



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul



Curso de Física - Bacharelado

**Protocolo Baseado em Feedback para Correção de Ruído Quântico: Proposta e
Avaliação Teórica**

Giovanni Ramos Melo

Campo Grande - MS

2024

INSTITUTO DE FÍSICA- INFI

Cidade Universitária|Unidade 5|

Fone (67) 3345 7485

79070-900 | Campo Grande | MS



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul



Curso de Física - Bacharelado

Protocolo Baseado em Feedback para Correção de Ruído Quântico: Proposta e Avaliação Teórica

Giovanni Ramos Melo

Orientador: Prof. Dr. Wilder Rodrigues Cardoso

Trabalho de conclusão de curso apresentado
à Universidade Federal de Mato Grosso Sul
- UFMS - Instituto de Física, para obtenção
do título de bacharel em Física.

Campo Grande - MS

2024

INSTITUTO DE FÍSICA- INFI

Cidade Universitária|Unidade 5|

Fone (67) 3345 7485

79070-900 | Campo Grande | MS

**Protocolo Baseado em Feedback para Correção de Ruído Quântico: Proposta e
Avaliação Teórica**

Giovanni Ramos Melo

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do Instituto de Física da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INFI/UFMS, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Prof. Dr. Wilder Rodrigues Cardoso - UFMS

(Presidente da Banca)

Prof. Dr. João Vitor Batista Ferreira - UFMS

(Membro da Banca)

Prof. Dr. Bruno Spolon Marangoni - UFMS

(Membro da Banca)

Campo Grande - MS

2024

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais e irmãos, que conviveram comigo nesse período de altos e baixos, compartilhando meus momentos de frustração e de alegria.

Agradeço também aos meus amigos, por tornar minha passagem pela graduação mais leve e divertida, sem nunca me deixar desanimar (muitos nomes para citar, mas amo todos vocês).

Agradeço aos professores, que contribuíram na minha formação nas mais diversas formas, em especial ao professor Wilder, por sua paciência comigo e ensinamentos valiosos sobre como ser um cientista.

Por fim, agradeço ao INFI por me proporcionar desenvolvimento pessoal e profissional e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho é proposto um protocolo inovador de correção de ruído quântico baseado em feedback, utilizando qubits de teste para monitorar e corrigir o ruído de canais quânticos. O protocolo é comparado a métodos já bem estabelecidos de correção de ruído, como os códigos de repetição e o código de Shor, avaliando a eficiência através de métricas como fidelidade e coerência. Nossos resultados mostram que o protocolo de feedback se destaca em ambientes altamente ruidosos, oferecendo vantagens em termos de fidelidade média, mas apresenta limitações na preservação da coerência em certos tipos de ruído, especialmente *phase-flip*. A pesquisa contribui para o avanço de técnicas de correção de ruído na computação quântica, destacando seu potencial em cenários práticos.

Palavras-chave: **correção de ruído quântico, fidelidade quântica, coerência quântica, computação quântica, códigos de correção de erro, ruído em canais quânticos, operadores de Kraus.**

Abstract

In this paper, we presented an innovative quantum noise correction protocol based on feedback, using test qubits to monitor and correct noise in quantum channels. The protocol is compared to well-established methods, such as repetition codes and the Shor code, evaluating its efficiency through metrics like fidelity and coherence. Our results show that the feedback-based protocol is particularly effective in highly noisy environments, offering advantages in terms of average fidelity. However, it presents limitations in preserving coherence for certain types of noise, especially phase-flip. This research contributes to the advancement of noise correction techniques in quantum computing, highlighting the practical potential of the proposed protocol.

Keywords: **quantum noise correction, quantum fidelity, quantum coherence, quantum computing, error correction codes, noise in quantum channels, Kraus operators.**

Lista de Figuras

1	Esquema do código de repetição de três <i>qubits</i> para bit-flip por meio do uso de portas lógicas <i>CNOT</i>	19
2	Esquema do código de repetição de três <i>qubits</i> para phase-flip por meio do uso de portas lógicas <i>CNOT</i> e operadores Hadamard.	19
3	Esquema do código de Shor para correção de um ruído arbitrário, por meio do uso de portas lógicas <i>CNOT</i> e de operadores Hadamard.	20
4	Esquema do circuito do protocolo de feedback, considerando os <i>qubits</i> de teste como estados $ \phi\rangle$. O <i>qubit</i> -alvo $ \psi\rangle$ e os <i>qubits</i> de teste passam por um canal quântico ruidoso \mathcal{E} . Em seguida, são realizadas medições nos <i>qubits</i> de teste. Se no máximo um <i>qubit</i> de teste estiver em um estado diferente de seu estado inicial, nenhuma ação é realizada no <i>qubit</i> -alvo. Caso contrário, um operador correspondente ao ruído do canal é aplicado.	22
5	Comportamento da fidelidade independente de estado em um canal de <i>bit-flip</i> (ou <i>phase-flip</i>) em função de p	28
6	Comportamento da fidelidade independente de estado em um canal de <i>bit-phase-flip</i> , em função de p_1 e p_2	30
7	Corte da superfície apresentada na Figura 6 em função de p_1 , mantendo valores fixos de p_2	31
8	Comportamento da coerência independente de estado em um canal de <i>bit-flip</i> em função de p	32
9	Comportamento da coerência independente de estado em um canal de <i>phase-flip</i> em função de p	33
10	Comportamento da coerência independente de estado em um canal de <i>bit-flip</i> e de <i>phase-flip</i> em função de p_1 e p_2	35

11 Cortes da superfície apresentada na Figura 10 em função de p_1 para valores fixos
de p_2 36

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Computação Quântica	9
1.1.1	Visão Geral	9
1.1.2	Correção de ruído	10
1.2	Objetivos Gerais	11
1.2.1	Objetivos específicos	11
2	Fundamentação Teórica	12
2.1	Descrição de um Qubit	12
2.1.1	Vetor de estado	12
2.1.2	Matriz densidade	13
2.2	Descrição do Ruído	14
2.2.1	Operadores de Kraus	14
2.2.2	Matrizes de Pauli	14
2.3	Quantificadores	16
2.3.1	Fidelidade	16
2.3.2	Coerência	17
2.3.3	Valores Médios	17
2.4	Correção de Ruído Quântico	18
2.4.1	Código de Repetição de Três Qubits	18
2.4.2	Código de Shor	19
3	Protocolo Baseado em Feedback	21
3.1	Motivação	21
3.2	Esquema	21

3.3	Hipóteses Iniciais	23
4	Metodologia	24
4.1	Estados finais	24
4.1.1	Caso controle	24
4.1.2	Código de Repetição	24
4.1.3	Código de Shor	25
4.1.4	Protocolo de Feedback	25
4.2	Avaliação dos Quantificadores	26
4.2.1	Fidelidade	26
4.2.2	Coerência	26
5	Resultados e Discussão	27
5.1	Fidelidade	27
5.1.1	Um Tipo de Ruído	27
5.1.2	Dois Tipos de Ruído	29
5.2	Coerência	31
5.2.1	Um tipo de ruído	31
5.2.2	Dois tipos de Ruído	34
6	Conclusão	38
6.0.1	Aplicações Futuras	39
6.0.2	Considerações Finais	39

Capítulo 1

Introdução

1.1 Computação Quântica

1.1.1 Visão Geral

A computação quântica tem atraído a atenção de uma série de grupos de pesquisa ao redor do mundo devido ao seu imenso potencial para resolver problemas extremamente complexos, que atualmente são praticamente impossíveis de resolver com computadores clássicos [1, 2, 3, 4]. Essa área de estudo promete transformar completamente diversos campos da ciência e da tecnologia, desde a resolução de questões matemáticas complexas até a otimização de processos industriais e avanços em áreas de ponta, como a inteligência artificial (IA) e a química quântica [5, 6, 7, 8].

Uma das bases fundamentais da computação quântica é o conceito de *qubits*, que são unidades de informação que, ao contrário dos bits tradicionais (que podem ser 0 ou 1), podem representar múltiplos estados ao mesmo tempo por meio do fenômeno da superposição. Isso permite que os computadores quânticos realizem uma quantidade colossal de cálculos simultaneamente, algo impensável para as máquinas clássicas, que processam as informações de forma sequencial [9, 10, 11, 12].

Dentre as aplicações mais impactantes está a criptografia, onde a computação quântica promete quebrar sistemas de segurança atualmente usados para proteger dados, como a criptografia RSA, baseados no fatoramento de grandes números inteiros [13]. Além disso, a computação quântica tem potencial para acelerar significativamente processos de busca em bancos de dados, onde a capacidade de realizar buscas em vastas quantidades de dados de forma mais eficiente

poderia revolucionar a indústria de TI [14, 15, 16].

Outro campo onde a computação quântica pode ter um impacto profundo é na otimização de problemas complexos, como aqueles encontrados em logística e inteligência artificial. Em setores como transporte, manufatura e até mesmo na análise de dados em tempo real, os algoritmos quânticos poderiam ser usados para encontrar soluções ótimas em cenários altamente dinâmicos e com grande volume de variáveis [5, 6, 7].

Além disso, na área de química quântica, a simulação precisa de moléculas e reações químicas poderia abrir novos caminhos para o desenvolvimento de medicamentos mais eficazes, novos materiais e soluções energéticas inovadoras. A capacidade de modelar com precisão o comportamento dos átomos e moléculas pode transformar o processo de pesquisa e acelerar descobertas científicas em níveis nunca antes imaginados [8, 9].

Com a constante evolução dessa tecnologia, espera-se que a computação quântica não só resolva problemas que atualmente são inatingíveis para os computadores clássicos, mas também leve a uma revolução na forma como lidamos com dados, processamento de informações e, em última análise, com as complexidades do mundo natural e artificial. A computação quântica está, assim, posicionada para ser uma das mais importantes inovações do século XXI, com um potencial disruptivo que pode remodelar a sociedade de maneiras que ainda estamos começando a entender.

1.1.2 Correção de ruído

No mundo real, nenhuma operação quântica é realizada de forma ideal. Portanto, para o pleno desenvolvimento dessas tecnologias, é necessário aprimorar as ferramentas existentes para a correção de ruídos. Esse desafio é ainda mais complexo devido ao fato de que a teoria clássica bem desenvolvida de correção de erros não se aplica diretamente ao ambiente quântico, devido a fenômenos únicos, como o teorema da não clonagem e o colapso da função de onda resultante das medições. Esses conceitos fundamentais da física quântica tornam a correção de erros em sistemas quânticos um campo extremamente desafiador [17, 18].

Desde a introdução do primeiro código de correção de ruído quântico, proposto por Peter Shor [19, 20], uma série de códigos de correção de erros foi sugerida, incluindo os códigos estabilizadores, códigos de superfície e códigos topológicos, entre outros [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27]. Contudo, os protocolos estabelecidos para correção de ruídos quânticos geralmente operam sob a premissa de que o ambiente do *qubit* está bem regulado, o que garante uma

interferência mínima de ruídos no sistema. Quando essa premissa não é cumprida — por exemplo, em ambientes com altos níveis de distúrbios ou em sistemas quânticos mais complexos — esses protocolos enfrentam sérias dificuldades. Nesse contexto, os métodos de correção de erros precisam ser adaptados ou aprimorados para lidar com condições de ruído mais intensas e imprevisíveis, o que é uma das grandes barreiras para a implementação prática e a escalabilidade dos computadores quânticos [28, 29].

1.2 Objetivos Gerais

Propõe-se como objetivo deste trabalho apresentar um protocolo de correção de ruído quântico baseado em feedback, avaliando sua eficiência através de quantificadores teóricos e comparando os resultados obtidos para o protocolo com métodos de correção de ruído quânticos disponíveis na literatura.

1.2.1 Objetivos específicos

- Estudar a descrição matemática de um *qubit* em sistemas abertos;
- Propor um novo protocolo de correção de ruído baseado em feedback;
- Fundamentar quantificadores aplicáveis à correção de ruído;
- Comparar o protocolo apresentado com outros protocolos já registrados na literatura.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Descrição de um Qubit

Para entendermos o funcionamento do protocolo, devemos partir da unidade básica da computação quântica, o *qubit*.

2.1.1 Vetor de estado

O poder computacional da computação quântica se deve ao fato de, diferente dos bits clássicos, que assumem os valores 0 ou 1, a descrição completa dos bits quânticos é dada por uma combinação linear dos estados de base do sistema (denominados base computacional e dados por $|0\rangle$ e $|1\rangle$), dada por

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Vale explicitar a representação dos vetores da base e do vetor de estado

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Porém, para fins de análise, podemos explorar características físicas dessa descrição para simplificá-la. Primeiramente, consideremos a interpretação estatística da mecânica quântica, que garante que a soma dos módulos dos coeficientes de α e β deve ser igual a 1, possibilitando

que utilizemos parâmetro A tal que

$$A = |\alpha|^2, \quad 1 - A = |\beta|^2. \quad (4)$$

Desta forma, é criado um vínculo entre α e β através de seus módulos. Portanto, é interessante adotarmos a representação polar dos número complexos utilizados

$$|\psi\rangle = \sqrt{A}e^{-i\delta_1} |0\rangle + \sqrt{1-A}e^{-i\delta_2} |1\rangle, \quad (5)$$

onde δ_1 e δ_2 são números reais entre 0 e 2π . Em seguida, é conveniente lembrarmos da propriedade da fase global dos estados quânticos, que estabelece

$$|\psi\rangle = e^{-i\delta} |\psi\rangle, \quad (6)$$

tal que $\delta \in [0, 2\pi]$. Sendo assim, podemos multiplicar a Equação 7 por e^{δ_1} , obtendo

$$|\psi\rangle = \sqrt{A} |0\rangle + \sqrt{1-A}e^{-i(\delta_2-\delta_1)} |1\rangle, \quad (7)$$

Por fim, denominemos o parâmetro de diferença de fase ($\delta_2 - \delta_1$) como γ , de forma temos nossa nova descrição do *qubit* como

$$|\psi\rangle = \sqrt{A} |0\rangle + \sqrt{1-A}e^{-i\gamma} |1\rangle. \quad (8)$$

Daqui em diante, sempre que nos referimos ao vetor de estado $|\psi\rangle$ utilizaremos sua descrição a partir da Equação 8, tendo em vista que nela o *qubit* é caracterizado apenas por dois números reais, facilitando nossas futuras análises.

2.1.2 Matriz densidade

Para desenvolvimentos posteriores, é útil nos valermos do conceito de operador densidade ou matriz densidade. Tal ferramenta permite uma descrição mais geral do estado quântico, utilizada principalmente caso ele seja composto (misto), emaranhado ou caso haja imperfeições na sua preparação [9, 30]. Desta forma, podemos descrever o operador densidade a partir do estado descrito pela Equação 8 como

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| \quad \Rightarrow \quad \rho = \begin{bmatrix} A & \sqrt{A(1-A)}e^{-i\gamma} \\ \sqrt{A(1-A)}e^{i\gamma} & 1-A \end{bmatrix}. \quad (9)$$

2.2 Descrição do Ruído

Nesta seção, começaremos a abordar o comportamento de sistemas quânticos de forma mais realista, ao passo que, a partir de agora descreveremos como qubits interagem com o meio, passando o modelo de sistema fechado para sistema aberto [9].

Para tanto, utilizaremos como ferramental o formalismo de operações quânticas, em específico a notação de Kraus, atuando no estado descrito na seção anterior.

2.2.1 Operadores de Kraus

Para modelar o ruído do canal, podemos considerar um operador de soma atuando no espaço de Hilbert associado a cada *qubit*, onde o estado de saída $\mathcal{E}(\rho)$ é obtido pela ação das matrizes de Kraus $\{E_i\}$ sobre o estado de entrada ρ , conforme descrito a seguir [9, 31]

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger, \quad (10)$$

onde a seguinte condição deve ser respeitada

$$\sum_i E_i E_i^\dagger = \mathbb{I}, \quad (11)$$

onde \mathbb{I} é a matriz identidade.

Além disso, é possível considerar mais de um ruído agindo de forma independente no mesmo sistema. Essa composição é realizada através do produto das matrizes dos ruídos envolvidos, conforme descrito em [32]

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{i,j} E_i E_j \rho E_j^\dagger E_i^\dagger, \quad (12)$$

onde os conjuntos $\{E_i\}$ e $\{E_j\}$ descrevem tipos diferentes de ruído.

2.2.2 Matrizes de Pauli

No presente trabalho, estamos interessados na análise de canais quânticos que apresentam ruídos dos tipos *bit-flip* e *phase-flip*, além da situação em que ambos ocorrem simultaneamente no mesmo canal. Tais ruídos, quando agem individualmente, são associados às matrizes de Pauli, sendo descritos da seguinte forma

$$E_0 = \sqrt{p}\sigma_j, \quad E_1 = \sqrt{p}\mathbb{I}, \quad (13)$$

onde σ_j representa a matriz de Pauli associada ao ruído, \mathbb{I} é a matriz identidade, p é o parâmetro que descreve o canal e $\bar{p} = (1 - p)$.

Vale ressaltar que, no caso de mais de um ruído agindo simultaneamente no sistema, é necessário partir da descrição apresentada na Equação 12.

Bit-flip

O ruído do tipo *bit-flip* é descrito pela atuação da matriz de Pauli σ_x , que transforma $|0\rangle$ em $|1\rangle$ e vice-versa, conforme descrito pela Equação 13, sendo suas matrizes e o estado final, respectivamente

$$E_0 = \sqrt{\bar{p}}\sigma_x, \quad E_1 = \sqrt{p}\mathbb{I}. \quad (14)$$

$$\mathcal{E}^{BF}(\rho) = p\rho + \bar{p}\rho_x, \quad (15)$$

onde $\rho_x = \sigma_x\rho\sigma_x$.

Podemos notar pela Equação 15 que o estado final pode ser entendido como uma combinação entre o estado inicial e sua versão operada pelo operador Pauli σ_x . Desta forma, dado que $\bar{p} = (1 - p)$, é possível interpretar \bar{p} como sendo a probabilidade do canal sofrer a inversão do ruído e p como seu conjugado.

Phase-flip

De forma semelhante ao caso anterior, o ruído do tipo *phase-flip* é descrito pela atuação da matriz de Pauli σ_z e pode ser interpretado como um ruído que altera o estado quântico de entrada de $|+\rangle$ para $|-\rangle$ e vice-versa, com probabilidade \bar{p} . O estado final é descrito da seguinte forma

$$E_0 = \sqrt{\bar{p}}\sigma_z, \quad E_1 = \sqrt{p}\mathbb{I}, \quad (16)$$

$$\mathcal{E}^{PhF}(\rho) = p\rho + \bar{p}\rho_z, \quad (17)$$

onde $\rho_z = \sigma_z\rho\sigma_z$.

Bit-Phase-flip

Se considerarmos a ocorrência simultânea e independente de ruídos do tipo *bit-flip* e *phase-flip* no *qubit* de entrada no mesmo canal quântico, podemos descrever o estado quântico de saída através da matriz densidade obtida pela ação dos operadores definidos nas Equações 13

e 14, levando à seguinte expressão

$$\mathcal{E}^{BPhF}(\rho) = p_1 p_2 \rho + \bar{p}_1 p_2 \rho_x + p_1 \bar{p}_2 \rho_z + \bar{p}_1 \bar{p}_2 \rho_{xz}, \quad (18)$$

onde $\rho_{xz} = \sigma_x \sigma_z \rho \sigma_z \sigma_x$ (ou $\rho_{xz} = \sigma_z \sigma_x \rho \sigma_x \sigma_z$). Aqui, foi estabelecido que \bar{p}_1 é a probabilidade da ocorrência do ruído do tipo *bit-flip* e \bar{p}_2 é a probabilidade de uma alteração no estado de entrada do sistema quântico devido à ocorrência do ruído do tipo *phase-flip*. É interessante notar que cada termo da soma na Equação 18 está correlacionado ao estado inicial a menos de eventual atuação das matrizes de Pauli e sua respectiva probabilidade após o estado inicial passar pelo canal de ruído correspondente.

2.3 Quantificadores

2.3.1 Fidelidade

A representação de estados quânticos como vetores complexos torna relevante a utilização de conceitos como distância entre estados. Sendo assim, existem diversos quantificadores de distância e baseados em distância entre dois estados quânticos, como por exemplo as distância de Hillbert-Schmidt, do traço e de Bures [33]. Tal conceito se torna fundamental quando estamos interessados em saber como a informação se preserva mediante processos, ou o quão similares dois estados são [9].

No presente trabalho, será adotada como quantificador de distância a fidelidade, descrita da seguinte forma para estados quânticos puros [34]

$$F = Tr[\rho \cdot \mathcal{E}(\rho)] \quad (19)$$

onde ρ representa a matriz densidade associada ao estado inicial e $\mathcal{E}(\rho)$ o estado após a aplicação do ruído e eventuais correções.

Dentre as interpretações da fidelidade, é interessante ressaltarmos o ponto de vista estatístico pois, nesse contexto, podemos vê-la como a probabilidade de que medidas realizadas em $\mathcal{E}(\rho)$ reproduzam o comportamento esperado para ρ . Sendo assim, a fidelidade pode ser vista como a probabilidade de que o ruído seja devidamente corrigido.

Também vale a pena ressaltar que, devido à natureza dos *qubits* e das matrizes envolvidas na descrição do ruído, a função F será, *a priori*, função de A , γ e $\{p_n\}$, sendo $\{p_n\}$ o conjunto de parâmetros que descrevem os ruídos sofridos.

2.3.2 Coerência

Tendo importância fundamental em fenômenos quânticos como interferência e emaranhamento, a coerência é uma característica própria de sistemas quânticos, aqui descrita pela norma l_1 como [35]

$$\mathcal{C}(\rho) = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}|, \quad (20)$$

onde ρ_{ij} são os elementos da matriz ρ e a soma se estende por todos os elementos fora da diagonal principal. A avaliação dos valores da coerência foi tomada levando em conta o estado final sendo, portanto, função de A , γ e $\{p_n\}$.

2.3.3 Valores Médios

Como visto acima, os quantificadores utilizados se mostram funções de várias variáveis, dificultando suas análises e eventuais comparações. Porém, utilizando propriedades da situação analisada, podemos criar novos quantificadores independentes do estado inicial.

Seguindo uma abordagem semelhante à feita em [34], tomemos uma função quantificadora Q que dependa tanto do estado inicial quanto de uma quantidade finita de parâmetros $\{p_n\}$

$$Q = Q(A, \gamma, p_1, p_2, \dots, p_n), \quad (21)$$

onde A e γ determinam o estado inicial, que está submetido à n tipos diferentes de ruído representados por $\{p_n\}$.

Dado que para a comunicação não deve haver valores prioritários de A e γ , podemos assumir que seus valores possíveis são equiprováveis, de modo que em uma grande quantidade de repetições todos tenham a mesma frequência. Com isso em mente, torna-se viável e útil a descrição de um valor médio para Q , definido pela sua integral em todos os estados possíveis, normalizada pelo tamanho do “espaço de configurações”,

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 Q(A, \gamma, p_1, p_2, \dots, p_n) dA d\gamma. \quad (22)$$

Além disso, também podemos considerar que o canal varia de forma aleatória em longos períodos de tempo, de forma que, mesmo que p_j possa ser considerado constante em cada execução, seus valores possíveis tenham todos a mesma frequência em um grande número de repetições. Desta forma, é possível estabelecer um resultado numérico que descreve o desempenho do quantificador avaliado em um grande número de repetições,

$$\langle \overline{Q} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \langle Q(p_1, p_2, \dots, p_n) \rangle dp_1 dp_2 \dots dp_n. \quad (23)$$

Estabelecidas as ideias dos valores médios, podemos aplicar as definições utilizadas na fidelidade e na coerência, assim obtemos

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 F(A, \gamma, p_1, p_2, \dots, p_n) dA d\gamma, \quad (24)$$

$$\langle \overline{F} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \langle F(p_1, p_2, \dots, p_n) \rangle dp_1 dp_2 \dots dp_n, \quad (25)$$

$$\langle C \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 C(A, \gamma, p_1, p_2, \dots, p_n) dA d\gamma, \quad (26)$$

$$\langle \overline{C} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \langle C(p_1, p_2, \dots, p_n) \rangle dp_1 dp_2 \dots dp_n. \quad (27)$$

2.4 Correção de Ruído Quântico

2.4.1 Código de Repetição de Três Qubits

A informação é codificada em três qubits, e o código atua após uma comparação entre os estados de entrada e saída da seguinte forma: se apenas um dos qubits sair do canal em um estado diferente de seu estado original, ele é revertido; no entanto, se dois qubits estiverem em estados diferentes dos originais, o qubit que permaneceu inalterado é invertido. Caso contrário, nenhuma ação é realizada.

Em caso de *bit-flip*, basta aumentar a dimensão da base, de forma que a representação do *qubit* lógico se dará por três *qubits* físicos. Sendo assim, dada a representação de um estado qualquer $|\psi\rangle$, ficamos com [9, 27]

$$|0\rangle \longrightarrow |0_L\rangle \equiv |000\rangle \quad (28a)$$

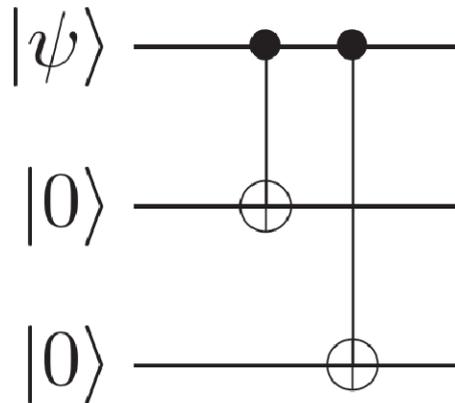
$$|1\rangle \longrightarrow |1_L\rangle \equiv |111\rangle \quad (28b)$$

$$|\psi\rangle = \sqrt{A} e^{-i\gamma} |0_L\rangle + \sqrt{B} |1_L\rangle \longrightarrow \sqrt{A} e^{-i\gamma} |000\rangle + \sqrt{B} |111\rangle \quad (28c)$$

O código funciona de forma análoga tanto para *bit-flip* quanto para *phase-flip*, havendo somente diferença na base utilizada. Segue nas Figuras 1 e 2 as representações de circuitos dos códigos de repetição de três qubits para *bit-flip* e *phase-flip*, respectivamente.

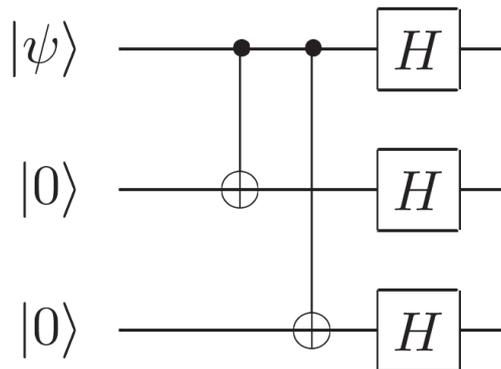
Vale enfatizar o fato de não ser possível aplicar o código de repetição de três qubits para canais com mais de um ruído, e que sua tolerância máxima é de um erro [20, 9, 27].

Figura 1: Esquema do código de repetição de três *qubits* para bit-flip por meio do uso de portas lógicas *CNOT*.



Fonte: [9].

Figura 2: Esquema do código de repetição de três *qubits* para phase-flip por meio do uso de portas lógicas *CNOT* e operadores Hadamard.



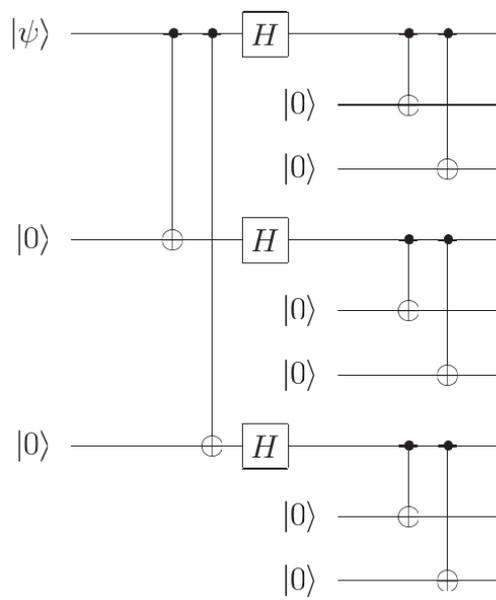
Fonte: [9].

2.4.2 Código de Shor

Capaz de proteger um *qubit* contra qualquer erro arbitrário, o código de Shor é construído a partir da combinação entre os códigos de repetição de três *qubits* de *bit-flip* e de *phase-flip*. Isso resulta na codificação de um *qubit* lógico em nove *qubits* físicos. Como consequência, a capacidade de correção de erros é estendida para lidar tanto com um único erro do tipo *bit-flip* quanto com um único erro do tipo *phase-flip* [9, 36, 20].

Pesquisas posteriores mostraram ser possível proteger um *qubit* com um mínimo de cinco *qubits* físicos [37], porém, para os nossos fins, será usado de comparativo o código de Shor pelo fato de ser melhor estabelecido e facilitar o entendimento.

Figura 3: Esquema do código de Shor para correção de um ruído arbitrário, por meio do uso de portas lógicas *CNOT* e de operadores Hadamard.



Fonte: [9].

Capítulo 3

Protocolo Baseado em Feedback

3.1 Motivação

Sendo uma das principais propriedades da computação quântica, o emaranhamento quântico também é considerado um recurso valioso, utilizado em codificação superdensa, protocolos de criptografia e teleporte, por meio da ação de matrizes de Pauli em um dos *qubits* para afetar o sistema todo [9, 33]. Desta forma, dentro de versões generalizadas desses protocolos, é possível realizar a tarefa desejada mesmo que haja alteração no par emaranhado [34].

Além disso, o fato de haver eventuais aplicações de matrizes de Pauli estabelece uma conexão com a correção de ruído descrita na Seção 2.4, principalmente levando em conta o fato de que duas aplicações consecutivas de um mesmo operador de Pauli retorna o sistema para seu estado inicial.

Desta forma, surgiu a ideia de monitorar o comportamento do canal por meio de avaliações frequentes, de modo que a correção só seja feita caso necessária e, em caso de haver aplicação de operadores de Pauli na tarefa realizada, o próprio canal agiria como parte do protocolo, resultando em possível economia de outros recursos que seriam empregados para alterar o estado.

3.2 Esquema

O protocolo que apresentamos aqui, denominado protocolo de feedback, baseia-se no uso de *qubits* de teste para avaliar a probabilidade de ocorrência de um determinado tipo de ruído em um canal quântico. Com base nessa análise, decide-se aplicar ou não um operador de

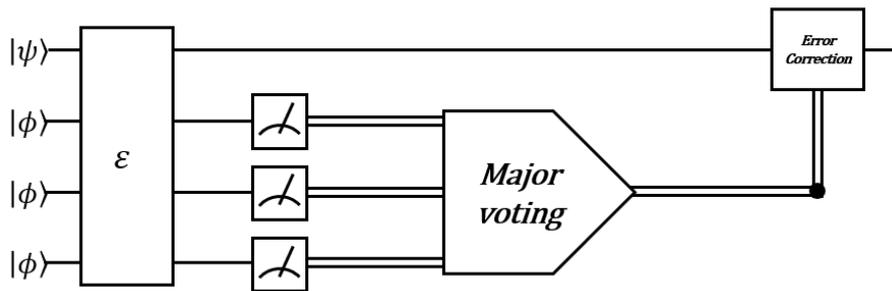
correção ao *qubit*-alvo que transmite a informação após passar pelo canal. Esse operador de correção é escolhido com base no tipo de ruído apresentado pelo canal quântico. Neste trabalho, consideramos ruídos dos tipos *bit-flip* e *phase-flip*.

A análise da qualidade do canal quântico consiste em enviar pelo canal três *qubits* de teste preparados em estados conhecidos, dados por combinações da forma

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\xi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\xi_2\rangle, \quad (29)$$

onde $|\xi_1\rangle$ e $|\xi_2\rangle$ são os autovalores da matriz de Pauli relacionada ao ruído presente no canal. Esses estados específicos são os mais afetados pelo canal, pois estão equidistantes dos autovetores da matriz associada, que representam os estados não afetados pelo operador. Como o tipo de ruído ao qual eles podem estar sujeitos é conhecido, realiza-se uma medição em relação à base associada ao ruído possivelmente sofrido. Se dois ou mais *qubits* forem invertidos, o operador de Pauli correspondente ao ruído do canal é aplicado novamente aos *qubits*-alvo após passarem pelo canal. Caso contrário, nenhuma ação adicional é tomada. Um esquema do protocolo é ilustrado na Figura 4 .

Figura 4: Esquema do circuito do protocolo de feedback, considerando os *qubits* de teste como estados $|\phi\rangle$. O *qubit*-alvo $|\psi\rangle$ e os *qubits* de teste passam por um canal quântico ruidoso \mathcal{E} . Em seguida, são realizadas medições nos *qubits* de teste. Se no máximo um *qubit* de teste estiver em um estado diferente de seu estado inicial, nenhuma ação é realizada no *qubit*-alvo. Caso contrário, um operador correspondente ao ruído do canal é aplicado.



Fonte: autoria própria.

Uma vantagem notável dessa proposta é a possibilidade de monitorar o canal quântico caso a probabilidade de ocorrência de ruído seja uma função que varia ao longo do tempo. Ao verificar periodicamente a qualidade do canal com os *qubits* de teste, é possível ajustar a correção aplicada aos *qubits*-alvo de acordo com as mudanças nas propriedades do canal. Em

nossas análises, consideramos que as verificações de qualidade ocorrem em intervalos de tempo mais curtos do que o tempo necessário para que as probabilidades de ocorrência de ruído variem.

Para dois tipos de ruídos atuando simultaneamente, o protocolo é realizado considerando o procedimento descrito acima para cada um dos ruídos sucessivamente, tendo em mente que os *qubits* de teste para cada tipo de ruído são imunes ao outro. Essa abordagem é possível devido à independência entre os ruídos *bit-flip* e *phase-flip*, permitindo a escolha de três estados de teste para *bit-flip* que sejam imunes ao *phase-flip* e vice-versa, simplesmente selecionando os autovetores associados às respectivas matrizes. Assim, são necessários seis *qubits* de teste para avaliar um canal que apresenta ambos os tipos de ruído.

3.3 Hipóteses Iniciais

É importante ressaltar que o bom funcionamento do protocolo está condicionado a alguns comportamentos do canal quântico. Primeiramente, os ruídos devem ser descritos por *bit-flip* e/ou *phase-flip*, condição que é não difícil de atingir, tendo em vista que a aplicação desses operadores em conjunto descreve uma transformação arbitrária do estado.

Em segundo lugar, o parâmetro que descreve o ruído deve ser aleatório e variar de forma suave no tempo, de modo que dentro do tempo de execução do protocolo sua variação seja próxima de zero, mas de uma execução para outra possa haver variações significativas. Por fim, consideraremos que a atuação do *bit-flip* e do *phase-flip* são independentes, de forma que qualquer possível interação intermediária entre as operações seja desprezível.

Capítulo 4

Metodologia

4.1 Estados finais

Para avaliarmos tanto o protocolo proposto quanto os já presentes na literatura, devemos primeiramente encontrar uma forma de descrever o estado final do qubit após a ação do ruído e da correção. Para tanto, reforçemos as condições de funcionamento impostas no protocolo de feedback e as consideremos válidas também para os casos comparativos.

Neste cenário, todas as condições estabelecidas na Seção 3.3 serão consideradas como atendidas para todos os casos avaliados, de maneira que não haja privilégio para a nossa proposta.

4.1.1 Caso controle

Façamos como controle o caso no qual nenhum protocolo é aplicado, sendo sua descrição puramente a aplicação das matrizes de ruído apresentadas na Seção 2.2, partindo do estado inicial como descrito na Seção 2.1 e aplicando os quantificadores expostos na Seção 2.3

$$\mathcal{E}^{BF}(\rho) = p\rho + \bar{p}\rho_x, \quad (30)$$

$$\mathcal{E}^{PhF}(\rho) = p\rho + \bar{p}\rho_z. \quad (31)$$

4.1.2 Código de Repetição

Tomemos uma interpretação probabilística do sistema, considerando o estado final, apresentado na Equação 13, de modo que o valor de p represente a probabilidade do estado após aplicado o ruído ser igual ao original e, conseqüentemente, \bar{p} a probabilidade do estado ser

invertido na base da matriz de Pauli correspondente. Partindo disso e considerado que cada *qubit* passa pelo canal de forma independente, é natural escrevermos o estado final de modo que as novas probabilidades sejam descritas pela chance de haver detecção de erro, segundo a distribuição binomial, de forma análoga ao apresentado no Capítulo 10 do livro *Quantum Computation and Quantum Information* [9]. Desta forma, obtemos os estados finais para *bit-flip* e *phase-flip*, no código de repetição de três qubits respectivamente como

$$\mathcal{E}_{RC}^{BF}(\rho) = (p^3 + 3\bar{p}p^2)\rho + (\bar{p}^3 + 3p\bar{p}^2)\rho_x, \quad (32)$$

$$\mathcal{E}_{RC}^{PhF}(\rho) = (p^3 + 3\bar{p}p^2)\rho + (\bar{p}^3 + 3p\bar{p}^2)\rho_z. \quad (33)$$

4.1.3 Código de Shor

Como o Código de Shor corrige *bit-flip* e *phase-flip* ao mesmo tempo, a construção de seu estado final se dá combinando os estados apresentados nas Equações 32 e 33, de modo a considerar as combinações possíveis entre as distribuições binomiais e suas respectivas matrizes associadas. Sendo assim, ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{SC}^{BPhF}(\rho) = & (p_1^3 + 3\bar{p}_1p_1^2)(p_2^3 + 3\bar{p}_2p_2^2)\rho + (\bar{p}_1^3 + 3p_1\bar{p}_1^2)(p_2^3 + 3\bar{p}_2p_2^2)\rho_x + \\ & (p_1^3 + 3\bar{p}_1p_1^2)(\bar{p}_2^3 + 3p_2\bar{p}_2^2)\rho_z + (\bar{p}_1^3 + 3p_1\bar{p}_1^2)(\bar{p}_2^3 + 3p_2\bar{p}_2^2)\rho_{xz}, \end{aligned} \quad (34)$$

onde p_1 está associado ao *bit-flip* e p_2 ao *phase-flip*.

Caso partíssemos da Equação 18 e desenvolvêssemos a interpretação estatística, obteríamos o mesmo resultado.

4.1.4 Protocolo de Feedback

Diferentemente dos códigos baseado em repetição, em nosso protocolo não há necessidade de qualquer tipo de medida no *qubit* que carrega a informação antes da aplicação da correção, tendo em vista que os *qubits*-teste apenas avaliam o canal. Desta forma, se nos valermos da interpretação probabilística dos parâmetros $\{p_n\}$, chegamos a uma expressão dada pela soma do estado inicial com o final, pesados por suas combinações binomiais. Portanto, temos as expressões para os estados finais associados ao protocolo de feedback, considerando respectivamente, *bit-flip*, *phase-flip* e *bit-phase-flip*

$$\mathcal{E}_{FP}^{BF}(\rho) = (p^3 + 3\bar{p}p^2)\rho + (\bar{p}^3 + 3p\bar{p}^2)\mathcal{E}^{BF}. \quad (35)$$

$$\mathcal{E}_{FP}^{PhF}(\rho) = (p^3 + 3\bar{p}p^2)\rho + (\bar{p}^3 + 3p\bar{p}^2)\mathcal{E}^{PhF}. \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{FP}^{BPhF}(\rho) = & (p_1^3 + 3\bar{p}_1p_1^2)(p_2^3 + 3\bar{p}_2p_2^2)\rho + (\bar{p}_1^3 + 3p_1\bar{p}_1^2)(p_2^3 + 3\bar{p}_2p_2^2)\mathcal{E}^{BF}(\rho) + \\ & (p_1^3 + 3\bar{p}_1p_1^2)(\bar{p}_2^3 + 3p_2\bar{p}_2^2)\mathcal{E}^{PhF}(\rho) + (\bar{p}_1^3 + 3p_1\bar{p}_1^2)(\bar{p}_2^3 + 3p_2\bar{p}_2^2)\mathcal{E}^{BPhF}(\rho), \end{aligned} \quad (37)$$

onde $\mathcal{E}^{BF}(\rho)$, \mathcal{E}^{PhF} e \mathcal{E}^{BPhF} são descritos pelas Equações 31, 17 e 18.

4.2 Avaliação dos Quantificadores

Para análise teórica do protocolo aqui apresentado, foram considerados os estados finais apresentados na Seção 4.1, relativos aos casos considerados, aplicados nas equações referentes aos quantificadores, mostrados no desenvolvimento da Seção 2.3.

Considerando somente um tipo de ruído, os casos abordados foram o sem correção, o código de repetição de três *qubits* e o protocolo de feedback, separando o *bit-flip* do *phase-flip*. Por outro lado, no cenário em que ambos ruídos agem simultaneamente e de forma independente, o código de repetição de três *qubits* foi substituído pelo código de Shor de nove *qubits*.

Para obtenção dos quantificadores escolhidos, suas respectivas médias e valores médios, foram utilizados métodos numéricos e analíticos, fazendo uso do software *Wolfram Mathematica*.

Além disso, também foi realizada a construção dos gráficos, utilizando a equação analítica encontrada, quando possível, e tomando a avaliação da função ponto a ponto, quando não.

4.2.1 Fidelidade

Todos os cálculos realizados para a fidelidade foram analíticos, possibilitando a construção explícita das funções envolvidas.

Desta forma, serão apresentadas as equações da fidelidade dependente do canal e do estado e dependente apenas do canal, com suas respectivas representações gráficas, tanto para o caso de um ruído quanto para o caso de dois, considerando os três comparativos.

4.2.2 Coerência

Para a coerência, a maior parte dos resultados obtidos foram numéricos, não havendo, portanto, funções explícitas para serem trabalhadas. Contudo, ainda foi possível a representação gráfica tomada ponto a ponto da coerência independente de estado e o cálculo numérico da coerência média.

Capítulo 5

Resultados e Discussão

5.1 Fidelidade

5.1.1 Um Tipo de Ruído

Análise independente de estado

Tendo em vista o fato de se tratar de uma situação de comunicação, devemos nos lembrar que não deve haver valores prioritários para o estado inicial do qubit, de forma que considerar a média de todos os estados possíveis se torna uma estratégia válida para a análise da fidelidade.

Sendo assim, utilizaremos a Equação 24, que descreve as médias, para descrever o comportamento da fidelidade independente de estado. Nesse caso, o resultado tanto para *bit-flip* quanto para *phase-flip* é o mesmo, possibilitando que ambos sejam descritos pelas Equações 38, 39 e 40 abaixo e pelo gráfico apresentado na Figura 5.

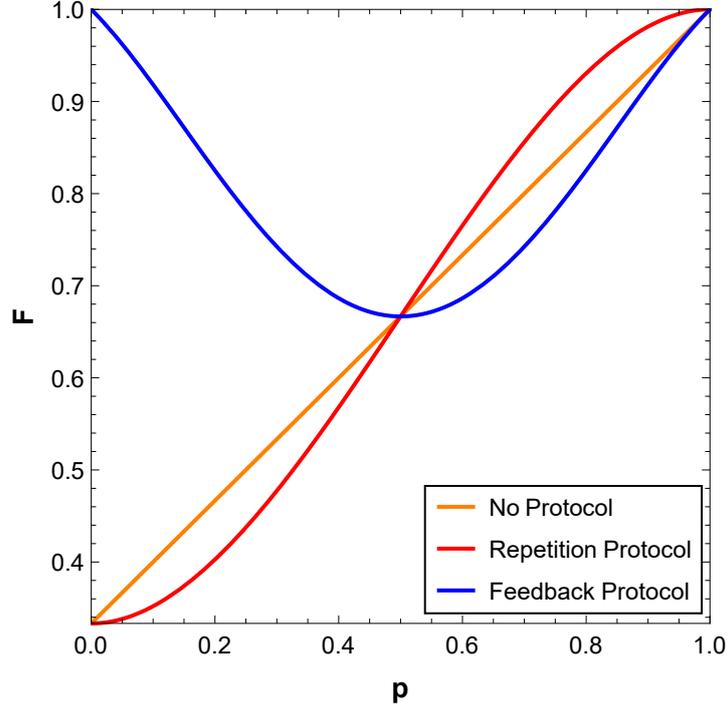
$$\langle F_{NP}(p) \rangle = \frac{1}{3}(1 + 2p), \quad (38)$$

$$\langle F_{RC}(p) \rangle = \frac{1}{3}(1 + 6p^2 - 4p^3), \quad (39)$$

$$\langle F_{FP}(p) \rangle = 1 - \frac{2}{3}(p + 3p^2 - 8p^3 + 4p^4). \quad (40)$$

Analisando as equações que descrevem a fidelidade no caso de apenas um *qubit*, é notável a disparidade que surge a medida que $p \rightarrow 0$, uma vez que o protocolo de feedback atinge seu máximo quando o valor de p tende tanto para 1 quanto para 0, apresentando uma simetria em torno de $p = \frac{1}{2}$ condizente com as ideias utilizadas em sua elaboração.

Figura 5: Comportamento da fidelidade independente de estado em um canal de *bit-flip* (ou *phase-flip*) em função de p .



Fonte: autoria própria.

Médias

Podemos considerar também que, para um canal cuja probabilidade de ocorrência de ruído varie de forma contínua e aleatória no tempo, não há valores de p preferíveis, de modo que é adequado tomar a média da fidelidade independente do estado em todos os possíveis valores para p . Podemos então aplicar a Equação 25 com $n = 1$, obtendo valores que representam o *bit-flip* ou o *phase-flip* agindo separadamente como

$$\langle \bar{F}_{NP} \rangle = \frac{2}{3}, \quad \langle \bar{F}_{RC} \rangle = \frac{2}{3}, \quad \langle \bar{F}_{FP} \rangle = \frac{4}{5}. \quad (41)$$

Notemos que as fidelidades médias entre o caso de controle sem correção e os códigos baseando em repetição foi a mesma para todos os casos com um qubit, fato que se justifica pela baixa tolerância a erros do código de repetição de três qubits, de modo que o desempenho dessas abordagem se mostra pior que não fazer nada a medida que o ruído aumenta.

Tendo em vista a simetria apresentada pelas fidelidades independentes de estado, a superioridade na média é esperada e se explica pela grande diferença entre o nosso protocolo e os códigos baseados em repetição, em especial para canais altamente ruidosos.

5.1.2 Dois Tipos de Ruído

De forma análoga ao caso onde havia apenas um ruído, consideraremos agora a fidelidade para o caso onde o *bit-flip* e o *phase-flip* agem em conjunto, porém de forma independente.

Análise independente de estado

Partindo da Equação 24 e seguindo o método apresentado na Seção 4.1 para a ação conjunta do *bit-flip* e do *phase-flip*, obtemos as equações para a fidelidade independente do estado apresentadas a seguir

$$\langle F_{NP}^{BP^{hF}}(p_1, p_2) \rangle = \frac{1}{3}(1 + 2p_1p_2), \quad (42)$$

$$\langle F_{SC}^{BP^{hF}}(p_1, p_2) \rangle = \frac{1}{3}[1 + 2p_1^2p_2^2(2p_1 - 3)(2p_2 - 3)], \quad (43)$$

$$\langle F_{FP}^{BP^{hF}}(p_1, p_2) \rangle = \frac{1}{9}(2p_1 - 3)(1 + 2p_1)[1 + 2p_1(p_1 - 1)](2p_2 - 3)(1 + 2p_2)[1 + 2p_2(p_2 - 1)], \quad (44)$$

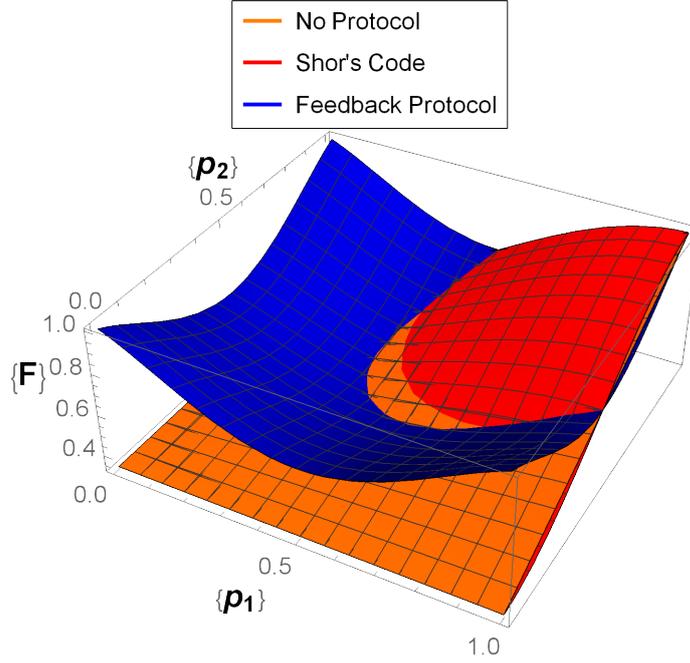
onde p_1 está associado ao *bit-flip* e p_2 ao *phase-flip*.

Agora, como há dois tipos distintos de ruído, a fidelidade independente de estado possui duas variáveis, o que faz com que sua representação gráfica seja dada por uma superfície, apresentada na Figura 6.

Porém, podemos notar que nas equações há uma simetria entre p_1 e p_2 , tendo em vista que, caso permutadas as ações dos ruídos, as equações não se alteram. Com isso em mente, a Figura 7 apresenta cortes tomados da superfície exposta na Figura a partir de valores fixos de p_2 . Cortes da superfície apresentada em em função de p_1 , com valores fixos de p_2 .

Observando com atenção a Figura 6, podemos notar o mesmo padrão de simetria para o protocolo de feedback observado no caso de somente um ruído. No caso anterior, tínhamos uma curva, agora temos uma superfície, desta forma, a simetria que era observada em $p = \frac{1}{2}$ agora é em torno de $\{p_1, p_2\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Além disso, temos mais uma vez a superioridade do nosso protocolo em regiões onde $\{p_1, p_2\} \rightarrow \{0, 0\}$.

Figura 6: Comportamento da fidelidade independente de estado em um canal de *bit-phase-flip*, em função de p_1 e p_2 .



Fonte: autoria própria.

Médias

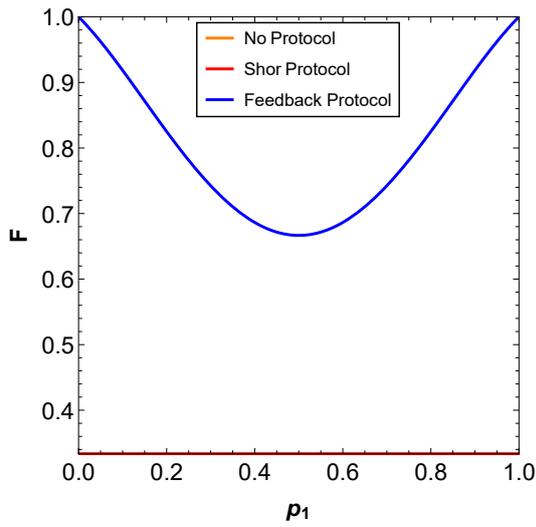
Considerando um grande número de repetições, podemos descrever a médias para a fidelidade, tendo em mente que agora há dois parâmetros ao invés de um, de modo que devemos utilizar a Equação 25 considerando $n = 2$

$$\langle \overline{F}_{NP}^{BPhF} \rangle = 0.50, \quad \langle \overline{F}_{SC}^{BPhF} \rangle = 0.50, \quad \langle \overline{F}_{FP}^{BPhF} \rangle = 0.64. \quad (45)$$

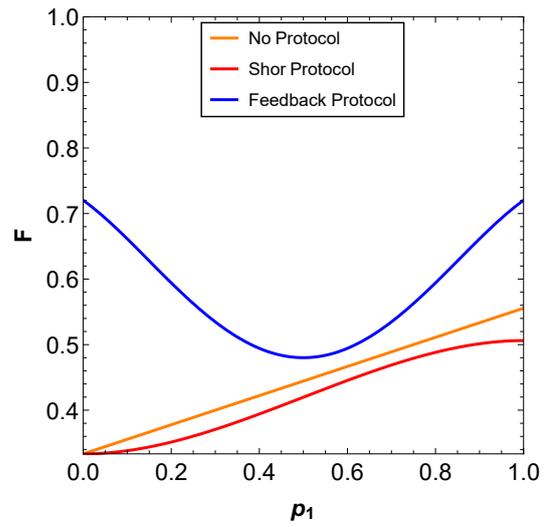
Notemos que as fidelidades médias entre o caso de controle sem correção e os códigos baseando em repetição foi a mesma para todos os casos, fato que se justifica pela baixa tolerância a erros do código de repetição de três qubits e do código de Shor, de modo que o desempenho dessas abordagem se mostra pior que não fazer nada a medida que o ruído aumenta.

Por outro lado, o protocolo de feedback se mostrou superior tanto para apenas um ruído quando para dois, no que diz respeito à fidelidade média. Tendo em vista a simetria apresentada pelas fidelidades independentes de estado, a superioridade na média é esperada e se explica pela grande diferença entre o nosso protocolo e os códigos baseados em repetição, em especial para canais altamente ruidosos.

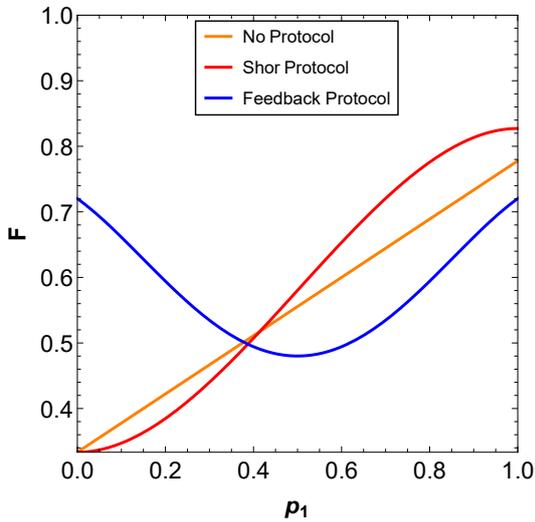
Figura 7: Corte da superfície apresentada na Figura 6 em função de p_1 , mantendo valores fixos de p_2 .



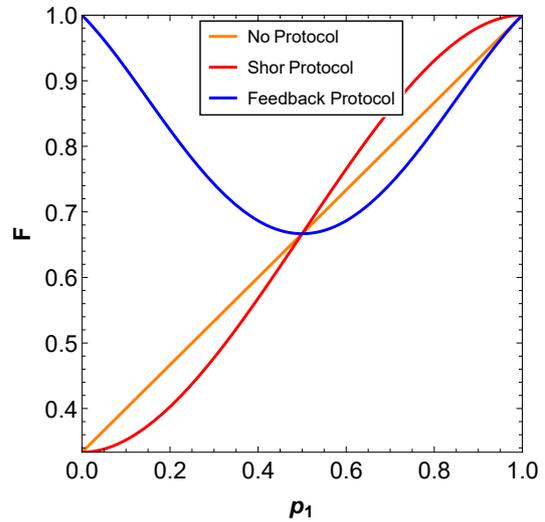
(a) $p_2 = 0$.



(b) $p_2 = 1/3$.



(c) $p_2 = 2/3$.



(d) $p_2 = 1$.

5.2 Coerência

5.2.1 Um tipo de ruído

Análise independente de estado

De forma análoga ao desenvolvimento anterior, comecemos pelas equações da coerência para cada um dos casos abordados. Como comentado, algumas das integrais necessárias para encontrar o valor da coerência independente de estado foram abordadas de forma numérica, sendo que nesses casos apresentamos a coerência em função da integral.

Isso posto, o resultado obtido para o *bit-flip* é descrito por

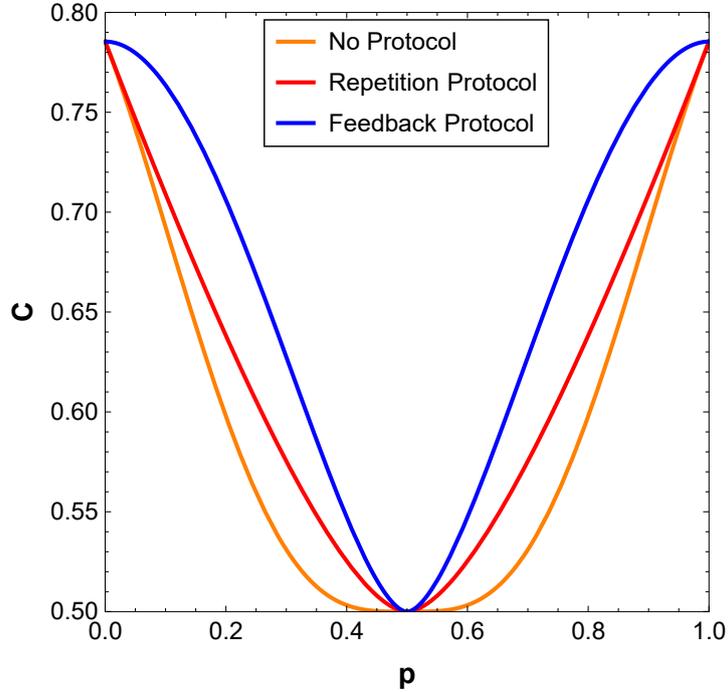
$$\langle C_{NP}^{BF}(p) \rangle = \frac{\pi}{4} (|e^{2i\gamma} - p(e^{2i\gamma} - 1)| + |1 + p(e^{2i\gamma} - 1)|), \quad (46)$$

$$\langle C_{RC}^{BF}(p) \rangle = \frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \gamma + (1 - 6p^2 + 4p^3)^2 \sin^2 \gamma} d\gamma, \quad (47)$$

$$\langle C_{FP}^{BF}(p) \rangle = \frac{\pi}{4} |1 - 2p| \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \gamma + (1 - 6p^2 + 4p^3)^2 \sin^2 \gamma} d\gamma. \quad (48)$$

Foi construído um gráfico tomando o valor da função apresentada na Equação 46 juntamente com a integral das Equações 47 e 48 tomadas ponto a ponto, apresentado na Figura 8.

Figura 8: Comportamento da coerência independente de estado em um canal de *bit-flip* em função de p .



Fonte: autoria própria.

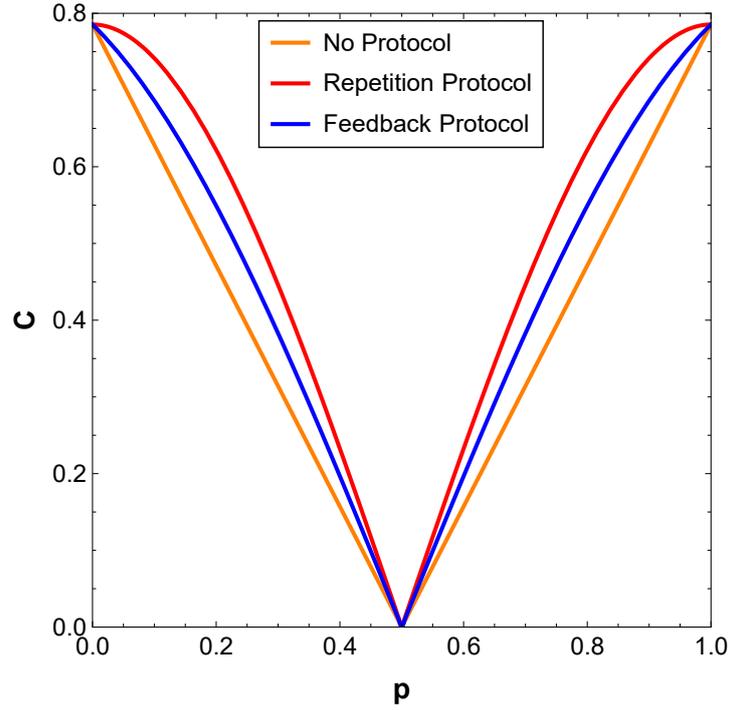
Prosseguindo, os mesmos passos do *bit-flip* foram reproduzidos no caso do *phase-flip*, resultando no gráfico apresentado na Figura 9 e nas seguintes equações

$$\langle C_{NP}^{PhF}(p) \rangle = \frac{\pi}{4} |1 - 2p|, \quad (49)$$

$$\langle C_{RC}^{PhF}(p) \rangle = \frac{\pi}{4} |1 - 6p^2 - 4p^3|, \quad (50)$$

$$\langle C_{FP}^{PhF}(p) \rangle = \frac{\pi |1 - 2p|}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{[\cos \gamma - 2p(p - \cos \gamma)]^2 + \sin^2 \gamma} d\gamma, \quad (51)$$

Figura 9: Comportamento da coerência independente de estado em um canal de *phase-flip* em função de p .



Fonte: autoria própria.

Os resultados obtidos para a coerência se diferem muito da fidelidade, sendo todas as equações da coerência independente de canal até então apresentadas simétricas em relação à $p = \frac{1}{2}$, como visto nas Figuras 8 e 9.

Além disso, podemos notar a superioridade do protocolo de feedback no que diz respeito a coerência no caso do bit-flip, porém, quando o phase-flip é considerado, nosso protocolo se mostrou inferior tanto ao código de correção quanto ao caso controle.

Por fim, é interessante ressaltar que os valores mínimos para o phase-flip são menores, há um ponto em $p = \frac{1}{2}$ no qual ela vai a zero para todos os protocolos. Tal fato se deve a relação entre o phase-flip e a coerência, como abordado em [9].

Médias

Mais uma vez, considerando um grande número de repetições, podemos tomar os valores médios integrando as equações obtidas para as coerências independentes de estado, obtendo os valores numéricos apresentados a seguir

$$\langle \overline{C}_{NP}^{BF} \rangle = 0.62, \quad \langle \overline{C}_{RC}^{BF} \rangle = 0.59, \quad \langle \overline{C}_{FP}^{BF} \rangle = 0.66. \quad (52)$$

$$\overline{C}_{NP}^{PhF} = 0.39, \quad \overline{C}_{RP}^{PhF} = 0.49, \quad \overline{C}_{FP}^{PhF} = 0.44. \quad (53)$$

As coerências médias refletiram o valor esperado, tendo em vista que os gráficos mantêm a mesma ordem para todos os valores de p .

5.2.2 Dois tipos de Ruído

Análise independente de estado

Tomaremos os dois tipos de ruído agindo simultaneamente, de modo que possamos construir o gráfico de superfície apresentado na Figura 10 e as seguintes equações para a coerência independente de estado

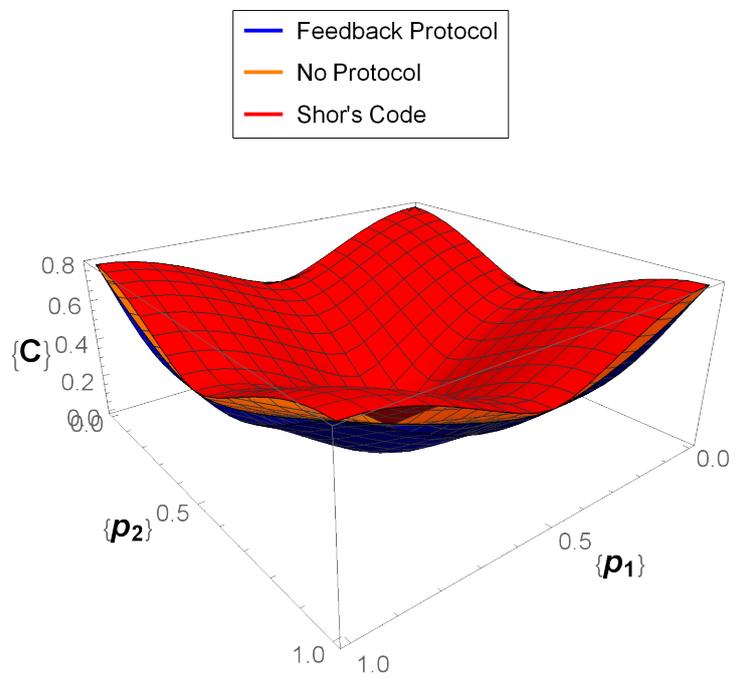
$$C_{NP}^{BPPhF}(p) = \frac{\pi}{8} \int_0^{2\pi} (|e^{2i\gamma}(p_1 - p_2) + p_2 + p_1 - 1| + |e^{2i\gamma}(p_1 + p_2 - 1) + p_1 - p_2|) d\gamma, \quad (54)$$

$$C_{SC}^{BPPhF}(p) = \frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} |(1 - 6p_1^2 + 4p_1^3) \cos \gamma + i(1 - 6p_2^2 + 4p_2^3) \sin \gamma| d\gamma, \quad (55)$$

$$C_{FP}^{BPPhF}(p) = \frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} |(1 - 2p_1)^2 [2p_1(p_1 - 1) - 1] \cos \gamma + i(1 - 2p_2)^2 [2p_2(p_2 - 1) - 1] \sin \gamma| d\gamma. \quad (56)$$

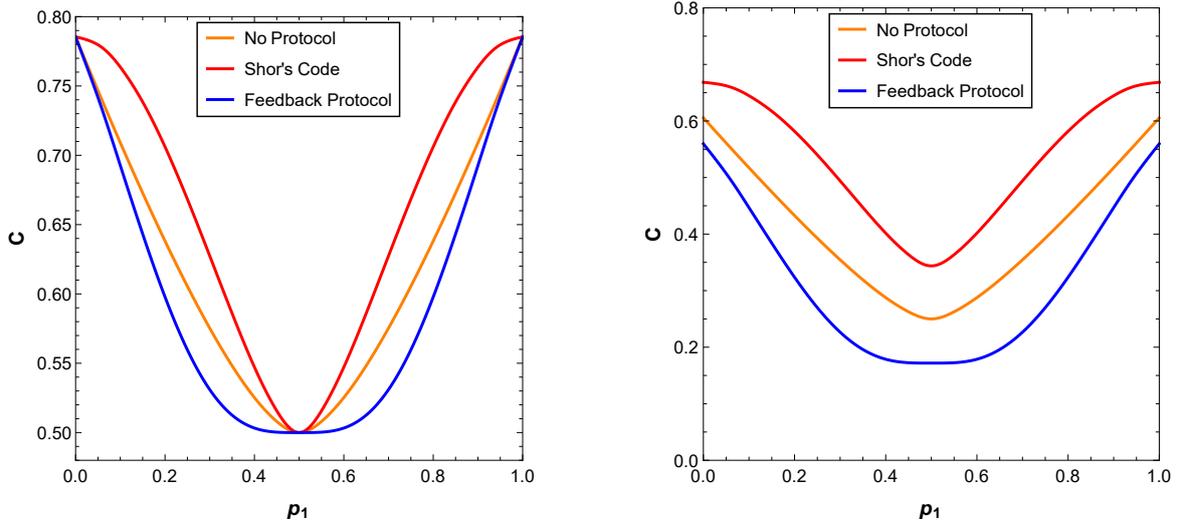
Devido à simetria da superfície representada na Figura 10, é possível fixar valores de p_2 e tomar valores de fixos de p_1 , afim de melhorar a visualização. Tal procedimento é apresentado na Figura 11.

Figura 10: Comportamento da coerência independente de estado em um canal de *bit-flip* e de *phase-flip* em função de p_1 e p_2 .



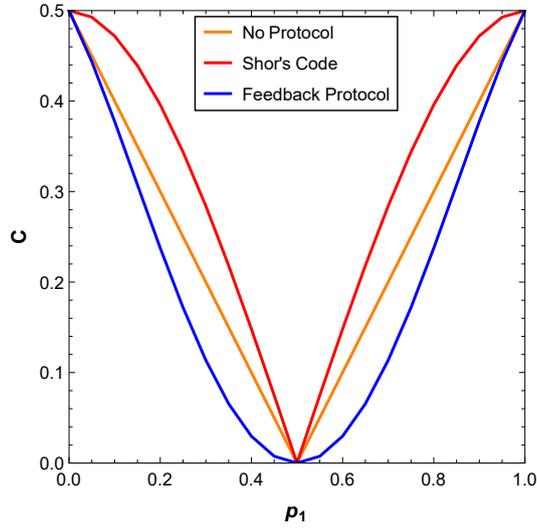
Fonte: autoria própria.

Figura 11: Cortes da superfície apresentada na Figura 10 em função de p_1 para valores fixos de p_2 .



(a) $p_2 = 0$ or $p_2 = 1$.

(b) $p_2 = 1/4$ or $p_2 = 3/4$.



(c) $p_2 = 1/2$.

Fonte: autoria própria.

Tendo em vista que neste caso foi tomada a ação do ruído de phase-flip, o protocolo de feedback não mostrou superioridade, reproduzindo o comportamento encontrado para o ruído de phase-flip atuando sozinho.

Médias

Por fim, tomemos as médias numéricas das funções encontradas para a coerência

$$\langle \bar{C}_{NP}^{BPhF} \rangle = 0.41, \quad \langle \bar{C}_{SC}^{BPhF} \rangle = 0.51, \quad \langle \bar{C}_{FP}^{BPhF} \rangle = 0.34. \quad (57)$$

Mais uma vez, o resultado obtido para as médias segue a intuição obtida pela análise dos gráficos, sendo o protocolo de feedback o menor valor médio e o código de repetição o maior.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, utilizamos métodos analíticos e numéricos para estudar e avaliar a fidelidade e a coerência de um estado quântico submetido ao protocolo de correção de erros por feedback, desenvolvido e proposto neste estudo. Essa análise foi realizada considerando o estado quântico após sua passagem por um canal quântico ruidoso. Além disso, comparamos o desempenho do protocolo de feedback com dois outros cenários: o caso sem nenhuma correção de erros e o caso em que a correção foi realizada com protocolos amplamente conhecidos, como o protocolo de repetição e o código de Shor. Os valores obtidos foram apresentados por meio de equações quantificadoras formuladas de maneira independente do estado analisado, assim como suas médias, com o objetivo de compreender tanto o comportamento do protocolo frente a variações nas características do canal quanto o comportamento esperado em situações com um grande número de repetições.

Nossos resultados indicam que, considerando a perspectiva da fidelidade, o protocolo de feedback apresentou um desempenho superior na maioria dos casos analisados. Por outro lado, ao avaliar a coerência, verificamos que, sempre que o erro do tipo *phase-flip* foi incluído na análise, o desempenho do protocolo de feedback foi inferior ao observado com os outros métodos de correção considerados para comparação. Isso indica que o erro do tipo *phase-flip* representa uma limitação significativa para o protocolo de feedback. Além disso, foi identificado que o desempenho do protocolo é melhor quanto mais distante estivermos da situação em que $p = \frac{1}{2}$.

Como uma análise inicial de prova de conceito, nossos cálculos indicam que o protocolo de feedback é uma alternativa viável para a escolha de um método de correção de erros em canais quânticos, especialmente em determinados cenários onde outros protocolos não apresentam um bom desempenho. Isso torna nosso método um complemento valioso para os métodos já

existentes na literatura.

6.0.1 Aplicações Futuras

Nos próximos passos de nossa pesquisa, buscamos explorar estratégias para lidar com a forte decoerência provocada pela presença do erro do tipo *phase-flip*. Nosso objetivo é desenvolver soluções que possam mitigar esse efeito, com o propósito de aumentar ainda mais a eficiência geral do protocolo de feedback que apresentamos neste trabalho.

Adicionalmente, pretendemos direcionar nossos esforços para a aplicação do protocolo em contextos que envolvem estados emaranhados, com o intuito de investigar como os quantificadores de emaranhamento se comportam na presença de ruído e de compreender melhor a relação entre esses quantificadores e a fidelidade do protocolo de feedback em sua totalidade. Também consideramos essencial adaptar o protocolo proposto para situações práticas, o que inclui possíveis melhorias no número de qubits-alvo que podem ser manipulados com base em um conjunto específico de qubits de teste. Por fim, planejamos avançar para a implementação experimental do protocolo, integrando-o a processos de comunicação quântica amplamente estabelecidos, como a codificação superdensa e a teleportação quântica, para avaliar sua eficácia e aplicabilidade em cenários reais.

6.0.2 Considerações Finais

Em última análise, os objetivos estabelecidos foram cumpridos e o protocolo apresentado se mostrou eficiente, tendo o comportamento esperado e abrindo possibilidades para melhorias futuras.

Referências Bibliográficas

- [1] Paramita Basak Upama, Md Jobair Hossain Faruk, Mohammad Nazim, Mohammad Masum, Hossain Shahriar, Gias Uddin, Shabir Barzanjeh, Sheikh Iqbal Ahamed, and Akond Rahman. Evolution of quantum computing: A systematic survey on the use of quantum computing tools. In *2022 IEEE 46th Annual Computers, Software, and Applications Conference (COMPSAC)*, pages 520–529. IEEE, 2022.
- [2] Roman Rietsche, Christian Dremel, Samuel Bosch, Léa Steinacker, Miriam Meckel, and Jan-Marco Leimeister. Quantum computing. *Electronic Markets*, 32(4):2525–2536, 2022.
- [3] Andre Luckow, Johannes Klepsch, and Josef Pichlmeier. Quantum computing: Towards industry reference problems. *Digitale Welt*, 5:38–45, 2021.
- [4] Shahid Hussain, Yuba Neupane, Wen-Li Wang, Naseem Ibrahim, Saif Ur Rehman Khan, and Asif Kareem. Empirical investigation of quantum computing on solving complex problems. In *International Conference on Agile Software Development*, pages 222–230. Springer, 2022.
- [5] Maria Schuld, Ilya Sinayskiy, and Francesco Petruccione. An introduction to quantum machine learning. *Contemporary Physics*, 56(2):172–185, 2015.
- [6] Mohan Raparthi. Real-time ai decision making in iot with quantum computing: Investigating & exploring the development and implementation of quantum-supported ai inference systems for iot applications. *Internet of Things and Edge Computing Journal*, 1(1):18–27, 2021.
- [7] Temidayo Olorunsogo, Boma Sonimiteim Jacks, and Olakunle Abayomi Ajala. Leveraging quantum computing for inclusive and responsible ai development: a conceptual and review framework. *Computer Science & IT Research Journal*, 5(3):671–680, 2024.

- [8] Alán Aspuru-Guzik, Anthony D Dutoi, Peter J Love, and Martin Head-Gordon. Simulated quantum computation of molecular energies. *Science*, 309(5741):1704–1707, 2005.
- [9] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [10] Mohamad Taghi Dejpasand and Morteza Sasani Ghamsari. Research trends in quantum computers by focusing on qubits as their building blocks. *Quantum Reports*, 5(3):597–608, 2023.
- [11] Robert S Sutor. *Dancing with Qubits: How quantum computing works and how it can change the world*. Packt Publishing Ltd, 2019.
- [12] Isaac Hobday, Paul Stevenson, and James Benstead. Variance minimisation on a quantum computer of the lipkin-meshkov-glick model with three particles. In *EPJ Web of Conferences*, volume 284, page 16002. EDP Sciences, 2023.
- [13] Peter W Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM review*, 41(2):303–332, 1999.
- [14] Chuck Easttom. Quantum computing and cryptography. In *Modern Cryptography: Applied Mathematics for Encryption and Information Security*, pages 397–407. Springer, 2022.
- [15] Christopher Portmann and Renato Renner. Security in quantum cryptography. *Reviews of Modern Physics*, 94(2):025008, 2022.
- [16] Pam Choy, Dustin Cates, Florent Chehwan, Cindy Rodriguez, Avery Leider, and Charles C Tappert. Cryptography in quantum computing. In *Proceedings of the Future Technologies Conference (FTC) 2019: Volume 1*, pages 377–393. Springer, 2020.
- [17] William K Wootters and Wojciech H Zurek. A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299(5886):802–803, 1982.
- [18] W. Itano, D. Heinzen, J. Bollinger, and D. Wineland. Quantum zeno effect. *Physical review. A, Atomic, molecular, and optical physics*, 41 5:2295–2300, 1990.
- [19] Peter W Shor. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Physical review A*, 52(4):R2493, 1995.

- [20] A Robert Calderbank and Peter W Shor. Good quantum error-correcting codes exist. *Physical Review A*, 54(2):1098, 1996.
- [21] Pengcheng Liao, Barry C Sanders, and David L Feder. Topological graph states and quantum error-correction codes. *Physical Review A*, 105(4):042418, 2022.
- [22] Arpit Dua, Tomas Jochym-O’Connor, and Guanyu Zhu. Quantum error correction with fractal topological codes. *Quantum*, 7:1122, 2023.
- [23] Ramon WJ Overwater, Masoud Babaie, and Fabio Sebastiano. Neural-network decoders for quantum error correction using surface codes: A space exploration of the hardware cost-performance tradeoffs. *IEEE Transactions on Quantum Engineering*, 3:1–19, 2022.
- [24] Simeon Ball, Aina Centelles, and Felix Huber. Quantum error-correcting codes and their geometries. *Annales de l’Institut Henri Poincaré D*, 10(2):337–405, 2023.
- [25] Priya J Nadkarni and Shayan Srinivasa Garani. Quantum error correction architecture for qudit stabilizer codes. *Physical Review A*, 103(4):042420, 2021.
- [26] Joschka Roffe. Quantum error correction: an introductory guide. *Contemporary Physics*, 60(3):226–245, 2019.
- [27] Emanuel Knill and Raymond Laflamme. Theory of quantum error-correcting codes. *Physical Review A*, 55(2):900, 1997.
- [28] P. Schindler, J. Barreiro, T. Monz, V. Nebendahl, D. Nigg, M. Chwalla, M. Hennrich, and R. Blatt. Experimental repetitive quantum error correction. *Science*, 332:1059 – 1061, 2011.
- [29] J. Clemens, S. Siddiqui, and J. Gea-Banacloche. Quantum error correction against correlated noise. *Physical Review A*, 69:062313, 2004.
- [30] Bárbara Amaral, Alexandre T Baraviera, and MO Terra Cunha. Mecânica quântica para matemáticos em formação. *Impa-28th Colóquio Brasileiro de Matemática*, 2011.
- [31] Karl Kraus, Arno Böhm, John D Dollard, and WH Wootters. *States, Effects, and Operations Fundamental Notions of Quantum Theory: Lectures in Mathematical Physics at the University of Texas at Austin*. Springer, 1983.

- [32] Kapil K Sharma and Vladimir P Gerdt. Entanglement sudden death and birth effects in two qubits maximally entangled mixed states under quantum channels. *International Journal of Theoretical Physics*, 59:403–414, 2020.
- [33] Bárbara Lopes Amaral. Emaranhamento em sistemas de dois qubits. 2010.
- [34] Raphael Fortes and Gustavo Rigolin. Fighting noise with noise in realistic quantum teleportation. *Physical Review A*, 92(1):012338, 2015.
- [35] Tillmann Baumgratz, Marcus Cramer, and Martin B Plenio. Quantifying coherence. *Physical review letters*, 113(14):140401, 2014.
- [36] JX Li, ZM Wang, SS Shi, YN Li, RM Shang, and YJ Gu. Fidelity optimized multiparty quantum teleportation protocol with quantum shor codes and ospf method in imperfect local operations. *Europhysics Letters*, 140(5):58001, 2022.
- [37] Daniel Gottesman. An introduction to quantum error correction and fault-tolerant quantum computation. In *Quantum information science and its contributions to mathematics, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, volume 68, pages 13–58, 2010.