



2024

## Aplicação da formulação de elementos com conexões semirrígidas no método clássico dos deslocamentos.

Luiz Fernando de Moura Ferreira <sup>a</sup>; Rafael Araujo de Sousa <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Aluno de Graduação em Engenharia Civil, [lfmoura72@gmail.com](mailto:lfmoura72@gmail.com)

<sup>b</sup> Professor Orientador, Doutor em Estruturas, [rafael.a.sousa@ufms.br](mailto:rafael.a.sousa@ufms.br)

*Faculdade de Engenharias, Arquitetura e Urbanismo e Geografia. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Av. Costa e Silva, s/nº | Bairro Universitário | 79070-900 | Campo Grande, MS, Brasil.*

---

### RESUMO

Este estudo destaca a implementação da formulação do elemento de viga reta plana com conexões semirrígidas em situações em que é empregado o Método Clássico dos Deslocamentos (MCD). Ao considerar uma barra rígida apoiada em suas extremidades com elementos semirrígidos, as tabelas convencionalmente utilizadas pelo MCD não possibilitam a resolução eficaz do problema. Para superar essa limitação, a resolução foi conduzida por meio da aplicação da formulação de elementos com conexões semirrígidas no método clássico dos deslocamentos, resultando em reações e deslocamentos satisfatórios em comparação com ferramentas de cálculo, como o Ftool (4.0.04), em cada um dos nós da estrutura.

**Palavras-chave:** Ligações semirrígidas, Princípio dos Trabalhos Virtuais, Método Clássico dos Deslocamentos.

### ABSTRACT

This study highlights the implementation of the formulation of the flat straight beam element with semi-rigid connections in situations where the Classical Displacement Method (CDM) is employed. When considering a rigid bar supported at its ends with semi-rigid elements, the tables conventionally used by the traditional CDM do not allow for the effective resolution of the problem. To overcome this limitation, the resolution was conducted by applying the formulation of elements with semi-rigid connections in the classical displacement method, resulting in satisfactory reactions and displacements compared to calculation tools such as Ftool (4.0.04) at each node.

**Keywords:** Semi-rigid connections, Principle of Virtual Work, Classical Displacement Method

## 1. INTRODUÇÃO

Método Clássico dos Deslocamentos é baseado em coeficientes de rigidez e reações conhecidos que são facilmente compactados em tabelas correlaciona deslocamentos prescritos unitários com reações (coeficiente de rigidez). A segunda tabela permite calcular as reações de apoio de estruturas hiperestáticas.

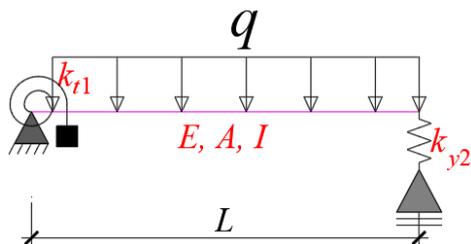
Segundo Martha (2010), O método dos deslocamentos busca a determinação de uma solução que satisfaz, simultaneamente, as condições de equilíbrio e de compatibilidade de uma estrutura. Ou seja, utiliza-se de uma série de soluções cinematicamente determinadas, já conhecidas, que satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura, mas que não satisfazem a condição de equilíbrio da estrutura original para na superposição restabelecer as condições de equilíbrio.

Uma estrutura que tem todas as suas deslocabilidades definidas é denominada por Martha (2010) como cinematicamente determinada.

Por se tratar de um método manual, buscam-se simplificações que reduzam o tamanho do sistema de equações: a) barra axialmente rígida, b) completamente rígidas, c) a parcela de deformação devido ao efeito do esforço cortante é desprezada, d) consideram-se apenas pequenos deslocamentos onde o princípio da superposição dos efeitos é válido

Um exemplo onde se pode aplicar o MCD é na análise de sistemas estruturais tais como: vigas, pórticos e treliças. A Figura 1 apresenta uma viga com elementos elásticos em suas extremidades com coeficientes de rigidez  $k_{t1}$  e  $k_{y2}$ , módulo de elasticidade ( $E$ ), área constante da seção transversal ( $A$ ), momento de inércia em relação ao eixo  $z$  ( $I$ ) e comprimento ( $L$ ), de tal forma que a viga tenha módulos finitos de rigidez ao esforço normal  $EA$  e a flexão  $EI$ .

Figura 1: Exemplo



De acordo com as características de vigas e do carregamento a que são submetidas, é possível considerar a rigidez axial muito grande ( $EA \rightarrow \infty$ ). Neste caso, o MCD é suficiente para resolver o problema. Contudo, caso a viga seja muito mais

rígida que as molas de apoio e não flexione, é possível simplificar ainda mais o problema fazendo  $EI \rightarrow \infty$ . Nesta situação em que  $EA$  e  $EI$  são muito maiores que a rigidez das molas  $k_{t1}$  e  $k_{y2}$ , o MCD não funciona da maneira tradicional. Neste contexto que se desenvolve este trabalho, onde se apresenta a solução deste problema a partir da consideração de molas conectadas as extremidades do elemento simulando conexões semirrígidas.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Segundo Kassimall (2012), uma ligação é considerada semirrígida quando apresenta uma restrição intermediária a condição perfeitamente rígida e livre. A utilização de vínculos considerados idealmente rígidos ou livres é uma simplificação adotada durante o cálculo para facilitar a análise e dimensionamento de elementos estruturais de maneira mais eficiente. No entanto, é conhecido que, na prática, as ligações em estruturas reais frequentemente exibem comportamentos que se situam entre esses casos extremos.

Pitaluga (2021) formulou e usou vínculos semirrígidos para avaliar a deformação em ligações estruturais através de sua matriz de rigidez, tomando como ponto de partida o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). A matriz de Rigidez obtida apresentou-se numericamente igual a apresentada por Gesualdo (1987).

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) é empregado na análise estrutural para diversas finalidades e tem duas formas, que são: o Princípio das Forças Virtuais e o Princípio dos Deslocamentos Virtuais. Para cada uma dessas formulações obtêm-se, respectivamente, deslocamentos e forças reais (MCGUIRE, 2000).

Tauchert (1974) define o PTV como “uma estrutura que está em equilíbrio e permanece em equilíbrio enquanto está sujeita a um deslocamento virtual, então o trabalho virtual externo ( $\delta W_e$ ) realizado pelas forças externas atuando sobre a estrutura é igual ao trabalho virtual interno ( $\delta U$ ) realizado pelas tensões.”.

Matematicamente, tem-se que:

$$\delta W_e = \delta U, \quad (1.a)$$

onde:

$$\delta W_e = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i, \quad (1.b)$$

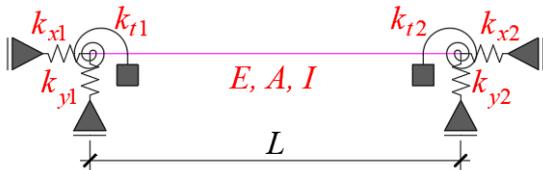
$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta e_{ij} \cdot dV . \quad (1.c)$$

Tauchert (1974) mostra que, a partir da equação (1.b), com base em um deslocamento conhecido ( $\delta q_i$ ), é viável calcular a força ( $Q_i$ ) necessária para a condição deformada da estrutura, uma vez que o equilíbrio é mantido.

Com relação a obtenção da matriz de rigidez podemos citar autores como: McGuire (2000) e Weaver e Gere (1980), Kassimali (2012) e Gesualdo (1987) cujos os trabalhos apresentam e demonstram o cálculo da matriz de rigidez considerando molas em seus graus de liberdade para o elemento plano.

No desenvolvimento do seu trabalho, Pitaluga (2021) parte de um elemento retangular plano com módulo de elasticidade ( $E$ ), área constante da seção transversal ( $A$ ), momento de inércia em relação ao eixo  $z$  ( $I$ ), comprimento ( $L$ ) e coeficientes de rigidez ( $ki$ ) arbitrários (Figura 2).

Figura 2: Idealização do elemento reto apresentado por Pitaluga (2021).



A seguir se destacam hipóteses gerais para o desenvolvimento de cálculo:

- Considera-se um material com comportamento linear elástico de acordo com a Lei de Hooke;
- O Princípio da superposição dos efeitos é válido;
- A parcela de deformação devido ao efeito do esforço cortante é desprezada.

A partir dessas hipóteses, Pitaluga (2021) obteve as tabelas usadas no Método Clássico dos Deslocamentos (MCD) para o elemento apresentado na Figura 2. Como ponto de partida utilizou-se o Método das Forças (MF).

### 3. OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é:

- Aplicar a formulação de elemento reto com conexões semirrígidas que alteram as tabelas usadas no MCD considerando molas internas

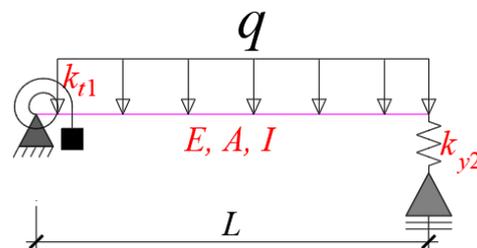
### 4. DESENVOLVIMENTO

Considere as seguintes dimensões para os casos a seguir:  $L = 4m$ , seção retangular constante de  $b = 15cm$  e  $h = 40cm$ , módulo de elasticidade a 21 GPa,  $k_{t1} = 4 \cdot 10^4 kNm/rad$ ,  $k_{y2} = 5 \cdot 10^5 kNm$ ,  $q = 10 kN/m$

#### 4.1. Resolução do problema apresentado a partir do MCD.

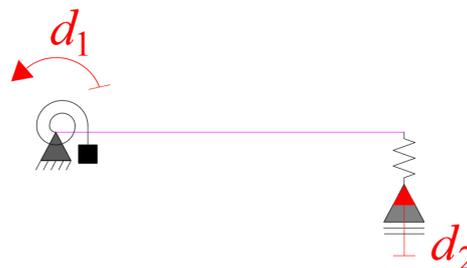
Será resolvido a seguir o exemplo da Figura 3 no qual se deseja resolver a estrutura hiperestática a partir do MCD, com base nas propriedades descritas anteriormente. Módulo de elasticidade ( $E$ ), área constante da seção transversal ( $A$ ), momento de inércia em relação ao eixo  $z$  ( $I$ ), comprimento ( $L$ ) e coeficientes de rigidez ( $ki$ ) quaisquer.

Figura 3: Exemplo Sugerido



O primeiro passo a se analisar no MCD é a configuração deformada que satisfaz a compatibilidade da estrutura e seu equilíbrio, através da adição de apoios nos graus de liberdade da estrutura. A Figura 4 indica a configuração deformada da estrutura, sendo  $d_1$  e  $d_2$  os graus de liberdade.

Figura 4: Graus de liberdade



Como no caso em questão não se sabe o valor da rotação aplicada no nó 1 (apoio da direita) pela parcela da mola, coloca-se uma chapa para restringi-lo, do mesmo modo ao se analisar o nó da esquerda (Nó 2), em que deve-se colocar um apoio. Criando, assim, o sistema principal para estrutura do exemplo (Figura 5).

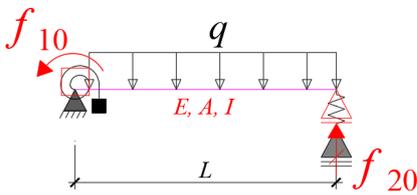
Figura 5: Sistema principal



Seguindo a metodologia do MCD, isola-se o efeito da solicitação externa e os efeitos de cada grau de liberdade aplicadas no SH. No exemplo em questão temos três estados básicos (0), (1) e (2).

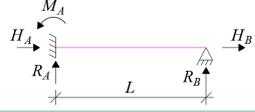
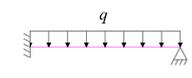
No Estado (0) analisa-se o efeito das solicitações externas no SH, deixando \$d\_1\$ e \$d\_2\$ nulos.

Figura 6: Estado (0)



As reações estão relacionadas a condição de engastamento perfeito no SH, cujos valores já são conhecidos.

Figura 7: Tabela de engastamento perfeito.

Reações de Engastamento	
Ações	
	$M_A = \frac{qL^2}{8}$ $R_A = \frac{5qL}{8}$ $R_B = \frac{3qL}{8}$

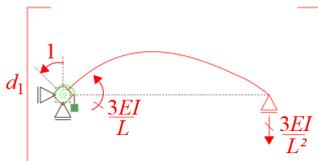
Logo:

$$f_{10} = \frac{qL^2}{8}, \quad (2.a)$$

$$f_{20} = \frac{3qL}{8}. \quad (2.b)$$

No Estado (1), por sua vez, isola-se os efeitos gerados a partir da aplicação de uma rotação unitária em \$d\_1\$ e \$d\_2\$ nulos.

Figura 8: Estado (1)



As forças e os momentos que aparecem quando imposto o deslocamento unitário em \$d\_1\$ são chamados de coeficientes de rigidez \$k\_{ij}\$, que por sua vez são tabelados. Não se pode esquecer também do efeito

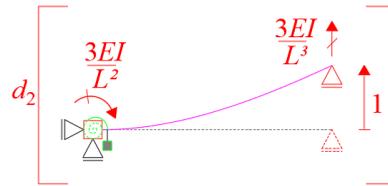
gerado pela mola rotacional, que contribui para a rigidez total do deslocamento \$d\_1\$ com sua própria rigidez. Logo:

$$k_{11} = \frac{3EI}{L} + k_{t1}, \quad (3.a)$$

$$k_{12} = \frac{-3EI}{L^2}. \quad (3.b)$$

De maneira análoga, no estado (2), por fim, aplica-se um deslocamento unitário na direção de \$d\_2\$, mantendo-se \$d\_1 = 0\$.

Figura 9: Estado (2)



Obtendo-se assim:

$$k_{21} = \frac{-3EI}{L^2}, \quad (4.a)$$

$$k_{22} = \frac{3EI}{L^3} + k_{y2}. \quad (4.b)$$

Com base nos resultados obtidos em cada um dos casos anteriores, é possível empregar a superposição dos efeitos para restabelecer as condições de equilíbrio nos nós internos, sendo que a soma total das forças e momentos externos devem ser nulos, já que não há forças nodais nesses graus de liberdade do problema real.

- Somatória dos momentos que atuam no grau de liberdade 1:

$$f_{10} + k_{11}d_1 + k_{21}d_2 = 0. \quad (5)$$

- Somatório de todas as forças que atuam no grau de liberdade 2:

$$f_{20} + k_{12}d_1 + k_{22}d_2 = 0. \quad (6)$$

Sendo que, a solução do sistema formado pelas equações (5) e (6), para os termos de carga \$f\_{ij}\$ e coeficientes de rigidez \$k\_{ij}\$, resultam nos deslocamentos \$d\_1\$ e \$d\_2\$:

$$d_1 = \frac{L^2 \cdot q(k_{y2} \cdot L^3 + 12EI)}{8 \cdot (k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 3EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 3EI \cdot k_{t1})}, \quad (7.a)$$

$$d_1 = -3,822 \cdot 10^{-4} \text{ rad}. \quad (7.b)$$

$$d_2 = \frac{3 \cdot k_{t1} \cdot q \cdot L^4 + 12 \cdot EI \cdot q \cdot L^3}{8 \cdot k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 24 \cdot EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 24 \cdot EI \cdot k_{t1}}, \quad (8.a)$$

$$d_2 = -3,23 \cdot 10^{-5} \text{ m}. \quad (8.b)$$

Pode-se também reescrever o sistema de equações de forma matricial:

$$\begin{cases} f_{10} + k_{11}d_1 + k_{21}d_2 = 0 \\ f_{20} + k_{12}d_1 + k_{22}d_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

No caso geral:

$$\{f_0\} + [k]\{d\} = \{0\} \quad (11),$$

sendo:

$\{f_0\}$  → Vetor dos termos de Carga;

$[k]$  → Matriz de rigidez Global;

$\{d\}$  → Vetor dos Deslocamentos.

Uma vez determinados os valores dos deslocamentos, as reações de apoio da estrutura em estudo podem ser obtidas pela superposição dos diagramas de cada caso básico.

$$R_{m1} = \frac{qL^2}{8} + \frac{3EI}{L} \cdot d_1 + \left(\frac{-3EI}{L^2}\right) \cdot d_2 \quad (12.a)$$

$$R_{m1} = 15,286 \text{ kNm} \quad (12.b)$$

$$R_{y2} = \frac{3qL}{8} + \left(\frac{-3EI}{L^2}\right) \cdot d_1 + \frac{3EI}{L^3} \cdot d_2 \quad (13.a)$$

$$R_{y2} = 16,178 \text{ kN} \quad (13.b)$$

Os resultados mostrados nas equações (7.b) e (8.b) são também possíveis de serem obtidos usando-se o elemento com conexões semirrígidas, como já demonstrado por Pitaluga (2021).

#### 4.2. CONSIDERANDO ( $EI$ e $EA$ ) → ∞ .

Analisa-se agora a mesma estrutura apresentada na Figura 3, mas com seu  $EI \rightarrow \infty$ . A partir da configuração deformada nota-se que barra se comporta como um corpo rígido, fazendo com que os deslocamentos dos graus de liberdade não sejam independentes.

Se for considerado o mesmo sistema principal da Figura 5 e aplicar uma rotação unitária em  $d_1$ , provoca-se também uma deformação  $d_2$ , já que todo o corpo da barra se desloca, tornando assim  $d_2 \neq 0$  e impossibilitando a utilização de dois graus de liberdade na estrutura.

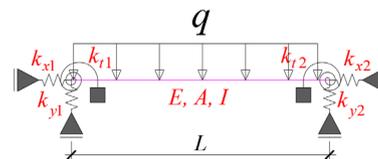
Quando um dos graus de liberdade é selecionado (mola rotacional ou translacional), o outro se torna dependente da escolha inicial. Posteriormente, ao se analisar as condições de contorno do sistema principal, conforme o modelo hipergeométrico proposto por Martha, surge uma situação peculiar, onde uma mola posicionada é entre o nó de apoio e a barra.

É relevante notar que essa condição de contorno específica não está contemplada nas tabelas de engastamento perfeito utilizadas no MCD, requerendo uma abordagem mais cuidadosa e específica para esta análise.

#### 4.3. Resolução do problema através da Matriz de rigidez elástica de elementos retos com conexões semirrígidas.

Será resolvido a seguir o exemplo anterior, no qual se deseja resolver a estrutura hiperestática de três formas diferentes, considerando  $EI \rightarrow \infty$ . Para a resolução do exemplo usaremos a Matriz de Rigidez de uma viga padrão (Figura 2) e Carga uniformemente distribuída (Figura 10), já apresentadas e discutidas em diversos trabalhos, sendo aqui tomada como base a apresentada por Pitaluga (2021).

Figura 10: Carga uniformemente distribuída. Pitaluga (2021)



##### 4.3.1 Caso 1 – Resolução direta do problema sem o MCD.

Se a intenção do exercício fosse somente a resolução da estrutura hiperestática (Figura 3) com seus diagramas de esforços, bastaria fazer a manipulação das reações encontradas por Pitaluga (2021) para uma carga uniformemente distribuída conforme a Figura 11, da seguinte forma:

$$R_{m1} = \lim_{k_{x1} \rightarrow \infty} \left( \lim_{k_{y1} \rightarrow \infty} \left( \lim_{k_{x2} \rightarrow 0} \left( \lim_{k_{t2} \rightarrow 0} \left( \lim_{EI \rightarrow \infty} (R_{t,1}) \right) \right) \right) \right), \quad (14)$$

$$R_{y2} = \lim_{k_{x1} \rightarrow \infty} \left( \lim_{k_{y1} \rightarrow \infty} \left( \lim_{k_{x2} \rightarrow 0} \left( \lim_{k_{t2} \rightarrow 0} \left( \lim_{EI \rightarrow \infty} (R_{y,2}) \right) \right) \right) \right), \quad (15)$$

onde,  $R_{t,1}$  e  $R_{y,2}$  são as reações apresentadas no item a do apêndice, equações (33.c) e (33.e) para o caso de carregamento uniforme. Resultando em:

$$R_{m1} = \frac{L^2 \cdot k_{t1} \cdot q}{2(k_{y2} \cdot L^2 + k_{t1})}, \quad (16.a)$$

$$R_{m1} = 0,398 \text{ kNm}. \quad (16.b)$$

$$R_{y2} = \frac{L^3 \cdot k_{y2} \cdot q}{2(k_{y2} \cdot L^2 + k_{t1})}, \quad (17.a)$$

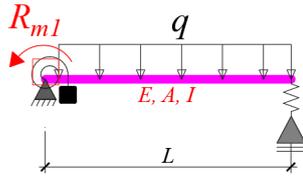
$$R_{y2} = 19,90 \text{ kN}. \quad (17.b)$$

De posse das reações de apoio é possível fazer os diagramas de esforços da estrutura e terminar a análise.

#### 4.3.2 Caso 2 – DESLOCAMENTO UNITARIO NA MOLA ROTACIONAL.

Para a resolução via MCD, porém, deve-se determinar as reações no grau de liberdade em análise, ou seja, é necessário conhecer as reações de momento no apoio a direita. Tal situação caracteriza o estado zero deste caso.

Figura 11: Estado 0 (caso 2)



A reação pode ser calculada em função do carregamento real, sendo as mesmas obtidas através da manipulação da equação (14), da seguinte forma:

$$R_{m1} = \lim_{k_{t1} \rightarrow \infty} (R_{m1}), \quad (18)$$

$$f_{10} = \left( \lim_{k_{t1} \rightarrow \infty} (R_{m1}) \right), \quad (19.a)$$

$$f_{10} = \frac{L^2 \cdot q}{2}. \quad (19.b)$$

Determinada reação de apoio no estado zero, passa-se ao cálculo dos coeficientes de rigidez da estrutura. Tal resolução já foi mostrada por Pitaluga (2021), para um elemento genérico (Figura 2). Para a o caso em estudo, deve-se manipular a Matriz  $[K]$  (equação 31 do apêndice). Logo é feita a seguinte operação:

$$[K_e] = \lim_{k_{x1} \rightarrow \infty} \left( \lim_{k_{y1} \rightarrow \infty} \left( \lim_{k_{x2} \rightarrow 0} \left( \lim_{k_{t2} \rightarrow 0} ([K]) \right) \right) \right). \quad (20)$$

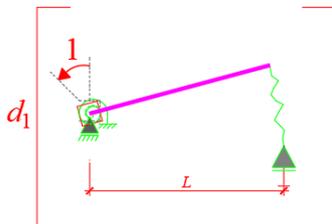
Resultando em:

$$K_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI \cdot k_{t1} \cdot k_{y2}}{k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 3EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 3EI \cdot k_{t1}} & \frac{3 \cdot EI \cdot L \cdot k_{t1} \cdot k_{y2}}{k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 3 \cdot EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 3 \cdot EI \cdot k_{t1}} & 0 & \frac{3EI \cdot k_{t1} \cdot k_{y2}}{k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 3EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 3EI \cdot k_{t1}} & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot EI \cdot L \cdot k_{t1} \cdot k_{y2}}{k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 3 \cdot EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 3 \cdot EI \cdot k_{t1}} & \frac{3 \cdot EI \cdot L^2 \cdot k_{t1} \cdot k_{y2}}{k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 3 \cdot EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 3 \cdot EI \cdot k_{t1}} & 0 & -\frac{3 \cdot EI \cdot L \cdot k_{t1} \cdot k_{y2}}{k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 3 \cdot EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 3 \cdot EI \cdot k_{t1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI \cdot k_{t1} \cdot k_{y2}}{k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 3EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 3EI \cdot k_{t1}} & -\frac{3 \cdot EI \cdot L \cdot k_{t1} \cdot k_{y2}}{k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 3 \cdot EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 3 \cdot EI \cdot k_{t1}} & 0 & \frac{3EI \cdot k_{t1} \cdot k_{y2}}{k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 3EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 3EI \cdot k_{t1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Conhecida a matriz da estrutura, extrai-se o coeficiente de rigidez correspondente ao deslocamento de cada estado.

$$k_{e22} = \frac{3EI \cdot k_{t1} \cdot k_{y2}}{k_{t1} \cdot k_{y2} \cdot L^3 + 3EI \cdot k_{y2} \cdot L^2 + 3EI \cdot k_{t1}}. \quad (22)$$

Figura 12: Estado 1 (caso 2)



$$k_{22}^{e1} = \lim_{k_{t1} \rightarrow \infty} \left( \lim_{EI \rightarrow \infty} (k_{e22}) \right) + k_{t1}, \quad (23.a)$$

$$k_{22}^{e1} = k_{y2} \cdot L^2 + k_{t1}. \quad (23.b)$$

Multiplicando o deslocamento unitário pelo coeficiente de rigidez, obtém-se a força devido a rotação no grau de liberdade em estudo:

$$F_1 = k_{y2} \cdot L^2 + k_{t1}. \quad (24)$$

Logo, pode-se determinar a rotação no apoio inicial recompondo-se a condição de equilíbrio inicial do problema, a partir da equação 23:

$$F_0 + F_1 d_1 = F_{nod}, \quad (25)$$

onde:

$F_{nod}$  é a força nodal no nó restringido.

Portanto:

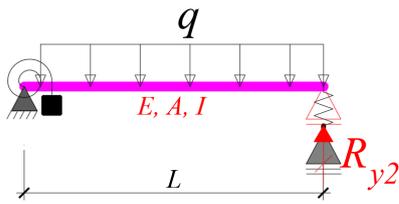
$$d_{t1} = \frac{F_{nod} - F_0}{F_1} = \frac{\frac{L^2 \cdot q}{2}}{k_{y2} \cdot L^2 + k_{t1}} \quad (26.a)$$

$$d_{t1} = -9,95 * 10^{-6} rad \quad (26.b)$$

#### 4.3.3 Caso 3 – DESLOCAMENTO UNITARIO NA MOLA TRANSLACIONAL.

Para a mesma estrutura apresentada no caso 2, agora será calculado o deslocamento translacional a partir do deslocamento unitário no nó a direita (2).

Figura 13: Estado 0 (caso 3)



Repete-se, então, a metodologia do caso 2, desta forma, para o estado zero, tem-se:

$$R_{y2} = \lim_{k_{y2} \rightarrow 0} (R_{y2}). \quad (27)$$

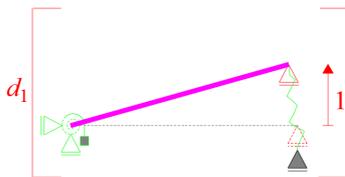
$$f_{20} = \lim_{k_{y1} \rightarrow \infty} (R_{y2}), \quad (28.a)$$

$$f_{20} = \frac{L \cdot q}{2}. \quad (28.b)$$

No estado 1, é aplicado o deslocamento unitário no grau de liberdade em estudo, avaliando-se o coeficiente de rigidez  $k_{e44}$ , através da seguinte manipulação:

$$k_{44}^{e2} = \lim_{k_{y2} \rightarrow \infty} \left( \lim_{EI \rightarrow \infty} (k_{e44}) \right) + k_{y2}. \quad (29.a)$$

Figura 14: Estado 1 (caso 3)



$$k_{44}^{e1} = k_{y2} + \frac{k_{t1}}{L^2}. \quad (29.b)$$

Passa-se ao cálculo do deslocamento na equação (30)

$$d_{y2} = \frac{F_{nod} - F_0}{F_1} = \frac{\frac{L^2 \cdot q}{2}}{k_{y2} \cdot L^2 + k_{t1}}, \quad (30.a)$$

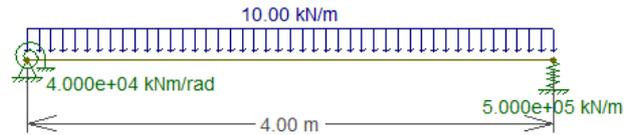
$$d_{y2} = -3,98 * 10^{-5} m. \quad (30.b)$$

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste item, comparam-se os resultados analíticos, obtidos anteriormente, com os valores extraídos numericamente com auxílio do programa *Ftool* (Versão 4.0.4). São utilizados os mesmos valores do item 4.

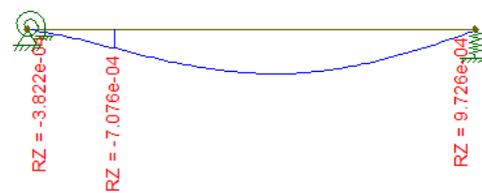
A primeira análise considera o caso em que não se tem grande rigidez à flexão. A Figura 15 mostra um *print* do *Ftool*, onde são destacadas algumas informações do problema.

Figura 15: Modelo Ftool



A Figura 16 mostra a deformada da estrutura, destacando as rotações nos nós do modelo (círculos verdes) e a rotação máxima.

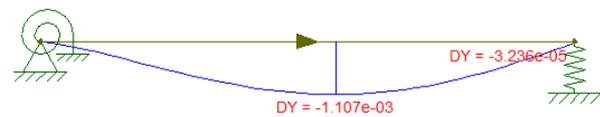
Figura 16: Rotação obtida via Ftool



Sendo que a rotação no nó 1 é de  $-3,82 \cdot 10^{-4} rad$ , valor igual ao obtido pra  $d_1$  no (item 4.1).

A Figura 17 mostra a deformada da estrutura, destacando o deslocamento vertical do nó da direita e o deslocamento vertical máximo.

Figura 17: Deslocamento Vertical via Ftool



Na mola translacional obteve-se  $-3,23 \cdot 10^{-5} m$

Nas figuras 18, 19 e 20 serão apresentados os respectivos resultados ao se considerar a barra se comportando como um corpo rígido.

Figura 18: Reações Ftool – barra rígida

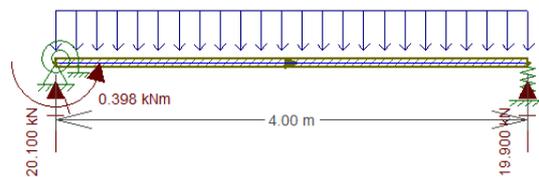


Figura 19: Rotação na mola, via Ftool – barra rígida

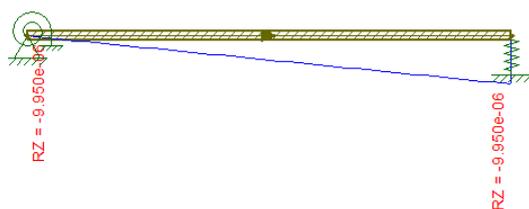
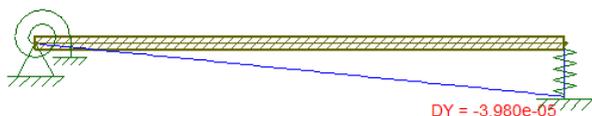


Figura 20: Deslocamento vertical na mola, via Ftool – barra rígida



A Tabela 1 resume todos os resultados numéricos e analíticos obtidos para o exemplo, considerando válida ou não a hipótese de rigidez à flexão muito grande ( $EI \rightarrow \infty$ ).

Tabela 1: Resultados

Restrições de deformação		Deslocamento mola rotacional (rad)	Deslocamento mola translacional (m)	Ração na mola rotacional (kNm)	Reação na mola transversal (kN)
Flexíveis	Ftool	-3,822E-04	-3,236E-05	15,287	16,18
	Analítico	-3,819E-04	-3,233E-05	15,287	16,178
	Erro relativo	0,08%	0,09%	0,00%	0,00%
Rígido	Ftool	-9,950E-06	-3,980E-05	0,398	19,900
	Analítico	-9,950E-06	-3,980E-05	0,398	19,900
	Erro relativo	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Ao se analisar os resultados apresentados na Tabela 1 é possível ver uma excelente concordância, em todos os casos, entre os resultados numéricos (*Ftool*) e analíticos obtidos a partir do uso do elemento com conexões semirrígidas.

Para o caso em que não se considera grande rigidez à flexão, não se usou neste trabalho a formulação do elemento com conexão semirrígida. Isto já foi feito por Pitaluga (2021).

Para o caso em que  $EI \rightarrow \infty$ , as soluções analíticas foram obtidas a partir do uso do elemento com conexão semirrígida. Se não fosse essa formulação, não seria possível resolver a estrutura a partir do Método Clássico dos Deslocamentos (MCD).

É possível perceber que ao se considerar  $EI \rightarrow \infty$ , os resultados de reações de apoio e deslocamentos mudam consideravelmente. Portanto, considerar esta hipótese depende do julgamento do engenheiro estrutural.

## 6. CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo, de forma geral, a aplicação da formulação de elementos com conexões semirrígidas no Método Clássico dos

Deslocamentos (MCD), De forma mais específica, este trabalho apresentou um exemplo que não teria solução a partir do MCD tradicional.

A característica que torna esse exemplo diferenciado foi a consideração de que a barra tem rigidez à flexão muito alta ( $EI \rightarrow \infty$ ). Quando isto ocorre é necessário que se tenham tabelas de reações de estruturas hiperestáticas que apresentem reações de apoio considerando as molas como parte integrante do elemento.

O problema supracitado é então resolvido, sob o ponto de vista de reações de apoio e diagramas de esforços, a partir do uso direto da tabela que considera elemento com conexões semirrígidas. Sob o ponto de vista de deslocamentos nos nós, que conectam a barra às molas dos seus extremos, resolveu-se o problema a partir da aplicação da matriz de rigidez e reações de estruturas hiperestáticas do elemento com conexões semirrígidas.

Por fim, os resultados obtidos a partir da formulação do elemento com conexões semirrígidas foram comparados com resultados numéricos obtidos a partir do *Ftool* e, conforme esperado, resultaram em concordância considerável.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Pitaluga, Frederico Heinz. **Matriz de rigidez elástica de elementos retos com conexões semirrígidas: abordagem energética**. (2021). Trabalho de conclusão de Curso – FAENG, Faculdade de Engenharias, Arquitetura e Urbanismo e Geografia. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

BATHE, Klaus Jürgen. **Finite Element Procedures**. 2. ed. Watertown: Pearson Prentice Hall, 2016.

GESUALDO, Francisco Antônio Romero. **Deformação das ligações nas estruturas de madeira**. 1987. 170 f. Tese (Doutorado) – Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987.

KASSIMALI, Aslam. **Matrix Analysis of Structures**. 2. ed. Stamford: Cengage Learning, 2012.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de Estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MCGUIRE, William; GALLAGHER, Richard H; ZIEMIAN, Ronald D. **Matrix Structural Analysis**. 2. ed. Nova York: John Wiley & Sons, 2000.

SORIANO, Humberto Lima; LIMA, Silvio de Souza. **Análise de Estruturas**: método das forças e método dos deslocamentos. 2. ed. Cidade: Ciência Moderna, 2006.

SÜSSEKIND, José Carlos. **Curso de Análise Estrutural**: método das deformações. processo de cross.. 7. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1987.

TAUCHERT, Theodore R. **Energy principles in structural mechanics**. Tóquio: McGraw-Hill Kogakusha, 1974.

VIEIRA JUNIOR, Luiz Carlos Marocs. **Princípio dos Trabalhos Virtuais**: cinemática e aplicações. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2021.

WEAVER, William Jr; GERE, James M. **Analysis of Framed Structures**. 2. ed. Nova York: Van Nostrand Reinhold, 1980.

## APÊNDICE:

Neste item será apresentado os resultados obtidos por Pitaluga (2021), sendo a matriz de rigidez  $[K]$  de uma estrutura padra (figura 2):

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 \\ & \frac{\beta_3}{\gamma} & \frac{L \cdot \alpha_6}{\gamma} & 0 & -\frac{\beta_3}{\gamma} & \frac{L(\alpha_6 - \beta_3)}{\gamma} \\ & & \frac{\alpha_6^2 \cdot L^2 + \beta_2}{\gamma} & 0 & \frac{L \cdot \alpha_6}{\gamma} & \frac{\beta_2}{\gamma} \\ \vdots & & & \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{\beta_3}{\gamma} & \frac{L(\alpha_6 - \beta_3)}{\gamma} \\ \text{sim.} & \dots & & & & \frac{\beta_2 - L^2 \cdot \alpha_6 + L^2 \cdot \beta_3}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (31)$$

onde:

$$\alpha_1 = \frac{1}{k_{x1}} + \frac{L}{2 \cdot EA} \quad (32.a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{k_{y1}} - \frac{L^3}{12 \cdot EI} \quad (32.b)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{k_{t1}} + \frac{L}{2 \cdot EI} \quad (32.c)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{k_{x2}} + \frac{L}{2 \cdot EA} \quad (32.d)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{k_{y2}} - \frac{L^3}{12 \cdot EI} \quad (32.e)$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{k_{t2}} + \frac{L}{2 \cdot EI} \quad (32.f)$$

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_4 \quad (32.g)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_5 \quad (32.h)$$

$$\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_6 \quad (32.i)$$

E as reações a apoio de uma estrutura com carga uniformemente distribuída (figura 10)

$$R_{x1} = 0 \quad (33.a)$$

$$R_{y1} = \frac{L \cdot k_{y1} \cdot q \cdot \left( (24(EI)^2) \cdot (k_{r1} + k_{r2}) + 12 \cdot (EI)^2 \cdot L^2 \cdot k_{y2} + 24EI \cdot k_{r1} \cdot k_{r2} + 5EI \cdot L^3 \cdot k_{r1} \cdot k_{y2} + 3EI \cdot L^3 \cdot k_{y2} \cdot k_{r2} + L^4 \cdot k_{r1} \cdot k_{y2} \cdot k_{r2} \right)}{2 \left( 12 \cdot (EI)^2 \cdot (k_{y1} \cdot k_{r1} + k_{y1} \cdot k_{r2} + k_{y2} \cdot k_{r1} + k_{y2} \cdot k_{r2} + L^2 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2}) + 4 \cdot EI \cdot L^3 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} \cdot (k_{r1} + k_{r2}) + 12EI \cdot L \cdot k_{r1} \cdot k_{r2} \cdot (k_{y1} + k_{y2}) + L^4 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} \cdot k_{r1} \cdot k_{r2} \right)} \quad (33.b)$$

$$R_{r1} = \frac{L^2 \cdot k_{r1} \cdot q \cdot \left( (72(EI)^2) \cdot (k_{y1}) - 72 \cdot (EI)^2 \cdot k_{y2} + 48EI \cdot L \cdot k_{y2} \cdot k_{r2} + 6EI \cdot L^3 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} + L^4 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} \cdot k_{r2} \right)}{12 \left( 12 \cdot (EI)^2 \cdot (k_{y1} \cdot k_{r1} + k_{y1} \cdot k_{r2} + k_{y2} \cdot k_{r1} + k_{y2} \cdot k_{r2} + L^2 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2}) + 4 \cdot EI \cdot L^3 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} \cdot (k_{r1} + k_{r2}) + 12EI \cdot L \cdot k_{r1} \cdot k_{r2} \cdot (k_{y1} + k_{y2}) + L^4 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} \cdot k_{r1} \cdot k_{r2} \right)} \quad (33.c)$$

$$R_{x2} = 0 \quad (33.d)$$

$$R_{y2} = \frac{L \cdot k_{y2} \cdot q \cdot \left( (24(EI)^2) \cdot (k_{r1} + k_{r2}) + 12 \cdot (EI)^2 \cdot L^2 \cdot k_{y1} + 24EI \cdot k_{r1} \cdot k_{r2} + 3EI \cdot L^3 \cdot k_{y1} \cdot k_{r1} + 5EI \cdot L^3 \cdot k_{y1} \cdot k_{r2} + L^4 \cdot k_{y1} \cdot k_{r1} \cdot k_{r2} \right)}{2 \left( 12 \cdot (EI)^2 \cdot (k_{y1} \cdot k_{r1} + k_{y1} \cdot k_{r2} + k_{y2} \cdot k_{r1} + k_{y2} \cdot k_{r2} + L^2 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2}) + 4 \cdot EI \cdot L^3 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} \cdot (k_{r1} + k_{r2}) + 12EI \cdot L \cdot k_{r1} \cdot k_{r2} \cdot (k_{y1} + k_{y2}) + L^4 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} \cdot k_{r1} \cdot k_{r2} \right)} \quad (33.e)$$

$$R_{r2} = \frac{L^2 \cdot k_{r2} \cdot q \cdot \left( (72(EI)^2) \cdot (k_{y2}) - 72 \cdot (EI)^2 \cdot k_{y1} + 48EI \cdot L \cdot k_{y2} \cdot k_{r1} + 6EI \cdot L^3 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} + L^4 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} \cdot k_{r1} \right)}{12 \left( 12 \cdot (EI)^2 \cdot (k_{y1} \cdot k_{r1} + k_{y1} \cdot k_{r2} + k_{y2} \cdot k_{r1} + k_{y2} \cdot k_{r2} + L^2 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2}) + 4 \cdot EI \cdot L^3 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} \cdot (k_{r1} + k_{r2}) + 12EI \cdot L \cdot k_{r1} \cdot k_{r2} \cdot (k_{y1} + k_{y2}) + L^4 \cdot k_{y1} \cdot k_{y2} \cdot k_{r1} \cdot k_{r2} \right)} \quad (33.f)$$