente do caso clássico, as diferenças entre esses fótons não são essenciais, mas apenas de característica cinemática.

É possível entender a origem cinemática da diferença entre partículas reais e virtuais da seguinte forma. A TRE nos diz que uma partícula de massa de repouso m , e momento \vec{p} , possui uma energia E :

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad (1.6)$$

Como citado anteriormente, $c = 1$ (isso vai ajudar a simplificar bastante os cálculos mais adiante). Na visão na mecânica quântica, uma partícula é real se a relação acima for obedecida. Ainda dentro desse contexto, podemos observar que a obediência à relação acima não é obrigatória, com isso, há as situações nas quais a energia da partícula, sua massa e seu momento não possuem uma “harmonia”. Por haver esse desequilíbrio, a partícula não pode chegar a ser detectada desta maneira e, portanto, temos uma partícula virtual.

Então, para finalizarmos essa apresentação de conceitos, vamos entender como ocorre a interação entre dois elétrons na eletrodinâmica. Para o caso clássico, entendemos a situação da seguinte forma: um elétron cria um campo que preenche todo o espaço, o segundo elétron, sente uma força por estar imerso no campo do primeiro elétron. Para o caso quântico é algo parecido: um elétron está cercado por uma nuvem de partículas, que ele emite e reabsorve, o segundo elétron está imerso na nuvem do primeiro, podendo



também absorver partículas desta nuvem. Neste segundo caso a força pode ser representada pela troca dessas partículas entre os elétrons.

Na física nuclear, a interação forte entre os nucleons pode ser entendida de forma bem parecida com a interação eletromagnética, a diferença é que nas interações eletromagnéticas, o campo é constituído de fótons, enquanto nas reações nucleares o campo é formado por píons.

Sentimos a necessidade de alertar o leitor de que, nessa seção, entendemos que elétrons e fótons se comportam como partículas quânticas, mas não devemos confundir elétrons e fótons como sendo partículas de mesma natureza. O elétron mantém sua característica de “algo material”, enquanto o fóton possui características de campo. Essa diferença se dá pelo fato de elétrons serem férmions e fótons serem bósons.

2. OBJETIVO

O principal motivo para o estudo de processos mesônicos é o fato de que a linguagem dos Mésons permite uma descrição quantitativa precisa do que ocorre em muitos processos básicos da física nuclear.

Em física nuclear, a importância de um dado processo mesônico varia de caso a caso. Algumas vezes, ele pode ser completamente determinante, enquanto em outras ele produz apenas correções. A troca de um pión entre dois nucleons é o principal processo mesônico da interação nucleon-nucleon, o qual é responsável por uma parcela da força que mantém prótons e nêutrons contidos dentro do núcleo. Considerando que o pión é o méson mais leve, e o alcance da interação é inversamente proporcional à massa da partícula de campo, a interação pela troca de um pión predomina a grandes distâncias, por isso esse processo é demasiadamente importante. Além disso, é uma interação cujo cálculo é relativamente simples. Todos os outros processos mesônicos são mais complexos em relação ao potencial devido à troca de um pión.

Esse trabalho tem como objetivo apresentar de forma didática o procedimento para se calcular o potencial nucleon-nucleon devido à troca de um pión. E, em seguida, analisar a contribuição da troca de um pión para os canais de spin e isospin do potencial NN . O objetivo secundário desse trabalho é apresentar processos matemáticos de forma bastante detalhada sobre um



processo nuclear fundamental, tornando esse assunto mais acessível para alunos e alunas de graduação que desejem ser introduzidos na área de física nuclear. Este trabalho teve como principal base a Referência [2].

Apresentamos inicialmente uma introdução sobre notação de Dirac e regras de Feynman, as quais nos permitem fazer uma leitura matemática dos diagramas de Feynman e, assim, calcular o potencial devido à troca de um pión. Um passo importante é conectar a linguagem da QFT com a mecânica quântica, onde está definido propriamente o potencial NN . Nesse processo aparece a famosa função de Yukawa, cujas características determinam o comportamento da força nuclear forte e como o potencial se comporta em função da distância. Por fim, apresentamos o tratamento para distâncias pequenas entre os nucleons, através da introdução de um fator de forma. Finalmente, apresentamos nossas conclusões.

3. METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO

A metodologia utilizada seguiu aquela apresentada na Referência [2], na qual se baseia esta seção. Inicialmente apresentamos e discutimos as notações de Dirac e regras de Feynman, ferramentas matemáticas utilizadas na mecânica quântica e na QFT, que possibilitaram o cálculo dos potenciais nesse trabalho. Em seguida apresentamos as principais propriedades e modelos dos potenciais NN , sendo possível uma compreensão de porque é tão importante o potencial NN pela troca de um pión (OPEP), que representamos aqui. Por fim, mostramos como se obtém o OPEP com as técnicas da QFT. Realizamos o cálculo do OPEP à medida em que apresentamos o método de cálculo.

3.1. Notação de Dirac

Os nucleons possuem spin e isospin iguais a $\frac{1}{2}$. Portanto, na mecânica quântica não relativística, sua função de onda nesses espaços é dada pelo produto direto dos vetores de estado correspondentes $\left| \frac{1}{2} s \right\rangle_{\sigma} \otimes \left| \frac{1}{2} t \right\rangle_{\tau}$, sendo s e t a terceira componente dos vetores de *spin* e *isospin*, respectivamente, podendo assumir os valores de $+\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$, conforme



a teoria de momento angular da mecânica quântica. Para termos uma notação mais compacta, escreveremos esses estados por meio de matrizes.

Os spinores do nucleon nos espaços de spin e isospin são matrizes (2x1), que simbolizamos com χ^s e η^t , respectivamente, e que são relacionadas aos vetores de estado por:

$$\chi^{\pm\frac{1}{2}} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{2} \end{array} \right]_{\sigma} \rightarrow \text{spinor do nucleon no espaço de spin}$$

$$\eta^{\pm\frac{1}{2}} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{2} \end{array} \right]_{\tau} \rightarrow \text{spinor do nucleon no espaço de isospin}$$

Na mecânica quântica relativística, a descrição do nucleon no espaço de isospin se mantém inalterada, enquanto no espaço de spin sua descrição passa a ser representada por um spinor de quatro componentes, dependente do momento \vec{p} , portanto, sua função de onda pode ser representada por:

$$u^s(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \left[\begin{array}{c} (E+m)I \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{array} \right] \chi^s \quad (3.1)$$

sendo I , a matriz identidade em duas dimensões. No spinor de Dirac u^s , as matrizes I e $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ multiplicam o spinor de Pauli χ^s [1].

A componente $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ da função de onda indica o “produto escalar” entre as componentes do momento do nucleon e as matrizes de Pauli, sendo elas hermitianas e dadas por:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

O produto escalar $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ é representado como:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \sigma_1 \cdot p_1 + \sigma_2 \cdot p_2 + \sigma_3 \cdot p_3 = \begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ p_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -ip_2 \\ ip_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & -p_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \quad (3.3)$$



sendo que os índices 1, 2, 3 referem-se às componentes cartesianas (espaciais) dos vetores x , y , z , respectivamente.

Então vamos supor um nucleon com spin $+\frac{1}{2}$ e outro com spin $-\frac{1}{2}$, suas funções de onda são dadas abaixo.

Para $s = +\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} u^{+\frac{1}{2}}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} (E+m)I \chi^{+\frac{1}{2}} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi^{+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} (E+m) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} (E+m) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} E+m \\ 0 \\ p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para $s = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} u^{-\frac{1}{2}}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} (E+m)I \chi^{-\frac{1}{2}} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} (E+m) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} (E+m) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ -p_3 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} 0 \\ E+m \\ p_1 - ip_2 \\ -p_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

De qualquer maneira, escrevemos o spinor da primeira forma (matriz), para simplificar a notação. Não indicamos também de forma explícita o índice s nem a matriz I por questões de simplicidade e praticidade, isso não significa que eles não estejam lá. Portanto de uma forma mais simples podemos escrever a função de onda como:

$$u(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} (E+m) \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{bmatrix} \chi \quad (3.6)$$

As matrizes $\vec{\sigma}$ obedecem a uma relação que será bem útil para nós em cálculos futuros, a propriedade é demonstrada logo abaixo.

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad , \quad (3.7)$$



sendo δ_{ij} o delta de Kronecker e ε_{ijk} o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita. Ele vale zero se ao menos dois índices são iguais, 1 se ijk é uma permutação cíclica de 123, e -1 se ijk for uma permutação anticíclica.

Vamos validar essa expressão, para isso sabemos que o índice da matriz σ varia de 1 a 3, se considerarmos, por exemplo, $i = 1$ e $j = 2$, o resultado da propriedade fornece uma σ_k , como os índices i e j já possuem valores, o único valor não nulo de ε_{ijk} é para $k = 3$, resultando +1.

$$\sigma_1\sigma_2 = \delta_{12} + i\varepsilon_{123}\sigma_3 = 0 + i(+1)\sigma_3 = i\sigma_3 \quad (3.8.a)$$

Podemos verificar este resultado diretamente, substituindo a forma explícita das matrizes de Pauli.

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = i\sigma_3 \quad (3.8.b)$$

Com essa relação podemos obter uma outra propriedade importante para nosso estudo. Consideramos dois vetores \vec{a} e \vec{b} genéricos, no caso, momentos de nucleons.

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (3.9)$$

Para chegarmos a esse resultado devemos escrever os vetores na forma de componentes para aplicarmos a propriedade anterior. Na soma de Einstein suprimimos o símbolo da somatória, que fica implícita quando temos um índice dobrado, no caso, i e j . Utilizamos essa convenção na expressão abaixo a partir da terceira passagem.

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) &= \sum_{i=1}^3 \sigma_i a_i \sum_{j=1}^3 \sigma_j b_j = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_i \sigma_j a_i b_j = (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k) a_i b_j \\ &= \delta_{ij} a_i b_j + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k a_i b_j = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Agora adicionamos o espaço de isospin em nossa função de onda do nucleon, por isso, há um produto tensorial entre as componentes de spin e as componentes de isospin. Nossa nova função de onda pode ser escrita da seguinte forma:



$$N(\vec{p}) = u(\vec{p}) \otimes \eta = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} E+m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{bmatrix} \chi \otimes \eta = \eta \otimes u(\vec{p}) \quad (3.11)$$

As matrizes $\vec{\sigma}$ não agem sobre o spinor no espaço de isospin, por causa disso, não há diferença em qual spinor está de qual lado no produto tensorial.

Estamos trabalhando com o formalismo relativístico, portanto, temos que utilizar as matrizes de Dirac, que possuem dimensão (4x4), possuem traço nulo e são representadas por γ^μ , onde μ é o índice relativo ao espaço-tempo. Uma outra diferença dessas matrizes com as matrizes de Pauli é a propriedade que elas possuem de anticomutação.

$$\{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (3.12)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica do espaço relativístico, sendo seus valores dados por:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

na Equação 3.12, está subentendida a matriz identidade (4x4) do lado direito.

As matrizes γ podem ser representadas da seguinte forma:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

onde I e σ_k são respectivamente a matriz identidade (2x2) e as matrizes de Pauli.

Novamente é possível construir o produto escalar dessas matrizes com um quadrivetor a^μ . O produto normalmente é representado por \not{a} , conhecido como *a slash*. É dado por:



$$\not{a} = g_{\mu\nu} a^\mu \gamma^\nu = a_0 \gamma_0 - \vec{a} \cdot \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} a_0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{a} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{a} & -a_0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Existe uma quinta matriz γ dada pela combinação de todas as outras e multiplicada por i . Também há matrizes definidas pelo comutador de duas matrizes γ , como vemos abaixo.

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3.17)$$

As matrizes γ^0 , γ_5 e σ^{ij} são hermitianas, enquanto as matrizes γ^k e σ^{0i} são anti-hermitianas. Porém, qualquer dessas matrizes que seja multiplicada por γ^0 é hermitiana. As 16 matrizes abaixo formam uma base para as matrizes 4×4 .

$$\Gamma = I, \gamma^\mu, \gamma_5, \gamma^\mu \gamma_5, \sigma^{\mu\nu} \quad (3.18)$$

Para nucleons não relativísticos, as estruturas gerais, das amplitudes de probabilidade que descrevem processos físicos, são sempre representadas por um “sanduíche” de um operador matricial (2×2) entre um spinor de Pauli e seu hermitiano conjugado. Para o caso relativístico existe pouca diferença, as matrizes passam a ser (4×4) e os spinores de Pauli são substituídos pelos spinores de Dirac. Porém, no lugar do spinor de Pauli hermitiano conjugado, temos um spinor de Dirac hermitiano conjugado multiplicado por γ^0 . Esta combinação é uma matriz horizontal representada da forma abaixo.

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}) &= u(\vec{p})^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E + m \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E + m \quad -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \end{aligned} \quad (3.19)$$



Do ponto de vista apenas matricial, uma amplitude física sempre resulta em um escalar.

Na maioria dos cálculos usando a mecânica quântica relativística é bem útil usarmos o formalismo de duas componentes, sendo os resultados expressos por matrizes (2x2) e spinores formados por dois elementos. Para realizarmos o cálculo de uma amplitude, podemos facilitar o trabalho multiplicando inicialmente todas as matrizes contidas dentro do sanduíche de spinores, mantendo a notação em termos de matrizes (2x2). Vamos aplicar tudo isso para calcular uma amplitude da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 A &= \bar{u}(\vec{p}) \not{a} \gamma_5 u(\vec{p}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E+m \quad -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \begin{bmatrix} a_0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{a} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{a} & -a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E+m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{bmatrix} \chi \\
 &= \frac{1}{E+m} \chi^\dagger [E+m \quad -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \begin{bmatrix} -\vec{\sigma} \cdot \vec{a} & a_0 \\ -a_0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E+m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{bmatrix} \chi \\
 &= \frac{1}{E+m} \chi^\dagger [E+m \quad -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \begin{bmatrix} -(E+m)(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) + a_0(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \\ -(E+m)a_0 + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \end{bmatrix} \chi \\
 &= \frac{1}{E+m} \chi^\dagger [-(E+m)^2(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \\
 &\quad + 2a_0(E+m)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})] \chi \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Podemos utilizar a seguinte relação entre as matrizes de Pauli para deixar mais enxuto o resultado:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = 2(\vec{p} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) - \vec{p}^2(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \tag{3.21}$$

Portanto, temos o seguinte valor para a amplitude:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{E+m} \chi^\dagger [-(E+m)^2(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) + 2a_0(E+m)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \\
 &\quad - 2(\vec{p} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + \vec{p}^2(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})] \chi \\
 &= \frac{1}{E+m} \chi^\dagger \{ -[(E+m)^2 + \vec{p}^2](\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \\
 &\quad + 2[a_0(E+m) - (\vec{p} \cdot \vec{a})](\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \} \chi \tag{3.22}
 \end{aligned}$$



Chegamos ao resultado que desejamos, possuindo a forma de um sanduíche de matrizes (2x2) entre os spinores de Pauli. Essa forma de amplitude é, em geral, a mais adequada para a física nuclear e de energias intermediárias. Lembramos que, essa expressão ainda está no formalismo relativístico, pois não chegamos a fazer ainda nenhuma aproximação, apenas transformações matemáticas.

O movimento dos nucleons relativísticos pode ser representado pela famosa equação de Dirac, dada por:

$$(\not{x} - m)u = 0 \quad (3.23.a)$$

$$\bar{u}(\not{x} - m) = 0 \quad (3.23.b)$$

Caso queiramos saber se o spinor \bar{u} é solução desta equação, precisamos apenas reescrevê-la em termos de matrizes (2x2):

$$\begin{aligned} \bar{u}(\not{x} - m) &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E + m \quad -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \left\{ \begin{bmatrix} p_0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -p_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E + m \quad -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \begin{bmatrix} E - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E - m \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E^2 - m^2 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \quad -(E + m)\vec{\sigma} \cdot \vec{p} + (E + m)\vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E^2 - m^2 - [(\vec{p} \cdot \vec{p}) + i\sigma(\vec{p} \times \vec{p})] \quad 0] \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E^2 - m^2 - |p|^2 - i\sigma(0) \quad 0] \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E^2 - m^2 - (E^2 - m^2) \quad 0] = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2. Regras de Feynman

Agora apresentamos de uma forma breve um resumo das regras de Feynman que serão úteis para esse estudo em física nuclear. Não discutimos aqui a validação das regras de Feynman, por ser algo não trivial. Este tipo de discussão pode ser encontrado em livros de eletrodinâmica quântica e teoria quântica de campos, (Referências [3] e [7]). Limitamo-nos a apenas demonstrar como essas regras funcionam e abordamos apenas os casos que utilizamos no desenvolvimento dos cálculos.



Basicamente as regras de Feynman servem para calcular amplitudes de probabilidades de ocorrência de certos processos quânticos. Inicialmente temos um desenho, o diagrama de Feynman, que descreve o processo de uma ou mais partículas que pretendemos analisar.

Um caso simples é o espalhamento elástico $\pi N \rightarrow \pi N$ que pode ser representado pelo seguinte diagrama.

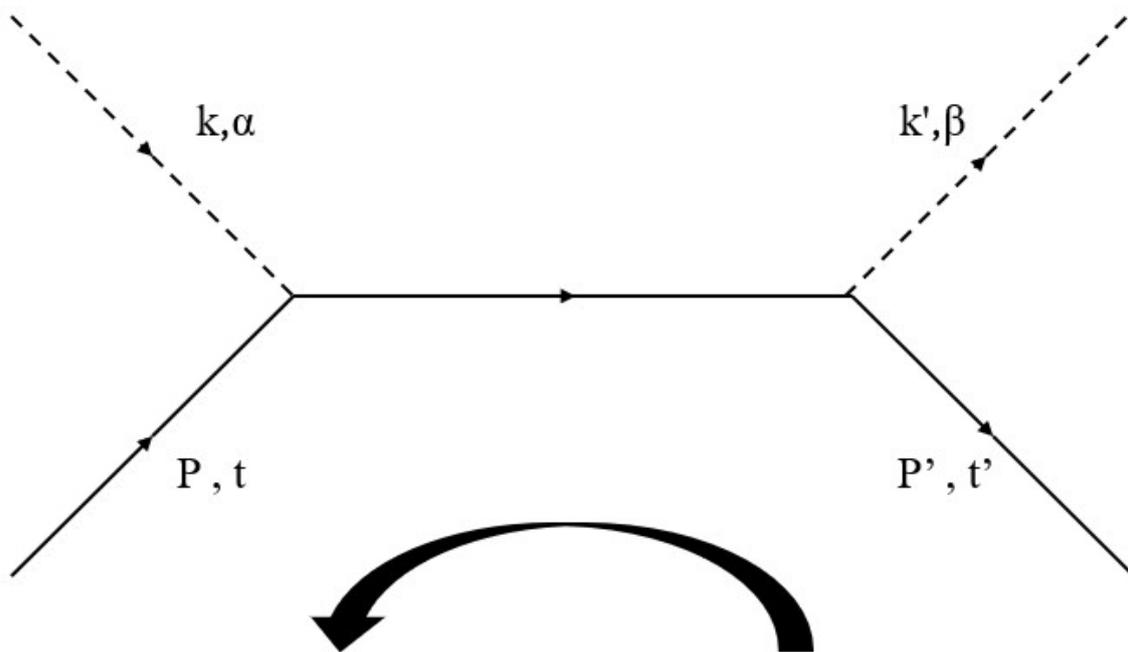


Figura 4: Diagrama de Feynman demonstrando o espalhamento πN . A flecha em sentido anti-horário indica a forma de ser realizada a leitura do diagrama (da direita para esquerda). P e k são os quadrimomentos do nucleon e do pión, respectivamente.

O diagrama acima deve ser lido da direita para esquerda. Se “desmontarmos” esse diagrama em várias peças, obteremos 5 partes com significados diferentes, analisando cada uma delas temos o seguinte:

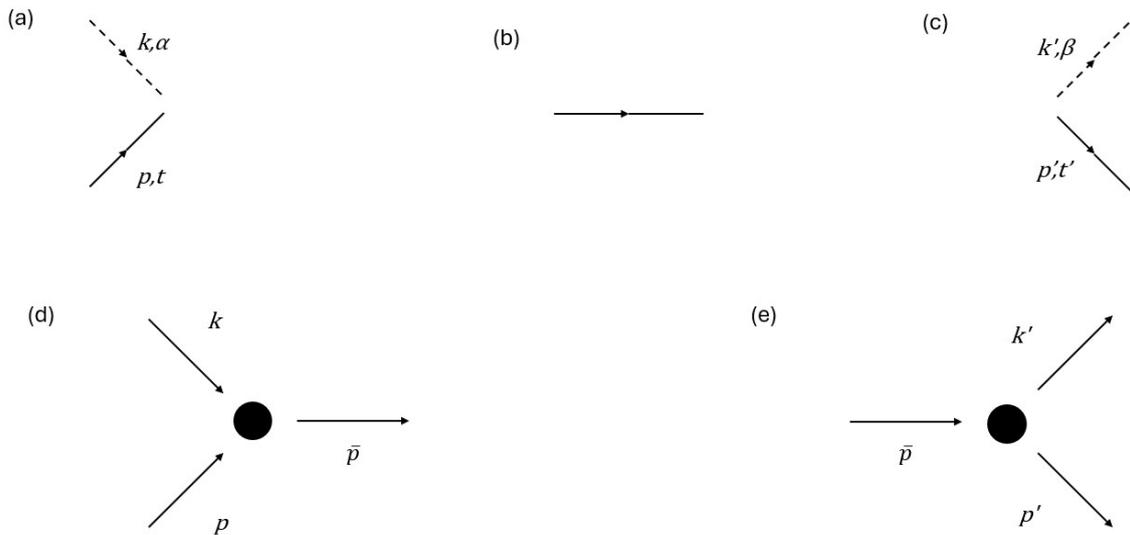


Figura 5: Diagrama da Figura 4, porém, apresentado de forma “desmanchada”, para facilitar a visualização dos processos que estão ocorrendo na interação.

- Linhas externas chegando: representada pela Figura (5 - a), um pión, de quadrimomento k e isospin α (linha tracejada), e um nucleon, de quadrimomento p e isospin t (linha contínua), antes de interagirem. Para as partículas externas valem $k^2 = \mu^2$ e $p^2 = m^2$, ou seja, são partículas reais.
- Propagador: representado pela Figura (5 - b), o nucleon, depois de absorver o pión, passa a ter quadrimomento $\bar{p} = p + k$ e, portanto, $\bar{p}^2 = p^2 + 2p \cdot k + k^2 = m^2 + 2p \cdot k + \mu^2$. Qualquer partícula em tais condições é dita fora da camada de massa e, devido ao desbalanço entre massa e quadrimomento, não pode existir indefinidamente. Portanto, o propagador descreve a vida passageira dessa partícula nesse estado.
- Linhas externas saindo: representada pela Figura (5 - c), o pión de momento k' e o nucleon de momento p' “seguem seus caminhos” depois da interação. Para eles também valem $k'^2 = \mu^2$ e $p'^2 = m^2$.
- Vértice primário: representado pela Figura (5 - d), o pión é absorvido pelo nucleon: as setas indicam o fluxo de quadrimomento, que é conservado em cada vértice e $\bar{p} = p + k$.
- Vértice secundário: representado pela Figura (5 - e), o nucleon nesse estado diferente emite um pión com momento k' , restando um nucleon estabilizado, com momento p' , onde $\bar{p} = p' + k'$.

As regras de Feynman são um conjunto de prescrições que associam, a cada elemento do diagrama de interação entre partículas, uma função matemática que a



representa. Por isso, essa leitura do diagrama nos permite a construção da amplitude relativística correspondente [8].

Para iniciarmos o cálculo da amplitude correspondente ao diagrama que nos é apresentado, precisamos ler da direita para a esquerda, seguindo a linha do nucleon (férmion). O resultado é a própria amplitude de probabilidade que desejamos, multiplicada por i . Portanto realizamos a leitura da seguinte forma em relação ao diagrama da Figura (4).

$$iT = \left[\begin{array}{c} \text{Nucleon} \\ \text{Saindo} \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} \text{Vértice} \\ \text{Direito} \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} \text{Propagador} \\ \text{do Nucleon} \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} \text{Vértice} \\ \text{Esquerdo} \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} \text{Nucleon} \\ \text{Chegando} \end{array} \right]$$

Abaixo apresentamos uma tabela contendo os principais valores matemáticos que serão usados nesse trabalho. Cada um desses valores representam uma seção do diagrama de Feynman.

Tabela 1. Apresentação de valores matemáticos para cada seção do diagrama de Feynman.

Linhas Externas		
Partícula	Representação	Valor Atribuído
Píon	Chegando: -----	1
	Saindo: -----	1
Nucleon	Chegando: →→→	$u(\vec{p})$
	Saindo: →→→	$\bar{u}(\vec{p})$
Propagadores		
Partícula	Representação	Valor Atribuído
Píon	--->---	$i \frac{1}{k^2 - \mu^2}$
Nucleon	→→→	$i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$
Vértice		
Partículas	Representação	Valor Atribuído
πNN		$\frac{g}{2m} \tau_a \not{K} \gamma_5$



Na Tabela 1, μ é a média das massas dos três tipos de píons, g a constante de acoplamento πN (adimensional), e as matrizes de Isospin, τ_α , as próprias matrizes de Pauli, as quais são:

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Utilizando, então, a tabela, obtemos:

$$iT = [\bar{N}(\vec{p}')] \left[-\frac{g}{2m} \not{K} \gamma_5 \tau_b \right] \left[i \frac{\not{p} + m}{\vec{p}^2 - m^2} \right] \left[+\frac{g}{2m} \not{K} \gamma_5 \tau_a \right] [N(\vec{p})] \quad (3.26)$$

A Equação (3.26) já é nossa amplitude relativística. Com ela podemos somar a outras amplitudes do mesmo processo ou podemos calcular a seção de choque.

Apesar de não termos apresentado a dedução das regras de Feynman, cabem algumas observações. Elas são devidas à estrutura matemática da teoria quântica de campos, em parte. Mas também são fortemente determinadas por informações fenomenológicas. As regras de Feynman também carregam informações sobre spin, isospin e outras simetrias das partículas envolvidas em algum processo específico. Há também um outro tipo de informação contida nas regras de Feynman. Qualquer amplitude calculada por seu intermédio acaba sendo invariante por rotações, translações espaço-temporais e transformações de Lorentz, além de só produzir amplitudes não nulas quando ocorre a conservação da carga elétrica e do número bariônico (no caso das interações fortes) [8].

3.3. Estrutura e propriedades dos potenciais NN

Há vários potenciais que descrevem bem as interações nucleon-nucleon a baixas energias. Estes são capazes de reproduzir tanto as propriedades do dêuteron³ como o espalhamento NN elástico, para energias cinéticas no laboratório menores que 300 MeV

³ O dêuteron é um isótopo do hidrogênio, o núcleo do átomo de deutério; é o estado ligado de dois nucleons mais simples, com um próton e um nêutron.



[2]. Os vários potenciais diferem entre si quanto a precisão com que reproduzem os dados experimentais, ao seu conteúdo dinâmico e à solidez da sua base teórica [2].

A forma geral da estrutura do potencial NN é um tanto quanto complicada, dependendo fortemente do isospin dos nucleon, e com restrições devido a simetrias, como paridade e rotação. Explicamos essas simetrias mais adiante.

Tendo em vista que um nucleon tem spin e isospin iguais a $\frac{1}{2}$, em um sistema de dois nucleons, a função de onda do sistema possui componentes no espaço de configuração, spin e isospin, de forma que esse par de partículas possa ser descrito em uma base, com spin e isospin totais bem definidos, iguais a zero (singlete, s e $t = 0$) ou 1 (triplete, s e $t = -1, 0, 1$). Denominando os valores de spin ou isospin total por 1 ou 3, para singlete e triplete, respectivamente, temos quatro possibilidades de estados, como apresentado na Equação (3.27). Outra observação é que pela troca entre os nucleons, os estados singlete e triplete são ímpares e pares, respectivamente. No espaço combinado de spin (σ) e isospin (τ) temos os quatro estados $\Gamma^{\sigma\tau}$:

$$\begin{aligned}
 \text{Singlete-Singlete} \quad \Gamma^{11} &= |0 \ 0\rangle_{\sigma} |0 \ 0\rangle_{\tau} \quad , \\
 \text{Singlete-Tripleto} \quad \Gamma^{13} &= |0 \ 0\rangle_{\sigma} |1 \ t\rangle_{\tau} \quad , \\
 \text{Triplete-Singlete} \quad \Gamma^{31} &= |1 \ s\rangle_{\sigma} |0 \ 0\rangle_{\tau} \quad , \\
 \text{Triplete-Tripleto} \quad \Gamma^{33} &= |1 \ s\rangle_{\sigma} |1 \ t\rangle_{\tau} \quad ,
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

sendo que s e t indicam, respectivamente, a terceira componente de spin e isospin nos estados tripletos. É um jargão da física nuclear denominar os estados de spin e isospin em que acontecem a interação como canais. Assim, se os nucleons estão em um estado singlete-triplete, por exemplo, dizemos que a interação aconteceu no canal (1,3).

Fenomenologicamente, sabe-se que existe uma forte dependência das interações NN nos canais de spin e isospin onde ocorrem. Por causa disso, para se encontrar o potencial total do sistema, é necessário realizar a soma de todos os estados $\Gamma^{\sigma\tau}$, associando a cada um, um termo de potencial.

$$V_{NN} = V^{11} P_{\sigma}^1 P_{\tau}^1 + V^{13} P_{\sigma}^1 P_{\tau}^3 + V^{31} P_{\sigma}^3 P_{\tau}^1 + V^{33} P_{\sigma}^3 P_{\tau}^3 = \sum_{\alpha,\beta} V^{\alpha\beta} P_{\sigma}^{\alpha} P_{\tau}^{\beta} \tag{3.28}$$



sendo P_σ e P_τ operadores de projeção de spin e isospin com os índices para o estado singlete ou tripleto. Considerando apenas componentes de spin, esses operadores de projeção podem ser escritos de forma explícita como apresentado na Equação (3.29):

$$P_\sigma^1 = \frac{1}{4}[1 - \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}] \quad , \quad P_\sigma^3 = \frac{1}{4}[3 + \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}] \quad (3.29)$$

Utilizando da Equação (3.29) e fazendo manipulação matemática simples temos as seguintes relações:

$$P_\sigma^1 + P_\sigma^3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} = 1 \quad (3.30)$$

$$3P_\sigma^1 - P_\sigma^3 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} = -\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} \quad (3.31)$$

Os operadores $\vec{\sigma}^{(1)}$ e $\vec{\sigma}^{(2)}$ são chamados de operadores de Pauli, os quais estão agindo sobre os nucleons 1 e 2, respectivamente. Os projetores do espaço de isospin são totalmente análogos.

Para a determinação completa da estrutura do potencial, é necessário a inclusão do espaço de configuração, a partir desse ponto, as simetrias de rotação e paridade tornam-se muito importantes. O potencial deve ser invariante por rotação e uma função par. A paridade é a troca da posição \vec{r} por $-\vec{r}$. Na montagem da nossa função escalar por rotação temos o operador de momento angular orbital \vec{L} , os operadores de spin $\vec{\sigma}^{(i)}$ dos nucleons do sistema e a coordenada relativa \vec{r} . A posição relativa \vec{r} em si é ímpar, mas o momento angular \vec{L} e o spin $\vec{\sigma}$, que são invariantes por rotação, são pares.

Não vamos considerar o operador momento, dado por $-i\nabla$, porque derivadas levam a potenciais não locais, que não são desejáveis. Desta forma, existem cinco combinações possíveis de operadores espaciais. Estamos construindo a forma mais geral do potencial NN , por isso, devemos considerar todas as possibilidades no espaço de configuração. Haveria mais combinações, porém, a paridade proíbe alguns escalares por rotação, como $\vec{r} \cdot \vec{L}$ ou $\vec{r} \cdot (\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)})$. As combinações válidas encontradas podem ser colocadas na forma dos seguintes operadores:

$$\text{Central:} \quad \Omega_C = 1 \quad (3.32)$$



$$\text{Spin-órbita:} \quad \Omega_{LS} = \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot (\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)}) \quad (3.33)$$

$$\text{Momento Angular:} \quad \Omega_{L^2} = \vec{L} \cdot \vec{L} = L^2 \quad (3.34)$$

$$\text{Quadrático Spin-órbita:} \quad \Omega_Q = Q = 3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{L}) - \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} L^2 \quad (3.35)$$

$$\text{Tensor:} \quad \Omega_T = S_{12} = 3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} \quad (3.36)$$

onde σ_0 é a matriz identidade 2x2 e \hat{r} é o versor na direção \vec{r} .

Cada potencial $V^{\alpha\beta}$ associado aos canais de spin e isospin pode ter termos proporcionais a esses operadores. Portanto, temos a seguinte relação:

$$V^{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} V_{\gamma}^{\alpha\beta} \Omega_{\gamma} = V_C^{\alpha\beta} \Omega_C + V_{LS}^{\alpha\beta} \Omega_{LS} + V_{L^2}^{\alpha\beta} \Omega_{L^2} + V_Q^{\alpha\beta} \Omega_Q + V_T^{\alpha\beta} \Omega_T \quad (3.37)$$

Realizando essa decomposição, os coeficientes $V_{\gamma}^{\alpha\beta}$ tornam-se dependentes apenas do módulo da distância relativa entre os nucleons do sistema. Entretanto, o potencial NN pode ser representado por 20 funções $V_{\gamma}^{\alpha\beta}(r)$, que são agrupados esquematicamente na Tabela (2).

Tabela 2. Elementos $V_{\gamma}^{\alpha\beta}$ do potencial NN.

σ	τ	C	L.S	L^2	Q	T
1	1	V_C^{11}	V_{LS}^{11}	$V_{L^2}^{11}$	V_Q^{11}	0
1	3	V_C^{13}	V_{LS}^{13}	$V_{L^2}^{13}$	V_Q^{13}	0
3	1	V_C^{31}	V_{LS}^{31}	$V_{L^2}^{31}$	V_Q^{31}	V_T^{31}
3	3	V_C^{33}	V_{LS}^{33}	$V_{L^2}^{33}$	V_Q^{33}	V_T^{33}

O potencial central, V_C , é diagonal nos espaços de spin e isospin, independente do momento angular orbital. O potencial spin-órbita, V_{LS} , é semelhante ao potencial central, sendo diagonal nos espaços de L, S, J e T. Neste caso, o valor do potencial depende de L, S e J, já que os autovalores de $\vec{L} \cdot \vec{S}$ são dados por $\frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$ [2].

Essas características também podem ser observadas nos potenciais momento angular, V_{L^2} , e no potencial quadrático spin-órbita, V_Q . Porém, o último termo da Equação



(3.37) é o potencial tensor, ele é composto por um tensor de ordem 2, tornando-o, assim, não diagonal nos espaços de spin e momento angular orbital.

Podemos utilizar das propriedades das matrizes de Pauli para demonstrar o motivo pelo qual as componentes do potencial tensor para os estados de spin na forma singleto seja zero, ou seja, $S_{12}P_{\sigma}^1 = 0$, sendo apresentado no cálculo a seguir:

$$\begin{aligned} S_{12}P_{\sigma}^1 &= [3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}] \frac{1}{4} [1 - \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}] \\ &= \frac{3}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r}) - \frac{1}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) - \frac{3}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)})^2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Agora temos duas pedras no caminho, o produto escalar das componentes de spin da partícula 1 e da partícula 2, e a multiplicação de três produtos escalares envolvendo as componentes de spin das duas partículas e a coordenada relativa entre elas. Para isso precisaremos usar o operador de Levi-Civita, temos as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \text{Soma sobre três índices:} & \quad \sum \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6 \\ \text{Soma sobre dois índices:} & \quad \sum \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijm} = 2\delta_{km} \\ \text{Soma sobre um índice:} & \quad \sum \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \end{aligned}$$

Agora, retornando ao desenvolvimento, vamos desenvolver primeiro o termo do produto escalar das componentes de spin, das partículas 1 e 2, elevado ao quadrado, para isso, podemos “desmontar” o vetor em várias componentes, atribuindo índices para cada uma delas, isso facilita o cálculo e ajuda a entender melhor o processo que está ocorrendo:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)})^2 &= \sigma_i^{(1)} \sigma_i^{(2)} \sigma_j^{(1)} \sigma_j^{(2)} = (\sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(1)}) (\sigma_i^{(2)} \sigma_j^{(2)}) \\ &= (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k^{(1)}) (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijl} \sigma_l^{(2)}) = 3 - 2\delta_{kl} \sigma_k^{(1)} \sigma_l^{(2)} \\ &= 3 - 2\sigma_k^{(1)} \sigma_k^{(2)} = 3 - 2(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para o termo no qual temos a multiplicação de três produtos escalares, realizaremos o mesmo processo abrindo os vetores em uma somatória implícita de suas componentes:



$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) &= (\sigma_i^{(1)} \hat{r}_i)(\sigma_j^{(2)} \hat{r}_j) \sigma_k^{(1)} \sigma_k^{(2)} = \sigma_i^{(1)} \sigma_k^{(1)} \hat{r}_i \sigma_j^{(2)} \sigma_k^{(2)} \hat{r}_j \\ &= (\delta_{ik} + i\varepsilon_{ikl} \sigma_l^{(1)})(\delta_{jk} + i\varepsilon_{jkm} \sigma_m^{(2)}) \hat{r}_i \hat{r}_j \\ &= (\delta_{ij} + i\varepsilon_{jim} \sigma_m^{(2)} + i\varepsilon_{ijl} \sigma_l^{(1)} - \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jkm} \sigma_l^{(1)} \sigma_m^{(2)}) \hat{r}_i \hat{r}_j \\ &= 1 - (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lj}) \sigma_l^{(1)} \sigma_m^{(2)} \hat{r}_i \hat{r}_j \\ &= 1 - \sigma_m^{(1)} \sigma_m^{(2)} + \sigma_m^{(2)} \hat{r}_m \sigma_l^{(1)} \hat{r}_l \\ &= 1 - (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) + (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r})\end{aligned}\quad (3.40)$$

Na terceira linha temos duas vezes a contração do tensor Levi-Civita por duas componentes do versor \hat{r} (i e j), ou seja, a soma em i e j do produto do tensor pelas componentes. Mostramos, abaixo, que ambas as contrações se anulam. Trata-se de um resultado geral da contração de um tensor antissimétrico por um tensor simétrico.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} r_i r_j &= \varepsilon_{ijk} \frac{1}{2} (r_i r_j + r_j r_i) = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} r_i r_j + \varepsilon_{jik} r_j r_i) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} r_i r_j - \varepsilon_{ijk} r_i r_j) = 0\end{aligned}\quad (3.41)$$

Utilizando os resultados das Equações (3.39) e (3.40) na Equação (3.38), conseguimos finalizar o cálculo do potencial tensor sobre o operador de spin no estado singleto:

$$\begin{aligned}S_{12} P_{\sigma}^1 &= \frac{3}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r}) - \frac{1}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) - \frac{3}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) \\ &\quad - \frac{3}{4} (1 - \sigma_m^{(1)} \sigma_m^{(2)} + \sigma_m^{(2)} \hat{r}_m \sigma_l^{(1)} \hat{r}_l) + \frac{1}{4} (3 - 2(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)})) \\ &= \frac{3}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r}) - \frac{1}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) \\ &\quad - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) - \frac{3}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r}) \\ &= -\frac{1}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) - \frac{1}{2} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) + \frac{3}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) = 0\end{aligned}\quad (3.42)$$

Portanto, para os estados de singleto na componente de spin, o potencial tensor adquire valor nulo, independente do estado da componente de isospin das partículas.



Fazendo um levantamento de algumas propriedades da interação NN , primeiramente sabemos que a força dessa interação tem caráter atrativo, esse é o motivo pelo qual vários prótons conseguem ficar amontoados dentro do núcleo atômico de forma estável, mesmo existindo uma força coulombiana repulsiva entre eles. Uma segunda observação é que essa força forte, que mantém os nucleons dentro do núcleo, é uma força de curto alcance, ou seja, para núcleos com uma grande quantidade de prótons e nêutrons, as partículas mais distantes umas das outras não possuem interação forte entre si. Quando nem todos os nucleons possuem interação com os outros nucleons do núcleo, esse átomo é definido como instável e tende a emitir partículas do seu núcleo em forma de radiação, como forma de atingir um estado estável.

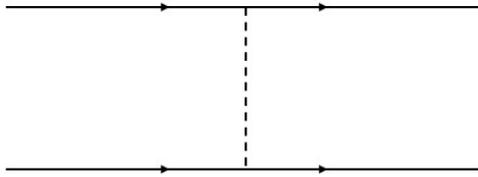
Uma terceira propriedade da força nuclear é seu caráter repulsivo a distâncias muito curtas. Do ponto de vista qualitativo é como se o nucleon fosse uma esfera não muito rígida envolvida por um campo atrativo de curto alcance.

3.4. Principais modelos dos potenciais NN

Existem três gerações diferentes dos potenciais NN , a primeira, e mais antiga, era totalmente fenomenológica (o que tornava os resultados muito imprecisos e reproduzia mal as propriedades do dêuteron). Já na segunda geração, os potenciais eram semi-fenomenológicos, eles eram construídos atribuindo-se a parte de longo alcance da interação à troca de um pión entre dois nucleons e parametrizando-se as partes de médio e curto alcance [9]. Dessa forma, tornou-se possível o aumento da precisão dos potenciais, por reduzir o número de parâmetros que precisavam ser ajustados fenomenologicamente, sendo um grande avanço teórico. A interação de dois nucleons pela troca de um pión pode ser representada pelo diagrama da Figura (6) na parte da esquerda, e na direita é representado o diagrama para o caso da troca de dois píons, sendo a área hachurada no diagrama da direita a representação de processos dinâmicos que discutimos mais adiante.



Potencial devido à troca de um pión. V^π



Potencial devido à troca de dois píons. $V^{\pi\pi}$

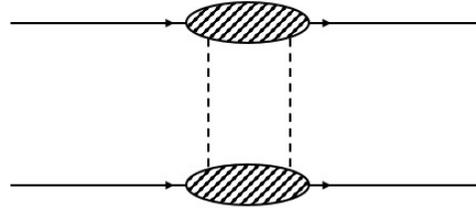


Figura 6: Potencial devido à troca de um pión (na esquerda), potencial devido à troca de dois píons (na direita).

O potencial devido à troca de um pión (do inglês: *One Pion Exchange Potential*, OPEP) pode ser compreendido como resultado da emissão de um pión virtual por um nucleon e a absorção desse pión por um outro nucleon.

A terceira geração é a que se utiliza até hoje para o cálculo dos potenciais, ela é representada pelos trabalhos de dois grupos de físicos, um da cidade de Paris e outro da cidade de Bonn. Esses potenciais mais modernos são teóricos até uma distância de 1 fm, enquanto os da geração anterior são teóricos até 2 fm, assim, para regiões mais internas, ainda é necessário recorrer a um tratamento fenomenológico [8].

O potencial desenvolvido pelo grupo de Bonn tem como base um modelo que considera tanto as trocas de píons independentes quanto as correlacionadas. Ou seja, em um sistema onde existem dois nucleons interagindo pela troca de dois píons, o potencial é calculado pela somatória de todos os possíveis casos que podem ocorrer durante essa interação. Existe o caso em que os dois píons não interagem antes de chegarem nos nucleons de destino, há também o caso em que esses píons interagem durante suas trajetórias, o que é considerado de várias maneiras. Para cada um desses eventos existe uma probabilidade de que possa ocorrer, e a QFT possibilita calcular essas probabilidades de maneira correta.

O modelo de Bonn para as interações NN também é capaz de reproduzir, com alta precisão, por exemplo, as propriedades do dêuteron (núcleo composto por apenas dois nucleons, um próton e um nêutron) [2]. Isso demonstra que a troca de mésons entre nucleons é adequada para se compreender as interações NN .



No potencial de Paris a troca de dois píons recebe um tratamento independente de modelo, o qual é baseado na correlação entre dados experimentais de diferentes processos [2], numa correlação envolvendo píons reais e virtuais.

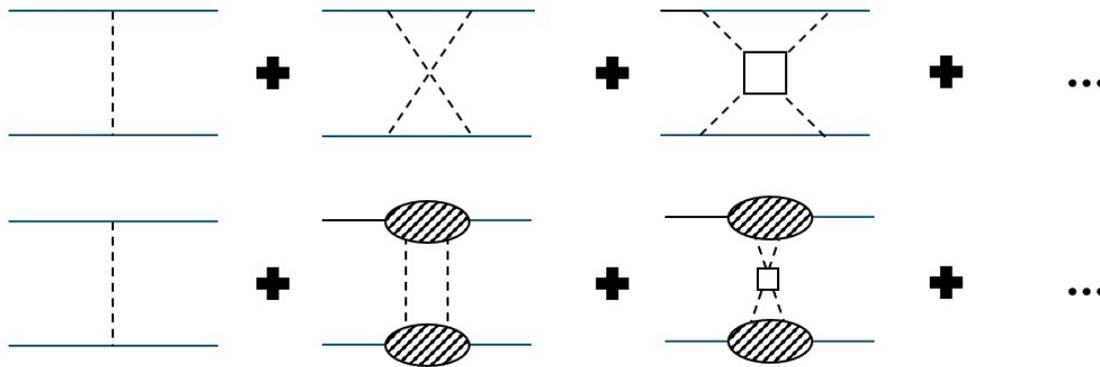


Figura 7: Conteúdo dinâmico dos potenciais de Bonn (apresentado acima) e Paris (apresentado abaixo).

Assim, a diferença existente entre as abordagens feitas por esses dois grupos, para a troca de dois píons entre nucleons, é que o potencial de Bonn constrói um modelo para a bolha hachurada apresentada na Figura (7), enquanto o grupo de Paris, o conteúdo inclui diretamente todas as contribuições dinâmicas para a bolha hachurada, somando aquelas consideradas pelo grupo de Bonn e as outras que não se tem condição de calcular. Porém, essa qualidade da abordagem do grupo de Paris também tem seus contras, pois apesar de ser boa em descrever a troca de dois píons, é impossibilitado o entendimento mais profundo dessa interação, pelo fato de que todas as contribuições dinâmicas já são consideradas de uma só vez, de forma misturada [2]. Em contrapartida, no potencial de Bonn isso não ocorre, o que corresponde a uma vantagem. Portanto, esses dois métodos para se tratar o problema se complementam [2].

3.5. O cálculo do OPEP

Agora reproduzimos com detalhe o cálculo do OPEP, como forma de ilustrar os aspectos técnicos do problema, o principal objetivo desse trabalho.

O cálculo é um pouco complexo, por causa disso, será desenvolvido em quatro etapas, sendo essas:



- (1) Calcular a matriz de transição, T_π , para o processo de espalhamento elástico NN devido à troca de um pión, como apresentado na Figura (8).
- (2) Realizar a redução relativística do resultado, e correlacionar ao elemento de matriz do potencial no espaço dos momentos.
- (3) Utilizar transformada de Fourier a fim de passar o potencial no espaço dos momentos para o espaço de configuração.
- (4) Comparação do resultado com a parametrização geral do potencial, com a finalidade de identificar as contribuições devidas à troca de um pión.

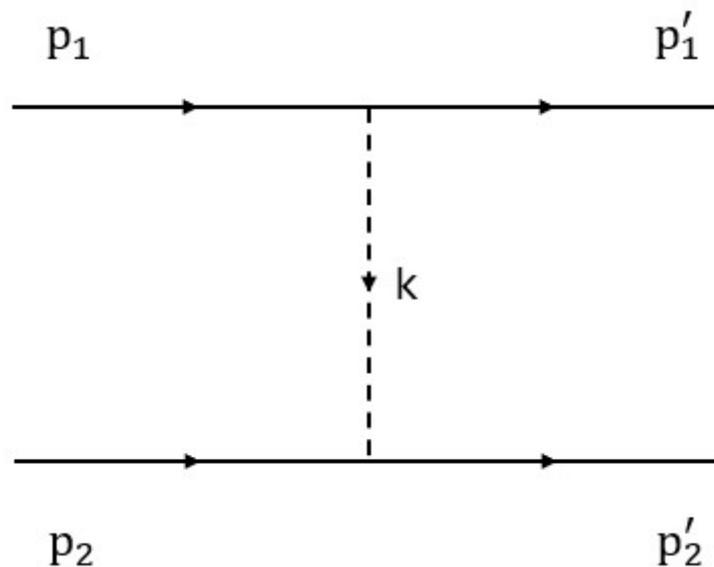


Figura 8: Diagrama de Feynman da interação entre dois nucleons pela troca de um pión. Sendo p e p' respectivamente os quadrimomentos iniciais e finais de cada nucleon.

Inicialmente, a fim de facilitar alguns cálculos, vamos considerar os nucleons do nosso sistema como sendo partículas livres. O quadrimomento de cada nucleon é composto pelas três componentes espaciais do momento e uma componente de energia, podendo ser representado por:

$$p = (E, \vec{p}) \quad (3.43)$$

onde E é definido pela Equação (3.44).

Para nucleons não relativísticos, a energia pode ser dada como:



$$E \approx m + \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (3.44)$$

Relembrando que tomamos a velocidade da luz, $c = 1$, nas equações com a finalidade de otimização e redução de termos nos cálculos.

Na Figura (8), podemos observar dois vértices no diagrama de Feynman, um vértice se encontra na posição em que um nucleon emite um pión e o segundo vértice está posicionado onde o outro nucleon absorve esse pión. Portanto, levando em consideração a conservação de energia e momento do sistema, temos que, para o sistema de centro de massa, ambos os nucleons possuem momentos iguais em módulo, porém, opostos. E com isso, também consideramos que a energia antes da interação será igual à energia depois de ocorrer a interação, logo, $E_1 = E'_1 = E_2 = E'_2$.

Portanto, temos as seguintes relações para cada linha do diagrama:

$$p_1 = p'_1 + k \quad , \quad p_2 + k = p'_2 \quad (3.45)$$

Juntando as equações temos que a soma dos momentos dos nucleons antes da interação é igual a soma dos momentos após a interação:

$$p_1 + p_2 + k = p'_1 + k + p'_2 \quad \rightarrow \quad p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \quad (3.46)$$

Desta forma, podemos também expressar os quadrimomentos dos dois nucleons antes e depois da interação sendo mais especificamente:

$$\begin{array}{ll} \text{Nucleon 1:} & p_1 = (E, \vec{p}) \quad , \quad p'_1 = (E, \vec{p}') \\ \text{Nucleon 2:} & p_2 = (E, -\vec{p}) \quad , \quad p'_2 = (E, -\vec{p}') \end{array}$$

E o quadrimomento do pión é expresso pelo termo k , demonstrando que não existe transferência de energia de um nucleon para o outro no referencial do centro de massa, há apenas transferência de momento, tornando esse pión uma partícula obrigatoriamente virtual (caso houvesse transferência de energia, as massas dos nucleons iriam variar por causa da relação de massa-energia, fazendo com que os nucleons deixassem de ser nucleons, e sabemos que isso não acontece).



$$k = (0, \vec{p} - \vec{p}') \quad (3.47)$$

Com essas considerações podemos finalmente começar a calcular o OPEP, a seguir desenvolvemos a primeira etapa.

ETAPA 1: Cálculo da matriz de transição T_π

Utilizando do diagrama de Feynman da Figura (8) e os valores tabelados, para cada elemento, disponíveis na Tabela 1, é possível construir a matriz de transição relativística, a qual é dada da seguinte forma:

$$iT_\pi = \left[\bar{N}' \left(\frac{-g}{2m} \not{K} \gamma_5 \tau_\alpha \right) N \right]^{(1)} \frac{i}{k^2 - \mu^2} \left[\bar{N}' \left(\frac{g}{2m} \not{K} \gamma_5 \tau_\alpha \right) N \right]^{(2)} \quad (3.48)$$

Os termos \bar{N}' e N nos colchetes representam as funções de onda de antes e depois da interação dos nucleons (1) e (2), respectivamente, as quais são compostas por componentes de *spin* e *isospin*. Os termos entre parênteses indicam os vértices da interação, o motivo pelo qual o termo entre parênteses do nucleon (1) é negativo é esta partícula estar “perdendo” momento através do pión, e o nucleon (2), absorvendo esse momento.

Continuando o desenvolvimento do cálculo, podemos utilizar das equações das funções de onda descritas na Equação (3.11), substituindo-as na Equação (3.48). Também podemos realizar uma separação de todas as componentes dependentes do *spin*, de um lado do produto tensorial e as componentes dependentes do *isospin*, do outro lado do produto.

$$\begin{aligned} iT_\pi &= \frac{-ig^2}{4m^2(k^2 - \mu^2)} \left[(\bar{u}' \otimes \eta'^{\dagger}) (\not{K} \gamma_5 \tau_\alpha) (u \otimes \eta) \right]^{(1)} \left[(\bar{u}' \otimes \eta'^{\dagger}) (\not{K} \gamma_5 \tau_\alpha) (u \otimes \eta) \right]^{(2)} \\ iT_\pi &= \frac{-ig^2}{4m^2(k^2 - \mu^2)} \left[(\bar{u}' \not{K} \gamma_5 u) \otimes (\eta'^{\dagger} \tau_\alpha \eta) \right]^{(1)} \left[(\bar{u}' \not{K} \gamma_5 u) \otimes (\eta'^{\dagger} \tau_\alpha \eta) \right]^{(2)} \\ iT_\pi &= \frac{-ig^2}{4m^2(k^2 - \mu^2)} \left[(\bar{u}' \not{K} \gamma_5 u) \otimes \langle \tau_\alpha \rangle \right]^{(1)} \left[(\bar{u}' \not{K} \gamma_5 u) \otimes \langle \tau_\alpha \rangle \right]^{(2)} \\ iT_\pi &= \frac{-ig^2}{4m^2(k^2 - \mu^2)} \vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)} [\bar{u}' \not{K} \gamma_5 u]^{(1)} [\bar{u}' \not{K} \gamma_5 u]^{(2)} \end{aligned} \quad (3.49)$$



sendo que $\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}$ indica o produto escalar dos valores esperados do operador de isospin em cada linha de nucleon.

Para facilitar o cálculo do limite não relativístico, reescrevemos essa amplitude, T_π , utilizando uma notação de duas componentes, expressando as matrizes de Dirac em termos das matrizes de Pauli. Tomando só o trecho envolvendo as componentes dependentes de *spin*, temos o seguinte desenvolvimento.

$[\bar{u}k\gamma_5 u]$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{E'+m}} \chi^\dagger [E' + m \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{p}'] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & -k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} E + m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{bmatrix} \chi \\ &= \frac{1}{\sqrt{E'+m}} \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E' + m \quad -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'] \begin{bmatrix} k_0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & -k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E + m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{bmatrix} \chi \\ &= \frac{1}{\sqrt{E'+m}} \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E' + m \quad -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'] \begin{bmatrix} -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} & k_0 \\ -k_0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E + m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{bmatrix} \chi \\ &= \frac{1}{\sqrt{E'+m}} \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [E' + m \quad -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'] \begin{bmatrix} (E + m)(-\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) + k_0(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \\ -k_0(E + m) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \end{bmatrix} \chi \\ &= \frac{1}{\sqrt{E'+m}} \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^\dagger [(E' + m)(E + m)(-\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) + k_0(E' + m)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \\ &\quad - k_0(-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(E + m) + (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})] \chi \end{aligned} \quad (3.50)$$

É possível otimizar um pouco esse extenso resultado considerando o sistema de centro de massa, dessa forma, tem-se $E' = E$, e assim chegamos em um valor mais compacto. Lembrando que os termos do meio se anulam por causa da relação $\vec{p} = -\vec{p}'$.

Desta forma:

$$[\bar{u}k\gamma_5 u]_{CM} = \frac{1}{E+m} \chi^\dagger [(E + m)^2(-\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})] \chi \quad (3.51)$$

Para encontrar o valor de T_π , utilizando a notação de duas componentes, é substituído o resultado da Equação (3.51) na Equação (3.49). Porém, para o cálculo do OPEP, temos mais interesse na expressão não relativística de T_π , a qual é realizada na próxima etapa.



ETAPA 2: Redução não relativística

Para um nucleon contido em um núcleo atômico, seu momento tem a ordem de grandeza da massa do pión ($\mu \approx 139 \text{ MeV} \approx m_p/7$) [6]. Portanto, temos as seguintes relações $E \sim m$, $|\vec{p}| \sim |\vec{p}'| \sim |\vec{k}| \sim \mu$. Porém, temos um problema (e dos grandes), para reduzirmos a expressão da Equação (3.51), precisamos trabalhar nessa multiplicação de três produtos escalares e, *spoiler*, o resultado desse produto vale zero, mas vamos entender como.

Abaixo, recordamos algumas relações bastante úteis para esse desenvolvimento:

$$* \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$* \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

$$* (\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\begin{aligned} & (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \\ &= (\sigma_i p'_i)(\sigma_j k_j)(\sigma_l p_l) = \sigma_i \sigma_j p'_i k_j (\sigma_l p_l) \\ &= (\delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) p'_i k_j (\sigma_l p_l) \\ &= \delta_{ij} p'_i k_j (\sigma_l p_l) + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \sigma_l p_l p'_i k_j \\ &= (\vec{p}' \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + i \varepsilon_{ijk} (\delta_{lk} + i \varepsilon_{klm} \sigma_m) p_l p'_i k_j \\ &= (\vec{p}' \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + i \varepsilon_{ijk} \delta_{lk} p_l p'_i k_j + i^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \sigma_m p_l p'_i k_j \\ &= (\vec{p}' \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + i (\vec{p}' \times \vec{k})_k p_k - (\vec{p} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{p} \cdot \vec{k}) \\ &= [(\vec{p}' \cdot \vec{p}) - (\vec{p}' \cdot \vec{p}')](\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + i(\vec{p} \times \vec{p} - \vec{p} \times \vec{p}')\vec{p} \\ &\quad - (\vec{p} \cdot \vec{p}')[(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')] + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})[(\vec{p} \cdot \vec{p}) - (\vec{p} \cdot \vec{p}')] \\ &= (\vec{p}' \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) - |\vec{p}|^2(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) - i(\vec{p} \times \vec{p}') \cdot \vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + (\vec{p} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') \\ &\quad + |\vec{p}|^2(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{p} \cdot \vec{p}') = 0 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Logo, com essa multiplicação entre produtos escalares se anulando, e com a ciência das propriedades debatidas anteriormente, conseguimos reduzir a Equação (3.51) para a seguinte relação.

$$[\bar{u} \mathcal{K} \gamma_5 u]_{CM} = \frac{1}{2m} \chi^\dagger [(-4m^2)(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})] \chi = -(2m) \chi^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \chi \tag{3.53}$$



Cabe aqui uma observação. A normalização relativística é dada, no espaço dos momentos, por:

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = 2E(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (3.54)$$

O fator $2E$ acima aparece na Equação (3.53) como seu limite não relativístico, igual a $2m$. Ao contrário da mecânica quântica relativística, os estados são normalizados sem o fator $2E$ na mecânica quântica não relativística, por causa disso, precisamos apenas dividir a Equação (3.53) por $2m$.

Desta forma, no limite não relativístico podemos chegar na relação abaixo, sendo o termo $\vec{\sigma}^{(i)}$, o valor esperado de $\vec{\sigma}$ entre os spinores χ^\dagger e χ , e o índice i referente ao nucleon i .

$$[\bar{u}\chi\gamma_5 u]_{CM}^{(i)} = -\chi^\dagger(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})\chi = -\vec{\sigma}^{(i)} \cdot \vec{k} \quad (3.55)$$

Precisamos ter ciência, também, que no referencial do centro de massa $k_0 = 0$ e o propagador do pión pode ser escrito como:

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} = \frac{-1}{\vec{k}^2 + \mu^2} \quad (3.56)$$

Voltando à Equação (3.49), que representa a amplitude de probabilidade do espalhamento NN , fazendo a redução não relativística, ou seja, $iT_\pi \rightarrow it_\pi$, e aplicando a Equação (3.56), chegamos à relação da amplitude não relativística.

$$it_\pi = \frac{ig^2}{4m^2(\vec{k}^2 + \mu^2)} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{k}) (\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{k}) \quad (3.57)$$

É importante lembrarmos que o termo $(\vec{\sigma}^{(i)} \cdot \vec{k})$, na expressão acima, representa o vértice de um dos nucleons com o pión, e o primeiro termo sendo o propagador do pión. Assim, ainda temos que t_π é uma leitura matemática do diagrama de Feynman da



interação NN devido a troca de um píon (desta vez, considerando os nucleons como sendo não relativísticos).

O motivo da realização dessa segunda etapa, para o cálculo do OPEP, está no problema que, na mecânica quântica relativística, não existe o conceito de potencial (não há um operador relativístico que possa ser transformado diretamente em um potencial) [10]. Portanto, o potencial NN é definido como sendo o operador que, empregado em um cálculo não relativístico em aproximação de Born (ou seja, perturbativo, que trata as funções de onda incidentes como ondas planas), produz uma amplitude de espalhamento idêntica àquela derivada a partir da teoria de campos. Desta forma, no espaço dos momentos, o OPEP é dado por:

$$\langle \vec{p}'_1 \vec{p}'_2 | \hat{V}_\pi | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle_{CM} = -(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) t_\pi \quad (3.58)$$

Assim, substituindo o valor de t_π na equação acima, chegamos, finalmente, à expressão do OPEP no espaço dos momentos:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}'_1 \vec{p}'_2 | \hat{V}_\pi | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle_{CM} \\ &= -(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \frac{g^2}{4m^2(\vec{k}^2 + \mu^2)} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{k}) (\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{k}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Finalizamos a segunda etapa, com a redução relativística da matriz de transição, agora, é possível passar o potencial no espaço dos momentos para o espaço de configuração. Lamentamos informar, mas os cálculos aqui são um pouco mais complicados e extensos, estamos entrando na parte turbulenta.

ETAPA 3: O potencial no espaço de configuração

Para realizarmos tal cálculo, apresentamos abaixo a definição matemática da transformada de Fourier, ferramenta que possibilita passarmos a nossa função definida no espaço dos momentos para o espaço de configuração:

$$\mathcal{F}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) e^{-ipr} dr \quad (3.60)$$

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(p) e^{ipr} dp \quad (3.61)$$



Precisamos considerar que as definições apresentadas acima são utilizadas em funções de uma variável, para o nosso caso é um pouco mais complexo, para quatro variáveis, assim, chegamos na seguinte expressão do potencial no espaço de configuração.

$$\begin{aligned} f(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \langle \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 | \hat{V}_\pi | \vec{r}_1 \vec{r}_2 \rangle \\ &= -(2\pi)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^3(\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) t_\pi e^{-i[(\vec{p}'_1 \cdot \vec{r}'_1) + (\vec{p}'_2 \cdot \vec{r}'_2) - (\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1) - (\vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2)]} \\ &\quad \frac{d\vec{p}'_1}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}'_2}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \end{aligned} \quad (3.62)$$

É conveniente realizar uma mudança de variáveis, substituindo $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ por $\vec{Q}_1, \vec{k}, \vec{Q}_2, \vec{q}$, tal que $d\vec{p}'_1 d\vec{p}'_2 d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \rightarrow d\vec{Q}_1 d\vec{k} d\vec{Q}_2 d\vec{q}$.

$$\vec{Q}_1 = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 + \vec{p}'_1) \quad , \quad \vec{Q}_2 = \frac{1}{2}(\vec{p}_2 + \vec{p}'_2) \quad (3.63)$$

$$\vec{k} = (\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \quad , \quad \vec{q} = (\vec{p}_2 - \vec{p}'_2) \quad (3.64)$$

Invertendo essas relações, podemos obter as variáveis antigas em função das novas:

$$\vec{p}_1 = \vec{Q}_1 + \frac{1}{2}\vec{k} \quad , \quad \vec{p}'_1 = \vec{Q}_1 - \frac{1}{2}\vec{k} \quad (3.65)$$

$$\vec{p}_2 = \vec{Q}_2 + \frac{1}{2}\vec{q} \quad , \quad \vec{p}'_2 = \vec{Q}_2 - \frac{1}{2}\vec{q} \quad (3.66)$$

Como prova, podemos substituir as definições apresentadas nas Equações (3.63) e (3.64) nas Equações (3.65) e (3.66), verificando que as últimas equações se satisfazem, como apresentado abaixo:

$$\vec{Q}_1 + \frac{1}{2}\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{p}_1 + \frac{1}{2}\vec{p}'_1 + \frac{1}{2}\vec{p}_1 - \frac{1}{2}\vec{p}'_1 = \vec{p}_1 \quad , \quad (3.67)$$

$$\vec{Q}_1 - \frac{1}{2}\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{p}_1 + \frac{1}{2}\vec{p}'_1 - \frac{1}{2}\vec{p}_1 + \frac{1}{2}\vec{p}'_1 = \vec{p}'_1 \quad , \quad (3.68)$$



para as variáveis de índice (2), os resultados são idênticos, mudando apenas os índices (1) por (2) e substituindo \vec{k} por \vec{q} . Substituindo na Equação (3.62), chegamos na relação abaixo.

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 | \hat{V}_\pi | \vec{r}_1 \vec{r}_2 \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{(2\pi)^9} t_\pi \delta^3 \left(\vec{Q}_1 - \frac{1}{2} \vec{k} + \vec{Q}_2 - \frac{1}{2} \vec{q} - \vec{Q}_1 - \frac{1}{2} \vec{k} - \vec{Q}_2 - \frac{1}{2} \vec{q} \right) \\
 & \quad e^{-i \left[(\vec{Q}_1 - \frac{1}{2} \vec{k}) \cdot \vec{r}'_1 + (\vec{Q}_2 - \frac{1}{2} \vec{q}) \cdot \vec{r}'_2 - (\vec{Q}_1 + \frac{1}{2} \vec{k}) \cdot \vec{r}_1 - (\vec{Q}_2 + \frac{1}{2} \vec{q}) \cdot \vec{r}_2 \right]} d\vec{Q}_1 d\vec{k} d\vec{Q}_2 d\vec{q} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{(2\pi)^9} t_\pi \delta^3(-\vec{k} - \vec{q}) \\
 & \quad e^{-i \left[\vec{Q}_1 \cdot (\vec{r}'_1 - \vec{r}_1) + \vec{Q}_2 \cdot (\vec{r}'_2 - \vec{r}_2) - \frac{1}{2} \vec{k} \cdot (\vec{r}'_1 + \vec{r}_1 - \vec{r}'_2 - \vec{r}_2) \right]} d\vec{Q}_1 d\vec{k} d\vec{Q}_2 d\vec{q} \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

A integração em \vec{q} pode ser feita usando a função delta de Dirac $\delta^3(-\vec{k} - \vec{q})$, fazendo $\vec{q} = -\vec{k}$ no restante do integrando. Desta forma, temos:

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 | \hat{V}_\pi | \vec{r}_1 \vec{r}_2 \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{(2\pi)^9} t_\pi e^{-i \left[\vec{Q}_1 \cdot (\vec{r}'_1 - \vec{r}_1) + \vec{Q}_2 \cdot (\vec{r}'_2 - \vec{r}_2) - \frac{1}{2} \vec{k} \cdot (\vec{r}'_1 + \vec{r}_1 - \vec{r}'_2 - \vec{r}_2) \right]} d\vec{Q}_1 d\vec{k} d\vec{Q}_2 \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

Continuando a reduzir a expressão, utilizamos da propriedade de que as integrais em \vec{Q}_1 e \vec{Q}_2 produzem deltas de Dirac das coordenadas espaciais, pois a matriz de transição não relativística, t_π , não depende dessas coordenadas (t_π depende apenas da variável \vec{k}).

$$\delta^3(\vec{r}'_1 - \vec{r}_1) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{r}'_1 - \vec{r}_1) \cdot \vec{Q}_1} d\vec{Q}_1 \quad (3.71.a)$$

$$\delta^3(\vec{r}'_2 - \vec{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{r}'_2 - \vec{r}_2) \cdot \vec{Q}_2} d\vec{Q}_2 \quad (3.71.b)$$

Fazendo a substituição na Equação (3.70), chegamos no resultado abaixo.

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 | \hat{V}_\pi | \vec{r}_1 \vec{r}_2 \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{(2\pi)^9} t_\pi e^{-i \left[-\frac{1}{2} \vec{k} \cdot (\vec{r}'_1 + \vec{r}_1 - \vec{r}'_2 - \vec{r}_2) \right]} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{r}'_1 - \vec{r}_1) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{r}'_2 - \vec{r}_2) d\vec{k}
 \end{aligned}$$



Agora podemos identificar uma expressão para o potencial $V_\pi(\vec{r})$ a partir da Equação 3.72.

$$\langle \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 | \hat{V}_\pi | \vec{r}_1 \vec{r}_2 \rangle \equiv \delta^3(\vec{r}'_1 - \vec{r}_1) \delta^3(\vec{r}'_2 - \vec{r}_2) V_\pi(\vec{r}) \quad (3.72)$$

Para que o potencial não seja nulo, as funções delta impõem $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1$ e $\vec{r}'_2 = \vec{r}_2$. Desta forma, aplicamos essa informação na exponencial da integração, obtendo a Equação 3.73.

$$V_\pi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{(2\pi)^3} t_\pi e^{-i\left[-\frac{1}{2}\vec{k}\cdot(2\vec{r}_1-2\vec{r}_2)\right]} d\vec{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{(2\pi)^3} t_\pi e^{-i[-\vec{k}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)]} d\vec{k} \quad (3.73)$$

Para não precisarmos trabalhar com \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , criamos uma coordenada relativa, \vec{r} , entre as posições dos nucleons (1) e (2) sendo a diferença entre essas duas variáveis: $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$.

$$\begin{aligned} V_\pi(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{(2\pi)^3} t_\pi e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})} d\vec{k} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})} \frac{g^2}{4m^2(\vec{k}^2+\mu^2)} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{k}) (\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{k}) d\vec{k} \\ &= \frac{-g^2}{4m^2} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})} \frac{1}{(\vec{k}^2+\mu^2)} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{k}) (\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{k}) d\vec{k} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Podemos fazer uso da seguinte relação matemática:

$$\begin{aligned} \vec{k} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})} &= (k_x, k_y, k_z) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})} = i(-ik_x, -ik_y, -ik_z) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})} \\ &= i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = i\vec{\nabla} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Desta forma temos a equivalência $(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{k}) = (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot i\vec{\nabla})$, e portanto, conseguimos tirar esse termo da integral.



$$V_{\pi}(\vec{r}) = \frac{-g^2}{4m^2} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot i\vec{V}) (\vec{\sigma}^{(2)} \cdot i\vec{V}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} d\vec{k} \quad (3.76)$$

A integral restante é a representação matemática da transformada de Fourier apenas do propagador do pión. Resolveremos a integral em coordenadas esféricas nas variáveis k, θ, φ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} d\vec{k} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikr \cos \theta}}{(k^2 + \mu^2)} k^2 \sin \theta d\varphi d\theta dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} (2\pi) \frac{e^{-ikr \cos \theta}}{(k^2 + \mu^2)} k^2 \sin \theta d\theta dk \end{aligned} \quad (3.77)$$

A integral em θ , fazemos por substituição, sendo $u = -ikr \cos \theta$ e $du = ikr \sin \theta d\theta$.

$$\int_0^{\pi} \sin \theta e^{-ikr \cos \theta} d\theta = \int \frac{e^u}{ikr} du = \frac{e^{-ikr \cos \theta}}{ikr} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{-ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} d\vec{k} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 + \mu^2)} \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^{\infty} \frac{k}{(k^2 + \mu^2)} (e^{ikr} - e^{-ikr}) dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \left[\int_0^{-\infty} \frac{-ke^{-ik}}{(k^2 + \mu^2)} (-dk) - \int_0^{\infty} \frac{ke^{-ikr}}{(k^2 + \mu^2)} dk \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{-ikr}}{(k^2 + \mu^2)} dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{-ikr}}{(k+i\mu)(k-i\mu)} dk \end{aligned} \quad (3.79)$$

É necessário utilizar o teorema de Cauchy (Referência [11]) para resolver a integração na variável k , podemos notar que no denominador os polos são $k = \pm i\mu$, sendo assim, podemos escolher em qual singularidade calculamos o resíduo (calculamos em $k = -i\mu$). A integral por um caminho fechado no plano complexo é igual à soma dos resíduos dos polos no interior do contorno. Nosso contorno é um semicírculo, formado pelo eixo real (integral de interesse) e a semicircunferência percorrida no sentido horário, na parte negativa do eixo imaginário, com raio $R (R \rightarrow \infty)$.

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{-ikr}}{(k+i\mu)(k-i\mu)} dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{r} [2\pi i \text{Res}(-i\mu)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{r} \left[2\pi i \frac{-i\mu e^{-i(-i\mu)r}}{-i\mu - i\mu} \right]$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{i}{r} \left[2\pi i \frac{i\mu e^{-\mu r}}{2i\mu} \right] = \frac{1}{4\pi} \frac{i}{r} [ie^{-\mu r}] = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\mu e^{-\mu r}}{\mu r} = -\frac{\mu e^{-\mu r}}{4\pi \mu r} = -\frac{\mu}{4\pi} U(r) \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

Veja que a função no integrando $f(k)$ tem um polo simples no interior do contorno, e o resíduo é calculado como:

$$Res(a) = \lim_{k \rightarrow a} (k - a) f(k) \quad (3.81)$$

A integral no semicírculo se anula, pois o integrando é da ordem de $\frac{R}{R^2}$.

A função $U(r)$ é conhecida como função de Yukawa, ela mostra de forma matemática que a força nuclear forte é ...(suspense)... forte. Mas nem sempre, acontece que, como dito anteriormente, a força forte é forte em distâncias muito pequenas (na ordem de um femtômetro), mas por ela ter uma exponencial negativa na sua composição, ela decai muito rápido à medida que os nucleons se distanciam uns dos outros.

Conseguimos calcular a integral, agora pegamos o resultado que obtivemos na Equação (3.80) e substituímos na equação (3.76).

$$\begin{aligned}
 V_{\pi}(\vec{r}) &= \frac{-g^2}{4m^2} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{\nabla}) \left[-\frac{\mu}{4\pi} U(r) \right] \\
 &= \frac{g^2}{4m^2} \frac{\mu}{4\pi} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{\nabla}) U(r) \\
 &= \frac{g^2}{4m^2} \frac{\mu}{4\pi} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) (\sigma_i^{(1)} \nabla_i) (\sigma_j^{(2)} \nabla_j) U(r) \\
 &= \frac{g^2}{4m^2} \frac{\mu}{4\pi} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) (\sigma_i \sigma_j) (\nabla_i \nabla_j) U(r) \\
 &= \frac{g^2}{4m^2} \frac{\mu}{4\pi} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) (\sigma_i \sigma_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} U(r) \quad (3.82)
 \end{aligned}$$

Para realizar as derivações da função de Yukawa escrevemos r em termos de suas componentes.

$$r = \sqrt{x_i x_i} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (x_i x_i)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i x_i}} = \frac{x_i}{r} \quad (3.83)$$



Desta forma, fazemos a substituição dos termos que estão derivando a função de Yukawa, e aplicamos a regra da cadeia.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U(r) = \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \quad (3.84.a)$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{-\mu e^{-\mu r}(\mu r) - (e^{-\mu r})\mu}{\mu^2 r^2} = - \left(\frac{\mu r + 1}{r} \right) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \quad (3.84.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U(r) = \frac{x_i}{r} \left(\frac{-\mu r - 1}{r} \right) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \quad (3.84.c)$$

Utilizando o sistema de índices generalizados, podemos definir a seguinte propriedade, que é utilizada no próximo passo:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij} \quad (3.85)$$

Tomamos agora a derivada da Equação (3.84.c).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} U(r) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{-x_i}{r} \left(\frac{1+\mu r}{r} \right) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \right] \\ &= - \left\{ \delta_{ij} \left(\frac{1+\mu r}{r^2} \right) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} + x_i \frac{x_j}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{1+\mu r}{r^2} \right) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \right] \right\} \\ &= - \left\{ \delta_{ij} \left(\frac{1+\mu r}{r^2} \right) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} + \frac{x_i x_j}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-\mu r}}{\mu r^3} + \frac{e^{-\mu r}}{r^2} \right) \right\} \\ &= - \left\{ \delta_{ij} \left(\frac{1+\mu r}{r^2} \right) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} + \frac{x_i x_j}{r} \left[\frac{-\mu^2 r^3 e^{-\mu r} - 3\mu r^2 e^{-\mu r}}{\mu^2 r^6} - \frac{\mu r^2 e^{-\mu r} - 2r e^{-\mu r}}{r^4} \right] \right\} \\ &= - \left\{ \delta_{ij} \left(\frac{1+\mu r}{r^2} \right) U(r) - \frac{x_i x_j}{r} \left[\frac{1}{r^3} + \frac{3}{\mu r^4} + \frac{\mu}{r^2} + \frac{2}{r^3} \right] e^{-\mu r} \right\} \\ &= - \left\{ \delta_{ij} \left(\frac{1+\mu r}{r^2} \right) U(r) - \frac{x_i x_j}{r^3} \left[\mu + \frac{3}{r} + \frac{3}{\mu r^2} \right] e^{-\mu r} \right\} \\ &= - \left\{ \delta_{ij} \left(\frac{1+\mu r}{r^2} \right) U(r) - \frac{x_i x_j}{r^3} \left[\mu + \frac{3}{r} + \frac{3}{\mu r^2} \right] \frac{\mu r}{\mu r} e^{-\mu r} \right\} \\ &= - \left\{ \delta_{ij} \left(\frac{1+\mu r}{r^2} \right) U(r) - \frac{x_i x_j}{r^3} \mu^2 r \left[1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2} \right] \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \right\} \\ &= - \left\{ \delta_{ij} \left(\frac{1+\mu r}{r^2} \right) U(r) - \frac{x_i x_j}{r^2} \mu^2 U_2(r) \right\} \\ &= - \frac{\mu^2}{3} \left\{ \delta_{ij} \left(\frac{3}{\mu^2 r^2} + \frac{3}{\mu r} + 1 - 1 \right) U(r) - \frac{3x_i x_j}{r^2} U_2(r) \right\} \\ &= - \frac{\mu^2}{3} \left\{ \delta_{ij} [U_2(r) - U(r)] - \frac{3x_i x_j}{r^2} U_2(r) \right\} \end{aligned}$$



$$= \frac{\mu^2}{3} \left\{ \delta_{ij} U(r) - \delta_{ij} U_2(r) + \frac{3x_i x_j}{r^2} U_2(r) \right\} \quad (3.86)$$

Sendo $U_2(r)$ a função de Yukawa associada ao potencial tensor, e dada pela equação abaixo.

$$U_2(r) = \left[1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2} \right] U(r) \quad (3.87)$$

Para chegarmos aonde queremos, precisamos considerar que o propagador do pión é uma função de Green, assim como o potencial de Yukawa. É possível entender com mais facilidade esse conceito quando se aplica o Laplaciano sobre a função $U(r)$.

$$\int \frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} = \frac{\mu}{4\pi} U(r) \quad \rightarrow \quad U(r) = \frac{4\pi}{\mu} \int \frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 U(r) &= \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} \left(\frac{4\pi}{\mu} \int \frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \right) = \frac{4\pi}{\mu} \int (-i\vec{k})^2 \frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \\ &= -\frac{4\pi}{\mu} \int \frac{\vec{k}^2 e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} = -\frac{4\pi}{\mu} \int \frac{(\vec{k}^2 + \mu^2 - \mu^2) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \\ &= -\frac{4\pi}{\mu} \left[\int \frac{(\vec{k}^2 + \mu^2) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} - \int \frac{\mu^2 e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \right] \\ &= -\frac{4\pi}{\mu} \left[\int \frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(2\pi)^3} d\vec{k} - \mu^2 \left(\frac{\mu}{4\pi} U(r) \right) \right] = \mu^2 U(r) - \frac{4\pi}{\mu} \int \frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{(2\pi)^3} d\vec{k} \\ &= \mu^2 U(r) - \frac{4\pi}{\mu} \delta^3(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Este resultado mostra que o laplaciano de $U(r)$ correto se apresenta um termo adicional dado pelo delta de Dirac. Por outro lado, o laplaciano de $U(r)$ é um caso particular da Equação (3.86). Por esse motivo, adicionamos esse termo “extra” na função $U(r)$ da Equação (3.86). Assim, podemos escrevê-la da forma demonstrada abaixo.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} U(r) = \frac{\mu^2}{3} \left\{ \delta_{ij} \left[\mu^2 U(r) - \frac{4\pi}{\mu} \delta^3(\vec{r}) \right] + \left(\frac{3x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) U_2(r) \right\} \quad (3.90)$$



Desta forma, podemos substituir a Equação (3.90) na Equação (3.82), e finalmente chegar no potencial devido a troca de um pión!

$$\begin{aligned}
 V_{\pi}(\vec{r}) &= \frac{g^2}{4m^2} \frac{\mu}{4\pi} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) (\sigma_i \sigma_j) \frac{\mu^2}{3} \left\{ \delta_{ij} \left[U(r) - \frac{4\pi}{\mu} \delta^3(\vec{r}) \right] + \left(\frac{3x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) U_2(r) \right\} \\
 &= \frac{g^2}{4m^2} \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mu^2}{3} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) \\
 &\quad \left\{ (\sigma_i \sigma_j) \delta_{ij} \left[U(r) - \frac{4\pi}{\mu} \delta^3(\vec{r}) \right] + \left(\frac{3x_i x_j \sigma_i \sigma_j}{r^2} - \sigma_i \sigma_j \delta_{ij} \right) U_2(r) \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{g\mu}{2m} \right)^2 (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) \left\{ (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) \left[U(r) - \frac{4\pi}{\mu} \delta^3(\vec{r}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + [3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}] U_2(r) \right\} \tag{3.91}
 \end{aligned}$$

Com o OPEP calculado, podemos identificar suas contribuições para os vários canais de spin e isospin. Para isso, podemos utilizar os operadores de projeção de spin e isospin na Equação (3.29), e assim chegamos à equação abaixo.

$$\begin{aligned}
 V_{\pi}(\vec{r}) &= \frac{1}{3} \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{g\mu}{2m} \right)^2 (-3P_{\tau}^1 + P_{\tau}^3) \left\{ (-3P_{\sigma}^1 + P_{\sigma}^3) \left[U(r) - \frac{4\pi}{\mu} \delta^3(\vec{r}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + S_{12}(P_{\sigma}^1 + P_{\sigma}^3) U_2(r) \right\} \tag{3.92}
 \end{aligned}$$

Aplicamos a propriedade distributiva nos projetores de spin e isospin na equação acima, e chegamos ao seguinte resultado.

$$\begin{aligned}
 V_{\pi}(\vec{r}) &= \frac{1}{3} \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{g\mu}{2m} \right)^2 \left\{ \left[U(r) - \frac{4\pi}{\mu} \delta^3(\vec{r}) \right] [9P_{\tau}^1 P_{\sigma}^1 - 3P_{\tau}^1 P_{\sigma}^3 - 3P_{\tau}^3 P_{\sigma}^1 + P_{\tau}^3 P_{\sigma}^3] \right. \\
 &\quad \left. S_{12} [-3P_{\tau}^1 P_{\sigma}^1 - 3P_{\tau}^1 P_{\sigma}^3 + P_{\tau}^3 P_{\sigma}^1 + P_{\tau}^3 P_{\sigma}^3] U_2(r) \right\} \tag{3.93}
 \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade vista anteriormente, $S_{12} P_{\sigma}^1 = 0$, e passando o fator terço para dentro do colchete, conseguimos reduzir a equação do potencial para a forma abaixo.

$$\begin{aligned}
 V_{\pi}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{g\mu}{2m} \right)^2 \left\{ \left[U(r) - \frac{4\pi}{\mu} \delta^3(\vec{r}) \right] \left[3P_{\tau}^1 P_{\sigma}^1 - P_{\tau}^1 P_{\sigma}^3 - P_{\tau}^3 P_{\sigma}^1 + \frac{1}{3} P_{\tau}^3 P_{\sigma}^3 \right] \right. \\
 &\quad \left. S_{12} \left[-P_{\tau}^1 P_{\sigma}^3 + \frac{1}{3} P_{\tau}^3 P_{\sigma}^3 \right] U_2(r) \right\} \tag{3.94}
 \end{aligned}$$



O OPEP é um modelo já bem estabelecido na física nuclear, ele pode ser utilizado de forma análoga para o cálculo de outros processos dinâmicos de várias outras partículas, como no caso do potencial devido à troca de um bóson (One Boson Exchange Potential, OBEP), no qual ocorre a troca de partículas ρ , ω e σ . Uma observação sobre as partículas apresentadas é que apenas o π e o ρ contribuem ao potencial tensor, enquanto o potencial spin-órbita é gerado a partir da troca de várias partículas mais pesadas que o pión, sendo consistente com o curto alcance desse termo do potencial [2].

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Vimos que o potencial gerado pela troca de um pión é descrito em função dos operadores de spin e isospin multiplicados pela função de Yukawa, $U(r)$, e pela função associada ao potencial tensor, $U_2(r)$.

$$U(r) = \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \quad (4.1)$$

$$U_2(r) = \left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2}\right) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \quad (4.2)$$

As duas funções apresentadas contêm termos inversamente proporcionais à distância, multiplicado por uma exponencial negativa, expressando o alcance da interação entre os nucleons e estando relacionado diretamente com a massa do pión. Ou seja, substituindo o pión por partículas mais massivas, o alcance de interação seria cada vez menor, enquanto, para partículas mais leves o alcance da interação se estenderia para uma região maior. Caso o pión fosse uma partícula sem massa, assim como o fóton, o potencial seria análogo ao potencial eletromagnético, tendo seu alcance tendendo ao infinito.

O pión é a partícula de menor massa que dois nucleons podem trocar entre si [4], e por causa desse fator, ele está associado à parte de maior alcance do potencial. Porém, quando analisamos os gráficos das funções de Yukawa, Figuras (9) e (10), nos deparamos com um problema, é possível notar que o comportamento de ambos os potenciais teóricos



diverge para curtas distâncias. Por isso, é necessário aplicar uma correção nas funções para que ele seja utilizado em cálculos de propriedades nucleares.

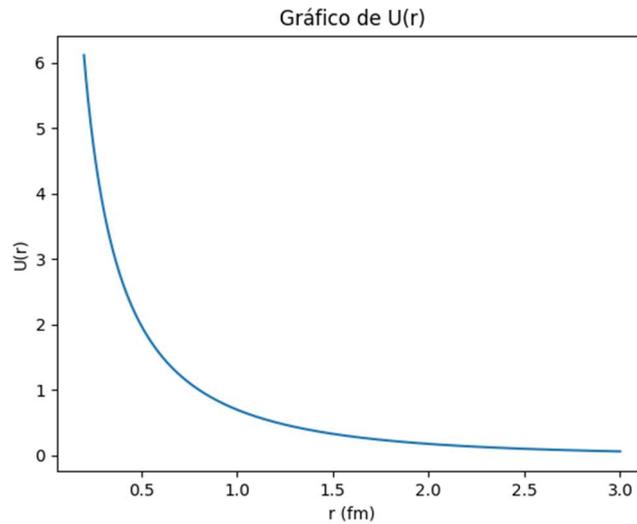


Figura 9: Função de Yukawa, $U(r)$.

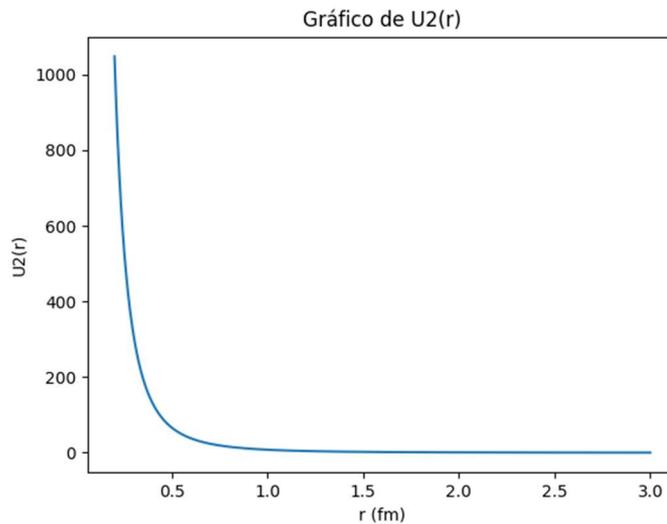


Figura 10: Função de Yukawa, $U_2(r)$, associada ao potencial tensor.

Na Figura 11, apresento uma comparação gráfica das funções $U(r)$ e $U_2(r)$.

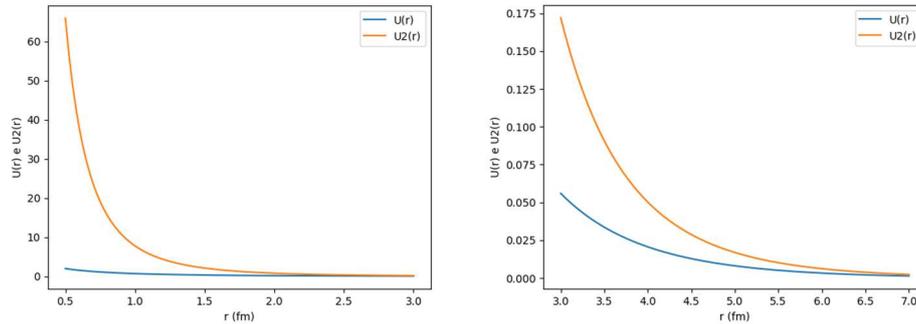


Figura 11: Comparação gráfica das funções $U(r)$, linha azul, e $U_2(r)$, linha amarela, sem o fator de forma.

O que ocorre para que essas funções não representem um potencial real para distâncias muito curtas está no fato de que, na dedução do OPEP, os nucleons foram tomados como sendo não relativísticos, tendo seus momentos comparáveis à massa do pión. Desta forma, nos é permitido esperar um resultado confiável de V_π apenas para distâncias acima de $1/\mu$. Ou seja, para distancias menores, o resultado do potencial torna-se cada vez mais impreciso.

À medida em que a distância entre os nucleons decresce, torna-se necessária a utilização de fatores de forma (moduladores matemáticos que impedem a função de divergir quando a distância tende a zero) nas funções de Yukawa. O motivo físico para se utilizar fatores de forma está no fato de que os nucleons possuem uma estrutura interna (Figura 2), não sendo partículas elementares. Nesse nível, essas estruturas correspondem às nuvens de mésons que envolvem os nucleons (caso análogo ao do elétron vestido, mencionado na Introdução). Para um nível mais fundamental, é preciso levar em consideração que os nucleons são formados por quarks, porém, um cálculo baseado em quarks é extremamente trabalhoso, por causa disso, é comum representar todos os efeitos associados à dinâmica de pequenas distâncias de maneira coletiva [10].

Nesse trabalho não desenvolvemos a matemática dos fatores de forma, apenas explicamos o que são e a necessidade de serem adicionados às funções de Yukawa. As funções são dadas da forma abaixo.

$$U(r; \Lambda) = \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} - \frac{\Lambda}{\mu} \frac{e^{-\Lambda r}}{\Lambda r} - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\Lambda} \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} - 1 \right) e^{-\Lambda r} \quad (4.3)$$



$$U_2(r; \Lambda) = \left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2}\right) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} - \frac{\Lambda^3}{\mu^3} \left(1 + \frac{3}{\Lambda r} + \frac{3}{\Lambda^2 r^2}\right) \frac{e^{-\Lambda r}}{\Lambda r} - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\Lambda} \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} - 1\right) \left(1 + \frac{1}{\Lambda r}\right) e^{-\Lambda r} \quad (4.4)$$

sendo Λ o parâmetro fenomenológico que representa de modo efetivo a dinâmica associada ao tamanho dos nucleons. Se assumirmos um valor para este parâmetro, tal como $\Lambda = 6\mu$, chegamos em um resultado com valor físico mais realístico, como representado nas Figuras (12) e (13) logo abaixo.

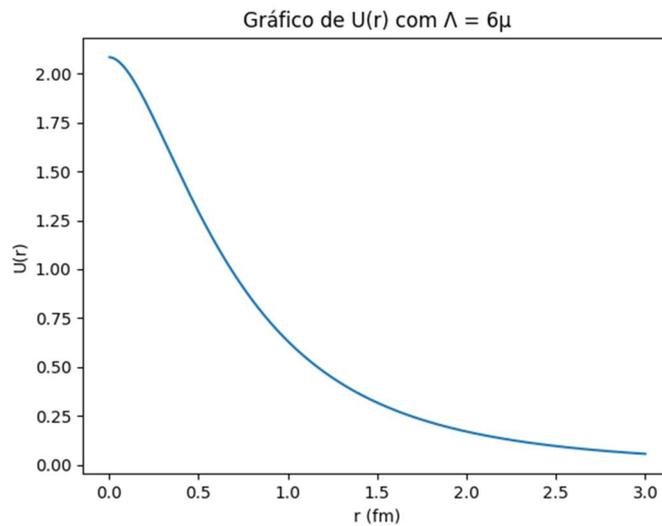


Figura 12: Função de Yukawa, $U(r)$, com fator de forma com $\Lambda = 6\mu$.

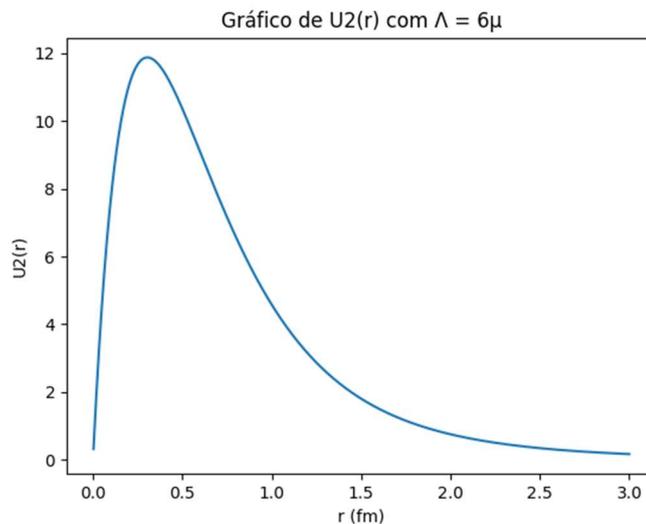


Figura 13: Função de Yukawa associada ao potencial tensor com fator de forma com $\Lambda = 6\mu$.



Observando os gráficos dos potenciais, percebemos a necessidade da adição do fator de forma nas funções, o principal problema deixa de existir, o potencial se torna finito para curtas distâncias. Para finalizar essa discussão é importante notar que caso seja necessário eliminar o fator de forma da equação, podemos fazer o limite das Equações (4.3) e (4.4) para $\Lambda \rightarrow \infty$, desta forma voltamos para o caso das Equações (4.1) e (4.2).

$$U(r; \Lambda \rightarrow \infty) = U(r) \quad (4.5)$$

$$U_2(r; \Lambda \rightarrow \infty) = U_2(r) \quad (4.6)$$

A parte de longo alcance do potencial é dada pelo OPEP (tanto o central quanto o tensor), pois o pión é o méson mais leve, os potenciais da terceira geração incluem a contribuição de dois píons e de outros mésons mais pesados. Por outro lado, no alcance intermediário o OPEP é pouco importante para o potencial central, porém, ele compõe quase completamente o potencial tensorial [9].

5. CONCLUSÃO

Nesse trabalho, procuramos desenvolver de forma clara e detalhada, todos os procedimentos necessários para calcular o potencial nucleon-nucleon devido à troca de um pión, analisando, em seguida, as contribuições da troca de um pión para os canais de spin e isospin do potencial NN .

Inicialmente foi feita uma revisão histórica sobre a física nuclear e de partículas a fim de contextualizar o tema, situando em quais grupos de partículas nos aprofundamos e suas características principais. Logo após, foi apresentada uma base matemática sobre notação de Dirac e regras de Feynman, temas usualmente não abordados no curso de graduação e necessários no cálculo do potencial.

Durante o cálculo do potencial encontramos a função de Yukawa, e apresentamos as características determinantes do comportamento da força nuclear forte em relação à distância entre os nucleons de um sistema. Porém, por se tratar de cálculos aproximativos, e os nucleons serem considerados partículas sem estrutura interna (pontuais), o potencial



calculado diverge para pequenas distâncias, sendo necessário ser corrigido por um fator de forma.

Devido à sua complexidade, o potencial NN apresenta ambiguidades teóricas até os dias de hoje. Assim, por um lado, os processos de troca mesônica continuam a ser estudados, como por exemplo o cálculo do potencial NN devido à troca de dois píons utilizando parâmetros de Feynman ao invés de métodos aproximados [12]. Observe que nesta referência utilizam-se as mesmas técnicas de QFT apresentadas nesse trabalho. Já na Referência [13] é desenvolvida uma pesquisa sobre as contribuições da troca de píons no espalhamento NN . A Equação (13), desta referência, é precisamente o potencial pela troca de um pión no espaço dos momentos, exatamente como obtido neste trabalho na Equação (3.57). Por outro lado, o potencial de Yukawa encontra aplicações além da física nuclear, como por exemplo, sendo utilizado para a descrição do espalhamento elástico de elétrons [14].

Acreditamos ter atingido os objetivos do trabalho, desenvolvendo um tema fundamental da física nuclear, com aplicações em pesquisas atuais, além de produzir um texto que facilite seu aprendizado por outros estudantes de graduação, ou mesmo pós-graduação.



REFERÊNCIAS

- [1] GRIFFITHS, David. **Introduction to Elementary Particles**. 2. ed. Weinheim: WILEY-VCH, 2008.
- [2] ROBILOTTA, M. R. Notas de aula do curso *Física de Hádrons*, Instituto de Física - USP, 1988.
- [3] MCMAHON, David. **Quantum field theory DeMYSTiFieD: A SELF-TEACHING GUIDE**. 1. ed. New York: McGraw Hill, 2008.
- [4] MIZRAHI, Salomon S.; GALETTI, Diógenes. **Física Nuclear e de Partículas: Uma Introdução**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016.
- [5] CARDOSO, Wilder R.; NAKAGAKI, Mariana C. Revisiting Sommerfeld's atomic model using Euler–Lagrange dynamics. **American Journal of Physics**, 1 nov. 2024.
- [6] [S. NAVAS ET AL. \(PARTICLE DATA GROUP\), PHYS. REV. D 110, 030001 \(2024\)](#)
- [7] GOMES, M. O. C. **Teoria Quântica dos Campos**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2015.
- [8] DA ROCHA, Carlos Antônio. **Potencial devido à troca de dois píons: o papel da simetria quiral**. Orientador: Manoel R. Robilotta. 1993. Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.
- [9] CAVALCANTE, Isabela P. **Interação Nucleon-Nucleon no Modelo de Skyrme**. Orientador: Manoel R. Robilotta. 1999. Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- [10] HIGA, Renato. **O potencial nucleon-nucleon e a troca de dois píons relativística**. Orientador: Manoel R. Robilotta. 2003. Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- [11] Eugene Butkov. **Física Matemática**. Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- [12] FUJITA, Takehisa; KANDA, Naohiro; OSHIMA, Sachiko. Nuclear Potential with Two Pion Exchange. **arXiv preprint arXiv:1209.3067**, 2012.
- [13] ALANAZI, H.; MACHLEIDT, R. The Relevance of Pion-Exchange Contributions Versus Contact Terms in the Chiral Effective Field Theory Description of Nucleon–Nucleon Scattering. **Few-Body Systems**, v. 62, p. 1-21, 2021.
- [14] TOUATI, Abdellah. Elastic scattering of electron by a Yukawa potential in non-commutative spacetime. **arXiv preprint arXiv:2410.15220**, 2024.