

Alocação de Polos em Sistemas Dinâmicos

Guilherme Coelho Bogado

Resumo - Este relatório refere-se ao estudo orientado sobre Alocação de Polos em Sistemas Dinâmicos, no qual é introduzido o método de alocação de polos em SLIT-Cs e estabilidade relativa, também é aplicado a alocação de polos para sistemas incertos. Os resultados foram obtidos a partir de simulações realizadas em Octave, utilizando o Yalmip e o SeDuMi como solver de LMIs.

I. INTRODUÇÃO

EM controle linear, um dos principais objetivos é obter sistemas com parâmetros desejados, como velocidade de resposta, estabilidade e resposta transitório, uma das maneiras de conseguir isso é a partir da alocação de polos, forçando-os a uma região desejada do lado esquerdo do plano complexo, com isso, é possível obter o desempenho desejado. Esta região é limitada por três parâmetros, o σ que determina uma taxa de decaimento mínima, o $\zeta = \cos\theta$, que implica uma taxa de amortecimento mínima e $\omega_d = r\sin\theta$ que significa a máxima frequência natural não amortecida.

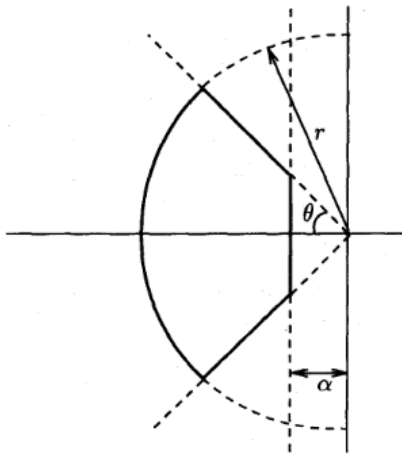


Fig. 1: Região $S(\sigma, r, \theta)$

Garantido que os polos permaneçam nesta região, faz com que o overshoot, o tempo de acomodação, de subida e de atraso tenham valores menores do que o máximo desejado.

A. D-estabilidade e Caracterização em LMIs

Sendo D uma região do lado esquerdo do plano complexo, um sistema dinâmico é considerado D-estável se $\dot{x} = Ax$ possuir todos seus polos em D, o que implica que os autovalores de A estão em D. Caso D seja todo o lado esquerdo do plano complexo, então é um caso de estabilidade assintótica.

A melhor maneira de determinar a D-estabilidade é a partir seria com:

$$\begin{cases} x < -\sigma < 0 \\ |x + yj| < \sigma \\ \tan(\theta)x < -|y| \end{cases} \quad (1)$$

Onde, a primeira equação representa uma reta vertical no semi-plano que passa pelo ponto $(-\sigma, 0)$ com $\sigma > 0$, afetando o tempo mínimo do sistema. A segunda equação representa um disco de raio r , que afeta a demora do sistema. A terceira equação limita o θ no sistema, que afeta o overshoot, verifica-se a região D na figura ?? . É possível caracterizar esta região em LMIs, para as equações do sistema 1 e uma matriz $P \succ 0$, são:

$$AP + PA' + 2\sigma P \prec 0 \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -rP & PA \\ PA' & -rP \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(AP + PA') & \cos(\theta)(AP - PA') \\ \cos(\theta)(PA' - AP) & \sin(\theta)(AP + PA') \end{bmatrix} \prec 0$$

Assim, para garantir desempenho(σ, r, θ) e estabilidade, deve-se encontrar uma resposta para as LMIs.

B. Controle Robusto

É uma abordagem de projeto de controladores para sistemas que operam sobre incertezas, o controlador é projetado para acomodar uma faixa de valor dentro o parâmetro incerto, garantindo desempenho. Uma maneira de modelar a variação dos parâmetros do sistema é com incertezas politópicas, considere que a matriz A varia dentro de um conjunto politópico $A \in \text{conv}(A_1, A_2, \dots, A_n)$, onde conv seria uma região convexa e as matrizes A_n seriam os vértices de um politopo, qualquer dessas matrizes podem ser expressas como forma politópica:

$$A = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_i \geq 0 \quad (5)$$

A estabilidade dos vértices não garantem estabilidade do politopo, sendo apenas condição necessária para estabilidade robusta, também, se $A(\alpha)$ é estável, então para qualquer $x > 0$, $xA(\alpha)$ é estável.

Uma condição necessária e suficiente para estabilidade robusta de $A(\alpha)$ é dada por $P(\alpha) = P'(\alpha) \succ 0$ tal que:

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) \prec 0 \quad (6)$$

Onde $P(\alpha)$ é uma matriz Lyapunov dependente de α , como a estrutura desta matriz é desconhecida, fixa-se estruturas, obtendo condições finitas e suficientes para a estabilidade robusta na forma de LMIs

II. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Para exemplificar a teoria apresentada na introdução, foi feito exemplos de LMIs no software Octave utilizando o YALMIP como suporte e o SeDuMi de solver.

A. D-estabilidade

Na simulação, foi escolhida a FT : $\frac{12.25}{s^3+14.2s^2+54.25s+122.5}$ para um overshoot inferior a 16% , tempo de acomodação inferior a 2.5 no critério 5% e frequência máxima natural não amortecida inferior a 4, assim, obtemos valores de $r = 4.375$, $\sigma = 2.1$ e $\theta = 53.13$, usando a forma canônica controlável

determinou-se que a matriz A é $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -122.5 & -54.25 & -14.2 \end{bmatrix}$

e a matriz B é $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com isso, cria-se a LMI e encontra as soluções utilizando o comando optimize, por fim determina os autovalores das equações da D-estabilidade:

```
>> A = [1 3 2
3 4 7
5 2 1]
>> B = [1; -1; 1]
P = sdpvar(3,3)
r = 4.375
sigma = 2.1
theta = 0.9273
sin_theta = sin(theta)
cos_theta = cos(theta)
LMI1 = A*P + P*A' + 2*sigma*P;
LMI2 = [ -r*P, P*A;
A'*P, -r*P ];
LMI3 = [ sin_theta * (A*P + P*A'),
cos_theta * (A*P - P*A'),
cos_theta * (P*A' - A*P),
sin_theta * (A*P + P*A') ];
```

```
LMI = [LMI1 <= 0, LMI2 <= 0,
LMI3 <= 0, P >= 0];
optimize(LMI, [])
eig(P)
eig(A' * P + P * A + B * W + W' * B')
```

Com isso, verificou-se que os autovalores de P que estão entre $[-1.4418e-16, 9.5368e-14]$ e os autovalores das outras matrizes, da LMI1 estão entre $[-2.8841e-14, 1.739e-13]$, da LMI2 estão entre $[-2.3109e-13, 1.6917e-14]$ e LMI3 estão entre $[-6.4579e-14, 5.5936e-14]$.

B. Controle Robusto

Na simulação, considerando a matriz A do primeiro exemplo, foi inserido 2 incertezas, no qual os valores de A_{32} varia entre -60 e -50 e A_{33} varia entre -20 e -10, com isso, existem 4 matrizes A possíveis para verificar como LMI, a

partir delas encontra as soluções utilizando o comando optimize e encontrando os autovalores das LMIs e de P:

```
A1 = [0, 1, 0; 0, 0, 1; -122.5, -60, -20];
A2 = [0, 1, 0; 0, 0, 1; -122.5, -60, -10];
A3 = [0, 1, 0; 0, 0, 1; -122.5, -50, -10];
A4 = [0, 1, 0; 0, 0, 1; -122.5, -50, -20];
P = sdpvar(3,3)
LMI1 = A1'*P + P*A1;
LMI2 = A2'*P + P*A2;
LMI3 = A3'*P + P*A3;
LMI4 = A4'*P + P*A4;
LMI = [LMI1 <=0, LMI2 <=0, LMI3 <=0,
LMI4 <= 0, P >=0];
optimize(LMI, [])
```

Com isso, verificou-se os autovalores de P que estão entre $[-5.2083, -0.01083]$, da LMI1 estão entre $[0.31209, 1.5131]$, da LMI2 $[0.17086, 1.3921]$, da LMI3 $[0.12358, 0.98139]$ e da LMI4 $[0.29186, 1.0256]$.

C. Compensador para D-estabilidade

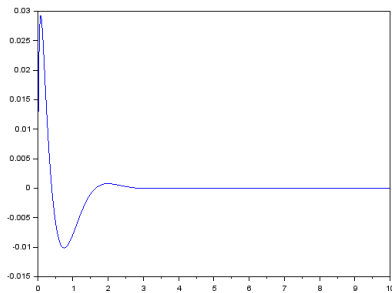
Para a simulação da D-estabilidade, também foi projetado um compensador com realimentação de estado, utilizando da LMI $PA' + AP + WB' + BW' \prec 0$, para encontrar $K = P^{-1}W$:

```
>> A = [0 1 0
0 0 1
-122.5 -54.25 -14.2];
>> B = [0; 0; 1]
>> W = sdpvar(3,1);
>> P = sdpvar(3,3);
>> Lmi = [P*A' + A*P + W*B' + B*W' <= 0, P >= 0]
>> K = inv(P)*W
```

A partir do valor de K é possível simular o sistema em malha fechada no scilab:

```
—> A = [0, 1, 0; 0, 0, 1; -244.0848, -105.4249, -27.0428];
—> B = [0; 0; 1]
—> C = [0, 0, 1]
sys = syslin('c', A, B, C);
t = 0:0.01:10;
y = csim('step', t, sys);
plot(t,y)
```

Obtendo o gráfico:



III. ANÁLISE DOS DADOS

Analisando os dados obtidos das simulações de D-estabilidade, observou-se que os autovalores de P variam entre valores positivos e negativos, com isso, conclui-se que o sistema não é D-estável, já que é necessário que P seja positivo definida, também, pelos autovalores das LMIs de D-estabilidade variam entre valores positivos e negativos, com o compensador, percebe-se que o sistema se estabiliza após o overshoot.

Observando os dados da simulação de controle robusto, observou-se que os autovalores de P são negativos e os das LMIs são positivos, com isso, conclui-se que o sistema não possui estabilidade robusta para as variações das incertezas impostas.

IV. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[?] [1] [2]

- [1] K. Ogata *et al.*, *Modern control engineering*. Prentice Hall India, 2009.
- [2] P. L. D. Peres, "Análise e controle de sistemas lineares por desigualdades matriciais lineares (lmis)," <https://www.fee.unicamp.br/profs/ricfow/IA892/ia892.htm>, accessed: 2010-09-30.