

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Instituto de Física
Trabalho de Conclusão de Curso

Condensados de Bose-Einstein como Sistemas Quânticos Abertos

Trabalho de Conclusão de Curso

Carlos Matheus Silveira da Silva

**Campo Grande, MS
2025**

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Instituto de Física
Trabalho de Conclusão de Curso

Condensados de Bose-Einstein como Sistemas Quânticos Abertos

Carlos Matheus Silveira da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como
requisito parcial para obtenção do título de Bacharel
em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Wilder Rodrigues Cardoso

Campo Grande, MS
2025

Silva, Carlos

Condensados de Bose-Einstein como Sistemas Quânticos
Abertos / Carlos Matheus Silveira da Silva. -- 2025.

62 f.

Orientador: Dr. Wilder Rodrigues Cardoso

Trabalho (Conclusão de Curso) - Universidade Federal de
Mato Grosso do Sul. Instituto de Física, Campo Grande, BR-MS,
2025.

Condensados Bose-Einstein, Sistemas Quânticos
Abertos, Equação de Gross-Pitaevskii, Equação Mestra de
Lindblad.. I. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
Instituto de Física. II. Título.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram diretamente ou indiretamente para a realização deste trabalho acadêmico. A finalização desta etapa foi viabilizada pelo suporte e amizade de inúmeras pessoas, aos quais registro meu reconhecimento e apreço.

Em especial, gostaria de citar algumas pessoas que foram fundamentais para a realização de todo o percurso da minha graduação em física. Começando pelos meus pais, Carlos e Elizete, que sempre me apoiam em diversas situações. Com certeza essas foram as duas pessoas mais fundamentais para eu poder trilhar meu caminho até aqui. Também agradeço a minha irmã e meu cunhado, Carol e Thalison, que sempre deixam eu entrar no quarto deles para eu me distrair um pouco com o tempo ao bater um papo furado com eles...

Além deles, gostaria de deixar um carinho especial para a Rafaela, minha futura esposa. Durante esses 4 anos de graduação e namoro, eu pude perceber que a carreira no mundo acadêmico requer muitos sacrifícios, eu agradeço a ela por entender isso e estar sempre ao meu lado, dando suporte sempre com o que era necessário. Agradeço também aos meus sogros, Mitchel e Lílian, por serem pessoas justas comigo e sempre terem me ajudado com o que podiam.

Me sinto na obrigação de deixar um agradecimento aos professores do Instituto de Física que são excelentes no que fazem. Em especial, agradeço ao professor João Vitor pela paciência que ele teve comigo quando eu errava cálculos básicos de normalização e pelo seu esforço em entregar um conteúdo de qualidade para seus alunos. Também agradeço ao professor Samuel, que foi meu orientador nas minhas duas primeiras iniciação científica e que fez eu evoluir meu aprendizado em física. Por último, mas não menos importante, agradeço ao meu atual orientador, o professor Wilder, que sempre teve paciência e boa compreensão comigo, sendo um ótimo orientador.

Resumo

Os Condensados de Bose-Einstein, previstos por Bose e Einstein no início do século XX, constituem sistemas singulares por manifestarem fenômenos quânticos em escala macroscópica. A descrição usual desses sistemas, baseada na equação de Gross-Pitaevskii, parte da hipótese de isolamento ideal, o que contrasta com a realidade experimental, marcada por interações inevitáveis com o ambiente. Tais interações inserem os condensados no escopo dos sistemas quânticos abertos, em que efeitos como dissipação, decoerência e perdas tornam-se relevantes. Nesse cenário, abordagens formais como a equação mestra de Lindblad revelam-se essenciais para compreender a dinâmica realista desses condensados. O presente trabalho analisa os condensados sob essa ótica, discutindo como o acoplamento ao meio modifica suas propriedades quânticas e pode originar novos regimes físicos, com potenciais aplicações no controle de estados quânticos em escala macroscópica.

Palavras-chave: Condensados Bose-Einstein, Sistemas Quânticos Abertos, Equação de Gross-Pitaevskii, Equação Mestra de Lindblad.

Abstract

Bose-Einstein Condensates, predicted by Bose and Einstein in the early 20th century, are unique systems that exhibit quantum phenomena on a macroscopic scale. The standard description of these systems, based on the Gross-Pitaevskii equation, relies on the assumption of ideal isolation, which contrasts with the experimental reality where interactions with the environment are unavoidable. Such interactions place condensates within the framework of open quantum systems, where effects such as dissipation, decoherence, and losses become relevant. In this context, formal approaches such as the Lindblad master equation are essential to understanding the realistic dynamics of these condensates. This work analyzes condensates from this perspective, discussing how coupling to the environment modifies their quantum properties and may give rise to new physical regimes, with potential applications in the control of macroscopic quantum states.

Keywords: **Bose-Einstein Condensates, Open Quantum Systems, Gross-Pitaevskii Equation, Lindblad Master Equation.**

Sumário

Lista de Símbolos	x
1 Introdução	1
2 Evolução Temporal de Sistemas Quânticos	3
2.1 Estados Quânticos Puros e Mistos	3
2.2 Evolução Temporal da Matriz Densidade	5
2.3 Processo Quântico Markoviano	7
3 Condensado Bose-Einstein	11
3.1 Equação de Gross-Pitaevskii	12
3.2 Equação Estocástica de Gross-Pitaevskii (EGP)	15
3.2.1 Equação do tipo Lindblad para CBEs	16
3.2.2 Operadores de Lindblad	19
3.2.3 Obtenção da Equação de Gross-Pitaevskii	21
4 Condensado Bose-Einstein II	27
4.1 Equação Mestra com Ganho e Perda Balanceados	27
4.1.1 Hamiltoniano de Bose-Hubbard	28
4.1.2 Operadores de ganho e perda	30
4.1.3 Equação de Gross-Pitaevskii \mathcal{PT} -simétrica	31
4.1.4 Simetria \mathcal{PT} na equação de Gross-Pitaevskii com ganho e perda balanceados	31
4.2 Formulação Microscópica e Equação Mestra Conservativa	32
4.3 Discussão e Conexão com o Modelo Desenvolvido	34
5 Conclusão	37
Apêndice A	41
Apêndice B	47
Referências Bibliográficas	49

Capítulo 1

Introdução

Desde sua previsão teórica por Satyendra Nath Bose e Albert Einstein no início do século XX, os Condensados de Bose-Einstein (CBEs) tornaram-se um dos sistemas quânticos mais fascinantes da física contemporânea [1–3]. Formados por átomos bosônicos a temperaturas extremamente baixas, esses condensados exibem fenômenos macroscópicos regidos pelas leis da mecânica quântica, como coerência de fase, superfluidez e interferência quântica. A descrição teórica tradicional desses sistemas é frequentemente feita por meio da Equação de Gross-Pitaevskii (EGP), que assume um sistema idealmente isolado e em equilíbrio [4, 5].

No entanto, na prática, nenhum sistema físico está completamente isolado. Todo condensado interage, em maior ou menor grau, com seu ambiente externo, seja por meio de flutuações térmicas residuais, perdas de partículas, ruído de campo ou imperfeições no confinamento [6–13]. Tais interações fazem com que o condensado seja, na realidade, um sistema quântico aberto, ou seja, um sistema cujo comportamento é influenciado por graus de liberdade externos que não são, geralmente, diretamente acessíveis ou controláveis.

A teoria de sistemas quânticos abertos fornece um arcabouço formal para descrever a evolução de sistemas que interagem com um ambiente, frequentemente levando à dissipação, decoerência e perda de informação quântica [14]. Dentro desse contexto, abordagens como a equação mestra de Lindblad e as técnicas de traço parcial têm se mostrado fundamentais para compreender os efeitos da não idealidade no comportamento dos CBEs.

Este trabalho tem como objetivo explorar o tratamento dos CBEs a partir da perspectiva de sistemas abertos, discutindo como a interação com o ambiente pode alterar

sua dinâmica, modificar sua coerência quântica e induzir novos regimes físicos não presentes em modelos unitários fechados. Ao investigar essa abordagem, buscamos ampliar a compreensão teórica e experimental sobre os CBEs em cenários realistas, além de destacar implicações para o controle de estados quânticos macroscópicos em futuras aplicações tecnológicas.

No próximo capítulo, vamos estudar a base da teoria que nos leva à teoria de sistemas quânticos abertos, com o objetivo de descrever a evolução temporal de sistemas quânticos. Para isso, serão revisados alguns tópicos da informação quântica e das bases da mecânica quântica. No capítulo 3, vamos descrever a evolução de um CBE, considerando os efeitos da medição no sistema físico. Conforme será discutido, o ato de medir o sistema atrapalha a dinâmica ideal de um CBE, o que revela uma equação estocástica para descrever a dinâmica do sistema. No capítulo 4, serão apresentados dois modelos que discutem o ganho e a perda de partículas no sistema devido ao acoplamento do CBE com um ambiente. No primeiro modelo, será visto que o sistema adquire uma simetria PT, que também será comentada neste capítulo. Já o outro modelo, nos informará como se dá a evolução considerando a conservação de partículas no sistema total. Por fim, no capítulo 5 será feita uma conclusão e comentará sobre alguns desafios no formalismo de sistemas quânticos abertos em CBEs.

Capítulo 2

Evolução Temporal de Sistemas Quânticos

Assim como qualquer sistema físico da mecânica clássica, a mecânica quântica também admite evolução temporal. Dizemos que um sistema quântico evolui no tempo quando os estados quânticos que o definem também evoluem no tempo, sendo esses estados definidos como estados puros ou estados mistos. Nessa descrição, estamos considerando o "Representação de Schrödinger", mas também existe uma forma alternativa de descrever a evolução de um sistema quântico, considerando que os estados quânticos são estáticos e, na verdade, são os operadores que variam no tempo (Representação de Heisenberg). Para a descrição feita nesse trabalho, não nos preocuparemos com o Representação de Heisenberg.

Neste capítulo vamos discutir alguns elementos básicos da teoria quântica que serão de grande relevância para o desenvolvimento da teoria de sistemas quânticos abertos em Condensados Bose-Einstein que será discutida no capítulo 3. Para mais detalhes, o leitor pode consultar a referência [15]

2.1 Estados Quânticos Puros e Mistos

Um estado quântico $|\psi\rangle$ é definido como puro quando $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ e é misto quando $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1$, onde $\hat{\rho}$ é chamada matriz densidade do estado $|\psi\rangle$ [15]. Definimos a matriz densidade como um operador hermitiano, dada pela seguinte equação:

$$\hat{\rho} = \sum_n P_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|, \quad (2.1)$$

em que P_n indica as probabilidades de se medir o sistema em um estado $|\psi_n\rangle$.

Perceba que o conjunto dos estados $|\psi_n\rangle$ não necessariamente formam uma base no espaço de Hilbert \mathcal{H} , eles apenas são estados associados a uma probabilidade. Porém, podemos diagonalizar $\hat{\rho}$. Desse modo, podemos escrever $\hat{\rho}$ como

$$\hat{\rho} = \sum_m \rho_m |\rho_m\rangle\langle\rho_m|, \quad (2.2)$$

em que ρ_m representa os auto-valores de $\hat{\rho}$ com seus respectivos auto-estados $|\rho_m\rangle$, que formam uma base ortonormal no espaço de Hilbert. A razão pela qual podemos escrever $\hat{\rho}$ dessa maneira é justificada pelo teorema espectral (Apêndice A).

Sendo $\hat{\rho}$ diagonalizável, teremos $\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_n \rho_n = 1$, visto que a soma das probabilidades deve ser igual a um. Assim, podemos calcular $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \sum_n \rho_n \langle \rho_n | \left(\sum_m \rho_m |\rho_m\rangle\langle\rho_m| \right) |\rho_n\rangle, \quad (2.3)$$

como $\langle \rho_n | \rho_m \rangle = \delta_{nm}$, temos

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \sum_n \rho_n^2. \quad (2.4)$$

Podemos perceber que a Equação (2.4) sempre será menor ou igual a um, já que $0 < \rho_n \leq 1$. Se $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$, então apenas um valor dos ρ_n será 1, e o resto será nulo. Desse modo, a matriz densidade será descrita por um único estado $|\psi\rangle$ e, portanto, dizemos que esse é um estado puro.

Caso $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1$, a matriz densidade será descrita por um conjunto de estados $|\psi_n\rangle$, com $n = 1, 2, 3, \dots, m$, ou seja, o sistema não possui um estado quântico bem definido e será descrito por vários possíveis estados quânticos. Neste caso, nosso sistema é descrito por um estado misto.

É importante não confundir um estado misto com o princípio da superposição. Enquanto o princípio da superposição nos diz que um estado quântico total $|\psi\rangle$ é composto por dois ou mais estados possíveis, demonstrando natureza quântica, o estado misto representa uma situação de incerteza clássica, onde não é possível identificar qual o estado quântico total (que pode ser um estado de superposição) que o sistema se encontra.

2.2 Evolução Temporal da Matriz Densidade

Sabemos que a evolução de um sistema quântico pode ser descrita através da equação de Schrödinger, a qual é dada por

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.5)$$

em que $H(t)$ é chamado o Hamiltoniano do sistema.

Caso nosso sistema seja puro, $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, tomindo a derivada temporal de $\hat{\rho}$ e utilizando a regra do produto, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| \right). \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) em (2.6),

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| + \frac{1}{-i\hbar} |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| H(t), \quad (2.7)$$

ou simplesmente

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \hat{\rho}(t)]$$

(2.8)

A equação (2.8) é chamada de equação de *Liouville-von Neumann* [15]. Ela nos diz como a matriz densidade evolui no tempo e será uma peça fundamental para a teoria aqui desenvolvida.

Perceba que chegaríamos na mesma equação caso nosso estado fosse misto, pois cada estado $|\psi_n(t)\rangle$ também iria evoluir através da equação (2.5). Portanto, essa equação é válida tanto para estados puros, quanto para estados mistos.

Em geral, a solução da equação (2.8) é dada por uma evolução unitária, isto é, $\hat{\rho}(t) = U(t; t_0) \hat{\rho}(t_0) U(t; t_0)^\dagger$, onde $U(t; t_0)$ é um operador unitário que descreve a evolução de $\hat{\rho}$ partindo de um tempo t_0 até um tempo t . Um operador U será unitário quando $UU^\dagger = U^\dagger U = I$.

Suponha que temos um sistema S acoplado a um sistema externo. O Hamiltoniano total será $H = H_S \otimes I_E + I_S \otimes H_E + H_{int}$, onde H_S é o Hamiltoniano do nosso sistema S , H_E é o Hamiltoniano do sistema externo e H_{int} é o termo de interação entre S e E .

Nosso objetivo é descobrir como o sistema S evolui, portanto, vamos aplicar a equação (2.8) em $\hat{\rho}_{SE} \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$.

A matriz densidade do sistema S é dada pelo traço parcial de $\hat{\rho}_{SE}$ no ambiente (Apêndice A).

$$\hat{\rho}_S = \text{Tr}_E(\hat{\rho}_{SE}), \quad (2.9)$$

sendo $\hat{\rho}_{SE}$ dado por:

$$\hat{\rho}_{SE} = \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E. \quad (2.10)$$

Utilizando (2.8), temos:

$$\frac{d\hat{\rho}_{SE}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_{SE}, \hat{\rho}_{SE}]. \quad (2.11)$$

A equação (2.11) nos permite observar a evolução temporal do sistema SE , conforme vimos anteriormente. Como queremos observar a evolução do sistema S , utilizamos a equação (2.9) em (2.11). Abaixo está a expressão que nos dá o resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_S}{dt} &= \text{Tr}_E \left(\frac{1}{i\hbar} [H_{SE}, \hat{\rho}_{SE}] \right) \\ &= \text{Tr}_E \left(\frac{1}{i\hbar} ([H_S \otimes I_E, \hat{\rho}_{SE}] + [I_S \otimes H_E, \hat{\rho}_{SE}] + [H_{int}, \hat{\rho}_{SE}]) \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} [H_S, \hat{\rho}_S] + \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_E ([H_{int}, \hat{\rho}_{SE}]) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{\rho}_S}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_S, \hat{\rho}_S] + \Phi[\hat{\rho}_{SE}]}, \quad (2.12)$$

com $\Phi[\hat{\rho}_{SE}] = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_E ([H_{int}, \hat{\rho}_{SE}])$.

A equação encontrada nos mostra que se existir um acoplamento entre seu sistema e um sistema externo (usualmente chamado de **ambiente**), a equação de *Liouville-von Neumann* deixa de ser válida para o sistema S e passa a somar um termo relacionado à interação entre S e E . Esse tipo de sistema é chamado de sistema quântico aberto, enquanto sistemas em que não há interação com sistemas externos são chamados de sistemas quânticos fechados. Uma das características de um sistema quântico aberto é a de que ele deixa de ter uma evolução descrita por um operador unitário devido às correlações

entre os sistemas acoplados; por outro lado, o sistema total pode ser considerado um sistema fechado. Por exemplo, a evolução do sistema SE é descrita por operador unitário, enquanto a evolução de S não.

2.3 Processo Quântico Markoviano

Um processo quântico Markoviano é um conceito usado para descrever a evolução de um sistema quântico que depende apenas do seu estado imediatamente anterior. Ou seja, $\hat{\rho}(t + dt)$ deve ser completamente determinado por $\hat{\rho}(t)$. Processos Markovianos em geral são ideais, pois a troca de informação de um sistema S com um sistema externo E sempre acontecerá, fazendo com que a informação que saiu de S e foi para E demore um tempo Δt para retornar de E para S e vice-versa. Assim, no caso de um processo mais realista, dizer que $\hat{\rho}(t + dt)$ é totalmente determinado por $\hat{\rho}(t)$ não é mais válido. Portanto, processos quânticos Markovianos podem ser tratados como aproximações de um sistema quântico aberto, que é válido normalmente quando o sistema S possui um fraco acoplamento com o sistema externo E .

Suponha que temos um sistema quântico aberto Markoviano ideal. Nossa objetivo é descrever a evolução desse sistema. Para isso, começaremos expandindo a matriz densidade em uma série de Taylor e comparando com a decomposição de Kraus da matriz densidade (Apêndice A). Dessa forma, temos

$$\hat{\rho}(t + dt) = \hat{\rho}(t) + \frac{d\hat{\rho}}{dt}dt + O(dt^2), \quad (2.13)$$

onde $O(dt^2)$ são os termos de maiores ordens que serão desprezados. A decomposição de Kraus [16] nos permite escrever

$$\hat{\rho}(t + dt) = \sum_k \hat{E}_k \hat{\rho}(t) \hat{E}_k^\dagger. \quad (2.14)$$

Comparando as equações (2.13) e (2.14), podemos assumir que os operadores de Kraus \hat{E}_k são do tipo [17]

$$\hat{E}_0 = \hat{\mathbb{I}} + \hat{L}_0 dt, \quad (2.15)$$

$$\hat{E}_k = \hat{L}_k \sqrt{dt}. \quad (2.16)$$

No momento, os operadores \hat{L}_k não estão representando nada para nós; isto é, por enquanto estamos apenas fazendo artifícios matemáticos para chegar a uma equação que dê

um significado físico. Como veremos em breve, os operadores \hat{L}_k estarão associados aos termos de dissipações do sistema quântico que está acoplado à um sistema externo.

Perceba que ao aplicar essas equações na equação (2.14), podemos recuperar a equação (2.13). Também, a matriz densidade precisa preservar o traço por conta da propriedade de normalização, de modo que $\sum_k \hat{E}_k \hat{E}_k^\dagger = \hat{\mathbb{I}}$. Assim, podemos escrever a matriz identidade utilizando as equações (2.15) e (2.16):

$$\hat{\mathbb{I}} = \hat{E}_0 \hat{E}_0^\dagger + \sum_{k=1} \hat{E}_k \hat{E}_k^\dagger, \quad (2.17)$$

$$\hat{\mathbb{I}} = \hat{\mathbb{I}} + \left(\hat{L}_0 + \hat{L}_0^\dagger + \sum_{k=1} \hat{L}_k \hat{L}_k^\dagger \right) dt + O(dt^2). \quad (2.18)$$

Como os termos $O(dt^2)$ são desprezíveis, a condição para que a igualdade seja verdadeira fica:

$$\hat{L}_0 + \hat{L}_0^\dagger + \sum_{k=1} \hat{L}_k \hat{L}_k^\dagger = 0. \quad (2.19)$$

Podemos decompor o operador \hat{L}_0 como uma soma de um operador Hermitiano e um anti-Hermitiano. Fazendo isso, $\hat{L}_0 = \hat{A} - i\hat{H}$. Substituindo na equação (2.19) e isolando o operador \hat{A} , obtemos:

$$\hat{A} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1} \hat{L}_k \hat{L}_k^\dagger. \quad (2.20)$$

Reescrevendo a equação (2.14) utilizando as equações (2.15) e (2.16), utilizando novamente a relação $\hat{L}_0 = \hat{A} - i\hat{H}$, obtemos a seguinte equação:

$$\hat{\rho}(t+dt) = \hat{\rho}(t) - i[\hat{H}, \hat{\rho}(t)]dt + \{\hat{A}, \hat{\rho}(t)\}dt + \sum_{k=1} \hat{L}_k \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger dt + O(dt^2), \quad (2.21)$$

em que $\{x, y\} = xy + yx$ é chamado de anti-comutador.

Analizando a taxa de variação de $\hat{\rho}$, podemos obter uma equação-mestra que, ao resolvê-la, pode nos informar como nosso sistema aberto (Markoviano) irá evoluir,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \{\hat{A}, \hat{\rho}(t)\} + \sum_{k=1} \hat{L}_k \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger. \quad (2.22)$$

Utilizando a equação (2.20), temos:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \sum_{k=1} \left(\hat{L}_k \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} \{\hat{L}_k \hat{L}_k^\dagger, \hat{\rho}\} \right). \quad (2.23)$$

Se interpretarmos os operadores \hat{H} como sendo o Hamiltoniano do nosso sistema e \hat{L}_k um operador adimensional, então podemos fazer as seguintes transformações:

$$\hat{H} \longrightarrow \frac{1}{\hbar} \hat{H},$$

$$\hat{L}_k \longrightarrow \sqrt{\gamma_k} \hat{L}_k,$$

em que γ_k são valores escalares reais e positivos com dimensão de inverso de tempo. Também, interpretando \hat{H} como Hamiltoniano, ao dividir por \hbar , o termo também fica com dimensão de inverso de tempo. Assim, nossa equação fica dimensionalmente correta, resultando em:

$$\boxed{\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \sum_{k=1} \gamma_k \left(\hat{L}_k \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_k \hat{L}_k^\dagger, \hat{\rho}(t) \} \right)} \quad (2.24)$$

A equação acima encontrada é uma equação geral para processos Markovianos e é conhecida como equação de *Gorini–Kossakowski–Sudarshan–Lindblad* (GKSL) ou simplesmente equação de Lindblad. O leitor pode ver com mais detalhes essa demonstração através da referência [17].

Perceba que o primeiro termo dela é exatamente a equação de *Liouville-von Neumann* (2.8). Isso nos mostra que a equação de Lindblad é uma generalização da equação de Schrödinger. Caso não exista interação com o ambiente, os valores γ_k devem ser iguais a zero, de modo a retornar na equação (2.8) derivada da equação de Schrödinger. A segunda parte da equação (2.24) é interpretada como sendo a contribuição dos termos de dissipações e perdas de coerência. Por exemplo, γ_k pode representar a taxa de perda ou ganho de partículas em um sistema, enquanto os operadores \hat{L}_k são responsáveis por mudar o estado do sistema. Portanto, com essa generalização, podemos modelar sistemas em que há interação com o ambiente, desde que o sistema possa ser aproximado a um processo markoviano.

Capítulo 3

Condensado Bose-Einstein

O CBE é um fenômeno quântico em que uma grande fração de partículas idênticas com spin inteiro (bósons) ocupa o estado de menor energia de um sistema, formando uma entidade coerente descrita por uma única função de onda em escala quase macroscópica [18]. Diferente da condensação comum (como vapor virando líquido), o CBE não exige interação entre partículas¹ e decorre da indistinguibilidade dos bósons e da estatística quântica que seguem. O conceito surgiu nos anos 1920 com os trabalhos de Satyendra Nath Bose e Albert Einstein, que desenvolveram a estatística de Bose-Einstein. Embora inicialmente desacreditada, a ideia ganhou força com a proposta de que a superfluidez do hélio-4 e a supercondutividade poderiam estar relacionadas à condensação, apesar de dependerem de interações, o que contrasta com o modelo ideal original [19].

A confirmação experimental da CBE ocorreu somente em 1995 [20] após avanços em técnicas de resfriamento e manipulação de átomos. Três grupos independentes conseguiram formar condensados em gases diluídos de átomos de rubídio-87, lítio-7 e sódio-23, a temperaturas extremamente baixas, próximas do zero absoluto. Esses feitos renderam o Prêmio Nobel de Física em 2001 a Cornell, Wieman e Ketterle. Desde então, o CBE tem se tornado um campo de intensa pesquisa teórica e experimental, abrangendo áreas como física atômica, matéria condensada, óptica quântica e física estatística, e sendo observada não só em átomos, mas também em moléculas, quasipartículas e até fóttons [19, 21].

Neste capítulo, vamos introduzir as principais características de um CBE e deduzir a equação que o descreve (equação de Gross-Pitaevskii), além de apresentar o tema deste

¹É importante comentar que o CBE não exigir interação não significa que não haverá interação. No mundo real, não conseguimos atingir uma temperatura de 0K, tornando inevitável a interação entre partículas.

trabalho: um CBE descrito como um sistema quântico aberto.

3.1 Equação de Gross-Pitaevskii

A EGP surge como uma formulação teórica capaz de descrever, de forma aproximada, o comportamento coletivo de um condensado de Bose–Einstein em temperaturas extremamente baixas [22]. Em um CBE, um grande número de bôsons ocupa o mesmo estado quântico fundamental, fazendo com que o sistema possa ser tratado como uma única função de onda macroscópica $\Psi(\mathbf{r}, t)$, que representa a densidade de probabilidade de encontrar as partículas no espaço e no tempo. A grande intuição por trás da derivação da EGP é que, embora cada átomo obedeça às leis da mecânica quântica, o condensado inteiro se comporta como um único “superátomo” coerente, cuja evolução é governada por uma equação de Schrödinger modificada para incluir interações entre as partículas.

O ponto de partida é considerar que, para temperaturas próximas do zero absoluto, as colisões entre átomos são dominadas por espalhamento elástico de baixo momento, podendo ser descritas por um potencial efetivo de curto alcance. Nesse regime, a interação entre as partículas pode ser simplificada usando o aproximador de contato $g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, onde g é uma constante efetiva que está relacionada ao comprimento de espalhamento a_s [22]. Ao aplicar o método de Hartree–Fock–Bogoliubov e assumir que todos os bôsons ocupam o mesmo estado quântico, obtém-se uma equação não linear para $\Psi(\mathbf{r}, t)$, na qual o termo de interação $g|\Psi|^2$ leva em conta o efeito médio das colisões no condensado [23]. Essa não linearidade é justamente o que diferencia a EGP da equação de Schrödinger tradicional, permitindo modelar fenômenos coletivos como solitons, vórtices e oscilações coerentes.

Assim, a EGP pode ser vista como o elo entre a mecânica quântica de partículas individuais e a hidrodinâmica quântica de sistemas macroscópicos. Ela oferece uma descrição simples, mas poderosa, para a evolução temporal e a distribuição espacial de um CBE, capturando de forma intuitiva o papel central das interações na dinâmica coletiva desse estado da matéria. Esta equação foi desenvolvida independentemente por Eugene P. Gross e Lev P. Pitaevskii no início da década de 1960, inicialmente com o objetivo de descrever o hélio superfluido, um sistema de bôsons fortemente interagentes. Anos mais tarde, com o avanço das técnicas experimentais e a realização do primeiro CBE em gases diluídos em 1995, a EGP mostrou-se surpreendentemente eficaz para modelar condensa-

dos atômicos. Desde então, tornou-se uma das ferramentas teóricas mais importantes na física de matéria condensada e de sistemas quânticos macroscópicos, sendo amplamente utilizada para prever e interpretar resultados experimentais. Desde então, tornou-se uma das ferramentas teóricas mais importantes na física de matéria condensada e de sistemas quânticos macroscópicos, sendo amplamente utilizada para prever e interpretar resultados experimentais. Em particular, a EGP tem sido empregada para descrever a dinâmica de colisão entre condensados unidimensionais e a formação de padrões não lineares [24], a emergência e estabilização de estruturas vorticais e aglomerados de vórtices em armadilhas confinadas [25], bem como a dinâmica turbulenta e a evolução de vórtices em condensados com interações dipolares [26]. Além disso, variantes da equação, incluindo versões estendidas para regimes finitos de temperatura ou com potenciais desordenados, têm possibilitado a previsão de estruturas de rede de vórtices em condensados multicomponentes [27] e a descrição detalhada da evolução e reconexão de filamentos de vórtice em superfluidos [28]. Tais aplicações evidenciam que a EGP permanece como um dos principais pilares teóricos para a interpretação quantitativa de fenômenos observados em experimentos modernos com gases quânticos ultrafrios, incluindo sistemas moleculares e dipolares [29].

Vamos agora deduzir a EGP imaginando um sistema quântico de muitos corpos com N partículas indistinguíveis, com o seguinte Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U(\mathbf{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (3.1)$$

em que $U(\mathbf{r}_i)$ é um potencial externo e $V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ é o potencial de interação entre as partículas. A equação (2.5) para o caso de muitos corpos fica:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t). \quad (3.2)$$

Podemos descrever esse sistema a partir de um funcional de ação S e, a partir dele, tomar as equações de Euler-Lagrange para determinar a dinâmica do nosso sistema. Tal funcional é dado por:

$$S = \int dt d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_N \Psi^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t). \quad (3.3)$$

Como os bósons estão todos no mesmo estado fundamental, utilizamos uma aproximação de Hartree para a função de onda macroscópica, de modo que o produto de cada função

de onda de um bóson isolado ψ nos fornece a função de onda geral do nosso sistema Ψ .

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{r}_i, t). \quad (3.4)$$

Substituindo as equações (3.4) e (3.1) na equação (3.3), temos para a parte cinética e do potencial externo:

$$\begin{aligned} & \int d^3 r_1 \dots d^3 r_N \Psi^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 - U(\mathbf{r}_i) \right) \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \\ &= N \int d^3 r \psi^*(\mathbf{r}, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Perceba que generalizamos as variáveis $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ apenas para uma variável \mathbf{r} , já que estamos lidando com N partículas idênticas.

Para a parte do potencial de interação, temos:

$$\frac{N(N-1)}{2} \int dt d^3 r \psi^*(\mathbf{r}, t) \left(\int d^3 r' |\psi(\mathbf{r}', t)|^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \psi(\mathbf{r}, t).$$

Juntando tudo, obtemos nossa ação completa:

$$\begin{aligned} S = & N \int dt d^3 r \psi^*(\mathbf{r}, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\mathbf{r}) \right. \\ & \left. - \frac{N-1}{2} \int d^3 r' |\psi(\mathbf{r}', t)|^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.5) \end{aligned}$$

A fim de obter a equação de movimento correspondente ao funcional de ação (3.3), escrevemos a densidade Lagrangiana (após uma integração por partes no termo cinético, desprezando termos de fronteira):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi, \psi^*) = & N \left(i\hbar \psi^* \partial_t \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - U(\mathbf{r}) |\psi|^2 \right. \\ & \left. - \frac{N-1}{2} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \int d^3 r' |\psi(\mathbf{r}', t)|^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right). \quad (3.6) \end{aligned}$$

Para campos complexos, tratamos ψ e ψ^* como variáveis independentes. A equação de Euler–Lagrange para ψ^* é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi^*)} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Calculando termo a termo (o fator global N cancela):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar \partial_t \psi - U(\mathbf{r})\psi - (N-1)W(\mathbf{r}, t)\psi, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \Rightarrow -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} \right) = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi, \quad (3.9)$$

em que definimos

$$W(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' |\psi(\mathbf{r}', t)|^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.10)$$

Juntando os resultados, obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - U(\mathbf{r})\psi - (N-1)W(\mathbf{r}, t)\psi = 0. \quad (3.11)$$

Isolando o termo temporal, resulta

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1) \int d^3 r' |\psi(\mathbf{r}', t)|^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (3.12)$$

O potencial de interação entre as partículas pode ser descrito seguindo uma aproximação $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \approx g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. A partir da teoria de espalhamento, podemos mostrar que $g = \frac{4\pi\hbar a_s}{m}$, onde a_s é o comprimento de espalhamento [23]. Colocando essas aproximações na equação (3.12), obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1)g |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.13)$$

Essa é a equação EGP dependente do tempo. Nossa objetivo aqui será generalizar essa equação para incluir termos dissipativos, levando a uma equação estocástica.

3.2 Equação Estocástica de Gross-Pitaevskii (EGP)

O estudo dos CBEs oferece uma oportunidade única de investigar efeitos quânticos em escala macroscópica. Esses sistemas, formados a temperaturas ultrabaixas, só podem ser acessados experimentalmente por meio de feixes de luz, já que seu reduzido calor específico impede contato direto com sondas materiais [30]. Entre as técnicas disponíveis, a imagem ressonante permite extrair informações, mas destrói o condensado ao aquecê-lo. Já a imagem dispersiva, utilizando luz fora de ressonância, possibilita medições repetidas

sobre a mesma amostra, permitindo acompanhar sua dinâmica sem a necessidade de recriar o sistema a cada observação [31]. Esse método tem sido fundamental para estudar a formação de condensados, excitações coletivas, propriedades superfluidas e a criação de vórtices [31, 32].

Um aspecto central que emerge desse cenário é compreender como o próprio ato de medir influencia a evolução do condensado. Para explorar essa questão, propõe-se um modelo realista que descreve a interação dispersiva entre átomos e luz, resultando em uma equação mestra do tipo Lindblad. Essa abordagem quantifica processos como a difusão de fase e a perda gradual de átomos durante a observação. Além disso, ao traduzir essa dinâmica em termos estocásticos, é possível analisar tanto regimes de medição forte — que levam à compressão das flutuações no número de átomos — quanto regimes fracos, nos quais a evolução se aproxima de uma versão estocástica da EGP.

3.2.1 Equação do tipo Lindblad para CBEs

Para começar, consideremos o sistema de medição, o condensado e a interação entre os dois sistemas. O Hamiltoniano do nosso sistema total pode ser escrito como $H = H_B + H_F + H_{int}$, onde H_B é o Hamiltoniano total do sistema de átomos do condensado, H_F é o Hamiltoniano do sistema de fôtons que realizará as medições e H_{int} representa a interação entre os dois sistemas.

Da mesma forma que fizemos no capítulo 2, podemos operar o traço parcial sobre o sistema F , encontrando a matriz densidade para o sistema B . Ao fazer isso, obtemos:

$$\hat{\rho}_B(t) = \text{Tr}_F[\hat{\rho}_{BF}], \quad (3.14)$$

sendo $\hat{\rho}_{BF}$ governada pela equação (2.8).

Podemos representar a dinâmica do sistema total utilizando a representação de interação; isto é, vamos representar a dinâmica do sistema apenas pelo Hamiltoniano H_{int} . Para isso, definimos uma nova matriz densidade:

$$\tilde{\rho}(t) = e^{i(H_B+H_F)t/\hbar} \hat{\rho}_{BF}(t) e^{-i(H_B+H_F)t/\hbar}. \quad (3.15)$$

Calculando a derivada no tempo da equação (3.15), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(e^{iH_0 t/\hbar} \hat{\rho}_{BF}(t) e^{-iH_0 t/\hbar} \right) \\ &= \left(\frac{iH_0}{\hbar} \right) e^{iH_0 t/\hbar} \hat{\rho}_{BF}(t) e^{-iH_0 t/\hbar} + e^{iH_0 t/\hbar} \left(\frac{d\hat{\rho}_{BF}}{dt} \right) e^{-iH_0 t/\hbar} + e^{iH_0 t/\hbar} \hat{\rho}_{BF}(t) \left(-\frac{iH_0}{\hbar} \right) e^{-iH_0 t/\hbar}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que $H_0 = H_B + H_F$.

Substituindo os termos de derivada da matriz densidade $\hat{\rho}_{BF}$ utilizando a equação (2.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} H_0 \tilde{\rho} + e^{iH_0 t/\hbar} \left(-\frac{i}{\hbar} [H_0 + H_{int}, \hat{\rho}_{BF}] \right) e^{-iH_0 t/\hbar} - \tilde{\rho} \frac{i}{\hbar} H_0 \\ &= \frac{i}{\hbar} [H_0, \tilde{\rho}] - \frac{i}{\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} [H_0 + H_{int}, \hat{\rho}_{BF}] e^{-iH_0 t/\hbar}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Expandindo o comutador no segundo termo, resulta em

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_0, \tilde{\rho}] - \frac{i}{\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} (H_0 \hat{\rho}_{BF} - \hat{\rho}_{BF} H_0 + H_{int} \hat{\rho}_{BF} - \hat{\rho}_{BF} H_{int}) e^{-iH_0 t/\hbar}. \quad (3.18)$$

Agora, vamos distribuir a transformação de unitariedade ($e^{iH_0 t/\hbar} \dots e^{-iH_0 t/\hbar}$) para cada termo:

$$e^{iH_0 t/\hbar} (H_0 \hat{\rho}_{BF}) e^{-iH_0 t/\hbar} = \left(e^{iH_0 t/\hbar} H_0 e^{-iH_0 t/\hbar} \right) \left(e^{iH_0 t/\hbar} \hat{\rho}_{BF} e^{-iH_0 t/\hbar} \right) = H_0 \tilde{\rho}, \quad (3.19)$$

$$e^{iH_0 t/\hbar} (\hat{\rho}_{BF} H_0) e^{-iH_0 t/\hbar} = \left(e^{iH_0 t/\hbar} \hat{\rho}_{BF} e^{-iH_0 t/\hbar} \right) \left(e^{iH_0 t/\hbar} H_0 e^{-iH_0 t/\hbar} \right) = \tilde{\rho} H_0. \quad (3.20)$$

A equação (3.18) fica:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [H_0, \tilde{\rho}] - \frac{i}{\hbar} (H_0 \tilde{\rho} - \tilde{\rho} H_0) - \frac{i}{\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} [H_{int}, \hat{\rho}_{BF}] e^{-iH_0 t/\hbar} \\ &= -\frac{i}{\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} [H_{int}, \hat{\rho}_{BF}] e^{-iH_0 t/\hbar} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{int}, \tilde{\rho}]. \quad (3.22)$$

Ou seja, o resultado é dado por

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{int}, \tilde{\rho}], \quad (3.23)$$

em que $\tilde{H}_{int} = e^{i(H_B+H_F)t/\hbar} H_{int} e^{-i(H_B+H_F)t/\hbar}$.

Escrevendo a equação em forma integral:

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(-\infty) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}(t')]. \quad (3.24)$$

Substituindo de volta na equação diferencial (3.23):

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{int}(t), \tilde{\rho}(-\infty)] - \frac{1}{\hbar^2} [\tilde{H}_{int}(t), \int_{-\infty}^t dt' [\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}(t')]]. \quad (3.25)$$

Tomando o traço parcial sobre o sistema F na equação acima e considerando a aproximação de Born-Markov podemos obter uma equação para descrever a evolução do condensado.

Em resumo, as aproximações de Born-Markov tem as seguintes características [33]:

1. A interação entre o condensado (sistema B) e o reservatório (sistema F) é suficientemente fraca, de modo que a influência de retorno do sistema sobre o reservatório, isto é, as alterações de coerência que o sistema pode causar no reservatório, podem ser desconsideradas.
2. O tempo de correlação dos observáveis relevantes do reservatório é muito menor do que a escala de tempo característica da dinâmica do sistema.
3. Assume-se que sistema e reservatório permanecem não correlacionados; em outras palavras, a matriz densidade total pode ser aproximada como o produto tensorial das matrizes densidade reduzidas de cada parte.

Perceba que no desenvolvimento da equação de Lindblad (Seção 2.3) utilizamos essas mesmas aproximações.

Com essas aproximações, podemos aproximar a matriz de densidade $\tilde{\rho}$ como um produto da matriz de densidade do sistema B e o sistema F , isto é

$$\tilde{\rho}(t') \approx \hat{\rho}_B(t') \otimes \hat{\rho}_R(t') = \text{Tr}_F[\hat{\rho}_{BF}(t')] \otimes \hat{\rho}_R(t'). \quad (3.26)$$

Além disso, por se tratar de uma aproximação markoviana, podemos trocar a variável de tempo t' dentro de $\tilde{\rho}$ por simplesmente t , já que t' dissipase tão rapidamente que não tem tempo de influenciar de volta o sistema num tempo posterior t . Também,

$\tilde{\rho}(-\infty)$ passa a ser apenas $\tilde{\rho}(t)$. Desse modo, a equação para a evolução do condensado fica:

$$\frac{d\hat{\rho}_B}{dt} = -\frac{i}{\hbar} Tr_F[\tilde{H}_{int}(t), \hat{\rho}_B(t) \otimes \hat{\rho}_F(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_F[\tilde{H}_{int}(t), \int_{-\infty}^t dt' [\tilde{H}_{int}(t'), \hat{\rho}_B(t) \otimes \hat{\rho}_F(t')]]. \quad (3.27)$$

Perceba que a equação encontrada é semelhante à equação de Lindblad (2.24). Assim, nosso próximo passo será calcular os operadores de Lindblad (\hat{L}_k). No nosso caso, $k = 1, 2$, pois o segundo termo da equação (3.27) nos fornece duas contribuições que são análogas aos operadores \hat{L}_1 e \hat{L}_2 .

3.2.2 Operadores de Lindblad

Para a descrição dos operadores, será adotado o método descrito na referência [34]. O Hamiltoniano do nosso sistema é dado por

$$H_{int} = \frac{\epsilon_0 \chi_0}{2} \int d^3x \hat{n}(\mathbf{x}) : \mathbf{E}^2 :, \quad (3.28)$$

em que $\hat{n}(\mathbf{x})$ é o operador de densidade atuando no espaço, \mathbf{E} é o campo elétrico quantizado proveniente da interação luz-condensado e χ_0 é a susceptibilidade elétrica dos átomos do condensado, onde $(::)$ é usado para indicar uma ordenação normal, removendo a energia do vácuo [35]. Caso escrevêssemos o campo elétrico sem a ordenação normal, estariam assumindo que o CBE poderia interagir com o vácuo, o que não é o caso.

O operador \hat{n} pode ser obtido a partir da transformada de Fourier no espaço dos momentos (\mathbf{q}).

$$n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{\tilde{n}(\mathbf{q})}{\sqrt{L^3}}, \quad (3.29)$$

sendo L um fator de normalização. Seguindo o método, ao substituir a equação (3.28) na equação (3.27), é possível chegar a uma equação para cada operador \hat{L}_1 e \hat{L}_2 .

Conforme mostra Dalvit [34], o operador \hat{L}_2 mostra o processo que altera o número de átomos do CBE a partir da interação luz-condensado. Esse tipo de processo apenas acontece quando a luz que incide no condensado possui altas intensidades e frequências apropriadas alinhadas à ressonância do sistema. Neste estudo, vamos lidar apenas com o processo de medição fraca, isto é, processos que utilizam técnicas de imagem dispersiva, como descrito por Andrews [36].

A equação encontrada para \hat{L}_1 é dada por [34]:

$$\hat{L}_1 \hat{\rho}_B = \int d^2 r_1 \int d^2 r_2 K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) [n(\mathbf{r}_1), [n(\mathbf{r}_2), \hat{\rho}_B]], \quad (3.30)$$

em que K é dado por

$$K(\mathbf{r}) = \frac{\pi \chi_0^2 k_0 I}{2 \hbar c} \int d^2 k \exp\left(-\frac{\xi^2 k^4}{4 k_0^2} + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right). \quad (3.31)$$

Em resumo, K é o termo matemático na equação mestra que quantifica como a medição em uma parte do condensado está espacialmente correlacionada com a medição em outra, e sua largura determina a menor distância que o sistema de imagem consegue resolver. Aqui, ξ representa a espessura ou a escala de comprimento do CBE na direção z e k_0 é o número de onda da luz que incide no condensado. I é a intensidade da luz proveniente do laser.

Podemos escrever o operador de uma forma mais compacta em termos de γ_k , conforme fizemos na equação de Lindblad (2.24). Assim, a equação seria dada por

$$\hat{L}_1 \hat{\rho}_B = \gamma_1 [n(\mathbf{r}_1), [n(\mathbf{r}_2), \hat{\rho}_B]], \quad (3.32)$$

sendo γ_1 dado por

$$\gamma_1 = \frac{\pi \chi_0^2 k_0^2 I}{2 \hbar c} \int d^2 k e^{-\frac{\xi^2 k^4}{4 k_0^2}} |\phi(\mathbf{k})|^2 |\phi(-\mathbf{k})|^2 \simeq \frac{\pi \chi_0^2 k_0 I}{2 \hbar c \alpha^2} \quad (3.33)$$

$$\hat{L}_1 \hat{\rho}_B \simeq \gamma_1 \frac{\pi^2 \chi_0^2 k_0 I}{2 \hbar c \alpha^2}, \quad (3.34)$$

em que α é a área aproximada nas direções x-y em que o laser interage com o condensado, ou seja, α é o fator que quantifica a região de interação dos fótons com o CBE. $\phi(\mathbf{k})$ é a função de onda do CBE no espaço dos momentos.

Com o operador \hat{L}_1 bem definido, podemos reescrever a equação mestra que descreve nosso sistema na representação de Schrödinger (2.12) ao invés da representação de interação (3.27).

3.2.3 Obtenção da Equação de Gross-Pitaevskii

Na representação de Schrödinger, o Hamiltoniano pode ser escrito com base na EGP (3.13), como

$$H = \int d^2r \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^\dagger \nabla \psi + U(\mathbf{r}) \psi^\dagger \psi + \frac{g}{2} \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi \right). \quad (3.35)$$

A equação mestra nessa representação pode ser escrita como

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \hat{\rho}] - \int d^2r_1 \int d^2r_2 K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) [n(\mathbf{r}_1), [n(\mathbf{r}_2), \hat{\rho}]], \quad (3.36)$$

em que o segundo termo representa os processos de dissipação da interação fraca entre a luz e o CBE em que há perda de informação de fase do condensado.

Agora, vamos mostrar que a evolução da função de onda, dada por

$$d|\Psi\rangle = -\frac{i}{\hbar} dt H |\Psi\rangle - dt \int d^2r_1 \int d^2r_2 K(r_1 - r_2) \Delta n(r_1) \Delta n(r_2) |\Psi\rangle + \int d^2r dW(r) \Delta n(r) |\Psi\rangle, \quad (3.37)$$

pode gerar a nossa matriz densidade $\hat{\rho}$ e, portanto, condizer com a equação (3.36). O termo $dW(r)$ é um ruído que vem do processo de Wiener [37] e representa a flutuação aleatória associada ao resultado instantâneo de uma medição fraca da densidade local $n(\mathbf{r})$, ou seja, $dW(r)$ modela a equação para um processo estocástico. O termo $\Delta n(r)$ é dado por

$$\Delta n(r) = n(r) - \langle n(r) \rangle \equiv n(r) - \langle \Psi | n(r) | \Psi \rangle, \quad (3.38)$$

em processos estocásticos, é normal a utilização do cálculo de Itô (Apêndice B). As correlações do ruído para o nosso sistema são $\mathbb{E}[dW(r)] = 0$ e $dW(r) dW(r') = 2 dt K(r - r')$, sendo \mathbb{E} a representação do cálculo da média.

Escrevendo a equação (3.37) de forma mais compacta, obtemos

$$d|\Psi\rangle = A dt |\Psi\rangle + \int d^2r \Delta n(r) dW(r) |\Psi\rangle, \quad (3.39)$$

em que

$$A = -\frac{i}{\hbar} H - \int d^2r_1 \int d^2r_2 K(r_1 - r_2) \Delta n(r_1) \Delta n(r_2). \quad (3.40)$$

Pela definição da matriz densidade e sendo Ψ a função de onda do nosso sistema,

$$\hat{\rho}(t) = \mathbb{E}[|\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|]. \quad (3.41)$$

Pela fórmula de Itô para produtos, o incremento do projetor é

$$d(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = (d|\Psi\rangle)\langle\Psi| + |\Psi\rangle(d\langle\Psi|) + (d|\Psi\rangle)(d\langle\Psi|). \quad (3.42)$$

Portanto, tirando a média,

$$d\rho = \mathbb{E}[(d|\Psi\rangle)\langle\Psi| + |\Psi\rangle(d\langle\Psi|)] + \mathbb{E}[(d|\Psi\rangle)(d\langle\Psi|)]. \quad (3.43)$$

Podemos tratar a equação (3.39) com uma parte linear e uma parte estocástica. O termo com dt é a parte linear da equação, enquanto o termo com dW é a parte estocástica. Assim, ao substituir a parte linear de $d|\Psi\rangle$ na parte linear da equação (3.43), obtemos:

$$\mathbb{E}[(d|\Psi\rangle)\langle\Psi| + |\Psi\rangle(d\langle\Psi|)] = dt(A\rho + \rho A^\dagger). \quad (3.44)$$

O termo quadrático $(d|\Psi\rangle)(d\langle\Psi|)$ contém produtos $dW(r)dW(r')$ e, portanto, contribui da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(d|\Psi\rangle)(d\langle\Psi|)] &= \mathbb{E}\left[\left(\int d^2r B(r) dW(r) |\Psi\rangle\right)\left(\langle\Psi| \int d^2r' B(r') dW(r')\right)\right] \\ &= \int d^2r \int d^2r' \mathbb{E}[dW(r)dW(r')] \mathbb{E}[B(r)|\Psi\rangle\langle\Psi|B(r')] \\ &= 2dt \int d^2r \int d^2r' K(r-r') \mathbb{E}[\Delta n(r)\rho\Delta n(r')]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Somando o termo linear com o termo estocástico, obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] - \int d^2r_1 \int d^2r_2 K(r_1-r_2) \mathbb{E}[\Delta n(r_1)\Delta n(r_2)\rho + \rho\Delta n(r_1)\Delta n(r_2)] \\ &\quad + 2 \int d^2r_1 \int d^2r_2 K(r_1-r_2) \mathbb{E}[\Delta n(r_1)\rho\Delta n(r_2)]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Desenvolvendo os termos dentro da integral contendo $\Delta n(r) = n(r) - \langle n(r) \rangle$, chegamos em um resultado de duplo comutador $[n(r_1), [n(r_2), \rho]]$. Assim, conseguimos finalmente voltar na equação (3.36). Dessa forma, a equação (3.37) pode representar nosso sistema.

Suponha que o número de átomos do sistema é $N = 1$. Nesse caso, o termo de interação do Hamiltoniano (3.35) será nulo, já que o átomo está sozinho. A função de onda para esse caso pode ser dada por

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \Psi(t) \rangle, \quad (3.47)$$

e a densidade de partícula é representada pelo projetor

$$\hat{n}(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|. \quad (3.48)$$

Aplicando $\hat{n}(\mathbf{r}_1)$ em $|\Psi\rangle$:

$$\hat{n}(\mathbf{r}_1) |\Psi\rangle = |\mathbf{r}_1\rangle \phi(\mathbf{r}_1). \quad (3.49)$$

O valor esperado $\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle$ fica:

$$\langle \hat{n}(\mathbf{r}_1) \rangle = \langle \Psi | \hat{n}(\mathbf{r}_1) | \Psi \rangle = |\phi(\mathbf{r}_1)|^2. \quad (3.50)$$

Logo,

$$\Delta n(\mathbf{r}_1) |\Psi\rangle = |\mathbf{r}_1\rangle \phi(\mathbf{r}_1) - |\Psi\rangle |\phi(\mathbf{r}_1)|^2. \quad (3.51)$$

Tomando o produto com $\langle \mathbf{r}|$, obtemos:

$$\langle \mathbf{r} | \Delta n(\mathbf{r}_1) | \Psi \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r}_1)|^2. \quad (3.52)$$

Para o termo estocástico da equação (3.37), obtemos

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{r} | \int d^2 r' dW(\mathbf{r}') \Delta n(\mathbf{r}') | \Psi \rangle \\ &= \int d^2 r' dW(\mathbf{r}') [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r}')|^2] \\ &= \left[dW(\mathbf{r}) - \int d^2 r' |\phi(\mathbf{r}')|^2 dW(\mathbf{r}') \right] \phi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.53)$$

O termo contendo $\Delta n(r_1)\Delta n(r_2)$ pode ser expandido, tornando-se

$$\Delta n(\mathbf{r}_1)\Delta n(\mathbf{r}_2) = \hat{n}(\mathbf{r}_1)\hat{n}(\mathbf{r}_2) - \langle \hat{n}(\mathbf{r}_2) \rangle \hat{n}(\mathbf{r}_1) - \langle \hat{n}(\mathbf{r}_1) \rangle \hat{n}(\mathbf{r}_2) + \langle \hat{n}(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \hat{n}(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (3.54)$$

Usando $\hat{n}(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|$, temos:

$$\hat{n}(\mathbf{r}_1)\hat{n}(\mathbf{r}_2) |\Psi\rangle = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) |\mathbf{r}_1\rangle \phi(\mathbf{r}_1). \quad (3.55)$$

Tomando o produto com $\langle \mathbf{r}|$ novamente:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \Delta n(\mathbf{r}_1)\Delta n(\mathbf{r}_2) | \Psi \rangle &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\phi(\mathbf{r}) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_1)|\phi(\mathbf{r}_2)|^2 - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)\phi(\mathbf{r}_2)|\phi(\mathbf{r}_1)|^2 \\ &\quad + \phi(\mathbf{r})|\phi(\mathbf{r}_1)|^2|\phi(\mathbf{r}_2)|^2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Substituindo esses resultados na integral da equação (3.37), cada termo da equação (3.56) gera:

$$I_1 = \int d^2r_1 d^2r_2 K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = K(0), \quad (3.57)$$

$$I_2 = \int d^2r_1 d^2r_2 K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) |\phi(\mathbf{r}_2)|^2 = \int d^2r_2 K(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) |\phi(\mathbf{r}_2)|^2, \quad (3.58)$$

$$I_3 = \int d^2r_1 d^2r_2 K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) |\phi(\mathbf{r}_1)|^2 = \int d^2r_1 K(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) |\phi(\mathbf{r}_1)|^2, \quad (3.59)$$

$$I_4 = \int d^2r_1 d^2r_2 K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) |\phi(\mathbf{r}_1)|^2 |\phi(\mathbf{r}_2)|^2. \quad (3.60)$$

Combinando tudo, o termo total, que vamos definir como um "contratermo" (C.T.), é dado por:

$$C.T. = -dt \left[K(0) - 2 \int d^2r_1 K(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) |\phi(\mathbf{r}_1)|^2 + \iint d^2r_1 d^2r_2 K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) |\phi(\mathbf{r}_1)|^2 |\phi(\mathbf{r}_2)|^2 \right] \phi(\mathbf{r}). \quad (3.61)$$

Este termo pode ser interpretado como o sistema reage à medida da luz sobre ele, representando um "back-action". A parte que contém o Hamiltoniano H não possui o termo de interação, portanto fica simplesmente

$$-\frac{i}{\hbar} dt \langle \mathbf{r} | H | \Psi \rangle = -\frac{i}{\hbar} dt \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \phi(\mathbf{r}). \quad (3.62)$$

Combinando as equações (3.52), (3.61) e (3.62), obtemos:

$$\begin{aligned} d\phi(\mathbf{r}) &= -\frac{i}{\hbar} dt \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \phi(\mathbf{r}) \\ &\quad + \left[dW(\mathbf{r}) - \int d^2r' |\phi(\mathbf{r}')|^2 dW(\mathbf{r}') \right] \phi(\mathbf{r}) + C.T. \end{aligned} \quad (3.63)$$

No regime de medição fraca, a “compressão” (squeezing) do estado quântico, que é um efeito não clássico induzido pela medição, é considerado pequena ². Sob esta condição, torna-se válido empregar a aproximação de campo médio para descrever o estado estocástico condicional do sistema.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[\int d^2r \phi(t, \mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \right]^N |0\rangle. \quad (3.64)$$

²A “compressão” quântica é um fenômeno no qual as flutuações quânticas associadas a um par de observáveis conjugados são redistribuídas de modo que a incerteza em uma delas seja reduzida abaixo do limite quântico padrão, enquanto a outra aumenta, preservando o princípio da incerteza de Heisenberg. Essa “compressão” do ruído quântico é obtida por meio de interações não lineares, como a conversão paramétrica em cristais ópticos, e permite medições com precisão superior à dos estados coerentes, sendo fundamental em áreas como metrologia quântica, comunicação e computação baseadas em variáveis contínuas.

A equação (3.64) é a expressão matemática formal dessa aproximação. Ela postula que o estado total $|\Psi\rangle$ do sistema de N átomos pode ser representado como um estado produto, no qual todos os N bôsons do condensado ocupam um único estado quântico. Este estado é descrito pela mesma função de onda de uma partícula única $\phi(\mathbf{r})$. A utilização desta aproximação é o passo fundamental que permite a transição de uma descrição complexa de N corpos (como a equação (3.37)) para uma EGP estocástica, que governa a dinâmica desta única função de onda $\phi(t, \mathbf{r})$.

A evolução de $|\Psi\rangle$ dada pela equação (3.64) é traduzida em uma dinâmica para a função de onda coletiva $\phi(\mathbf{r}, t)$. Substituindo essa forma na equação estocástica e aplicando a regra de Itô, obtém-se uma equação diferencial para $\phi(\mathbf{r}, t)$ que inclui tanto o termo determinístico do Hamiltoniano (associado ao potencial $U(\mathbf{r})$ e à interação g) quanto as correções flutuantes devidas à medição contínua, representadas pelos incrementos estocásticos $dW(\mathbf{r})$. O resultado final é a EGP estocástica:

$$\begin{aligned} d\phi(\mathbf{r}) = & -\frac{i}{\hbar} dt \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1)g|\phi(\mathbf{r})|^2 \right] \phi(\mathbf{r}) \\ & + \left[dW(\mathbf{r}) - \int d^2 r' |\phi(\mathbf{r}')|^2 dW(\mathbf{r}') \right] \phi(\mathbf{r}) + \text{C.T.}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

que descreve a evolução estocástica do condensado sob medições fracas, incorporando tanto a dinâmica unitária quanto o ruído quântico associado à observação.

O resultado mais notável desta derivação é que os termos estocásticos (o ruído e o contratermo) na EGP para um condensado de N átomos são idênticos aos derivados para o caso de uma única partícula (3.63). O artigo de Dalvit [34] justifica isso explicando que, embora a reação da medição no estado total de N corpos seja mais forte, seu efeito é dividido entre todas as N partículas. Isso resulta no mesmo efeito líquido sobre a função de onda de campo médio $\phi(\mathbf{r})$ de cada átomo, como ocorreria em um sistema com um único átomo .

Assim, a Equação (3.65) fornece um modelo teórico poderoso que descreve uma única trajetória quântica, permitindo simular a evolução da função de onda do condensado sob a influência tanto de sua dinâmica interna quanto do ruído aleatório introduzido por um processo de medição contínua fraca .

Capítulo 4

Condensado Bose-Einstein II

No capítulo anterior, discutimos como a medição em um CBE pode gerar uma EGP estocástica considerando a luz nosso "ambiente". Ao fazer isso, desenvolvemos uma equação mestra que é originada da função de onda descrita pela equação (3.37). Ainda assim, em um CBE realista, existem vários outros processos que podem alterar sua dinâmica, como a recombinação de três corpos devido à nuvem térmica que interage com o CBE [38].

Neste capítulo, vamos mostrar alguns outros métodos que podem nos levar a descrever tais perdas, partindo da ideia de sistemas quânticos abertos.

4.1 Equação Mestra com Ganho e Perda Balanceados

Uma possível abordagem para a descrição de CBEs como sistemas quânticos abertos foi proposta por Dast [39]. Nesse trabalho, os autores introduzem uma equação mestra em forma de Lindblad que descreve um condensado confinado em um sistema de dois sítios (ou *Bose-Hubbard dimer*) sujeito a processos de ganho e perda de partículas balanceados. Essa formulação é particularmente relevante, pois permite o surgimento natural de uma dinâmica efetivamente não-Hermitiana, cuja correspondência no limite de campo médio é a EGP \mathcal{PT} -simétrica.

Um sistema é \mathcal{PT} -simétrico quando o Hamiltoniano do sistema comuta com o operador \mathcal{PT} , sendo \hat{P} o operador de inversão espacial, ou seja, que leva $\hat{P}x\hat{P}^{-1} = -x$ e \hat{T} é o operador de inversão temporal, levando a $\hat{T}p\hat{T}^{-1} = -p$. Assim, se $[H, \hat{P}\hat{T}] = 0$,

dizemos que o sistema é \mathcal{PT} -simétrico.

4.1.1 Hamiltoniano de Bose-Hubbard

O sistema considerado é descrito pelo Hamiltoniano de Bose-Hubbard, que descreve o sistema preso em uma rede óptica de dois sítios, que pode ser obtido ao considerar a EGP que, ao expandir a equação em funções de Wannier, gera o Hamiltoniano abaixo [40]:

$$H = -(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) + \frac{U}{2} (a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 + a_2^\dagger a_2^\dagger a_2 a_2), \quad (4.1)$$

em que a_j e a_j^\dagger são os operadores de aniquilação e criação bosônicos atuando no sítio $j = 1, 2$, e U representa a intensidade da interação de duas partículas em um mesmo sítio. O primeiro termo da equação (4.1) descreve o tunelamento coerente de átomos entre os dois poços, enquanto o segundo termo corresponde à interação de contato local.

Vamos deduzir o Hamiltoniano partindo dos princípios comentados. O funcional de energia associado à EGP (3.13) é:

$$E[\psi] = \int d^3r \left[\psi^*(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) + \frac{g}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right]. \quad (4.2)$$

Consideremos que o potencial externo $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ forma uma rede óptica com apenas dois sítios relevantes. Podemos expandir o campo em termos de funções localizadas (*Wannier*) centradas em cada sítio:

$$\psi(\mathbf{r}, t) \approx w_1(\mathbf{r})a_1(t) + w_2(\mathbf{r})a_2(t), \quad (4.3)$$

em que $w_i(\mathbf{r})$ são funções ortonormais, ou seja, $\int d^3r w_i^*(\mathbf{r})w_j(\mathbf{r}) = \delta_{ij}$.

Substituindo a expansão na parte cinética e potencial de $E[\psi]$, obtemos:

$$E_{\text{hop}} = \sum_{i,j} a_i^* a_j \int d^3r w_i^*(\mathbf{r}) h_0 w_j(\mathbf{r}), \quad (4.4)$$

em que $h_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. E_{hop} é a energia associada ao tunelamento entre os sítios.

Mantendo apenas os termos locais e os de vizinhança mais próximos, definimos:

$$J = - \int d^3r w_1^*(\mathbf{r}) h_0 w_2(\mathbf{r}), \quad (4.5)$$

em que $J > 0$ é o coeficiente de tunelamento (hopping), indicando a chance do bóson saltar de um sítio para outro. Assim, o termo discreto correspondente é:

$$E_{\text{hop}} = -J(a_1^* a_2 + a_2^* a_1). \quad (4.6)$$

A contribuição da interação de contato é dada por:

$$E_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int d^3r |\psi(\mathbf{r})|^4. \quad (4.7)$$

Substituindo a expansão e desprezando os termos de interação entre sítios distintos, obtemos:

$$E_{\text{int}} = \frac{U}{2} (|a_1|^4 + |a_2|^4), \quad (4.8)$$

com

$$U = g \int d^3r |w(\mathbf{r})|^4. \quad (4.9)$$

Combinando os termos de *hopping* e interação, o funcional de energia total no regime discreto é:

$$E[a_1, a_2] = -J(a_1^* a_2 + a_2^* a_1) + \frac{U}{2} (|a_1|^4 + |a_2|^4). \quad (4.10)$$

Ao promover as amplitudes clássicas a operadores bosônicos, $a_i \rightarrow \hat{a}_i$ e $a_i^* \rightarrow \hat{a}_i^\dagger$, com $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$, obtemos o Hamiltoniano quantizado:

$$\hat{H} = -J(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) + \frac{U}{2} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2). \quad (4.11)$$

Definindo unidades de energia onde $J = 1$, chegamos ao Hamiltoniano na forma mais comum para dois sítios:

$$H = -(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) + \frac{U}{2} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2).$$

(4.12)

A derivação mostra que o modelo de Bose–Hubbard emerge naturalmente como a quantização discreta da EGP quando se considera um potencial de rede profunda. No caso de dois sítios, o Hamiltoniano acima descreve a competição entre a delocalização quântica (hopping) e a interação local entre partículas (repulsão U), sendo a base para estudar efeitos como a transição de Mott e o regime de Josephson [41, 42].

4.1.2 Operadores de ganho e perda

Com o Hamiltoniano bem definido, a abertura do sistema é modelada pela inclusão de dois superoperadores de Lindblad, um responsável pela perda de partículas no sítio 1 e outro pelo ganho no sítio 2. A dinâmica total do sistema é então governada pela equação mestra

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[H, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_{\text{perda}}\hat{\rho} + \mathcal{L}_{\text{ganho}}\hat{\rho}. \quad (4.13)$$

Se supormos que o sistema possui saltos, descritos pelo operador \hat{L} , então podemos escrever os termos $\mathcal{L}\hat{\rho}$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}(\hat{L})\hat{\rho} = -\frac{1}{2} (\hat{L}^\dagger \hat{L}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{L}^\dagger \hat{L} - 2\hat{L}\hat{\rho}\hat{L}^\dagger). \quad (4.14)$$

A justificativa dessa forma de escrever o operador é obtida levando em conta as probabilidades de ocorrer um salto no sistema ou de não ocorrer em um tempo infinitesimal dt . Ao fazer isso, podemos chegar a uma equação mestra para cada caso (caso em que há salto e que não há) que, ao juntar as duas equações, nos fornece uma equação mestra do tipo

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \hat{L}\hat{\rho}\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2} (\hat{L}^\dagger \hat{L}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{L}^\dagger \hat{L}). \quad (4.15)$$

Assim, podemos escrever os operadores $\mathcal{L}_{\text{perda}}$ e $\mathcal{L}_{\text{ganho}}$ partindo da equação (4.15). Para isso, consideramos $L_{\text{perda}} = \sqrt{\gamma_{\text{perda}}} a_1$, $L_{\text{perda}}^\dagger = \sqrt{\gamma_{\text{perda}}} a_1^\dagger$, $L_{\text{ganho}} = \sqrt{\gamma_{\text{ganho}}} a_2$ e $L_{\text{ganho}}^\dagger = \sqrt{\gamma_{\text{ganho}}} a_2^\dagger$, em que γ_{perda} e γ_{ganho} representam as taxas de perdas e ganhos, respectivamente. Desse modo, obtemos:

$$\mathcal{L}_{\text{perda}}\rho = -\frac{\gamma_{\text{perda}}}{2} (a_1^\dagger a_1 \rho + \rho a_1^\dagger a_1 - 2a_1 \rho a_1^\dagger), \quad (4.16)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ganho}}\rho = -\frac{\gamma_{\text{ganho}}}{2} (a_2 a_2^\dagger \rho + \rho a_2 a_2^\dagger - 2a_2^\dagger \rho a_2). \quad (4.17)$$

Esses operadores descrevem, respectivamente, a remoção e a injeção de átomos do condensado de forma incoerente, simulando o acoplamento com um ambiente externo. A escolha das taxas γ_{perda} e γ_{ganho} determina o regime dinâmico do sistema. No caso particular em que as taxas são ajustadas de modo que $\gamma_{\text{ganho}}/\gamma_{\text{perda}} = N_0/(N_0 + 2)$, onde N_0 é o número médio inicial de partículas, o sistema exibe ganho e perda exatamente平衡ados, resultando em uma evolução estacionária média do número total de partículas.

4.1.3 Equação de Gross-Pitaevskii \mathcal{PT} -simétrica

A análise do limite de campo médio da equação (4.13) é obtida pela substituição do operador de densidade ρ pelo estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ e pela aproximação dos operadores bosônicos pelos seus valores esperados, $a_j \rightarrow \sqrt{N_0}c_j$, com $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Substituindo essas relações na equação mestra (4.15), obtém-se o sistema de equações diferenciais acopladas

$$i\dot{c}_1 = -c_2 + g|c_1|^2c_1 - i\frac{\gamma}{2}c_1, \quad (4.18a)$$

$$i\dot{c}_2 = -c_1 + g|c_2|^2c_2 + i\frac{\gamma}{2}c_2, \quad (4.18b)$$

em que $g = (N_0 - 1)U$ é a intensidade efetiva da interação e γ representa a taxa comum de ganho e perda. As Eqs. (4.18a)–(4.18b) correspondem à EGP \mathcal{PT} -simétrica discreta, cuja dinâmica reflete o balanço entre coerência quântica e dissipação.

4.1.4 Simetria \mathcal{PT} na equação de Gross–Pitaevskii com ganho e perda balanceados

As equações (4.18a)–(4.18b) podem ser escritas na forma matricial

$$i\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = H_{\text{eff}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

com o Hamiltoniano efetivo não Hermitiano dado por

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} g|c_1|^2 - i\frac{\gamma}{2} & -1 \\ -1 & g|c_2|^2 + i\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

O operador de paridade \hat{P} , no espaço de dois modos, troca os sítios do sistema, sendo representado por

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

enquanto o operador de reversão temporal \hat{T} realiza a conjugação complexa e muda o sinal de i :

$$\hat{T} : \quad i \rightarrow -i, \quad c_j \rightarrow c_j^*. \quad (4.22)$$

Aplicando a operação \mathcal{PT} sobre o Hamiltoniano efetivo, obtemos

$$\hat{P}\hat{T}H_{\text{eff}}(\hat{P}\hat{T})^{-1} = \begin{pmatrix} g|c_2|^2 - i\frac{\gamma}{2} & -1 \\ -1 & g|c_1|^2 + i\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Comparando com H_{eff} , nota-se que a condição

$$|c_1|^2 = |c_2|^2 \quad (4.24)$$

garante que

$$[H_{\text{eff}}, \hat{P}\hat{T}] = 0. \quad (4.25)$$

Assim, o sistema é \mathcal{PT} -simétrico quando as probabilidades de ocupação em ambos os sítios são iguais, ou seja, quando o ganho e a perda se equilibram. A condição de balanceamento é obtida a partir da equação mestra microscópica e é dada por

$$\frac{\gamma_{\text{gain}}}{\gamma_{\text{loss}}} = \frac{N_0}{N_0 + 2}, \quad (4.26)$$

em que N_0 é o número total de partículas. No limite $N_0 \rightarrow \infty$, tem-se $\gamma_{\text{gain}} \approx \gamma_{\text{loss}} \equiv \gamma$, levando exatamente às equações (4.18a)–(4.18b).

Dessa forma, o Hamiltoniano efetivo do sistema com ganho e perda balanceados satisfaz a condição de comutação com o operador \mathcal{PT} , caracterizando um CBE com dinâmica governada por uma EGP \mathcal{PT} -simétrica.

De forma notável, Dast *et al.* demonstram que, mesmo para números finitos de partículas, a dinâmica quântica obtida da equação mestra (4.13) concorda de forma excelente com o limite de campo médio dado pelas Eqs. (4.18a)–(4.18b). Essa correspondência evidencia que o formalismo de Lindblad com ganho e perda balanceados é uma descrição microscópica consistente para CBEs efetivamente abertos, e fornece uma ponte conceitual entre a mecânica quântica de muitos corpos e as equações não-Hermitianas de campo médio que emergem na descrição macroscópica do sistema.

4.2 Formulação Microscópica e Equação Mestra Conservativa

Uma formulação fundamental para descrever CBEs como sistemas abertos, porém com conservação global do número de partículas, foi desenvolvida por Schelle [43]. Nessa abordagem, os autores derivam uma equação mestra de Lindblad a partir de primeiros princípios, considerando a separação entre o condensado e o não-condensado como subsistemas de um mesmo gás diluído. Essa descrição preserva o número total de átomos $N = N_0 + N_{\perp}$, tratando o condensado como o sistema principal e o conjunto dos estados excitados (não-condensado) como o reservatório térmico interno.

O ponto de partida é a decomposição do campo bosônico total $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ em duas contribuições ortogonais:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) \hat{a}_0 + \sum_{k \neq 0} \Psi_k(\mathbf{r}) \hat{a}_k \equiv \hat{\Psi}_0(\mathbf{r}) + \hat{\Psi}_{\perp}(\mathbf{r}), \quad (4.27)$$

em que $\Psi_0(\mathbf{r})$ é a função de onda do condensado, obtida como solução da EGP e os operadores \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger descrevem os modos de excitação ortogonais ao condensado. Essa separação permite reescrever o Hamiltoniano de muitos corpos na forma

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\perp} + \hat{V}_{0\perp}, \quad (4.28)$$

em que \hat{H}_0 representa o Hamiltoniano do condensado, \hat{H}_{\perp} o do não-condensado, e $\hat{V}_{0\perp}$ os termos de interação entre ambos. Explicitamente,

$$\hat{H}_0 = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_0^\dagger \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}} \right) \hat{\Psi}_0 + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_0^\dagger \hat{\Psi}_0^\dagger \hat{\Psi}_0 \hat{\Psi}_0, \quad (4.29)$$

$$\hat{H}_{\perp} = \sum_{k \neq 0} \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \quad (4.30)$$

enquanto o termo de interação $\hat{V}_{0\perp}$ contém todos os processos de colisão que transferem partículas entre o condensado e o não-condensado. Esses processos podem ser classificados em três tipos: (i) eventos de *ganho/perda de uma partícula*, (ii) eventos de criação/aniquilação de pares e (iii) espalhamentos elásticos que preservam o número de partículas em cada subsistema, conforme é comentado por Schell [43].

Para descrever a dinâmica temporal, considera-se o estado total $\hat{\sigma}^{(N)}(t)$ definido no espaço de Fock $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_{\perp}$, que descreve a superposição de estados com diferentes números de partículas, cuja evolução obedece à equação de von Neumann:

$$\frac{d\hat{\sigma}^{(N)}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\sigma}^{(N)}(t)]. \quad (4.31)$$

Tomando a média sobre os graus de liberdade do não-condensado, obtém-se a matriz densidade reduzida do condensado,

$$\hat{\rho}_0^{(N)}(t) = \text{Tr}_{\perp}\{\hat{\sigma}^{(N)}(t)\}. \quad (4.32)$$

Sob as hipóteses de (i) rápida termalização do não-condensado e (ii) separação de escalas temporais entre a dinâmica de condensação e as colisões térmicas ($\tau_{\text{col}} \ll \tau_0$),

é possível aplicar a aproximação de Born-Markov. O resultado é uma equação mestra markoviana para a matriz densidade reduzida do condensado:

$$\frac{d\hat{\rho}_0^{(N)}(t)}{dt} = \sum_{N_0=0}^N \left[\xi_N^+(N_0, T) \mathcal{D}[\hat{S}_+(N_0)] \hat{\rho}_0^{(N)}(t) + \xi_N^-(N_0, T) \mathcal{D}[\hat{S}_-(N_0)] \hat{\rho}_0^{(N)}(t) \right], \quad (4.33)$$

em que o dissipador de Lindblad é definido por

$$\mathcal{D}[\hat{A}]\hat{\rho} = \hat{A}\hat{\rho}\hat{A}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{A}^\dagger\hat{A}, \hat{\rho}\}, \quad (4.34)$$

e os operadores de salto $\hat{S}_\pm(N_0)$ representam, respectivamente, a adição ou remoção de um átomo do condensado:

$$\hat{S}_+(N_0) = |N_0 + 1\rangle\langle N_0|, \quad \hat{S}_-(N_0) = |N_0 - 1\rangle\langle N_0|. \quad (4.35)$$

Ao projetar a Eq. (4.33) nos estados de número $|N_0\rangle$, obtém-se uma equação de taxas para a distribuição de partículas no condensado $p_N(N_0, t) = \langle N_0 | \hat{\rho}_0^{(N)}(t) | N_0 \rangle$:

$$\frac{\partial p_N(N_0, t)}{\partial t} = -[\xi_N^+(N_0, T) + \xi_N^-(N_0, T)] p_N(N_0, t) + \xi_N^+(N_0-1, T) p_N(N_0-1, t) + \xi_N^-(N_0+1, T) p_N(N_0+1, t), \quad (4.36)$$

a qual descreve a transferência de partículas entre o condensado e o não-condensado. As taxas ξ_N^\pm dependem das correlações do reservatório térmico e incorporam o equilíbrio dinâmico entre processos de alimentação e depletamento do condensado.

O resultado notável dessa formulação é que, sob condições de diluição e de interações fracas, o estado estacionário da Eq. (4.36) converge para uma distribuição de Gibbs-Boltzmann de um gás ideal de bósons indistinguíveis. Assim, o formalismo de Schelle *et al.* estabelece uma ponte entre a teoria cinética da condensação e o formalismo de equações mestras quânticas, preservando o caráter conservativo e o número total de partículas do sistema. Essa abordagem fornece, portanto, uma base microscópica sólida para o estudo de sistemas abertos conservativos, a partir da qual podem ser introduzidas extensões dissipativas.

4.3 Discussão e Conexão com o Modelo Desenvolvido

As formulações apresentadas nas Seções anteriores descrevem duas perspectivas complementares sobre a dinâmica de CBEs tratados como sistemas quânticos abertos.

De um lado, a abordagem de Schelle [43] fornece uma descrição microscópica e número-conservativa da evolução do condensado, na qual o reservatório térmico é constituído pelas próprias excitações do gás. De outro, o modelo de Dast *et al.* (2014) [39] introduz um mecanismo efetivo de troca de partículas com o ambiente, representando um caso genuinamente dissipativo, mas ainda assim capaz de preservar coerência quântica sob certas condições de simetria.

A estrutura geral das equações mestras em ambos os casos pode ser escrita de forma unificada pela equação (2.24) onde os operadores de Lindblad \hat{L}_j descrevem os canais de dissipaçāo ou de acoplamento com o ambiente. No formalismo conservativo de Schelle, esses operadores correspondem a processos internos de troca de partículas entre o condensado e o não-condensado,

$$\hat{L}_+ = \sqrt{\xi_N^+(T)} \hat{a}_0^\dagger, \quad \hat{L}_- = \sqrt{\xi_N^-(T)} \hat{a}_0, \quad (4.37)$$

de modo que o número total de partículas $N = N_0 + N_\perp$ é preservado. Já no modelo de Dast, os operadores de Lindblad assumem a forma

$$\hat{L}_{\text{ganho}} = \sqrt{\gamma_{\text{ganho}}} a_2^\dagger, \quad \hat{L}_{\text{perda}} = \sqrt{\gamma_{\text{perda}}} a_1, \quad (4.38)$$

introduzindo explicitamente um fluxo de partículas entre o sistema e o meio externo. O equilíbrio dinâmico obtido quando $\gamma_{\text{ganho}} = \gamma_{\text{perda}}$ é análogo ao regime estacionário encontrado no caso conservativo, embora a conservação global de partículas seja substituída por um balanço entre ganho e perda.

Essa correspondência estrutural permite interpretar a equação mestra com ganho e perda balanceados como uma extensão dissipativa do formalismo número-conservativo. Em ambos os casos, o sistema evolui segundo um operador de Lindblad cuja forma garante positividade e traço unitário da matriz densidade, mas com significados físicos distintos: no modelo conservativo, os operadores de salto descrevem trocas internas reversíveis, enquanto no modelo dissipativo eles representam injeção e extração irreversíveis de partículas.

Do ponto de vista físico, essa comparação revela que a introdução de termos não-Hermitianos na EGP não é arbitrária, mas sim uma consequência natural do acoplamento do condensado com um reservatório, seja ele interno ou externo. A simetria \mathcal{PT} observada no modelo de Dast pode, portanto, ser interpretada como a manifestação macroscópica

de um balanço microscópico entre os processos de alimentação e de depleção descritos por Schelle.

Conclui-se, assim, que os dois modelos representam limites complementares de um mesmo formalismo de sistemas quânticos abertos. O modelo conservativo de Schelle fornece a base microscópica e estatística da equação mestra, enquanto o modelo dissipativo de Dast introduz uma generalização fenomenológica capaz de capturar regimes efetivos de ganho e perda. Essa conexão conceitual estabelece um quadro unificado que sustenta o desenvolvimento de equações mestras mais gerais, que podem resultar em EGPs estocásticas como visto no capítulo 3.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho, foi analizado o CBE sob a ótica dos sistemas quânticos abertos, enfatizando como o acoplamento com o ambiente altera a dinâmica do sistema. A partir da EGP tradicional, estendeu-se o tratamento para incluir efeitos dissipativos e estocásticos, permitindo uma descrição mais realista da evolução de condensados em condições experimentais.

A formulação de uma equação mestra do tipo Lindblad mostrou-se fundamental para compreender a influência de perdas, ganhos e decoerência. Ao introduzir operadores de Lindblad associados a processos de dissipação e alimentação, foi possível obter expressões que conectam a dinâmica microscópica com as equações efetivas de campo médio. Essa análise levou naturalmente à EGP estocástica, na qual o ruído quântico e as flutuações induzidas pela medição contínua desempenham papel essencial na evolução do condensado.

No segundo bloco do trabalho, discutiram-se duas abordagens complementares. O modelo de Dast, descrito na sessão 4.1, introduz uma formulação com ganho e perda balanceados, na qual o sistema pode manter coerência quântica apesar da dissipação, manifestando simetria PT. Por outro lado, o modelo de Schelle, descrito na sessão 4.2 fornece uma base microscópica conservativa, em que o condensado e o não-condensado trocam partículas sem violar a conservação global do número de átomos. A comparação entre esses modelos propõe que ambos podem ser vistos como limites de um mesmo formalismo de sistemas abertos: o primeiro, fenomenológico e dissipativo; o segundo, conservativo e derivado de primeiros princípios. Essa equivalência estrutural sustenta a ideia de um quadro unificado para descrever CBEs abertos, no qual diferentes regimes

emergem a partir de condições específicas de acoplamento com o ambiente.

Como resultado, este estudo propõe que os termos não-Hermitianos introduzidos em EGPs efetivas não são construções artificiais, mas expressões macroscópicas de processos microscópicos de troca e depleção. A simetria PT, nesse contexto, surge como a manifestação do equilíbrio entre tais processos, conectando a teoria de sistemas abertos à dinâmica coerente observada experimentalmente em condensados dissipativos.

Em perspectiva futura, o formalismo aqui apresentado pode ser estendido à análise de CBEs em redes ópticas, condensados com interações de longo alcance e regimes fortemente correlacionados, em que a dissipação não apenas degrada a coerência, mas também pode ser utilizada como mecanismo de controle quântico. Esses desdobramentos reforçam o papel dos sistemas quânticos abertos como ferramenta teórica essencial para compreender e manipular estados quânticos macroscópicos.

No contexto experimental recente, o trabalho de Moreno-Armijos [44] observou estágios distintos na relaxação de um CBE turbulento aprisionado, revelando uma sequência de cascatas diretas e inversas de partículas e evidências de escalas universais de relaxação. Tais resultados indicam que mesmo sistemas fechados exibem comportamentos análogos aos descritos por equações mestras dissipativas, com regiões de quase-estacionariedade, pretermalização e dinâmicas auto-similares regidas por expoentes universais, conforme descritas em alguns trabalhos [45–47]. Além disso, as cascatas inversas de energia observadas no trabalho podem ser análogas ao efeito Mpemba Quântico [48], mostrando que o sistema pode voltar ao equilíbrio (fase condensado) mais rápido com maiores excitações do que com menores excitações. Isso tudo sugere que uma formulação quântica aberta adequada pode capturar, de maneira unificada, tanto o comportamento de sistemas abertos quanto o de sistemas isolados que exibem relaxação interna via acoplamento entre modos.

A partir dessa perspectiva, o desenvolvimento de uma equação mestra efetiva capaz de prever os estágios observados experimentalmente torna-se um objetivo central. Tal equação deve incorporar termos não-lineares e dependentes do tempo que representem os fluxos de partículas entre modos de baixa e alta energia, recuperando naturalmente as escalas universais de relaxação associadas às cascatas de energia e de partículas. A formalização desses processos dentro do formalismo de Lindblad — possivelmente com

operadores locais que dependam do momento ou da densidade — pode permitir a descrição de fenômenos como a transição entre regimes de turbulência quântica e condensação inversa, conforme observado no trabalho experimental.

Portanto, este trabalho reforça que o caminho para compreender completamente a dinâmica de CBEs fora do equilíbrio passa pela busca de uma equação mestra generalizada, que unifique o formalismo estocástico da EGP com a teoria de turbulência de ondas (WTT) [49] e o conceito de pontos fixos não-térmicos (NTFPs) [50].

Em conclusão, o presente trabalho apresentou a relação entre o formalismo de sistemas quânticos abertos e a dinâmica de condensados. Também abriu caminho para uma futura formulação mestra de caráter unificador para descrever a dinâmica universal de CBEs fora do equilíbrio. Tal formulação representaria um avanço significativo na compreensão dos mecanismos de relaxação e termalização em sistemas quânticos de muitos corpos, contribuindo para o desenvolvimento de uma teoria completa da dinâmica fora do equilíbrio em CBEs.

Apêndice A

Decomposição Espectral

Seja A um operador normal em um espaço vetorial V . Queremos mostrar que A é diagonalizável em alguma base ortonormal.

Fazemos a prova por indução na dimensão $n = \dim(V)$. Para $n = 1$, o resultado é imediato.

Suponha que o teorema valha para dimensões menores que n . Seja λ um autovalor de A , e denote por Π_λ o projetor sobre o autoespaço correspondente, e por $\Pi_\perp = I - \Pi_\lambda$ o projetor sobre o complementar ortogonal.

Podemos escrever:

$$A = (\Pi_\lambda + \Pi_\perp)A(\Pi_\lambda + \Pi_\perp) = \Pi_\lambda A \Pi_\lambda + \Pi_\lambda A \Pi_\perp + \Pi_\perp A \Pi_\lambda + \Pi_\perp A \Pi_\perp. \quad (\text{A.1})$$

Como A preserva o subespaço associado a λ , temos $\Pi_\perp A \Pi_\lambda = 0$. Além disso, como A é normal, também vale $\Pi_\lambda A \Pi_\perp = 0$. Assim,

$$A = \Pi_\lambda A \Pi_\lambda + \Pi_\perp A \Pi_\perp. \quad (\text{A.2})$$

Note que o operador reduzido $\Pi_\perp A \Pi_\perp$ atua apenas no subespaço ortogonal $\Pi_\perp(V)$ e continua sendo normal, pois

$$(\Pi_\perp A \Pi_\perp)(\Pi_\perp A^\dagger \Pi_\perp) = \Pi_\perp A A^\dagger \Pi_\perp = \Pi_\perp A^\dagger A \Pi_\perp = (\Pi_\perp A^\dagger \Pi_\perp)(\Pi_\perp A \Pi_\perp). \quad (\text{A.3})$$

Logo, por hipótese de indução, esse operador é diagonalizável em alguma base ortonormal de $\Pi_\perp(V)$.

Como $\Pi_\lambda A \Pi_\lambda = \lambda \Pi_\lambda$ já é diagonal no subespaço $\Pi_\lambda(V)$, concluímos que A é diagonalizável em uma base ortonormal do espaço total V .

Podemos escrever o operador como

$$A = \sum_i \lambda_i \Pi_i, \quad (\text{A.4})$$

em que λ_i são os autovalores e Π_i os projetores sobre os autoespaços ortogonais correspondentes. Esses projetores satisfazem:

$$\Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_i, \quad \text{e} \quad \sum_i \Pi_i = I. \quad (\text{A.5})$$

Traço Parcial

Em sistemas quânticos compostos, frequentemente é de interesse descrever apenas uma parte do sistema total, ignorando os graus de liberdade de um subsistema que não é diretamente acessível. Essa operação é formalmente expressa através do *traço parcial*, uma ferramenta fundamental na teoria de sistemas quânticos abertos.

Considere um sistema quântico composto $S + E$, onde S representa o sistema de interesse (“sistema”) e E o ambiente. O espaço de Hilbert total é dado pelo produto tensorial

$$\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E. \quad (\text{A.6})$$

Se o estado total do sistema for descrito pela matriz densidade $\hat{\rho}_{SE}$, o estado reduzido do sistema S é obtido aplicando o traço parcial sobre os graus de liberdade do ambiente:

$$\hat{\rho}_S = \text{Tr}_E(\hat{\rho}_{SE}). \quad (\text{A.7})$$

Analogamente, o estado reduzido do ambiente é dado por

$$\hat{\rho}_E = \text{Tr}_S(\hat{\rho}_{SE}). \quad (\text{A.8})$$

O traço parcial corresponde a descartar a informação sobre o subsistema não observado. Por exemplo, se um observável \hat{A}_S atua apenas sobre o sistema S , a expectativa

desse observável é obtida como

$$\langle \hat{A}_S \rangle = \text{Tr}_{SE} [(\hat{A}_S \otimes \mathbb{I}_E) \hat{\rho}_{SE}] = \text{Tr}_S [\hat{A}_S \text{Tr}_E(\hat{\rho}_{SE})] = \text{Tr}_S (\hat{A}_S \hat{\rho}_S), \quad (\text{A.9})$$

mostrando que o estado reduzido $\hat{\rho}_S$ contém toda a informação necessária para prever as médias dos observáveis que atuam apenas sobre S .

Se $\{|e_i\rangle\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}_E , o traço parcial sobre o ambiente é dado explicitamente por

$$\text{Tr}_E(\hat{\rho}_{SE}) = \sum_i \langle e_i | \hat{\rho}_{SE} | e_i \rangle. \quad (\text{A.10})$$

De modo análogo, o traço parcial sobre o sistema S é

$$\text{Tr}_S(\hat{\rho}_{SE}) = \sum_j \langle s_j | \hat{\rho}_{SE} | s_j \rangle, \quad (\text{A.11})$$

em que $\{|s_j\rangle\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}_S .

Exemplificando, considere um estado puro bipartido

$$|\Psi\rangle_{SE} = \sum_{i,j} c_{ij} |s_i\rangle \otimes |e_j\rangle, \quad (\text{A.12})$$

com matriz densidade total

$$\hat{\rho}_{SE} = |\Psi\rangle_{SE} \langle \Psi|_{SE} = \sum_{i,j,k,l} c_{ij} c_{kl}^* |s_i\rangle \langle s_k| \otimes |e_j\rangle \langle e_l|. \quad (\text{A.13})$$

O traço parcial sobre o ambiente fornece o estado reduzido do sistema:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S &= \text{Tr}_E(\hat{\rho}_{SE}) = \sum_m \langle e_m | \hat{\rho}_{SE} | e_m \rangle \\ &= \sum_{i,k} \left(\sum_j c_{ij} c_{kj}^* \right) |s_i\rangle \langle s_k|. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Assim, mesmo que o estado total $\hat{\rho}_{SE}$ seja puro, o estado reduzido $\hat{\rho}_S$ pode ser misto, refletindo o emaranhamento entre S e E . Essa propriedade é a base conceitual da perda de coerência e da emergência da irreversibilidade em sistemas quânticos abertos.

O operador de traço parcial satisfaz propriedades úteis, dentre as quais destacam-se:

1. Linearidade:

$$\text{Tr}_E(a\hat{A} + b\hat{B}) = a \text{Tr}_E(\hat{A}) + b \text{Tr}_E(\hat{B}). \quad (\text{A.15})$$

2. Compatibilidade com o traço total:

$$\text{Tr}_{SE}(\hat{A}) = \text{Tr}_S(\text{Tr}_E(\hat{A})) = \text{Tr}_E(\text{Tr}_S(\hat{A})). \quad (\text{A.16})$$

3. Invariância cíclica parcial: para operadores \hat{A}_S e \hat{B}_{SE} ,

$$\text{Tr}_E[(\hat{A}_S \otimes \mathbb{I}_E)\hat{B}_{SE}] = \hat{A}_S \text{Tr}_E(\hat{B}_{SE}). \quad (\text{A.17})$$

O traço parcial é o elo entre a descrição microscópica e a dinâmica efetiva do sistema de interesse. Ele permite derivar equações mestras e modelos de dissipação ao eliminar explicitamente as variáveis do ambiente, produzindo uma dinâmica não unitária para o sistema S . Assim, a operação de traço parcial é o passo fundamental na passagem de uma descrição unitária global para uma descrição efetiva aberta, característica essencial de sistemas quânticos em contato com um reservatório.

Decomposição de Kraus

A decomposição de Kraus é uma forma conveniente de representar qualquer mapa linear completamente positivo (CP) atuando em operadores densidade. Seja \mathcal{E} um canal quântico, isto é, um mapa linear completamente positivo e preservador de traço:

$$\mathcal{E} : \rho \mapsto \mathcal{E}(\rho). \quad (\text{A.18})$$

Queremos mostrar que ele pode ser escrito como

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger, \quad (\text{A.19})$$

em que K_i são operadores que satisfazem $\sum_i K_i^\dagger K_i = I$.

Começamos considerando a *representação de Stinespring*: qualquer mapa completamente positivo pode ser visto como uma evolução unitária em um espaço ampliado, seguida de um traço parcial. Isto é, existe um operador unitário U agindo sobre o sistema e um ambiente auxiliar E , e um estado inicial $|0\rangle_E$ do ambiente, tais que

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_E[U(\rho \otimes |0\rangle\langle 0|_E)U^\dagger]. \quad (\text{A.20})$$

Escolhendo uma base ortonormal $\{|i\rangle_E\}$ para o espaço do ambiente, podemos escrever o traço parcial explicitamente:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i \langle i|_E U (\rho \otimes |0\rangle\langle 0|_E) U^\dagger |i\rangle_E. \quad (\text{A.21})$$

Definimos então os operadores de Kraus como

$$K_i = \langle i|_E U |0\rangle_E. \quad (\text{A.22})$$

Substituindo, obtemos diretamente:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger, \quad (\text{A.23})$$

que é a forma desejada.

Para que \mathcal{E} preserve o traço, precisamos ter:

$$\text{Tr}[\mathcal{E}(\rho)] = \text{Tr}[\rho]. \quad (\text{A.24})$$

Usando a forma de Kraus:

$$\text{Tr}\left[\sum_i K_i \rho K_i^\dagger\right] = \text{Tr}\left[\rho \sum_i K_i^\dagger K_i\right]. \quad (\text{A.25})$$

Logo, a condição é satisfeita se, e somente se,

$$\sum_i K_i^\dagger K_i = I, \quad (\text{A.26})$$

Em resumo, qualquer canal quântico completamente positivo e preservador de traço pode ser expresso como uma soma de operadores de Kraus:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger, \quad \text{com } \sum_i K_i^\dagger K_i = I,$$

Essa decomposição não é única, diferentes conjuntos de operadores K_i podem representar o mesmo mapa \mathcal{E} . Em geral, os operadores de Kraus podem depender do tempo, afinal se ρ depender do tempo, então os operadores K_i vão ter que mudar ao longo do tempo também.

Apêndice B

Cálculo de Itô

O cálculo de Itô é uma extensão do cálculo diferencial tradicional, desenvolvida para lidar com processos estocásticos, isto é, variáveis que evoluem de forma aleatória no tempo. Em particular, ele fornece as regras para manipular diferenciais de processos que dependem de um ruído branco, como o movimento Browniano W_t .

Considere um processo estocástico X_t que satisfaz uma equação diferencial estocástica (EDE) da forma

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t, \quad (\text{B.1})$$

em que $a(t, X_t)$ representa o *drift* (ou termo determinístico), e $b(t, X_t)$ representa a intensidade do ruído multiplicando o incremento estocástico dW_t . O processo W_t é o movimento Browniano (ou processo de Wiener), que satisfaz as seguintes propriedades fundamentais:

$$\langle dW_t \rangle = 0, \quad (dW_t)^2 = dt, \quad dW_t dt = 0, \quad (dt)^2 = 0. \quad (\text{B.2})$$

Essas relações indicam que os incrementos de Wiener têm variância proporcional a dt e não são diferenciáveis no sentido usual.

Fórmula de Itô para Produtos

Sejam X_t e Y_t dois processos estocásticos que obedecem às EDEs

$$dX_t = a_X dt + b_X dW_t, \quad (\text{B.3})$$

$$dY_t = a_Y dt + b_Y dW_t. \quad (\text{B.4})$$

Desejamos determinar o incremento de seu produto $Z_t = X_t Y_t$.

No cálculo determinístico, a regra do produto é simplesmente

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t. \quad (\text{B.5})$$

Entretanto, no cálculo de Itô devemos considerar também os termos de segunda ordem que surgem ao expandir o produto dos incrementos:

$$\Delta(X_t Y_t) = X_t \Delta Y_t + Y_t \Delta X_t + (\Delta X_t)(\Delta Y_t). \quad (\text{B.6})$$

Como $\Delta W_t \sim \sqrt{\Delta t}$, o termo quadrático $(\Delta W_t)^2$ é da ordem de Δt , e portanto não pode ser desprezado. Aplicando as regras de Itô, obtemos

$$(\Delta X_t)(\Delta Y_t) = b_X b_Y \Delta t. \quad (\text{B.7})$$

Tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$, a regra de Itô para produtos é então dada por

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + (dX_t)(dY_t). \quad (\text{B.8})$$

O termo adicional $(dX_t)(dY_t)$ é a principal diferença em relação ao cálculo determinístico, e surge devido à natureza não diferenciável do movimento Browniano. Em particular, ele captura as correlações entre os ruídos que atuam em X_t e Y_t .

Referências Bibliográficas

- 1 BOSE, S. N. Planck's law and the light quantum hypothesis. *Philosophical Magazine*, v. 47, p. 45–57, 1924.
- 2 EINSTEIN, A. Quantum theory of the monatomic ideal gas. In: STACHEL, J.; CASSIDY, D.; JANSSEN, M.; SCHULMANN, R. (Ed.). *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 6: The Berlin Years: Writings, 1914–1917*. [S.l.]: Princeton University Press, 1989. English translation of *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*, Z. Phys. **26** (1924) 379.
- 3 EINSTEIN, A. Quantum theory of the monatomic ideal gas: Second paper. In: STACHEL, J.; CASSIDY, D.; JANSSEN, M.; SCHULMANN, R. (Ed.). *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 6: The Berlin Years: Writings, 1914–1917*. [S.l.]: Princeton University Press, 1989. English translation of *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung*, Z. Phys. **27** (1925) 1.
- 4 GROSS, E. P. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Nuovo Cimento*, v. 20, p. 454–477, 1961.
- 5 PITAEVSKII, L. P. Vortex lines in an imperfect bose gas. *Soviet Physics JETP*, v. 13, p. 451–454, 1961. English translation of Zh. Eksp. Teor. Fiz. **40**, 646–651 (1961).
- 6 RUOSTEKOSKI, J.; WALLS, D. F. Bose-einstein condensate in a double-well potential as an open quantum system. *Physical Review A*, v. 58, n. 1, p. R50, July 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.R50>>.
- 7 MARTINS, S. C.; MACHADO, L. A.; TAFURI, V. B.; OROZCO, A. D. G.; TELLES, G. D.; BAGNATO, V. S. Excitação de um condensado de bose-einstein: um experimento pedagógico para transferência entre estados quânticos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 43, p. e20200507–1–e20200507–7, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0507>>.
- 8 BAR-GILL, N.; KURIZKI, G.; OBERTHALER, M.; DAVIDSON, N. Dynamic control and probing of many-body decoherence in double-well bose-einstein condensates. *Physical Review A*, v. 80, n. 5, p. 053613, November 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.053613>>.
- 9 KNOOP, S.; BORBELY, J. S.; ROOIJ, R. van; VASSEN, W. Nonexponential one-body loss in a bose-einstein condensate. *Physical Review A*, v. 85, n. 2, p. 025602, February 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.025602>>.

- 10 TAKAHASHI, T.; SAITO, H. Quantum many-body analysis of spin-2 bosons with two-body inelastic decay. *arXiv preprint arXiv:2510.10050*, October 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2510.10050v1>>.
- 11 SEARCH, C. P.; ZHANG, W.; MEYSTRE, P. Inhibiting three-body recombination in atomic bose-einstein condensates. *Physical Review Letters*, v. 92, n. 14, p. 140401, April 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.140401>>.
- 12 BARR, I. *Investigating the Dynamics of a Bose-Einstein Condensate on an Atom Chip*. Tese (Doutorado) — Imperial College London, May 2015. Ph.D. Thesis. Physics Department, Imperial College London. Disponível em: <<https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/the-centre-for-cold-matter/public/Barr-I-2015-PhD-Thesis.pdf>>.
- 13 SAVARD, T. A.; O'HARA, K. M.; THOMAS, J. E. Laser-noise-induced heating in far-off resonance optical traps. *Physical Review A*, v. 56, n. 2, p. R1095–R1098, August 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.56.R1095>>.
- 14 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. *The Theory of Open Quantum Systems*. 1st. ed. Oxford University Press, 2002. ISBN 9780198520634. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199213900.001.0001>>.
- 15 BARNETT, S. M. *Quantum Information*. [S.l.]: Oxford University Press, 2009.
- 16 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. 10. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-1107002173.
- 17 CQUIC, U. *Quantum Optics 2 L18: Derivation of the Lindblad Master Equation Born-Markov approximation I*. 2024. YouTube video. Publicado em: 2 de abr. de 2024. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=JGR9rA1Lp84&t=1651s>>.
- 18 SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. 2. ed. São Paulo, Brazil: Editora da Universidade de São Paulo (Edusp), 2018. ISBN 9788531403866.
- 19 COURTEILLE, P. W.; BAGNATO, V. S.; YUKALOV, V. I. Bose-einstein condensation of trapped atomic gases. *arXiv preprint cond-mat/0109421*, 2001.
- 20 ANDERSON, M. H.; ENSHER, J. R.; MATTHEWS, M. R.; WIEMAN, C. E.; CORNELL, E. A. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, v. 269, n. 5221, p. 198–201, 1995.
- 21 KLAERS, J.; SCHMITT, J.; VEWINGER, F.; WEITZ, M. Bose-einstein condensation of photons in an optical microcavity. *Nature*, v. 468, n. 7323, p. 545–548, 2010.
- 22 ROGEL-SALAZAR, J. The gross-pitaevskii equation and bose-einstein condensates. *European Journal of Physics*, v. 34, n. 2, p. 247–257, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0143-0807/34/2/247>>.
- 23 PETHICK, C. J.; SMITH, H. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. 2. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008. ISBN 978-0-521-84651-6.

- 24 WIRTHWEIN, A.; HAAS, S.; CHIOW, S.-w. Collision dynamics of one-dimensional bose-einstein condensates. *Condens. Matter*, v. 9, n. 4, p. 36, 2024.
- 25 EASTON, T.; KOKMOTOS, M.; BARONTINI, G. Vortex clustering in trapped bose-einstein condensates. *Sci. Rep.*, v. 13, p. 19432, 2023.
- 26 SABARI, S. S.; KISHOR, B. E.; TOMIO, L. Vortex dynamics and turbulence in dipolar bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, v. 109, p. 023313, 2024.
- 27 —.
- 28 ARRAYÁS, M.; FONTELOS, M. A.; GONZÁLEZ, M. D. M. et al. Evolution of vortex filaments and reconnections in the gross-pitaevskii equation and its approximation by the binormal flow equation. *J. Low Temp. Phys.*, v. 220, p. 61–74, 2025.
- 29 SÁNCHEZ-BAENA, J.; PASCUAL, G.; BOMBÍN, R.; MAZZANTI, F.; BORONAT, J. Thermal behavior of bose-einstein condensates of polar molecules. *Phys. Rev. Research*, v. 7, p. 033080, 2025.
- 30 DALFOVO, F.; GIORGINI, S.; PITAEVSKII, L. P.; STRINGARI, S. Theory of bose-einstein condensation in trapped gases. *Reviews of Modern Physics*, v. 71, n. 3, p. 463–512, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.71.463>>.
- 31 DURFEE, D. S.; OTT, H.; BURNETT, K.; KETTERLE, W. Experimental studies of bose-einstein condensation. *Optics Express*, v. 2, n. 8, p. 299–309, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1364/OE.2.000299>>.
- 32 WILSON, K. E.; NEWMAN, Z. L.; LOWNEY, J. D.; ANDERSON, B. P. In situ imaging of vortices in bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, v. 91, n. 2, p. 023621, 2015.
- 33 KOLOVSKY, A. R. Quantum entanglement and the born-markov approximation for an open quantum system. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 101, n. 6, p. 062116, June 2020.
- 34 DALVIT, D. A. R.; DZIARMAGA, J.; ONOFRIO, R. Continuous quantum measurement of a bose-einstein condensate: a stochastic gross-pitaevskii equation. *arXiv preprint cond-mat/0112315*, 2001.
- 35 GERRY, C.; KNIGHT, P. *Introductory Quantum Optics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.
- 36 ANDREWS, M. R.; MEWES, M.-O.; DRUTEN, N. J. van; DURFEE, D. S.; KURN, D. M.; KETTERLE, W. Observation of interference between two bose condensates. *Science*, v. 273, n. 5271, p. 84–87, 1996.
- 37 WIENER process. 2024. Encyclopedia of Mathematics, <https://encyclopediaofmath.org/wiki/Wiener_process> (accessed 2025-12-04). Online encyclopedia entry.

- 38 CHEN, C.-C.; ESCUDERO, R. G.; MINÁŘ, J.; PASQUIOU, B.; BENNETTS, S.; SCHRECK, F. Continuous bose-einstein condensation. *Nature*, v. 606, p. 683–687, 2022.
- 39 DAST, D.; HAAG, D.; CARTARIUS, H.; WUNNER, G. Quantum master equation with balanced gain and loss. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 90, n. 5, p. 052120, November 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.052120>>.
- 40 JAKSCH, D.; BRUDER, C.; CIRAC, J. I.; GARDINER, C. W.; ZOLLER, P. Cold bosonic atoms in optical lattices. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 15, p. 3108–3111, October 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.3108>>.
- 41 KATSURA, H.; KAWASHIMA, N.; MORITA, S.; TANAKA, A.; TASAKI, H. Mott-insulator-like bose-einstein condensation in a tight-binding system of interacting bosons with a flat band. *Physical Review Research*, v. 3, n. 3, p. 033190, August 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.033190>>.
- 42 PRATES, H. C.; ZEZYULIN, D. A.; KONOTOP, V. V. Bose-einstein condensates in quasiperiodic lattices: Bosonic josephson junction, self-trapping, and multi-mode dynamics. *Physical Review Research*, v. 4, n. 3, p. 033219, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.033219>>.
- 43 SCHELLE, A.; WELLENS, T.; DELANDE, D.; BUCHLEITNER, A. Number-conserving master equation theory for a dilute bose-einstein condensate. *Physical Review A*, v. 83, n. 1, p. 013615, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.013615>>.
- 44 MORENO-ARMIJOS, M. A.; FRITSCH, A. R.; GARCÍA-OROZCO, A. D.; SAB, S.; TELLES, G.; ZHU, Y.; MADEIRA, L.; NAZARENKO, S.; YUKALOV, V. I.; BAGNATO, V. S. Observation of relaxation stages in a nonequilibrium closed quantum system: Decaying turbulence in a trapped superfluid. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 134, n. 2, p. 023401, January 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.134.023401>>.
- 45 FUJIMOTO, K.; HAMAZAKI, R.; KAWAGUCHI, Y. Impact of dissipation on universal fluctuation dynamics in open quantum systems. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 129, n. 11, p. 110403, September 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.110403>>.
- 46 SIEBERER, L. M.; BUCHHOLD, M.; MARINO, J.; DIEHL, S. Universality in driven open quantum matter. *Reviews of Modern Physics*, v. 97, n. 2, p. 025004, June 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.97.025004>>.
- 47 RODRIGUEZ-NIEVA, J. F.; ORIOLI, A. P.; MARINO, J. Far-from-equilibrium universality in the two-dimensional quantum heisenberg magnet isolated from its environment. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 119, n. 28, p. e2122599119, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1073/pnas.2122599119>>.

- 48 ARES, F.; CALABRESE, P.; MURCIANO, S. The quantum mpemba effects. *Nature Reviews Physics*, v. 7, p. 451–460, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s42254-025-00838-0>>.
- 49 NAZARENKO, S. *Wave Turbulence*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. v. 825. 279 p. (Lecture Notes in Physics, v. 825). ISBN 978-3-642-15941-1.
- 50 MIKHEEV, A. N.; SIOVITZ, I.; GASENZER, T. Universal dynamics and non-thermal fixed points in quantum fluids far from equilibrium. *The European Physical Journal: Special Topics*, v. 232, n. 20–22, p. 3393–3415, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-023-00974-7>>.