Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Isabela Ribeiro Guimarães Amaral Matos

PENTÁGONO MÁGICO

Campo Grande - MS

2025

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Isabela Ribeiro Guimarães Amaral Matos

PENTÁGONO MÁGICO

Orientadora Profª. Dra. Rubia Mara de Oliveira Santos
Coorientador Prof. Dr. Claudemir Aniz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS
2025

PENTÁGONO MÁGICO

Isabela Ribeiro Guimarães Amaral Matos

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Banca examinadora:

Profa. Dra. Rubia Mara de Oliveira Santos (Orientadora)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Claudemir Aniz (Coorientador)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profa. Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Cosme Eustaquio Rubio Mercedes
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS

Campo Grande - MS, 01 de Agosto de 2025

Dedico este trabalho à memória de minha avó, Elza Alves Ribeiro.

“Se você não consegue explicá-lo de forma simples, você não o entende o suficiente”

Albert Einstein

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, cuja luz me guiou e cujas mãos me sustentaram em cada passo deste caminho.

Ao meu amado esposo, Felipe da Silva Matos, que me encoraja em cada jornada, me inspira com seu exemplo e me acolhe com amor, onde encontro paz.

À minha orientadora, Profa. Dra. Rúbia Mara de Oliveira Santos, por toda a paciência e por seus ensinamentos e incentivos desde a graduação.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Claudemir Aniz, por seus ensinamentos durante o mestrado.

Aos colegas de mestrado, que estiveram unidos durante toda a jornada, ajudando-nos mutuamente em cada etapa.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo central apresentar o Pentágono Mágico, um jogo didático autoral desenvolvido como recurso educacional para a Educação Básica, abordando conteúdos de álgebra e aritmética. Sua estrutura é formada por um pentágono cujas diagonais, ao serem traçadas, definem um total de 11 regiões internas, sendo 10 triângulos e um pentágono menor. A dinâmica consiste no preenchimento dessas regiões com um conjunto de 11 números inteiros, consecutivos e sem repetição. Serão apresentados os fundamentos teóricos que sustentam o jogo, suas definições, regras de funcionamento, critérios de parada e condições de vitória, de modo a fornecer uma compreensão completa de sua estrutura. Para demonstrar a flexibilidade e o potencial de aplicação do jogo no contexto educacional, o trabalho apresenta diferentes protótipos do Pentágono Mágico que podem ser confeccionados.

Palavras-chave: Estrela Mágica, Jogos, Pentágono.

Abstract

The main objective of this work is to present the Magic Pentagon, an original educational game developed as an educational resource for Basic Education, covering algebra and arithmetic. Its structure consists of a pentagon whose diagonals, when drawn, define a total of 11 internal regions: 10 triangles and a smaller pentagon. The dynamic consists of filling these regions with a set of 11 consecutive, non-repeating integers. The theoretical foundations supporting the game, its definitions, operating rules, stopping criteria, and victory conditions will be presented to provide a complete understanding of its structure. To demonstrate the game's flexibility and potential application in an educational context, the work presents different prototypes of the Magic Pentagon that can be made.

Key words: Magic Star, Games, Pentagon.

Lista de Figuras

1.1 Estrela Mágica de 6 pontas 5

3.1 Numeração das regiões 13

3.2 T_{r_i,r_j,r_k} 13

3.3 T_{r_l,r_m,r_n,r_o,r_p} 13

3.4 Pentágono Mágico Fase 1 15

3.5 Pentágono Mágico Fase 2 16

3.6 Pentágono Mágico Deslocado 3.6 17

3.7 Pentágono Mágico Deslocado 3.7 17

3.8 Pentágono Mágico Deslocado 3.8 18

3.9 Pentágono Mágico com $a(r_5) = 8$ 20

3.10 Resolução 1 21

3.11 Resolução 2 21

3.12 Resolução 3 22

3.13 Resolução 4 23

3.14 Resolução 5 23

3.15 Resolução 6 24

3.16 Resolução 7 24

3.17 Resolução 8 25

3.18 Resolução 9 26

3.19 Variando $a(r_5)$ de 1 a 5 27

3.20 Variando $a(r_5)$ de 6 a 11 27

3.21 Triângulos com 2 regiões 28

3.22 Triângulos com 2 regiões 28

3.23 Triângulos Pentagonais 29

3.24 Lousa 31
3.25 Quebra-cabeça 32

4.1 Sala de aula 34
4.2 Solução do aluno 1 38
4.3 Solução do aluno 2 38
4.4 Solução do aluno 3 39
4.5 Solução do aluno 4 41
4.6 Solução do aluno 5 42
4.7 Solução do aluno 6 43
4.8 Solução do aluno 7 45
4.9 Solução do aluno 8 46

Sumário

Introdução **1**

1 Jogos na Educação Básica **3**

1.1 Jogos e Sala de Aula . . . 3

1.2 Estrela Mágica de 6 Pontas . . . 4

2 Quadrado Mágico **6**

2.1 Tipos de Quadrados Mágicos . . . 7

2.1.1 Quadrado Mágico Clássico . . . 8

2.1.2 Quadrado Mágico Associativo . . . 8

2.1.3 Quadrado Mágico Pandiagonal . . . 9

2.1.4 Quadrado Mágico Multiplicativo . . . 9

2.1.5 Quadrado Mágico Perfeito . . . 10

2.2 Considerações Finais . . . 10

3 Pentágono Mágico **12**

3.1 Construção do Jogo Pentágono Mágico . . . 12

3.2 Fases do Pentágono Mágico . . . 14

3.2.1 Particularidades do Pentágono Mágico . . . 16

3.3 Estratégias de Jogo . . . 18

3.3.1 Solução do Pentágono Mágico . . . 27

3.4 É possível mudar a regra do jogo? . . . 27

3.5 Produto Gerado: Jogo Pentágono Mágico . . . 29

4 Aplicações em Sala de Aula **33**

4.1 Objetivo das Atividades . . . 36

4.2 Explorando a Fase 1 37
4.3 Explorando a Fase 2 40
4.4 Autoavaliação 45
4.5 Sugestões de Atividades 47

5 Conclusão **53**

Bibliografia **53**

Introdução

No cenário atual da Educação Básica, abrangendo o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, um dos maiores desafios é conseguir fazer com que os conteúdos sejam atrativos, relevantes e compreensíveis para os alunos. Muitas vezes, os estudantes se deparam com aulas que se tornam monótonas, distantes da sua realidade, o que dificulta o desenvolvimento e a participação dos alunos. Esse modelo clássico, centrado em fórmulas e procedimentos repetitivos, limita o interesse dos alunos e dificulta uma compreensão profunda dos conceitos.

Essa conjuntura exige, portanto, a busca por estratégias didáticas capazes de resgatar o encantamento pelo saber matemático e transformar a sala de aula em um espaço de investigação e descoberta. Conforme aponta a literatura [2], os jogos, quando adequadamente estruturados, constituem poderosos instrumentos pedagógicos, pois promovem experiências de aprendizagem significativas e favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento crítico e da criatividade.

É a partir dessa perspectiva que este trabalho introduz o Pentágono Mágico, uma proposta didática autoral concebida para aproximar os alunos da matemática por meio de desafios instigantes e acessíveis. O jogo mobiliza, de forma integrada, conceitos fundamentais da aritmética e da álgebra. No campo aritmético, os estudantes são levados a realizar operações com números inteiros e a identificar padrões, como os múltiplos de 11, enquanto planejam a distribuição estratégica dos valores. Simultaneamente, noções de teoria dos conjuntos são exploradas, uma vez que a dinâmica exige a obediência ao princípio da unicidade, utilizando cada número uma única vez, e a verificação constante da validade das soluções nos subconjuntos que se intersectam. Senso assim, este trabalho tem como objetivo construir um jogo didático chamado Pentágono Mágico, como recurso educacional para a Educação Básica, destacando seu potencial pedagógico, abordando os conteúdos de álgebra e aritmética, como subconjuntos, divisibilidade e operações numéricas, de forma envolvente. Apresentam-se os fundamentos teóricos, suas definições, regras, critérios de parada e condições de vitória. A proposta, de cunho lúdico e educativo, contribui para diversificar as práticas docentes e aproximar os estudantes de uma experiência matemática mais envolvente e contextualizada. Desta forma, o presente trabalho será composto por três partes principais. A primeira, intitulada Contribuição **Jogo na Educação Básica**, discute a importância de utilizar os jogos nas salas de aula, aprimorando o processo de ensino-aprendizagem. A segunda, **Pentágono Mágico**, sendo a mais importante, apresenta a construção do jogo com suas características, suas regras e seu funcionamento. Por fim, a terceira, **Aplicações em Sala de Aula**, apresenta os resultados obtidos, através desse recurso pedagógico e sua contribuição para o ensino da matemática.

Capítulo 1

Jogos na Educação Básica

A educação por meio do uso de jogos é um dos aspectos destacados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que reconhece o potencial das atividades lúdicas para o desenvolvimento integral e o protagonismo do aluno [1]. Essa abordagem se alinha diretamente à Competência Geral 2, que preconiza o estímulo ao pensamento científico, crítico e criativo por meio da investigação, da formulação de hipóteses e da resolução de problemas. No campo da Matemática, a prática lúdica torna-se uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento da Competência Específica 2, que visa desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes.

Isso se conecta ao pressuposto, orientado pela própria BNCC, de que a aprendizagem matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão e à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Desse modo, os jogos se configuram como recursos didáticos essenciais, permitindo que os alunos estabeleçam conexões entre conceitos, seu cotidiano e diferentes áreas do conhecimento. Portanto, ao integrar jogos de forma intencional, o educador não apenas cria um ambiente mais dinâmico, mas atua diretamente na formação de competências fundamentais para o cidadão do século XXI.

1.1 Jogos e Sala de Aula

A indiferença de muitos alunos em relação às atividades escolares é um fator que frequentemente leva à monotonia do processo de aprendizagem, afetando a qualidade do ensino, sobretudo em áreas desafiadoras como a matemática. Essa percepção de desconexão, em que os conteúdos parecem não fazer sentido para o estudante, resulta em um baixo envolvimento que, por sua vez, é apontado por docentes como uma das causas para resultados insatisfatórios e defasagens de conhecimento [11].

Este cenário de dificuldade é quantitativamente confirmado pelos dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA). O relatório de 2022 revelou que apenas 27% dos estudantes brasileiros atingiram o nível 2 de proficiência em matemática, considerado o patamar mínimo, e um alarmante 1% alcançou os níveis de excelência (5 ou 6) [6]. Tais números não apenas evidenciam a gravidade do problema, mas também sublinham a urgência de repensar as práticas pedagógicas, buscando métodos mais dinâmicos e interativos para aprimorar o engajamento discente.

É precisamente em resposta a essa realidade que se insere a proposta do jogo autoral Pentágono Mágico. O jogo foi concebido como um ambiente de investigação que mobiliza competências essenciais como a resolução de problemas, o raciocínio lógico e, de forma central, o pensamento crítico, uma habilidade defendida pela BNCC [1]. A sua dinâmica desafia o participante a observar padrões, testar hipóteses e analisar relações numéricas, revisando decisões ao encontrar inconsistências.

1.2 Estrela Mágica de 6 Pontas

O Jogo da Estrela Mágica de 6 pontas é um problema matemático que integra elementos da teoria dos números e da geometria. Sua configuração é a de um hexagrama regular, uma figura gerada pela sobreposição de dois triângulos equiláteros com orientações opostas. Esta estrutura define um total de doze vértices, que servem como os pontos de posicionamento para os números. O desafio consiste na alocação do conjunto de inteiros de 1 a 12 nestes vértices, de modo que a distribuição seja biunívoca, ou seja, sem repetição. A condição fundamental do problema é que a soma dos quatro inteiros localizados em cada um dos seis segmentos de reta que compõem a figura seja um valor constante. Este valor invariante é formalmente denominado constante mágica [9].

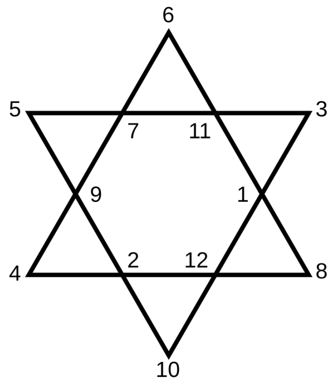


Figura 1.1: Estrela Mágica de 6 pontas

A figura 1.1 mostra todas as linhas compostas por quatro vértices cada, onde são atribuídos os valores numéricos de 1 a 12, cuja soma resulta na constante mágica é 26.

Distinguindo-se fundamentalmente desse problema clássico, o Pentágono Mágico, objeto de estudo detalhado no Capítulo 3, introduz uma abordagem original. Embora também possa ser referido como uma Estrela Mágica devido à sua geometria interna, sua estrutura é distinta, pois se baseia em um pentágono cujas diagonais traçadas delimitam onze regiões internas. O diferencial conceitual desta proposta reside em sua mecânica fundamenta, em contraste com as abordagens clássicas de polígonos mágicos, que se baseiam na alocação de números nos vértices para obter uma soma constante, a dinâmica aqui desenvolvida consiste na distribuição de um conjunto de onze inteiros consecutivos nas onze regiões da figura, os critérios de validação são diferenciados, abandonando a ideia de uma única constante mágica em favor da exigência de que as somas resultantes pertençam a um conjunto mágico previamente definido, o que confere ao jogo uma nova camada de complexidade estratégica e conceitual.

Capítulo 2

Quadrado Mágico

Os quadrados mágicos são, sem sombra de dúvida, uma das mais interessantes e antigas criações matemáticas da história, sua origem tão remota como as antigas culturas chinesas e até no mundo árabe medieval. Eles atravessaram milênios e encheram-se de um poder inegável, desafiando a cultura e a ciência. O estudo do quadrado mágico neste capítulo é pedagógico, com um destaque especial para sua capacidade de auxiliar o ensino, especialmente nas aulas de raciocínio lógico, matemática e resolução de problemas.

Segundo uma antiga lenda chinesa, considerada por muitos como uma das primeiras referências aos quadrados mágicos, por volta de 2000 a.C., o imperador Yu, o Grande, teria testemunhado uma cena curiosa às margens do rio Luo. Conta-se que uma tartaruga emergiu das águas com marcas em seu casco que posteriormente viriam a ser interpretadas como um arranjo numérico especial, aquele que hoje conhecemos como o quadrado mágico Lo Shu. Nele, os números de 1 a 9 são dispostos de tal forma que a soma dos números em qualquer linha, coluna ou diagonal resulta em 15, formando a chamada constante mágica.

Esse tipo de relato, embora envolto em elementos mitológicos, revela algo que parece recorrente nas culturas antigas: a tentativa de atribuir significados simbólicos aos padrões numéricos.

Foi observado que essa ideia não se restringia à China. Na Índia, há registros de quadrados mágicos semelhantes ao Lo Shu encontrados em templos históricos. Um caso bastante curioso foi o do templo de Khajuraho, onde se encontra um quadrado mágico de ordem 3, cuja estrutura é semelhante à do Lo Shu, mas com um acréscimo de 19 unidades em cada posição. Sendo assim, se a constante mágica do Lo Shu é 15, a do quadrado de Khajuraho é 72, mantendo a simetria e equilíbrio característicos, mas em uma nova escala. A precisão com que esses números foram organizados no piso do templo indica não apenas um domínio técnico, mas também uma valorização estética e simbólica do padrão.

Jaina Square é um quadrado mágico de ordem 4 com constante mágica 34. Estima-se que tenha sido construído por volta de 950 d.C. no templo Parshvanatha, também na região de Khajuraho [4]. O que diferencia esse quadrado dos anteriores é que ele pertence à categoria dos quadrados mágicos pandiagonais, ou seja, suas diagonais quebradas, aquelas que percorrem o quadrado de forma não contínua, somam o valor da constante mágica. Isso leva à reflexão sobre o grau de sofisticação matemática presente nesses arranjos, especialmente considerando o contexto histórico e os recursos disponíveis à época [5].

Definição 2.1 *Um quadrado mágico é uma matriz quadrada de ordem n, composta por n^2 elementos distintos entre si e quando somada qualquer linha, coluna e diagonal, o valor dessa soma é igual e é chamada de constante mágica, denotada por C .*

Lema 2.2 *O valor da constante mágica de um quadrado mágico de ordem n, é dado por:*

$$C = \frac{n(1+n^2)}{2}$$

2.1 Tipos de Quadrados Mágicos

Dentro do estudo dos quadrados mágicos, é possível identificar diversas variantes que se distinguem por propriedades específicas quanto à disposição dos números e às somas constantes. Esta seção tem como objetivo apresentar as principais classificações dos quadrados mágicos, sua definição formal e as propriedades de cada variação.

Existem diversos exemplos de quadrados mágicos, a determinação exata da quantidade total existente é um problema matemático ainda sem solução completa, especialmente para ordens superiores a cinco. Porém, é possível mensurar e organizar as categorias dos quadrados mágicos com base em critérios estruturais, numéricos e simétricos. As principais categorias de quadrados mágicos incluem:

- Clássico: utilizam números inteiros consecutivos de 1 a n^2.
- Não-clássico: utilizam conjuntos numéricos alternativos, como pares, múltiplos ou negativos.

- Semimágicos: possuem somas constantes nas linhas e colunas, mas não nas diagonais.
- Associativos: os números opostos em relação ao centro somam sempre o mesmo valor.
- Pandiagonais (ou panmágicos): mantêm a constante mágica também nas diagonais secundárias e quebradas.
- Multiplicativos: as multiplicações das linhas, colunas e diagonais produzem resultados constantes.
- Perfeitos ou esotéricos: estendem a propriedade mágica a sub-blocos ou outras estruturas internas.

2.1.1 Quadrado Mágico Clássico

Um quadrado mágico clássico de ordem n é uma matriz quadrada $n \times n$ preenchida com os números inteiros de 1 até n^2, de tal modo que a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna e das duas diagonais principais seja sempre a mesma constante, denominada constante mágica [4].

Exemplo 2.3 Quadrado mágico clássico de ordem 3. Sendo composto pelos números de 1 a 9, organizados de forma que a soma de cada linha, coluna e diagonal principal seja igual a constante mágica 15.

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que todas as linhas, colunas e diagonais principais somam 15, por exemplo, a soma $8 + 1 + 6 = 15$.

2.1.2 Quadrado Mágico Associativo

Um quadrado mágico associativo é um quadrado mágico clássico onde, para cada par de elementos simetricamente opostos em relação ao centro do quadrado, a soma dos valores é sempre igual a $n^2 + 1$.

Exemplo 2.4 Quadrado mágico associativo, de ordem 4. Onde, além da soma das linhas, colunas e diagonais principais, a soma dos números opostos ao centro, também somam a constante mágica 17.

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

Números opostos ao centro somam o mesmo valor. (ex: $16+1$, $3+14$ e $2+15$), somam 17.

2.1.3 Quadrado Mágico Pandiagonal

Um quadrado mágico pandiagonal é um quadrado mágico em que todas as diagonais quebradas, ou seja, que saem de uma borda e continuam do lado oposto, também possuem soma igual à constante mágica.

Exemplo 2.5 Quadrado mágico pandiagonal de ordem 4. Onde, além da soma das linhas, colunas e diagonais principais a soma das diagonais quebradas também somam a constante mágica 34.

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 7 & 14 \\ 8 & 13 & 2 & 11 \\ 10 & 3 & 16 & 5 \\ 15 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Todas as diagonais, incluindo diagonais quebradas (ex: $1+13+16+4$ e $10+6+7+11$) somam 34.

2.1.4 Quadrado Mágico Multiplicativo

Um quadrado mágico multiplicativo é aquele em que os termos de cada linha, cada coluna e cada diagonal são multiplicados e o produto de cada um deles tem como resultado uma constante mágica multiplicativa.

Exemplo 2.6 Quadrado mágico multiplicativo de ordem 3. Onde, a multiplicação de cada linha, coluna e diagonal principal, resultam na constante mágica 216.

$$\begin{bmatrix} 18 & 1 & 12 \\ 4 & 6 & 9 \\ 3 & 36 & 2 \end{bmatrix}$$

Todas as linhas, colunas e diagonais, quando multiplicadas resultam em 216. (ex: 18.1.12=216).

2.1.5 Quadrado Mágico Perfeito

Um quadrado mágico perfeito é aquele em que todas as linhas, colunas, diagonais principais e diagonais quebradas possuem soma constante, e os quatro quadrantes de mesma ordem também apresentam essa mesma soma.

Exemplo 2.7 Quadrado mágico perfeito de ordem 4. Onde, além da soma das linhas, colunas e diagonais principais e quebradas, a soma dos quatro quadrantes de mesma ordem, também somam a constante mágica 34.

$$\begin{bmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

Cada linha, coluna, diagonal principal, diagonal secundária, e os quatro quadrantes 2×2 somam a constante mágica 34.

$$\text{Quadrante superior esquerdo: } \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{soma: } 1 + 15 + 12 + 6 = 34.$$

O estudo dos diferentes tipos de quadrados mágicos fornece uma base sólida para a compreensão de simetrias, construções algébricas e aplicações em diversas áreas. A classificação apresentada neste capítulo permite ao leitor distinguir entre as principais variantes e reconhecer suas propriedades fundamentais.

2.2 Considerações Finais

Inspirado pelas propriedades fundamentais do quadrado mágico, notadamente o uso de números inteiros consecutivos e as abordagens de resolução que envolvem tentativas sistemáticas, manipulação algébrica e análise de restrições, o capítulo subsequente dedica-se à construção do Pentágono Mágico. Serão apresentadas sua definição formal e os critérios adotados para sua resolução.

Capítulo 3

Pentágono Mágico

O Jogo Pentágono Mágico, uma criação autoral, foi desenvolvido como uma ferramenta lúdica, para estabelecer conexões entre conceitos matemáticos por meio de desafios lógicos. Sua estrutura geométrica, um pentágono com suas diagonais internas, forma onze regiões distintas que devem ser preenchidas com um conjunto de onze números inteiros consecutivos, de modo que a soma dos elementos em subconjuntos triangulares predefinidos resulte em um valor pertencente ao conjunto mágico.

3.1 Construção do Jogo Pentágono Mágico

Considere um pentágono e todas as suas diagonais internas. O traçado dessas diagonais resulta na formação de um pentagrama (estrela de cinco pontas) no interior do polígono, dividindo a área total em onze regiões distintas, como mostra a figura 3.1.

Dessas onze regiões, é possível identificar dez triângulos, representados nas figuras 3.2 e 3.3, que são fundamentais para a estrutura do jogo: cinco deles possuindo uma única diagonal, compostos por três regiões, e os outros cinco contendo duas diagonais, compostos por cinco regiões. Ao enumerarmos as regiões, torna-se possível visualizá-las com maior clareza e identificar os dez triângulos formados por essa construção. A figura 3.1 evidencia essa configuração geométrica.

Define-se triângulo unidiagonal aquele formado por uma diagonal e duas arestas do pentágono. Do mesmo modo, um triângulo bidiagonal aquele formado por duas diagonais e uma aresta.

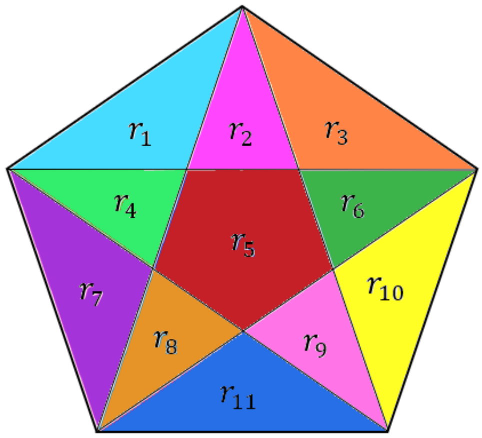


Figura 3.1: Numeração das regiões

Em cada uma das regiões, serão distribuídos os números inteiros de 1 a 11, de forma que cada número seja utilizado exatamente uma vez e que nenhuma região permaneça vazia, ou seja, a distribuição deverá ser injetora e completa sobre o conjunto das regiões.

Notação 1: Seja $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \ldots, r_{11}\}$ o conjunto das regiões internas do Pentágono Mágico. Denota-se por T_{r_i,r_j,r_k}, com $r_i, r_j, r_k \in \mathcal{R}$, os triângulos unidiagonais. E denotamos por T_{r_l,r_m,r_n,r_o,r_p}, com $r_l, r_m, r_n, r_o, r_p \in \mathcal{R}$, os triângulos bidiagonais.

Essa notação representa a disposição das regiões de cada triângulo no Pentágono, e **não** a soma dos valores atribuídos a essas regiões.

Organizando o Pentágono Mágico em triângulos formados por três e por cinco regiões, obtêm-se as seguintes representações geométricas:

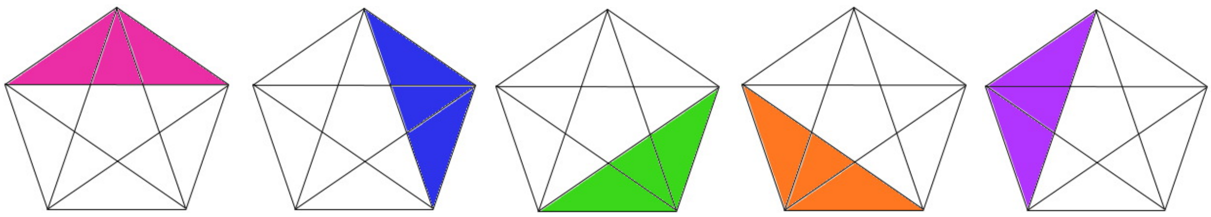


Figura 3.2: T_{r_i,r_j,r_k}

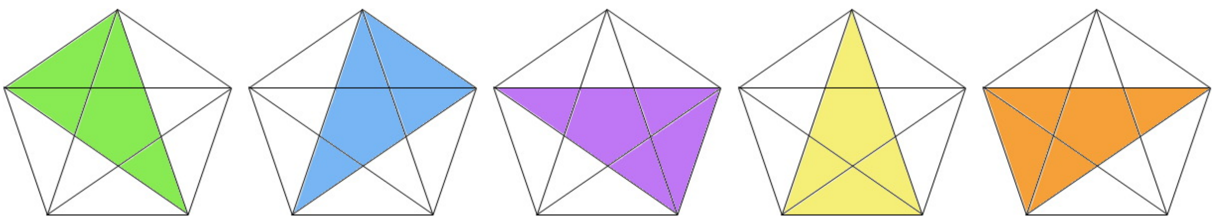


Figura 3.3: T_{r_l,r_m,r_n,r_o,r_p}

Notação 2: Seja $a : \mathcal{R} \to \mathbb{Z}$ uma aplicação que associa a cada região $r \in \mathcal{R}$ um valor inteiro $a(r)$. Para qualquer triângulo T_{r_i,r_j,r_k} e T_{r_l,r_m,r_n,r_o,r_p}, sua soma associada é definida como:

$$S(T_{r_i,r_j,r_k}) = a(r_i) + a(r_j) + a(r_k)$$

$$S(T_{r_l,r_m,r_n,r_o,r_p}) = a(r_l) + a(r_m) + a(r_n) + a(r_o) + a(r_p)$$

onde $a(r_i)$, $a(r_j)$, $a(r_k)$, $a(r_l)$, $a(r_m)$, $a(r_n)$, $a(r_o)$ e $a(r_p)$ são os valores atribuídos às regiões r_i, r_j, r_k, r_l, r_m, r_o e r_p, respectivamente.

Definição 3.1 *O conjunto mágico, do Pentágono Mágico Clássico, é formado pelo conjunto* $\{11, 22, 33, 44\}$.

Regra do jogo: *Preencher as onze regiões do Pentágono Mágico, utilizando onze números inteiros consecutivos, de modo que cada uma das somas* $S(T_{r_i,r_j,r_k})$ *e* $S(T_{r_l,r_m,r_n,r_o,r_p})$*, pertença ao conjunto mágico.*

3.2 Fases do Pentágono Mágico

Para chegar à configuração final do Pentágono Mágico, onde os números se organizam em perfeita harmonia, são percorridas Fases bem definidas, que ajudam a estruturar o raciocínio lógico-matemático. Apresenta-se as Fases, destacando como cada uma contribui para a construção do todo e como o progresso depende da compreensão de suas regras internas.

Fase 1: A resolução do Pentágono Mágico consiste na distribuição estratégica dos números entre as regiões, de forma que $S(T_{r_1,r_2,r_3})$, $S(T_{r_3,r_6,r_{10}})$, $S(T_{r_{10},r_9,r_{11}})$, $S(T_{r_{11},r_8,r_7})$ e $S(T_{r_7,r_4,r_1})$ resultem em um valor que pertença ao conjunto mágico.

Definição 3.2 *Um Pentágono Mágico é denominado Clássico quando suas onze regiões distintas são preenchidas pelos elementos do conjunto dos onze primeiros inteiros positivos.*

Exemplo 3.3 No Pentágono Mágico Clássico, a missão é distribuir os números nas regiões do Pentágono de forma que a soma dos valores de cada triângulo unidiagonal pertença ao conjunto mágico. Concentre-se, pense estrategicamente, apenas as combinações certas revelam a magia oculta!

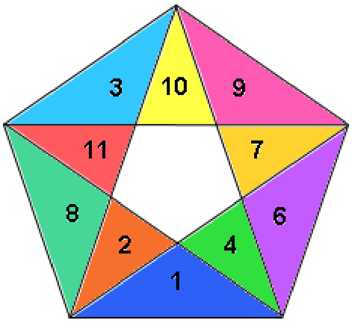


Figura 3.4: Pentágono Mágico Fase 1

Ao verificar a validade da distribuição, observa-se que a Fase 1 foi solucionada:

$$S(T_{r_1,r_2,r_3}) = 22 \qquad S(T_{r_{11},r_8,r_7}) = 11$$
$$S(T_{r_3,r_6,r_{10}}) = 22 \qquad S(T_{r_7,r_4,r_1}) = 22$$
$$S(T_{r_{10},r_9,r_{11}}) = 11$$

Fase 2: A distribuição dos números entre as regiões deve ser realizada de maneira ainda mais refinada, a resolução do Pentágono Mágico consiste na distribuição estratégica dos números entre as regiões, de forma que $S(T_{r_1,r_2,r_3})$, $S(T_{r_3,r_6,r_{10}})$, $S(T_{r_{10},r_9,r_{11}})$, $S(T_{r_{11},r_8,r_7})$, $S(T_{r_7,r_4,r_1})$, $S(T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9})$, $S(T_{r_3,r_2,r_6,r_5,r_8})$, $S(T_{r_{10},r_9,r_6,r_5,r_4})$, $S(T_{r_{11},r_9,r_8,r_5,r_2})$ e $S(T_{r_7,r_4,r_8,r_5,r_6})$, as somas dos triângulos unidiagonais e bidiagonais, pertença ao conjunto mágico.

Observação: Na resolução do Pentágono Mágico apresentada na figura 3.4, observa-se que o número faltante para completá-lo é o 5. Ao alocar esse valor na região r_5, verifica-se que tanto os triângulos unidiagonais quanto os bidiagonais são satisfeitos, o que permite a conclusão da Fase 2.

Exemplo 3.4 No Pentágono Mágico Clássico, sua missão vai além! Agora, você deve distribuir os números nas regiões do Pentágono de forma que as somas de cada um dos triângulos unidiagonais e bidiagonais, pertençam ao conjunto mágico. Raciocínio lógico e atenção aos detalhes serão essenciais para vencer esse desafio encantado!.

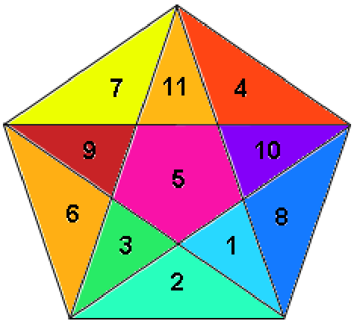


Figura 3.5: Pentágono Mágico Fase 2

Ao verificar a validade da distribuição, observa-se que a Fase 2 foi solucionada:

$$S(T_{r_1,r_2,r_3}) = 22 \qquad S(T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9}) = 33$$
$$S(T_{r_3,r_6,r_{10}}) = 22 \qquad S(T_{r_3,r_2,r_6,r_5,r_8}) = 33$$
$$S(T_{r_{10},r_9,r_{11}}) = 11 \qquad S(T_{r_{10},r_9,r_6,r_5,r_4}) = 33$$
$$S(T_{r_{11},r_8,r_7}) = 11 \qquad S(T_{r_{11},r_9,r_8,r_5,r_2}) = 22$$
$$S(T_{r_7,r_4,r_1}) = 22 \qquad S(T_{r_7,r_4,r_8,r_5,r_6}) = 33$$

3.2.1 Particularidades do Pentágono Mágico

Para que a solução do Pentágono Mágico possa ser generalizada para qualquer conjunto de onze inteiros consecutivos, impõe-se uma condição fundamental sobre a soma total de seus valores. É necessário que essa soma possa ser expressa em três parcelas que pertençam ao conjunto mágico. Note que, a soma de n inteiros até 10 + n é uma progressão aritmética de 11 termos cujo valor é dado por: $S = 11n + 55 = 11(n + 5)$. Logo, S deve ser divisível por 11.

Condição 1 *Seja a soma total dos valores distribuídos. Para que o Pentágono Mágico tenha solução, é necessário que essa soma possa ser decomposta em três parcelas que pertençam ao conjunto mágico.*

Definição 3.5 *Pentágono Mágico Deslocado é aquele formado por qualquer subconjunto com 11 números inteiros consecutivos, diferente dos utilizados no Pentágono Mágico Clássico.*

Um aspecto relevante a ser considerado é que o deslocamento do conjunto dos 11 números consecutivos implica uma alteração no conjunto mágico correspondente, o qual passa a ser definido pelas possíveis somas resultantes de cada triângulo unidiagonal e bidiagonal.

Exemplo 3.6 Para $n = -1$, tem-se que $S = 11.(-1) + 55 = 44$. A Condição 1 é atendida, visto que, uma possível combinação para decompor a soma em três fatores múltiplos de 11 são: $11 + 22 + 11$.

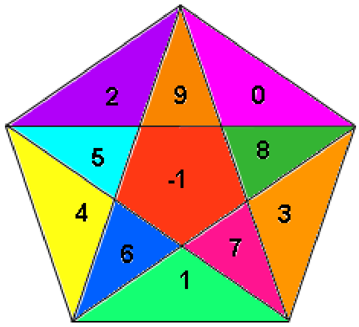


Figura 3.6: Pentágono Mágico Deslocado 3.6

Exemplo 3.7 Para $n = -3$, tem-se que, $S = 11.(-3) + 55 = 22$. A Condição 1 é atendida, visto que, uma possível combinação para decompor a soma em três fatores múltiplos de 11 são: $11 + 0 + 11$.

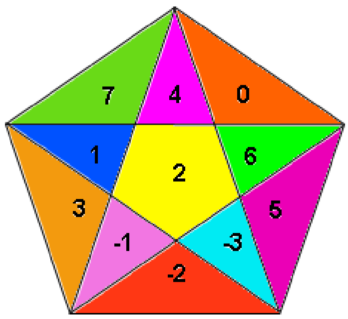


Figura 3.7: Pentágono Mágico Deslocado 3.7

Exemplo 3.8 Para $n = 10$, tem-se que, $S = 11.(10) + 55 = 165$. A Condição 1 é atendida, visto que, uma possível combinação para decompor a soma em três fatores múltiplos de 11 são: $44 + 77 + 44$.

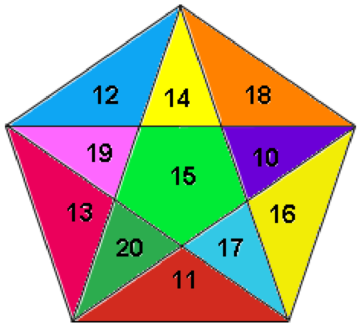


Figura 3.8: Pentágono Mágico Deslocado 3.8

3.3 Estratégias de Jogo

Os Pentágonos Mágicos Clássicos apresentam certos padrões estruturais que podem facilitar o processo de resolução. O Lema 3.9, prova que existe um padrão no Pentágono Mágico Clássico.

Lema 3.9 *Toda solução válida do Pentágono Mágico Clássico possui, necessariamente, ao menos um par de triângulos unidiagonais adjacentes cuja soma é 22.*

Demonstração: A prova segue por absurdo, supondo inicialmente que não existem dois triângulos unidiagonais consecutivos somando 22. Desse modo, existem três casos possíveis, que serão analisados.

Vamos analisar a soma total, Σ_S*, que é o resultado da soma dos* 5 *triângulos unidiagonais. Ao somar esses* 5 *triângulos, os valores das* 5 *regiões que servem de interseção são contados em duplicidade. Portanto, para calcular* Σ_S*, somamos os* 10 *números únicos envolvidos e, em seguida, somamos novamente os 5 números das regiões de interseção, cuja soma é denotada por* Σ_{int}.

1° Caso: Todas as 5 somas são 11.

A soma total das 5 equações dos triângulos é $\Sigma_S = 5 \times 11 = 55$. *A identidade algébrica do jogo é* $\Sigma_S = (66 - a(r_5)) + \Sigma_{int}$. *Substituindo, temos* $55 = (66 - a(r_5)) + \Sigma_{int}$*, o que implica* $\Sigma_{int} = a(r_5) - 11$. *O valor máximo de* $a(r_5)$ *é 11, o que torna o valor máximo de* Σ_{int} *igual a 0. Contudo,* Σ_{int} *é a soma de 5 inteiros positivos distintos, cujo valor mínimo é 15. É impossível que um valor seja ao mesmo tempo* ≤ 0 *e* ≥ 15.

2° Caso: Apenas uma soma é 22. A soma total das 5 equações é $\Sigma_S = (4 \times 11) + 22 = 66$. *Substituindo na identidade algébrica, temos* $66 = (66 - a(r_5)) + \Sigma_{int}$*, o que implica*

$\Sigma_{int} = a(r_5)$. *A soma mínima de 5 números distintos (*Σ_{int}*) é 15. Isso forçaria* $a(r_5)$ *a ser um número maior ou igual a 15, o que contradiz a regra de que* $a(r_5)$ *deve pertencer ao conjunto* $\{1, \ldots, 11\}$.

3º Caso: Duas somas não-adjacentes são 22.

O padrão de somas é $\{22, 11, 22, 11, 11\}$*, com uma soma total de* $\Sigma_S = 77$*. A identidade algébrica* $\Sigma_S = (66 - a(r_5)) + \Sigma_{int}$ *nos leva a* $\Sigma_{int} = 11 + a(r_5)$*. Esta condição, por si só, é possível (ex: se* $a(r_5) = 4$*,* $\Sigma_{int} = 15$*).*

A contradição é encontrada ao analisar os três triângulos que devem somar 11:

- *As 3 equações somam, no total, 33.*
- *Elas são compostas por 8 regiões distintas do tabuleiro.*
- *A soma mínima possível de 8 números distintos do conjunto* $\{1, \ldots, 11\}$ *é*

  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$.

É impossível que a soma de um conjunto de números seja 33 (conforme exigido pelas equações) e, ao mesmo tempo, tenha um valor mínimo de 36. Logo, todos os casos possíveis derivados da suposição inicial (de que não há dois triângulos adjacentes somando 22) levam a uma contradição matemática. Portanto, a suposição é falsa, provando o lema. □

Para solucionar os Pentágonos Mágicos Clássicos, é recomendável iniciar verificando se há um número previamente alocado na região central. Caso essa informação esteja disponível, a resolução pode começar pelos dois triângulos unidiagonais que compartilham essa região e cuja soma deve resultar em 22.

O processo para solucionar o Pentágono Mágico Clássico pode ser estruturado em um procedimento de cinco passos lógicos. Sugere-se o seguinte procedimento:

1. **Estabelecer a base:** Inicia-se preenchendo os triângulos unidiagonais consecutivos cuja soma seja 22 (permutando valores, se preciso), para fixar uma estrutura inicial coerente com os múltiplos de 11.

2. **Garantir a continuidade:** Em seguida, completa-se o triângulo bidiagonal que tenha apenas uma região vazia, de modo a respeitar a continuidade das somas parciais já estabelecidas.

3. **Avançar na composição:** O próximo movimento é preencher o triângulo unidiagonal $T_{r_{10},r_9,r_{11}}$.

4. **Completar a estrutura:** Testa-se combinações para os dois triângulos unidiagonais que restam, sempre buscando somas que sejam múltiplos de 11 para garantir a consistência numérica.

5. **Validar a solução:** Por fim, verifica-se se a disposição final de todos os números atende a todas as condições do jogo, confirmando a validade da solução.

Exemplo 3.10 Você está diante do desafio de completar o Pentágono Mágico Clássico, onde o número 8 já reina no centro da figura. Agora, sua missão é posicionar os demais números nas regiões restantes, de modo que a soma de cada triângulo unidiagonal e bidiagonal resulte em um valor que pertença ao conjunto mágico.

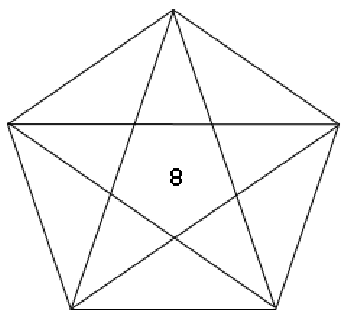


Figura 3.9: Pentágono Mágico com $a(r_5) = 8$

1^{o} Passo

- Listando as possibilidades para obter 22 somando três números:

$$
\begin{array}{ccccc}
10+1+11 & 4+10+8 & 8+9+5 & 3+9+10 & 3+8+11 \\
4+7+11 & 5+6+11 & 5+7+10 & 6+7+9 & 2+9+11
\end{array}
$$

- O número 8 está no centro, logo é necessário eliminar as possibilidades de formar 22 utilizando esse número. Restam somente as seguintes possibilidades:

$$
\begin{array}{cccc}
10+1+11 & 3+9+10 & 4+7+11 & 5+6+11 \\
5+7+10 & 6+7+9 & 2+9+11 &
\end{array}
$$

- Note que, 1, 2, 3 e 4 não podem ir no centro da interseção dos dois triângulos unidiagonais cuja soma de cada é 22, então é possível escolher um dos números entre 5, 6, 7, 9 e 11, para preencher o centro do Pentágono Mágico.

- Escolhendo o número 9:

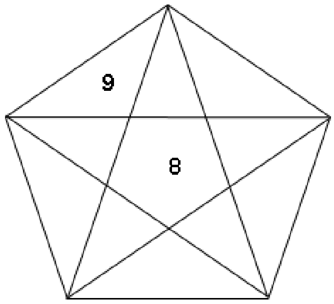


Figura 3.10: Resolução 1

- Podem ser formadas todas as combinações possíveis, escolhendo dois elementos dentre as três somas apresentadas:

$$9 + 3 + 10$$
$$9 + 6 + 7$$
$$9 + 2 + 11$$

Escolhendo a combinação 9 + 3 + 10 e 9 + 6 + 7:

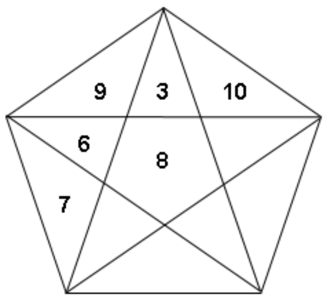


Figura 3.11: Resolução 2

2º Passo

- Observe que, para preencher o triângulo bidiagonal T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9}, onde $a(r_1) = 9, a(r_2) = 3, a(r_4) = 6$ *e* $a(r_5) = 8$, falta preencher somente uma região. Note que, a soma resulta em 8 + 9 + 6 + 3 = 26, para $S(T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9})$ ser múltipla de 11, isto é, somar

33, seria necessário que $a(r_9) = 7$, porém ele já foi usado. Para somar o próximo múltiplo que é 44, seria necessário que $a(r_9) = 18$, porém ele está fora do conjunto $\{1, 2, \ldots, 11\}$. Logo, não é possível essa combinação.

Permutando os elementos das combinações:

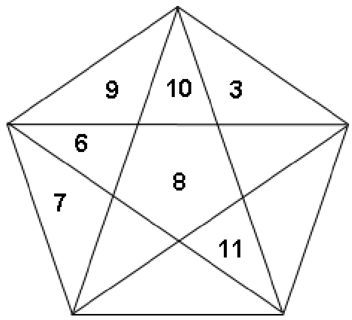


Figura 3.12: Resolução 3

Observe que, para preencher o triângulo bidiagonal T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9}, onde $a(r_1) = 9,\ a(r_2) = 10,\ a(r_4) = 6\ e\ a(r_5) = 8$, falta preencher somente uma região. Note que, a soma resulta em $8 + 9 + 6 + 10 = 33$, para $S(T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9})$ ser múltipla de 11, é necessário que $a(r_9) = 11$.

3º Passo

- Verificando quais combinações podem ser colocadas no triângulo unidiagonal $T_{r_{10},r_9,r_{11}}$, onde $a(r_9) = 11$. Somas múltiplas de 11, que possui o número 11 nessa combinação:

$$\begin{array}{cc} 11 + 10 + 1 & 11 + 3 + 8 \\ 11 + 4 + 7 & 11 + 5 + 6 \\ 11 + 2 + 9 & \end{array}$$

Os números 10, 8, 7, 6, e 9 já foram utilizados na Pentágono Mágico. Portanto, não há solução possível para essa disposição.

Retornando ao 1º Passo

- Permutando os elementos das combinações:

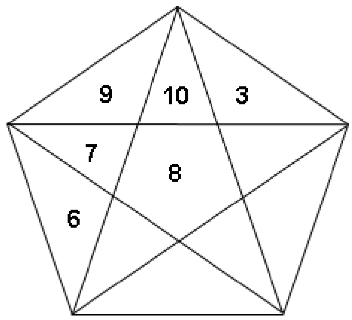


Figura 3.13: Resolução 4

Para preencher o triângulo bidiagonal T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9}, onde $a(r_1) = 9,\ a(r_2) = 10,\ a(r_4) = 7$ *e* $a(r_5) = 8$, falta preencher uma região. Note que, a soma resulta em 8 + 9 + 10 + 7 = 34, para $S(T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9})$ ser múltipla de 11, isto é, somar 44, seria necessário que $a(r_9) = 10$, porém ele já foi usado.

- Permutando os elementos das combinações:

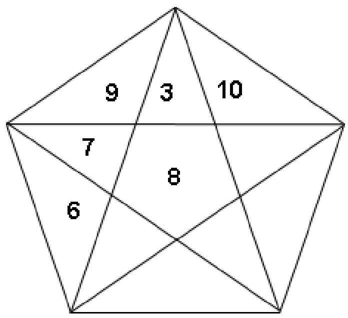


Figura 3.14: Resolução 5

2º Passo

Para preencher o triângulo bidiagonal T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9},onde $a(r_1) = 9,\ a(r_2) = 3,\ a(r_4) = 7$ *e* $a(r_5) = 8$, falta preencher uma região. Note que, a soma resulta em 8 + 9 + 3 + 7 = 27, para $S(T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9})$ ser múltipla de 11, isto é, somar 33, seria necessário que $a(r_9) = 6$, porém ele já foi usado.

Retornando ao 1º Passo, analisando quais combinações podem ser formadas e escolhendo dois elementos dentre as três somas apresentadas:

$$9 + 3 + 10$$
$$9 + 6 + 7$$
$$9 + 2 + 11$$

Escolhendo a combinação 9 + 3 + 10 e 9 + 2 + 11:

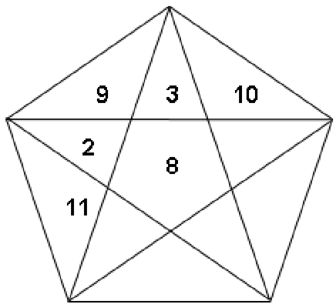


Figura 3.15: Resolução 6

2º Passo

- Para preencher o triângulo bidiagonal T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9}, onde $a(r_1) = 9,\ a(r_2) = 3,\ a(r_4) = 2$ *e* $a(r_5) = 8$, falta preencher uma região. Note que, a soma resulta em 8 + 9 + 3 + 2 = 22, para $S(T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9})$ ser múltipla de 11, isto é, somar 33, seria necessário que $a(r_9) = 11$, porém ele já foi usado.

Permutando os elementos das combinações:

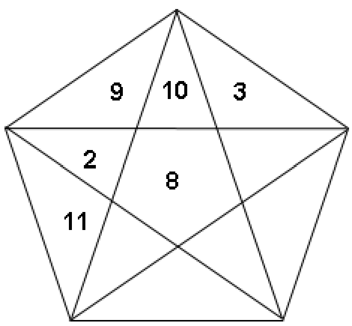


Figura 3.16: Resolução 7

Para preencher o triângulo bidiagonal T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9}, onde $a(r_1) = 9,\ a(r_2) = 10,\ a(r_4) = 2$ *e* $a(r_5) = 8$, falta preencher uma região. Note que, a soma resulta em 8 + 9 + 10 + 2 = 29, para $S(T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9})$ ser múltipla de 11, isto é, somar 33, é necessário que $a(r_9) = 4$.

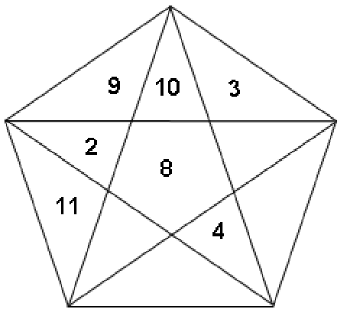


Figura 3.17: Resolução 8

3º Passo

- Verificando quais combinações podem ser colocadas no triângulo unidiagonal $T_{r_{10},r_9,r_{11}}$, onde $a(r_9) = 4$.

  Somas múltiplas de 11, que possui o número 4 em sua composição:

Soma 11	**Soma 22**
$1 + 4 + 6$	$4 + 10 + 8$
$2 + 4 + 5$	$4 + 7 + 11$

Observe que, os números 2, 10 e 11 já foram utilizados, restando somente a combinação 1 + 4 + 6.

4º Passo

- Verificando qual combinação pode ser disposta, de modo que os dois triângulos unidiagonais restantes, também sejam múltiplos de 11.

  Se $a(r_{11}) = 1$, $S(T_{r_7,r_{11}})$= 12, para $S(T_{r_7,r_8,r_{11}})$ ser um múltiplo de 11, seria necessário que $a(r_8) = 10$. Porém, esse número já foi utilizado.

  Se $a(r_{11}) = 6$, $S(T_{r_7,r_{11}})$=17, $S(T_{r_7,r_8,r_{11}})$ ser um múltiplo de 11, seria necessário que $a(r_8) = 5$.

Restando, para o $T_{r_3,r_6,r_{10}}$ a combinação $3 + 1 + 7$, onde $a(r_3) = 3$, $a(r_6) = 7$ *e* $a(r_{10}) = 1$ cuja soma é múltipla de 11.

Completando o Pentágono Mágico:

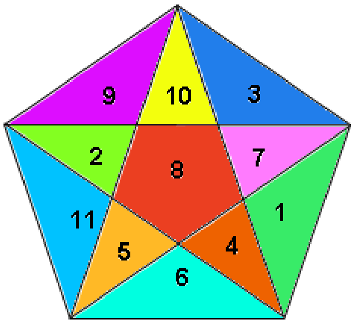


Figura 3.18: Resolução 9

5º Passo

- Verificando se o Pentágono Mágico foi satisfeito:

$$S(T_{r_1,r_2,r_3}) = 9 + 10 + 3 = 22$$
$$S(T_{r_3,r_6,r_{10}}) = 3 + 7 + 1 = 11$$
$$S(T_{r_{10},r_9,r_{11}}) = 1 + 4 + 6 = 11$$
$$S(T_{r_{11},r_8,r_7}) = 6 + 5 + 11 = 22$$
$$S(T_{r_7,r_4,r_1}) = 11 + 2 + 9 = 22$$
$$S(T_{r_1,r_2,r_4,r_5,r_9}) = 9 + 10 + 2 + 8 + 4 = 33$$
$$S(T_{r_3,r_2,r_6,r_5,r_8}) = 3 + 10 + 7 + 8 + 5 = 33$$
$$S(T_{r_{10},r_9,r_6,r_5,r_4}) = 1 + 4 + 7 + 8 + 2 = 22$$
$$S(T_{r_{11},r_9,r_8,r_5,r_2}) = 6 + 4 + 5 + 8 + 10 = 33$$
$$S(T_{r_7,r_4,r_8,r_5,r_6}) = 11 + 2 + 5 + 8 + 7 = 33$$

Todos os triângulos foram satisfeitos, portanto essa disposição é uma possível solução do Pentágono Mágico.

3.3.1 Solução do Pentágono Mágico

No Pentágono Mágico Clássico, a região central pode ser preenchida com qualquer elemento do conjunto de inteiros $\{1, 2, \ldots, 11\}$, sem que isso impeça a existência de uma configuração mágica válida.

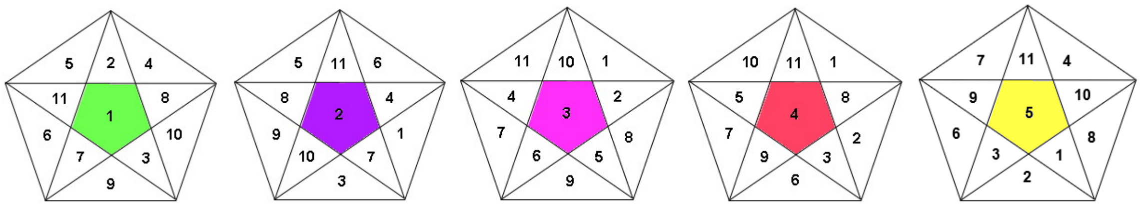


Figura 3.19: Variando $a(r_5)$ de 1 a 5

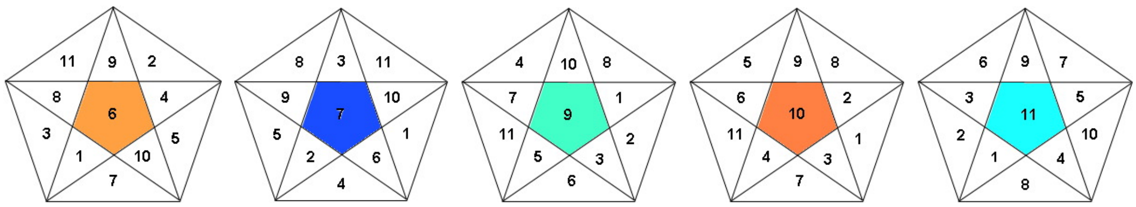


Figura 3.20: Variando $a(r_5)$ de 6 a 11

3.4 É possível mudar a regra do jogo?

Dentro da configuração do Pentágono Mágico, é possível identificar diversas maneiras de formar triângulos. Isso suscita a questão sobre os motivos pelos quais essas formações triangulares não foram adotadas como critérios na solução do Pentágono Mágico. A seguir, serão apresentadas as justificativas que fundamentam a escolha exclusiva dos triângulos unidiagonais e bidiagonais como critérios de análise.

Ainda assim, permanece a indagação: é possível resolver o jogo com mais triângulos, formados por diferentes regiões?

As Figuras 3.21 e 3.22 ilustram os triângulos formados por duas regiões, enquanto o Lema 3.11 demonstra a impossibilidade de utilizá-los na resolução do Pentágono Mágico.

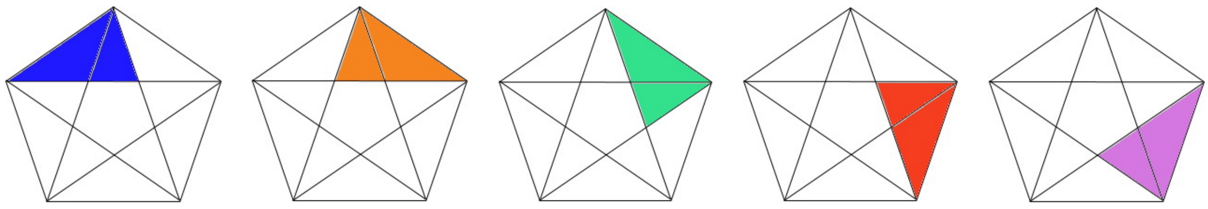


Figura 3.21: Triângulos com 2 regiões

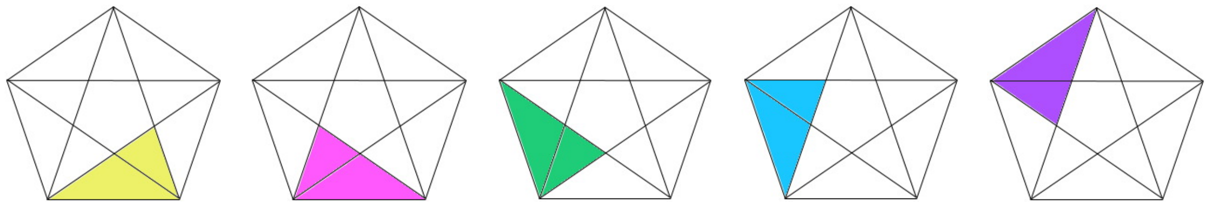


Figura 3.22: Triângulos com 2 regiões

Lema 3.11 *Ao tentar resolver o Pentágono Mágico, se adicionar os triângulos formados por duas regiões e adotar como critério que o valor associado a cada triângulo pertença ao conjunto mágico, então o Pentágono Mágico não admite solução.*

Demonstração: *Suponha por absurdo, que seja possível solucionar o Pentágono Mágico adicionando como critério de solução, que os triângulos compostos por duas regiões, tenham soma múltipla de 11. Considere o* T_{r_1,r_2,r_3}*, tem-se que,* T_{r_1,r_2} *deve ter soma múltipla de 11, como a soma das três regiões também deve ser múltipla de 11, segue que* $a(r_3)$ *é um múltiplo de 11.*

Analisando o próximo triângulo unidiagonal, $T_{r_3,r_6,r_{10}}$*. Tem-se que,* T_{r_3,r_6} *deve ter soma múltipla de 11, mas como* $a(r_3)$ *é um múltiplo de 11. Segue que,* $a(r_6)$*, também é um múltiplo de 11. O que é absurdo, pois em uma sequência de 11 números inteiros consecutivos, há somente 1 múltiplo de 11.*

Logo, não é possível obter uma solução do Pentágono Mágico, se considerar como critério de solução, que os triângulos compostos por duas regiões, tenham soma pertencente ao conjunto mágico. □

Os triângulos pentagonais são formados a partir de uma diagonal do pentágono combinada com dois de seus lados adjacentes, sendo definidos pela interseção de duas diagonais que possuem um vértice em comum com a primeira diagonal citada. Em todos esses triângulos, r_5 está presente, funcionando como uma região comum entre eles. A figura 3.23, mostra esses triângulos pentagonais:

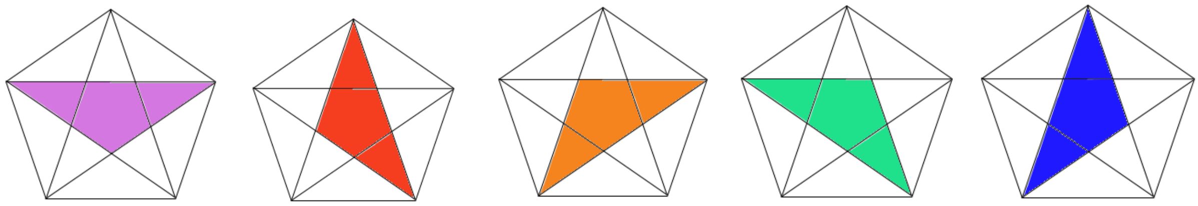


Figura 3.23: Triângulos Pentagonais

É possível solucionar o jogo usando os triângulos pentagonais? O Lema 3.12, demonstra que não é possível solucionar o Pentágono Mágico se, como critério de solução, for exigido que a soma dos números de cada um dos triângulos pentagonais pertença ao conjunto mágico.

Lema 3.12 *O Pentágono Mágico não admite solução se for imposto, adicionalmente, que o valor associado ao triângulo pentagonal pertença ao conjunto mágico.*

Demonstração: *Suponha, por absurdo, que existam dois triângulos pentagonais com somas múltiplas de 11 (S_1 e S_2) que tenham dois números em comum (a e b). Sejam as somas:*

$$a + b + c = S_1 \quad e \quad a + b + d = S_2$$

Subtraindo as equações, tem-se que $c - d = S_1 - S_2$.
Se $S_1 = S_2$, então $c = d$, o que contraria a hipótese de que os números alocados nas regiões são distintos. Por outro lado, se S_1 e S_2 são diferentes, a menor diferença não-nula entre eles é 11 (ex: $22 - 11 = 11$). Isso implicaria $|c - d| \geq 11$.
Isso não é possível, pois como c e d estão no intervalo de 1 a 11, a diferença máxima entre eles é $11 - 1 = 10$. Assim, não existem duas somas múltiplas de 11 que tenham dois números em comum. Logo, não é possível obter uma solução considerando que os triângulos pentagonais tenham soma pertencente ao conjunto mágico. □

3.5 Produto Gerado: Jogo Pentágono Mágico

O Pentágono Mágico emerge como a culminação do processo criativo desta pesquisa, materializado em uma ferramenta didática autoral, projetada para a exploração de conceitos matemáticos de maneira lúdica, manipulável e significativa. Para abranger diferentes contextos e estilos de aprendizagem, o jogo foi desenvolvido em vários formatos. As versões físicas, que constituem o produto principal deste trabalho, incluem um protótipo em papel e uma lousa interativa, que facilita a colaboração em grupo. A este conjunto soma-se um quebra-cabeça, concebido para reforçar o raciocínio, a visualização espacial e a familiaridade com a estrutura do jogo. Finalmente, como um desdobramento natural e futuro, projeta-se a construção de sua versão digital, visando ampliar o alcance e as possibilidades de interação.

Protótipo em papel:

Uma versão impressa do jogo será confeccionada em papel cartonado, composta por um conjunto de cartas numeradas de 1 a 11, que serão utilizadas para preencher as regiões do Pentágono Mágico de acordo com os desafios propostos.

Essa versão física permite a manipulação direta dos componentes, promovendo uma experiência de aprendizagem tátil e interativa. Além disso, sua fácil reprodução e o baixo custo de produção tornam o material acessível para aplicação em sala de aula, incentivando o uso pedagógico em diferentes contextos educacionais.

Protótipo em lousa:

O Pentágono Mágico será confeccionado em uma lousa branca. Esse formato foi pensado para proporcionar maior interatividade e flexibilidade durante as atividades. Possibilitando:

- A escrita direta com canetão nas regiões internas do Pentágono, facilitando o preenchimento e a manipulação dos números durante a resolução dos desafios;

- A correção rápida e dinâmica das tentativas, por meio do uso de apagador, incentivando o processo de experimentação e revisão contínua.

Essa versão é especialmente eficaz em ambientes de ensino coletivo e colaborativo, promovendo uma abordagem ativa da aprendizagem baseada na tentativa e erro. Além de ampliar a participação dos alunos, ela contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia e da resolução de problemas de forma compartilhada.

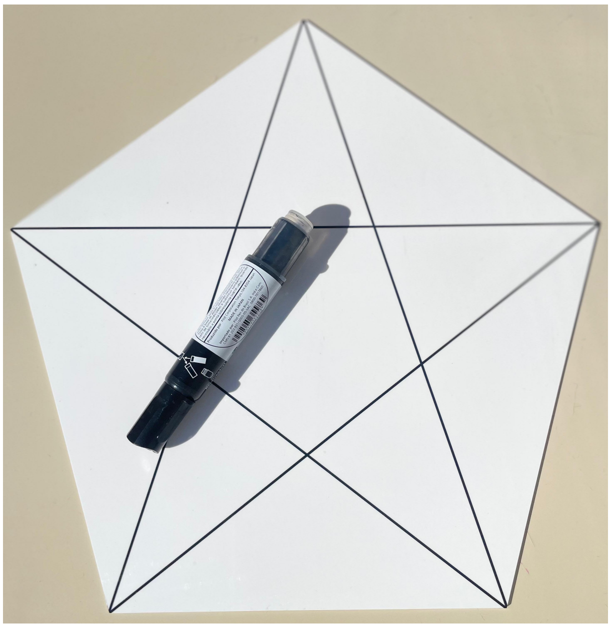


Figura 3.24: Lousa

Quebra-cabeça:

Uma das implementações físicas do Pentágono Mágico consiste em um quebra-cabeça de encaixe, constituído por 11 peças destacáveis que correspondem às suas regiões geométricas internas (10 triângulos e 1 pentágono central). As peças são pré-numeradas com os inteiros de 1 a 11, como mostram as figuras 3.19 e 3.19. Embora a atividade envolva a manipulação tátil e a montagem estrutural, seu propósito principal é a resolução de um problema lógico-matemático. O participante é instigado a ir além da organização espacial, sendo desafiado a empregar um processo iterativo de formulação de hipóteses, teste de combinações e reorganização estratégica das peças, a fim de satisfazer as regras de soma que definem a solução do jogo.

Os formatos físicos do Pentágono Mágico foram criados para traduzir o desafio matemático em uma experiência concreta e interativa. Versões como o protótipo em papel e o quebra-cabeça visam concretizar conceitos matemáticos, transformando-os em objetos manipuláveis que convidam à participação ativa, à experimentação direta e ao aprendizado colaborativo. A experiência tátil é fundamental para construir uma compreensão intuitiva e sólida do problema.

Embora a interação física seja central, a visão para o Pentágono Mágico se estende ao ambiente digital para ampliar seu alcance e potencializar suas aplicações. O desenvolvimento de uma versão computacional atende às demandas de contextos de ensino híbridos e remotos, oferecendo flexibilidade e acessibilidade. Permite a coleta automatizada de dados sobre o desempenho dos estudantes e a análise dos processos cognitivos envolvidos na resolução das tarefas propostas. Além disso, abriria caminho para sua integração com tecnologias educacionais emergentes, alinhadas a metodologias ativas de aprendizagem.

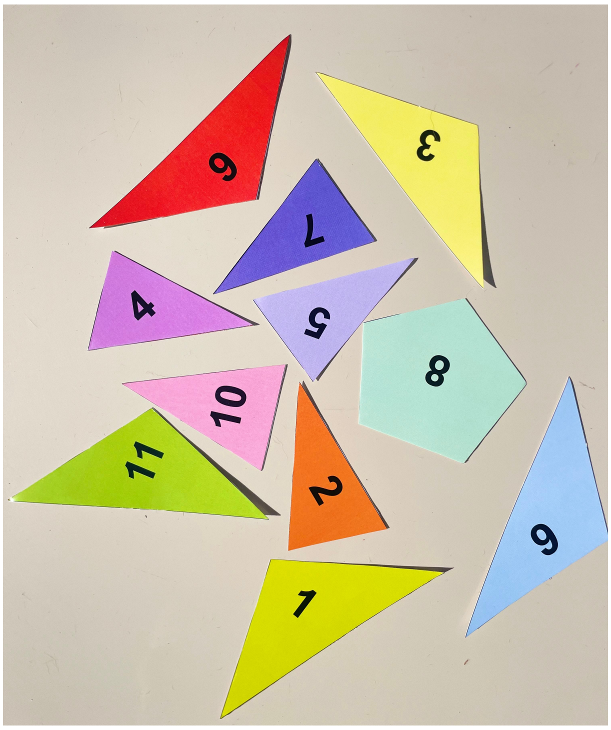


Figura 3.25: Quebra-cabeça

Capítulo 4

Aplicações em Sala de Aula

A atividade foi desenvolvida na Escola Estadual Pólo Professora Regina Lúcia Anffe Nunes Betine, na Penitenciaria Estadual Masculina de Regime Fechado da Gameleira II, localizada na estrada da Gameleira, Km 455, Zona Rural em Campo Grande, Mato Grosso do Sul. Foi aplicada em uma turma composta por 21 estudantes do ensino médio da Educação de Jovens e Adultos privados de liberdade. A Escola Regina Betine é uma instituição de ensino voltada para a educação dos internos das unidades penitenciárias da região, proporcionando o ensino fundamental e médio na modalidade EAD, com aula presencial uma vez por semana, seguindo o que é descrito no Projeto Conectando Saberes III. O perfil dos internos que frequentam essa escola é bastante diversificado, abrangendo homens em diversos estágios de suas penas, com diferentes idades.

As aulas são conduzidas de forma adaptada às condições do sistema penitenciário. Os professores lecionam em salas de aula dentro das unidades, com um cuidado constante com a segurança. O formato das aulas é o clássico, mas com certas adaptações, como maior vigilância e restrições de movimento. Os internos, durante as aulas, usam uniformes penitenciários, geralmente compostos por camisas e calças alaranjadas, que facilitam a identificação e a segurança dentro da unidade. Os professores, por sua vez, têm que seguir um rígido protocolo de segurança para acessar as unidades. Eles são submetidos a um bodyscan antes de entrarem nas áreas onde as aulas são ministradas, para garantir que não estejam portando objetos ilícitos e são facilmente identificados dentro da unidade, através do jaleco de cor erva-doce.

A organização das aulas varia conforme a instituição, o tipo de curso oferecido e o nível de segurança do estabelecimento. Na unidade prisional Gameleira II, as aulas ocorrem em salas equipadas com carteiras escolares similares às das redes públicas estaduais de Campo Grande e quadro branco. O docente permanece separado dos alunos por uma grade de ferro, por medida de segurança, em razão do elevado grau de periculosidade da unidade. A distribuição de materiais pedagógicos e a condução das atividades são realizadas por meio dessa estrutura. A figura 4.1 ilustra o ambiente em que as aulas são ministradas.

Figura 4.1: Sala de aula

Embora o contexto da educação em unidades prisionais apresente características específicas, as dificuldades enfrentadas pelos docentes que atuam nesse ambiente não diferem muito daquelas observadas nas escolas regulares. Podendo, em muitos casos, ser encontrada de forma ainda mais acentuada. Nesse sentido, é indispensável que o trabalho pedagógico seja orientado por um olhar sensível e criterioso às necessidades desse público, considerando suas trajetórias de vida, seus ritmos de aprendizagem e os obstáculos adicionais impostos pela condição de privação de liberdade.

Considerando as dificuldades recorrentes observadas entre os estudantes na compreensão de conceitos abstratos da matemática, especialmente no que se refere ao raciocínio lógico e à construção de argumentos, optou-se por explorar determinadas configurações do Pentágono Mágico como uma proposta didática de caráter lúdico, acessível e desafiador. Essa abordagem tem como objetivo favorecer o desenvolvimento de competências matemáticas por meio da experimentação e da investigação, como o raciocínio lógico, a construção de argumentos, o cálculo mental e a capacidade de resolução de problemas.

A aula foi iniciada com a apresentação do manual do Pentágono Mágico, por meio de slides, contendo a explicação das regras e da estrutura do jogo. Considerando que a atividade foi realizada em uma unidade de segurança máxima, a entrada de determinados materiais foi restringida ou dificultada pelos agentes penitenciários. Em função dessas limitações, os estudantes realizaram a atividade utilizando apenas folha sulfite, lápis e borracha.

O manual apresentou a estrutura geométrica do Pentágono Mágico, identificando suas subestruturas triangulares: os triângulos unidiagonais, formados por uma diagonal, e os triângulos bidiagonais, constituídos por duas diagonais do pentágono.

Durante a apresentação, foi descrito o objetivo central do jogo: distribuir, sem repetição, os números inteiros de 1 a 11 nas regiões, de forma que a soma dos valores presentes em cada triângulo unidiagonal pertença ao conjunto mágico. A fim de garantir a compreensão adequada dos conceitos envolvidos, considerou-se pertinente realizar uma breve revisão sobre os múltiplos de 11 e a definição do conjunto mágico associado à configuração do Pentágono.

Foi explicado ainda que a atividade ocorreria no nível básico do jogo, no qual são utilizados exclusivamente os números inteiros de 1 a 11, sem repetição. Para fins de contextualização, mencionou-se que, em níveis mais avançados, há a inclusão de números inteiros negativos e do zero, o que amplia a complexidade aritmética e combinatória do desafio proposto.

Além disso, foram descritas diferentes modalidades de jogo, adaptáveis a diversos contextos de ensino e aprendizagem. No modo corrida, vence o participante que encontrar a solução completa do Pentágono Mágico no menor tempo. No modo solo, o desafio consiste em resolver a configuração individualmente, otimizando o tempo de execução. Já no modo por tentativas, a vitória é atribuída àquele que realizar o menor número de movimentações ou permutações até alcançar a solução correta. Essas variações permitem que o jogo seja ajustado a diferentes objetivos pedagógicos, favorecendo o desenvolvimento do pensamento crítico, do raciocínio lógico e da autonomia. No entanto, para a aplicação realizada nesta atividade, optou-se exclusivamente pelo modo solo, sem o controle do tempo de execução.

4.1 Objetivo das Atividades

A concepção e aplicação do jogo Pentágono Mágico em sala de aula foram motivadas por um cenário educacional específico e desafiador. A turma, composta por estudantes da Educação de Jovens e Adultos em privação de liberdade, apresentava um perfil com necessidades pedagógicas. O ambiente prisional, com contato restrito ao mundo exterior, frequentemente resulta em mentes ociosas e, como observado em sala, os alunos demonstravam dificuldades recorrentes na compreensão de conceitos matemáticos. Tais dificuldades se manifestavam na construção do raciocínio lógico, na capacidade de formular e testar hipóteses, de validar argumentos e de seguir uma sequência lógica de pensamento para resolver problemas.

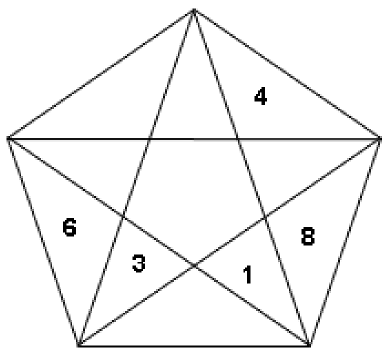
Diante desse cenário, a idealização do Pentágono Mágico surgiu da necessidade de introduzir uma ferramenta pedagógica que pudesse ir além do modelo clássico e repetitivo, muitas vezes causador de monotonia e desinteresse. O intuito de aplicar o jogo foi o de criar um ambiente de investigação que, por sua natureza lúdica e por meio de desafios instigantes e acessíveis , pudesse engajar os estudantes de forma ativa e significativa. A expectativa era que, ao interagir com um problema que não possui uma solução imediata, os alunos fossem naturalmente levados a desenvolver as competências que apresentavam maior defasagem.

Esperava-se que o jogo estimulasse os estudantes a saírem de uma postura passiva e passassem a observar padrões, testar hipóteses e analisar relações numéricas, revisando suas decisões ao encontrar inconsistências. O objetivo era que eles desenvolvessem, por meio da experimentação, competências matemáticas essenciais como o raciocínio lógico, a construção de argumentos, o cálculo mental e a capacidade de resolução de problemas.

Ao final do processo de aplicação, os resultados obtidos confirmaram e, em alguns aspectos, superaram as expectativas. A interação com o jogo, de fato, contribuiu para o desenvolvimento de competências como o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a resolução de problemas. Mais notavelmente, observou-se uma mudança significativa de postura, os estudantes passaram a encarar o erro como parte fundamental do processo de descoberta, permitindo-se experimentar com maior confiança. Os próprios alunos relataram em suas autoavaliações que a experiência foi positiva, *muito bom para desenvolver meu raciocínio* e que o jogo *contribui muito para o desenvolvimento de cada um.* Assim, o Pentágono Mágico cumpriu seu papel como ferramenta pedagógica, não apenas para trabalhar conteúdos de álgebra e aritmética, mas para fomentar habilidades de pensamento e promover a autonomia intelectual dos estudantes.

4.2 Explorando a Fase 1

1- O Pentágono Mágico está incompleto e o desafio agora está em suas mãos! Observe atentamente as regiões em branco e preencha cada uma com os números de 1 a 11, sem repetir nenhum. Seu objetivo é garantir que, em todos os triângulos unidiagonais, a soma dos valores pertença ao conjunto mágico.



No desenvolvimento dessa atividade, os estudantes foram desafiados a resolver um problema estruturado com base em relações numéricas e espaciais. O enunciado exigia a análise combinatória de diferentes possibilidades de preenchimento, estimulando a reflexão sobre padrões e restrições implícitas na construção da solução. Como resultado da interação com a tarefa e das estratégias adotadas por cada aluno, foram obtidas as seguintes disposições numéricas:

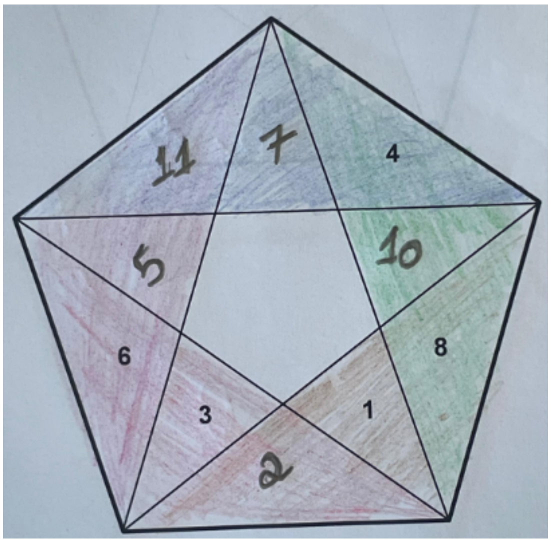


Figura 4.2: Solução do aluno 1

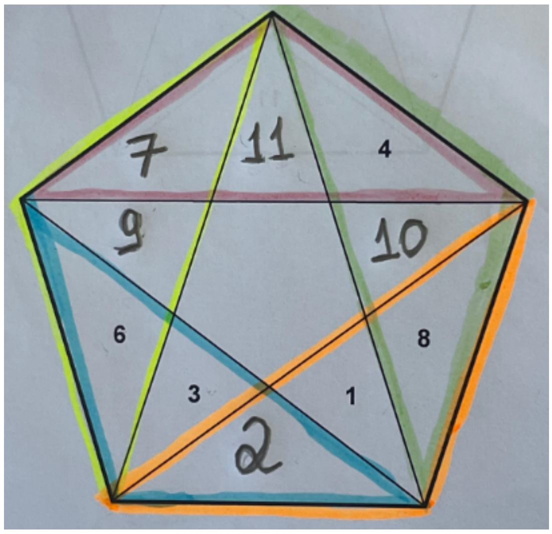


Figura 4.3: Solução do aluno 2

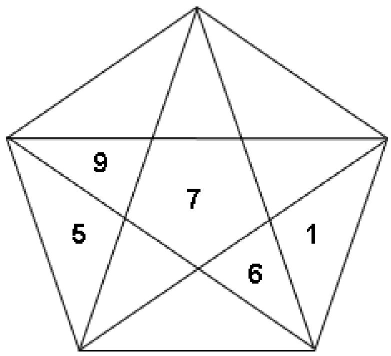
Alguns estudantes optaram por iniciar a atividade pelas soluções mais evidentes, preenchendo inicialmente os triângulos unidiagonais que exigiam apenas uma região para serem completados. Outros, porém, começaram por regiões que ofereciam um maior número de possibilidades de preenchimento e, consequentemente, maior chance de erro, o que demandava mais tempo até que se alcançasse uma disposição correta dos números. Observou-se, ainda, que alguns participantes inseriram números fora do conjunto numérico previamente definido, que compreendia os inteiros de 1 a 11. Diante disso, as regras do jogo foram retomadas com a turma, a fim de reforçar os critérios estabelecidos para a atividade. À medida que interagiam com os colegas e analisavam diferentes abordagens de resolução, os estudantes passaram a identificar estratégias mais adequadas e eficientes para o desenvolvimento da tarefa.

Outro ponto relevante foi a percepção, por parte dos participantes, de que diferentes soluções estavam sendo obtidas, como mostram as figuras **??** e **??**. A partir disso, levantaram a hipótese de que uma das respostas poderia estar incorreta. Em seguida, cada estudante passou a defender sua própria abordagem, justificando-a com base no seguinte argumento: *"Minha solução está correta, pois a soma de todos os triângulos unidiagonais resulta em múltiplos de 11."*

Desse modo, registrou-se na lousa o desenvolvimento do processo de resolução, até se alcançar o triângulo que admitia mais de uma possibilidade de preenchimento. Tratava-se do triângulo T_{r_1,r_2,r_3}, cuja soma parcial era $a(r_1) + a(r_2) = 18$. Para satisfazer essa condição, havia duas possibilidades de permutação entre os valores de $a(r_1)$ *e* $a(r_2)$, utilizando os números 7 e 11.

Se $a(r_1) = 11\ e\ a(r_2) = 7$, então $a(r_4) = 5$, por outro lado se $a(r_1) = 7$ e $a(r_2) = 11$, então $a(r_4) = 9$. Ao somar os valores dos triângulos unidiagonais para ambas as disposições numéricas, verificou-se que ambas satisfaziam os critérios de solução do Pentágono Mágico. Com isso, os estudantes concluíram que o problema admitia mais de uma resposta correta.

2- Diante de você está o Pentágono Mágico com regiões ainda em branco, esperando pelas escolhas corretas. Sua missão é preencher essas regiões com os números de 1 a 11, sem repeti-los, de forma que a soma de cada triângulo unidiagonal pertença ao conjunto mágico.



No desenvolvimento desse exercício, foi encontrada a seguinte resolução:

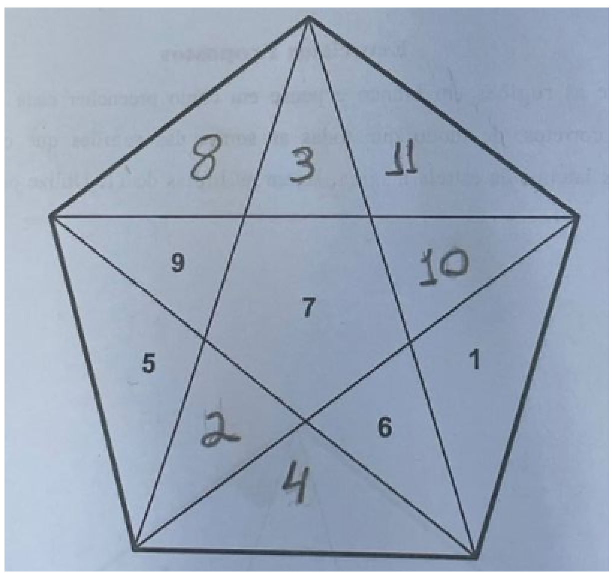


Figura 4.4: Solução do aluno 3

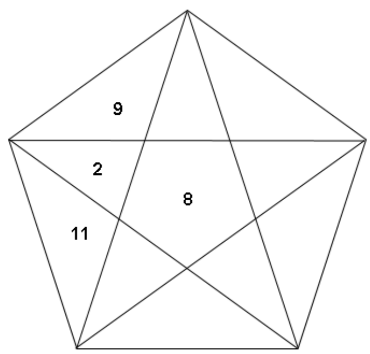
Durante o desenvolvimento da atividade, verificou-se que havia apenas uma solução possível para o problema proposto, em razão da forma como os números estavam organizados. Dessa forma, todos os estudantes que resolveram corretamente o Pentágono Mágico chegaram à mesma configuração final, o que reforça a unicidade da solução e a consistência do desafio apresentado.

Inicialmente, os estudantes realizaram o preenchimento das regiões considerando apenas os triângulos unidiagonais. Posteriormente, introduziu-se o conceito dos triângulos bidiagonais, e foi solicitado à turma que verificasse se os valores previamente atribuídos também satisfaziam essas novas configurações geométricas. Após a análise das somas correspondentes, constatou-se que tanto os triângulos unidiagonais quanto os bidiagonais apresentavam resultados compatíveis com os critérios estabelecidos, validando a coerência da solução construída.

4.3 Explorando a Fase 2

Essa Fase demanda um nível mais elevado de raciocínio lógico, uma vez que requer a verificação simultânea dos triângulos unidiagonais e bidiagonais. Caso essa análise não ocorra de forma integrada, o processo de resolução tende a se prolongar, já que inconsistências podem passar despercebidas por um tempo considerável quando apenas um tipo de triângulo é analisado isoladamente.

3- Agora que você compreendeu os triângulos unidiagonais, é hora de elevar o desafio! Diante de você está o Pentágono Mágico com regiões ainda em branco, esperando pelas escolhas corretas. Sua missão é preencher esses espaços com os números de 1 a 11, sem repeti-los, de forma que todas as somas dos triângulos unidiagonais e também dos bidiagonais resultem em múltiplos de 11.



No desenvolvimento desse exercício, foi encontrada a seguinte resolução:

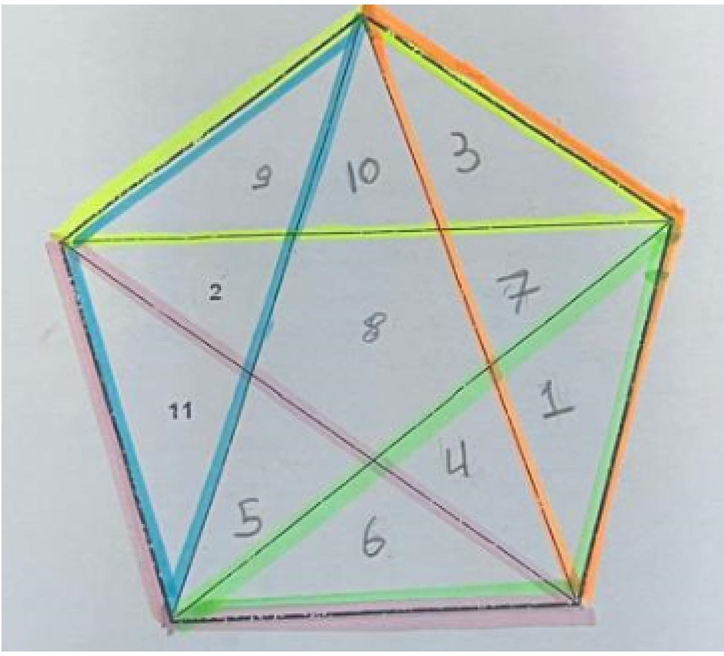
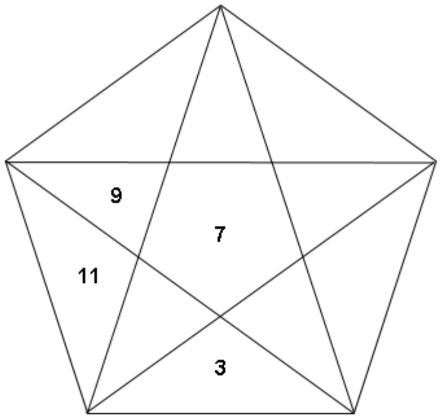


Figura 4.5: Solução do aluno 4

Os alunos iniciaram a resolução do Pentágono Mágico atribuindo valores às regiões de modo a satisfazer, inicialmente, os triângulos unidiagonais. Uma vez atendidas essas condições, passaram a verificar os triângulos bidiagonais, realizando permutações sempre que necessário. Contudo, não foi possível acompanhar integralmente o processo de resolução em sala, pois, devido à limitação de tempo, a atividade precisou ser concluída pelos alunos no alojamento. Na aula seguinte, ao entregarem a atividade, relataram que foram ajustando os valores atribuídos na tentativa de alcançar uma solução. Isso porque percebiam que, para os triângulos ainda incompletos e que compartilhavam regiões com aqueles já preenchidos, não havia disposição numérica possível que satisfizesse simultaneamente todas as condições. Diante disso, tornou-se necessário revisar as atribuições anteriores, promovendo novas permutações em busca de uma configuração adequada.

4- Observe atentamente o Pentágono Mágico abaixo. Você acha que é possível completá-la seguindo as regras do jogo? Tente descobrir se existe uma solução válida e, mais importante, explique o porquê da sua resposta. Mesmo quando a resposta é “não”, entender o motivo é uma parte valiosa do desafio!



No desenvolvimento desse exercício, foram obtidas as seguintes disposições numéricas:

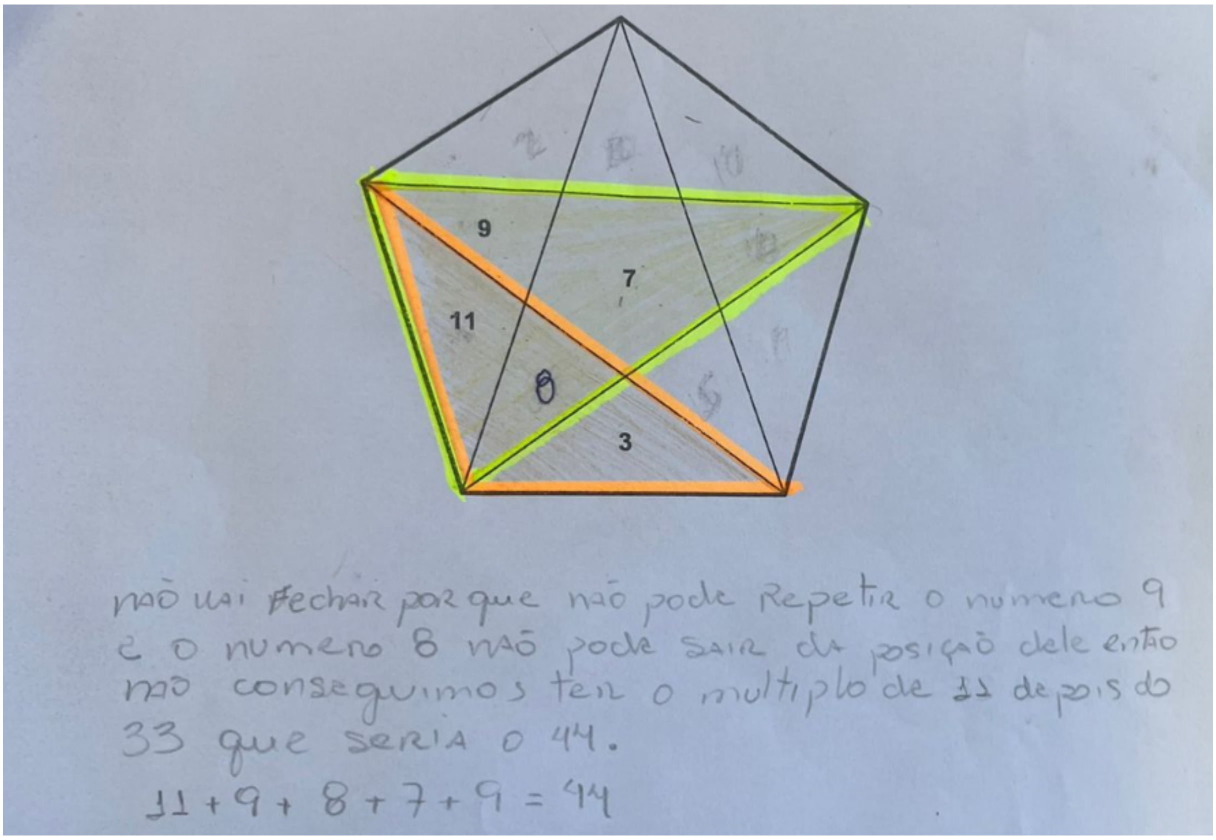


Figura 4.6: Solução do aluno 5

Transcrição: "Não vai fechar por que não pode repetir o número 9 *e o número* 8 *não pode sair da posição dele então não conseguimos ter o múltiplo de* 11 *depois de* 33 *que seria o* 44. $11 + 9 + 8 + 7 + 9 = 44$*"*

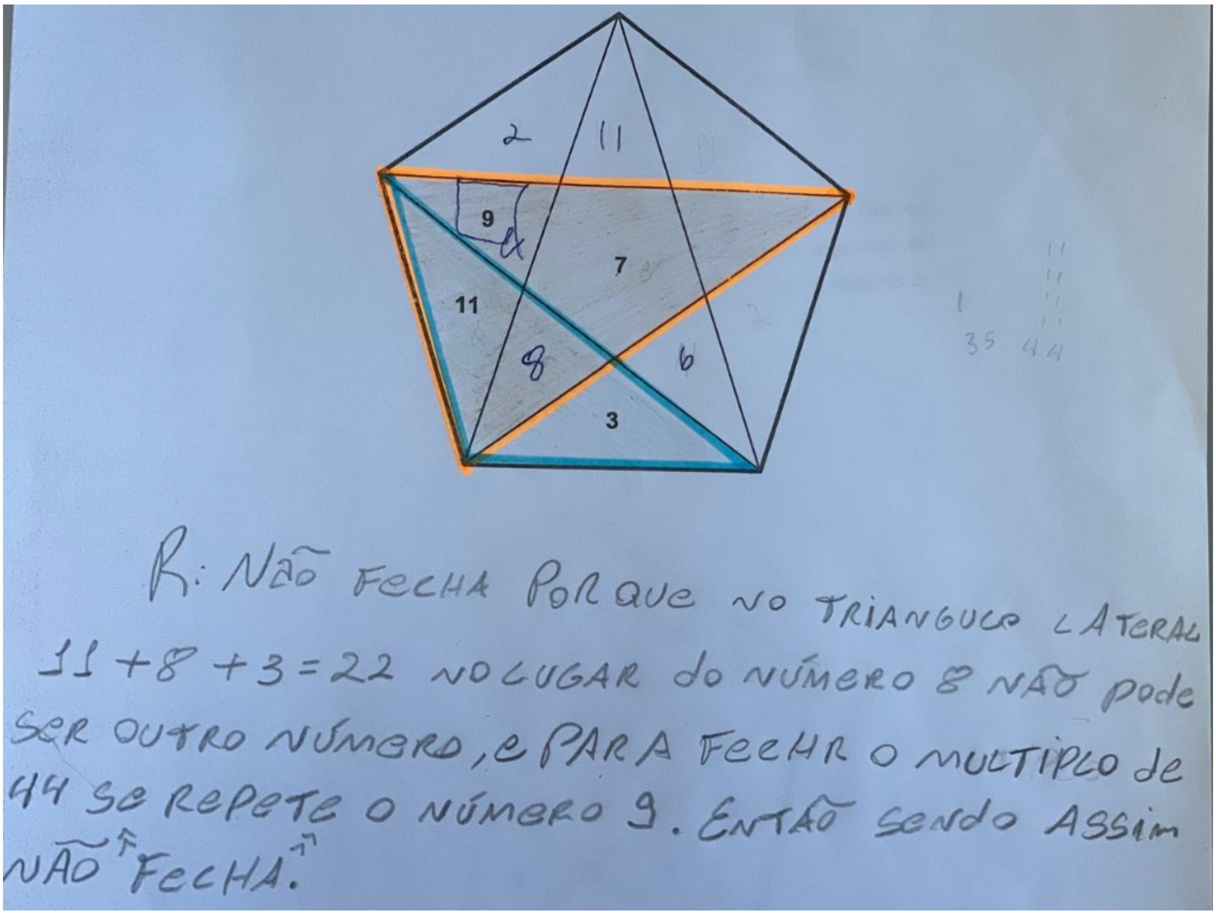


Figura 4.7: Solução do aluno 6

Transcrição: "Não fecha porque no triangulo lateral $11+8+3 = 22$ *no lugar do número* 8 *não pode ser outro número, e para fechar o múltiplo de* 44 *se repete o número* 9*. Então sendo assim não fecha."*

No processo de resolução desse Pentágono Mágico, alguns alunos já iniciaram pelos triângulos unidiagonais que faltavam apenas uma região para serem preenchidos, como o triângulo $T_{r_7,r_8,r_{11}}$, que estava somando 14. Logo, o próximo múltiplo de 11 possível seria 22, ou seja, $a(r_8) = 8$. Pela mesma linha de raciocínio, no triângulo T_{r_7,r_4,r_1}, concluíram que $a(r_1) = 2$. Outros, por sua vez, iniciaram por regiões que abriam margens para muitas possibilidades. Após tentarem muito, perceberam que haviam triângulos mais eficientes para iniciarem.

Uma característica recorrente observada na turma foi a dificuldade inicial em atribuir valores durante a resolução do problema. Os alunos demonstraram insegurança ao se depararem com uma atividade em que não era possível verificar de imediato a correção de suas escolhas. A natureza exploratória da proposta exigia que desenvolvessem progressivamente suas hipóteses até identificarem uma inconsistência ou confirmassem a validade da solução encontrada. Porém, com a evolução das atividades, foi possível observar uma mudança significativa de postura: os estudantes passaram a compreender o erro como parte integrante do processo de aprendizagem e resolução, permitindo-se arriscar mais e experimentar diferentes possibilidades com maior confiança.

A partir dessa mudança de atitude, os alunos passaram a focar nos triângulos que apresentavam maior número de possibilidades combinatórias. Utilizando estratégias de tentativa e erro, buscavam verificar se a disposição numérica satisfazia as condições impostas pelo Pentágono Mágico. Alguns perceberam rapidamente que a configuração proposta não resolvia completamente o problema. Outros, contudo, acreditaram ter alcançado a solução correta. No entanto, esses últimos haviam considerado apenas os triângulos unidiagonais como critério de verificação. Quando instigados a analisar também os triângulos bidiagonais, perceberam que a disposição adotada não satisfazia integralmente as restrições do problema. Essa constatação os levou a compreender que é possível distribuir todos os números sem repetição e ainda satisfazer parcialmente a estrutura, validando os triângulos unidiagonais, mas que tal disposição pode falhar nos triângulos bidiagonais. Assim, consolidou-se entre os alunos a noção de que a solução válida para o Pentágono Mágico exige a verificação simultânea e criteriosa dos dez triângulos que a compõem, reforçando a importância de uma abordagem analítica e global na resolução do desafio.

Após diversas tentativas realizadas por toda a turma, os estudantes começaram a afirmar que o Pentágono Mágico não admitia solução. Diante dessa hipótese, foram questionados sobre os fundamentos que os levavam a tal conclusão. No entanto, naquele momento, ainda não haviam conseguido elaborar justificativas estruturadas ou convincentes que sustentassem essa ideia. Com a continuidade do trabalho e a persistência na exploração de diferentes configurações, começaram a emergir respostas que se aproximavam das condições exigidas para a solução completa, embora ainda apresentassem margem para variações na disposição dos números. Até que dois alunos, de fato, chegaram à resposta que era a mais categórica. As quais estão representadas nas figuras **??** e **??**. O restante da turma começou a apresentar respostas semelhantes somente após a contribuição inicial de dois alunos, os quais forneceram as primeiras respostas. Esse fenômeno sugere que as respostas subsequentes foram influenciadas pelas explicações iniciais, indicando uma possível dinâmica de aprendizado em que a interação entre os participantes e as primeiras intervenções exercem um papel importante na formação das respostas coletivas.

O caminho mais curto para solucionar esse Pentágono Mágico, consistia em perceber que no triângulo unidiagonal $T_{r_7,r_8,r_{11}}$ teria obrigatoriamente $a(r_8) = 8$, e posteriormente olhar para o triângulo bidiagonal T_{r_7,r_8,r_4,r_5,r_6}, que estava somando 35. Logo, o próximo múltiplo possível sera 44. Mas para isso, era necessário que $a(r_6) = 9$, entretanto o número 9 já foi utilizado. Esses dois argumentos garantem que não é possível solucionar o Pentágono Mágico proposto.

4.4 Autoavaliação

Essa atividade teve uma abordagem mais teórica, sendo fundamental na consolidação do aprendizado, pois foi pensada intencionalmente para estimular o aluno a reconhecer e valorizar o processo de raciocínio envolvido no jogo. Ao ser convidado a refletir sobre sua própria experiência, isso fortalece significativamente a sua autonomia intelectual.

A proposta incentiva a tomada de consciência sobre as estratégias utilizadas, os desafios enfrentados e os caminhos encontrados para superá-los, favorecendo não apenas o desenvolvimento da lógica e da organização de ideias, mas também a capacidade de transferir essas habilidades para outras situações e áreas do conhecimento.

Além disso, essa prática valoriza o protagonismo do aluno em sua jornada de aprendizagem, promovendo um espaço onde ele se vê como autor do próprio percurso, capaz de analisar suas decisões, reconhecer avanços e perceber que o raciocínio lógico e a estruturação do pensamento são competências que se constroem com prática, reflexão e intencionalidade.

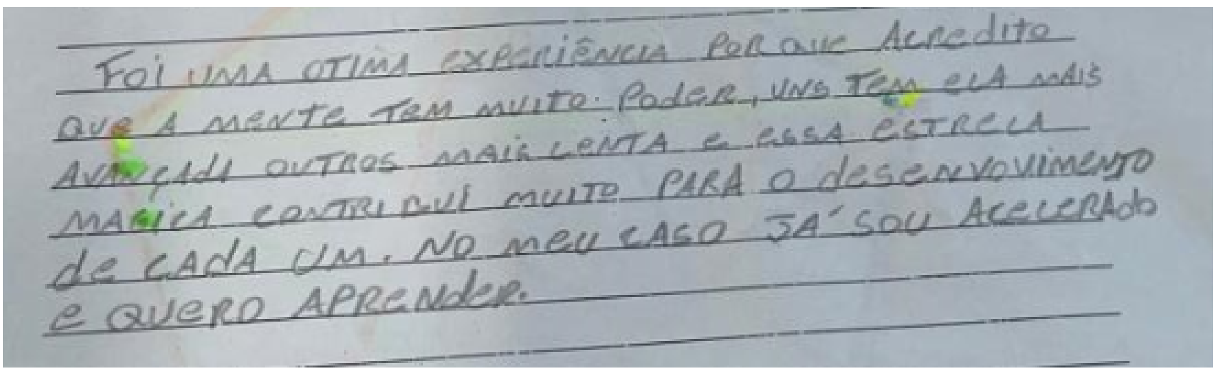


Figura 4.8: Solução do aluno 7

Transcrição: "Foi uma ótima experiência porque acredito que a mente tem muito poder, *uns tem ela mais avançada outros mais lenta e essa estrela mágica contribuiu muito para o desenvolvimento de cada um, no meu cado já sou acelerado e quero aprender.”*

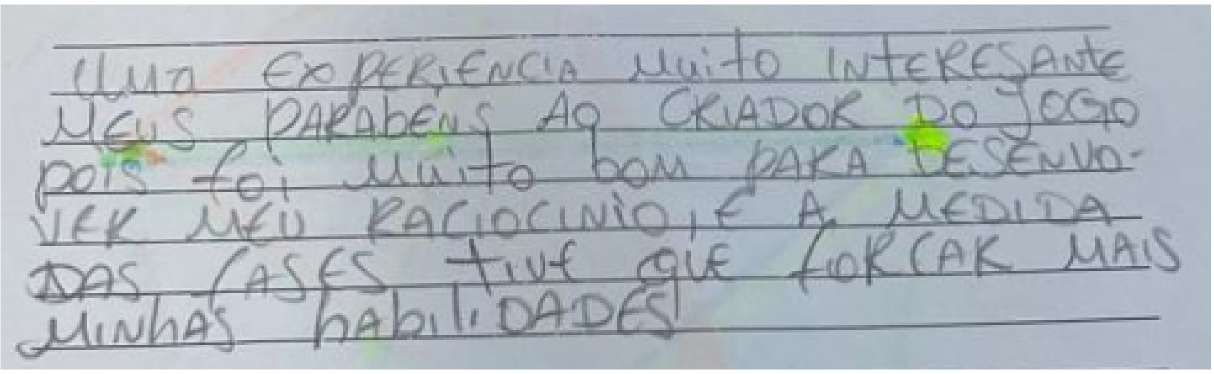


Figura 4.9: Solução do aluno 8

Transcrição: “Uma experiência muito interessante meus parabéns ao criador do jogo, pois foi muito bom para desenvolver meu raciocínio, e a medida das fases tive que forçar mais minhas habilidades.”

A análise das respostas dos alunos fornece uma validação clara de que os objetivos pedagógicos do Pentágono Mágico, elaborados para ir além da fixação de conteúdos, foram alcançados. A proposta visava criar momentos de investigação e cooperação, o que foi diretamente corroborado pela percepção dos estudantes sobre a experiência.

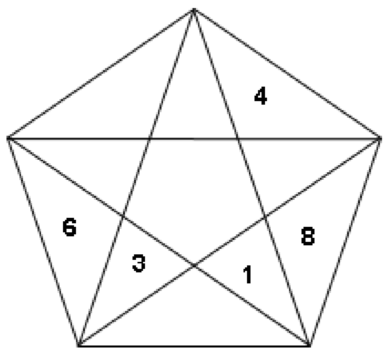
O objetivo de desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo e a capacidade de formular e testar hipóteses foi confirmado quando os alunos relataram que a atividade ”fortaleceu seu raciocínio”e ”desafiou suas habilidades”. A meta de estimular a perseverança e a flexibilidade cognitiva se reflete na percepção do desafio como um elemento motivador. Além disso, a percepção geral de que o jogo foi uma ferramenta significativa de aprendizagem evidencia o sucesso em aplicar noções de aritmética e combinatória de forma intuitiva e lúdica.

Finalmente, o relato de que a experiência ”despertou o interesse por aprender mais”é o indicador mais contundente de que o jogo cumpriu seu papel formativo. Este resultado demonstra o impacto positivo de propostas lúdicas e bem estruturadas, que despertam a curiosidade, a autonomia e o prazer em pensar, validando a intencionalidade pedagógica do projeto.

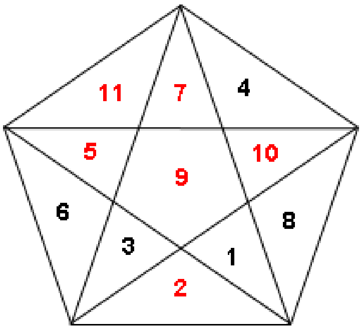
4.5 Sugestões de Atividades

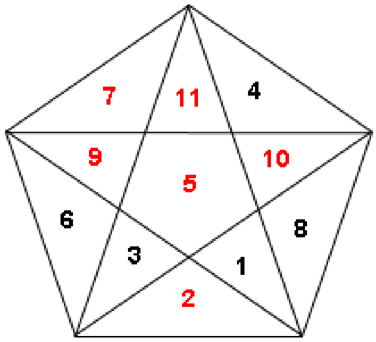
O objetivo das atividades é praticar habilidades matemáticas por meio de situações lúdicas e desafiadoras, explorando o jogo Pentágono Mágico como ferramenta pedagógica. Ao envolver os estudantes na resolução de problemas que exigem raciocínio lógico, organização espacial e busca de padrões numéricos, as atividades propostas favorecem a aprendizagem ativa e significativa, estimulando a curiosidade e o engajamento com a matemática. As atividades estão organizadas de forma a permitir adaptações conforme o nível de escolaridade e o perfil da turma, podendo ser utilizadas tanto como introdução a conceitos matemáticos quanto como aprofundamento ou avaliação diagnóstica. Ao final, busca-se não apenas resolver o jogo, mas compreender e discutir as estratégias envolvidas, promovendo a reflexão matemática e a construção coletiva do conhecimento.

1- O Pentágono Mágico está incompleto e o desafio agora está em suas mãos! Observe atentamente as regiões em branco e preencha cada uma com os números de 1 a 11, sem repetir nenhum. Seu objetivo é garantir que, em todos os triângulos unidiagonais, a soma dos valores pertença ao conjunto mágico.

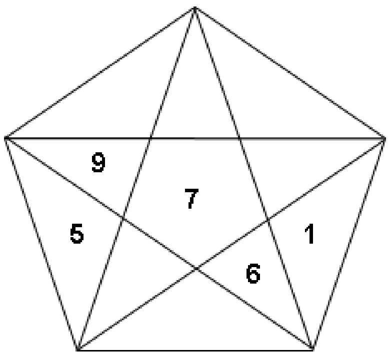


Resposta:

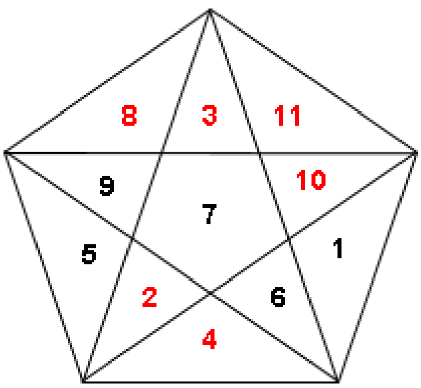




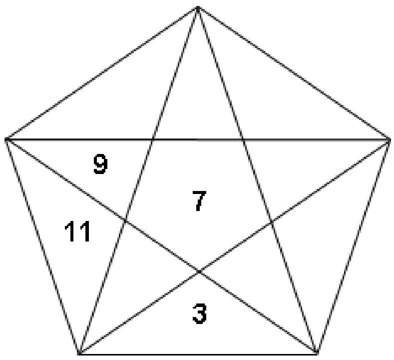
2- Agora que você compreendeu os triângulos unidiagonais, é hora de elevar o desafio! Diante de você está o Pentágono Mágico com regiões ainda em branco, esperando pelas escolhas corretas. Sua missão é preencher essas regiões com os números de 1 a 11, sem repeti-los, de forma que a soma de cada triângulo unidiagonal e bidiagonal pertença ao conjunto mágico.



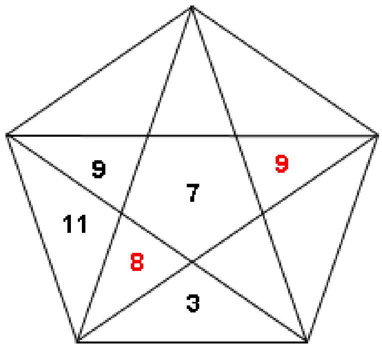
Resposta:



3- Observe atentamente o Pentágono Mágico abaixo. Você acha que é possível completá-lo seguindo as regras do jogo? Tente descobrir se existe uma solução válida e, mais importante, explique o porquê da sua resposta. Mesmo quando a resposta é "não", entender o motivo é uma parte valiosa do desafio!

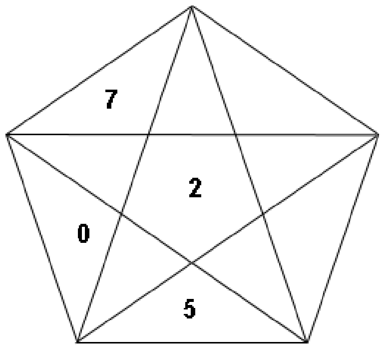


Resposta:

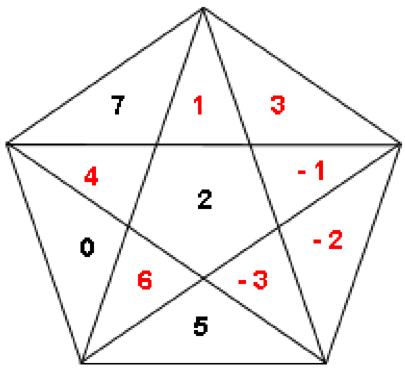


Não é possível solucionar esse Pentágono Mágico, pois no triângulo unidiagonal $T_{r_7,r_8,r_{11}}$ tem-se $a(r_8) = 8$. E, como no triângulo bidiagonal T_{r_7,r_8,r_4,r_5,r_6}, a soma é igual a 35, tem-se que o próximo múltiplo possível será 44. Mas para isso, é necessário que $a(r_6) = 9$. Entretanto, o número 9 já foi utilizado. Portanto, não é possível solucionar o Pentágono Mágico proposto.

4- Esse Pentágono Mágico é um pouco diferente: o conjunto dos 11 números inteiros e consecutivos que irão preencher o Pentágono é {*-3,-2,...,7*}*. Use a lógica para preenchê-lo corretamente, respeitando as regras do jogo. Experimente combinações, observe padrões e tente chegar a uma solução coerente dentro desse novo conjunto numérico!*

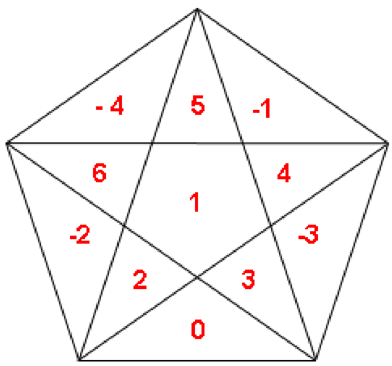


Resposta:



5- Vamos trabalhar com um Pentágono Mágico em que os números vão de -4 até 6, ou seja, de n até 10 + n . Você acha que é possível preencher o Pentágono com esses números, respeitando as regras do jogo? Tente descobrir se existe uma solução.

Resposta:



6- Aqui vai um desafio mais profundo: imagine um Pentágono Mágico com 11 espaços internos para preencher, usando exatamente os números de 1 a 11, sem repetições. Agora, será que é possível que cada um dos dez triângulos desse Pentágono tenha soma igual a 11? Explore as possibilidades e tente demonstrar, com argumentos claros, por que isso é ou não é possível.

Resposta: Decompondo a estrutura do Pentágono Mágico em três triângulos, sejam eles T_{r_1,r_4,r_7}, $T_{r_2,r_5,r_8,r_9,r_{11}}$ e $T_{r_3,r_6,r_{10}}$. Note que, $S(T_{r_1,r_4,r_7})$=$S(T_{r_2,r_5,r_8,r_9,r_{11}})$=$S(T_{r_3,r_6,r_{10}})$=11. Logo, a soma total das 11 regiões resulta em 33, entretanto, essa soma deveria ser 66, já que estamos somando todos os números de 1 a 11. Portanto, não é possível que todos os dez triângulos do Pentágono Mágico tenham soma igual a 11.

*7- Considere o **Pentágono Mágico Clássico**, onde as 11 regiões são preenchidas com os números do conjunto $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, 11\}$. As regiões podem ser classificadas pela frequência com que participam das 5 somas dos triângulos bidiagonais.*

- *A região central (r_5) participa de 5 somas.*
- *As regiões do conjunto $B = \{r_2, r_4, r_6, r_8, r_9\}$ participam de 3 somas cada.*
- *As regiões do conjunto $A = \{r_1, r_3, r_7, r_{10}, r_{11}\}$ participam de 1 soma cada.*

O Desafio: *Seja S_B a soma dos cinco números alocados nas regiões do conjunto B. Prove algebricamente que, em qualquer solução válida, a expressão $\mathbf{2a(r_5) + S_B}$ deve ser, obrigatoriamente, um **múltiplo de 11**.*

A Soma das Somas Bidiagonais (S_{BIDI})

Seja S_{BIDI} a soma dos resultados dos 5 triângulos bidiagonais. Como cada resultado é um múltiplo de 11, S_{BIDI} também deve ser um múltiplo de 11.
Expressando S_{BIDI} pela frequência de cada região, temos:

$$S_{BIDI} = 5a(r_5) + 3S_B + (a(r_1) + a(r_3) + a(r_7) + a(r_{10}) + a(r_{11}))$$

onde $S_B = a(r_2) + a(r_4) + a(r_6) + a(r_8) + a(r_9)$.

Simplificação da Identidade

A soma de todos os 11 números é 66. Podemos isolar a soma das regiões de frequência 1:

$$(a(r_1) + a(r_3) + a(r_7) + a(r_{10}) + a(r_{11})) = 66 - a(r_5) - S_B$$

Substituindo isso na equação de S_{BIDI}:

$$S_{BIDI} = 5a(r_5) + 3S_B + (66 - a(r_5) - S_B)$$

Após simplificar, chegamos à identidade fundamental do problema:

$$S_{BIDI} = 4a(r_5) + 2S_B + 66$$

Análise das Condições do Jogo

Agora, aplicamos as regras do Pentágono Mágico a essa equação:

- Temos que S_{BIDI} deve ser um **múltiplo de 11**.
- O termo **66** já é um múltiplo de 11.

Conclusão

- Para que a identidade seja verdadeira, o termo restante, $\mathbf{4a(r_5) + 2S_B}$, também deve ser um múltiplo de 11.
- Fatorando a expressão, temos: $4a(r_5) + 2S_B = \mathbf{2(2a(r_5) + S_B)}$.
- Se $2(2a(r_5) + S_B)$ é um múltiplo de 11, e como 11 é um número primo que não divide 2, então 11 deve, obrigatoriamente, dividir o outro fator.

Conclusão: Fica provado que $\mathbf{2a(r_5) + S_B}$ deve ser um múltiplo de 11. $\square$

Capítulo 5

Conclusão

A presente dissertação culminou na concepção, formalização e prototipagem do Pentágono Mágico, um recurso didático original que trabalha aritmética e álgebra. O percurso investigativo materializou-se em três implementações físicas distintas, uma versão tátil em papel cartonado, um modelo interativo para lousa e um formato de quebra-cabeça manipulável, estabelecendo uma base sólida e versátil para sua aplicação em diferentes contextos de sala de aula.

A estrutura lúdica do Pentágono Mágico possui potencial para estimular os alunos em desafios cognitivos, aliando o rigor de conceitos matemáticos a uma abordagem ativa. A interação com o jogo contribuiu para o desenvolvimento de competências como o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a resolução de problemas, ao mesmo tempo em que estimulou uma postura mais autônoma nos estudantes, que passaram a encarar o erro como parte fundamental do processo de descoberta.

Reconhece-se que o foco deste trabalho esteve na validação dos formatos físicos, que privilegiam a experiência tátil e a interação colaborativa. Contudo, a visão para o Pentágono Mágico se estende ao ambiente digital. A futura criação de uma versão computacional emerge como um desdobramento natural e promissor desta pesquisa, capaz de ampliar o alcance do jogo para contextos de ensino híbridos e remotos, além de permitir a coleta automatizada de dados sobre os processos cognitivos dos estudantes. Assim, o Pentágono Mágico se consolida não apenas como um produto finalizado, mas como uma plataforma pedagógica com potencial de expansão e contribuição contínua para um ensino de matemática mais dinâmico e significativo.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 15 maio 2025.

[2] BORIN JULIA (2004). *Jogos e Resolução de Problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática,* São Paulo: CAEM/IME-USP, BRASIL.

[3] https://educacional.com.br/steam/pensamento-computacional-o-que-e-sua-importancia-e-como-inseri-lo-na-escola/. Acesso em: 15 maio 2025.

[4] SILVA, Ricardo José da. Quadrados Mágicos. *Os Fantásticos Números Primos.* Disponível em: http://www.osfantasticosnumerosprimos.com.br/011-estudos-169-quadrados-magicos.html. Acesso em: 15 maio 2025.

[5] ANDRADE, Lenimar Nunes de. *Quadrados Mágicos.* Disponível em: https://mat.ufpb.br/lenimar/magico.pdf. Acesso em: 15 maio 2025.

[6] https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2023-12/resultados-do-pisa-reforcam-gargalo-no-ensino-de-matematica-no-brasil. Página consultada em 15/05/2025.

[7] FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. (2006). *Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares,* Campinas: Autores Associados, BRASIL.

[8] LIPMAN, Matthew. Pensamento crítico na sala de aula. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

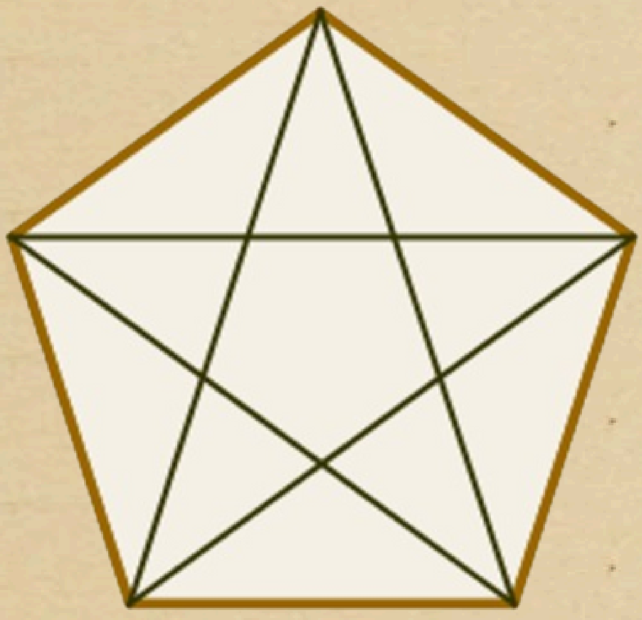
[9] MARQUES, Jamerson Henrique da Silva. *Estudo do quadrado mágico com uso nos anos finais do ensino fundamental.* 2017. 96 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal do Rio

Grande, Rio Grande, 2017. Disponível em: `https://profmat.furg.br/images/TCC/150680729_JAMERSON_HENRIQUE_DA_SILVA_MARQUES.pdf`. Acesso em: 6 ago. 2025.

[10] CARBONI, Juliana Pelissaro. *O ensino e a aprendizagem do pensamento computacional na educação básica*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, 2023.

[11] SILVA NETO, Francisco Mariano da. *Uma análise sobre as possíveis causas do desinteresse dos alunos em aprender matemática*. 2020. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática - Licenciatura) – Instituto UFC Virtual, Universidade Federal do Ceará, Pindoretama, 2020.

ESTRELA MÁGICA



PENTÁGONO MÁGICO

Nível Básico

- Fase 1 da Estrela Mágica
- Números Naturais
- Triângulos Unidiagonais

Nível Intermediário

- Fase 2 da Estrela Mágica
- Números Naturais
- Triângulos Unidiagonais e Bidiagonais

Nível Avançado

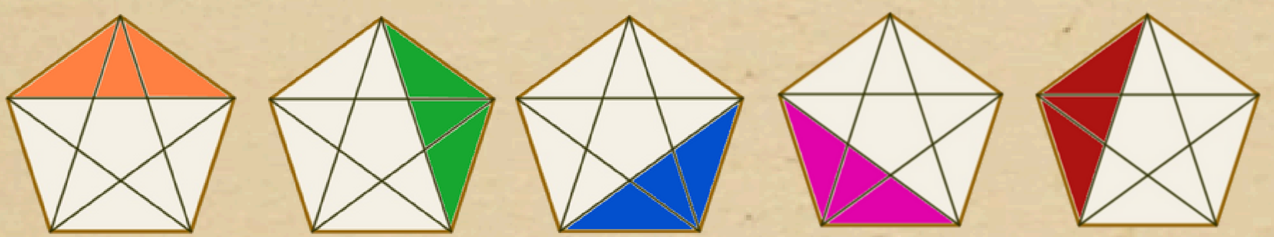
- Fase 2 da Estrela Mágica
- Números Inteiros
- Triângulos Unidiagonais e Bidiagonais

Isabela Matos

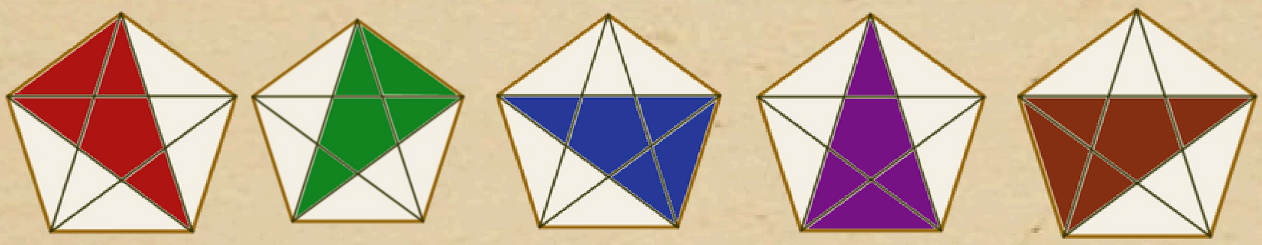
Os números que irão preencher a *Estrela Mágica*

Nomenclaturas

- Triângulos **unidiagonais,** formados por duas diagonais do pentágono:



- Triângulos **bidiagonais,** formados por duas diagonais do pentágono:



OBJETIVO

Encontrar uma configuração válida da
Estrela Mágica.

Isabela Matos

Desafie sua lógica!

Como Jogar: Seu desafio é preencher as 11 regiões da Estrela Mágica usando os 11 números disponíveis. Mas atenção: os triângulos unidiagonais e bidiagonais devem somar um valor especial... ele precisa pertencer ao Conjunto Mágico! Consegue montar essa combinação perfeita?"

Regras do Jogo Nível Básico

- Cada número deve ser usado uma única vez.
- Triângulos unidiagonais e bidiagonais devem resultar num valor que pertença ao conjunto mágico.
- O jogador pode reorganizar os números, sem limitações para o número de tentativas.
- A utilização do cronômetro pode ser incorporada gradualmente, à medida que o participante for se familiarizando com a dinâmica do jogo

Dica Estratégica:

- Comece pela região central da Estrela Mágica.
- Preencha as regiões de dois triângulos unidiagonais consecutivos, com soma igual a 22.

Variações Competitivas

- **Modo corrida:** quem completar primeiro vence.
- **Modo solo:** tentar resolver no menor tempo possível.
- **Modo por tentativas:** vence quem usar menos tentativas.

Isabela Matos