UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CURSO DE MATEMÁTICA

EQUILÍBRIO DE NASH

Davi Henrique Nazaro da Silva

Aquidauana-MS
Novembro de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CURSO DE MATEMÁTICA

EQUILÍBRIO DE NASH

Davi Henrique Nazaro da Silva

Dissertação apresentada ao Curso de Matemática como parte da exigência de conclusão do curso.

Orientador: Thales Fernando Vilamaior Paiva

Aquidauana-MS
Novembro de 2024

SUMÁRIO

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo aprofundar o estudo da Teoria dos Jogos, com ênfase no conceito de Equilíbrio de Nash. Buscaremos compreender como as decisões estratégicas de indivíduos ou organizações interagem em diversos contextos. Serão apresentados os conceitos fundamentais da Teoria dos Jogos, como o Equilíbrio de Nash que nos permite identificar situações de estabilidade em jogos não cooperativos. Além disso, serão explorados exemplos práticos que demonstram a aplicabilidade do modelo em situações reais, como disputas comerciais e conflitos históricos. A partir da análise desses casos, será possível evidenciar a importância do Equilíbrio de Nash como ferramenta para prever e analisar o comportamento de agentes em situações de interdependência.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos, Equilíbrio de Nash, pay-off, Dilema dos Prisioneiros.

ABSTRACT

This dissertation aims to deepen the study of Game Theory, with an emphasis on the concept of Nash Equilibrium. We will seek to understand how the strategic decisions of individuals or organizations interact in various contexts. The fundamental concepts of Game Theory will be presented, like the Nash Equilibrium, which allows us to identify situations of stability in non-cooperative games. Practical examples will also be explored which demonstrate the applicability of the model in real situations, such as commercial disputes and historical conflicts. By analyzing these cases, it will be possible to highlight the importance of the Nash Equilibrium as a tool for predicting and analyzing the behavior of agents in situations of interdependence.

Keywords: Game Theory, Nash Equilibrium, pay-off, Prisoners' Dilemma.

INTRODUÇÃO

A teoria dos jogos é uma ramo da matemática aplicada que busca analisar situações de conflito e cooperação entre indivíduos, empresas ou entidades. Vários desses conflitos podem ser analisados como um jogo. O equilíbrio de Nash, proposto por John Nash em sua tese de doutorado, busca traçar uma estratégia para que ambos os jogadores não tenham incentivo para mudar, ou seja, é uma estratégia que domina as outras. Geralmente, é estudada em economia, mas pode ser aplicada para várias áreas. Um exemplo seria, na disputa comercial entre duas redes de fast food concorrentes, onde cada uma tem de escolher alguma estratégia de atrair mais o público, não podendo combinar preços, já que isso é contra lei, a lei 8137/90 considera como crime contra a ordem econômica o acordo entre empresas com objetivo de fixar artificialmente os preços ou quantidades dos produtos e serviços, de controlar um mercado, limitando a concorrência. Prevê, para a prática, pena de dois a cinco anos de reclusão e multa.

TEORIA DOS JOGOS

Elaborada, primeiramente, pelo físico e matemático John von Neumann, a teoria dos jogos é uma área da Matemática Aplicada, que estuda as estratégias envolvidas em situações de conflito ou cooperação entre pessoas, grupos ou entidades que tomam decisões, como por exemplo, as estratégias que duas redes de mercado concorrentes tomam para atrair mais clientes. Quando indivíduos ou entidades estão em uma situação em que suas decisões interferem uns aos outros e tais indivíduos ou entidades querem obter alguma vantagem em detrimento do outro, isso chamamos de jogo, aos indivíduos ou entidades, chamamos de jogadores.

ALGUNS CONCEITOS

Um jogo finito é constituído de três elementos:

- um conjunto de jogadores J tal que J = {1,2,..., n};
- conjunto de estratégias $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, cada jogador n possui um conjunto de estratégias tal que $S_n = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$;
- funções pay-offs, que são os resultados do jogo, seja p_n uma função pay-off então $p_n\colon S_1 \times \ldots \times\ S_n \ \rightarrow\ \mathbb{R}$, também podemos detonar os resultados por uma matriz pay-off.

Existem também as preferências que denotam por qual estratégia o jogador é mais favorável.

- Indiferença: descrito com (~), por exemplo a~b, sugere que o jogador não tem preferência por a ou b, ou seja, ambos são igualmente favoráveis ao jogador;
- Tão bom quanto: descrito com (≥), por exemplo $a \succeq b$, sugere que embora b seja bom, o jogador prefere a;
- Preferência estrita: descrito com (≻), por exemplo $a \succ b$, sugere que o jogador prefere a do que b, ou seja, b não é favorável ao jogador.

Pelo axioma da transitividade se temos a,b,c ∈ A e se $a \succeq b \succeq c$, então $a \succeq c$.

EQUILÍBRIO DE NASH

John von Neumann desenvolveu a teoria dos jogos, mas estando limitado a dois jogadores em circunstâncias de soma zero, ou seja, um ganha aquilo que o outro perde, por exemplo, em esportes individuais como corrida ou natação, apenas um atleta pode vencer, enquanto os demais ocupam posições inferiores.

John Nash em seu doutorado expandiu esses conceitos para jogos finitos com n jogadores, não precisando ser um jogo de soma zero, criando o conceito de equilíbrio e ainda provando o seguinte teorema: todo jogo finito tem um ponto de equilíbrio. Com jogo finito tendo finitos jogadores, estratégias e resultados.

Sendo o exemplo mais famoso desse conceito o Dilema dos Prisioneiros, que será abordado adiante.

APLICAÇÕES DO EQUILÍBRIO DE NASH

As aplicações do equilíbrio de Nash são bem amplas, vão desde a economia, onde é mais empregado, estudado em macroeconomia, teoria dos contratos, entre outros; indo até política e ciências sociais, estudado em processos eleitorais ou sociologia.

LIMITAÇÕES DO EQUILÍBRIO

Em alguns jogos pode haver mais de um ponto de equilíbrio, o que pode dificultar a tomada de decisões. Alguns equilíbrios podem não ser tão eficientes para maximizar o pay-off. E ainda, achar o equilíbrio é mais indicado para jogos estáticos, ou seja, jogos em que os jogadores jogam simultaneamente e que não são cooperativos; jogos dinâmicos, onde a ordem das jogadas influencia o jogo, precisam de conceitos mais sofisticados.

EXEMPLOS DE EQUILÍBRIOS

DILEMA DOS PRISIONEIROS

Em um cenário hipotético, dois suspeitos foram presos pela polícia, ambos acusados de um mesmo crime. O crime cometido pode ter pena de 20 anos, mas as provas reunidas pela polícia são insuficientes. Então os policiais decidem fazer um acordo com os suspeitos, em um interrogatório, com os dois suspeitos separados, de forma que não possam trocar informações, a proposta dos policiais foi a seguinte: se os dois suspeitos confessarem o crime poderão pegar uma pena reduzida de 5 anos; se os dois suspeitos não colaborarem com a polícia, eles ainda ficaram presos por 1 ano, devido a falta de provas; mas se um dos suspeitos confessar e outro se calar, aquele que confessou sairá livre, enquanto o que se calou ficará preso por 20 anos.

Os possíveis cenários para esse problema serão os seguintes:

		suspeito 1	
		se cala	confessa
suspeito 2	se cala	1, 1	0, 20
	confessa	20, 0	5, 5
Sentença: (suspeito 1, suspeito 2)			

- Se os dois suspeitos se calarem ficarão presos por 1 ano;
- Se o suspeito 1 confessar e o suspeito 2 ficar calado, o suspeito 1 sairá livre, porém, o suspeito 2 pegará pena máxima de 20 anos;
- Se o suspeito 2 confessar e o suspeito 1 ficar calado, o suspeito 2 sairá livre, porém, o suspeito 1 pegará pena máxima de 20 anos;
- Se os dois colaborarem terão pena reduzida para 5 anos.

Esse problema é típico na teoria dos jogos, pois o resultado não depende apenas de um dos jogadores, mas depende da decisão de todos os jogadores. Se o suspeito 1 se calar pegará uma pena de 1 ano; entretanto se confessar sairá livre, caso o suspeito 2 se cale; porém se ficar calado e o suspeito 2 confessar, então ficará preso por 20 anos, enquanto seu comparsa sairá livre; mas se confessar e o suspeito 2 fizer o mesmo, os dois terão pena reduzida. Então a melhor estratégia para o suspeito 1 será sempre confessar, já que independente da decisão do suspeito 2, sempre será benéfico confessar, porque no melhor dos casos sairá livre e no pior terá uma pena reduzida. O mesmo vale para o suspeito 2.

O ponto de equilíbrio estará nos dois confessando, podemos notar que, embora os dois se calem e tenham uma pena menor do que se os dois confessem, não teríamos um equilíbrio porque os dois têm incentivos para confessar. Ou seja, o equilíbrio de Nash não nos dá o melhor resultado de todos, mas o melhor resultado levando em consideração as escolhas dos outros jogadores, o equilíbrio estará onde nenhum dos jogadores tiver incentivos para mudar de estratégias.

Formalizando temos:

- conjunto de jogadores: J = {suspeito 1, suspeito 2};
- conjunto de estratégias do jogador 1: $S_1 = \{se\ calar, confessar\}$;
- conjunto de estratégias do jogador 2: $S_2 = \{se\ calar, confessar\}$;
- conjunto de estratégias possíveis adotadas pelos jogadores: S = {(confessar,confessar), (se calar,confessar), (confessar,se calar), (se calar, se calar)}.
- matriz pay-off:

1,1	0,20
20,0	5,5

- ponto de equilíbrio: Eq = (confessar,confessar).
- Preferência estrita: sendo confessar = a e se calar = b, temos que $a \succ b,$ para ambos os suspeitos.

JOGO DA PERFURAÇÃO DE POÇOS DE PETRÓLEO

Vamos supor que duas empresas petrolíferas, Clampett Oil Company e Texas Exploration Company (TEXplor), adquiriram terrenos vizinhos, ambos sobre um mesmo depósito de petróleo, elas pretendem extrair esse petróleo, mas tem de decidir se farão um poço de extração largo ou estreito, ambas as empresas têm orçamento para fazer apenas um poço. A quantidade estimada de barris de petróleo é de 4 milhões de barris, resultando em 80 milhões de doláres. Veja na tabela abaixo o orçamento e a projeção dos lucros:

	Tubulação estreita	Tubulação larga
Custo de perfuração	16 milhões	29 milhões
Custo de bombeamento	20 milhões	20 milhões
Custo total	36 milhões	49 milhões
Receita	80 milhões	80 milhões
Lucro	44 milhões	31 milhões

Os jogadores, no caso as empresas, J = {Clampett, TEXplor}, podem escolher as seguintes estratégias: S = {estreito, largo}. Sendo as possíveis situações {(estreito, estreito), (estreito, largo), (largo, estreito), (largo, largo)}. Se as operações das empresas começarem ao mesmo tempo, podemos calcular o lucro se ambas escolherem perfurar o estreito, então o custo será de 16 milhões, ambas bombearão metade do total do petróleo ao custo de 10 milhões e venderão por 40 milhões, lucrando 14 milhões, da mesma forma se ambas escolherem o poço largo, lucrando apenas 1 milhão cada, porém se uma optar pelo estreito e a outra pelo largo, ela conseguirá extrair apenas 1 milhão de barris de petróleo, ao custo de bombeamento de 5 milhões, enquanto a outra extrairá 3 milhões de barris, ao custo de bombeamento de 15 milhões, resultando no prejuízo da primeira de 1 milhão e lucro da segunda de 16 milhões. A matriz pay-off será:

		Texplor	
		Estreito	Largo
Clampett	Estreito	(14, 14)	(-1, 16)
	Largo	(16, -1)	(1,1)
Recompensas (em milhões): (Clampett, TEXplor)			

Como as duas empresas podem ficar no prejuízo se escolherem estreito e a concorrente escolher o largo, ambas têm motivação para mudar de estratégia e escolher o poço largo. Este exemplo se trata de um jogo não-cooperativo, em que ambas as empresas querem o melhor para si em detrimento da outra, então, embora o lucro seja bem menor ao escolher o largo, o ponto de equilíbrio está nas duas escolhendo a estratégia largo, Eq = (largo, largo). No mundo da economia, ambas poderiam fazer um acordo e optarem pelo poço estreito.

CRISE DOS MÍSSEIS EM CUBA (1962)

No contexto da guerra fria, a União Soviética instalou mísseis em Cuba, esses mísseis poderiam alcançar os Estados Unidos, este acontecimento gerou uma revolta no governo americano que quase culminou em um conflito armado entre a América e a URSS. Sendo J = {EUA, URSS}, S = {manter, remover}, no caso dos Estados Unidos a decisão ficava entre manter o bloqueio em Cuba ou removê-lo, já para a União Soviética era manter os mísseis em Cuba ou removê-los. A tabela a seguir é o pay-off que exemplifica a situação:

	URSS: Manter	URSS: Remover
EUA: Manter	-5, -5	0, -3
EUA: Remover	-3, 0	-1, -1
Pay-off: (EUA, URSS)		

Os números representam o que cada país perderia em cada estratégia, no caso são números imaginários que servem apenas para o exemplo. Se os EUA mantiverem o bloqueio e a URSS mantiver os mísseis culminaria numa guerra entre os países e os dois teriam a perda máxima, representada pelo (-5,-5). Mas se os EUA remover o bloqueio e a URSS mantiver os mísseis resultará na perda de recursos dos americanos, porque eles tiveram custos para colocar o bloqueio e retirá-lo, bem como perderiam a moral militar, já que eles cederam aos soviéticos. Se a URSS retirar os mísseis e os EUA mantiver o bloqueio, quem perderá recursos são os soviéticos, bem como a moral militar do país. Mas se a URSS retirar os mísseis e os EUA retirar o bloqueio, ambos perderiam recursos, mas os dois países passariam a imagem de terem se resolvido diplomaticamente. O ponto de equilíbrio reside então nesse último cenário Eq = {retirar, retirar}, porque ambos teriam muito a perder mudando de estratégias. Podemos assumir M ou R, sendo M manter e R remover, para definir a preferência dos países, usando a ordem (EUA, URSS):

Para os EUA: $(M, R) \ \succeq \ (R, R) \succ (R, M) \succ (M, M)$

Para a URSS: $(R, M) \succeq (R, R) \succ (M, R) \succ (M, M)$

Na realidade, a União Soviética se comprometeu a retirar os mísseis, enquanto os Estados Unidos se comprometeram a retirar o bloqueio, encerrando, em 22 de novembro de 1962, uma crise diplomática entre os dois países.

ESTRATÉGIAS MISTAS

Chama-se estratégia mista quando um jogador escolhe uma combinação de estratégias, cada estratégia com uma determinada probabilidade. Por exemplo, em um jogo de cara ou coroa, uma estratégia pura seria escolher sempre cara ou sempre coroa, enquanto em uma estratégia mista seria jogar 60% cara e 40% coroa.

Definição de estratégia mista: No jogo formal G = {$S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n$}, sendo S os conjuntos estratégias de cada jogador e u as funções pay-offs, suponha que $S_i = s_{i1}, ..., s_{ik}$. Então, uma estratégia mista para o jogador i é uma distribuição de probabilidade $P_i = (p_{i1,...,p_{ik}})$, onde $0 \leq p_{ik} \leq 1$ para todo k = 1,..., K e $p_{il} + \ldots + p_{ik} = 1$. Os elementos do conjunto estratégia S_i são chamados de estratégias puras.

Definição de Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas: no jogo da forma normal com dois jogadores G = {$S_1, S_2; u_1, u_2$}, as estratégias mistas (P_1^*, P_2^*) são um equilíbrio de Nash se cada estratégia mista de cada jogador é a melhor resposta para a estratégia mista do outro jogador. Então, sendo V o pay-off esperado, (P_1^*, P_2^*) devem satisfazer:

$P_1^* : V_1(P_1^*, P_2^*) \geq V_1(P_1, P_2^*)$ para cada distribuição de probabilidade P_1 sobre S_1.

$P_1^* : V_1(P_1^*, P_2^*) \geq V_1(P_1, P_2^*)$ para cada distribuição de probabilidade P_2 sobre S_2.

EXEMPLO DE EQUILÍBRIO DE NASH EM ESTRATÉGIAS MISTAS: 2 JOGADORES E 3 ESTRATÉGIAS

Suponha um jogo de pedra, papel e tesoura, com a seguinte matriz pay-off:

		Jogador 2		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador 1	Pedra	0,0	-1,1	1,-1
	Papel	1,-1	0,0	-1,1
	Tesoura	-1,1	1,-1	0,0
Pay-off: (Jogador 1, Jogador 2)				

Pela tabela, podemos concluir que se trata de um jogo simétrico pois, na diagonal principal, onde estão os empates, tem os valores iguais e ainda nos pay-offs de pedra/papel de cada jogador temos valores equivalentes porque se um joga pedra fica com -1 e se o outro joga papel fica 1.

Propriedade: se o jogo é simétrico, o equilíbrio de Nash é simétrico, ou seja, $P_1^* = P_2^*$, o equilíbrio é igual para ambos os jogadores.

Vamos supor que exista um equilíbrio de Nash com ambos os jogadores jogando com duas estratégias puras. Por exemplo, ambos jogando (pedra,papel) onde $P_1 = (q, 1-q, 0)$ = $P_2 = (q, 1-q, 0)$, onde P são as estratégias puras de cada jogador e q é a estratégia pedra e 1-q é estratégia papel.

		Jogador 2		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador 1	Pedra	0,0	-1,1	1,-1
	Papel	1,-1	0,0	-1,1
Pay-off: (Jogador 1, Jogador 2)				

Então o jogador irá jogar pedra ou papel, por isso foi excluída a linha da tesoura do jogador 1. Analisando as estratégias do jogador 2, temos que jogar papel é melhor do que jogar pedra, porque 0 < 1 e -1 < 0, logo a estratégia pedra do jogador 2 é estritamente dominada, pois ele tem incentivo para mudar de estratégia. Então a tabela ficará assim:

		Jogador 2		
			Papel	Tesoura
Jogador 1	Pedra		-1,1	1,-1
	Papel		0,0	-1,1
Pay-off: (Jogador 1, Jogador 2)				

Porém se no equilíbrio de Nash, o jogador 1 está jogando pedra/papel e o equilíbrio é simétrico, então, não será a melhor resposta para o jogador 2 jogar pedra/papel, mas será melhor jogar a mista papel/tesoura. Isso ocorrerá, também, para qualquer combinação desse jogo com apenas duas estratégias. Logo, chegamos em uma contradição, pois o equilíbrio tem de ser igual para ambos, então será preciso misturar 3 estratégias.

Então, temos que, $P_1 = (q, r, 1-q-r) \Rightarrow P_2 = (q, r, 1-q-r)$. Vamos calcular o pay-off esperado do jogador 1, sendo $V_1(pedra, P_2) = V_1(papel, P_2) = V_1(tesoura, P_2)$, basta fixar uma estratégia e multiplicar os pay-offs pelas probabilidades:

Pegando os valores esperados de pedra e papel

$$[V_1(pedra, P_2) = V_1(papel, P_2)] = V_1(tesoura, P_2)$$

$$q(0) + r(-1) + (1-q-r)(1) = q(1) + r(0) + (1-q-r)(-1)$$

Resolvendo temos:

$$-r + 1 - q - r = q - 1 + q + r$$

$$2 = 3q + 3r$$

Agora vamos resolver para papel e tesoura:

$$V_1(pedra, P_2) = [V_1(papel, P_2) = V_1(tesoura, P_2)]$$

$q(1) + r(0) + (1 - q - r)(-1) = q(-1) + r(1) + (1 - q - r)(0)$

$2q + r - 1 = -q + r$

$3q = 1$

$q = \frac{1}{3}$

Agora é possível encontrar o r substituindo q em $2 = 3q + 3r$:

$2 = 3 \cdot \frac{1}{3} + 3r$

$2 = 1 + 3r$

$r = \frac{1}{3}$

Por fim temos que $1 - q - r = \frac{1}{3}$

Como o jogo é simétrico teremos as mesmas probabilidades para o jogador 2.

Logo o equilíbrio de Nash será {$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}); (0, 0)$}, onde {$(P_1^*, P_2^*); (u_1, u_2)$}, como é um jogo de soma zero o pay-off é zero para ambos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, o conceito de Equilíbrio de Nash na teoria dos jogos, nos possibilita analisar situações de interação estratégica entre pessoas, empresas, entidades, etc. Bem como estudar conflitos históricos, negociações políticas ou comerciais. Torna-se um ferramenta poderosa para os atuantes das decisões, no caso os jogadores, para traçar as melhores estratégias possíveis tendo em vista as estratégias de seus adversários.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIANI, R., Teoria dos jogos: com aplicações em economia, administração e ciências sociais. 4.ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

NUNES, Tem Ciência. DILEMA dos PRISIONEIROS e o EQUILÍBRIO de NASH. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=C15Kba_9q7A&list=PLPEXPIORf7KiBx8ahHrsY4kz2Z0RU92eG&index=2&pp=gAQBiAQB. Acesso em: 09 de set. 2024.

BIERMAN, H. Scott; FERNANDEZ, Luis. Teoria dos jogos. 2. ed. Tradução: Arlete Stolle Marques. Revisão técnica: Nestor Luiz Kantek. São Paulo: Pearson, 2010.

CÂMARA, Samuel Façanha. Teoria dos Jogos, Santa Catarina: UFSC, 2011.

POSSANI, Professor Possani. Exemplos de uso da Teoria dos Jogos (aula 18). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=yBVl5bB6kt8&list=PLPEXPIORf7KiBx8ahHrsY4kz2Z0RU92eG&index=6. Acesso em: 09 de set. 2024.

Crise dos Mísseis. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/historiag/crise-dos-misseis.htm. Acesso em: 31 de outubro de 2024.

JUCÁ. Professor Jader Jucá. Aula 10 - Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas: 2 jogadores 3 estratégias - Teoria dos Jogos. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=IDj4MnIn1Wo&list=PLPEXPIORf7KiBx8ahHrsY4kz2Z0RU92eG&index=15. Acesso em 13/10/2024

ACS. Cartel. Disponível em: https://www.tjdft.jus.br/institucional/imprensa/campanhas-e-produtos/direito-facil/edicao-semanal/cartel#:~:text=A%20lei%208137%2F90%20considera,anos%20de%20reclus%C3%A3o%20e%20multa. Acesso em 31/10/2024