

MATEMÁTICA

LICENCIATURA



Fundamentos de Matemática

João Carlos da Motta Ferreira
Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

EDITORA
UFMS



Disciplina

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
ORGANIZADORA

Módulo 1

NÚMEROS REAIS

Módulo 2

FUNÇÕES E GRÁFICOS

Módulo 3

TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS

João Carlos da Motta Ferreira
Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

Campo Grande, MS - 2008

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Luiz Inácio Lula da Silva
MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Fernando Haddad
SECRETÁRIO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
Carlos Eduardo Bielschowsky
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
REITORA
Célia Maria da Silva Oliveira
VICE-REITOR
João Ricardo Filgueiras Tognini

COORDENADORA DE EDUCAÇÃO ABERTA E A DISTÂNCIA - UFMS
COORDENADORA DA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL - UFMS
Angela Maria Zanon

COORDENADOR ADJUNTO DA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL - UFMS
Cristiano Costa Argemon Vieira

COORDENADORA DO CURSO DE MATEMÁTICA (MODALIDADE A DISTÂNCIA)
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

Obra aprovada pelo Conselho Editorial da UFMS - Resolução nº 17/08



Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons -
Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional.

CONSELHO EDITORIAL UFMS

Dercir Pedro de Oliveira (Presidente)
Antônio Lino Rodrigues de Sá
Cícero Antonio de Oliveira Tredezini
Élcia Esnarriaga de Arruda
Giancarlo Lastoria
Jackeline Maria Zani Pinto da Silva Oliveira
Jéferson Meneguim Ortega
Jorge Eremites de Oliveira
José Francisco Ferrari
José Luiz Fornasieri
Jussara Peixoto Ennes
Lucia Regina Vianna Oliveira
Maria Adélia Menegazzo
Marize Terezinha L. P. Peres
Mônica Carvalho Magalhães Kassar
Silvana de Abreu
Tito Carlos Machado de Oliveira

CÂMARA EDITORIAL

SÉRIE



Angela Maria Zanon
Cristiano Costa Argemon Vieira
Dario de Oliveira Lima Filho
Damaris Pereira Santana Lima
Eliézer José Marques
Jacira Helena do Valle Pereira
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Coordenadoria de Biblioteca Central – UFMS, Campo Grande, MS, Brasil)

F981 Fundamentos de matemática : disciplina / Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli, organizadora . – Campo Grande, MS : Ed. UFMS, 2009.
208 p. : il. ; 30 cm.

ISBN 978-85-7613-150-2

Material de apoio às atividades didáticas do curso de licenciatura em Matemática/CEAD/UFMS.

Conteúdo: Módulo 1 Números reais – Módulo 2 Funções e gráficos – Módulo 3 Trigonometria e números complexos / João carlos da Motta Ferreira, Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa, Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli.

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Mongelli, Magda Cristina Junqueira Godinho. II Ferreira, João carlos da Motta. III. Costa, Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da.

CDD (22) 510

INTRODUÇÃO

PREZADO ALUNO

Você está de posse de um material auto-suficiente e passaremos as informações sobre o material e como estudá-lo. Este livro foi concebido para que você adquira os fundamentos necessários de Matemática Elementar para os seus estudos posteriores, relativos à sua formação. O livro foi planejado para que você tenha uma formação de base sólida. Aconselhamos estudá-lo utilizando dois tipos de leitura: uma superficial ou de reconhecimento e outra profunda ou detalhada. A leitura superficial deverá ser a da leitura de cada capítulo, parágrafo, teorema, etc..., todo de uma vez e sem a preocupação de uma compreensão detalhada, mas apenas com o objetivo de que você tenha uma visão do conjunto das idéias em questão.

Aconselhamos que você faça esta forma de leitura pelo menos duas vezes, em cada unidade. Tendo então obtido a idéia geral da unidade na qual está trabalhando, você deverá fazer leitura profunda ou detalhada, que é o estudo detalhado de cada aspecto do texto analisado, feito com calma e rigor, e só deverá finalizá-la quando a unidade analisada estiver totalmente compreendida, em seus mínimos detalhes. Para esta abordagem você deverá estar munido de uma lapiseira, borracha e papel. Experimente reproduzir o conteúdo da unidade, em detalhes, mas não de forma decorada e sim como resultado de seu aprendizado. Faça isso e você não se arrependerá do trabalho realizado. Acreditamos que sob a orientação dessas duas abordagens seu aprendizado ocorrerá de forma maximizada.

O livro é composto de seis capítulos:

- Capítulo 1 – Números Reais;**
- Capítulo 2 – Funções e Gráficos;**
- Capítulo 3 – Funções Algébricas;**
- Capítulo 4 – Funções Exponenciais e Logarítmicas;**
- Capítulo 5 – Funções Trigonométricas;**
- Capítulo 6 – Números Complexos.**

Os Capítulos 1 e 2 são fundamentais para a compreensão dos demais capítulos do texto. Neles estão os fundamentos matemáticos básicos que estruturam todas as demais idéias do livro e também da Matemática Superior. Os Capítulos 3, 4 e 5 são independentes e podem ser estudados livremente, naturalmente após a compreensão dos Capítulos 1 e 2.

Finalmente, o Capítulo 6 necessita de alguns conteúdos do Capítulo 5 e caso você já os possua, poderá então passar livremente para esta parte.

Em cada capítulo, cada parágrafo é organizado em forma de lemas, proposições, teoremas e corolários, muitos deles com demonstrações com certo nível de rigor. No entanto, devido aos objetivos programáticos dessa disciplina, várias demonstrações foram omitidas, sem prejuízos ao seu aprendizado, mas deixados a cargo do leitor mais ousado. Esperamos que você ouse demonstrá-los ou então sugerimos que você consulte a bibliografia recomendada, para entender as demonstrações. Isso não é uma exigência para esse momento.

Esse texto possui mais de cem exercícios resolvidos, de forma comentada, sobre os diferentes conteúdos abordados. A finalidade deles é apresentar um método de resolução, das diferentes questões que são propostas. Isso não impede que você desenvolva outras modalidades de resoluções. O importante é que o seu método seja logicamente consistente.

Ao final de cada parágrafo, apresentaremos algumas referências e alguns endereços da *Internet*, como leitura alternativa, complementar e até suplementar, dos conteúdos em questão. Nessas páginas você encontrará outras visões sobre os mesmos assuntos tratados neste texto e, em muitos deles, você encontrará informações sobre os vários desdobramentos desses estudos, principalmente para a Teoria do Cálculo Diferencial e Integral e para a Teoria das Funções de Variáveis Complexas. Embora esses dois últimos temas citados não façam parte desta disciplina, o contato com esses assuntos ajudará a ter uma idéia de como a Matemática Elementar evoluiu para estruturas mais complexas.

Os capítulos estão divididos em três módulos:

Módulo 1 refere-se ao **Capítulo 1**

Números Reais;

Módulo 2 refere-se aos **Capítulos 2, 3 e 4**

Funções e Gráficos;

Módulo 3 refere-se aos **Capítulos 5 e 6**

Funções trigonométricas e Números Complexos.

Desejamos a vocês sucesso em seus estudos.

Prof^o: Dr. João Carlos da Motta Ferreira (Coordenador da Disciplina)

Prof^a: MSc. Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa

Prof^a: MSc. Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

SUMÁRIO

MÓDULO 1 NÚMEROS REAIS

CAPÍTULO 1

Números Reais	13
1.1 Números reais	13
1.2 Representação decimal dos números reais	45
1.3 Valor absoluto de um número real	51
1.4 Potência de um número real	57
1.5 Referências	71

MÓDULO 2
FUNÇÕES
E GRÁFICOS

CAPÍTULO 2

Funções e Gráficos	75
2.1 Funções e gráficos	75
2.2 Funções de variável real a valores reais	79

CAPÍTULO 3

Funções Algébricas	83
3.1 Funções polinomiais	83
3.1.1 Função quadrática	93
3.1.2 Função potência	101
3.2 Função raiz n-ésima	107
3.3 Função racional	114
3.3.1 Função hipérbole	115
3.4 Referências	121

CAPÍTULO 4

Função Exponenciais e Logarítmicas	122
4.1 Função exponencial.	
Potências de expoentes reais	122
4.2 Funções logarítmicas	129
4.3 o Número e	135
4.4 Aplicações	137
4.5 Referências	121

MÓDULO 3
TRIGONOMETRIA
E NÚMEROS
COMPLEXOS

CAPÍTULO 5

Trigonometria e Funções Trigonométricas	149
5.1 Noções preliminares: trigonometria plana e o círculo trigonométrico	149
5.2 Funções trigonométricas	156
5.2.1 Função seno e co-seno	156
5.2.2 Função tangente e co-tangente	173
5.2.3 Função secante e co-secante	179
5.3 Referências	185

CAPÍTULO 6

Conjunto dos Números Complexos	186
6.1 Introdução. Uma reflexão sobre sua existência	186
6.2 Conjunto dos números complexos	190
6.2.1 Interpretação geométrica dos números complexos	192
6.2.2 O complexo conjugado de um número complexo	192
6.2.3 Valor absoluto de um número complexo	194
6.2.4 Forma polar de um número complexo	196
6.3 Potência de um número complexo	201
6.3.1 Expoente natural	201
6.3.2 Expoente inteiro	202
6.3.3 Raízes n -ésimas de um número complexo	204
6.4 Referências	207

Sobre os Autores

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli é professora do Departamento de Matemática da UFMS - CCET e mestre em Educação pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Desde a graduação trabalha com a capacitação de professores da Rede Municipal e Estadual do Mato Grosso do Sul oferecendo cursos relativos a Conteúdos e Metodologia de Matemática, palestras e oficinas pedagógicas. Na Educação a Distância trabalha desde 2001, atuando como professora da disciplina

“Conteúdos e Metodologias para as Séries Iniciais do Ensino Fundamental” para o Curso de Pedagogia – Modalidade a Distância. Coordena os Curso de Licenciatura em Matemática – Modalidade a Distância nos Pólos de: Água Clara; Camapuã; Cruzeiro do Oeste; Igarapava; Rio Brilhante; São Gabriel do Oeste e Siqueira Campos.

Heloisa Laura Queiroz Gonçalves da Costa é professora de dedicação exclusiva do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), e é atualmente coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática no campus de Campo Grande da UFMS. É Bacharel, Licenciada e Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Em Mato Grosso do Sul tem trabalhado com a capacitação de professores da Rede Municipal e Estadual oferecendo cursos, palestras e oficinas pedagógicas, relativas a Conteúdos e Metodologias para o Ensino de Matemática. Na Educação a Distância da UFMS trabalha desde 2001, atuando como professora da disciplina “Conteúdos e Metodologias da Matemática para as Séries Iniciais do Ensino Fundamental” para o Curso de Pedagogia – Modalidade a Distância nos pólos de Camapuã, São Gabriel do Oeste e Paranhos, todos no MS.

João Carlos da Motta Ferreira é Bacharel em Matemática, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Mestre em Ciências, na área de Análise Matemática, pela UFRJ, e Doutor em Matemática, na área de Álgebras Não-Associativas, pela Université Montpellier II, França. Realizou pós-doutorado na Universidade de São Paulo - USP, durante o ano de 2003, na área de Álgebras Não-Associativas. Participou de vários eventos no Brasil e exterior. Possui vários trabalhos publicados em revistas internacionais. Ingressou como Docente na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (MS) (1984). Atualmente é professor de dedicação exclusiva da Universidade Federal do ABC (UFABC) em Santo André, SP.

MATEMÁTICA

LICENCIATURA



Disciplina

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA

Módulo 1

NÚMEROS REAIS

João Carlos da Motrta Ferreira

Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

Capítulo 1

NÚMEROS REAIS

Neste módulo estudaremos os números reais, mas para chegarmos ao estudo dos números reais, temos que ter passado pelos números: naturais, inteiros, racionais e irracionais. Pois o conjunto dos números reais é a união do conjunto dos racionais com os irracionais. Em geral, os cursos de Cálculo começam por um breve estudo dos números reais e um curso de Análise Matemática tem início por um estudo bastante completo e rigoroso destes números. Precisamos ter clareza sobre as propriedades dos números reais, para compreender as funções de uma variável real. Esta compreensão dos números reais não é tão simples como parece. Vamos ao seu estudo.

1.1. CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Denotaremos o **Conjunto dos Números Reais**, pelo símbolo $\mathbb{R}$. Os elementos do conjunto $\mathbb{R}$ serão chamados de **números reais** e serão denotados pelas letras latinas minúsculas. O conjunto $\mathbb{R}$ está munido de duas *operações binárias*:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{operação de adição})$$

$$(x, y) \longrightarrow x + y \quad (\text{soma de } x \text{ com } y)$$

e

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{operação de multiplicação})$$

$$(x, y) \longrightarrow x \cdot y (= xy) \quad (\text{produto de } x \text{ com } y)$$

PROPRIEDADES

As seguintes propriedades podem ser verificadas, para quaisquer números reais x, y e z .

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*lei associativa da adição*);

2) $x + y = y + x$ (*lei comutativa da adição*);

- 3) Existe um único número real, denotado pelo símbolo 0 e denominado de **elemento neutro da adição** ou simplesmente o *zero de $\mathbb{R}$* , tal que $x + 0 = 0 + x = x$, para todo número real x ;
- 4) Para todo número real x , existe um único número real, denotado pelo símbolo $-x$ e denominado de **oposto aditivo de x ou simétrico de x** , tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
- 5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (**lei associativa da multiplicação**);
- 6) $x \cdot y = y \cdot x$ (**lei comutativa da multiplicação**);
- 7) Existe um único número real, denotado pelo símbolo 1 e denominado de **elemento neutro da multiplicação** ou simplesmente a *unidade multiplicativa de $\mathbb{R}$* , tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, para todo número real x ;
- 8) Para todo número real x , $x \neq 0$, existe um único número real, denotado pelo símbolo $\frac{1}{x}$ e denominado de **inverso multiplicativo de x** ou simplesmente **inverso de x** , tal que: $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$;
- 9) As operações binárias de adição e multiplicação se relacionam da seguinte forma:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ (lei distributiva).}$$

Notações 1.1.1. Escreveremos:

- i) $a - b = a + (-b)$, quaisquer que sejam os números reais a e b ;
- ii) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, quaisquer que sejam os números reais a e b , $b \neq 0$.

RELAÇÃO DE ORDEM

Sobre o conjunto $\mathbb{R}$ está definida uma relação entre pares de elementos de $\mathbb{R}$, denominada de **relação de ordem** e denotada pelo símbolo $<$, que verifica as seguintes propriedades, quaisquer que sejam os números reais x , y e z :

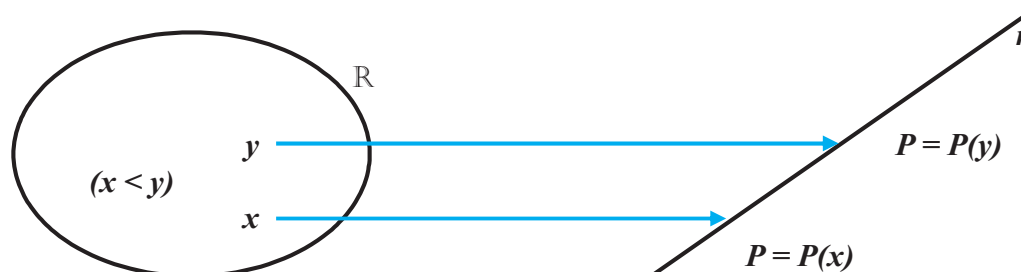
- 10) Somente uma das seguintes condições está verificada: $x < y$ ou $x = y$ ou $y < x$ (**lei da tricotomia**);
- 11) Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$;

12) Se $x < y$, então $x + z < y + z$, para todo número real z ;

13) Se $0 < x$ e $0 < y$, então $0 < xy$.

14) Para toda reta geométrica r , existe uma correspondência entre os elementos de $\mathbb{R}$ e os elementos de r , tal que para todo número real x está associado um único ponto $P = P(x)$ em r e somente x está associado ao ponto $P(x)$. Além disso, quaisquer que sejam os números reais x e y ; temos $x < y$ se, e somente se, “o ponto $P(x)$ está à esquerda do ponto $P(y)$, em r ”.

A interpretação da propriedade 14), em **Diagrama de Venn**, pode ser vista como na figura abaixo:



Notações 1.1.2.

- i) $y > x$ significa o mesmo que $x < y$;
- ii) $x \leq y$ significa o mesmo que $x < y$ ou $x = y$;
- iii) $y \geq x$ significa o mesmo que $x \leq y$ ou, equivalentemente, a $y > x$ ou $y = x$.

Denominaremos o subconjunto de todos os números reais x tais que $x > 0$ (respectivamente, $x \geq 0$) de **conjunto dos números reais positivos** (respectivamente, **não negativos**). Da mesma forma, denominaremos o subconjunto de todos os números reais x tais que $x < 0$ (respectivamente, $x \leq 0$) de **conjunto dos números reais negativos** (respectivamente, **não positivos**). Usualmente, os números reais positivos são indicados pelo símbolo $\mathbb{R}^+$ e os números reais negativos pelo símbolo $\mathbb{R}^-$. Finalmente, diremos que **x é menor que y** (respectivamente, **menor ou igual**) ou que **y é maior que x** (respectivamente, **maior ou igual**) se $x < y$ (respectivamente, $x \leq y$).

SUBCONJUNTOS NUMÉRICOS

No conjunto $\mathbb{R}$ destacam-se os seguintes subconjuntos numéricos:

- i) O conjunto dos *números naturais*: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- ii) O conjunto dos *números inteiros*: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- iii) O conjunto dos *números racionais*: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \left(= a \cdot \frac{1}{b} \right) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

Estes subconjuntos verificam as seguintes relações de inclusão $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, e as seguintes propriedades:

- i) Para todo elemento r de $\mathbb{N}$, temos $r = \underbrace{1 + \dots + 1}_{r \text{ vezes}}$;
- ii) Para todo elemento r de $\mathbb{Z}$, temos: $r = \underbrace{1 + \dots + 1}_{r \text{ vezes}}$, se $r > 0$, ou $r = \underbrace{(-1) + \dots + (-1)}_{-r \text{ vezes}}$, se $r < 0$.
- iii) A soma e o produto de números naturais, números inteiros e números racionais são números naturais, números inteiros e números racionais, respectivamente, em relação às operações de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$. Além disso, quaisquer que sejam os racionais $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, temos que: $r + s = \frac{ad + bc}{bd}$ e $r \cdot s = \frac{ac}{bd}$.

Deixaremos as demonstrações das duas proposições seguintes a cargo do leitor.

Proposição 1.1.3. As seguintes propriedades estão verificadas:

- 15) $-(-x) = x$, para todo número real x ;
- 16) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -x \cdot y$, quaisquer que sejam os reais x e y ;
- 17) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$, quaisquer que sejam os reais x e y ;
- 18) $-x = (-1) \cdot x$, para todo número real x ;
- 19) $x > 0$ se, e somente se, $-x < 0$; $x < 0$ se, e somente se, $-x > 0$;
- 20) $x \geq 0$ se, e somente se, $-x \leq 0$; $x \leq 0$ se, e somente se, $-x \geq 0$;
- 21) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$;

22) Se $x \leq y$, então $x + z \leq y + z$, para todo número real z ;

23) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então $xy \geq 0$.

24) Se $x < y$ e $z > 0$, então $xz < yz$;

25) Se $x \leq y$ e $z \geq 0$, então $xz \leq yz$;

26) Se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$;

27) Se $x \leq y$ e $z \leq 0$, então $xz \geq yz$;

28) Se $0 < x < y$, então $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$;

29) Se $0 < x \leq y$, então $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$;

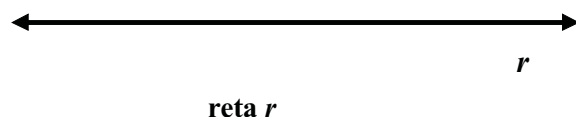
30) Se $x < y < 0$, então $\frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$;

31) Se $x \leq y < 0$, então $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$;

32) Se $x < 0 < y$, então $\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$;

Proposição 1.1.4. Sobre $\mathbb{R}$, temos $1 > 0$.

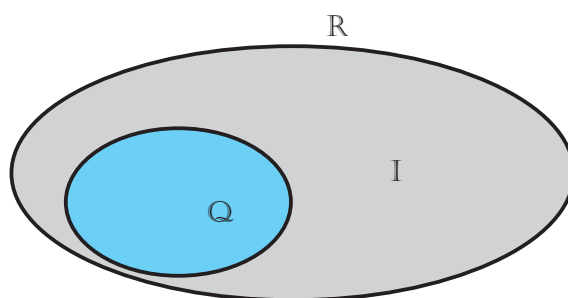
A proposição 1.1.4. nos permite identificar que pontos da reta geométrica r estão associados aos números reais, do conjunto $\mathbb{R}$. Neste caso, denominaremos a **reta r de reta numérica ou reta real**, como mostra a figura abaixo:



Denominaremos o conjunto complementar de $\mathbb{Q}$ em relação a $\mathbb{R}$ ($=\mathbb{R} - \mathbb{Q}$), de **conjunto dos números irracionais** e o denotaremos pelo símbolo $\mathbb{I}$. Assim,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \text{ onde } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

A interpretação do conjunto $\mathbb{I}$, dos números irracionais, em diagrama de *Venn*, pode ser vista como na figura a seguir, na qual $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.



A soma e o produto de números irracionais não são necessariamente números irracionais. No entanto, a propriedade a seguir é válida.

Proposição 1.1.5. Se x é um número irracional e r é um número racional, $r \neq 0$, então $x + r$ e $x \cdot r$ são números irracionais.

Demonstração. A demonstração é deixada a cargo do leitor.

Proposição 1.1.6. (Lei do Cancelamento) As seguintes propriedades são válidas, quaisquer que sejam os números reais a , b e c .

i) $a = b$ se, e somente se, $a + c = b + c$;

ii) $a \leq b$ se, e somente se, $a + c \leq b + c$.

Além disso, se $c \neq 0$, então:

iii) $a = b$ se, e somente se, $ac = bc$;

iv) se $c > 0$, então $a \leq b$ se, e somente se, $ac \leq bc$.

v) se $c < 0$, então $a \leq b$ se, e somente se, $ac \geq bc$.

Demonstração. A demonstração é deixada a cargo do leitor.

INTERVALOS NUMÉRICOS

Denominaremos de **intervalos numéricos**, aos subconjuntos da reta real usados para expressar conjuntos de soluções de problemas envolvendo equações ou inequações algébricas e várias outras situações.

Definição 1.1.7. Dados dois números reais a e b , com $a < b$, definimos os *intervalos limitados*:

- i) o *intervalo aberto* $]a, b[$, como sendo o subconjunto dos números reais dado por:



$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

- ii) o *intervalo fechado* $[a, b]$, como sendo o subconjunto dos números reais dado por:



$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

- iii) os *intervalos semi abertos ou semi fechados* $]a, b]$ e $[a, b[$, como sendo os subconjuntos dos números reais dados por:



$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

e



$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Definimos os *intervalos ilimitados* $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $] -\infty, b[$, $] -\infty, b]$ e $] -\infty, +\infty[$ como sendo os subconjuntos dos números reais dados por:

1.  $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

2.  $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

3.  $] -\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

4.  $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

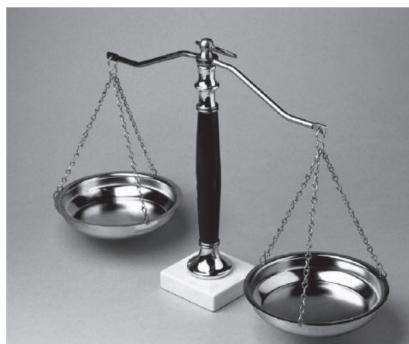
1.  $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Para finalizarmos este capítulo, apresentaremos um método de resolução de uma equação e de uma inequação algébrica com uma incógnita.

MÉTODO GERAL DE RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO OU UMA INEQUAÇÃO ALGÉBRICA, COM UMA INCÓGNITA

Em geral, o *método de resolução de uma equação ou inequação algébrica*, com uma incógnita x , consiste em isolar esta incógnita, utilizando a lei do cancelamento, juntamente com as propriedades 1 – 32 dos números reais, por meio de uma sucessão de expressões algébricas equivalentes, isto é, com mesmas soluções.

Vejamos alguns exemplos.



Observação: Resolver uma equação é como pensar numa balança de dois pratos (foto acima). Nosso objetivo é sempre deixar os pratos igualados. Para isso é necessário que o que temos num dos pratos seja igual ao que temos no outro. Tudo que acrescentamos em um dos pratos temos que acrescentar no outro.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS: EQUAÇÃO

1) Resolver a equação $3x - 1 = 2 - 7x$.

Isolaremos a variável x , no lado direito da relação de igualdade. Para isso, faremos os seguintes procedimentos:

i) eliminação do termo $3x$, da equação $3x - 1 = 2 - 7x$. Para eliminarmos o termo $3x$, devemos somar $(-3x)$ em ambos os lados da igualdade. Pela lei do cancelamento, obtemos:

$$3x - 1 = 2 - 7x \Leftrightarrow (3x - 1) + (-3x) = (2 - 7x) + (-3x) \Leftrightarrow -1 = 2 - 10x.$$

Observemos que a equação $-1 = 2 - 10x$ possui exatamente as mesmas soluções da equação $3x - 1 = 2 - 7x$. Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da equação mais simples $-1 = 2 - 10x$.

ii) eliminação do número real 2, da equação $-1 = 2 - 10x$. Para eliminarmos o termo 2, devemos somar (-2) em ambos os lados da igualdade. Pela lei do cancelamento, obtemos:

$$-1 = 2 - 10x \Leftrightarrow (-2) + (-1) = (-2) + (2 - 10x) \Leftrightarrow -3 = -10x.$$

Observemos que a equação $-1 = 2 - 10x$ possui exatamente as mesmas soluções da equação $-3 = -10x$. Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da equação mais simples $-3 = -10x$.

iii) eliminação do número real (-10) , da equação $-3 = -10x$. Para eliminarmos o número real (-10) , devemos multiplicar por $(-\frac{1}{10})$, em ambos os lados da igualdade. Pela lei do cancelamento, obtemos:

$$-3 = -10x \Leftrightarrow (-\frac{1}{10})(-3) = (-\frac{1}{10})(-10x) \Leftrightarrow \frac{3}{10} = x.$$

Observemos que a equação $-3 = -10x$ possui exatamente as mesmas soluções da equação $\frac{3}{10} = x$. Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da equação mais simples $\frac{3}{10} = x$. Como o

conjunto solução desta última equação é evidente, podemos concluir que o conjunto solução da primeira equação é o conjunto $\left\{\frac{3}{10}\right\}$

Resolução com todos os passos necessários para a obtenção da solução da equação proposta

<i>Todos os passos da Resolução da Equação</i>	<i>Propriedades Aplicadas</i>	<i>Resolução da Equação Método Tradicional</i>
$3x - 1 = 2 - 7x$	Equação dada.	$3x - 1 = 2 - 7x$
$(3x - 1) + (-3x) = (2 - 7x) + (-3x)$	Somando $(-3x)$ em ambos os lados da igualdade.	$3x + 7x = 2 + 1$
$-1 = 2 - 10x$	Resultado do passo anterior.	$10x = 3$
$(-2) + (-1) = (-2) + (2 - 10x)$	Somando (-2) em ambos os lados da igualdade.	$x = \frac{3}{10}$
$-3 = -10x$	Resultado do passo anterior.	
$(-\frac{1}{10})(-3) = (-\frac{1}{10})(-10x)$	Multiplicando por $(-\frac{1}{10})$ ambos os lados da igualdade.	
$\frac{3}{10} = x$	Resultado da equação dada.	

2) Resolver a equação $1 - \frac{4}{5}(x - 2) = 9 + \frac{2x + 3}{4}$.

Para isolarmos a variável x , reduziremos este caso a um caso equivalente ao do exemplo anterior e utilizaremos os métodos empregados naquele caso para a resolução do problema. Assim, seguiremos os procedimentos descritos a seguir.

i) eliminação dos denominadores 5 e 4, no lado esquerdo e direito da equação, respectivamente. Para eliminarmos os denominadores 5 e 4, devemos multiplicar por 20 (o Mínimo Múltiplo Comum – MMC – entre 4 e 5) ambos os lados da igualdade. Assim,

$$20 \times \left(1 - \frac{4}{5}(x - 2)\right) = 20 \times \left(9 + \frac{2x + 3}{4}\right) \Leftrightarrow 20 - 16(x - 2) = 180 + 5(2x + 3).$$

Observemos que a equação $1 - \frac{4}{5}(x - 2) = 9 + \frac{2x + 3}{4}$ possui exatamente as mesmas soluções da equação $20 - 16(x - 2) = 180 + 5(2x + 3)$. Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da equação mais simples $20 - 16(x - 2) = 180 + 5(2x + 3)$.

ii) eliminação dos parênteses, por meio da lei distributiva e das regras de sinais na multiplicação. Assim,

$$20 - 16(x - 2) = 180 + 5(2x + 3) \Leftrightarrow 52 - 16x = 195 + 10x.$$

Observemos que a equação $20 - 16(x - 2) = 180 + 5(2x + 3)$ possui exatamente as mesmas soluções da equação $52 - 16x = 195 + 10x$. Pelo exemplo anterior, temos

$$52 - 16x = 195 + 10x \Leftrightarrow -26x = 143 \Leftrightarrow x = -\frac{143}{26}.$$

Concluimos que o conjunto solução da equação é o conjunto $\left\{-\frac{143}{26}\right\}$

Resolução com todos os passos necessários para a obtenção da solução da equação proposta

<i>Todos os Passos da Resolução da Equação</i>	<i>Propriedades Aplicadas</i>	<i>Resolução da Equação Método Tradicional</i>
$1 - \frac{4}{5}(x-2) = 9 + \frac{2x+3}{4}$	Equação dada.	$1 - \frac{4}{5}(x-2) = 9 + \frac{2x+3}{4}$
$20 \times (1 - \frac{4}{5}(x-2)) = 20 \times (9 + \frac{2x+3}{4})$	Multiplicando por 20 ambos os lados da igualdade.	$1 - \frac{4}{5}x + \frac{8}{5} = 9 + \frac{2x+3}{4}$
$20 - 16(x-2) = 180 + 5(2x+3)$	Aplicação da propriedade distributiva e das regras de sinais na multiplicação.	$\frac{20 - 16x + 32}{20} = \frac{180 + 10x + 15}{20}$
$20 - 16x + 32 = 180 + 10x + 15$	Resultado do passo anterior.	$20 - 16x + 32 = 180 + 10x + 15$
$-16x - 10x = 195 - 52$	Isolando x.	$-16x - 10x = 195 - 52$
$-26x = 143 \quad (-1)$	Multiplicando por (-1) ambos os lados da igualdade.	$-26x = 143 \quad (-1)$
$x = -\frac{143}{26}$	Resultado da equação dada.	$x = -\frac{143}{26}$

3) Resolver a equação $\frac{1+x^2}{x+4} = 0$.

Para isolarmos a variável x , reduziremos este problema a um problema equivalente aos dos dois primeiros exemplos e utilizaremos os métodos já empregados naqueles casos. Inicialmente, observemos que se x é uma solução desta equação, então devemos ter $x+4 \neq 0$. Assim, tomemos os seguintes procedimentos:

i) eliminação do denominador $x+4$, no lado esquerdo da equação. Para eliminarmos o denominador $x+4$, relativo a uma solução x , devemos multiplicar a equação pelo fator $x+4$. Assim,

$$\frac{1+x^2}{x+4} = 0 \Leftrightarrow (x+4) \frac{1+x^2}{x+4} = (x+4) 0 \Leftrightarrow 1+x^2 = 0.$$

Concluimos que o conjunto solução da equação é o conjunto vazio ($=\emptyset$), pois $1+x^2 > 0$, para todo número real x .

Resolução com todos os passos necessários para a obtenção da solução da equação proposta

<i>Todos os Passos da Resolução da Equação</i>	<i>Propriedades Aplicadas</i>	<i>Resolução da Equação Método Tradicional</i>
$\frac{1+x^2}{x+4} = 0$	Equação dada. Com a restrição $x \neq -4$.	$\frac{1+x^2}{x+4} = 0$
$(x+4) \frac{1+x^2}{x+4} = (x+4) 0$	Multiplicando a equação pelo fator $x+4$.	$1+x^2 = 0$
$1+x^2 = 0$	Resultado do passo anterior.	$x^2 = -1$
$(1+x^2) + (-1) = 0 + (-1)$	Adicionando $+(-1)$, em ambos os lados da igualdade.	<i>A equação não tem solução.</i>
$1+x^2 - 1 = -1$	Eliminando os parênteses da equação anterior.	
$x^2 = -1$	Resultado do passo anterior.	
<i>A equação não tem solução no conjunto dos números reais</i>	Resultado da equação dada.	



Porque a equação $x^2 = -1$ tem como solução o conjunto vazio no conjunto dos números reais? Faça esta discussão no FÓRUM.

Existem outras maneiras de resolver esta equação. Encontre-as ou pesquise em livros didáticos estas outras maneiras e postem-nas no MATERIAL DO ALUNO.

4) Resolver a equação $\frac{x-1}{2x-5} = \frac{2x+3}{4x+1}$.

Como no exemplo anterior, para isolarmos a variável x , reduziremos este problema a um problema equivalente aos dos dois primeiros exemplos e utilizaremos os métodos já empregados naqueles casos. Inicialmente, observemos que se x é uma solução desta equação, então devemos ter $2x - 5 \neq 0$ e $4x + 1 \neq 0$, ou seja, $x \neq 5/2$ e $x \neq -1/4$. Assim, faremos os seguintes procedimentos:

i) eliminação dos denominadores $2x - 5$ e $4x + 1$, no lado esquerdo e direito da equação, respectivamente. Para eliminarmos os denominadores $2x - 5$ e $4x + 1$ relativos a uma solução x , devemos multiplicar a equação sucessivamente pelos fatores $2x - 5$ e $4x + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2x-5} = \frac{2x+3}{4x+1} &\Leftrightarrow (2x-5) \frac{x-1}{2x-5} = (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow x-1 = (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (4x+1)(x-1) = (4x+1)(2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow (4x+1)(x-1) = (2x-5)(2x+3). \end{aligned}$$

Observemos que as duas condições impostas aos polinômios $2x - 5$ e $4x + 1$, decorrentes das soluções, nos permitem concluir que a equação $\frac{x-1}{2x-5} = \frac{2x+3}{4x+1}$ possui exatamente as mesmas soluções da equação $(4x+1)(x-1) = (2x-5)(2x+3)$. Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da equação mais simples $(4x+1)(x-1) = (2x-5)(2x+3)$.

ii) eliminação dos parênteses, por meio da lei distributiva e das regras de sinais na multiplicação. Assim,

$$\begin{aligned} (4x+1)(x-1) &= (2x-5)(2x+3) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + x - 1 = 4x^2 + 6x - 10x - 15 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + x - 4x^2 - 6x + 10x = -15 + 1 \Leftrightarrow x = -14 \end{aligned}$$

Concluimos que o conjunto solução da equação é o conjunto $\{-14\}$.

Resolução com todos os passos necessários para a obtenção da solução da equação proposta

<i>Todos os passos da Resolução da Equação</i>	<i>Propriedades aplicadas</i>	<i>Resolução da equação Método Tradicional</i>
$\frac{x-1}{2x-5} = \frac{2x+3}{4x+1}$	Equação dada. com a restrição $x \neq \frac{5}{2}$ e $x \neq -\frac{1}{4}$.	$\frac{x-1}{2x-5} = \frac{2x+3}{4x+1}$
$\cancel{(2x-5)} \frac{x-1}{\cancel{2x-5}} = (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1}$	Multiplicando por (2x - 5) ambos os lados da igualdade.	$\frac{(x-1)(4x+1)}{(2x-5)(4x+1)} = \frac{(2x-5)(2x+3)}{(2x-5)(4x+1)}$
$x-1 = (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1}$	Resultado do passo anterior.	$(x-1)(4x+1) = (2x-5)(2x+3)$
$(4x+1)(x-1) = (4x+1)(2x-5) \left(\frac{2x+3}{4x+1} \right)$	Multiplicando por (4x + 1) ambos os lados da igualdade.	$4x^2 + x - 4x - 1 = 4x^2 + 6x - 10x - 15$
$(4x+1)(x-1) = (2x-5)(2x+3).$	Eliminação dos parênteses, por meio da lei distributiva e das regras de sinais na multiplicação.	$4x^2 + x - 4x - 4x^2 - 6x + 10x = -15 + 1$
$4x^2 - 4x + x - 1 = 4x^2 + 6x - 10x - 15$	Resultado do passo anterior.	$x = -14$
$4x^2 - 4x + x - 4x^2 - 6x + 10x = -15 + 1$ $x = -14$	Eliminando x^2 e isolando x no primeiro membro. Resultado da equação dada.	

Resposta: $x = -14$.



Existem outras maneiras de resolver esta equação. Encontre-as ou pesquise em livros didáticos estas outras maneiras e as postem no MATERIAL DO ALUNO.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS: INEQUAÇÃO

1) Resolver a inequação $3x - 1 < 2 - 7x$.

Isolaremos a variável x no lado direito da relação de desigualdade. Para isso, tomaremos os seguintes procedimentos:

i) eliminação do termo $3x$, da inequação $3x - 1 = 2 - 7x$. Para eliminarmos o termo $3x$, devemos somar $(-3x)$, em ambos os lados da desigualdade. Pela lei do cancelamento, obtemos:

$$3x - 1 < 2 - 7x \Leftrightarrow (3x - 1) + (-3x) < (2 - 7x) + (-3x) \Leftrightarrow -1 < 2 - 10x.$$

Observemos que a inequação $-1 < 2 - 10x$ possui exatamente as mesmas soluções da inequação $3x - 1 < 2 - 7x$. Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da inequação mais simples $-1 < 2 - 10x$.

ii) eliminação do número real 2, da inequação $-1 < 2 - 10x$. Para eliminarmos o termo 2, devemos somar (-2) em ambos os lados da desigualdade. Pela lei do cancelamento, obtemos:

$$-1 < 2 - 10x \Leftrightarrow (-2) + (-1) < (-2) + (2 - 10x) \Leftrightarrow -3 < -10x.$$

Observemos que a inequação $-1 < 2 - 10x$ possui exatamente as mesmas soluções da inequação $-3 < -10x$. Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da inequação mais simples $-3 < -10x$.

iii) eliminação do número real (-10) , da inequação $-3 < -10x$. Para eliminarmos o número real (-10) , devemos multiplicar por $(-\frac{1}{10})$ ambos os lados da desigualdade. Pela lei do cancelamento, obtemos:

$$-3 < -10x \Leftrightarrow (-\frac{1}{10})(-3) > (-\frac{1}{10})(-10x) \Leftrightarrow \frac{3}{10} > x.$$

Observemos que a inequação $-3 < -10x$ possui exatamente as mesmas soluções da inequação $\frac{3}{10} > x$.

Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da inequação mais simples

$\frac{3}{10} > x$. Como o conjunto solução desta última inequação é evidente, podemos concluir que o conjunto solução da primeira inequação é o intervalo ilimitado $] -\infty, \frac{3}{10}[$.

Resolução com todos os passos necessários para a obtenção da solução da equação proposta

<i>Todos os Passos da Resolução da Equação</i>	<i>Propriedades Aplicadas</i>	<i>Resolução da Equação Método Tradicional</i>
$3x - 1 < 2 - 7x$.	Inequação dada.	$3x - 1 < 2 - 7x$
$(3x - 1) + (-3x) < (2 - 7x) + (-3x)$	Somando $(-3x)$ em ambos os lados da desigualdade.	$3x + 7x < 2 + 1$
$-1 < 2 - 10x$.	Resultado do passo anterior.	$10x < 3$
$(-2) + (-1) < (-2) + (2 - 10x)$.	Somando (-2) em ambos os lados da desigualdade.	$x < \frac{3}{10}$
$-3 < -10x$	Resultado do passo anterior.	
$(-\frac{1}{10})(-3) > (-\frac{1}{10})(-10x)$	Multiplicando por $(-\frac{1}{10})$ ambos os lados da desigualdade.	
$(+\frac{3}{10}) > (+\frac{10}{10}x)$	Resultado do passo anterior.	
$\frac{3}{10} > x$	Resultado da inequação dada.	

Solução: $x < \frac{3}{10}$

2) Resolver a inequação $1 - \frac{4}{5}(x - 2) \geq 9 + \frac{2x + 3}{4}$.

Para isolarmos a variável x , reduziremos esta inequação a uma inequação equivalente ao do exemplo anterior e utilizaremos os métodos empregados naquele caso. Assim, faremos os seguintes procedimentos:

i) eliminação dos denominadores 5 e 4, no lado esquerdo e direito da inequação, respectivamente.

Para eliminarmos os denominadores 5 e 4, devemos multiplicar por 20 (o Mínimo Múltiplo Comum – MMC – entre 4 e 5) ambos os lados da desigualdade. Assim, pela lei do cancelamento temos que

$$20 \times \left(1 - \frac{4}{5}(x - 2)\right) \geq 20 \times \left(9 + \frac{2x + 3}{4}\right) \Leftrightarrow 20 - 16(x - 2) \geq 180 + 5(2x + 3).$$

Observemos que a inequação $1 - \frac{4}{5}(x - 2) \geq 9 + \frac{2x + 3}{4}$ possui exatamente as mesmas soluções da inequação $20 - 16(x - 2) \geq 180 + 5(2x + 3)$. Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da inequação mais simples $20 - 16(x - 2) \geq 180 + 5(2x + 3)$.

ii) eliminação dos parênteses, por meio da lei distributiva e das regras de sinais na multiplicação. Assim,

$$20 - 16(x - 2) \geq 180 + 5(2x + 3) \Leftrightarrow 52 - 16x \geq 195 + 10x.$$

Observemos que a inequação $20 - 16(x - 2) \geq 180 + 5(2x + 3)$ possui exatamente as mesmas soluções da inequação $52 - 16x \geq 195 + 10x$. Como

$$52 - 16x \geq 195 + 10x \Leftrightarrow -26x \geq 143 \Leftrightarrow x \leq -\frac{143}{26},$$

pela lei do cancelamento, concluímos que o conjunto solução da inequação é o intervalo ilimitado $] -\infty, -143/26[$.

Resolução com todos os passos necessários para a obtenção da solução da equação proposta

<i>Todos os Passos da Resolução da Equação</i>	<i>Propriedades Aplicadas</i>	<i>Resolução da Equação Método Tradicional</i>
$1 - \frac{4}{5}(x - 2) \geq 9 + \frac{2x + 3}{4}$	Inequação dada.	$1 - \frac{4}{5}(x - 2) \geq 9 + \frac{2x + 3}{4}$
$1 - \frac{4}{5}x + \frac{8}{5} \geq 9 + \frac{2x + 3}{4}$	Aplicação da propriedade distributiva e das regras de sinais na multiplicação.	$1 - \frac{4}{5}x + \frac{8}{5} \geq 9 + \frac{2x}{4} + \frac{3}{4}$
$20 \times (1 - \frac{4}{5}x + \frac{8}{5}) \geq 20 \times (9 + \frac{2x + 3}{4})$	Multiplicando por (20) ambos os lados da desigualdade.	$1 - \frac{4}{5}x - \frac{2x}{4} \geq 9 + \frac{3}{4} - 1 - \frac{8}{5}$
$20 - 16x + 32 \geq 180 + 10x + 15$	Resultado do passo anterior.	$\frac{-16x - 10x}{20} \geq \frac{180 + 15 - 20 - 32}{20}$
$-16x - 10x \geq 180 + 15 - 52$	Isolando x no primeiro membro.	$\frac{-26x}{20} \geq \frac{143}{20}$
$-26x \geq 180 + 15 - 52$	Resultado do passo anterior.	$-26x \geq 143 \quad (-1)$
$-26x \geq 143$	Multiplicando por (-1) ambos os lados da desigualdade.	$x \leq -\frac{143}{26}$
$x \leq -\frac{143}{26}$	Resultado da inequação dada.	

3) Resolver a inequação $\frac{1+x^2}{x+4} > 0$.

Para isolarmos a variável x , reduziremos este problema a um problema equivalente aos dos dois últimos exemplos e utilizaremos os métodos já empregados nesses casos. Inicialmente, observemos que se x é uma solução desta inequação, então devemos ter $x + 4 \neq 0$, ou seja, $x \neq -4$. Assim, faremos os seguintes procedimentos:

i) eliminação do denominador $x + 4$, no lado esquerdo da inequação. Para eliminarmos o denominador $x + 4$, relativo a uma solução x , devemos multiplicar a inequação pelo fator $x + 4$, **considerando o seu respectivo sinal**, pela lei do cancelamento, e teremos dois casos a analisar:

1º CASO. Soluções x satisfazendo a condição $x + 4 > 0$. Neste caso,

$$\frac{1+x^2}{x+4} > 0 \Leftrightarrow (x+4) \frac{1+x^2}{x+4} > (x+4) 0 \Leftrightarrow 1+x^2 > 0.$$

Como $x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$ e $1+x^2 > 0$, para todo número real x , concluímos que, para o primeiro caso, o conjunto solução da inequação é o intervalo ilimitado $] -4, +\infty[$.

2º CASO. Soluções x satisfazendo a condição $x + 4 < 0$. Neste caso,

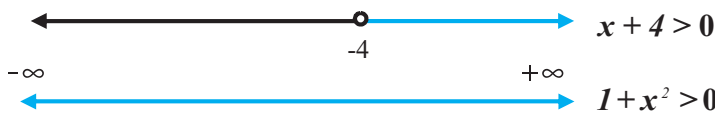
$$\frac{1+x^2}{x+4} > 0 \Leftrightarrow (x+4) \frac{1+x^2}{x+4} < (x+4) 0 \Leftrightarrow 1+x^2 < 0.$$

Concluímos que, para o segundo caso, o conjunto solução da inequação é conjunto vazio ($=\emptyset$).

Resposta da equação dada: Assim, o conjunto solução da inequação é $] -4, +\infty[\cup \emptyset =] -4, +\infty[$.

Resolução com todos os passos necessários para a obtenção da solução da equação proposta

1º CASO: Se $x + 4$ for um número positivo ($x + 4 > 0$), então não altera o sinal da inequação.

Todos os passos da Resolução da Equação	Propriedades aplicadas	Resolução da equação Método Tradicional
$\frac{1+x^2}{x+4} > 0$	Inequação dada. com a restrição $x > -4$	$\frac{1+x^2}{x+4} > 0$
$(x+4) \frac{1+x^2}{x+4} > (x+4) 0$	Multiplicando a inequação pelo fator $x+4$.	$1+x^2 > (x+4)0$
$1+x^2 > 0$	Resultado do passo anterior.	$1+x^2 > 0$
$\left(1+x^2\right) + (-1) > 0 + (-1)$	Adicionando $+(-1)$ em ambos os lados da desigualdade.	$x^2 > -1$
$1+x^2-1 > -1$	Eliminando os parênteses da equação anterior.	O conjunto solução é $\mathbb{R}$.
$x^2 > -1$	Resultado do passo anterior.	
Qualquer número real satisfaz a inequação anterior.	Resultado da inequação dada.	
Temos as seguintes condições: $x+4 > 0$ ou $x > -4$ e $1+x^2 > 0$.		Temos duas condições: $x+4 > 0$ e $S=\mathbb{R}$ portanto, $x > -4$ é a solução.
		
SOL: 		

Resolução com todos os passos necessários para a obtenção da solução da equação proposta.

2º CASO: Se $x + 4$ for um número negativo ($x + 4 < 0$), então se altera o sinal da inequação.

<i>Todos os passos da Resolução da Equação</i>	<i>Propriedades aplicadas</i>	<i>Resolução da equação Método Tradicional</i>
$\frac{1+x^2}{x+4} > 0$	Inequação dada. com a restrição $x < -4$.	$\frac{1+x^2}{x+4} > 0$
$(x+4) \frac{1+x^2}{x+4} < (x+4) 0$	Multiplicando a inequação pelo fator $x+4$.	$1+x^2 < (x+4) 0$
$1+x^2 < 0$	Resultado do passo anterior.	$1+x^2 < 0$
$(1+x^2) + (-1) < 0 + (-1)$	Adicionando $+(-1)$ em ambos os lados da desigualdade.	$x^2 < -1$
$1+x^2 - 1 < -1$	Eliminando os parênteses da inequação anterior.	O conjunto solução é vazio.
$x^2 < -1$	Resultado do passo anterior.	
O conjunto solução é vazio.	Resultado da inequação dada.	
Temos as seguintes condições: $x+4 < 0$ ou $x < -4$ e $1+x^2 > 0$		
	$x < -4$	Temos duas condições: $x+4 < 0$ e $S=\emptyset$, portanto, $S=\emptyset$ é a solução.
	$1+x^2 < 0$	
SOL: 	$x = \emptyset$	

RESULTADO:

Do 1º CASO temos como solução: $x > -4$

Do 2º CASO temos como solução: $S=\emptyset$

Assim, o conjunto solução da inequação é $] -4, +\infty[\cup \emptyset =] -4, +\infty[$.

Ou seja, como da Condição 1 temos que $x < -4$ e da Condição 2 temos que $S=\emptyset$, o conjunto solução da inequação dada é $] -4, +\infty[\cup \emptyset =] -4, +\infty[$.



Por que a equação: $\frac{1+x^2}{x+4} > 0$ tem duas condições para serem analisadas?

Faça esta discussão no FÓRUM.

Existem outras maneiras de resolver esta inequação. Encontre-as ou pesquise em livros didáticos estas outras maneiras e postem-nas no MATERIAL DO ALUNO.

4) Resolver a inequação $\frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1}$.

Para isolarmos a variável x , reduziremos esta inequação a uma inequação equivalente às dos exemplos anteriores e utilizaremos os métodos empregados naqueles casos. Inicialmente, observemos que x é uma solução desta inequação se, e somente se, $2x - 5 \neq 0$ e $4x + 1 \neq 0$. Assim, seguiremos os seguintes procedimentos:

i) eliminação dos denominadores $2x - 5$ e $4x + 1$, no lado esquerdo e direito da desigualdade, respectivamente.

Para eliminarmos os denominadores $2x - 5$ e $4x + 1$ relativos a uma solução x , devemos multiplicar a inequação sucessivamente pelos fatores $2x - 5$ e $4x + 1$, **considerando os seus respectivos sinais**, e utilizar a lei do cancelamento. Assim:

1º CASO. Soluções x satisfazendo as condições: $2x - 5 > 0$ e $4x + 1 > 0$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1} &\Leftrightarrow (2x-5) \frac{x-1}{2x-5} > (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow x-1 > (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (4x+1)(x-1) > (4x+1)(2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow (4x+1)(x-1) > (2x-5)(2x+3). \end{aligned}$$

Observemos que as duas condições impostas aos polinômios $2x - 5$ e $4x + 1$ nos permitem concluir que a inequação

$\frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1}$ possui exatamente as mesmas soluções da inequação $(4x+1)(x-1) > (2x-5)(2x+3)$, desde

de que estas satisfaçam as condições $2x - 5 > 0$ e $4x + 1 > 0$. Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da equação mais simples $(4x + 1)(x - 1) > (2x - 5)(2x + 3)$, satisfazendo as condições $2x - 5 > 0$ e $4x + 1 > 0$.

ii) eliminação dos parênteses, por meio da lei distributiva e das regras de sinais na multiplicação. Assim,

$$\begin{aligned} (4x + 1)(x - 1) > (2x - 5)(2x + 3) &\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + x - 1) > (4x^2 - 10x + 6x - 15) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x^2 - 4x + x + 10x - 6x > -15 + 1 \Leftrightarrow x > -14. \end{aligned}$$

Concluimos que soluções satisfazendo as condições $2x - 5 > 0$ e $4x + 1 > 0$, devem satisfazer também a condição $x > -14$. Como

$$2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \text{ e } 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$$

Então, devemos ter $x > \frac{5}{2}$, isto é, $x \in]\frac{5}{2}, +\infty[$.

Resolução com todos os passos necessários para a obtenção da solução da equação proposta

1º CASO: Se $2x-5>0$ e $4x+1>0$, então não altera o sinal da inequação.

<i>Todos os Passos da Resolução da Equação</i>	<i>Propriedades Aplicadas</i>	<i>Resolução da Equação Método Tradicional</i>
$\frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1}$	Equação dada com a restrição	$\frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1}$
	$x > \frac{5}{2} \text{ e } x > -\frac{1}{4}.$	
$(2x-5) \frac{x-1}{2x-5} > (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1}$	Multiplicando-se ambos os lados pelo fator $(2x-5)$.	$(2x-5)(4x+1) \frac{x-1}{2x-5} > (2x-5)(4x+1) \left(\frac{2x+3}{4x+1} \right)$
$x-1 > (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1}$	Resultado do passo anterior.	$(4x+1)(x-1) > (2x+3)(2x-5)$

$$(4x + 1)(x - 1) > (4x + 1)(2x - 5) \frac{2x + 3}{4x + 1}$$

Multiplicando-se ambos os lados pelo fator $(4x + 1)$.

$$(4x + 1)(x - 1) > (2x + 3)(2x - 5)$$

Resultado do passo anterior.

$$(4x^2 - 4x + x - 1) > (4x^2 - 10x + 6x - 15)$$

Eliminação dos parênteses, por meio da lei distributiva e das regras de sinais na multiplicação.

$$4x^2 - 4x^2 - 4x + x + 10x - 6x > -15 + 1$$

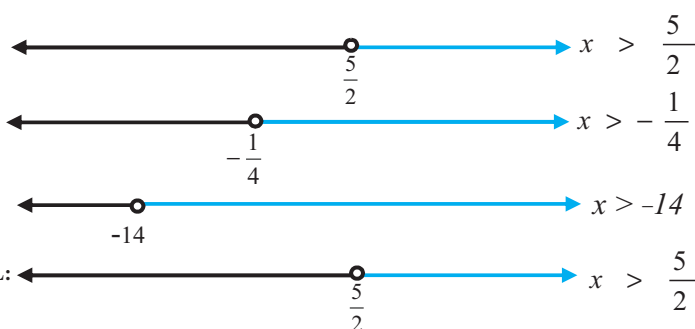
Isolando x e x^2 no primeiro membro da inequação.

$$x > -14$$

Resultado da inequação dada.

Temos as seguintes condições: $2x - 5 > 0$ e $4x + 1 > 0$ e

$$x > -14, \text{ isto é, } x > \frac{5}{2} \text{ e } x > -\frac{1}{4} \text{ e } x > -14.$$



SOLUÇÃO: Devemos ter $x > \frac{5}{2}$, isto é, $x \in]\frac{5}{2}, +\infty[$.

$$(4x^2 - 4x + x - 1) > (4x^2 - 10x + 6x - 15)$$

$$4x^2 - 4x^2 - 4x + x + 10x - 6x > -15 + 1$$

$$x > -14$$

Resposta: Como $2x - 5 > 0$ e $4x + 1 > 0$ e $x > -14$, então $x > \frac{5}{2}$, isto é, $x \in]\frac{5}{2}, +\infty[$.

Resposta: Como $2x - 5 > 0$ e $4x + 1 > 0$ e $x > -14$, então $x > \frac{5}{2}$, isto é, $x \in]\frac{5}{2}, +\infty[$.

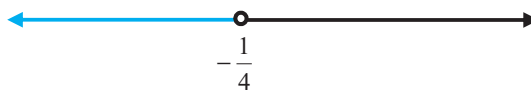
2º CASO. Soluções x satisfazendo as condições $2x - 5 > 0$ e $4x + 1 < 0$. Observemos que este caso é impossível, pois, como

$$2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \text{ e } 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4},$$

o conjunto solução é vazio, de forma que nenhum valor de x satisfaz estas duas inequações.

Resolução com todos os passos necessários para obtenção da solução da equação proposta

2º CASO: Se $2x - 5 > 0$ e $4x + 1 < 0$, então é impossível resolver a inequação dada.

<i>Todos os Passos da Resolução da Equação</i>	<i>Propriedades Aplicadas</i>
$\frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1}$	<i>Inequação dada</i> com a restrição $x > \frac{5}{2} \text{ e } x < -\frac{1}{4}$
Temos as seguintes condições: $2x - 5 > 0$ ou $x > \frac{5}{2}$ e $4x + 1 < 0$ ou $x < -\frac{1}{4}$.  $x > \frac{5}{2}$  $x < -\frac{1}{4}$ SOL:  $\exists x \notin \mathbb{R}$ Resposta: Não existe nenhum $x \in \mathbb{R}$, de forma que $x > \frac{5}{2}$ e $x < -\frac{1}{4}$ ao mesmo tempo.	

3º CASO. Soluções x satisfazendo as condições: $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 > 0$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1} &\Leftrightarrow (2x-5) \frac{x-1}{2x-5} < (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow x-1 < (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (4x+1)(x-1) < (4x+1)(2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow (4x+1)(x-1) < (2x-5)(2x+3). \end{aligned}$$

Observemos que as duas condições impostas aos polinômios $2x - 5$ e $4x + 1$ nos permitem concluir que a inequação

$$\frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1} \text{ possui exatamente as mesmas soluções da inequação } (4x+1)(x-1) < (2x-5)(2x+3),$$

desde que estas satisfaçam as condições $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 > 0$. Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da equação mais simples $(4x + 1)(x - 1) < (2x - 5)(2x + 3)$, satisfazendo as condições $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 > 0$.

ii) eliminação dos parênteses, por meio da lei distributiva e das regras de sinais na multiplicação. Assim,

$$(4x + 1)(x - 1) < (2x - 5)(2x + 3) \Leftrightarrow -3x - 1 < -4x - 15 \Leftrightarrow x < -14.$$

Concluimos que soluções satisfazendo as condições $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 > 0$ devem também satisfazer a condição $x < -14$. Como:

$$2x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \text{ e } 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$$

Concluimos que o conjunto de tais soluções é o conjunto vazio.

Resolução com todos os passos necessários para a obtenção da solução da equação proposta

3º CASO: Se $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 > 0$, então o sinal da desigualdade é alterado.

Todos os Passos da Resolução da Equação	Propriedades Aplicadas	Resolução da Equação Método Tradicional
$\frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1}$	Equação dada com a restrição	$\frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1}$
	$x < \frac{5}{2} \text{ e } x > -\frac{1}{4}.$	

$$(2x - 5) \frac{x - 1}{2x - 5} < (2x - 5) \frac{2x + 3}{4x + 1}$$

Multiplicando-se ambos os lados da desigualdade pelo fator $(2x-5)$.

(Obs: troca-se o sinal, pois $2x-5 < 0$).

$$x - 1 < (2x - 5) \frac{2x + 3}{4x + 1}$$

Resultado do passo anterior.

$$(4x + 1)(x - 1) < (4x + 1)(2x - 5) \frac{2x + 3}{4x + 1}$$

Multiplicando-se ambos os lados da desigualdade pelo fator $(4x+1)$.

$$(4x + 1)(x - 1) < (2x + 3)(2x - 5)$$

Resultado do passo anterior.

$$(4x^2 - 4x + x - 1) < (4x^2 - 10x + 6x - 15)$$

Eliminação dos parênteses, por meio da lei distributiva e das regras de sinais na multiplicação.

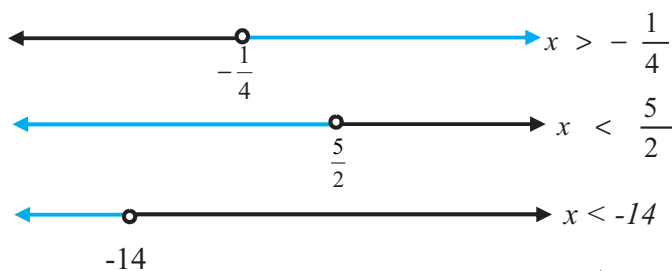
$$4x^2 - 4x^2 - 4x + x + 10x - 6x < -15 + 1$$

Isolando x e x^2 no primeiro membro da inequação.

$$x < -14$$

Resultado da inequação dada.

Temos as seguintes condições: $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 > 0$ e $x < -14$, ou seja, $x < \frac{5}{2}$ e $x > -\frac{1}{4}$ e $x < -14$.



SOL: $\nexists x \in \mathbb{R}$

$$(2x - 5)(4x + 1) \frac{x - 1}{2x - 5} < (2x - 5)(4x + 1) \frac{2x + 3}{4x + 1}$$

$$(4x + 1)(x - 1) < (2x + 3)(2x - 5)$$

$$(4x^2 - 4x + x - 1) < (4x^2 - 10x + 6x - 15)$$

$$4x^2 - 4x^2 - 4x + x + 10x - 6x < -15 + 1$$

$$x < -14$$

Resposta: Como $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 > 0$ e $x < -14$, concluímos que o conjunto de tais soluções é o conjunto vazio.

Resposta: Como $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 > 0$ e $x < -14$, concluímos que o conjunto de tais soluções é o conjunto vazio.

4º CASO. Soluções x satisfazendo as condições $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 < 0$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1} &\Leftrightarrow (2x-5) \frac{x-1}{2x-5} < (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow x-1 < (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (4x+1)(x-1) > (4x+1)(2x-5) \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow (4x+1)(x-1) > (2x-5)(2x+3). \end{aligned}$$

Observemos que as duas condições impostas aos polinômios $2x - 5$ e $4x + 1$ nos permitem concluir que a inequação

$\frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1}$ possui exatamente as mesmas soluções da inequação $(4x+1)((x-1) > (2x-5)(2x+3))$, desde de

que estas satisfaçam as condições $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 < 0$. Assim, podemos resolver o problema inicial, determinando as soluções da equação mais simples $(4x+1)(x-1) > (2x-5)(2x+3)$, satisfazendo as condições $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 < 0$.

ii) eliminação dos parênteses, por meio da lei distributiva e das regras de sinais na multiplicação. Assim,

$$(4x+1)(x-1) > (2x-5)(2x+3) \Leftrightarrow -3x-1 > -4x-15 \Leftrightarrow x > -14.$$

Concluímos que soluções satisfazendo as condições $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 < 0$, devem satisfazer também a condição x

> -14 . Como $2x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$ e $4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4}$, devemos ter $-14 < x < -\frac{1}{4}$, isto é, $x \in]-14, -\frac{1}{4}[$.

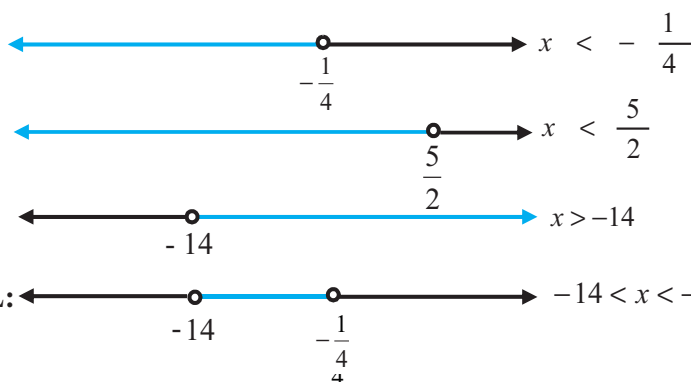
Resolução com todos os passos necessários para a obtenção da solução da equação proposta

4º CASO: Se $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 < 0$, então não se altera o sinal da desigualdade.

<i>Todos os Passos da Resolução da Equação</i>	<i>Propriedades Aplicadas</i>	<i>Resolução da Equação Método Tradicional</i>
$\frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1}$	Equação dada com a restrição $x < \frac{5}{2} \text{ e } x < -\frac{1}{4}.$	$\frac{x-1}{2x-5} > \frac{2x+3}{4x+1}$
$(2x-5) \frac{x-1}{2x-5} > (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1}$	Multiplicando-se ambos os lados da desigualdade pelo fator $(2x-5)$.	$(2x-5)(4x+1) \frac{x-1}{2x-5} > (2x-5)(4x+1) \frac{2x+3}{4x+1}$
$x-1 > (2x-5) \frac{2x+3}{4x+1}$	Resultado do passo anterior.	$(4x+1)(x-1) > (2x+3)(2x-5)$
$(4x+1)(x-1) > (4x+1)(2x-5) \frac{2x+3}{4x+1}$	Multiplicando-se ambos os lados da desigualdade pelo fator $(4x+1)$.	$(4x^2 - 4x + x - 1) > (4x^2 - 10x + 6x - 15)$
$(4x+1)(x-1) > (2x+3)(2x-5)$	Resultado do passo anterior.	$4x^2 - 4x^2 - 4x + x + 10x - 6x > -15 + 1$
$-(4x^2 - 4x + x - 1) > (4x^2 - 10x + 6x - 15)$	Eliminação dos parênteses, por meio da lei distributiva e das regras de sinais na multiplicação.	$x > -14$
$4x^2 - 4x^2 - 4x + x + 10x - 6x > -15 + 1$	Resultado do passo anterior.	
$x > -14$	Resultado da inequação dada.	

Temos as seguintes condições $2x - 5 < 0$ e $4x + 1 < 0$ e $x > -14$, ou

seja, $x < \frac{5}{2}$ e $x < -\frac{1}{4}$ e $x > -14$.



Resposta:

Como $2x - 5 < 0$; $4x + 1 < 0$ e $x > -14$ então

$-14 < x < -\frac{1}{4}$, isto é,

$x \in]-14, -\frac{1}{4}[$.

Concluindo. Temos como solução $-14 < x < -\frac{1}{4}$, isto é, $x \in]-14, -\frac{1}{4}[$.

RESPOSTA FINAL. Como toda solução da inequação, deverá satisfazer uma das 4 (quatro) condições acima, então o conjunto solução deverá ser a reunião dos intervalos:

$$]-\frac{5}{2}, +\infty[\cup]-14, -\frac{1}{4}[.$$

Resposta: Como $2x - 5 < 0$; $4x + 1 < 0$ e $x > -14$ então $-14 < x < -\frac{1}{4}$, isto é, $x \in]-14, -\frac{1}{4}[$.



Por que a inequação tem quatro condições para serem analisadas? Faça esta discussão no FÓRUM.

Existem outras maneiras de resolver esta inequação. Encontre-as ou pesquise em livros didáticos estas outras maneiras e postem-nas no MATERIAL DO ALUNO.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 1.1.8.

1) Resolva as equações.

i) $5x - 6 = 8 - x$;

ii) $2(x - 1) = \frac{6}{7}(x + 9) - 3$

iii) $(x - 1) = \frac{6}{7}(x + 9) - 3$;

iv) $11x - 13(3 - x) = 21 - 4(7 + 2x)$ v) $7 - \frac{2}{3}(6x - 1) = 1 + \frac{2x + 3}{9}$; vi) $\frac{4}{7x - 6} = -3$;

vii) $\frac{3x + 1}{5x - 2} = 0$;

viii) $\frac{11x + 8}{2x - 3} = 5$;

ix) $\frac{2x - 1}{3x + 2} = \frac{2x + 1}{3x - 2}$.

2) Resolva as inequações.

i) $3x - 4 < 8 - 5x$;

ii) $2x - 9(7 - x) \geq \frac{2}{5}(-11x + 4) - 8$;

iii) $13x + 2x(3 - 4x) \leq 2 - 4(7 + 2x)$;

iv) $7 - \frac{2}{3}(6x - 1) > 1 + \frac{2x + 3}{9}$;

v) $4(x + 6) - \frac{2}{3}(9x - 1) > \frac{2x - 3}{5}$;

vi) $3 - x < 1 - 2x \leq 13 - x$;

vii) $\frac{4}{7x + 6} > 1$;

viii) $\frac{8}{5 - 4x} \leq -3$;

ix) $\frac{5x}{2x + 3} > 0$;

x) $\frac{x - 6}{3x + 7} \geq -2$;

$$xi) \frac{x+5}{2-7x} \leq -\frac{1}{3};$$

$$xii) \frac{9}{x+2} > \frac{1}{5x+3};$$

$$xiii) \frac{2x+1}{3x-2} > \frac{4x-1}{6x+5}.$$

1.2 REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS REAIS

Nesta seção, apresentamos uma outra representação dos números reais na forma de um teorema, que será apresentado sem demonstração, muito usado em situações práticas e denominado de representação decimal.

Teorema 1.2.1. Todo número real a pode ser representado pelo símbolo

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

onde $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$, denominado **representação decimal do número a** . Além disso, a é um número racional se, e somente se, existem inteiros positivos m e p tais que: $a_{i+p} = a_i$, para todo inteiro $i \geq m$.

Neste caso, o menor dos inteiros positivos p com essa propriedade é chamado de **período da representação decimal**.

Nota 1.2.2. a é um número racional se, e somente se, $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_{m-1} \underbrace{a_m \dots a_{m+p-1}}_{\text{período}} \underbrace{a_{m+p} \dots a_{m+2p-1}}_{\text{período}} \dots$, onde

p é o **período** da representação decimal.

Observação 1.2.3. A representação decimal de um número real não é univocamente determinada, como podemos ver nos exemplos, a seguir.

$$i) \quad 1 = 1,000 \dots = 0,999 \dots ;$$

$$ii) \quad 2 = 2,000 \dots = 1,999 \dots .$$

Por exemplo, $1 = 1,00000\dots0000\dots$. Devemos apenas tomar um cuidado especial: também podemos escrever $1 = 0,99999\dots9999\dots$! A explicação é simples: o número da direita não é menor do que 1 porque ele tem infinitos 9's e, portanto, supera qualquer um que seja menor do que 1. Por outro lado, ele não é maior do que 1, evidentemente. Logo, ele só pode ser igual a 1. Para evitar ambigüidades na representação infinita de casas decimais, convencionaremos que infinitos zeros consecutivos serão substituídos por infinitos 9's diminuindo uma unidade na casa anterior ao primeiro zero que se repete infinitamente. Porém, para efetuar adições e multiplicações, poderemos utilizar uma ou outra representação.

Por exemplo, $1,39000\dots000\dots$ poderá ser trocado por $1,38999\dots999\dots$! Dessa forma, todo número real passa a ter uma única representação decimal infinita. O número 2 tem a representação $1,999\dots999\dots$, o número 2,1 tem a representação $2,0999\dots999\dots$, e assim por diante.

Não podemos nos esquecer que certos axiomas lógicos são necessários para nossa investigação. Por exemplo, acabamos de usar o axioma de que se a não é menor do que b e também não é maior do que b , então $a = b$.

Essa elegante caracterização dos números reais por meio de infinitas casas decimais nos faz definitivamente comprometidos com o “infinito”. Não há como nos livrar dele e, aliás, por enquanto, por que deveríamos? Galileu se assustou (como muitos outros) com o infinito matemático, e nos recomendou que o evitássemos, mas isso são águas passadas.

Retirado site: <http://www.somatematica.com.br/coluna/08112005.php>

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determine quais dos números reais $\frac{13}{7}$ e $\frac{7}{3}$ é o maior.

Se supusermos que $\frac{7}{3} < \frac{13}{7}$, chegaremos a um absurdo. De fato, $\frac{7}{3} < \frac{13}{7} \Leftrightarrow 7 \times 7 < 13 \times 3 \Leftrightarrow 49 < 39$, o que é um absurdo.

Concluimos que $\frac{13}{7} < \frac{7}{3}$.

Observações.

1) Podemos também transformar os dois números fracionários a serem comparados em números decimais

($\frac{13}{7} \cong 1,86$ e $\frac{7}{3} \cong 2,33$) e utilizar as propriedades de comparação de decimais. Logo, $\frac{7}{3} > \frac{13}{7}$.

2) Podemos também transformar os dois números fracionários a serem comparados em frações

equivalentes à dada ($\frac{13}{7} = \frac{39}{21}$ e $\frac{7}{3} = \frac{49}{21}$) e utilizar as propriedades de comparação de frações. Logo,

$$\frac{49}{21} > \frac{39}{21}.$$

2) Determine quais dos números reais $\frac{13}{6}$ e $\frac{27}{13}$ é o maior.

A partir da observação anterior, temos: $\frac{27}{13} < \frac{13}{6} \Leftrightarrow 6 \times 27 < 13 \times 13 \Leftrightarrow 162 < 169$.

Concluimos que $\frac{27}{13} < \frac{13}{6}$.



Pesquise na *Internet*, ou em livros didáticos, as regras que regem os números fracionários e os números decimais e as postem no MATERIAL DO ALUNO.

3) Determine o número racional em forma fracionada, representado pela representação decimal $0,001022\dots$.

Suponhamos que x seja o número racional em forma fracionada, representado pela representação decimal $0,001022\dots$. Temos,

$$x = 0,001022\dots \Leftrightarrow 10^4 x = 10,222\dots = 10 + 0,22\dots$$

Multiplicando de ambos
os lados por 10^4

Por outro lado, fazendo $y = 0,22\dots$, obtém-se $10y = 2,22\dots = 2 + 0,22\dots = 2 + y \Rightarrow 10y = 2 + y \Rightarrow 9y = 2$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{9}.$$

Logo, $10^4 x = 10 + 0,22\dots = 10 + \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{92}{90.000}$ (simplifique a fração !).

Método Simplificado

<i>Resolução do exercício 3</i>	<i>Conta auxiliar</i>
$x = 0,001022\dots$	$10,222 = 10 + y = 10 + 0,22\dots$
$10^4 x = 10,222\dots$	$10y = 2,22\dots = 2 + 0,22\dots$
$10^4 x = 10 + 0,22\dots$	Fazendo $y = 0,22\dots$
$10^4 x = 10 + \frac{2}{9}$	$10y = 2 + y$
$10^4 x = \frac{90}{9} + \frac{2}{9}$	$10y - y = 2$
$10^4 x = \frac{92}{9}$	$9y = 2$
$x = \frac{92}{90.000}$	$y = \frac{2}{9}$

4) Determine o número racional em forma fracionada, representado pela representação decimal $53,00124124\dots$

Suponhamos que x seja o número racional em forma fracionada, representado pela representação decimal $53,00124124\dots$. Temos,

$$x = 53,00124124\dots \Leftrightarrow 10^2 x = 5300,124124\dots = 5300 + 0,124124\dots$$

Multiplicando de ambos
os lados por 10^2

Por outro lado, fazendo $y = 0,124124\dots$, obtém-se $10^3 y = 124,124124\dots = 124 + 0,124124\dots = 124 + y \Rightarrow 10^3 y = 124 + y \Rightarrow 999y = 124 \Rightarrow y = 124/999$.

Logo,

$$10^2 x = 5300 + 0,124124\dots = 5300 + 124/999 \Rightarrow x = 5.294.824/99900$$

(simplifique a fração !).

Método Simplificado

<i>Resolução do exercício 3</i>	<i>Conta auxiliar</i>
$x = 53,00124124\dots$	$y = 0,124124\dots$
$10^2 x = 5300,124124\dots$	$10^3 y = 124,124124\dots$
$10^2 x = 5300 + 0,124124\dots$	$10^3 y = 124 + 0,124124\dots$
$10^2 x = 5300 + 124/999$	Fazendo $y = 0,124124\dots$
$x = 5.294.824/99900$	$10^3 y = 124 + y$
	$10^3 y - y = 124$
	$999 y = 124$
	$y = 124/999$



Existem outras formas de resolver os exercícios 3 e 4, encontre-as e as postem no MATERIAL DO ALUNO.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 1.2.4

1) O número real $2,01001000100001\dots$ é um número racional?

2) Determine a representação decimal e o período de cada um dos números racionais.

$$i) \frac{1}{300}; \quad ii) \frac{73}{11}; \quad iii) \frac{4}{55}; \quad iv) \frac{221}{39}; \quad v) \frac{1}{999}; \quad vi) \frac{43}{55}; \quad vii) \frac{8}{37}.$$

3) Determine o número racional em forma fracionada, representado pelas representações decimais.

$$i) 0,555 \dots; \quad ii) 3,121212 \dots; \quad iii) 0,00313131 \dots; \quad iv) 5,43102102102 \dots$$

4) Determine qual dos números reais dados é maior.

$$i) \frac{224}{151} \text{ e } \frac{144}{97}; \quad ii) \pi \text{ ou } \frac{22}{7}; \quad iii) \sqrt{15} \text{ ou } \frac{122}{31}.$$

5) Determine o número racional, em forma fracionada, representado pelas representações decimais.

$$i) 0,555 \dots; \quad ii) 3,121212 \dots; \quad iii) 0,00313131 \dots; \quad iv) 5,43102102102 \dots$$

1.3 VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL

Definição 1.3.1. Seja x um número real qualquer. Definimos o **valor absoluto de x** , como sendo o número real dado por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Interpretamos geometricamente o valor absoluto de um número real x , na reta numérica, como o comprimento do segmento cujas extremidades são 0 e x .

Definição 1.3.2. Sejam x e y , dois números reais quaisquer. Definimos a **distância de x a y** , como sendo o número real dado por $|x - y|$.

Proposição 1.3.3. Quaisquer que sejam os números reais x e y , temos:

- i) $|x| \geq 0$. Além disso, $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
- ii) $|x y| = |x| |y|$;
- iii) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, se $y \neq 0$;
- iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- v) Seja a um número real positivo. Então:
 - 1) $|x| < a$ se, e somente se, $-a < x < a$;
 - 2) $|x| > a$ se, e somente se, $x < -a$ ou $x > a$;

Demonstração.

i) e ii). Deixaremos essas verificações a cargo do leitor.

iii). Pela identidade ii), temos que $|x| = \left| \frac{x}{y} y \right| = \left| \frac{x}{y} \right| |y|$. Logo, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

iv) Observemos que $\pm x \leq |x|$ e $\pm y \leq |y|$. Logo $\pm(x+y) \leq |x|+|y|$. Como $|x+y| = x+y$ ou $-(x+y)$, então $|x+y| \leq |x|+|y|$.

v) - item 1.

Seja $|x| < a$. Se $x \geq 0$, então $-a < 0 \leq x (=|x|) < a$. Logo, $-a < x < a$. Se $x < 0$, então $-x (=|x|) < a$ o que implica em $-a < x < 0 \leq |x| < a$. Logo, $-a < x < a$. Reciprocamente, se $-a < x < a$, então $-a < -x < a$. Logo, $-a < |x| < a$ o que implica em $|x| < a$.

vi) - item 2.

Seja $|x| > a$. Se $x \geq 0$, então $x (=|x|) > a$. Se $x < 0$, então $-x (=|x|) > a$ o que implica em $x < -a$. Reciprocamente, se $x < -a$ ou $x > a$, então $-x > a$ ou $x > a$. Logo, $|x| > a$.

Para finalizarmos este parágrafo apresentaremos a seguir um método de resolução de uma equação ou inequação algébrica com uma incógnita, envolvendo valores absolutos.

MÉTODO GERAL DE RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO OU UMA INEQUAÇÃO ALGÉBRICA COM VALORES ABSOLUTOS E COM UMA VARIÁVEL DESCONHECIDA

Em geral, o método de resolução de uma equação ou inequação algébrica com valor absoluto e com uma incógnita x , consiste em transformar esta equação ou inequação em um conjunto de equações ou inequações algébricas sem valores absolutos, com o mesmo conjunto solução.

Vejam alguns exemplos.

Observação. Para resolvermos os exercícios 1, 2 e 3, utilizaremos a definição de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Resolver a equação $|7x - 5| = 9$.

Temos $|7x - 5| = 9 \Leftrightarrow 7x - 5 = 9$ ou $7x - 5 = -9 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -\frac{4}{7}$

Concluimos que o conjunto solução da equação é o conjunto $\left\{2, -\frac{4}{7}\right\}$.

2) Resolver a equação $|7x - 5| = -9$.

Esta equação modular não tem solução, pois $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$.



Verifique ou explique o resultado da equação do exercício 2.

3) Resolver a equação $|5x - 7| = |2x + 11|$.

Como $|5x - 7| = |2x + 11| \Leftrightarrow 5x - 7 = 2x + 11$ ou $5x - 7 = -(2x + 11) \Leftrightarrow 3x = 18$ ou $7x = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{18}$ ou $x = -\frac{4}{7}$.

Concluimos que o conjunto solução da equação é o conjunto $\left\{\frac{3}{18}, -\frac{4}{7}\right\}$.

4) Resolver a equação $|5 - 7x| = 3x + 13$.

Observemos que se x é uma solução da equação, então $3x + 13 \geq 0$, ou seja, $x \geq -\frac{13}{3}$.

Como $|5 - 7x| = 3x + 13 \Leftrightarrow 5 - 7x = 3x + 13$ ou $5 - 7x = -(3x + 13) \Leftrightarrow 10x = -8$ ou $4x = 18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$ ou $x = \frac{9}{2}$.

Concluimos que o conjunto solução da equação é o conjunto $\left\{-\frac{4}{5}, \frac{9}{2}\right\}$

Observação. Para resolvermos os exercícios 4, 5 e 6, utilizaremos a propriedade v).

5) Resolver a inequação $|7x - 5| < 9$.

$$\text{Temos } |7x - 5| < 9 \Leftrightarrow -9 < 7x - 5 < 9 \Leftrightarrow -4 < 7x < 14 \Leftrightarrow -\frac{4}{7} < x < \frac{14}{7}$$

Concluimos que o conjunto solução da inequação é o intervalo $] -\frac{4}{7}, \frac{14}{7} [$.

6) Resolver a inequação $|7x - 5| \geq 9$.

$$\text{Temos } |7x - 5| \geq 9 \Leftrightarrow 7x - 5 \leq -9 \text{ ou } 7x - 5 \geq 9 \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{7} \text{ ou } x \geq \frac{14}{7}$$

Concluimos que o conjunto solução da inequação é o intervalo $] -\infty, -\frac{4}{7}] \cup [\frac{14}{7}, +\infty [$.

7) Resolver a equação $|x - 7| < |2x + 11|$.

1º Modo:

Se x é uma solução, então devemos ter:

1º CASO. $x - 7 \geq 0$ e $2x + 11 \geq 0$.

Neste caso,

$$|x - 7| < |2x + 11| \Leftrightarrow x - 7 < 2x + 11 \Leftrightarrow -x < 18 \Leftrightarrow x > -18.$$

Mas,

$$x - 7 \geq 0 \text{ e } 2x + 11 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 7 \text{ e } x \geq -\frac{11}{2}.$$

Logo, o conjunto solução, para este caso, é o intervalo $[7, +\infty[$.

2º CASO. $x - 7 \geq 0$ e $2x + 11 < 0$.

Observemos que este caso é impossível, pois

$$x - 7 \geq 0 \text{ e } 2x + 11 < 0 \Leftrightarrow x \geq 7 \text{ e } x < -\frac{11}{2}.$$

3º CASO. $x - 7 < 0$ e $2x + 11 \geq 0$.

Neste caso,

$$|x - 7| < |2x + 11| \Leftrightarrow -(x - 7) < 2x + 11 \Leftrightarrow -3x < 4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}.$$

Mas,

$$x - 7 < 0 \text{ e } 2x + 11 \geq 0 \Leftrightarrow x < 7 \text{ e } x \geq -\frac{11}{2}.$$

Logo, o conjunto solução da inequação, para este caso, é o intervalo $[-\frac{11}{2}, 7[$.

4º CASO. $x - 7 < 0$ e $2x + 11 < 0$.

Neste caso,

$$|x - 7| < |2x + 11| \Leftrightarrow -(x - 7) < -(2x + 11) \Leftrightarrow x - 7 > 2x + 11 \Leftrightarrow -x > 18 \Leftrightarrow x < -18.$$

Mas,

$$x - 7 < 0 \text{ e } 2x + 11 < 0 \Leftrightarrow x < 7 \text{ e } x < -\frac{11}{2}.$$

Logo, o conjunto solução da inequação, para este caso, é o intervalo $] -\infty, -\frac{11}{2}[$.

SOLUÇÃO DO EXERCÍCIO. Como toda solução deverá satisfazer cada uma das 4 (quatro) condições acima, então o conjunto solução deverá ser a reunião dos intervalos:

$$]-\infty, -18[\cup [-\frac{11}{2}, 7[\cup]7, +\infty[,$$

isto é,

$$]-\infty, -18[\cup [-\frac{11}{2}, +\infty[.$$

2º Modo.

Para resolvermos a equação: $|x - 7| < |2x + 11|$, basta que elevemos ao quadrado cada lado da desigualdade, isto é:

$$\begin{aligned}
 |x - 7| < |2x + 11| &\Leftrightarrow (x - 7)^2 < (2x + 11)^2 \Leftrightarrow (x^2 - 14x + 49) < (4x^2 + 44x + 121) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - 4x^2 - 14x - 44x + 49 - 121) < 0 \Leftrightarrow (-3x^2 - 58x - 72) < 0 \text{ (i)}
 \end{aligned}$$

Basta encontrar os valores de x , que satisfaçam (i).

$(-3x^2 - 58x - 72) < 0$, então vamos buscar o valor que anula o polinômio do segundo grau.

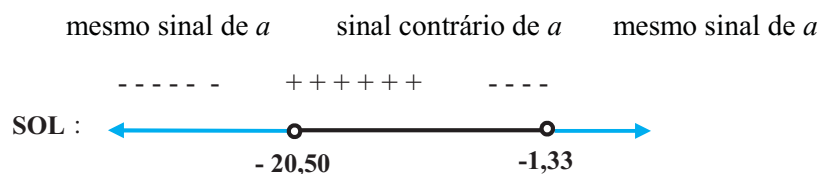
Temos: $(-3x^2 - 58x - 72) = 0$

$$x = \frac{-(-58) \pm \sqrt{(58)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-72)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{58 \pm \sqrt{3364 - 864}}{-6} = \frac{58 \pm \sqrt{2500}}{-6} = \frac{58 \pm 50}{-6}$$

$$x = \frac{58 \pm 50}{-6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{58 + 50}{-6} = \frac{108}{-6} = -18 \\ x_2 = \frac{58 - 50}{-6} = \frac{8}{-6} \cong -1,33 \end{cases}$$

Fazendo o estudo do sinal da inequação $(-3x^2 - 58x + 72) < 0$.

Temos que $a = -3$.



Solução: $x < -20,50$ ou $x > -1,33$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 1.3.4

1) Resolva as equações a seguir.

$$i) |x - 5| = 2;$$

$$ii) |2x - 1| = 0;$$

$$iii) |3x + 1| = 7;$$

$$iv) |x + 1| = |x - 2|;$$

$$v) |x + 2| = |2x + 1|;$$

$$vi) |x| = |3x - 5|;$$

$$vii) \left| \frac{2x + 3}{x - 1} \right| = 4;$$

$$viii) |5x + 2| = x + 1;$$

$$ix) |1 - 4x| = 3x + 2.$$

2) Resolva as seguintes inequações.

$$i) |x + 3| \leq 2;$$

$$ii) |4x - 1| \leq 1;$$

$$iii) |3x + 2| \geq 4;$$

$$iv) |2x - 5| > 1;$$

$$v) |x - 2| < |x - 1|$$

$$vi) |x - 1| \geq |2x - 4|;$$

$$vii) |x + 1| + |x - 1| < 4;$$

$$viii) |x - 5| < x + 2;$$

$$ix) |x - 3| + |x - 4| > 1; \quad x) |x - 2| - |x + 1| > 2x.$$

1.4 POTÊNCIA DE UM NÚMERO REAL

EXPOENTES NATURAIS

Definição 1.4.1. Seja a um número real, $a \neq 0$ e $a \neq 1$, e n um inteiro positivo. Definimos a **potência de base a e expoente n** , como sendo o número real, denotado pelo símbolo na , dado por

$$na = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ vezes}}.$$

Proposição 1.4.2. Quaisquer que sejam os números reais a e b (*diferentes de 0 e de 1*) e inteiros positivos m e n , temos

$$i) \quad a^{m+n} = a^m a^n;$$

$$ii) \quad (a^m)^n = a^{mn};$$

$$iii) \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

Demonstração.

$$i) \quad a^{m+n} = \underbrace{a \times \dots \times a}_{(m+n) \text{ vezes}} = \underbrace{a \times \dots \times a}_{m \text{ vezes}} \times \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ vezes}} = a^m a^n;$$

$$ii) \quad (a^m)^n = \underbrace{\underbrace{a \times \dots \times a}_{m \text{ vezes}} \dots \underbrace{a \times \dots \times a}_{m \text{ vezes}}}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a \times \dots \times a}_{mn \text{ vezes}} = a^{mn};$$

$$iii) \quad (ab)^n = \underbrace{(ab) \times \dots \times (ab)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ vezes}} \times \underbrace{b \times \dots \times b}_{n \text{ vezes}} = a^n b^n.$$

Corolário 1.4.3. Verifique que se a e b são números reais e n é um inteiro positivo, então:

$$i) \quad \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}, \text{ com } a \neq 0;$$

$$ii) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ com } b \neq 0.$$

A demonstração da proposição a seguir pode ser encontrada na bibliografia citada.

Proposição 1.4.4. Quaisquer que sejam os números reais a e b ($\neq 0$ e $\neq 1$) e o inteiro n positivo, temos:

$$i) \quad a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$ii) \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) a^k b^{n-k}, \text{ onde } k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k, \text{ para todo inteiro } k \text{ positivo.}$$

Corolário 1.4.5. Valem as seguintes afirmações.

- i) Seja n um inteiro par positivo. Se $0 < a < b$, então $a^n < b^n$.
- ii) Seja n um inteiro ímpar positivo. Se $a < b$, então $a^n < b^n$.

Demonstração.

- i) Se n é um inteiro par positivo e $0 < a < b$, então $a - b < 0$ e $a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} > 0$. Logo, $a^n - b^n < 0$ o que implica em $a^n < b^n$, pela proposição 1.4.3 – i);
- ii) Se n é um inteiro ímpar positivo e a e b tem os mesmos sinais, então a demonstração é a mesma do item anterior. Se $a < 0 < b$, então $a^n < 0 < b^n$.

EXPOENTES INTEIROS

Definição 1.4.6. Seja a um número real, $a \neq 0$ e $a \neq 1$, e n um inteiro. Definimos a *potência de base a e expoente n* , como sendo o número real, denotado pelo símbolo a^n , dado por:

$$a^n = \begin{cases} a^n, & \text{se } n > 0; \\ 1, & \text{se } n = 0; \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Observação 1.4.7. Na definição de potência de base a e expoente inteiro n , fazemos um abuso de notação tomando o mesmo símbolo a^n , já definido anteriormente para expoentes naturais.

Proposição 1.4.8. Quaisquer que sejam os números reais a e b ($\neq 0$ e $\neq 1$) e inteiros m e n , temos:

- i) $a^{m+n} = a^m a^n$;
- ii) $(a^m)^n = a^{mn}$;
- iii) $(ab)^n = a^n b^n$;

Demonstração.

i) Se os inteiros m e n são positivos, então a demonstração é a mesma da proposição 1.4.2.

Se $m = 0$, então $a^{0+n} = a^n = 1a^n = a^0a^n$. Da mesma forma, para $n = 0$, temos que $a^{m+0} = a^ma^0$.

Se o inteiro m é positivo, o inteiro n é negativo e $m+n$ é positivo, então

$$a^m = a^{m+n+(-n)} = a^{m+n}a^{-n}. \text{ Logo, } a^{m+n} = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = a^ma^n. \text{ Se } m+n \text{ é negativo, então}$$

$$a^n = a^{m+n+(-m)} = \frac{1}{a^{-(m+n+(-m))}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}a^m} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} \cdot \frac{1}{a^m} = a^{m+n} \cdot \frac{1}{a^m}.$$

Logo, $a^{m+n} = a^ma^n$. Se os inteiros m e n são negativos, então

$$a^{m+n} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = \frac{1}{a^{(-m)+(-n)}} = \frac{1}{a^{-m}a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = a^ma^n.$$

ii) Se os inteiros m e n são positivos, então a demonstração é a mesma da proposição 1.4.2.

Se $m = 0$, então $(a^0)^n = 1^n = 1 = a^{0n}$. Da mesma forma, para $n = 0$ temos $(a^m)^0 = a^{m0}$.

Se o inteiro m é positivo e o inteiro n é negativo, então $(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{-(mn)}} = a^{mn}$.

Analogamente, se o inteiro m é negativo e o inteiro n é positivo, então $(a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{a^{-(mn)}} = a^{mn}$.

Se os inteiros m e n são negativos, então $(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{-(mn)}} = a^{mn}$.

iii) Se o inteiro n é positivo, então a demonstração é a mesma da proposição 1.4.2.

Se $n = 0$, então $(ab)^0 = 1 = a^0b^0$. Se o inteiro n é negativo, então

$$(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^nb^n.$$

Corolário 1.4.9. Verifique que se a e b são números reais (*diferentes de 0 e de 1*) e n é um inteiro, então

- i) $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = a^{-n}$;
- ii) $(ab^{-1})^n = a^n (b^n)^{-1} = a^n b^{-n}$.

EXPOENTES RACIONAIS

RAÍZES N-ÉSIMAS DE UM NÚMERO REAL

A demonstração do teorema a seguir será omitida e poderá ser obtida na bibliografia citada.

Teorema 1.4.10. Valem as seguintes afirmações:

- i) Se n é um inteiro par positivo e b é um número real não negativo, então existe um único número real não negativo c tal que $c^n = b$.
- ii) Se n é um inteiro ímpar positivo e b é um número real, então existe um único número real c tal que $c^n = b$.

Nestes casos, o **número real** c é chamado de raiz n -ésima de b e é indicado pelo símbolo: $c = \sqrt[n]{b}$.

Proposição 1.4.11. Valem as seguintes afirmações:

- i) Se n é um inteiro par positivo, então $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, quaisquer que sejam os números reais não negativos a e b ;
- ii) Se n é um inteiro ímpar positivo, então $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, quaisquer que sejam os números reais a e b .

Demonstração.

i) e ii). Pela definição de raízes n -ésimas de números reais, $(\sqrt[n]{a})^n = a$ e $(\sqrt[n]{b})^n = b$. Como $(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$, concluímos que $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ é a raiz n -ésima de ab . Logo, $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Proposição 1.4.12. Valem as seguintes afirmações:

i) Se n é um inteiro par positivo, então $|a| = \sqrt[n]{a^n}$, para todo número real não negativo a .

ii) Se n é um inteiro ímpar positivo, então $a = \sqrt[n]{a^n}$, para todo número real a .

Demonstração.

i) Se n é um inteiro par positivo, então $|a|^n = a^n$. Assim, $|a|$ é a raiz n -ésima do número real a^n . Logo,

$$|a| = \sqrt[n]{a^n}.$$

ii) Evidente.

Proposição 1.4.13. Valem as seguintes afirmações:

i) Seja n um inteiro par positivo. Se $0 < a < b$, então $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

ii) Seja n um inteiro ímpar positivo. Se $a < b$, então $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Demonstração.

i) Se n é um inteiro par positivo, pela proposição 1.4.3 – i), tomando $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{b}$, temos que

$$a - b = (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}) \left((\sqrt[n]{a})^{n-1} + (\sqrt[n]{a})^{n-2} \sqrt[n]{b} + \dots + \sqrt[n]{a} (\sqrt[n]{b})^{n-2} + (\sqrt[n]{b})^{n-1} \right).$$

Como $a - b < 0$ e o segundo termo do produto à direita da igualdade é positivo, temos $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} < 0$. Logo, $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

ii) Se n é um inteiro ímpar positivo e a e b tem os mesmos sinais, então a demonstração é a mesma do item anterior.

Se $a < 0 < b$, então $\sqrt[n]{a} < 0 < \sqrt[n]{b}$.

Corolário 1.4.14. Valem as seguintes afirmações:

i) Seja n um inteiro par positivo, então, $|a| < |b|$ se, e somente se, $a^n < b^n$.

ii) Seja n um inteiro ímpar positivo, então, $a < b$ se, e somente se, $a^n < b^n$.

Demonstração. Deixaremos como exercício.

Proposição 1.4.15. Valem as seguintes afirmações:

i) Se n é um inteiro par positivo, então: $\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, quaisquer que sejam os números reais $a > 0$ e $b > 0$.

ii) Se n é um inteiro ímpar positivo, tem-se:

1) Se $a > 0$ e $b > 0$, então $\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

2) Se $a < 0$ e $b < 0$, então $\sqrt[n]{a+b} > \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

3) Se $a < 0 < b$, então nada podemos afirmar.

Demonstração.

i) e ii) - item 1). Se n é um inteiro par ou ímpar positivo e $a > 0$ e $b > 0$, então pela proposição 1.4.3 – ii), temos

$$(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) (\sqrt[n]{a})^k (\sqrt[n]{b})^{n-k} = a + b + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) (\sqrt[n]{a})^k (\sqrt[n]{b})^{n-k},$$

o que implica em $a + b < (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n$. Pela proposição 1.4.13 – i), concluímos que $\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

ii) -item 2). Se n é um inteiro ímpar positivo e $a < 0$ e $b < 0$, então pela proposição 1.4.13 – ii), temos

$$(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) (\sqrt[n]{a})^k (\sqrt[n]{b})^{n-k} = a + b + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) (\sqrt[n]{a})^k (\sqrt[n]{b})^{n-k}.$$

Como $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) (\sqrt[n]{a})^k (\sqrt[n]{b})^{n-k} < 0$, então $a + b > (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n$. Pela proposição 1.4.13 – ii), concluímos que $\sqrt[n]{a+b} > \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

iii) Deixaremos como exercício.

Proposição 1.4.16. Valem as seguintes afirmações:

i) Se m e n são inteiros positivos, então $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, para todo número real a não negativo.

- i) Se m e n são inteiros ímpares positivos, então $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, para todo número real a .
- ii) Se m e n são inteiros positivos, então $\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$, para todo número real a não negativo.
- iii) Se m e n são inteiros ímpares positivos, então $\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$, para todo número real a .

Demonstração.

i) e ii). Se $c = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, então $c^n = \sqrt[m]{a}$ o que implica em $(c^n)^m = a$. Como $(c^n)^m = (c^m)^n = c^{nm} = a$, então $c = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

iii) e iv). Se $c = \sqrt[n]{a}$, então $c^n = a$. Como $c^{nm} = (c^n)^m = a^m$, então $c = \sqrt[nm]{a^m}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Resolva a equação $(x^4 - 18)^3 = -8$.

Temos $(x^4 - 18)^3 = -8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x^4 - 18)^3} = \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow x^4 - 18 = -2 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow |x| = 2$
 $\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Concluimos que o conjunto solução da equação é o conjunto $\{-2, 2\}$.

2) Resolva a equação $(x^3 + 7)^4 = 1$.

Temos $\Leftrightarrow \sqrt[4]{(x^3 + 7)^4} = \sqrt[4]{1} \Leftrightarrow |x^3 + 7| = 1 \Leftrightarrow x^3 + 7 = 1$ ou $x^3 + 7 = -1 \Leftrightarrow x^3 = -6$ ou $x^3 = -8 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-6}$ ou $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-6}$ ou $x = -2$.

Concluimos que o conjunto solução da equação é o conjunto $\{\sqrt[3]{-6}, -2\}$

3) Resolva a equação $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x} - 78} = 27$.

Observemos que se x é uma solução da equação, então devemos ter $x \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[4]{x} - 78} = 27 &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{x} - 78} \right)^3 = 27^3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} - 78 = 27^3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = 78 + 27^3 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x} \right)^4 = \left(78 + 27^3 \right)^4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \left(78 + 27^3 \right)^4. \end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução é o conjunto $\left\{ \left(78 + 27^3 \right)^4 \right\}$

4) Resolva a equação $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x} + 121} = 2$.

Observemos que se x é uma solução da equação, então devemos ter $\sqrt[3]{x} + 121 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \geq -121 \Leftrightarrow x \geq (-121)^3$. Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\sqrt[3]{x} + 121} = 2 &\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{x} + 121} \right)^4 = 2^4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} + 121 = 2^4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = -121 + 2^4 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x} \right)^3 = \left(-121 + 2^4 \right)^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \left(-121 + 2^4 \right)^3. \end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução é o conjunto $\left\{ \left(-121 + 2^4 \right)^3 \right\}$

5) Resolva a inequação $(x^4 - 18)^3 < -8$.

$$\begin{aligned} \text{Temos } (x^4 - 18)^3 < -8 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x^4 - 18)^3} < \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow x^4 - 18 < -2 \Leftrightarrow x^4 < 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4} < \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow |x| < 2 \\ &\Leftrightarrow -2 < x < 2, \end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução é o intervalo aberto $] -2, 2[$.

6) Resolva a inequação $(x^3 + 7)^4 \geq 1$.

$$\text{Temos } (x^3 + 7)^4 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt[4]{(x^3 + 7)^4} \geq \sqrt[4]{1} \Leftrightarrow |x^3 + 7| \geq 1 \Leftrightarrow x^3 + 7 \geq 1 \text{ ou } x^3 + 7 \leq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 \geq -6 \text{ ou } x^3 \leq -8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} \geq \sqrt[3]{-6} \text{ ou } \sqrt[3]{x^3} \leq \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow x \geq -\sqrt[3]{6} \text{ ou } x \leq -2,$$

Concluimos que o conjunto solução é a reunião dos intervalos $] -\infty, -2] \cup [-\sqrt[3]{6}, +\infty[$.

7) Resolva a inequação $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x} - 78} > 27$.

Observemos que se x é uma solução da equação, então devemos ter $x \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[4]{x} - 78} > 27 &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{x} - 78} \right)^3 > 27^3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} - 78 > 27^3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} > 78 + 27^3 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x} \right)^4 > (78 + 27^3)^4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x > (78 + 27^3)^4. \end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução da inequação é o intervalo aberto $] (78 + 27^3)^4, +\infty[$.

8) Resolva a inequação $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x} + 121} \leq 2$.

Observemos que se x é uma solução da equação, então devemos ter $\sqrt[3]{x} + 121 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \geq -121 \Leftrightarrow x \geq (-121)^3$. Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\sqrt[3]{x} + 121} \leq 2 &\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{x} + 121} \right)^4 \leq 2^4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} + 121 \leq 2^4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \leq -121 + 2^4 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x} \right)^3 \leq (-121 + 2^4)^3 \Leftrightarrow \\ &x \leq (-121 + 2^4)^3. \end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução é o intervalo fechado $[(-121)^3, (-121 + 2^4)^3]$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 1.4.17

1) Resolva as seguintes equações.

i) $(x^4 - 78)^3 = 27;$

ii) $(x^3 + 1)^4 = 16;$

iii) $(x^{40} - 3)^{36} = 7;$

iv) $(x^{41} - 3)^{39} = 7;$

v) $(x^{62} + 1)^{98} = 2;$

vii) $(x^{75} + 1)^{81} = 2.$

viii) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x} - 78} = 27;$

ix) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x} + 1} = 16$

x) $\sqrt[36]{\sqrt[40]{x} - 3} = 7;$

xi) $\sqrt[39]{\sqrt[41]{x} - 3} = 0,7;$

xii) $\sqrt[62]{\sqrt[98]{x} + 1} = 0,2;$

xiii) $\sqrt[75]{\sqrt[81]{x} + 1} = 0,5.$

2) Resolva as seguintes inequações.

i) $(x^4 - 78)^3 < 27;$

ii) $(x^3 + 1)^4 \geq 16;$

iii) $(x^{40} - 3)^{36} > 7;$

iv) $(x^{41} - 3)^{39} \leq 7;$

v) $(x^{62} + 1)^{98} < 2;$

vii) $(x^{75} + 1)^{81} \geq 2.$

viii) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x} - 78} > 27;$

ix) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x} + 1} \leq 16$

x) $\sqrt[36]{\sqrt[40]{x} - 3} < 7;$

xi) $\sqrt[39]{\sqrt[41]{x} - 3} \geq 0,7;$

xii) $\sqrt[62]{\sqrt[98]{x} + 1} > 0,2;$

xiii) $\sqrt[75]{\sqrt[81]{x} + 1} \leq 0,5.$

CASO GERAL

Definição 1.4.17. Seja a um número real, $a > 0$ e $a \neq 1$, e r um número racional tal que $r = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q > 0$. Definimos a **potência de base a e expoente r** , como sendo o número real, denotado pelo símbolo a^r , dado por:

$$a^r = \sqrt[q]{a^p}.$$

Proposição 1.4.18. Sejam a e b números reais, $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$, e r um número racional positivo. Então, $a < b$ se, e somente se, $a^r < b^r$.

Demonstração. Deixaremos como exercício.

Proposição 1.4.19. Quaisquer que sejam os números reais a e b (> 0 e $\neq 1$) e racionais r e s , temos:

$$\text{i)} \quad a^{r+s} = a^r a^s;$$

$$\text{ii)} \quad (a^r)^s = a^{rs};$$

$$\text{iii)} \quad (ab)^r = a^r b^r.$$

Demonstração.

Sejam números racionais $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{u}{v}$, com p e u inteiros e q e v são inteiros positivos. Então:

$$\text{i)} \quad a^{r+s} = a^{\frac{p}{q} + \frac{u}{v}} = a^{\frac{pv+qu}{qv}} = \sqrt[qv]{a^{pv+qu}} = \sqrt[qv]{a^{pv} a^{qu}} = \sqrt[qv]{a^{pv}} \sqrt[qv]{a^{qu}} = \sqrt[q]{a^{pv}} \sqrt[v]{a^{qu}} = \sqrt[q]{a^p} \sqrt[v]{a^u} = a^r a^s;$$

$$\text{ii)} \quad (a^r)^s = \sqrt[v]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^u} = \sqrt[v]{\sqrt[q]{a^{pu}}} = \sqrt[qv]{a^{pu}} = a^{rs};$$

$$\text{iii)} \quad (ab)^r = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p b^p} = \sqrt[q]{a^p} \sqrt[q]{b^p} = a^r b^r.$$

Corolário 1.4.20. Verifique que se a e b são números reais (> 0 e $\neq 1$) e r e s são números racionais, então

$$\text{i)} \quad (a^{-1})^r = (a^r)^{-1} = a^{-r};$$

$$\text{ii)} \quad (ab^{-1})^r = a^r (b^r)^{-1} = a^r b^{-r}.$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Resolva a equação $(x^4 - 7)^{\frac{3}{5}} = 2$.

$$\text{Temos } (x^4 - 7)^{\frac{3}{5}} = 2 \Leftrightarrow x^4 - 7 = 2^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x^4 = 7 + 2^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{7 + 2^{\frac{5}{3}}} \Leftrightarrow x = -\sqrt[4]{7 + 2^{\frac{5}{3}}} \text{ ou } x = \sqrt[4]{7 + 2^{\frac{5}{3}}}$$

Logo, o conjunto solução é o conjunto $\left\{-\sqrt[4]{7+2^{\frac{5}{3}}}, \sqrt[4]{7+2^{\frac{5}{3}}}\right\}$.

2) Resolva a inequação $\left(x^{\frac{3}{5}} + 2\right)^4 = 81$.

Temos $\left(x^{\frac{3}{5}} + 2\right)^4 = 81 \Leftrightarrow \left|x^{\frac{3}{5}} + 2\right| = 3 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{5}} + 2 = -3$ ou $x^{\frac{3}{5}} + 2 = 3 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{5}} = -5$ ou $x^{\frac{3}{5}} = 1 \Leftrightarrow x = -5^{\frac{5}{3}}$
ou $x = 1$

Logo, o conjunto solução é o conjunto $\left\{-5^{\frac{5}{3}}, 1\right\}$.

3) Resolva a inequação $(x^4 - 7)^{\frac{3}{10}} < 2$.

Observemos que se x é uma solução da inequação, então devemos ter $x^4 - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 \geq 7 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt[4]{7} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt[4]{7}$ ou $x \geq \sqrt[4]{7}$. Assim,

$$(x^4 - 7)^{\frac{3}{10}} < 2 \Leftrightarrow x^4 - 7 < 2^{\frac{10}{3}} \Leftrightarrow x^4 < 7 + 2^{\frac{10}{3}} \Leftrightarrow |x| < \sqrt[4]{7 + 2^{\frac{10}{3}}} \Leftrightarrow -\sqrt[4]{7 + 2^{\frac{10}{3}}} < x < \sqrt[4]{7 + 2^{\frac{10}{3}}}.$$

Logo, o conjunto solução é a reunião dos intervalos $] -\sqrt[4]{7 + 2^{\frac{10}{3}}}, -\sqrt[4]{7}] \cup [\sqrt[4]{7}, \sqrt[4]{7 + 2^{\frac{10}{3}}} [$.

4) Resolva a inequação $\left(x^{\frac{3}{8}} + 2\right)^4 \geq 81$.

Observemos que se x é uma solução da inequação, então devemos ter $x \geq 0$. Assim,

$$\left(x^{\frac{3}{8}} + 2\right)^4 \geq 81 \Leftrightarrow \left|x^{\frac{3}{8}} + 2\right| \geq 3 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{8}} + 2 \leq -3 \text{ ou } x^{\frac{3}{8}} + 2 \geq 3 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{8}} \leq -5 \text{ ou } x^{\frac{3}{8}} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Logo, o conjunto solução é o intervalo $[1, +\infty[$.

5) Resolva a inequação $\left(2 - x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{3}{4}} \geq 81.$

Observemos que se x é uma solução da inequação, então devemos ter

$$x \geq 0 \text{ e } 2 - x^{\frac{5}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ e } x^{\frac{5}{2}} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ e } x \leq 2^{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2^{\frac{2}{5}}.$$

Assim,

$$\left(2 - x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{3}{4}} \geq 81 \Leftrightarrow 2 - x^{\frac{5}{2}} \geq 81^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x^{\frac{5}{2}} \leq 2 - 81^{\frac{4}{3}}.$$

Como $2 - 81^{\frac{4}{3}} < 0$, então o conjunto solução é o conjunto vazio ($= \Phi$).

EXERCÍCIOS 1.4.21

1) Resolva as seguintes equações.

i) $(x^4 - 78)^{\frac{3}{5}} = 27;$

ii) $\left(x^{\frac{3}{5}} + 1\right)^4 = 16;$

iii) $\left(x^{\frac{40}{7}} - 3\right)^{\frac{11}{36}} = 7;$

iv) $\left(x^{\frac{41}{8}} - 3\right)^{\frac{38}{17}} = 7;$

v) $\left(x^{\frac{62}{53}} + 1\right)^{\frac{98}{5}} = 2;$

vii) $\left(x^{\frac{75}{11}} + 1\right)^{\frac{81}{10}} = 2.$

2) Resolva as seguintes inequações.

i) $(x^4 - 78)^{\frac{3}{5}} < 27;$

ii) $\left(x^{\frac{3}{5}} + 1\right)^4 \geq 16;$

iii) $\left(x^{\frac{40}{7}} - 3\right)^{\frac{11}{36}} > 7;$

iv) $\left(x^{\frac{41}{8}} - 3\right)^{\frac{38}{17}} \leq 7;$

v) $\left(x^{\frac{62}{53}} + 1\right)^{\frac{98}{5}} < 2;$

vii) $\left(x^{\frac{75}{11}} + 1\right)^{\frac{81}{10}} \geq 2.$

1.5 REFERÊNCIAS ELETRÔNICAS

Para referências sobre números reais, sugerimos que o leitor consulte as páginas referenciadas a seguir.

1. Geral. <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/>

1.1. ENSINO FUNDAMENTAL

Frações: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/fracoes/fracoes.htm>

Frações Decimais: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/fracoes/fracdec.htm>

Números Racionais: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/frações/racionais.htm>

Equações do 1º Grau: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/eq1g/eq1g.htm>

1.2. ENSINO MÉDIO

Desigualdades: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/desig/desig.htm>

1.3. ENSINO SUPERIOR

Números Reais: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/calculo/nreais/nreais.htm>

2. GERAL. <http://www.fund198.ufba.br/>

2.1. CONJUNTO NUMÉRICO E FUNÇÕES

Conjuntos Numéricos: http://www.fund198.ufba.br/apos_cnf/conjunu.pdf

Módulo de um Número Real: http://www.fund198.ufba.br/apos_cnf/modulo.pdf

1.6 REFERÊNCIAS

1. Hazzan, S.; Iezzi, G. - Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções - vol. 1, Atual Editora.
2. Iezzi, G.; Dolce, O.; Murakami, C. - Fundamentos de Matemática Elementar: Logaritmos - vol. 2, Atual Editora.
3. Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria - vol. 3, Atual Editora.

4. Hazzan, S.; Iezzi, G. - Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, Polinômios - vol. 6, Atual Editora.
5. Iezzi, G., Murakami C.; Machado, N. J. - Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas e Noções de Integral – vol. 8, Atual editora.
8. Caraça, B. J., Conceitos Fundamentais da Matemática, Livraria Sá da Costa Ed., Lisboa, 1984.
9. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM.
10. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Publicação quadrimestral da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro.

1.7 SITES ELETRÔNICOS COMPLEMENTARES

1. <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/livros/livros.htm>
2. http://www.fund198.ufba.br/apos_cnf/bibli.pdf
3. <http://www.fund198.ufba.br/expo/bibli.pdf>



Disciplina

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA

Módulo 2

FUNÇÕES E GRÁFICOS

João Carlos da Motrta Ferreira

Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

Capítulo 2

FUNÇÕES E GRÁFICOS

Neste módulo estudaremos o conceito de funções e, particularmente, o que chamamos de funções reais, isto é, relações entre quantidades que podem ser descritas por números reais. Seu estudo é muito importante em Matemática e seu conhecimento impulsionou o desenvolvimento tecnológico em quase todas as áreas. Em muitas situações práticas é comum existir *relações* envolvendo duas variáveis numéricas nas quais o valor de uma delas é dependente do valor da outra. Relações onde a cada valor de uma das variáveis está associado um e somente um valor da outra variável são de grande interesse e denominadas de funções. A noção de função permite-nos descrever e analisar relações de dependência entre quantidades. É importante também darmos ênfase ao tratamento gráfico das funções. O gráfico de muitas funções reais específicas recebem nomes especiais, por exemplo: o gráfico de uma função afim, ou polinômio do primeiro grau, é chamado de reta; o gráfico de um polinômio do segundo grau, de parábola. Estas e outras funções e seus gráficos serão estudados neste módulo que tendo os seguintes objetivos: identificar uma função de uma variável como um modelo matemático; analisar gráficos de funções reconhecendo e atribuindo significado a domínio, contradomínio, estudo da variação de sinal, intervalos de monotonia, continuidade, paridade e pontos notáveis (zero, intersecção com o eixo do x e do y , entre outros); esboçar o gráfico de uma função pertencente à família de uma das funções de referência estudadas.

2.1 FUNÇÕES E GRÁFICOS



Pesquise nos livros didáticos ou na *Internet* situações cotidianas envolvendo o conceito de função, resolva-as e postem-as no MATERIAL DO ALUNO.

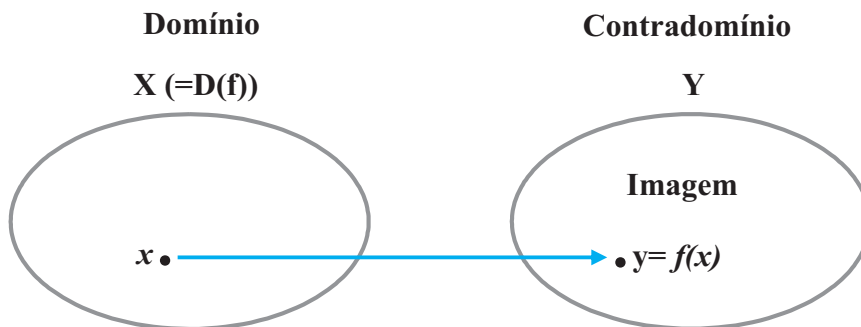
Essas várias situações práticas podem ser modeladas matematicamente como descrito a seguir.

Definição 2.1.1. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios. Uma **função de X em Y** , ou simplesmente uma **função**, é uma regra, lei ou convenção que associa a *cada* elemento x do conjunto X um *único* elemento y do conjunto Y . O conjunto X é chamado de **domínio da função** e o conjunto Y de **contradomínio da função**. Usualmente denotamos a regra pelo símbolo $x \mapsto y$ e indicamos a função por uma letra latina minúscula. Assim, denotamos uma função pelo símbolo:

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y. \end{aligned}$$

Neste caso, indica-se o domínio de f pelo símbolo $D_f (= X)$ e o único elemento y , de Y , associado ao elemento x , de X , pelo símbolo $f(x)$ (lê-se “f de x”), chamado de **elemento imagem de f em x** ou simplesmente **a imagem de f em x** . Dizemos que x é a **variável independente de f** e que y é a **variável dependente de f** .

A interpretação de uma função, em diagramas de *Venn*, pode ser vista como mostra a figura a seguir.

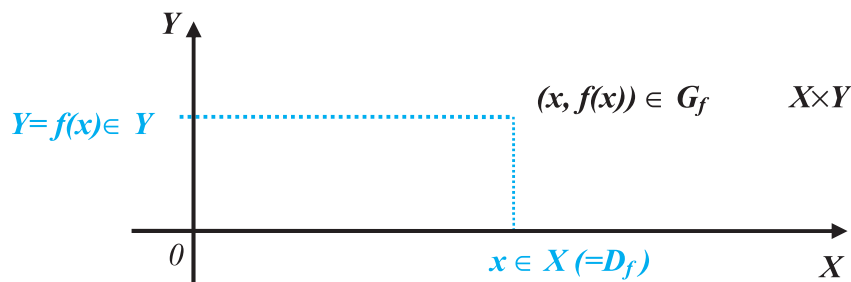


Uma **outra notação** para uma função f é dada por $f: D_f \rightarrow Y, x \mapsto y = f(x)$.

Definição 2.1.2. Seja uma função $f: D_f \rightarrow Y, x \mapsto y = f(x)$. Definimos o **gráfico da função f** como o subconjunto do conjunto produto cartesiano $X \times Y$, dado por

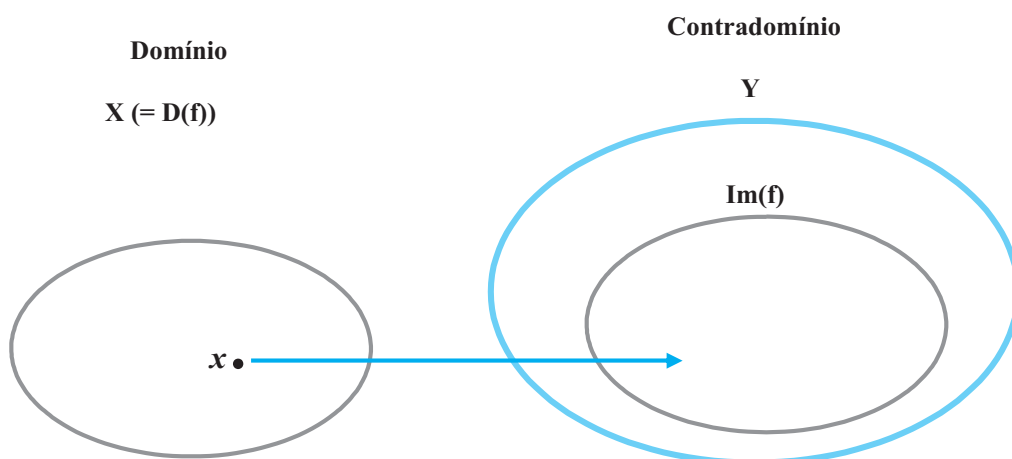
$$G_f = \{(x, y) \mid y = f(x), \text{ para todo } x \in D_f\}$$

A interpretação do gráfico de f , em diagramas de *Venn*, pode ser vista como mostra a figura a seguir.



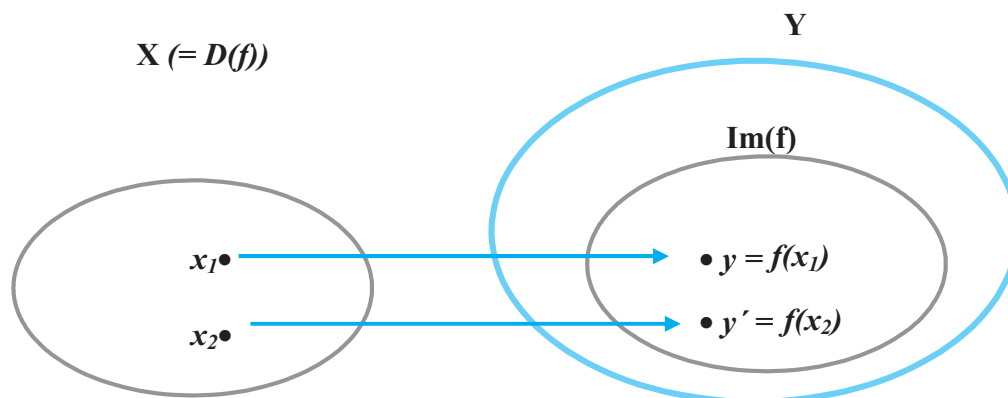
Definição 2.1.3. Seja uma função $f: D_f \rightarrow Y, x \mapsto y = f(x)$. Definimos o **conjunto imagem de f** ou simplesmente a **imagem de f** como o subconjunto, do contradomínio Y , dado por $Im(f) = \{y \in Y \mid y = f(x), \text{ para algum } x \in D_f\}$. Assim, $y \in Im(f)$ se, e somente se, existe um $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$.

A interpretação do conjunto imagem de f , em diagramas de *Venn*, pode ser vista como mostra a figura a seguir.



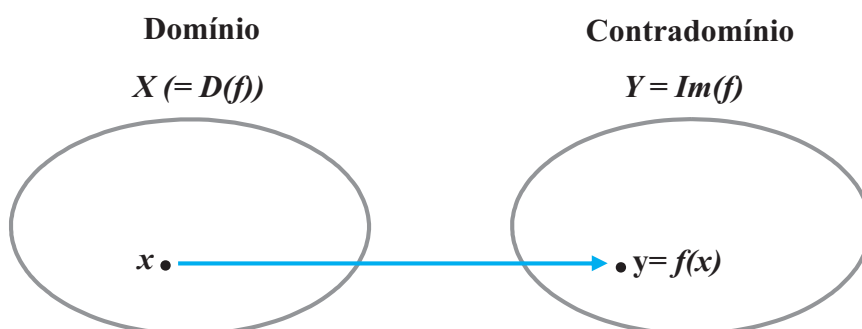
Definição 2.1.4. Seja uma função $f: D_f \rightarrow Y, x \mapsto y = f(x)$. Dizemos que a função f é uma **função injetora em um subconjunto I de D_f** , ou simplesmente que **f é uma função injetora em I** , se quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in I$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou equivalentemente, se quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in I$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. Quando $I = D_f$, diremos que **f é injetora**.

A interpretação, em diagramas de *Venn*, de uma função injetora, pode ser vista como mostra a figura a seguir.



Definição 2.1.5. Dizemos que a função f é uma **função sobrejetora** se o conjunto imagem de f coincide com o contradomínio de f , isto é, se $Im(f) = Y$, ou ainda, se para todo $y \in Y$, existe um elemento $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$.

A interpretação, em diagramas de *Venn*, de uma função sobrejetora, pode ser vista como mostra a figura a seguir.



Definição 2.1.6. Dizemos que a função f é uma **função bijetora** se ela é uma função injetora e sobrejetora.

Proposição 2.1.7. Seja uma função $f: X \rightarrow Y$, $x \mapsto y = f(x)$. Se f é bijetora, então a lei de correspondência dada por: $g: Y \rightarrow X$, $y \mapsto x = g(y)$, em que $x = g(y)$ se, e somente se, $y = f(x)$, é uma função de Y em X , de variável independente y e variável dependente x .

Neste caso, chamaremos a função g de **função inversa de f** e a denotaremos pelo símbolo f^{-1} . Assim, escrevemos a função inversa de f , como sendo: $f^{-1}: Y \rightarrow X$, $y \mapsto x = f^{-1}(y)$, no qual $x = f^{-1}(y)$ se, e somente se, $y = f(x)$.

Demonstração. Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

Nota 2.1.8. Seja uma função bijetora $f: X \rightarrow Y$, $x \mapsto y = f(x)$. Usualmente, escrevemos a **função inversa** f^{-1} de f , tomando a letra x como sua variável independente e y como sua variável dependente. Assim, escreveremos a função inversa de f como sendo $f^{-1}: Y \rightarrow X$, $x \mapsto y = f^{-1}(x)$, no qual $y = f^{-1}(x)$ se, e somente se, $x = f(y)$.



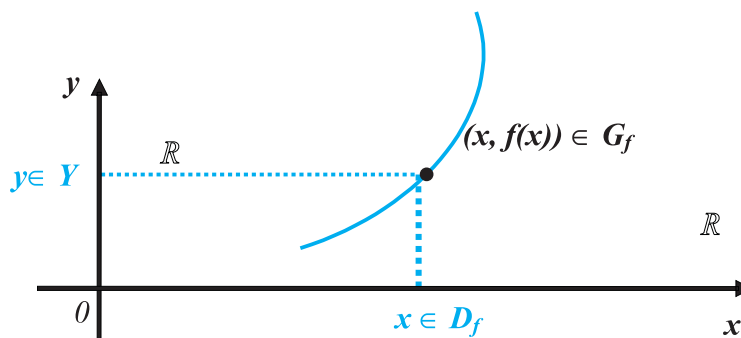
Analise nos livros didáticos ou na *Internet* como outros autores definem o conceito de função injetora, sobrejetora e bijetora. Busque exercícios de aplicação e resolva-os. Poste-as no MATERIAL DO ALUNO.

2.2 FUNÇÕES DE VARIÁVEL REAL A VALORES REAIS

Definição 2.2.1. Uma **função de variável real a valores reais** é uma função f onde os conjuntos $X (= D_f)$ e Y são subconjuntos do conjunto dos números reais. Neste caso, para todo número real $x \in D_f$, o elemento imagem $f(x)$ é chamado de **valor imagem que a função assume em x** ou simplesmente de **valor imagem de f em x** .

Observação 2.2.2. Salvo se houver menção explícita, tomaremos $Y = \mathbb{R}$. Assim, usualmente denotaremos uma função f por $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$.

A interpretação do gráfico de uma função de variável real a valores reais pode ser vista como mostra a figura a seguir.



Definição 2.2.3. Seja uma função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$, e $I \subseteq D_f$ um intervalo. Dizemos que a função f é uma **função crescente em I** se quaisquer que sejam $x, x_1 \in I$, tais que $x < x_1$, então $f(x) < f(x_1)$.

Dizemos que a função f é uma **função decrescente em I** se quaisquer que sejam $x, x_1 \in I$, tais que $x < x_1$, então $f(x) > f(x_1)$. Quando $I = D_f$, diremos que f é **crescente ou decrescente**, respectivamente.

Dizemos que a função f é uma **função não-crescente em I** se quaisquer que sejam $x, x_1 \in I$, tais que $x < x_1$, então $f(x) \geq f(x_1)$. Dizemos que a função f é uma **função não-decrescente em I** se quaisquer que sejam $x, x_1 \in I$, tais que $x < x_1$, então $f(x) \leq f(x_1)$. Quando $I = D_f$, diremos que f é **não-crescente ou não-decrescente**, respectivamente.

Proposição 2.2.4. Seja uma função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$, e $I \subseteq D_f$ um intervalo. Se f é uma função crescente em I ou decrescente em I , então f é uma função injetora em I .

Demonstração. Deixaremos a demonstração como exercício.

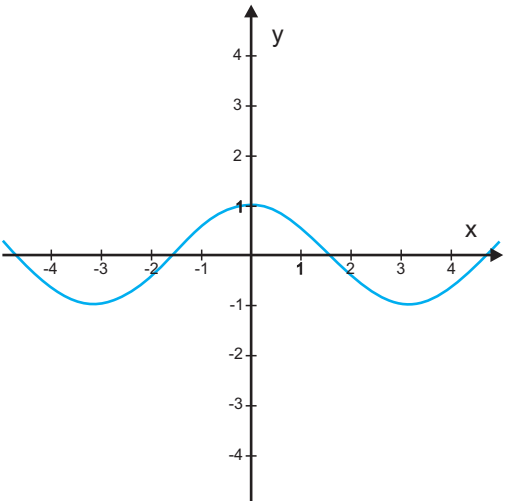
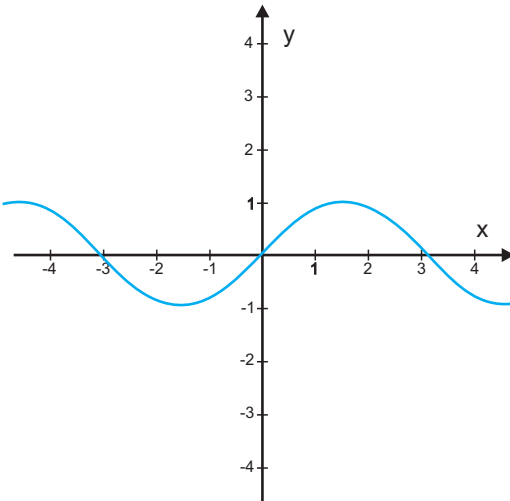
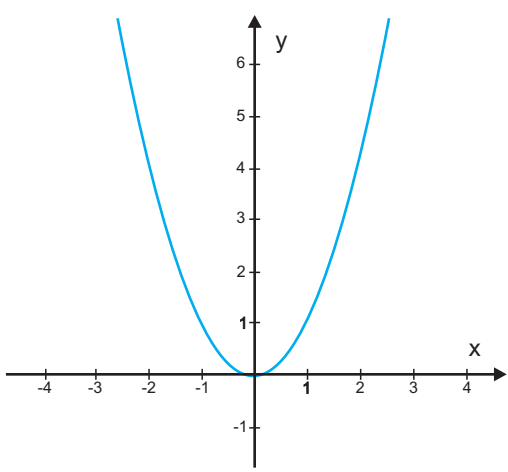
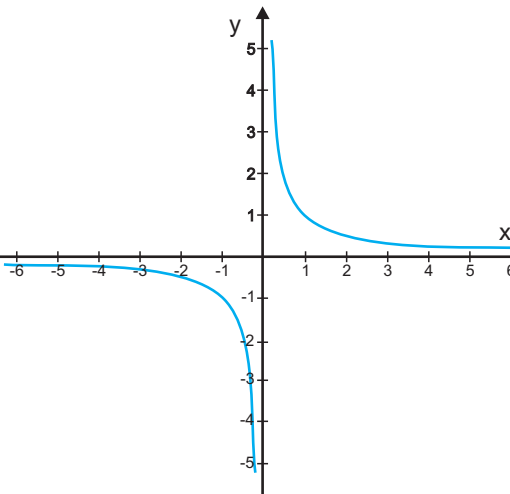
Corolário 2.2.5. Seja uma função sobrejetora $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$. Se f é crescente ou decrescente, então f é uma função bijetora.

Demonstração. Deixaremos a demonstração como exercício.

Definição 2.2.6. Seja uma função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$, tal que para todo $x \in D_f$, temos $-x \in D_f$.

Dizemos que a **função f é uma função par** se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in D_f$. Dizemos que a **função f é uma função ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in D_f$. A partir das definições, podemos ver que as funções pares possuem os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, f(-x))$ do gráfico, simétricos em relação ao eixo oy e as funções ímpares possuem os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, f(-x))$, simétricos em relação à origem o , do plano cartesiano xoy .

As interpretações gráficas de uma função par e uma função ímpar podem ser vistas, nos exemplos a seguir.

FUNÇÃO PAR	FUNÇÃO ÍMPAR
$y = \cos x$ 	$y = \sin x$ 
$y = x^2$ 	$y = 1/x$ 

Nota 2.2.7. Seja a um número real **positivo** e uma função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$. Consideremos a função $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = g(x)$, tal que para todo $x \in D_g$, $x + a \in D_f$ e $g(x) = f(x + a)$, para todo $x \in D_g$. Como os valores imagens de $g(x)$ são os valores imagens de $f(x + a)$, então o gráfico da função g é o gráfico da função f , transladado a unidades para a esquerda do gráfico de f . Analogamente, consideremos a função: $h: D_h \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = h(x)$, tal que para todo $x \in D_h$, $x - a \in D_f$ e $h(x) = f(x - a)$, para todo $x \in D_h$. Como os valores imagens de $h(x)$ são os valores imagens de $f(x - a)$, então o gráfico da função h é o gráfico da função f , transladado a unidades para a direita do gráfico de f .



Analise nos livros didáticos ou na *Internet* como outros autores definem o conceito de função crescente e decrescente. Busque exercícios de aplicação, resolva-os e poste-os no MATERIAL DO ALUNO.

Capítulo 3

FUNÇÕES ALGÉBRICAS

Grande parte dos fenômenos naturais pode ser representada pelas chamadas funções elementares. Trata-se de funções definidas por fórmulas que contêm um número finito de operações algébricas ou trigonométricas efetuados com o argumento, com a função e com algumas constantes. Neste capítulo devem ser analisados gráficos de funções racionais e ser relacionados com as expressões analíticas das funções.

3.1 FUNÇÕES POLINOMIAIS

Definição 3.1.1. Uma função f é chamada de **função polinomial** se sua lei de correspondência é dada por um *polinômio do n - ésimo grau*,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

no qual n é um inteiro positivo e $a_0, a_1, \dots, a_n$, são números reais quaisquer e $a_n \neq 0$.

Naturalmente, temos que $D_f = \mathbb{R}$.

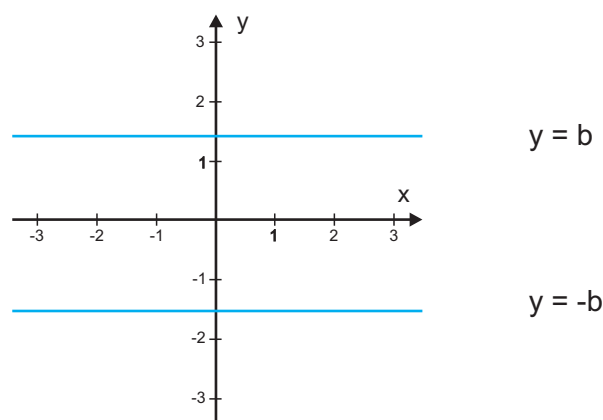
Em geral, visualizações gráficas de funções polinomiais necessitam de análises detalhadas. Assim, limitaremos o nosso estudo a alguns casos particulares.

FUNÇÃO AFIM

Definição 3.1.2. Uma função polinomial f é chamada de **função afim** se sua lei de correspondência é dada por $f(x) = a x + b$, na qual a e b são números reais quaisquer.

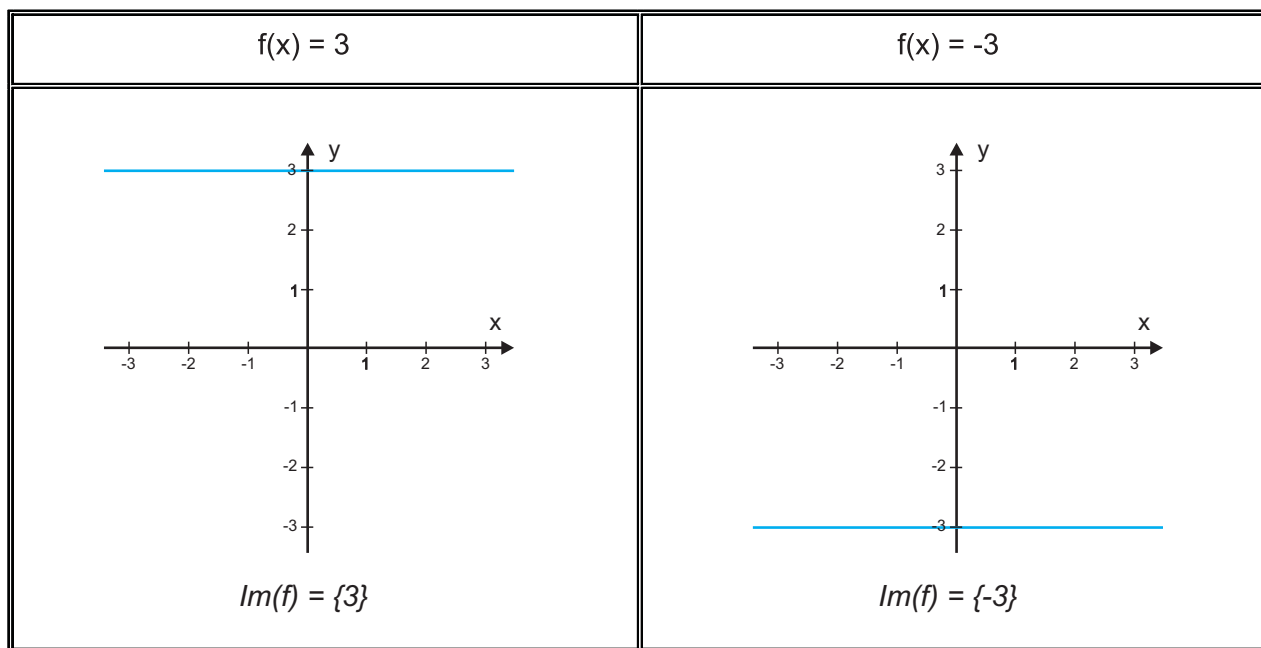
Para visualizarmos o gráfico de uma função afim, analisaremos os casos discutidos a seguir:

- i) 1º caso.** A função afim se expressa na forma $f(x) = b$, denominada de **função constante**. Neste caso, a partir do cálculo de alguns pontos do gráfico de f , podemos concluir que são como mostram as figuras que seguem:

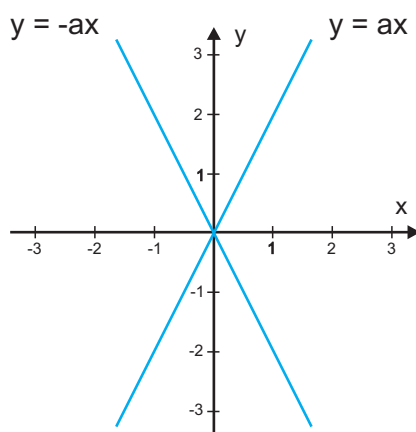


Em todo os casos, os gráficos mostram que seus conjuntos imagens são $Im(f) = \{b\}$.

Exemplos da função constante:

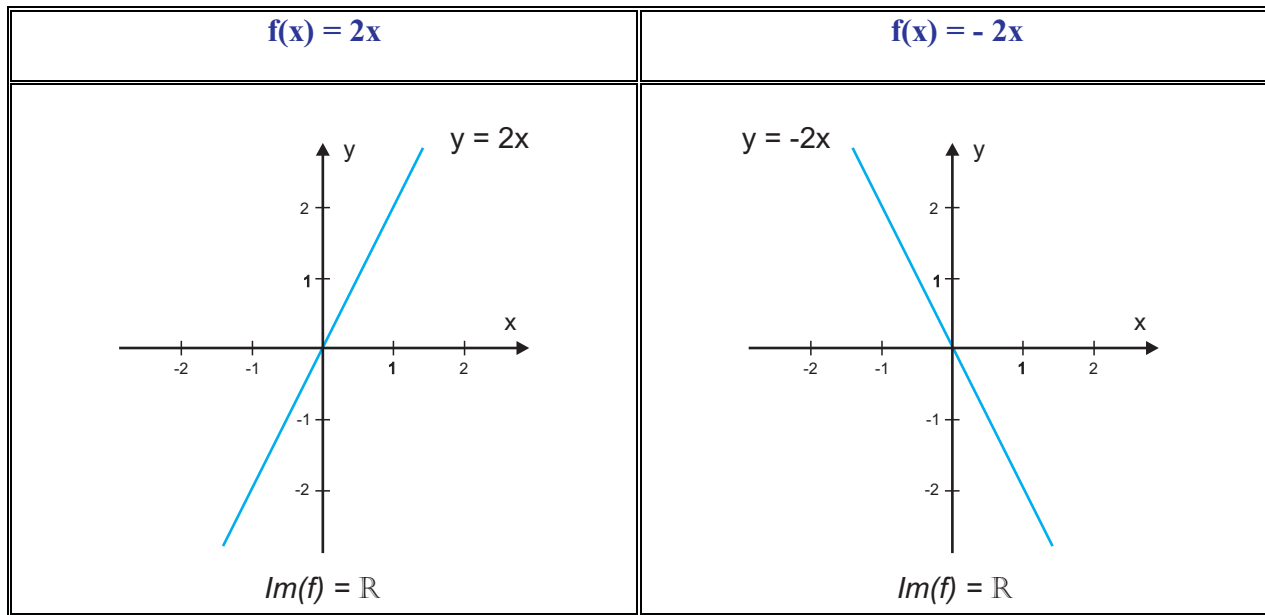


ii) 2º caso. A função afim se expressa na forma $f(x) = ax$, denominada de **função linear**. Neste caso, a partir do cálculo de alguns pontos do gráfico de f , podemos concluir que são como mostram as figuras que seguem:

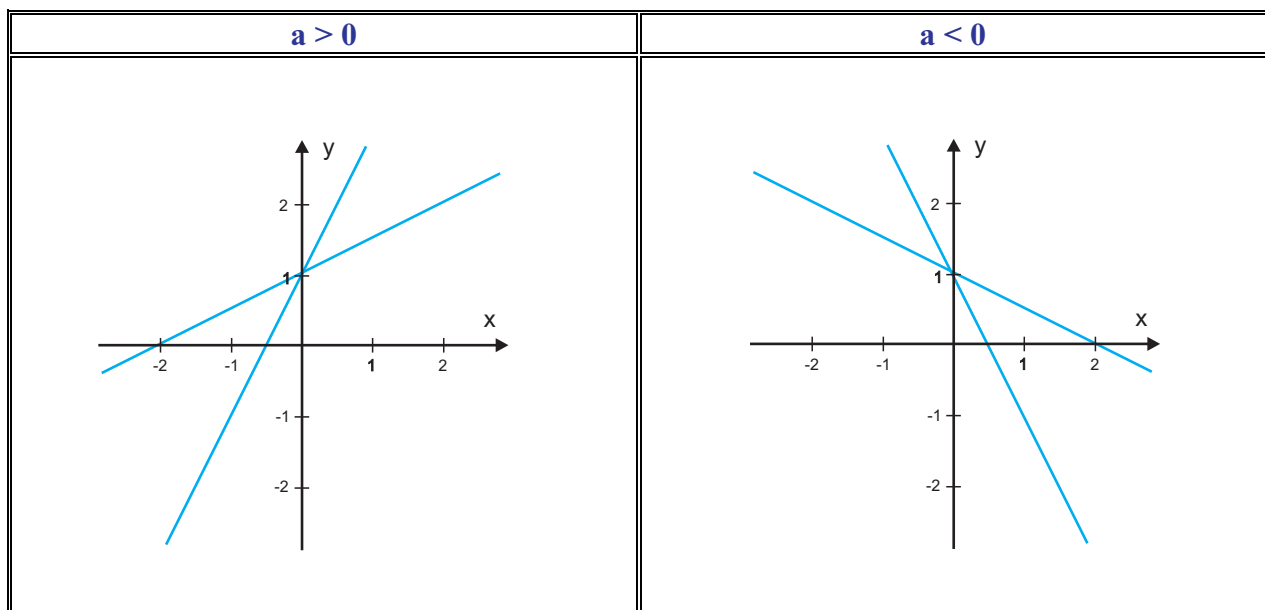


Em todos os casos, os gráficos mostram que seus conjuntos imagem são $Im(f) = \mathbb{R}$.

Exemplos da função linear:

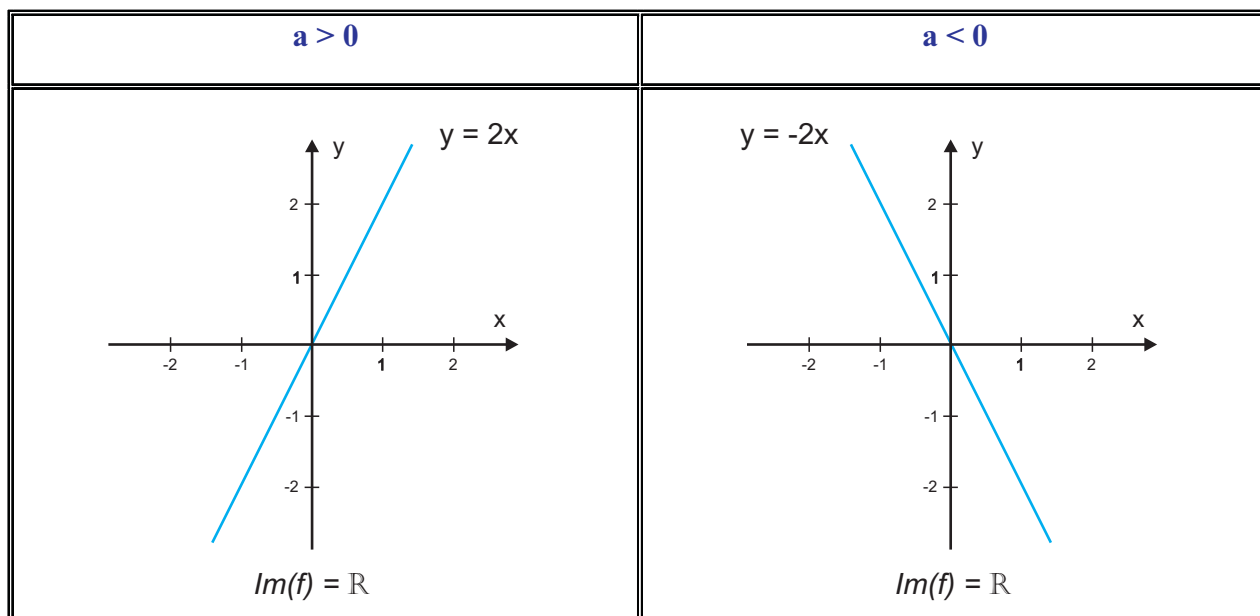


iii) 3º caso. A função afim se expressa na **forma geral** $f(x) = ax + b$. Neste caso, o gráfico da função afim f será um gráfico de uma função afim expressa no 2º caso, transladado verticalmente (no eixo Oy) b unidades para baixo, se $b < 0$, ou transladadas b unidades para cima, se $b > 0$. Podemos então concluir que são como mostram as figuras que seguem:



Em todo os casos, os gráficos mostram que seus conjuntos imagens são $Im(f) = \mathbb{R}$.

Exemplos da função afim expressa na **forma geral** $f(x) = ax + b$.

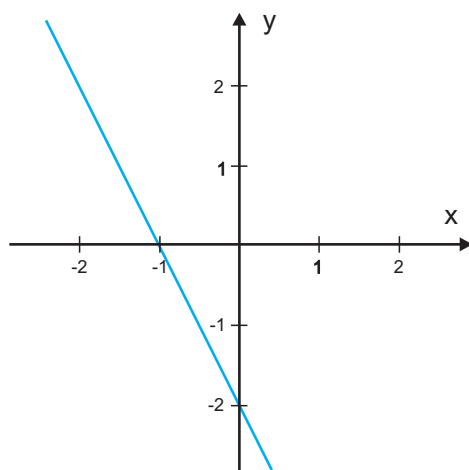


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Nos itens abaixo, determine os domínios máximos de definições de cada lei de correspondência dada, seus gráficos e respectivos conjuntos imagens; verifique se as funções são injetoras, sobrejetoras, bijetoras ou nenhuma delas e quais são seus intervalos de crescimento e decréscimo.

a) $f(x) = -2x - 2$.

Como f é uma função afim, então $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico pode ser visto na figura a seguir.

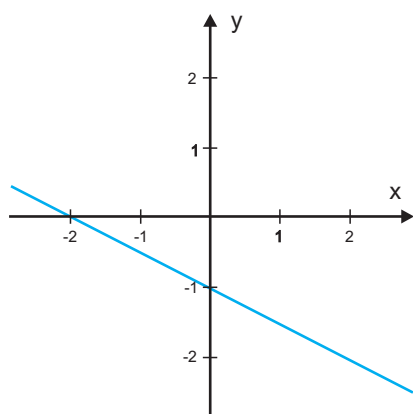


Do gráfico de f temos que $Im(f) = \mathbb{R}$, a função é bijetora e decresce em $\mathbb{R}$.

Observação. Como gráfico da função afim $f(x) = -2x - 2$ é uma reta, para desenharmos seu gráfico apenas dois pontos são suficientes. O ponto onde $f(x)$ corta o eixo x e o ponto em que $f(x)$ corta o eixo y . Isto é, para $x = 0$ temos $y = f(0) = -2 \cdot (0) - 2 = -2$, portanto corta o eixo y no ponto $(0, -2)$. Para $y = 0$, temos $-2x - 2 = 0$, logo $x = -1$, portanto corta o eixo x no ponto $(-1, 0)$.

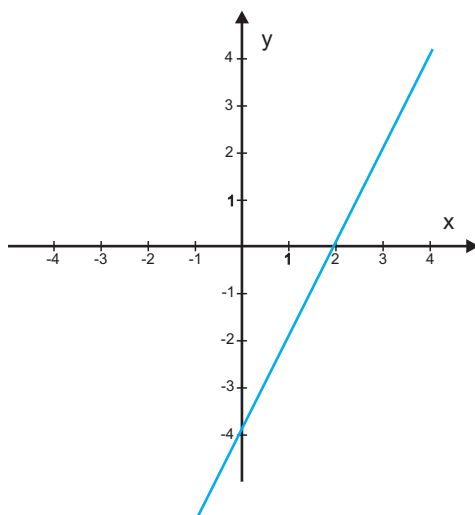
CÁLCULO DA FUNÇÃO INVERSA

Como a função é bijetora, ela admite uma inversa. temos $y = -2x - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y - 1$, logo $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x - 1$, com $D_{f^{-1}} = Im(f) = \mathbb{R}$ e seu gráfico pode ser visto na figura a seguir.



b) $f(x) = 2x - 4$.

Como f é uma função afim, então $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico pode ser visto na figura a seguir.



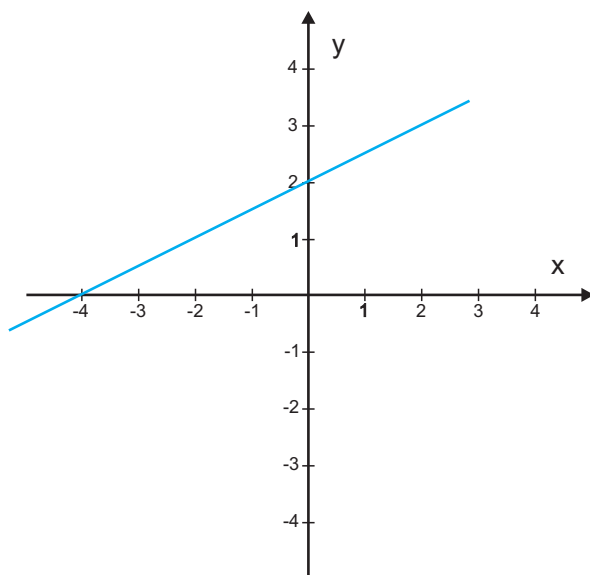
No gráfico de f podemos observar que $Im(f) = \mathbb{R}$, a função é bijetora e f cresce em $\mathbb{R}$.

Exercício. Dê as coordenadas do ponto onde $f(x)$ corta o eixo x e onde $f(x)$ corta o eixo y .

CÁLCULO DA FUNÇÃO INVERSA

Novamente a função é bijetora e podemos obter sua inversa. Temos $y = 2x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + 2$, logo

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$, com $D_{f^{-1}} = Im(f^{-1}) = \mathbb{R}$ e seu gráfico pode ser visto na figura a seguir.

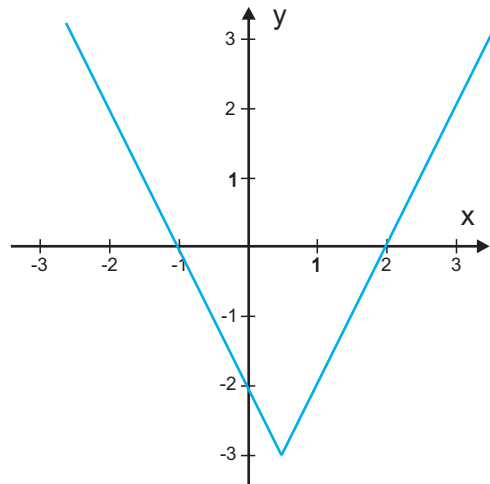


c) $f(x) = |1 - 2x| - 3$

Inicialmente, observamos que

$$f(x) = |1 - 2x| - 3 = \begin{cases} 1 - 2x - 3, & \text{se } 1 - 2x \geq 0 \\ -(1 - 2x) - 3, & \text{se } 1 - 2x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x - 2, & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 4, & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Neste caso, a função f pode ser vista como uma função definida por duas sentenças. A partir dos exemplos a) e b), podemos ver que $D_f = \mathbb{R}$ e seu gráfico pode ser visto na figura abaixo:

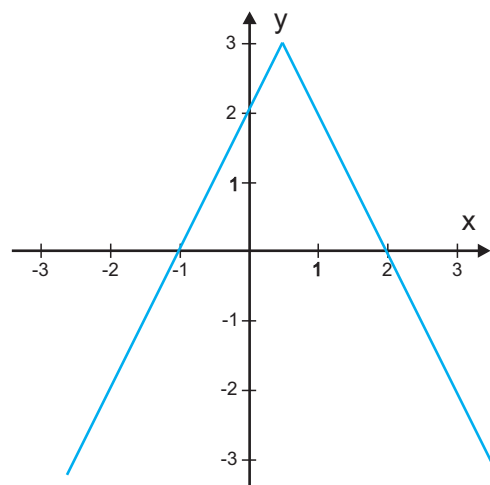


Do gráfico de f temos que $\text{Im}(f) = [-3, +\infty[$, f decresce em $] -\infty, \frac{1}{2}]$ e cresce em $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

Com isto, temos que a função f não é injetora nem sobrejetora.

d) $f(x) = 3 - |1 - 2x|$

Observemos que $f(x) = 3 - |1 - 2x| = -(|1 - 2x| - 3)$. Podemos ver que $D_f = \mathbb{R}$ e seu gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $\text{Im}(f) =] -\infty, 3]$, f cresce em $] -\infty, \frac{1}{2}]$ e decresce em $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

Com isto, temos que a função f não é injetora nem sobrejetora.

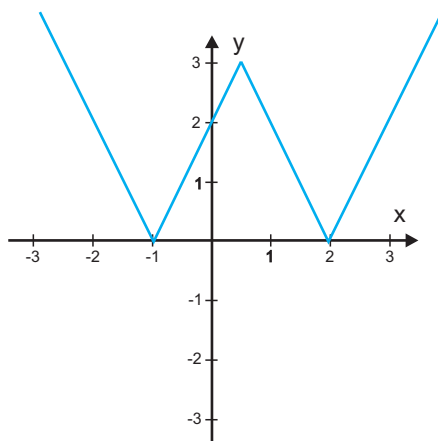
$$e) f(x) = ||1 - 2x| - 3|$$

Inicialmente, observemos que

$$f(x) = ||1 - 2x| - 3| = \begin{cases} |1 - 2x| - 3, & \text{se } |1 - 2x| - 3 \geq 0 \\ -(|1 - 2x| - 3), & \text{se } |1 - 2x| - 3 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} |1 - 2x| - 3, & \text{se } |1 - 2x| \geq 3 \\ 3 - |1 - 2x|, & \text{se } |1 - 2x| < 3 \end{cases} = \begin{cases} |1 - 2x| - 3, & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \\ 3 - |1 - 2x|, & \text{se } -1 < x < 2 \end{cases}$$

Neste caso, a função f também pode ser vista como uma função definida por duas sentenças. A partir dos exemplos a), b), c) e d), podemos ver que $D_f = \mathbb{R}$ e seu gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que: $Im(f) = [0, +\infty[$, f decresce em $] - \infty, -1] \cup [1/2, 2]$ e cresce em $[-1, 1/2] \cup [2, +\infty[$.

Com isto, temos que a função f não é injetora nem sobrejetora.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 3.1.3

1. Para as funções dadas a seguir, determinar:

- Estudar o valor de a , quanto a crescimento e decrescimento (A função é dita crescente à medida que o valor de x aumenta, o valor de y também aumenta e a função dita é decrescente à medida que o valor de x aumenta, o valor de y também diminui).
- Determinar o zero da função (para que valores de x temos $f(x)=0$ ou $y=0$).
- Os pontos de interseção do gráfico com os eixos cartesianos
- Traçar o gráfico da função.
- Fazer o estudo do sinal, isto é, à medida que x varia, a função se anula, ou é positiva ou é negativa (quando determinamos os valores de x para cada uma dessas situações dizemos que estamos fazendo o estudo do sinal da função).

a) $y = -3x + 2$

b) $y = \frac{1}{2}x - 3$

c) $y = -3x$

d) $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x$

2. Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por :

a) $f(x) = |x - 3|$

b) $f(x) = |x + 3|$

c) $f(x) = |x| + 3$

d) $f(x) = |x| - 3$

e) $f(x) = 3 - |x|$

f) $f(x) = |x| + |x + 1|$

3. Nos itens abaixo, determine os domínios máximos de definições de cada lei de correspondência dada; seus gráficos e respectivos conjuntos imagens; se as funções são injetoras, sobrejetoras, bijetoras ou nenhuma delas e seus intervalos de crescimento e decrescimento.

i) $f(x) = 11$;

ii) $f(x) = -3x$;

iii) $f(x) = 17x$;

iv) $f(x) = -25x$;

v) $f(x) = 3x + 8$;

vi) $f(x) = 4x - 9$;

vii) $f(x) = 9 - 7x$;

viii) $f(x) = -5 - 7x$;

ix) $f(x) = |x - 1| + 17$;

x) $f(x) = |4 - 9x| - 5$;

xi) $f(x) = ||x| - 3|$;

$$\text{xii)} f(x) = |5 - 7|x||;$$

$$\text{xiii)} f(x) = ||3x - 1| - 17|;$$

$$\text{xiv)} f(x) = ||4 - 9x| - 5|;$$

$$\text{xv)} f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & \text{se } x > 2 \\ 6 + x, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}; \quad \text{xvi)} f(x) = \begin{cases} ||x| - 1|, & \text{se } x > 0 \\ 1 - 2x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}; \quad \text{xvii)} f(x) = \begin{cases} 3|x| + 2, & \text{se } x > 2 \\ 8 - 9|x|, & \text{se } x \leq 2 \end{cases};$$

$$\text{xviii)} f(x) = \begin{cases} |x - 1|, & \text{se } x > 0 \\ 1 - 2|x|, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

4) Utilizando as funções descritas no exercício 3, determine (se existirem) as funções inversas com seus domínios máximos de definições; seus gráficos e respectivos conjuntos imagens e seus intervalos de crescimento e decrescimento.

3.1.1 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição 3.1.4.. Uma função polinomial f é chamada de **função quadrática** se sua lei de correspondência é dada por um *polinômio quadrático* $f(x) = ax^2 + bx + c$, no qual a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Para visualizarmos o gráfico de f , expressaremos o polinômio quadrático numa forma mais adequada. Para todo número real x ,

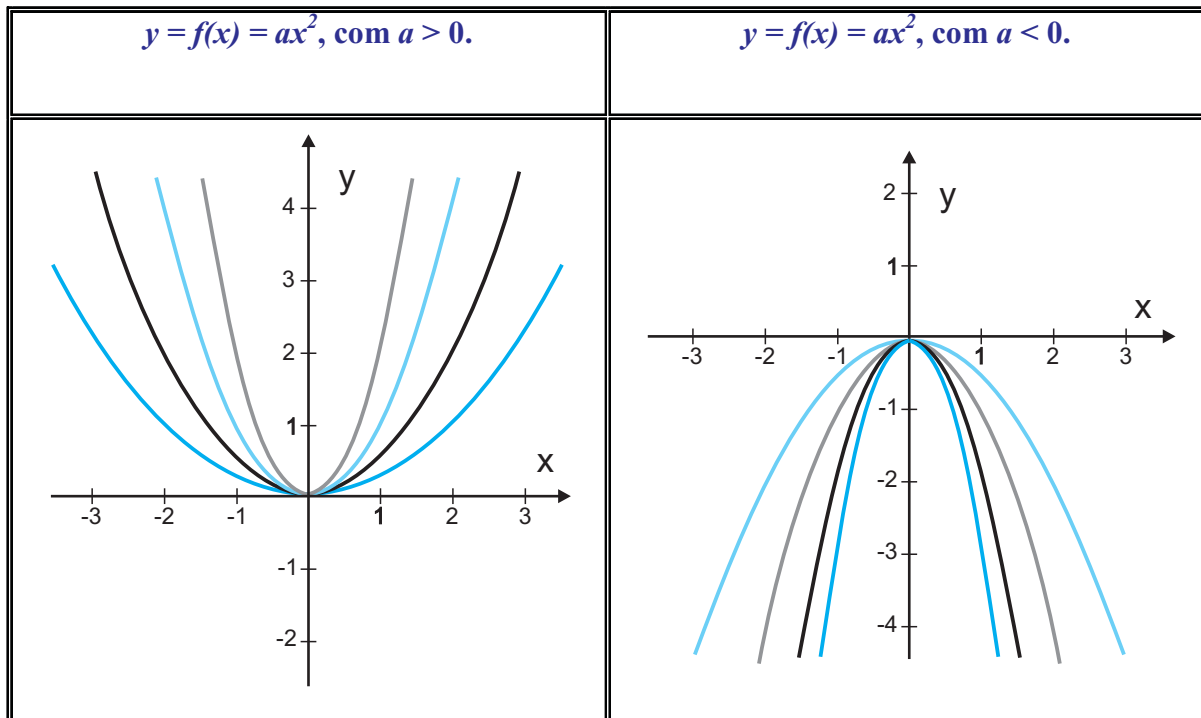
$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \right]$$

$$f(x) = a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right]$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

Analisaremos os casos descritos a seguir.

i) 1º caso. O polinômio quadrático pode ser expresso na forma $f(x) = ax^2$. Neste caso, se $a > 0$ então a função f é uma função par e crescente no intervalo $[0, +\infty[$. Se $a < 0$ então a função f é uma função par e decrescente no intervalo $[0, +\infty[$. A partir do cálculo de alguns pontos do gráfico de f , podemos concluir que são como mostram as figuras que seguem:

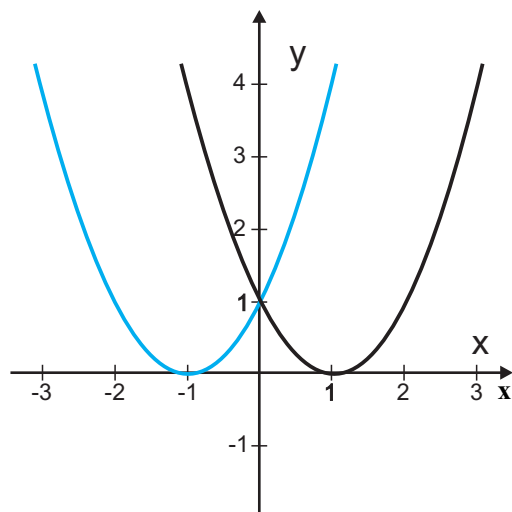


Os gráficos mostram que os conjuntos imagem de f são $Im(f) = [0, +\infty[$, se $a > 0$ ou $Im(f) =]-\infty, 0[$, se $a < 0$. Os gráficos são chamados de *parábola* e o ponto $(0,0)$ é denominado de **vértice da parábola** e denotado pela letra maiúscula V .

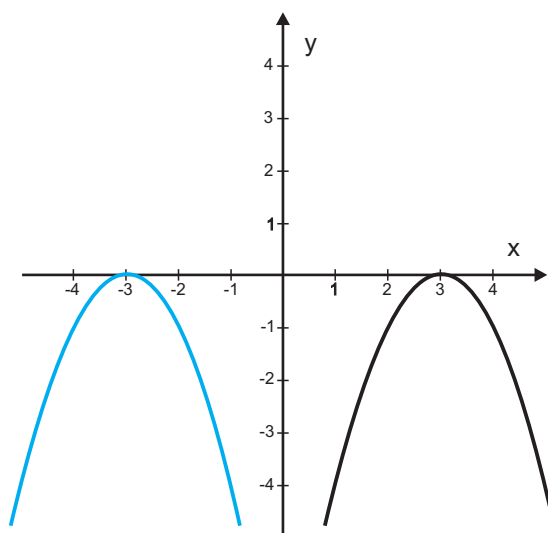
ii) 2º caso. O polinômio quadrático pode ser expresso na forma $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Neste caso, o gráfico de f será o gráfico de uma parábola expressa como no 1º caso, transladado horizontalmente (no eixo ox) $-\frac{b}{2a}$ unidades para a direita, se $\frac{b}{2a} < 0$; ou transladado $\frac{b}{2a}$ unidades para a esquerda, se $\frac{b}{2a} > 0$. Conseqüentemente, seu vértice V é transladado horizontalmente (no eixo ox) $-\frac{b}{2a}$ unidades para a direita, se $\frac{b}{2a} < 0$; ou transladado $\frac{b}{2a}$ unidades para a esquerda, se $\frac{b}{2a} > 0$. Logo, $V = \left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.

$y = f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, com $a > 0$; possui o gráfico com vértice a direita do eixo oy , se $\frac{b}{2a} > 0$, e possui o gráfico com vértice a esquerda do eixo oy , se $\frac{b}{2a} < 0$.

Podemos concluir que os gráficos são como mostram as figuras a seguir.



$y = f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, com $a < 0$, possui o gráfico com vértice à direita do eixo oy , se $\frac{b}{2a} > 0$; e com gráfico com vértice à esquerda do eixo oy , se $\frac{b}{2a} < 0$.



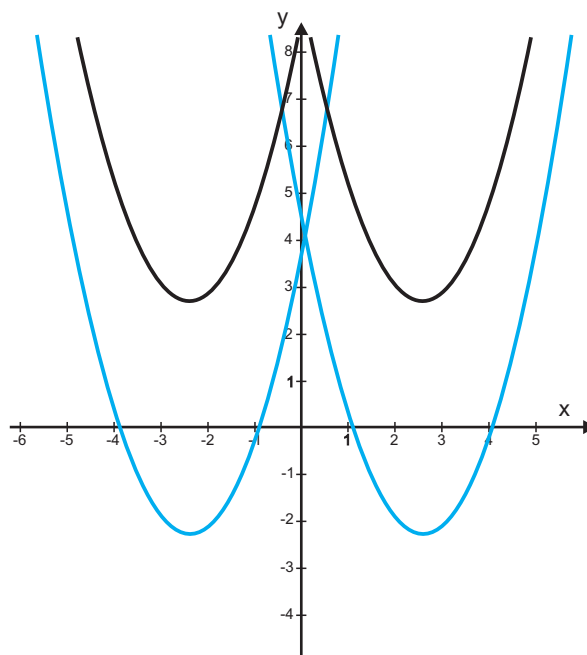
Os gráficos mostram que os conjuntos imagem de f são os mesmo apresentados no 1º caso.

iii) 3º caso. O polinômio quadrático pode ser expresso na forma

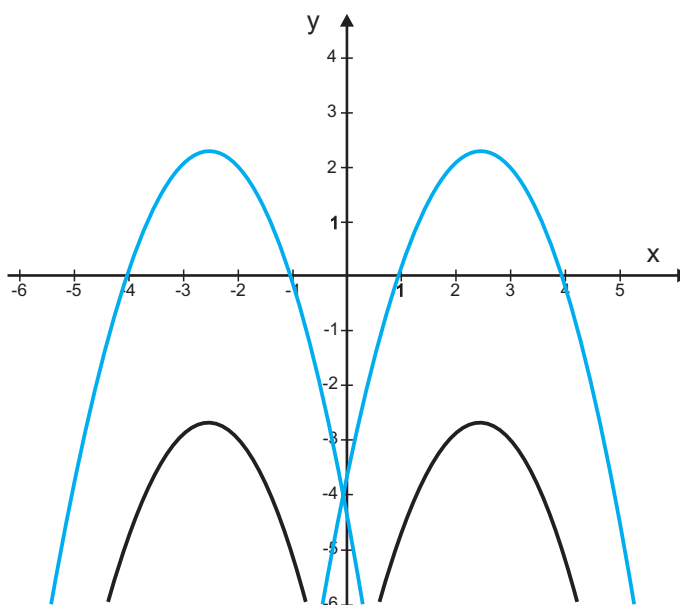
$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Neste caso, o gráfico da função quadrática f será uma parábola expressa como no 2º caso, transladado verticalmente (no eixo oy) $-\frac{\Delta}{4a}$ unidades para baixo, se $\frac{\Delta}{4a} > 0$; ou transladado $-\frac{\Delta}{4a}$ unidades para cima, se $\frac{\Delta}{4a} < 0$. Conseqüentemente, seu vértice V é transladado verticalmente (no eixo oy) $-\frac{\Delta}{4a}$ unidades para baixo, se $\frac{\Delta}{4a} > 0$; ou transladado $-\frac{\Delta}{4a}$ unidades para cima, se $\frac{\Delta}{4a} < 0$. Logo, $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$. Podemos então concluir que os gráficos são como mostram as figuras a seguir.

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$ e $\frac{b}{2a} > 0$, possui o gráfico com vértice à direita do eixo oy e cortando o eixo ox em dois pontos, se $\Delta > 0$; e possui o gráfico com vértice à direita do eixo oy e passando acima do eixo ox , se $\Delta < 0$. Ainda, com $a > 0$ e $\frac{b}{2a} < 0$; possui o gráfico com vértice à esquerda do eixo oy e cortando o eixo ox em dois pontos, se $\Delta > 0$; e possui o gráfico com vértice à esquerda do eixo oy e passando acima do eixo ox , se $\Delta < 0$.



$y = f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$ e $\frac{b}{2a} > 0$, possui o gráfico com vértice à direita do eixo oy e cortando o eixo ox em dois pontos, se $\Delta > 0$; e possui o gráfico com vértice à direita do eixo oy e passando abaixo do eixo ox , se $\Delta < 0$. Ainda, com $a < 0$ e $\frac{b}{2a} < 0$, possui o gráfico com vértice à esquerda do eixo oy e cortando o eixo ox em dois pontos, se $\Delta > 0$; e possui o gráfico com vértice à esquerda do eixo oy e passando abaixo do eixo ox , se $\Delta < 0$.



Os gráficos mostram que os conjuntos imagem de f são:

$$Im(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right[, \text{ se } a > 0 \quad \text{ou} \quad Im(f) =]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}], \text{ se } a < 0.$$

Nota 3.1.5. Podemos também visualizar o gráfico de f , encontrando os pontos da parábola que interceptam os eixos coordenados Ox e Oy e o vértice V . Assim, se

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right],$$

então o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy ocorre em $(0, f(0)) = (0, c)$ e os pontos de interseção com o eixo Ox ocorrem para valores de x que satisfazem a equação $f(x) = 0$, de forma que

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ se } \Delta = b^2 - 4ac \geq 0.
 \end{aligned}$$

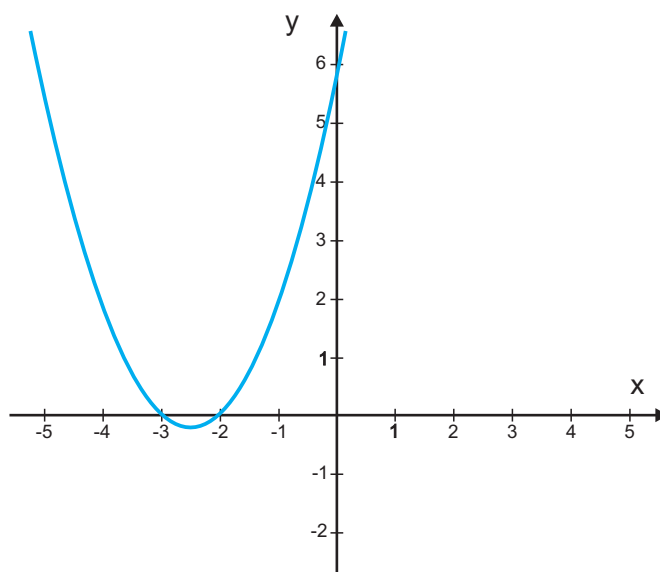
Além disso, o vértice da parábola ocorre para o valor de x onde a imagem de f possui um valor máximo ou um valor mínimo. Logo, devemos ter $x = -\frac{b}{2a}$ o que implica em $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$. Conseqüentemente, temos $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Dadas as funções, determine seus gráficos; seus conjuntos imagens e seus intervalos de crescimento e decrescimento.

a) $f(x) = x^2 + 5x + 6$.

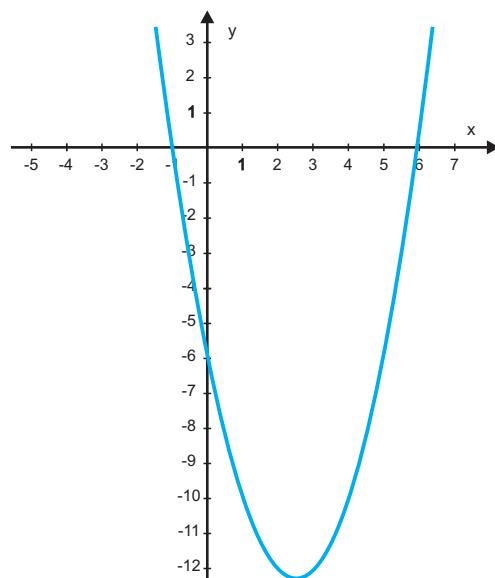
Como f é uma função quadrática, então $D_f = \mathbb{R}$. Seu gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Temos que $Im(f) = [-1/4, +\infty[$, f decresce em $] -\infty, -5/2]$ e cresce em $[-5/2, +\infty[$.

b) $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

Como f é uma função quadrática, então $D_f = \mathbb{R}$. Seu gráfico pode ser visto na figura a seguir.



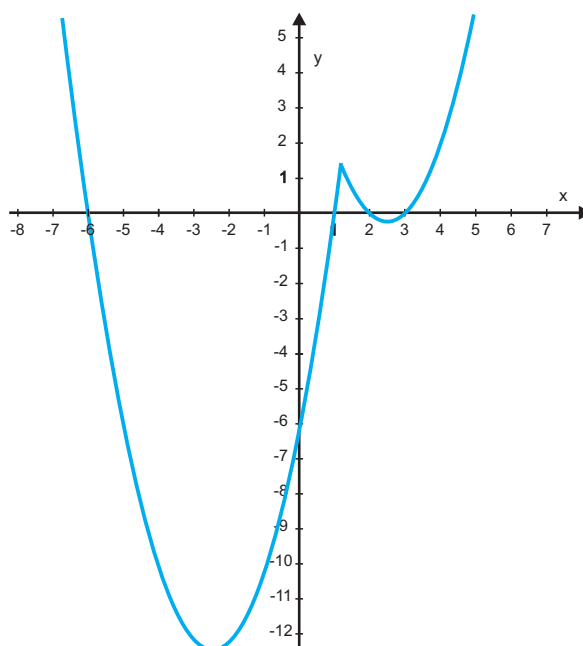
Temos que $Im(f) = [-49/4, +\infty[$, f decresce em $] -\infty, 5/2]$ e cresce em $[5/2, +\infty[$.

c) $f(x) = x^2 - |5x + 6|$

Observemos que

$$f(x) = x^2 - |5x + 6| = \begin{cases} x^2 - 5x - 6, & \text{se } 5x + 6 \geq 0 \\ x^2 + 5x + 6, & \text{se } 5x + 6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 5x - 6, & \text{se } x \geq -6/5 \\ x^2 + 5x + 6, & \text{se } x < -6/5 \end{cases}.$$

Neste caso, a função f pode ser vista como uma função definida por duas sentenças. A partir dos exemplos a) e b), podemos ver que $D_f = \mathbb{R}$ e seu gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Temos que

$Im(f) = [-49/4, +\infty[$ e, f decresce em $] -\infty, -5/2] \cup [-6/5, 5/2]$ e cresce em $[-5/2, -6/5] \cup [5/2, +\infty[$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 3.1.6

1) Para as funções dadas a seguir, determinar:

- Conjunto imagem.
- Estudar o valor de a , quanto à concavidade da parábola (quando $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima e, quando $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo).
- Zero da função (para que valores de x temos $f(x)=0$ ou $y = 0$).
- Determinar o vértice, onde: $v = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$ ou $v = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$
- Determinar ponto de máximo ou ponto de mínimo, conforme o caso.
- Gráfico da função.
- Estudo do sinal.

i) $f(x) = 4x^2$;

ii) $f(x) = -9x^2$;

iii) $f(x) = 6x^2 - 5$;

iv) $f(x) = 7 - 3x^2$;

v) $f(x) = x^2 - 5x + 6$;

vi) $f(x) = x^2 - 3x + 3$;

vii) $f(x) = -2 + 3x - x^2$;

viii) $f(x) = 2 + 2x - x^2$;

ix) $f(x) = x^2 - 2x - 3$;

x) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$;

xi) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

2) Nos itens a seguir, determine, em cada lei de correspondência dada, seu gráfico; seu conjunto imagem e seus intervalos de crescimento e decrescimento.

$$i) f(x) = |x^2 - 5x + 6|; \quad ii) f(x) = x^2 - 3|x| + 1;$$

$$iii) f(x) = |-2 + 3x - x^2|; \quad iv) f(x) = 2|x| - x^2;$$

$$v) f(x) = x^2 - |5x + 6|; \quad vi) f(x) = |x^2 - 3x| + 3;$$

$$vii) f(x) = -2 + |3x - x^2|; \quad viii) f(x) = |2 + 2x| - x^2.$$

3) Utilizando as funções do exercício 1), restrinja os domínios ou os contradomínios, para cada função f dada, de forma a obter funções invertíveis. Determine as inversas, seus domínios de definições, seus contradomínios, seus conjuntos imagens e seus gráficos.

4) Calcular m em $y = x^2 - 8x + (2m + 1)$ a fim de que o valor mínimo assumido por y seja -12 .

5) Uma bala é atirada de um canhão de brinquedo e descreve uma parábola de **equação** $y = -3x^2 + 60x$. Determinar a altura máxima atingida pela bala e o alcance do disparo.

6) Desejo construir uma quadra de futebol de salão. Um dos lados da quadra faz divisa com um muro e os outros serão cercados com tela de arame com comprimento total de 80m. Quais devem ser as dimensões dessa quadra para que sua área seja máxima?

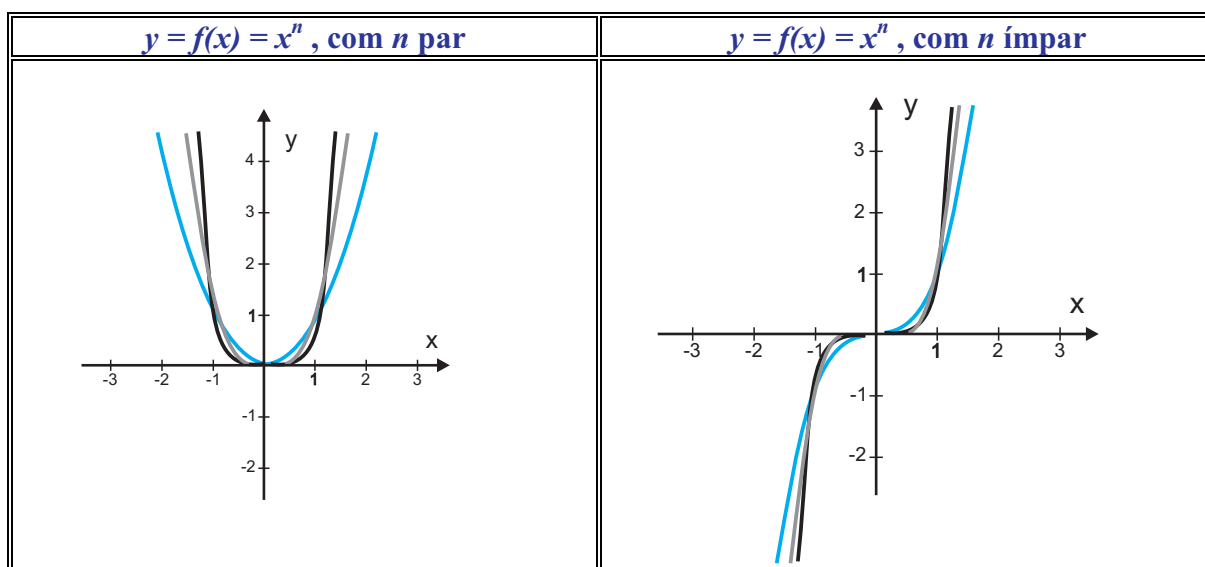
3.1.2 FUNÇÃO POTÊNCIA

Definição 3.1.7. Seja n um inteiro positivo. Uma função polinomial f é chamada de **função potência**, se sua lei de correspondência é dada pela expressão algébrica $f(x) = x^n$.

Para visualizarmos o gráfico de f , observemos o contido nos itens a seguir.

- i)** Se n é um inteiro par, então f é uma função par, em todo o seu domínio de definição e crescente no intervalo $[0, +\infty[$, pelo corolário. Se n é um inteiro ímpar, então f é uma função ímpar em todo o seu domínio de definição e crescente no intervalo $[0, +\infty[$, pelo corolário.
- ii)** Se n é um inteiro par, então $Im(f) = [0, +\infty[$. De fato, para todo número real não negativo y , tomando $x = \sqrt[n]{y}$, temos $y = x^n = f(x)$. Se n é um inteiro ímpar, então $Im(f) = \mathbb{R}$, pois para todo número real y , tomando $x = \sqrt[n]{y}$, temos $y = x^n = f(x)$.

Com isto podemos concluir que os gráficos das funções potências são como mostram as figuras que seguem:

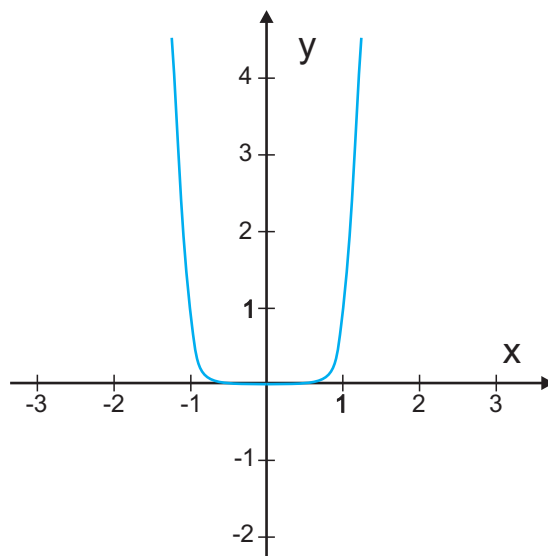


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Nos itens abaixo, determine os domínios máximos de definição, das funções dadas, seus respectivos gráficos e conjuntos imagens.

a) $f(x) = x^8$

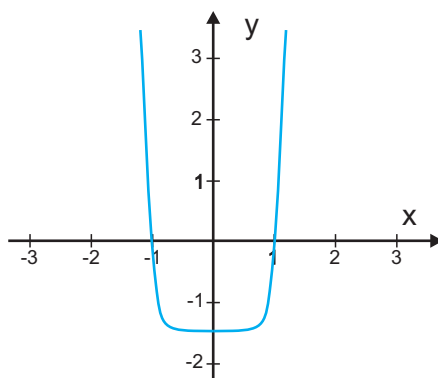
Como f é uma função potência, então $D_f = \mathbb{R}$. Seu gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $Im(f) = [0, +\infty[$, f decresce em $] -\infty, 0]$ e cresce em $[0, +\infty[$.

b) $f(x) = x^8 - 1,5$

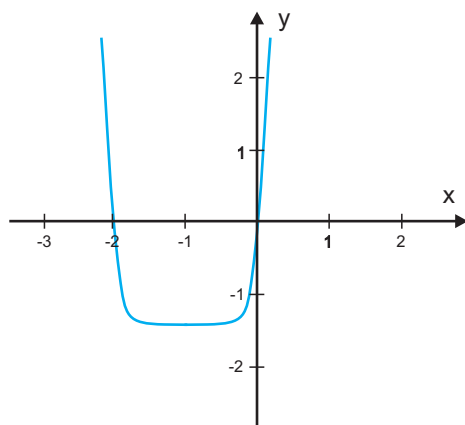
Como f é uma função potência, então $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico, transladado verticalmente (no eixo oy) 1,5 unidades para baixo, pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que: $Im(f) = [-1,5, +\infty[$, f decresce em $] -\infty, 0]$ e cresce em $[0, +\infty[$.

c) $f(x) = (x + 1)^8 - 1,5$.

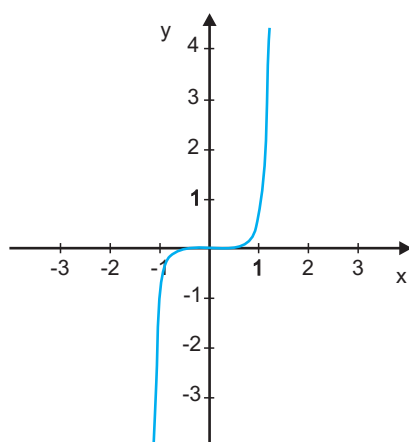
Como f é uma função potência, então $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico, transladado horizontalmente (no eixo ox) 1 unidade para a esquerda e transladado também verticalmente (no eixo oy) 1,5 unidades para baixo, pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que: $Im(f) = [-1,5, +\infty[$, f decresce em $] - \infty, -1]$ e cresce em $[-1, +\infty[$.

d) $f(x) = x^9$.

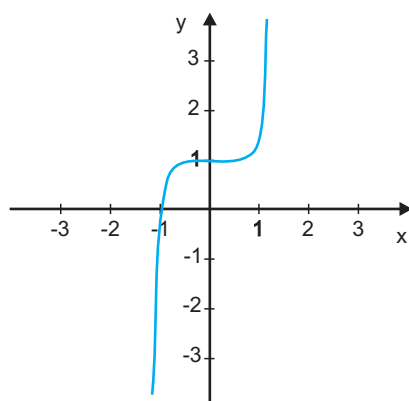
Como f é uma função potência, então $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $Im(f) = \mathbb{R}$, f é bijetora e f cresce em $\mathbb{R}$.

e) $f(x) = x^9 + 1$.

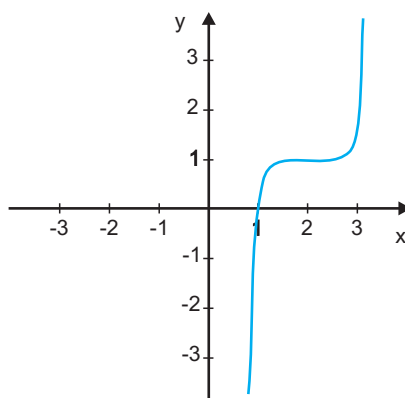
Como f é uma função potência, então $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico, transladado verticalmente (no eixo oy) 1 unidade para cima, pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $Im(f) = \mathbb{R}$, f é bijetora e f cresce em $\mathbb{R}$.

f) $f(x) = (x - 2)^9 + 1$.

Como f é uma função potência, então $D_f = \mathbb{R}$. Seu gráfico, transladado horizontalmente (no eixo ox) 2 unidade para a direita e transladado também verticalmente (no eixo oy) 1 unidades para cima, pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $Im(f) = \mathbb{R}$, f é bijetora e f cresce em $\mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 3.1.8

1. Nos funções a seguir, determine os domínios máximos de definição os respectivos gráficos e conjuntos imagens.

$$i) f(x) = x^{52};$$

$$ii) f(x) = x^{81};$$

$$iii) f(x) = (x - 5)^8;$$

$$iv) f(x) = (x + 7)^{13};$$

$$v) f(x) = x^{74} + 5;$$

$$vi) f(x) = x^{23} - 9;$$

$$vii) f(x) = (x - 3)^{82} + 9;$$

$$viii) f(x) = (x + 4)^{133} - 6;$$

$$ix) f(x) = (3x - 2)^{86};$$

$$x) f(x) = (2x + 3)^{17};$$

$$xi) f(x) = -9x^{74} + 16;$$

$$xii) f(x) = 4x^{29} - 11;$$

$$xiii) f(x) = 3(5x - 3)^{82} + 9; \quad xiv) f(x) = -11(7x + 4)^{133} - 6.$$

2. Para cada função do exercício anterior, restrinja os domínios ou os contradomínios de forma a obter funções invertíveis. Determine as inversas, seus domínios de definições, seus contradomínios, seus conjuntos imagens e seus gráficos.

3. A partir do gráfico da função potência, mostre que:

i) se n é um inteiro positivo par, então a equação algébrica $x^n + ax + b = 0$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, possui no máximo duas raízes reais distintas;

ii) se n é um inteiro positivo ímpar, então a equação algébrica $x^n + ax + b = 0$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, possui no mínimo uma raiz real e no máximo três raízes reais distintas.

3.2 FUNÇÃO RAÍZ N-ÉSIMA

Definição 3.2.1. Seja n um inteiro positivo. Uma função f é chamada de **função raiz n -ésima**, se sua lei de correspondência é dada pela expressão algébrica $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Se n é um inteiro par, então $D_f = [0, +\infty[$.

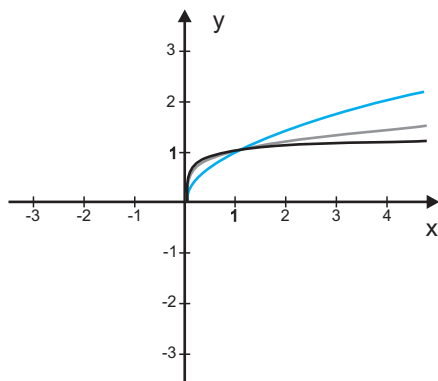
Se n é um inteiro ímpar, então $D_f = \mathbb{R}$.

Para visualizarmos o gráfico de f , observemos que:

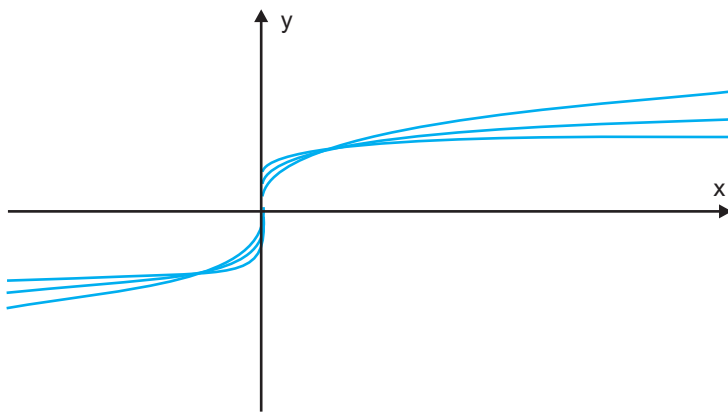
- i)** Em cada caso, pela proposição 1.3.3.1.4. - i) e ii), a função f é crescente em todo o seu domínio de definição D_f , o que implica que f é injetora;
- ii)** Se n é um inteiro par, então $Im(f) = [0, +\infty[$. De fato, para todo número real não negativo y , tomando $x = y^n$, temos $x \in [0, +\infty[$ e $y = \sqrt[n]{x} = f(x)$, pela proposição 1.3.3.1.3. - i). Se n é um inteiro ímpar, então $Im(f) = \mathbb{R}$, pois para todo número real y , tomando $x = y^n$, temos $x \in \mathbb{R}$ e $y = \sqrt[n]{x} = f(x)$, pela proposição 1.3.3.1.3. - ii);
- iii)** Em cada caso, para todo $x \in D_f$, $(x, y) \in G_f$ se, e somente se, $x = y^n$, o que implica que os pontos do gráfico de f equidistam da reta $y = x$ dos pontos do gráfico da função potência, de expoente n .

A partir dos resultados obtidos, podemos observar que os gráficos das funções raízes n -ésimas são como mostram as figuras a seguir.

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x}, \text{ com } n \text{ par}$$



$$y = f(x) = \sqrt[n]{x}, \text{ com } n \text{ ímpar}$$

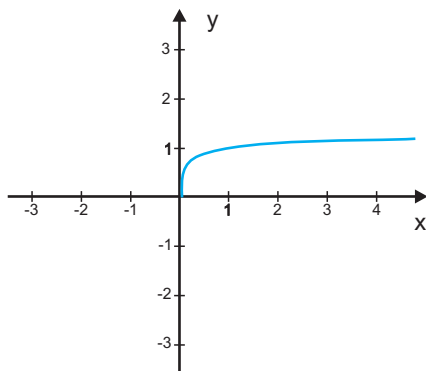


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Para as funções dadas a seguir, determine os domínios máximos de definição seus respectivos gráficos e conjuntos imagens.

a) $f(x) = \sqrt[8]{x}$

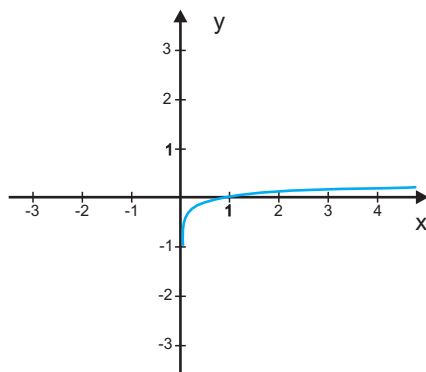
Como f é uma função raiz n -ésima, com n par, então $D_f = [0, +\infty[$. O gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $Im(f) = [0, +\infty[$, f é injetora e cresce em $[0, +\infty[$.

b) $f(x) = \sqrt[8]{x} - 1$

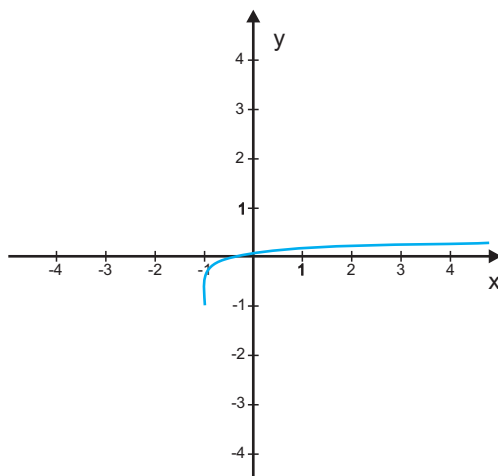
Como f é uma função raiz n -ésima, com n par, então $D_f = [0, +\infty[$. O gráfico, transladado verticalmente (no eixo oy) 1 unidade para baixo, pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $Im(f) = [-1, +\infty[$, f é injetora e cresce em $[0, +\infty[$.

c) $f(x) = \sqrt[8]{x+1} - 1$

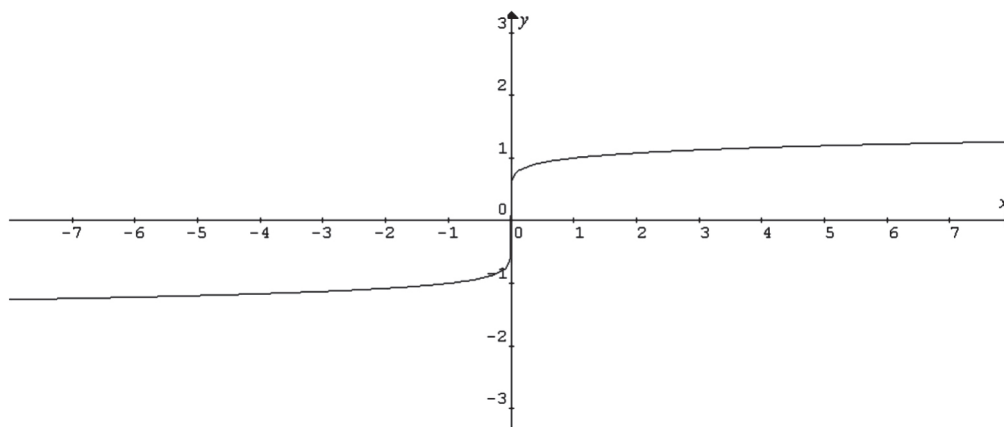
Como f é uma função raiz n -ésima, com n par, então $D_f = [-1, +\infty[$. O gráfico, transladado horizontalmente (no eixo ox) 1 unidade para a esquerda e transladado também verticalmente (no eixo oy) 1 unidade para baixo, pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $Im(f) = [-1, +\infty[$, f é injetora e cresce em $[-1, +\infty[$.

d) $f(x) = \sqrt[n]{x}$

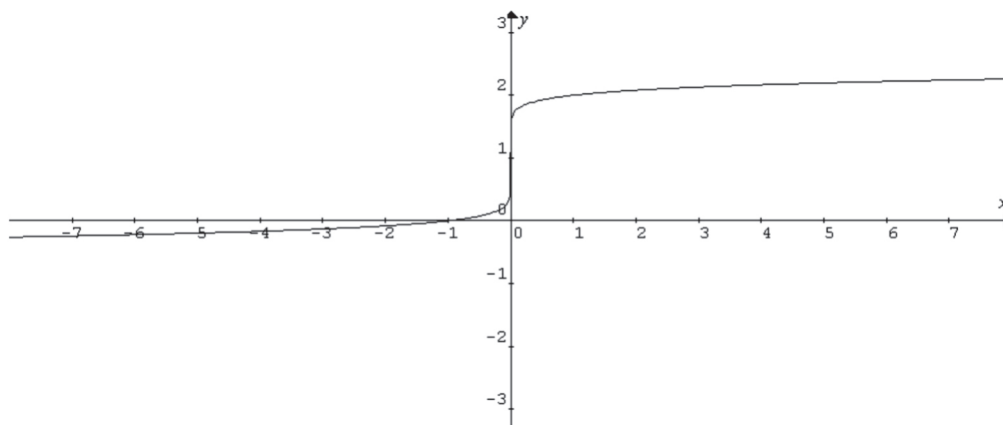
Como f é uma função raiz n -ésima, com n ímpar, então $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, f é bijetora e f cresce em $\mathbb{R}$.

e) $f(x) = \sqrt[n]{x} + 1$

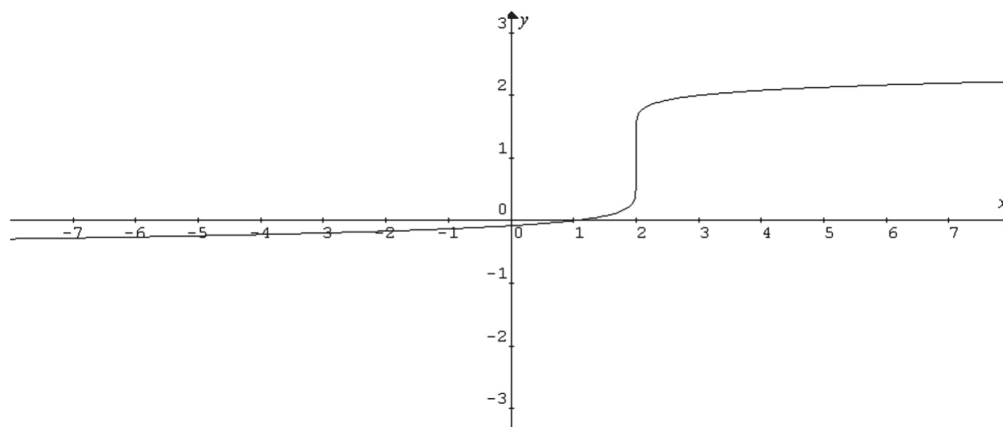
Como f é uma função raiz n -ésima, com n ímpar, então $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico, transladado verticalmente (no eixo oy) 1 unidade para cima, pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, f é bijetora e f cresce em $\mathbb{R}$.

$$f) f(x) = \sqrt[9]{x-2} + 1$$

Como f é uma função raiz n -ésima, com n ímpar, então $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico, transladado horizontalmente (no eixo ox) 2 unidades para a direita e transladado também verticalmente (no eixo oy) 1 unidade para cima, pode ser visto na figura a seguir.



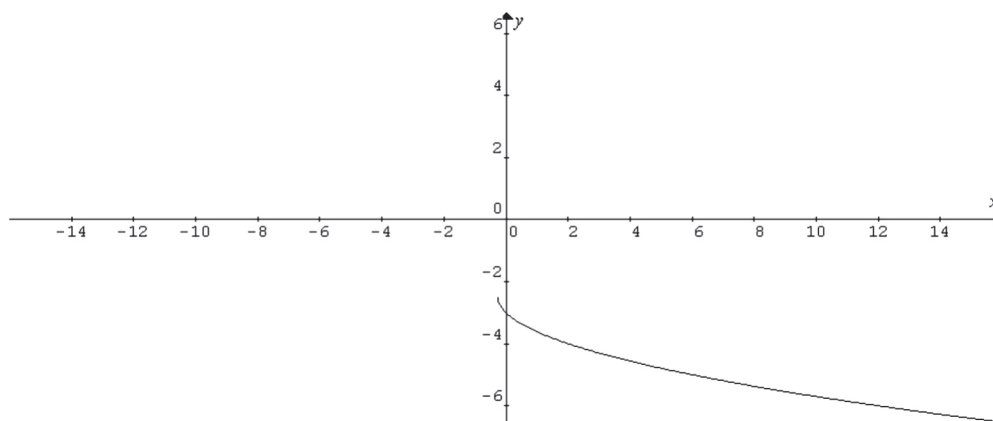
Do gráfico de f temos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, f é bijetora e f cresce em $\mathbb{R}$.

g) A restrição da função quadrática $f(x) = x^2 + 5x + 6$ dada por $f:]-\infty, -5/2] \rightarrow [-1/4, +\infty[$, é uma bijeção entre esses conjuntos e, portanto, possui inversa (volte no exemplo a) dos EXERCÍCIOS RESOLVIDOS da seção Funções Quadráticas. Vamos calcular a sua inversa.

Temos que

$$y = x^2 + 5x + 6 \Leftrightarrow y = x^2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 \Leftrightarrow y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow y + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = -\sqrt{y + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2}, \text{ pois } x \leq -\frac{5}{2}$$

Concluimos que $f^{-1}: [-1/4, +\infty[\rightarrow]-\infty, -5/2]$ é dada por $f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 1/4} - 5/2$, cujo gráfico está esboçado na figura a seguir.



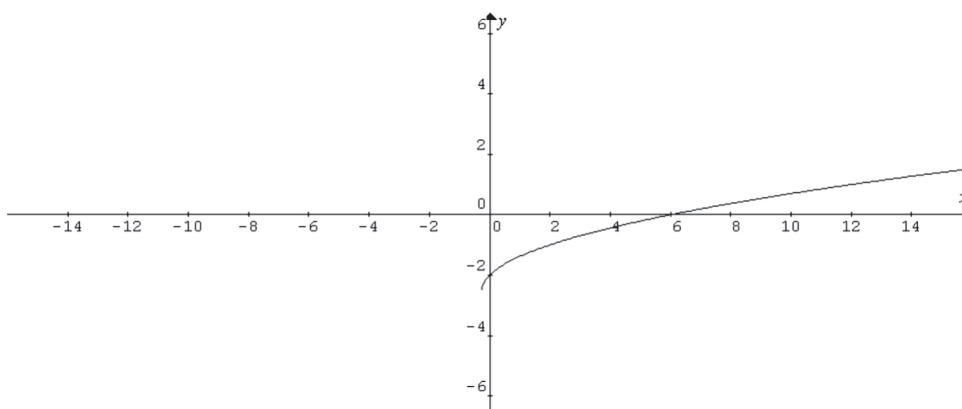
Ainda, uma outra restrição de f dada por $f: [-\frac{5}{2}, +\infty[\rightarrow [-\frac{1}{4}, +\infty[$, é também uma bijeção entre esses conjuntos e, portanto, possui uma função inversa. Vamos calcular a sua inversa.

Temos que

$$y = x^2 + 5x + 6 \Leftrightarrow y = x^2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 \Leftrightarrow y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$y + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{y + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2}, \text{ pois } x \geq -\frac{5}{2}$$

Concluimos que $f^{-1}: [-\frac{1}{4}, +\infty[\rightarrow [-\frac{5}{2}, +\infty[$ é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2}$, cujo gráfico é como na figura a seguir.

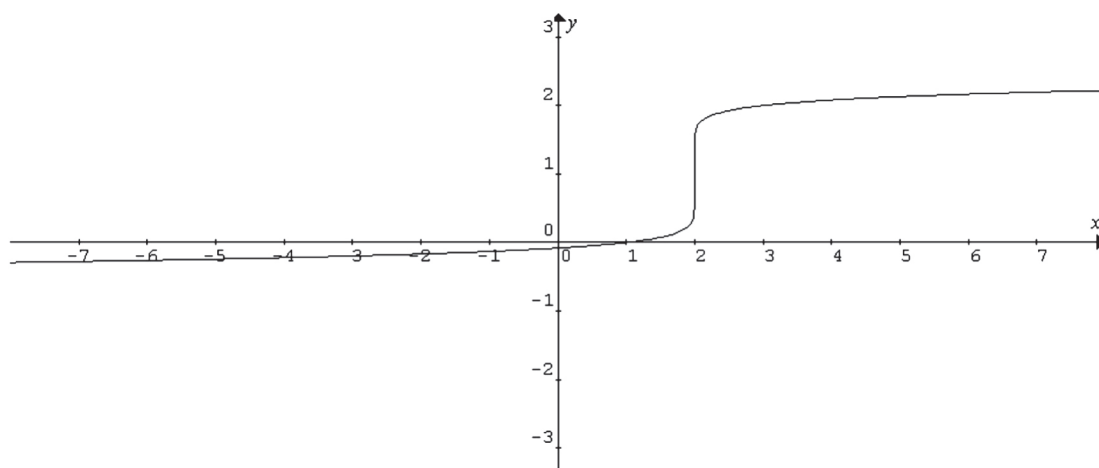


h) A função potência $f(x) = (x - 2)^9 + 1$ (volte no exemplo f) dos EXERCÍCIOS RESOLVIDOS da seção Função Potência. Vamos calcular a sua inversa.

Temos que

$$y = (x - 2)^9 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = (x - 2)^9 \Leftrightarrow x = \sqrt[9]{y - 1} + 2$$

Concluimos que $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[9]{x - 1} + 2$, cujo gráfico é mostrado na próxima figura.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS 3.2.2

1. Para as funções dadas a seguir, determine os domínios máximos de definição das leis de correspondências dadas, os respectivos gráficos e os conjuntos imagens.

i) $f(x) = \sqrt[5]{x}$;

ii) $f(x) = \sqrt[8]{x}$;

iii) $f(x) = \sqrt[8]{x - 5}$;

iv) $f(x) = \sqrt[13]{x + 7}$;

v) $f(x) = \sqrt[7]{x} + 5$;

vi) $f(x) = \sqrt[23]{x} - 9$;

vii) $f(x) = \sqrt[82]{x - 3} + 9$;

viii) $f(x) = \sqrt[133]{x + 4} - 6$;

ix) $f(x) = \sqrt[86]{3x - 2}$;

x) $f(x) = \sqrt[17]{2x + 3}$;

xi) $f(x) = -9\sqrt[74]{x} + 16$;

xii) $f(x) = 4\sqrt[29]{x} - 11$;

xiii) $f(x) = 3\sqrt[82]{5x - 3} + 9$;

xiv) $f(x) = -11\sqrt[133]{7x + 4} - 6$.

2. Para as funções do exercício anterior, restrinja os domínios ou os contradomínios de forma a obter funções invertíveis. Determine as inversas, seus domínios de definições, seus contradomínios, seus conjuntos imagens e seus gráficos.

3. Utilizando a noção de gráfico de uma função, mostre que:

- i) se n é um inteiro positivo par, então a equação algébrica $\sqrt[n]{x} + ax + b = 0$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$, possui no máximo duas raízes reais distintas;
- ii) se n é um inteiro positivo ímpar, então a equação algébrica $\sqrt[n]{x} + ax + b = 0$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, possui no mínimo uma raiz real e no máximo três raízes reais distintas.

3.3 FUNÇÃO RACIONAL

Definição 3.3.1. Uma função f é chamada de **função racional** se sua lei de correspondência é dada pela expressão algébrica $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, no qual $P = P(x)$ e $Q = Q(x)$ são polinômios tais que $Q \neq 0$ e Q não divide P .

Naturalmente, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

Em geral, visualizações gráficas de funções racionais necessitam de análises detalhadas. Assim, limitaremos o nosso estudo para o caso particular de funções racionais cujos polinômios P e Q são ambos de grau um.

3.3.1 FUNÇÃO HIPÉRBOLE

Lema 3.3.2. Um **polinômio não nulo** $Q(x) = cx + d$ **divide** um polinômio $P(x) = ax + b$ se, e somente se, $ad = bc$.

Demonstração. Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

Definição 3.3.3. Uma função racional f é chamada de **função hipérbole** se sua lei de correspondência é dada pela expressão algébrica $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, no qual a, b, c e d são números reais quaisquer com $c \neq 0$ e $ad \neq bc$.

Naturalmente, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid cx + d \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Lema 3.3.4. Se a função hipérbole f é expressa na forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, então

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid cy - a \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}.$$

Demonstração.

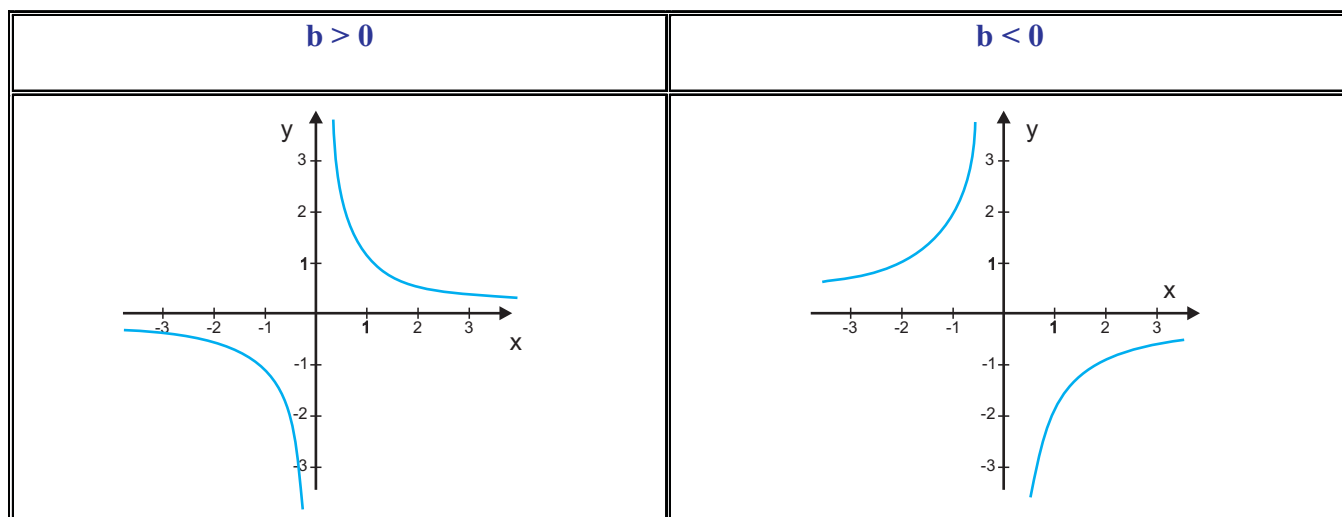
De fato, para todo $y \neq \frac{a}{c}$, tomemos $x = \frac{b-dy}{cy-a}$. A partir de um cálculo direto, podemos verificar que $x \in D_f$ e

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}. \text{ Logo, } y \in Im(f). \text{ Por outro lado, se para } y = \frac{a}{c} \text{ existe um } x \in D_f \text{ tal que } \frac{a}{c} = \frac{ax+b}{cx+d},$$

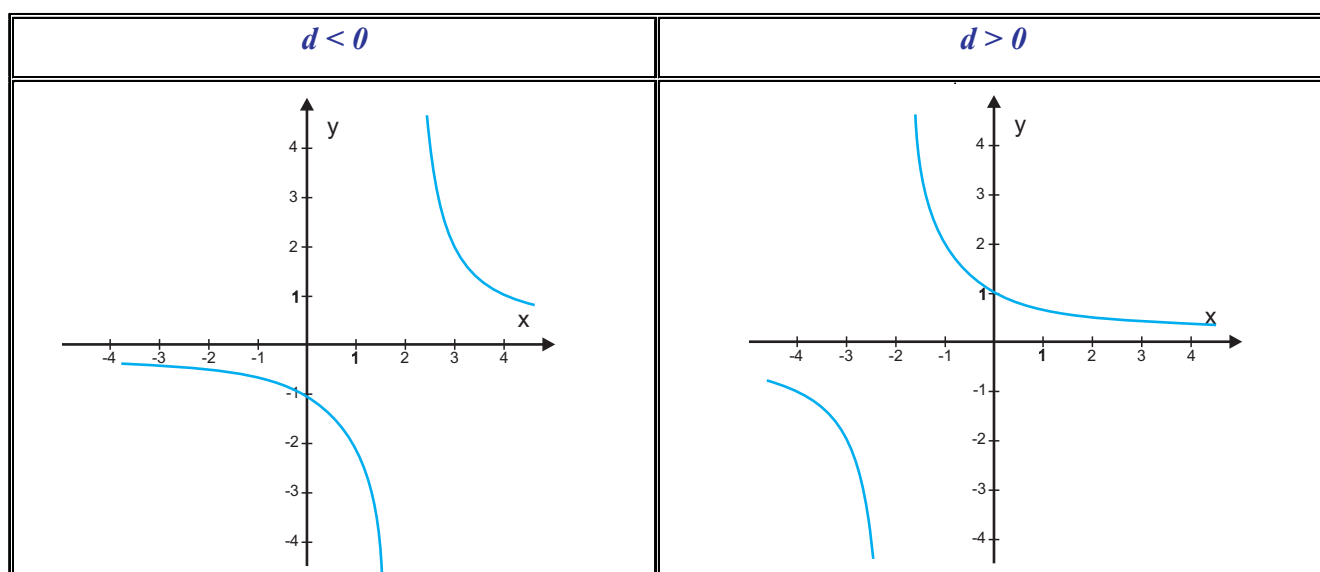
então $ad = bc$, o que é uma contradição. Logo, $\frac{a}{c} \notin Im(f)$.

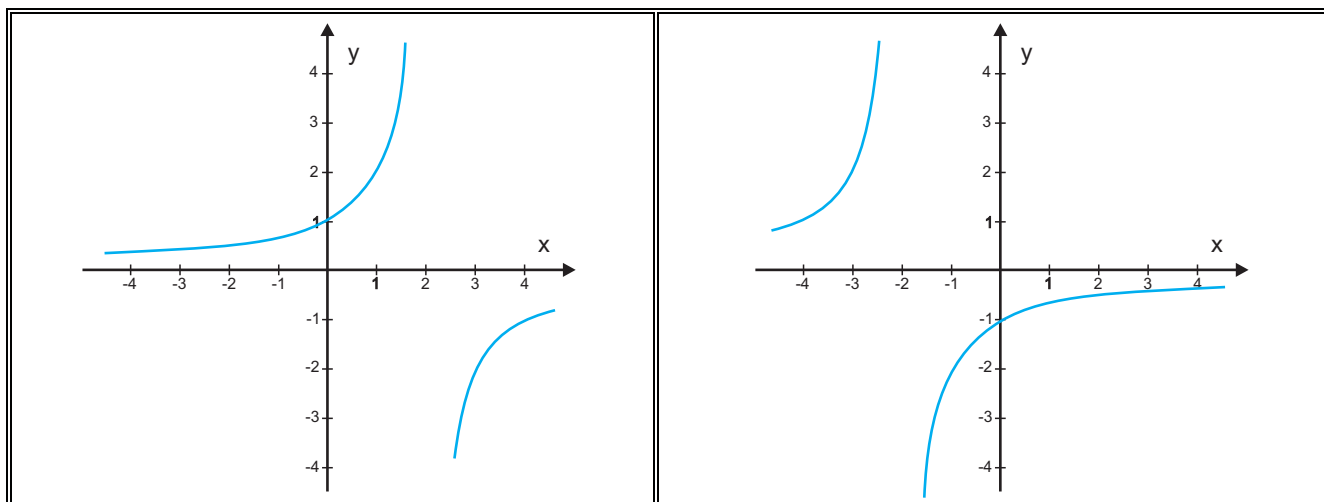
Para visualizarmos o gráfico de uma função racional, analisaremos os casos descritos a seguir.

1º caso. A função racional pode ser expressa na forma $f(x) = \frac{b}{x}$. Neste caso, a partir do cálculo de alguns pontos do gráfico de f , obtemos os gráficos como mostram as próximas figuras.



2º caso. A função racional pode ser expressa na forma $f(x) = \frac{b}{x+d}$. Neste caso, o gráfico de f será o gráfico da função racional expressa no 1º caso, transladado horizontalmente (no eixo ox), d unidades para a direita (se $d < 0$) ou transladado d unidades para a esquerda (se $d > 0$). Os gráficos deste caso estão esboçados nas figuras a seguir.



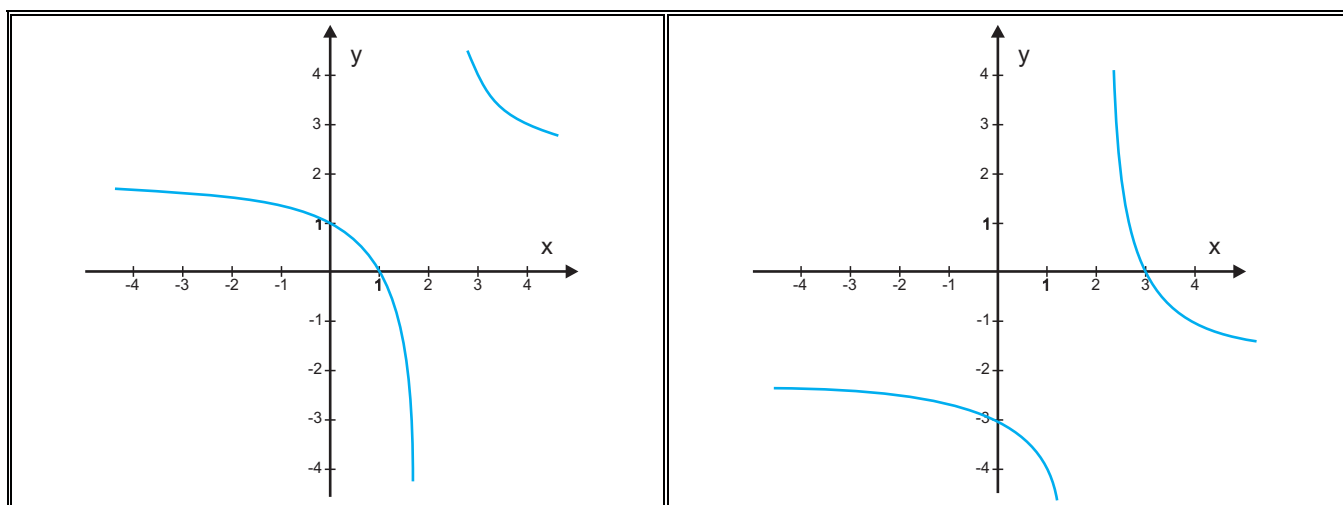


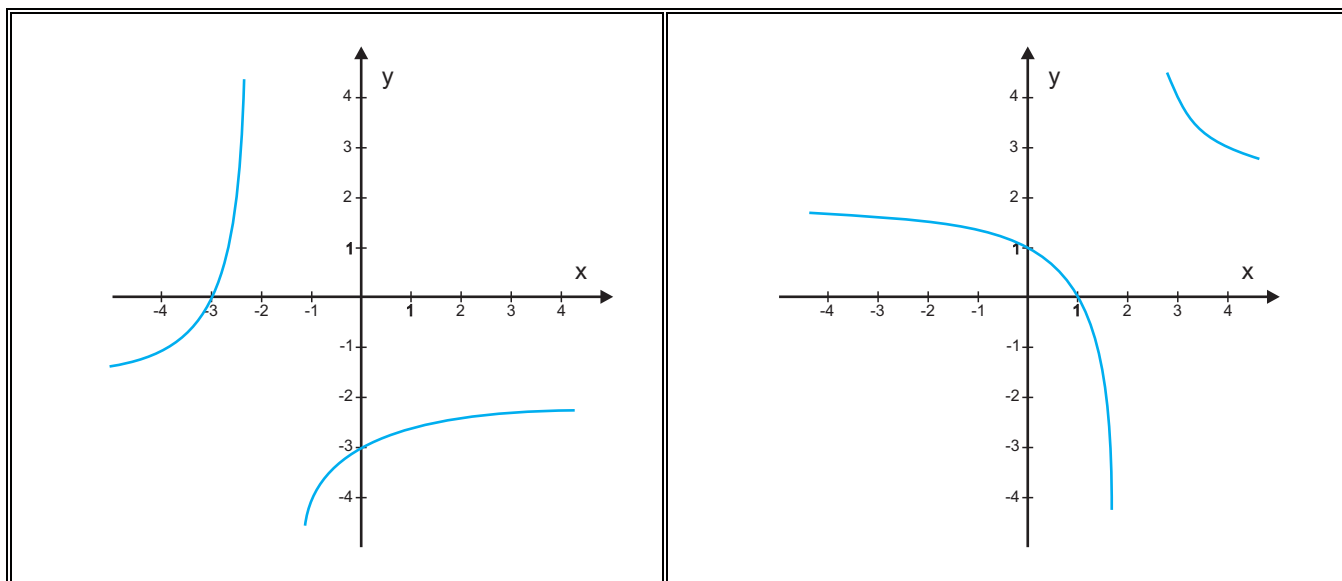
3º caso. A função racional está expressa na forma geral $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Neste caso, a partir do algoritmo

da divisão de polinômios, podemos expressar o quociente na forma

$$\frac{ax+b}{cx+d} = A + \frac{B}{x+C},$$

no qual A , B e C são constantes reais. O gráfico da função racional f será um gráfico de uma função racional expressa como no 2º caso, transladado verticalmente (no eixo oy) A unidades para baixo (se $A < 0$) ou transladado A unidades para cima (se $A > 0$). Os gráficos deste caso estão esboçados nas figuras a seguir.





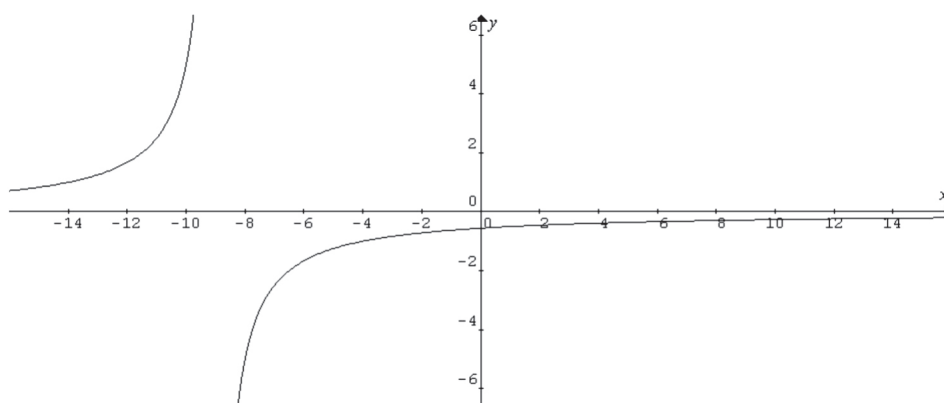
Quais são os outros gráficos?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Nas funções descritas a seguir, determine os domínios máximos de definição das leis de correspondências dadas, os respectivos gráficos e os conjuntos imagens.

a) $f(x) = \frac{2}{3x-5}$

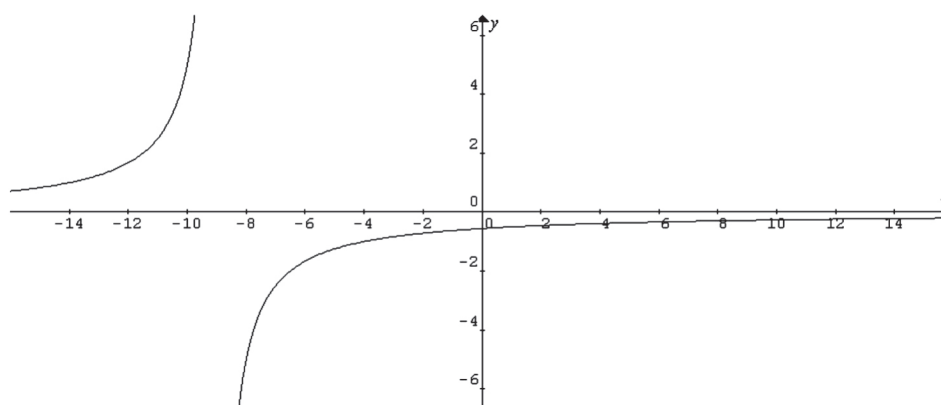
Como f é uma função hipérbole, então $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3} \right\}$. O gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\text{b) } f(x) = \frac{-5}{9+x}$$

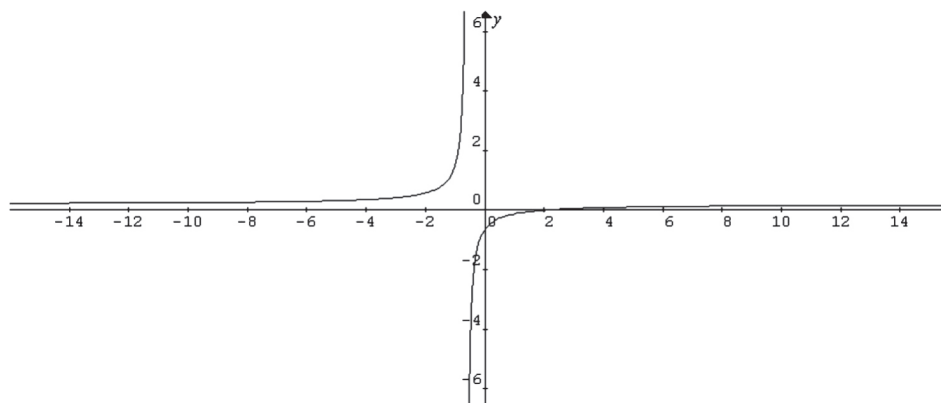
Como f é uma função hipérbole, então $D_f = \mathbb{R} - \{-9\}$. O gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\text{c) } f(x) = \frac{x-2}{5x+3}$$

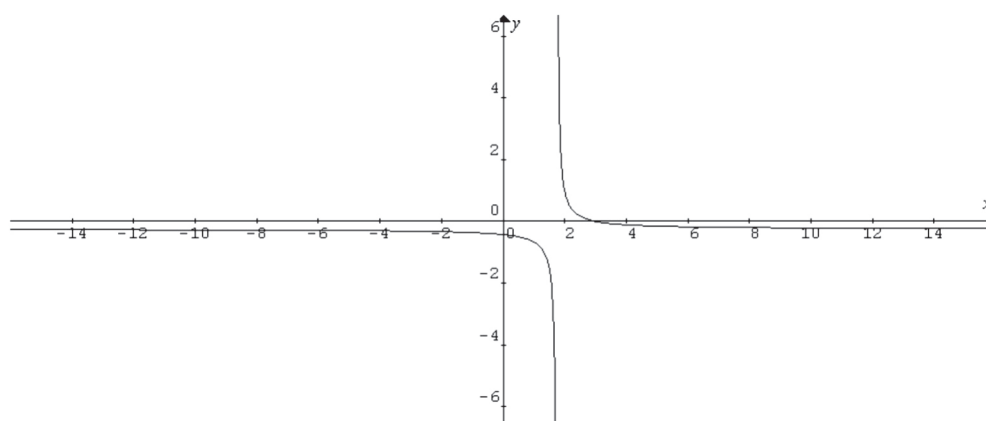
Como f é uma função hipérbole, então $D_f = \mathbb{R} - \{-3/5\}$. O gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{1/5\}$

$$d) f(x) = \frac{3-x}{4x-7}$$

Como f é uma função hipérbole, então $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{4}\right\}$ O gráfico pode ser visto na figura a seguir.



Do gráfico de f temos que $Im(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 3.3.5

1. Para as funções a seguir, determine os domínios máximos de definição os respectivos gráficos e os conjuntos imagens:

$$i) f(x) = \frac{13}{x};$$

$$ii) f(x) = -\frac{9}{x};$$

$$iii) f(x) = \frac{3}{7x};$$

$$iv) f(x) = \frac{-89}{5x};$$

$$v) f(x) = \frac{7}{x-5};$$

$$vi) f(x) = -\frac{2}{x+3};$$

$$vii) f(x) = \frac{9}{3x+4};$$

$$viii) f(x) = \frac{8}{1-7x};$$

$$ix) f(x) = \frac{x-3}{5x+1};$$

$$ix) f(x) = -\frac{4x-3}{6x+5}.$$

2. Para as funções do exercício anterior, restrinja os domínios ou os contradomínios de forma a obter funções invertíveis. Determine as inversas, seus domínios de definições, seus contradomínios, seus conjuntos imagens e seus gráficos.

3.4 REFERÊNCIAS ELETRÔNICAS

Para referências de Funções, sugerimos que o leitor consulte os seguintes endereços eletrônicos.

1. <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/>

1.1. ENSINO FUNDAMENTAL

- 17. Equações do 2º Grau:

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/eq2g/eq2g.htm>

- 18. Funções Quadráticas:

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/eq2g/quadratica.htm>

1.2. ENSINO MÉDIO

- 2. Relações e Funções:

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/funcoes/funcoes.htm>

- 3. Relações e Funções. Exercícios Resolvidos:

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/funcoes/funcoes-a.htm>

1.3. ENSINO SUPERIOR

- 6. Funções:

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/algebra/funcoes/funcoes.htm>

- 7. Funções. Exercícios:

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/algebra/funcoes/funcoes-a.htm>

Capítulo 4

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

As funções Exponenciais e Logarítmicas são muito usadas na Física, Química, Biologia e em outras Ciências, em problemas que envolvem crescimento ou decaimento exponencial. Também, em muitos problemas práticos as suas soluções consistem em resolver equações, quando a incógnita considerada são os expoentes. As funções exponenciais e logarítmicas são úteis para se resolver tais tipos de equações.

4.1 FUNÇÕES EXPONENCIAIS. POTÊNCIAS DE EXPOENTES REAIS

A demonstração do teorema a seguir será omitida e pode ser obtida nas referências bibliográficas.

Teorema 4.1.1. Para todo número real a maior que um, existe uma *única* função bijetora

$$f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[, x \mapsto y = f_a(x),$$

denominada de **função exponencial de base a** , tal que $f_a(r) = a^r (= \sqrt[q]{a^p})$, para todo número racional $r = \frac{p}{q}$.

Neste caso, denotaremos os valores imagem da função f_a pelo símbolo $f_a(x) = a^x$, para todo número real x .

Além disso, quaisquer que sejam os números reais a e b maiores que um, e reais w e x , temos

$$i) \quad a^0 = 1 \text{ e } a^1 = a;$$

$$ii) \quad a^{w+x} = a^w a^x;$$

$$iii) \quad (a^w)^x = a^{wx};$$

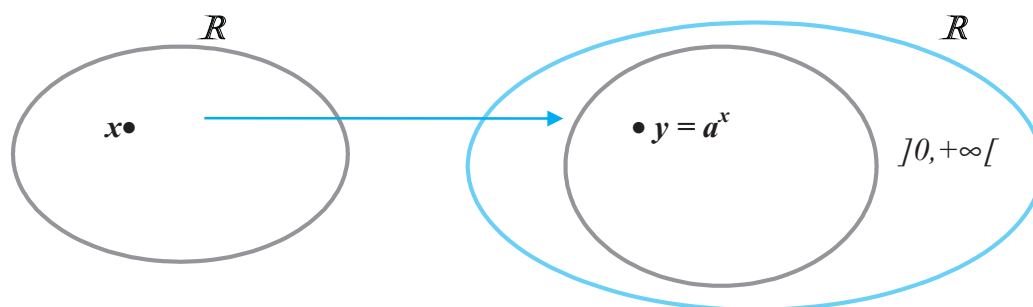
- i) $(ab)^x = a^x b^x$;
- ii) Se $a > 1$, então a função exponencial de base a é crescente em $\mathbb{R}$;
- iii) Se $0 < a < 1$, então a função exponencial de base a é decrescente em $\mathbb{R}$;

Corolário 4.1.2. Se a e b são números reais maiores que um, e x é um número real, então

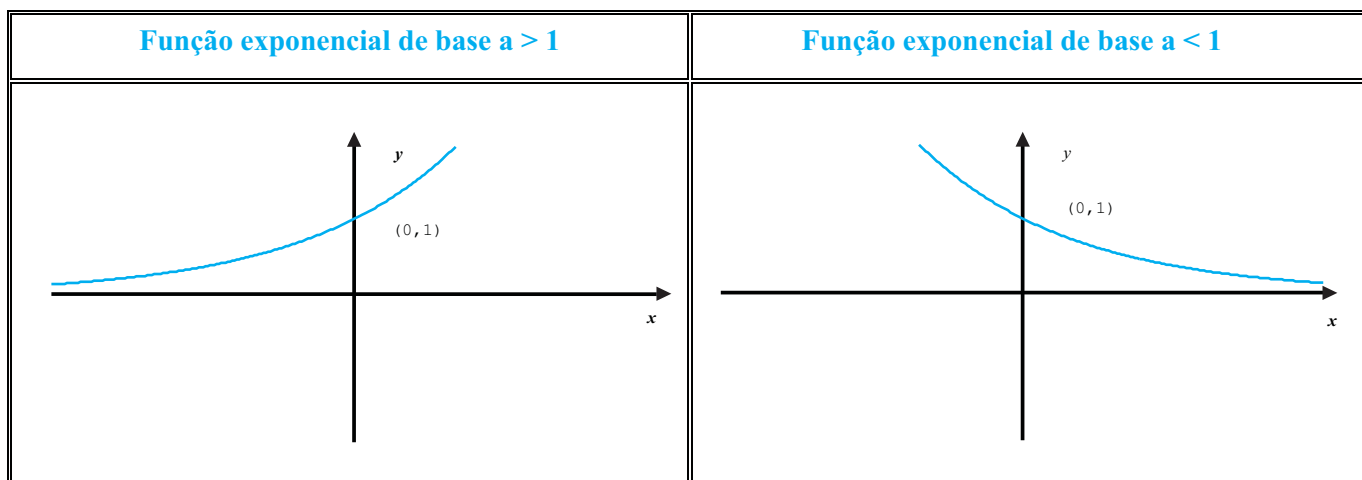
- i) $(a^{-1})^x = (a^x)^{-1} = a^{-x}$;
- ii) $(ab^{-1})^x = a^x (b^x)^{-1} = a^x b^{-x}$.

Demonstração. Deixaremos a demonstração como exercício.

A interpretação, em diagramas de *Venn*, da função exponencial de base a , pode ser vista na figura a seguir.



As interpretações gráficas das funções logarítmicas de base a , podem ser vistas nas duas figuras a seguir.



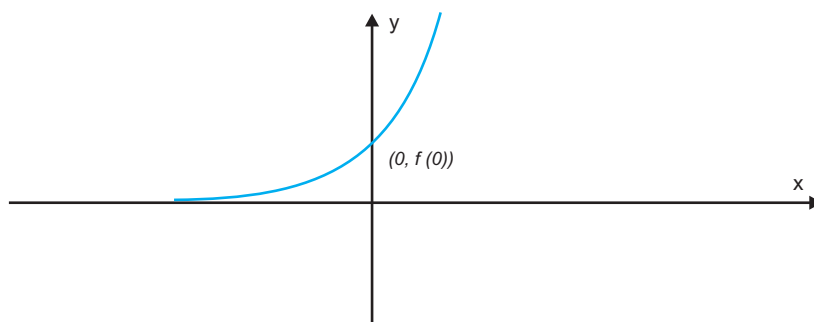
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Esboce os gráficos das funções dadas.

a) $f(x) = (0,101)^{-4x}$

Observemos que $f(x) = (0,101)^{-4x} = f(x) = ((0,101)^{-4})^x, \forall x$.

Como $(0,101)^{-4} > 1$, então o gráfico de f é como esboçado a seguir.

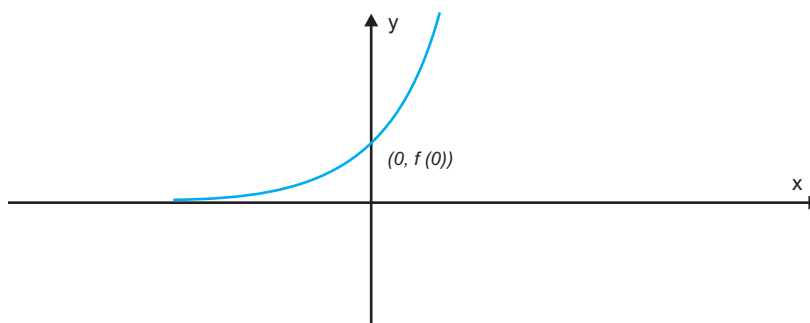


O ponto de interseção no eixo oy é dado por $(0, f(0)) = (0, 1)$.

b) $f(x) = 52^{3x-5}$

Observemos que $f(x) = 52^{3x-5} = 52^{3x} 52^{-5} = 52^{-5} (52^3)^x, \forall x$.

Como $52^3 > 1$ e $52^{-5} > 0$, então o gráfico de f é como mostrado a seguir.

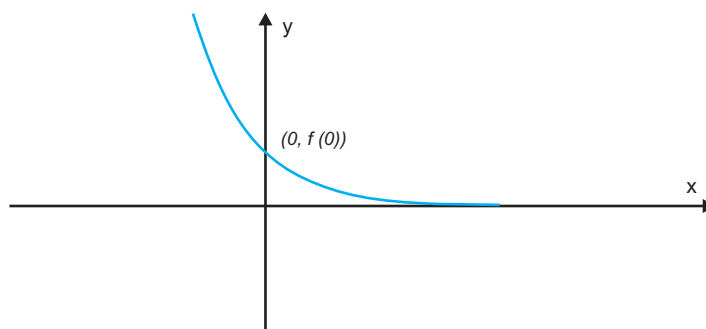


O ponto de interseção no eixo oy é dado por $(0, f(0)) = (0, 52^{-5})$.

c) $f(x) = 9^{-6x+11} + 43$

Observemos que $f(x) = 9^{-6x+11} + 43 = 9^{-6x} 9^{11} + 43 = 9^{11} (9^{-6})^x + 43, \forall x$.

Como $0 < 9^{-6} < 1$ e $9^{11} > 0$, tem-se o gráfico de f a seguir.

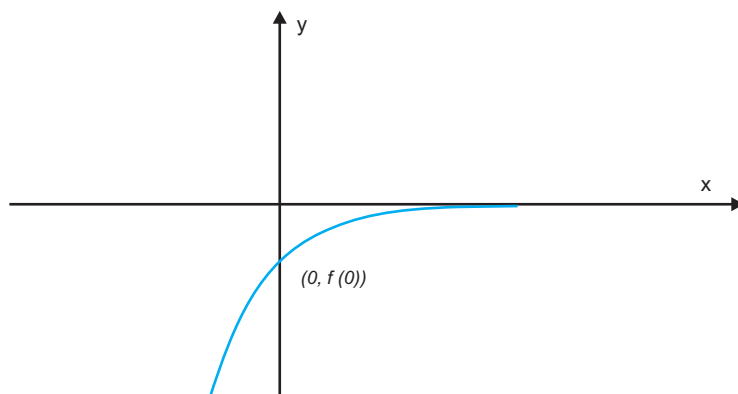


O ponto de interseção no eixo oy é dado por $(0, f(0)) = (0, 9^{11} + 43)$.

d) $f(x) = -61\left(\frac{5}{2}\right)^{-11x+7}$

Observemos que $f(x) = -61\left(\frac{5}{2}\right)^{-11x+7} = -61\left(\frac{5}{2}\right)^{-11x} \left(\frac{5}{2}\right)^7 = -61\left(\frac{5}{2}\right)^7 \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-11}\right)^x, \forall x$.

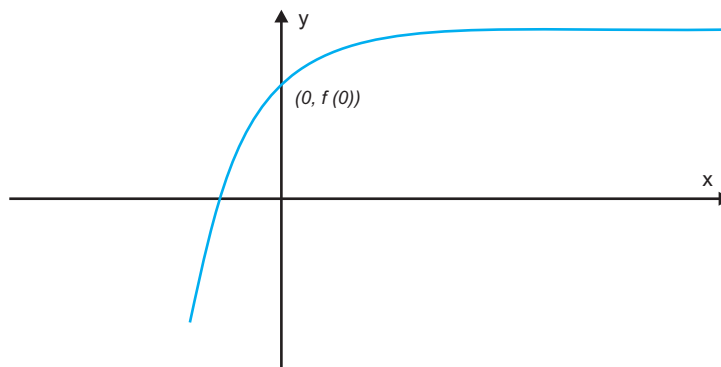
Como $0 < \left(\frac{5}{2}\right)^{-11} < 1$ e $-61\left(\frac{5}{2}\right)^7 < 0$, tem-se o gráfico de f a seguir.



O ponto de interseção no eixo oy é dado por $(0, f(0)) = (0, -61\left(\frac{5}{2}\right)^7)$.

e) $f(x) = 40.000 - 61\left(\frac{5}{2}\right)^{-11x+7}$

Neste caso, a partir do exemplo anterior e do fato de que $40.000 - 61\left(\frac{5}{2}\right)^7 < 0$, tem-se o gráfico de f a seguir.



O ponto de interseção no eixo oy é dado por $(0, f(0)) = (0, 40.000 - 61\left(\frac{5}{2}\right)^7)$.

2) Resolva as equações ou inequações, a seguir.

a) $2^{-5x+8} - 16 = 0$

Como $2^{-5x+8} - 16 = 0 \Leftrightarrow 2^{-5x+8} = 16 \Leftrightarrow 2^{-5x+8} = 2^4 \Leftrightarrow -5x + 8 = 4 \Leftrightarrow -5x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$,

concluimos que o conjunto solução é o conjunto $\left\{\frac{4}{5}\right\}$

b) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Como

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2, \text{ então } 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1} \Leftrightarrow 2^x = 4 \text{ ou } 2^x = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \text{ ou } 2^x = 2^1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou}$$

$$x = 1,$$

Logo, o conjunto solução é o conjunto $\{2, 1\}$.

c) $9 \cdot 2^x - 6^x = 0$

Como

$$9 \cdot 2^x - 6^x = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x - 2^x 3^x = 0 \Leftrightarrow 2^x (9 - 3^x) = 0 \Leftrightarrow 9 - 3^x = 0 \text{ (pois } 2^x > 0, \forall x) \Leftrightarrow$$

$$3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2,$$

concluimos que o conjunto solução é o conjunto $\{2\}$.

d) $2^{-5x+8} - 16 \geq 0$

Como $2^{-5x+8} - 16 \geq 0 \Leftrightarrow 2^{-5x+8} \geq 16 \Leftrightarrow 2^{-5x+8} \geq 2^4 \Leftrightarrow -5x + 8 \geq 4 \Leftrightarrow -5x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{5},$

concluimos que o conjunto solução é o intervalo ilimitado $] -\infty, \frac{4}{5}]$.

e) $(0,2)^{-5x+8} - 0,0016 < 0$

Como

$$(0,2)^{-5x+8} - 0,0016 < 0 \Leftrightarrow (0,2)^{-5x+8} < 0,0016 \Leftrightarrow (0,2)^{-5x+8} < (0,2)^4 \Leftrightarrow -5x + 8 > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5x > -4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{5},$$

concluimos que o conjunto solução é o intervalo ilimitado $] -\infty, \frac{4}{5}[$.

f) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 > 0$

Inicialmente, pelo exercício b), temos

$$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 4 \text{ ou } 2^x = 2,$$

Logo,

$$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 > 0 \Leftrightarrow 2^x < 2^1 \text{ ou } 2^x > 2^2 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 2.$$

Concluimos que o conjunto solução é a reunião dos intervalos $] -\infty, 1[\cup] 2, +\infty[$.

g) $9 \cdot 2^x - 6^x \leq 0$

Como

$$9 \cdot 2^x - 6^x \leq 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x - 2^x 3^x \leq 0 \Leftrightarrow 2^x (9 - 3^x) \leq 0 \Leftrightarrow 9 - 3^x \leq 0 \text{ (pois } 2^x > 0, \forall x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3^x \geq 3^2 \Leftrightarrow x \geq 2,$$

concluimos que o conjunto solução é o intervalo ilimitado $] 2, +\infty [$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 4.1.3

1) Esboce os gráficos das funções dadas.

i) $f(x) = 2^x$;

ii) $f(x) = (0,3)^x$;

iii) $f(x) = 5^{-x}$;

iv) $f(x) = (0,11)^{-x}$;

v) $f(x) = 7^{3x}$;

vi) $f(x) = (0,3)^{9x}$;

vii) $f(x) = 19^{-6x}$;

viii) $f(x) = (0,101)^{-4x}$;

ix) $f(x) = 14^{x+5}$;

x) $f(x) = (0,23)^{x-7}$;

xi) $f(x) = 52^{3x-5}$;

xii) $f(x) = (0,3)^{9x+8}$;

xiii) $f(x) = 9^{-6x+11} + 43$;

xiv) $f(x) = (0,89)^{-4x} - 12$;

xv) $f(x) = 35 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+7}$;

xvi) $f(x) = 33 + 61\left(\frac{1}{3}\right)^{-5x+7}$.

2) Resolva as equações a seguir.

i) $9^{-6x+11} - 81 = 0$;

ii) $(0,01)^{4x} - 100 = 0$;

$$\text{iii)} \quad 9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0;$$

$$\text{iv)} \quad 8(0,25)^x - 6(0,5)^x + 1 = 0;$$

$$\text{v)} \quad 3^x - 5^x = 0;$$

$$\text{vi)} \quad 10^x - 8 \cdot 5^x = 0.$$

3) Resolva as inequações a seguir.

$$\text{i)} \quad 9^{-6x+11} - 81 < 0;$$

$$\text{ii)} \quad (0,01)^{4x} - 100 \geq 0;$$

$$\text{iii)} \quad 9^x - 4 \cdot 3^x + 3 > 0;$$

$$\text{iv)} \quad 8(0,25)^x - 6(0,5)^x + 1 \leq 0;$$

$$\text{v)} \quad 3^x - 5^x < 0;$$

$$\text{vi)} \quad 10^x - 8 \cdot 5^x \geq 0.$$

4.2 FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Como visto na seção anterior, para todo número real a maior que um, existe uma *única função exponencial de base a* $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, $x \mapsto y = f_a(x)$.

Essa função é bijetora, portanto possui uma função inversa. Isto nos permite definir o seguinte conceito.

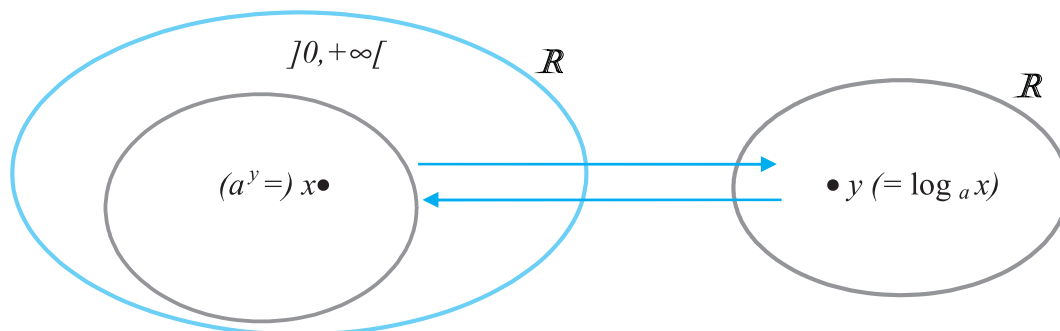
Definição 4.2.1. Para todo número real a maior que um, definimos a *função logarítmica de base a* como sendo a função inversa da *função exponencial de base a* , f_a . Assim, a função logarítmica de base a é a função

$$f_a^{-1}:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f_a^{-1}(x),$$

no qual $y = f_a^{-1}(x)$ se, e somente se, $f_a(y) = x$, para todo $x \in]0, +\infty[$.

Denotaremos os **valores imagem** da função logarítmica de base a pelo símbolo $f_a^{-1}(x) = \log_a x$ para todo $x \in]0, +\infty[$. Assim, $y = \log_a x$ se, e somente se, $a^y = x$, para todo $x \in]0, +\infty[$.

A interpretação da função logarítmica de base a , em diagramas de *Venn*, pode ser vista como mostra a figura a seguir.



A seguir, apresentamos as propriedades mais importantes da função logarítmica de base a .

Proposição 4.2.2. Sejam a e b números reais maiores que um. Quaisquer que sejam os números reais $c \in \mathbb{R}$ e $w, x \in]0, +\infty[$, temos que

$$i) \quad \log_a 1 = 0 \text{ e } \log_a a = 1;$$

$$ii) \quad a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a a^x = x;$$

$$iii) \quad \log_a (wx) = \log_a w + \log_a x;$$

$$iv) \quad \log_a \left(\frac{w}{x} \right) = \log_a w - \log_a x;$$

$$v) \quad \log_a x^c = c \log_a x;$$

$$vi) \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a};$$

$$vii) \text{ se } a > 1, \text{ então a função logarítmica de base } a \text{ é crescente em }]0, +\infty[;$$

$$viii) \text{ se } 0 < a < 1, \text{ então a função exponencial de base } a \text{ é decrescente em }]0, +\infty[.$$

Demonstração.

i) e ii). Deixaremos as suas demonstrações como exercício.

$$i) \quad \text{Se } u = \log_a w \text{ e } v = \log_a x, \text{ então } w = a^u \text{ e } x = a^v, \text{ o que implica em } wx = a^u a^v = a^{u+v}. \text{ Assim,} \\ u + v = \log_a (wx). \text{ Logo, } \log_a (wx) = \log_a w + \log_a x.$$

iv) Se $u = \log_a w$ e $v = \log_a x$, então $w = a^u$ e $x = a^v$, o que implica em $\frac{w}{x} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$. Assim, $u - v =$

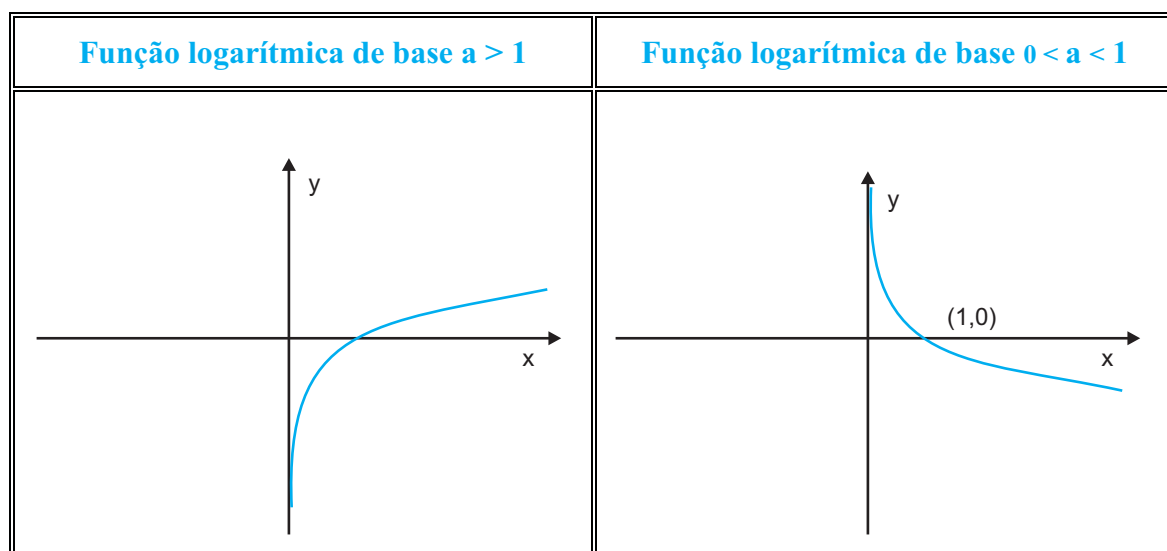
$\log_a \left(\frac{w}{x}\right)$. Logo, $\log_a \left(\frac{w}{x}\right) = \log_a w - \log_a x$.

v) Se $c = 0$, a identidade é evidente. Se $c \neq 0$, seja $v = \log_a x^c$, então $x^c = a^v$. Como $x = \left(x^c\right)^{\frac{1}{c}} = \left(a^v\right)^{\frac{1}{c}} = a^{\frac{v}{c}}$, então $\frac{v}{c} = \log_a x$, o que implica em $v = c \log_a x$. Logo $\log_a x^c = c \log_a x$.

vi). Se $v = \log_a x$, então $x = a^v$, o que implica em $\log_b x = \log_b (a^v)$. Como $\log_b x = v \log_b a$, então $v = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. Logo, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

vii e viii) Deixaremos as suas demonstrações como exercícios.

As interpretações gráficas das funções logarítmicas de base a podem ser vistas nas figuras a seguir.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Calcule.

i) $\log_{2835} 2835$

Observemos que $y = \log_{2835} 2835 \Leftrightarrow y = 1$.

ii) $\log_{\sqrt[3]{5}} 5$

Observemos que $y = \log_{\sqrt[3]{5}} 5 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{5})^y = 5 \Leftrightarrow 5^{\frac{y}{3}} = 5^1 \Leftrightarrow \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow y = 3$.

iii) $\log_{\frac{1}{3}} 27$

Observemos que $y = \log_{\frac{1}{3}} 27 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = 27 \Leftrightarrow (3^{-1})^y = 3^3 \Leftrightarrow 3^{-y} = 3^3 \Leftrightarrow y = -3$.

2) Encontre os valores reais de x que satisfazem cada uma das igualdades.

i) $\log_3(7 + 5x) = -2$ com a restrição $x > -\frac{7}{5}$

Observemos que $\log_3(7 + 5x) = -2 \Leftrightarrow \log_3(7 + 5x) = \log_3 3^{-2} \Leftrightarrow 7 + 5x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{62}{45}$.

ii) $\log_{23}(x + 1) - \log_{23}(x - 2) = \log_{23} 6$

Observemos que x é uma solução da equação se, e somente se, $x + 1 > 0$ e $x - 2 > 0$. Assim, se x é uma solução, então devemos ter $x > 2$. Nessas condições,

$$\log_{23}(x + 1) - \log_{23}(x - 2) = \log_{23} 6 \Leftrightarrow \log_{23}\left(\frac{x + 1}{x - 2}\right) = \log_{23} 6 \Leftrightarrow \frac{x + 1}{x - 2} = 6 \Leftrightarrow x = \frac{13}{5}.$$

3) Determine o domínio.

i) $f(x) = \log_{0,002}(x^2 - 3x + 2)$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 > 0\} =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[.$$

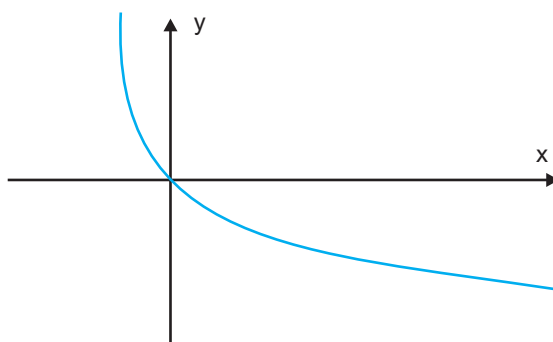
$$ii) f(x) = \log_{11}(|x+2|-7)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2|-7 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+2 < -7 \text{ ou } x+2 > 7\} =]-\infty, -9[\cup]5, +\infty[.$$

4) Esboce o gráfico.

$$i) f(x) = \log_{0,57}(x+1)$$

Como $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$ e $f(x) = \log_{0,57}(x+1) = 0 \Leftrightarrow \log_{0,57}(x+1) = \log_{0,57} 1$
 $\Leftrightarrow$, então o gráfico de f é como mostrado na figura a seguir.

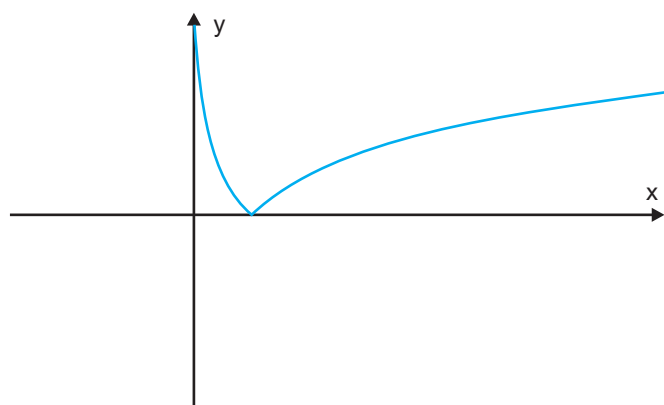


$$f) f(x) = |\log_{121} x|$$

Como $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0, +\infty[$,

$$f(x) = |\log_{121} x| = \begin{cases} \log_{121} x, & \text{se } \log_{121} x \geq 0 \\ -\log_{121} x, & \text{se } \log_{121} x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \log_{121} x, & \text{se } x \geq 1 \\ -\log_{121} x, & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

e $f(x) = |\log_{121} x| = 0 \Leftrightarrow \log_{121} x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, então o gráfico de f é como mostrado na figura a seguir.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS 4.2.3

1) Calcule.

$$i) \log_{10} 1000; \quad ii) \log_{\frac{1}{2}} 64;$$

$$iii) \log_9 \sqrt{3}; \quad iv) \log_{347} 1.$$

2) Encontre os valores reais de x que satisfazem a cada uma das igualdades.

$$i) \log_{10} (1+x) = 3;$$

$$ii) \log_{11} x^2 = 4;$$

$$iii) \log_{10} \sqrt{x} = 1;$$

$$iv) \frac{1}{2} \log_{0,3} x + \log_{0,3} 4 = \log_{0,3} 2$$

$$v) \log_{10} x^{\frac{3}{2}} - \log_{10} \sqrt{x} = 5;$$

$$vi) \log_{23} (x+1) + \log_{23} (x-2) = \log_{23} 6$$

$$vii) \log_{0,2} (x+2) - \log_{0,2} x = \log_{0,2} 5.$$

3) Determine o domínio.

$$i) f(x) = \log_5 (2x+1);$$

$$ii) f(x) = \log_{1,35} (x^2 - 1);$$

$$iii) f(x) = \log_{0,02} |x-1|;$$

$$iv) f(x) = \log_{10} (-x);$$

v) $f(x) = \log_x 10;$

vi) $f(x) = \log_{132} \left(\frac{x+2}{x-1} \right).$

4) Esboce o gráfico.

a) $f(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $f(x) = \log_7(-x)$

d) $f(x) = \log_{0,57}(x+1)$

e) $f(x) = \log_{1,03} |x|$

f) $f(x) = |\log_{10} x|.$

4.3. O NÚMERO e

Consideremos a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Vamos analisar o que acontece com essa expressão à medida que n aumenta, ou seja, vemos ver o que acontece com as potências

$$2, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5, \dots$$

A tabela abaixo contém alguns valores dessas potências (aproximação até a terceira casa decimal).

n	1	2	3	4	5	10	100	1.000	10.000	100.000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	2,250	2,370	2,441	2,488	2,593	2,704	2,716	2,718	2,718

Quando n cresce indefinidamente, a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima de um número irracional que é representado pela letra e , cujo valor aproximado é 2,7182.

Nas aplicações, a função exponencial que aparece com maior frequência é a que tem o número e como base. Como $e > 1$, o gráfico da função exponencial $f(x) = e^x$ é semelhante ao gráfico da função $f(x) = a^x$ com $a > 1$, que foi visto na seção 4.1.

Definição 4.3.1. Dado um número real $x > 0$, chamaremos o número real y , que satisfaz a identidade $y = \log_e x \Leftrightarrow x = e^y$, de **logaritmo natural de x** , ou **logaritmo neperiano** de x , e o denotaremos pelo símbolo $y = \ln x$.

Como as funções exponencial e logarítmica de base e são inversas, então:

- i) $e^{\ln x} = x$, para todo número real $x > 0$;
- ii) $\ln e^x = x$, para todo número real x ;
- iii) O número e é o único número real cujo logaritmo natural é igual a 1.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 4.3.2

1) Esboce o gráfico da função dada.

- i) $f(x) = e^{x-2}$;
- ii) $f(x) = e^{x+3}$;
- iii) $f(x) = e^{|x|}$;
- iv) $f(x) = e^{-|x|}$;
- v) $f(x) = 2 - 3e^x$;
- vi) $f(x) = 3 - 2e^x$;
- vii) $f(x) = 5 - 3e^{-x}$;
- viii) $f(x) = 3 - 5e^{-x}$.

2) Resolva as equações.

- i) $e^{0,5x} = 5$;
- ii) $(2,05)^x = 2$;
- iii) $3e^{-2x} = 5$;
- iv) $5e^{-2x} = 3$;
- v) $e^x + e^{-x} = 3$.

3) Dado $\ln 2 = 0,6931$, determine.

i) $\ln 32$; ii) $\ln \frac{e^2}{4}$; iii) $\ln \frac{16}{e^3}$; iv) $\ln \sqrt{\frac{1}{3e}}$.

4.4 APLICAÇÕES

As funções exponenciais e logarítmicas são utilizadas para resolver muitos problemas práticos. Elas permitem descrever matematicamente várias situações em que se pretende analisar o crescimento ou diminuição de certas grandezas. Veremos algumas dessas aplicações.

1- CRESCIMENTO POPULACIONAL

As funções exponenciais podem ser usadas para descrever modelos simplificados de crescimento populacional.

Exemplo 4.4.1. Na tabela abaixo fornecemos os valores da população mundial do ano de 1998 até o ano de 2004. Na terceira coluna estão tabelados os valores obtidos quando se divide a população do ano correspondente pela população do ano anterior.

População Mundial (aproximada)

Ano	População (milhões)	Razão (aproximada)
1998	5.920	
1999	5.997	1.013
2000	6.073	1.013
2001	6.149	1.012
2002	6.224	1.012
2003	6.299	1.012
2004	6.375	1.012

Fonte: U.S. Census Bureau, *International Data Base*, 2006.

As informações contidas na tabela nos permitem avaliar a taxa aproximada em que população está crescendo. Podemos considerar que, em qualquer ano, a população é aproximadamente a população do ano anterior multiplicada pelo fator $1,012$.

A população aproximada num tempo qualquer t pode ser descrita pela lei

$$p(t) = \underbrace{5.920}_{\substack{\text{população} \\ \text{em 1998}}} (1,012)^t \text{ (milhões de pessoas)}$$

Se quisermos fazer uma previsão da população mundial no ano de 2020 , fazemos $t = 22$ na expressão acima, pois terão decorrido 22 anos após 1998 . Obtemos, então,

$$p(22) = 5.920 (1,012)^{22} \cong 7.696,5$$

A população em 2020 seria, aproximadamente, de 7,6 bilhões de pessoas.

2- JUROS CONTÍNUOS

Suponha que um investidor aplique um capital C em um investimento que rende k por cento ao ano.

O capital C renderá, ao final de um ano, juros de $\frac{kC}{100}$. Após um ano, o investidor terá o capital

$C_1 = C + \frac{kC}{100} = C \left(1 + \frac{k}{100} \right)$. Se o capital C_1 é aplicado à mesma taxa, podemos dizer que, após dois anos,

o investidor terá o capital $C_2 = C \left(1 + \frac{k}{100} \right)^2$. Procedendo deste modo, vemos que, após t anos o

investidor terá $q(t) = C \left(1 + \frac{k}{100} \right)^t$.

Exemplo 4.4.2. Um indivíduo investe certa quantia em um banco que remunera a taxa de 8,75% ao ano. Determine o tempo necessário para que o valor do investimento dobre. Após t meses a quantia aplicada terá sido multiplicada por

$$(1 + 0,0875)^t = 1,0875^t.$$

Logo, para que o valor do investimento dobre, deve-se ter $1,0875^t = 2$.

Utilizando-se logaritmos na base e (pode ser numa base qualquer), temos

$$t \ln 1,0875 = \ln 2,$$

ou seja,

$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1,0875} \cong 8,26$$

Portanto, será necessário esperar cerca de 8 anos e 3 meses para que o valor investido dobre.

Para calcular rendimentos de um investimento, freqüentemente utiliza-se o modelo de “juros contínuos”, em que os juros são capitalizados *a cada instante de tempo* (continuamente). O modelo matemático para esse tipo de transação é descrito por

$$y(t) = Ce^{\alpha t},$$

no qual C é o valor do investimento inicial e α é a taxa de juros (anual). A utilização desse modelo é justificada da seguinte forma: se a taxa de juros anual é k e os juros são capitalizados n vezes por ano, dividindo o ano em n períodos iguais (n períodos de juros), temos que a taxa de juros em cada período é

$$\frac{1}{n} \frac{k}{100}. \text{ Fazendo } \alpha = \frac{k}{100}, \text{ ao final de } t \text{ anos o investidor terá } q(t) = C \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right)^{nt}.$$

Para obter a situação em que os juros são capitalizados a cada instante de tempo (juros contínuos), supomos que n torna-se arbitrariamente grande. Para avaliar o que ocorre na expressão $\left(1 + \frac{\alpha}{n} \right)^{nt}$ quando

n aumenta, fazemos $m = \frac{n}{\alpha}$. Assim, $n = m\alpha$ e podemos reescrever $\left(1 + \frac{\alpha}{n} \right)^{nt}$ como

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{nt} = \left(1 + \frac{I}{m}\right)^{m\alpha t} = \left[\left(1 + \frac{I}{m}\right)^m\right]^{\alpha t}.$$

Vimos que, quando m cresce, a expressão $\left(1 + \frac{I}{m}\right)^m$ aproxima-se do número e . Quando n cresce indefinidamente, m também cresce. Logo, $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{nt}$ aproxima-se do número $e^{\alpha t}$ quando n cresce. Portanto, podemos descrever matematicamente a situação em que os juros são capitalizados continuamente por meio do modelo

$$q(t) = Ce^{\alpha t}.$$

Exemplo 4.4.3. Um indivíduo investe certa quantia em um banco que remunera à taxa de 8,75% ao ano. Determine o tempo necessário para que o valor do investimento dobre, se os juros forem capitalizados continuamente.

Se os juros forem capitalizados continuamente, o saldo após t anos é calculado por meio da expressão $q(t) = Ce^{0,0875t}$. Queremos encontrar t tal que

$$e^{0,0875t} = 2.$$

Tomando o logaritmo natural em ambos os membros, temos

$$t = \frac{\ln 2}{0,0875} = 7,92.$$

Portanto, se os juros forem capitalizados continuamente, o valor do investimento dobrará em cerca de 7 anos e 11 meses.

Exemplo 4.4.4. Um indivíduo investe R\$ 5.000,00 em um banco que remunera à taxa de 7 % ao ano. Determine o saldo após 3 anos se os juros forem capitalizados:

i) Trimestralmente;

- i) Mensalmente;
- ii) Diariamente;
- iii) Continuamente.

i) Se os juros forem capitalizados trimestralmente, o saldo após t anos é calculado por meio da expressão

$q(t) = C \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right)^{nt}$, com $C = 5.000$, $\alpha = 0,07$ e $n = 4$ (pois o ano é dividido em 4 trimestres). Temos assim,

$$q(t) = 5.000 \left(1 + \frac{0,07}{4} \right)^{4t} \cong 5.000 (1,0175)^{4t}.$$

Portanto, $q(3) = 5.000 (1,075)^{12} = 6.157,20$, ou seja, o saldo será de R\$ 6.157,20.

ii) Se os juros forem capitalizados mensalmente, o saldo após t anos é calculado por meio da expressão

$q(t) = C \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right)^{nt}$, com $C = 5.000$, $\alpha = 0,07$ e $n = 12$ (teremos 12 períodos de juros). Então

$$q(t) = 5.000 \left(1 + \frac{0,07}{12} \right)^{12t}.$$

Portanto, $q(3) = 5.000 \left(1 + \frac{0,07}{12} \right)^{36} = 6.164,62$. O saldo será de R\$ 6.164,62.

iii) Se os juros forem capitalizados diariamente, teremos 365 períodos de juros. Assim, o saldo após t anos é calculado por meio da expressão

$$q(t) = 5.000 \left(1 + \frac{0,07}{365} \right)^{365t}.$$

Portanto, $q(3) = 5.000 \left(1 + \frac{0,07}{365} \right)^{365t} = 6.168,26$. O saldo, nesse caso será de R\$ 6.168,26.

iv) Se os juros forem capitalizados continuamente, o saldo após t anos é calculado por meio da expressão

$q(t) = 5.000 e^{0,07t}$. Logo, $q(3) = 5.000 e^{0,21} = 6.168,39$. O saldo será de R\$ 6.168,39.

Observamos que R\$ 6.168,39 é um valor limite para o saldo possível, isto é, R\$ 5.000,00 investidos a uma taxa de juros de 7% ao ano, no período de 3 anos não pode levar a um saldo superior a R\$ 6.168,39.

3- DESINTEGRAÇÃO RADIOATIVA

As substâncias radioativas possuem átomos que apresentam configurações nucleares instáveis, devido ao excesso de número de prótons ou de nêutrons (ou ambos) em seus núcleos. Esses núcleos, chamados radioativos, tendem a desintegrarem-se, emitindo partículas e, assim, transformam-se com o tempo em núcleos de átomos de um novo elemento químico.

Rutherford formulou um modelo para descrever esse processo de desintegração.

Se $M(t)$ representa a massa de uma substância radioativa no instante t e M_0 é a massa da substância no instante $t = 0$, então

$$M(t) = M_0 e^{-kt},$$

no qual k é a taxa de desintegração ($k > 0$).

A constante de decaimento k tem valores diferentes para substâncias diferentes e é determinada experimentalmente.

Na prática, k pode ser obtida a partir da “meia-vida” da substância, que é o tempo necessário para que a massa decaia pela metade. Quanto maior for a meia-vida de uma substância, mais estável ela será. Por exemplo, a meia-vida do Urânio-238 é de aproximadamente 4,5 bilhões de anos e a meia-vida do Rádio-226 é de aproximadamente 1.600 anos.

Vamos mostrar como calcular a taxa de desintegração conhecendo-se a meia-vida da substância.

Seja t_0 a meia-vida de certa substância. Isso significa que uma unidade da massa da substância se reduz à metade no tempo t_0 . Assim,

$$\frac{I}{2} = e^{-kt_0}.$$

Tomando o logaritmo natural em ambos os membros, temos

$$\ln\left(\frac{I}{2}\right) = -\ln 2 = -kt_0.$$

Portanto,

$$k = \frac{\ln 2}{t_0}.$$

Exemplo 4.4.5. O carbono 14, que é um isótopo radioativo do carbono, tem meia-vida de aproximadamente 5.500 anos.

i) Determine o intervalo de tempo durante o qual uma amostra de carbono 14 se reduz a 20% de sua massa original.

ii) Que percentual da massa original de carbono 14 restará em uma amostra após 800 anos?

i) Seja $M(t)$ a quantidade de carbono 14 presente na amostra no instante t . Temos

$$M(t) = M_0 e^{-kt},$$

no qual M_0 é a massa no instante inicial $t = 0$ (massa original). A constante de desintegração do carbono 14 é

$$k = \frac{\ln 2}{5500} = \frac{0,6931}{5500} \cong 0,000126.$$

Assim, $M(t) = M_0 e^{-0,000126t}$. Seja $\tilde{t}$ o tempo para que $M(t)$ seja igual a 20% de M_0 . Então,

$$\frac{20}{100} M_0 = M_0 e^{-0,000126\tilde{t}}, \text{ ou seja, } \frac{1}{5} = e^{-0,000126\tilde{t}}.$$

Tomando o logaritmo natural em ambos os membros, obtemos

$$-\ln 5 = -0,000126\tilde{t}, \text{ de onde vem } \tilde{t} = \frac{\ln 5}{0,000126} \cong 12.773.$$

Portanto, em aproximadamente 12.773 anos, a massa de carbono 14 presente na amostra se reduzirá a 20% da massa original.

ii) A constante de desintegração do carbono 14 é $k = 0,000126$, como vimos no item (a). Portanto, a massa restante após 800 anos será

$$M(800) = M_0 e^{-(0,000126)(800)} = M_0 e^{-0,1008} \cong 0,9041,$$

ou seja, restarão 90,4% da massa original.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 4.4.6

- 1) Suponha que uma colônia de bactérias comece com uma bactéria e dobre o seu número a cada meia hora. Quantas bactérias a colônia terá ao final de 24 horas?
- 2) Estima-se que a população de uma cidade cresça 3,75% a cada 5 anos.
 - a) Qual é o crescimento estimado para um período de 40 anos?
 - b) Supondo que a população atual da cidade é de 100.000 habitantes aproximadamente, em quanto tempo a população atingirá 250.000?
- 3) Suponhamos que uma quantia S de dinheiro seja depositada num banco que paga uma taxa anual de juros k , capitalizados continuamente. Qual deve ser o valor de k para que o investimento inicial dobre em 5 anos?
- 4) Quanto seria necessário investir agora, a uma taxa de 12% ao ano, capitalizados continuamente, para obter dentro de 10 anos R\$ 300.000,00? E se os juros fossem capitalizados mensalmente?

- 1) O rádio 226 tem meia vida de 1620 anos. Encontre o intervalo de tempo no qual uma amostra dessa substância se reduz a $\frac{3}{4}$ de sua massa original.
- 2) Determine a meia-vida de uma substância radioativa considerando que uma amostra dessa substância perde $\frac{1}{3}$ de sua massa original em 12 dias.

4.5 REFERÊNCIAS ELETRÔNICAS

Para referências de Funções Exponenciais e Logarítmicas, sugerimos que o leitor consulte os seguintes endereços eletrônicos:

1. FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS.

Logaritmos

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/expolog/logaritm.htm>

Logaritmos. Exercícios

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/expolog/logaritm-a.htm>

Funções Exponenciais

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/expolog/exponenc.htm>

Funções Exponenciais. Exercícios

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/expolog/exponenc-a.htm>

2. FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Funções, Equações, Inequações e Exercícios

<http://www.fund198.ufba.br/expo/expon.htm>

3. FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

<http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo/>

4.6 REFERÊNCIAS

1. Hazzan, S.; Iezzi, G. - Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções - vol. 1, Atual Editora.
2. Iezzi, G.; Dolce, O.; Murakami, C. - Fundamentos de Matemática Elementar: Logaritmos - vol. 2, Atual Editora.
3. Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria - vol. 3, Atual Editora;
4. Hazzan, S.; Iezzi, G. - Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, Polinômios - vol. 6, Atual Editora.
5. Iezzi, G., Murakami C.; Machado, N. J. - Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas e Noções de Integral – vol. 8, Atual editora.
8. Caraça, B. J., Conceitos Fundamentais da Matemática, Livraria Sá da Costa Ed., Lisboa, 1984.
9. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM.
10. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Publicação quadrimestral da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro.

4.7 SITES ELETRÔNICOS PARA COMPLEMENTAÇÃO

1. <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/livros/livros.htm>
2. http://www.fund198.ufba.br/apos_cnf/bibli.pdf
3. <http://www.fund198.ufba.br/expo/bibli.pdf>



Disciplina

FUNDAMENTOS
DE MATEMÁTICA

Módulo 3

TRIGONOMETRIA E
NÚMEROS COMPLEXOS

João Carlos da Motrta Ferreira

Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

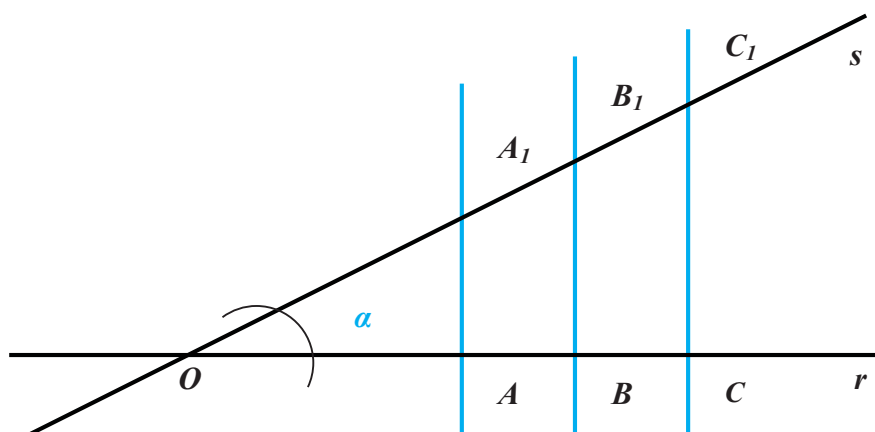
Capítulo 5

TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A trigonometria é um estudo encontrado dentro da matemática, mas com aplicações interdisciplinares como na física e aplicações práticas como na navegação, topografia e etc. A palavra trigonometria é de origem grega formada por *tri* = *três*, *gonos* = *ângulos* e *metria* = *medidas*. Na trigonometria iremos estudar as relações existentes entre lado e os ângulos de um triângulo retângulo, como também as funções trigonométricas, e os cálculos baseados nelas.

5.1 NOÇÕES PRELIMINARES: TRIGONOMETRIA PLANA E O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

É conhecido da Geometria Euclidiana que se r e s são duas retas concorrentes, formando entre si um ângulo agudo α , e uma dessas retas é cortada por várias retas perpendiculares, como na figura a seguir,

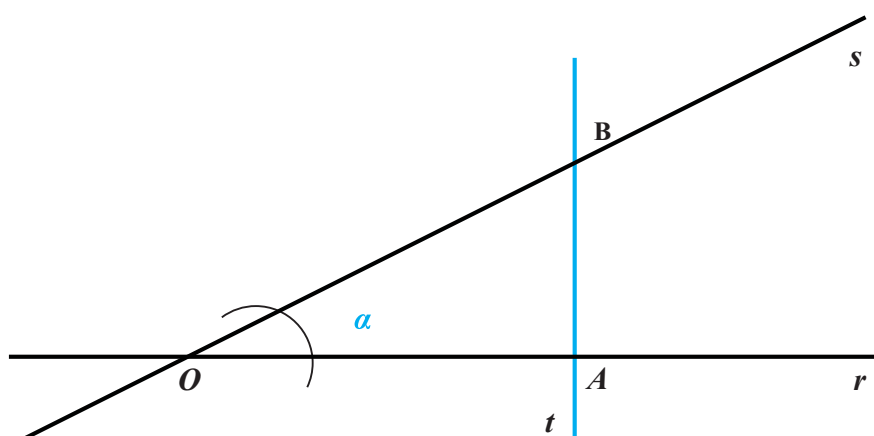


então os triângulos retângulos $\triangle OAA_I$, $\triangle OBB_I$ e $\triangle OCC_I$ são semelhantes. Portanto, são válidas as seguintes relações:

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC_1}} = a; \quad \frac{\overline{OA}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC_1}} = b; \quad \frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}} = c.$$

Nas relações acima, as constantes a , b e c dependem exclusivamente do ângulo agudo α formado pelas retas r e s . Isto nos permite definir os seguintes conceitos.

Definição 5.1.1.. Consideremos o triângulo retângulo ρOAB , formado por três retas r , s e t , e tomemos um ângulo agudo α de um de seus vértices, como mostra a figura a seguir.



RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As relações

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}; \quad \text{cos } \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}};$$

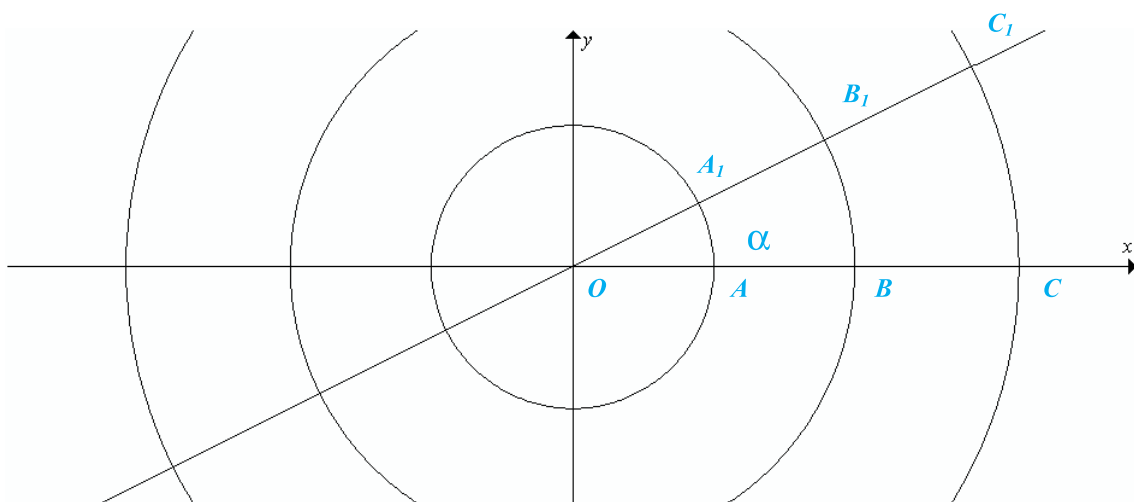
$$\text{sec } \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}; \quad \text{cosec } \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}; \quad \text{cotg } \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}.$$

denominadas **de seno, co-seno, tangente, secante, co-secante e co-tangente do ângulo α** , respectivamente. Estas relações são denominadas relações trigonométricas e têm um papel

importantíssimo nas aplicações cujos domínios científicos envolvam aspectos puramente geométricos do triângulo retângulo com as suas seis partes (lados e ângulos), como na topografia, navegação e astronomia. No entanto, suas aplicações são em geral de uso limitado devido a essas relações serem definidas como razões entre os lados de um triângulo retângulo, restrita somente a medições de ângulos agudos desse triângulo. Um outro tratamento é também considerado no estudo da trigonometria, que permite que tais relações possam ser generalizadas e aplicadas a outros domínios científicos, como na Física, Engenharia, Biologia. Veremos como são feitas essas generalizações.

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas xoy . Um **ângulo** é qualquer abertura formada por três partes: um *raio inicial*, um *raio final* e um *vértice* (ponto de interseção desses raios). No sistema de coordenadas cartesianas xoy , diremos que um ângulo está na **posição padrão** se o seu raio inicial coincide com o eixo positivo dos x e seu vértice se encontra na origem. Os **ângulos positivos** na posição padrão são medidos positivamente e indicados no sentido anti-horário (contrário ao sentido dos ponteiros do relógio), a partir do raio inicial. Analogamente, **ângulos negativos** na posição padrão são medidos negativamente e indicados no sentido horário (no sentido dos ponteiros do relógio), a partir do raio inicial. Salvo se houver menção explícita, consideramos todos os ângulos como estando na posição padrão.

Consideremos um ângulo α no sistema de coordenadas cartesianas oxy e vários círculos com centros no vértice desse ângulo, como mostra a figura a seguir.



Os raios iniciais e finais desse ângulo interceptam, nesses círculos, os arcos $\widehat{AA_1}$, $\widehat{BB_1}$ e $\widehat{CC_1}$. É conhecido da Geometria Euclidiana que as seguintes relações são válidas:

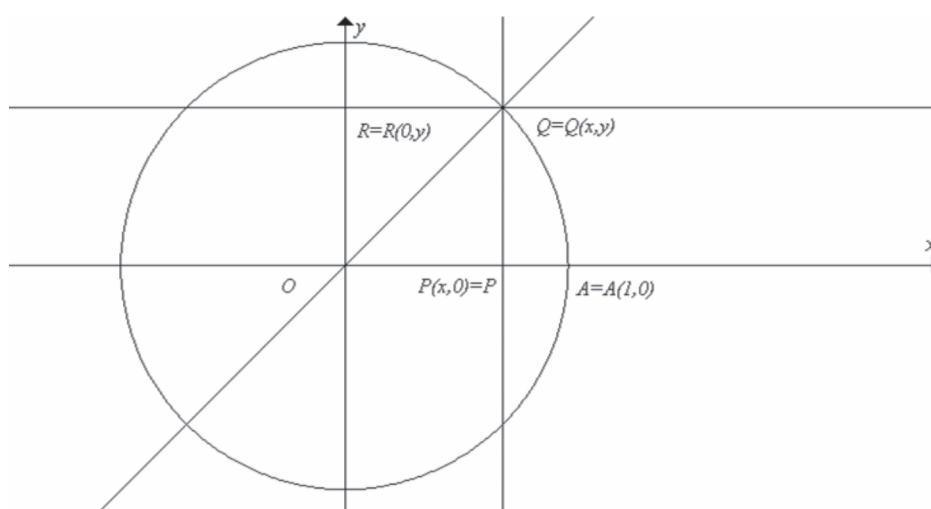
$$\frac{\widehat{AA_1}}{OA} = \frac{\widehat{BB_1}}{OB} = \frac{\widehat{CC_1}}{OC} = k.$$

Nas relações acima, a constante k depende exclusivamente do ângulo α . Isto nos permite definir o seguinte conceito.

Definição 5.1.2. Definimos a *medida do ângulo* α , denominada de *radianos (rd)*, como sendo a constante real k , expressa pelas razões dos arcos pelos raios dos círculos correspondentes. Em particular 1 rd (um radiano) é a medida para qual o raio $\overline{OA}$ é igual ao arco $\widehat{AA_1}$. Definimos o **número real** π , como sendo a razão do comprimento total da circunferência de raio r pelo seu diâmetro ($= 2r$). A partir da sua definição, temos que 2π rd equivalem a um ângulo de 360° .

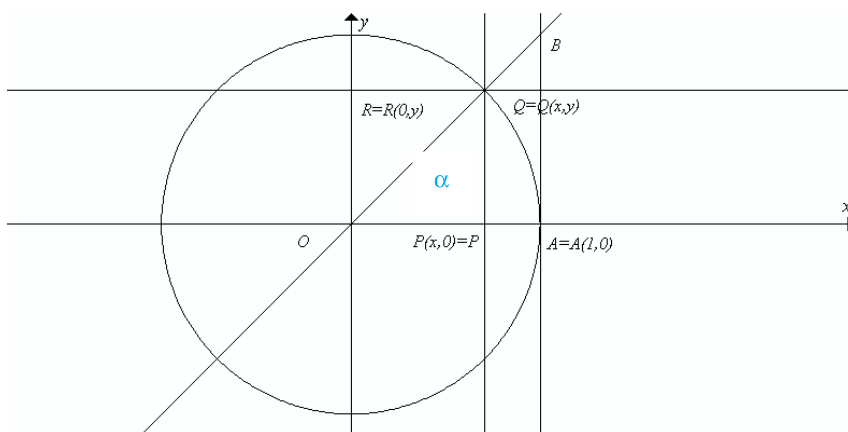
Nota 5.1.3. A definição acima independe do comprimento do raio da circunferência correspondente. Assim, usaremos somente a circunferência de raio igual a 1 (*= unidade*). Neste caso, denominaremos tal circunferência de *círculo trigonométrico*.

As interpretações do seno e co-seno de um ângulo α , no círculo trigonométrico, podem ser vistas na figura a seguir.

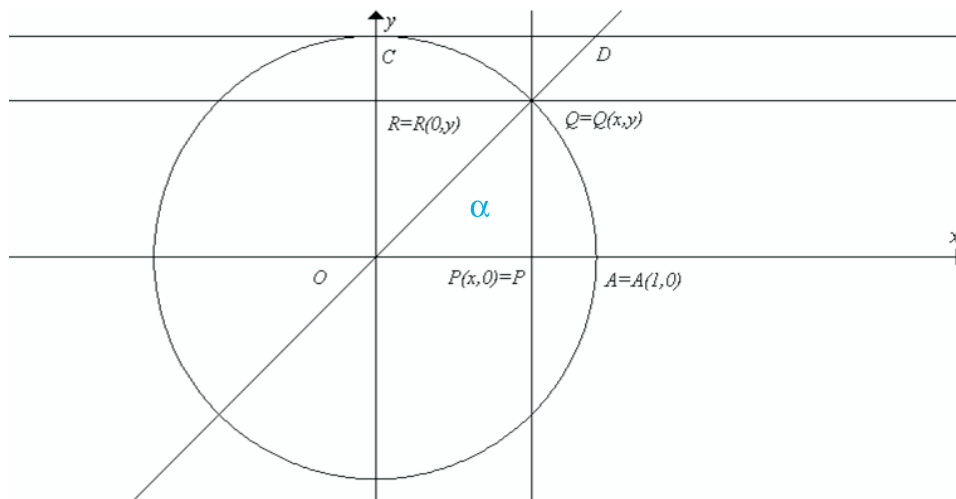


Dado um ângulo α ($= \widehat{AQ}$), o seno desse ângulo é o valor da projeção do ponto $Q = Q(x,y)$ sobre o eixo oy , pois $\sin \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{OR}$ ($= y$), e o co-seno desse ângulo é o valor da projeção do ponto $Q = Q(x,y)$ sobre o eixo ox , pois $\cos \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP}}{1} = \overline{OP}$ ($= x$).

As interpretações da tangente, co-tangente, secante e co-secante de um ângulo α , no círculo trigonométrico, podem ser vistas como mostram a figura a seguir.



Dado um ângulo α ($= \widehat{AQ}$), a **tangente desse ângulo** é o valor do segmento $\overline{AB}$, pois $\tan \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$, e a **secante desse ângulo** é o valor do segmento $\overline{OB}$, pois $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \overline{OB}$, conforme a figura a seguir.



Dado um ângulo α ($= \text{arco } \hat{A}Q$), a **co-tangente desse ângulo** é o valor do segmento $\overline{CD}$, pois $\cotg \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CD}}{1} = \overline{CD}$. Ainda, e a **co-secante desse ângulo** é o valor do segmento $\overline{OD}$, pois $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \overline{OD}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 5.1.3

1) **Expresse os ângulos dados em radianos, na forma de um múltiplo de π .**

- i)* 0° ; *ii)* $\pm 45^\circ$; *iii)* $\pm 90^\circ$; *iv)* $\pm 135^\circ$; *v)* $\pm 180^\circ$; *vi)* $\pm 225^\circ$; *vii)* $\pm 270^\circ$;
viii) $\pm 315^\circ$; *ix)* $\pm 360^\circ$; *x)* $\pm 30^\circ$; *xi)* $\pm 60^\circ$.

2) **Expresse os ângulos dados em graus.**

- i)* $\pm \frac{7\pi}{12}$; *ii)* $\pm \frac{\pi}{9}$; *iii)* $\pm \frac{34\pi}{15}$; *iv)* $\pm 13\pi$; *v)* $\pm \frac{10\pi}{3}$; *vi)* $\pm \frac{12\pi}{5}$; *vii)* $\pm 278\pi$.

3) **Determine o valor das seis relações trigonométricas de cada ângulo α (rd) (na posição padrão), sabendo que seu raio final passa em cada um dos pontos $Q = Q(x, y)$ dados.**

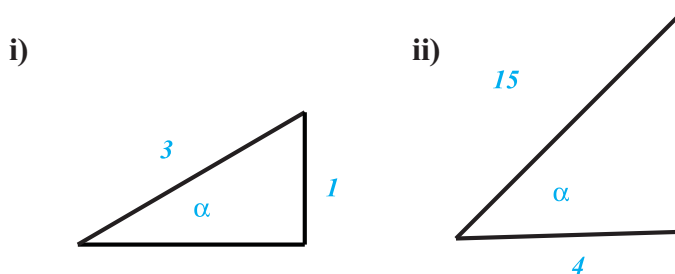
- i)* $Q(5, 8)$; *ii)* $Q(2, -7)$; *iii)* $Q(-6, 1)$; *iv)* $Q(-7, -10)$.

4) **Calcule o valor das relações trigonométricas, a partir do valor dado, supondo que $0 < \alpha < 2\pi$.**

- i)* Sabendo que $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, calcule $\cos \alpha$, $\tg \alpha$, $\cotg \alpha$, $\sec \alpha$ e $\text{cosec } \alpha$;

ii) Sabendo que $\sec \alpha = \frac{15}{4}$, calcule $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$ e $\operatorname{cosec} \alpha$.

Sugestão: para o exercício 4, em cada caso, considere os lados dos triângulos retângulos.



5) Dado um ângulo α (rd), determine o quadrante, no círculo trigonométrico, a que pertence esse ângulo.

i) $\text{sen } \alpha > 0$ e $\cos \alpha > 0$;

ii) $\text{sen } \alpha > 0$ e $\cos \alpha < 0$;

iii) $\text{sen } \alpha < 0$ e $\cos \alpha > 0$;

iv) $\text{sen } \alpha < 0$ e $\cos \alpha < 0$.

5) Complete os quadrados da tabela abaixo, se estiverem definidos.

[illegible]

5.2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nesta seção adotaremos o estudo da trigonometria sob o ponto de vista das funções. Este ponto de vista é equivalente ao do círculo trigonométrico, sendo que este tratamento é mais adequado para os estudos e aplicações de fenômenos de natureza oscilatória. Para tais fenômenos, o uso das funções trigonométricas tem um papel fundamental.

5.2.1 FUNÇÕES SENO E CO-SENO

No que segue, apresentaremos o teorema central deste capítulo sem demonstração, que pode ser obtida na literatura apresentada nas referências bibliográficas. As oito afirmações deste teorema podem ser verificadas facilmente no círculo trigonométrico. Este teorema nos fornecerá os conhecimentos necessários e essenciais para todo o desenvolvimento desse estudo.

Teorema 5.2.1. *Existe um único par de funções, denominadas de **funções seno e co-seno**, denotadas por*

$$\text{sen}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = \text{sen } x,$$

e

$$\text{cos}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = \text{cos } x,$$

respectivamente, verificando as seguintes propriedades:

P1) $\text{sen } 0 = 0$ e $\text{cos } 0 = 1$;

P2) A função seno é uma função ímpar;

P3) A função co-seno é uma função par;

P4) Quaisquer que sejam os números reais a e b ,

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \text{ cos } b + \text{sen } b \text{ cos } a;$$

P5) Quaisquer que sejam os números reais a e b ,

$$\text{cos } (a + b) = \text{cos } a \text{ cos } b - \text{sen } a \text{ sen } b;$$

P6) O número π , enunciado anteriormente, é o menor número real positivo, tal que

$$\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1 \text{ e } \text{cos } \frac{\pi}{2} = 0;$$

P7) A função seno é crescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$;

P8) A função co-seno é decrescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$;

Embora as propriedades **P1** – **P8**, enunciadas no Teorema, caracterizem perfeitamente o comportamento das funções seno e co-seno sobre seus domínios de definição, como ficará claro no decorrer desta seção. Elas não nos possibilitam construir seus gráficos de uma forma tão evidente. Assim, precisaremos de um conhecimento mais aprofundado dessas funções. Neste sentido, utilizaremos os seguintes resultados auxiliares.

Lema 5.2.2. Para todo número real x , $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Demonstração.

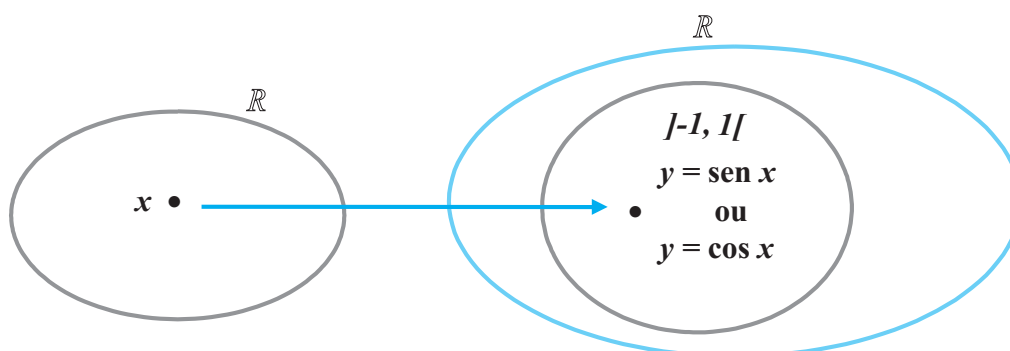
Para todo número real x , tomemos $a = x$ e $b = -x$, na identidade em P5, do Teorema 5.2.1. Assim, $\cos 0 = \cos (x + (-x)) = \cos x \cos (-x) - \sin x \sin (-x)$. Pelas propriedades P1, P2 e P3, aplicadas nesta última identidade, concluímos que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Corolário 5.2.3. Para todo número real x , $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Demonstração.

Para todo número real x , $\sin^2 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Logo, $\sin^2 x \leq 1$, o que implica em $|\sin x| \leq 1$, isto é, $-1 \leq \sin x \leq 1$. De maneira análoga, demonstramos que $-1 \leq \cos x \leq 1$.

A interpretação, em diagramas de Venn, das funções seno e co-seno podem ser vista como mostra a figura a seguir.



Proposição 5.2.4. Quaisquer que sejam os números reais a e b :

- i)* $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a;$
- ii)* $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$

Demonstração.

Esses dois resultados são conseqüências diretas das Propriedades P2 e P3, aplicadas às identidades, em P4 e P5, quando substituimos b por $-b$. Deixaremos as suas demonstrações a cargo do leitor.

Corolário 5.2.5. Quaisquer que sejam os números reais a e b :

- i)* $2\operatorname{sen} a \cos b = \operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b);$
- ii)* $2\cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b);$
- iii)* $2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \cos(a - b) - \cos(a + b).$

Demonstração.

Esses três resultados são conseqüências diretas de adições ou subtrações das identidades trigonométricas, P4 e P5 com as da Proposição 5.2.4. Deixaremos as suas demonstrações a cargo do leitor.

CÁLCULO DE VALORES IMAGEM

Neste parágrafo, estaremos interessados em obter o cálculo de alguns valores imagem das funções seno e co-seno. Estes valores auxiliarão na construção de várias identidades trigonométricas, que possibilitará a obtenção de informações qualitativas sobre o comportamento das funções seno e co-seno. Para isto, apresentaremos inicialmente dois lemas auxiliares.

Lema 5.2.6.

- i)* Para todo $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{sen} x > 0;$
- ii)* Para todo $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x > 0.$

Demonstração.

i) e ii). Inicialmente, observemos que $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos 0 = 1$. Por outro lado, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. As propriedades P7 e P8 implicam que $\sin 0 < \sin x$ e $\cos \frac{\pi}{2} < \cos x$, respectivamente. Pela, propriedades P1 e P6, concluímos que $\sin x > 0$ e $\cos x > 0$.

Lema 5.2.7. Para todo número real x :

- i)** $\sin (2x) = 2\sin x \cos x$;
- ii)** $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos (2x)$;
- iii)** $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos (2x)$.

Demonstração.

O resultado em **i)** é uma consequência direta do uso da identidade em P4, quando substituímos a e b por $a = b = x$.

Os resultados em **ii)** e **iii)** são consequências diretas da adição ou subtração das identidades trigonométricas em **P5**, com a substituição de a e b por $a = b = x$, e a identidade do Lema 5.2.2. Deixaremos suas demonstrações a cargo do leitor.

Proposição 5.2.8. Os seguintes resultados valem:

- i)** $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- ii)** $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos \frac{\pi}{2} = 0$;
- iii)** $\sin \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$;
- iv)** $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ e $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$;
- v)** $\sin (2\pi) = 0$ e $\cos (2\pi) = 1$.

Demonstração.

Das identidades *ii)* e *iii)* do lema 5.2.7, temos que $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}$ e $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}$,

respectivamente. Pela propriedade P6, concluímos que $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$. Assim, pelo Lema 5.2.6.,

devemos ter $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pois $\frac{\pi}{4} \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

As identidades $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ são conseqüências diretas da propriedade P6 do Teorema.

Em seguida, pela identidade *i)* do lema 5.2.7 e a propriedade P6 do Teorema, temos que $\sin \pi = \sin (2 \frac{\pi}{2}) = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Por outro lado, pela identidade *iii)* do Lema 5.2.7., temos que $\cos^2 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \pi$. Assim, $0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \pi$, pela propriedade P6. Conseqüentemente, $\cos \pi = -1$.

Observemos, também, que $\sin \frac{3\pi}{2} = \sin (\pi + \frac{\pi}{2})$ e $\cos \frac{3\pi}{2} = \cos (\pi + \frac{\pi}{2})$. Assim, aplicando a essas duas últimas expressões as identidades P4 e P5, a propriedade P6 e os cálculos de $\sin \pi$ e $\cos \pi$, concluímos que $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ e $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$.

Finalmente, observemos que $\sin (2\pi) = \sin (\pi + \pi)$ e $\cos (2\pi) = \cos (\pi + \pi)$. Assim, pelas identidades em P4 e P5, e pelos cálculos de $\sin \pi$ e $\cos \pi$, concluímos que $\sin (2\pi) = 0$ e $\cos (2\pi) = 1$.

Proposição 5.2.9. Os seguintes valores valem:

$$i) \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ e } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$ii) \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Demonstração.

Primeiramente, observemos que $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$. Pelas identidades em P4 e no item i) da proposição 5.2.4, temos que

$$1 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3}$$

e

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3}.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3}.$$

Logo,

$$1 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \left(1 + 2 \cos \frac{\pi}{3} \right).$$

Em seguida, pela identidade em P5, temos que

$$0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$$

e

$$\cos \frac{\pi}{6} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}.$$

Adicionando a primeira equação da segunda, obtemos: $\cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$.

Como $\cos \frac{\pi}{6} > 0$, obtemos a identidade $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Como consequência da penúltima identidade,

obtemos $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Pelos lemas 5.2.2 e 5.2.6, concluímos que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

IDENTIDADES FUNDAMENTAIS

No parágrafo anterior estivemos interessados em obter o cálculo de vários valores imagem das funções seno e co-seno. Embora esses cálculos sejam importantes, eles não são suficientes para nos dar as informações globais dessas funções de que necessitamos. Nesta seção estaremos interessados em construir identidades trigonométricas, válidas em todo os seus domínios de definição.

Proposição 5.2.10. Para todo número real x :

- i)* $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ e $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$;
- ii)* $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$ e $\cos(x + \pi) = -\cos x$;
- iii)* $\operatorname{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x$ e $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$;
- iv)* $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Demonstração.

Esses resultados são conseqüências diretas do uso das identidades em P4 e P5, do Teorema 5.2.1, pela substituição de a por x e b pelos valores numéricos correspondentes, utilizando a propriedade P6 do Teorema 5.2.1, e os cálculos da proposição 5.2.8. Deixaremos as suas demonstrações a cargo do leitor.

Corolário 5.2.11. Para todo número real x :

- i)* $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$;
- ii)* $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$ e $\cos(\pi - x) = -\cos x$;
- iii)* $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ e $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$;
- iv)* $\operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x$ e $\cos(2\pi - x) = \cos x$.

Demonstração.

Esses resultados são conseqüências diretas das identidades *i)* a *iv)* da proposição 5.2.10, e das propriedades P2 e P3 do teorema 5.2.1, quando substituimos a variável x por $-x$. Deixaremos as suas demonstração a cargo do leitor.

Corolário 5.2.12. Para todo número real x :

- i)* $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$ e $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$;
- ii)* $\sin(x - \pi) = -\sin x$ e $\cos(x - \pi) = -\cos x$;
- iii)* $\sin(x - \frac{3\pi}{2}) = \cos x$ e $\cos(x - \frac{3\pi}{2}) = -\sin x$;
- iv)* $\sin(x - 2\pi) = \sin x$ e $\cos(x - 2\pi) = \cos x$.

Demonstração.

Esses resultados são conseqüências diretas das identidades *i)* a *iv)* da proposição 5.2.10, e das propriedades P2 e P3, do teorema. Deixaremos as suas demonstração a cargo do leitor.

ANÁLISE DOS SINAIS DAS IMAGENS NO INTERVALO $[0, 2\pi]$

As identidades na proposição 5.2.10 – *iv)* mostram que as funções seno e co-seno são funções cujas imagens se repetem a cada intervalo de comprimento 2π . Funções com esse tipo de comportamento são chamadas de **funções periódicas, de período 2π** . Assim, ter uma boa familiaridade com essas funções, no intervalo $[0, 2\pi]$, é essencial e suficiente para a compreensão de seus comportamentos em todo os seus domínios de definição.

Proposição 5.2.13.

- i)* $\sin x > 0$, para todo $x \in]0, \pi[$, e $\sin x < 0$, para todo $x \in]\pi, 2\pi[$;
- ii)* $\cos x > 0$, para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ e $\cos x < 0$, para todo $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Demonstração.

i) Se $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, o resultado é uma consequência direta do Lema 5.2.6. – *i)*. Se $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, então $0 < x - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$. Logo, $\cos(x - \frac{\pi}{2}) > 0$, pelo Lema 5.2.6 – *ii)*. Pelo corolário 5.2.12 – *i)*, concluímos que $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}) > 0$.

Para $x \in]\pi, 2\pi[$, temos que $x - \pi \in]0, \pi[$, o que implica em $\sin(x - \pi) > 0$, pelo item anterior. Como $\sin x = -\sin(x - \pi)$, pelo corolário 5.2.12 – *ii)*, concluímos que $\sin x < 0$.

ii) Analogamente, se $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, o resultado é uma consequência direta do Lema 5.2.6 – *ii)*. Para $x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, então temos que $x - \frac{3\pi}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Logo, $\sin(x - \frac{3\pi}{2}) > 0$, pelo Lema 5.2.6 – *i)*. Como $\cos x = \sin(x - \frac{3\pi}{2})$, pelo corolário 5.2.12 – *iii)*, concluímos que $\cos x > 0$. Finalmente, se $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, então temos que; $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ ou $x = \pi$ ou $x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$. Se $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, então $x - \frac{\pi}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Logo, $\cos(x - \frac{\pi}{2}) > 0$, pelo Lema 5.2.6 – *ii)*. Como $\cos x = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$, pelo corolário 5.2.12 – *i)*, concluímos que $\cos x < 0$. Se $x = \pi$, então $\cos \pi = -1 < 0$. Se $x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$, então temos $x - \pi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Logo, $\cos(x - \pi) > 0$, pelo lema 5.2.6 – *ii)*, e como $\cos x = -\cos(x - \pi)$, pelo corolário 5.2.12 – *ii)*, concluímos que $\cos x < 0$.

CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO NO INTERVALO $[0, 2\pi]$ **Proposição 5.2.14.**

i) A função seno é crescente nos intervalos $]0, \frac{\pi}{2}[$ e $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ e decrescente no intervalo

$$]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[;$$

- i) A **função co-seno** é **crescente** no intervalo $[\pi, 2\pi]$ e **decrecente** no intervalo $[0, \pi]$.

Demonstração.

i) Para o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, o resultado é uma consequência direta da propriedade P7 do Teorema 5.2.1.

Por outro lado, sejam números reais $w, x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, tais que $w < x$. Como $w - \frac{3\pi}{2}$ e $x - \frac{3\pi}{2}$ pertencem ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $w - \frac{3\pi}{2} < x - \frac{3\pi}{2}$, então $\sin w = -\cos(w - \frac{3\pi}{2}) < -\cos(x - \frac{3\pi}{2}) = \sin x$, pelo corolário 5.2.12 – iii). Logo, $\sin w < \sin x$. Assim, a função seno é crescente no intervalo $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

Sejam números reais $w, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, tais que $w < x$. Se $w, x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, então $w - \frac{\pi}{2}$ e $x - \frac{\pi}{2}$ pertencem ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $w - \frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{2}$, o que implica em $\sin w = \cos(w - \frac{\pi}{2}) > \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$, pela propriedade P7 do Teorema 5.2.1 e pelo corolário 5.2.12 – iii). Se $w \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ e

$x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}]$, então $w - \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $x - \pi \in]0, \frac{\pi}{2}]$, o que implica em $\sin w = \cos(w - \frac{\pi}{2}) \geq 0 > -\sin(x - \pi) = \sin x$. Logo, $\sin w > \sin x$. Se

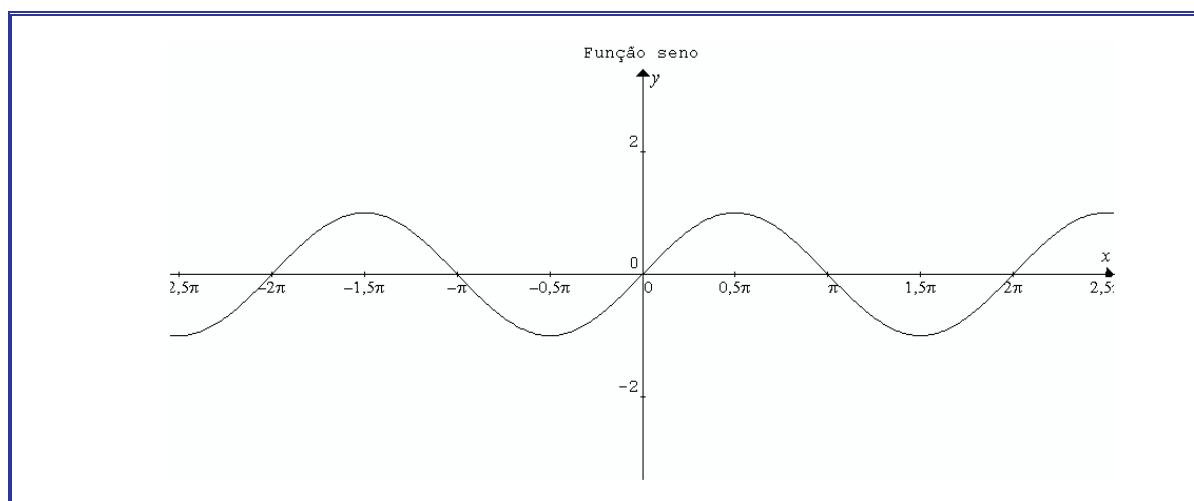
$w, x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, então $w - \pi$ e $x - \pi$ pertencem ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $w - \pi < x - \pi$. Logo, $\sin w = -\sin(w - \pi) > -\sin(x - \pi) = \sin x$, pela propriedade P8 do Teorema 5.2.1 e pelo corolário 5.2.12 – ii). Consequentemente, $\sin w > \sin x$ e temos que a função seno é decrescente no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

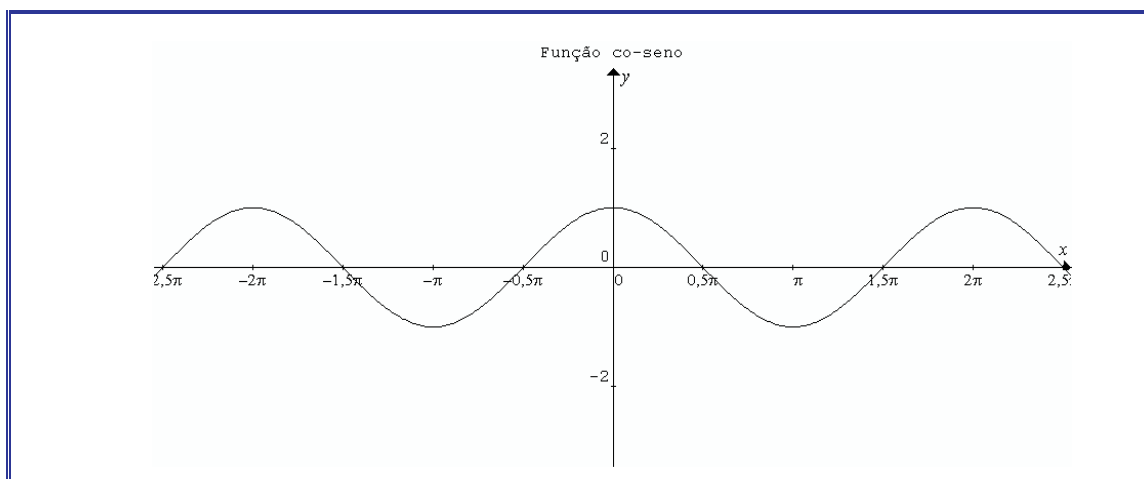
ii) Sejam números reais $w, x \in [\pi, 2\pi]$, tais que $w < x$. Se $w, x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, então $w - \pi$ e $x - \pi$ pertencem ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $w - \pi < x - \pi$, o que implica em $\cos w = -\cos(w - \frac{\pi}{2}) < -\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos x$, pela

propriedade P8 do Teorema 5.2.1 e pelo Corolário 5.2.12 – ii). Se $w \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ e $x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, então $w - \pi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $x - \frac{3\pi}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}]$, o que implica em $\cos w = -\cos(w - \pi) \leq 0 < \sin(x - \frac{3\pi}{2}) = \cos x$. Logo, $\cos w < \cos x$. Se $w, x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, então $w - \frac{3\pi}{2}$ e $x - \frac{3\pi}{2}$ pertencem ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $w - \frac{3\pi}{2} < x - \frac{3\pi}{2}$. Logo, $\cos w = \sin(w - \frac{3\pi}{2}) < \sin(x - \frac{3\pi}{2}) = \cos x$, pela Propriedade T7 do Teorema 5.2.1 e pelo Corolário 5.2.12 – iii). Conseqüentemente, $\cos w < \cos x$, e temos que a função $\cos$ é crescente no intervalo $[\pi, 2\pi]$.

Sejam números reais $w, x \in [0, \pi]$, tais que $w < x$. Se $w, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, então $\cos w > \cos x$, pela Propriedade P8 do Teorema 5.2.1. Se $w \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$, então $w - \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, o que implica em $\cos w \geq 0 > -\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos x$. Logo, $\cos w > \cos x$. Se $w, x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$, então $w - \frac{\pi}{2}$ e $x - \frac{\pi}{2}$ pertencem ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $w - \pi < x - \pi$. Logo, $\cos w = -\cos(w - \pi) < -\cos(x - \pi) = \cos x$, pela Propriedade P8 do teorema 5.2.1 e pelo corolário 5.2.12 – ii). Conseqüentemente, $\cos w < \cos x$ e temos que a função seno é decrescente no intervalo $[0, \pi]$.

A partir dos resultados obtidos, podemos concluir que os gráficos das funções seno e co-seno são como mostram as figuras a seguir.



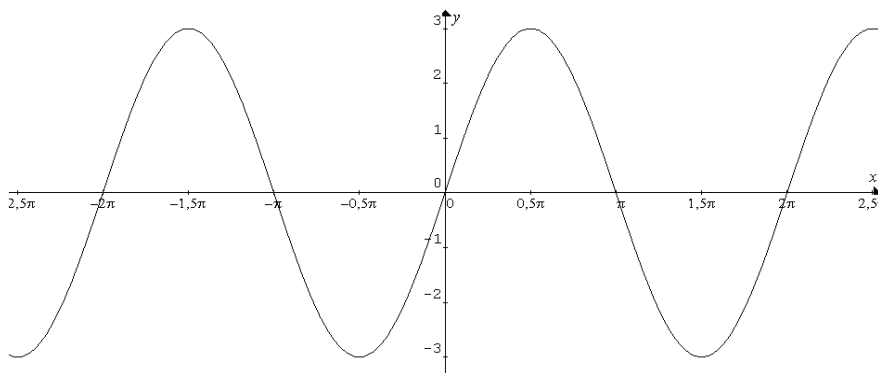


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Determine os domínios máximos e esboce os gráficos das funções dadas.

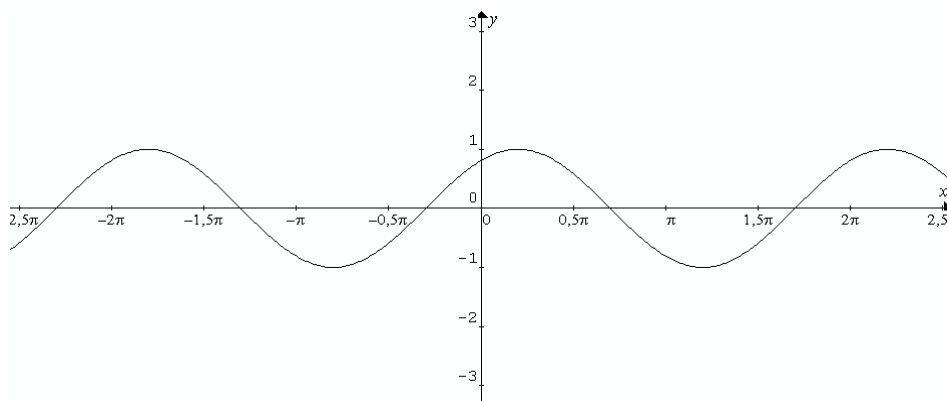
a) $f(x) = 3\sin x$

A partir do domínio da função seno, temos que $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico pode ser visto na figura a seguir.



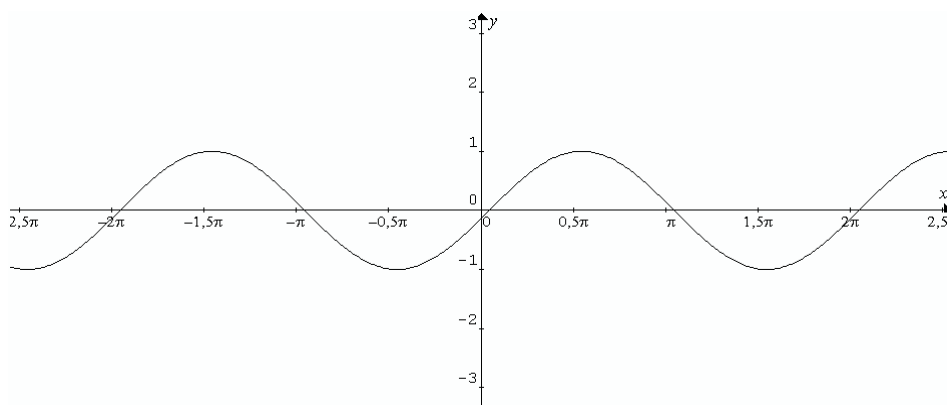
b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{5})$

A partir do domínio da função co-seno, temos que $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico de f será o gráfico da função co-seno, transladado horizontalmente (no eixo ox) $\frac{\pi}{5}$ unidades para a direita e pode ser visto na próxima figura.



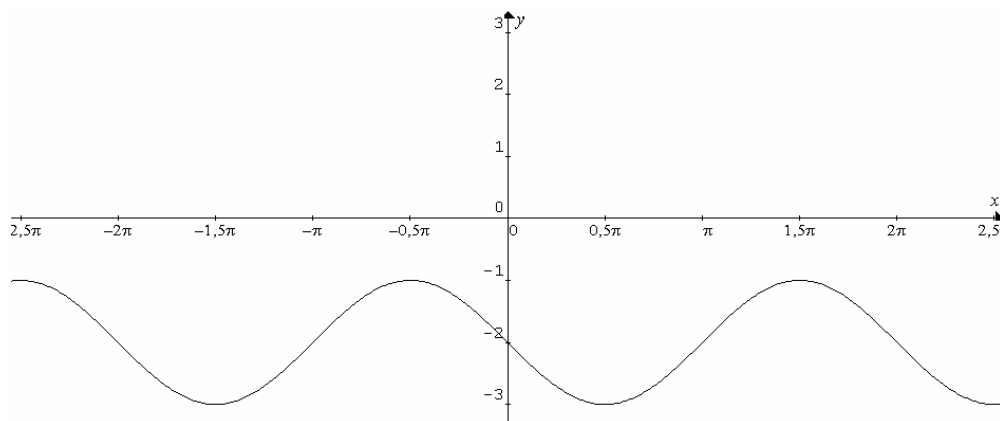
c) $f(x) = -\text{sen}(x + 3)$

A partir do domínio da função seno, temos que $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico de f será o gráfico da função seno, transladado horizontalmente (no eixo ox) 3 unidades para a esquerda, acrescido de uma rotação de 180° em torno do eixo ox e pode ser visto na figura a seguir.



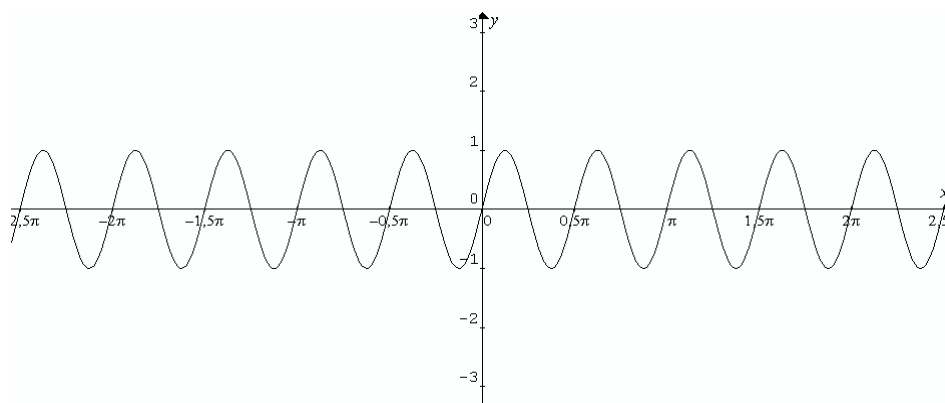
d) $f(x) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 2$

A partir do domínio da função co-seno, temos que $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico de f será o gráfico da função co-seno, transladado horizontalmente (no eixo ox) $\frac{3\pi}{2}$ unidades para a direita e transladado também verticalmente (no eixo oy) 2 unidades para baixo, e pode ser visto na próxima figura.



e) $f(x) = \text{sen}(4x)$

A partir do domínio da função seno, temos que $D_f = \mathbb{R}$. O gráfico de f pode ser visto na próxima figura.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS 5.2.15

1) Esboce os gráficos das funções dadas.

i) $f(x) = 7\text{sen } x$;

ii) $f(x) = -3\cos x$;

iii) $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$;

iv) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

v) $f(x) = \text{sen}(5x)$;

vi) $f(x) = -\cos(9x)$;

$$\text{vii)} f(x) = -\sin(x + 5);$$

$$\text{viii)} f(x) = \cos(x - 13);$$

$$\text{ix)} f(x) = -8\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\text{x)} f(x) = 15\cos(x - \pi);$$

$$\text{xi)} f(x) = 9\sin(5x);$$

$$\text{xii)} f(x) = -11\cos(7x);$$

$$\text{xiii)} f(x) = \sin(x + 3) + 11;$$

$$\text{xiv)} f(x) = \cos(x - 13) - 9;$$

$$\text{xvii)} f(x) = -8\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3;$$

$$\text{xviii)} f(x) = 5\cos(x - \pi) - 2;$$

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As soluções de muitos problemas práticos que envolvem ângulos são obtidas a partir da resolução de equações trigonométricas. Nesta seção, vamos consideraremos o problema de resolver tais equações. Trataremos somente da resolução de três tipos de equações trigonométricas, envolvendo as funções seno e co-seno.

Lema 5.2.16. Valem as seguintes afirmações.

- i) $\sin x = 0$ se, e somente se, $x = k\pi$, para todo inteiro k ;
- ii) $\sin x = 1$ ($\sin x = -1$) se, e somente se, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$), para todo inteiro k ;
- iii) $\cos x = 0$ se, e somente se, $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, para todo inteiro k ;
- iv) $\cos x = 1$ ($\cos x = -1$) se, e somente se, $x = 2k\pi$ ($x = (2k+1)\pi$), para todo inteiro k .

Demonstração. Deixaremos a verificação desses resultados a cargo do leitor.

Lema 5.2.17. Valem as seguintes afirmações.

- i) $\sin a = \sin b$ se, e somente se, $a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + (2k+1)\pi$, para todo inteiro k ;
- ii) $\cos a = \cos b$ se, e somente se, $a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + 2k\pi$, para todo inteiro k ;

i) $\sin a = \cos b$ se, e somente se, $a = b + \frac{(4k+1)\pi}{2}$ ou $a = -b + \frac{(4k+1)\pi}{2}$, para todo inteiro k .

Demonstração.

i) Se $a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + (2k+1)\pi$, para todo inteiro k , então $\sin a = \sin b$, pelas identidades em P4 do Teorema 5.2.1 no item *i)*, da Proposição 5.2.4 e pelo Lema 5.2.16 – *i)* e *iv)*. Por outro lado, se $\sin a = \sin b$, então $\cos^2 a = \cos^2 b$, pelo Lema 5.2.2, o que implica em $|\cos a| = |\cos b|$, isto é, $\cos a = \cos b$ ou $\cos a = -\cos b$. Se $\cos a = \cos b$, então $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a = 0$, isto é, $\sin(a-b) = 0$. Pelo Lema 5.2.16 – *i)*, concluímos que $a = b + l\pi$, para algum inteiro l . Mas, $\cos a = \cos(b + l\pi) = \cos b \cos(l\pi)$, o que implica em $\cos(l\pi) = 1$. Logo, $l = 2k$, para algum inteiro k , pelo Lema 5.2.16 – *iv)*. Conseqüentemente, $a = b + 2k\pi$, para algum inteiro k . Se $\cos a = -\cos b$, então $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a = 0$, isto é, $\sin(a+b) = 0$. Pelo Lema 5.2.16 – *i)*, concluímos que $a = -b + l\pi$, para algum inteiro l . Mas $\cos a = \cos(-b + l\pi) = \cos b \cos(l\pi)$, o que implica em $\cos(l\pi) = -1$. Logo, $l = 2k+1$, para algum inteiro k , pelo Lema 5.2.16 – *iv)*. Conseqüentemente, $a = -b + (2k+1)\pi$, para algum inteiro k .

ii) A expressão $\cos a = \cos b$ é equivalente a $\sin(a + \frac{\pi}{2}) = \sin(b + \frac{\pi}{2})$, pela Proposição 5.2.10 – *i)*.

Pela conclusão do primeiro caso, concluímos que $a + \frac{\pi}{2} = b + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $a + \frac{\pi}{2} = -(b + \frac{\pi}{2}) + (2k+1)\pi$, para todo inteiro k . Resolvendo essas duas últimas expressões, obtemos $a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + 2k\pi$, para todo inteiro k .

iii) Finalmente, a expressão $\sin a = \cos b$ é equivalente a $\sin a = \sin(b + \frac{\pi}{2})$, pela Proposição 5.2.10 –

i). Pela conclusão do primeiro caso, concluímos que $a = b + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $a = -(b + \frac{\pi}{2}) + (2k+1)\pi$,

para todo inteiro k . Resolvendo essas duas últimas expressões, obtemos $a = b + \frac{(4k+1)\pi}{2}$ ou $a = -b +$

$\frac{(4k+1)\pi}{2}$, para todo inteiro k .

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

RESOLVA AS EQUAÇÕES.

a) $\sin(11x + \frac{5\pi}{7}) = 0$

Como $\sin(11x + \frac{5\pi}{7}) = 0 \Leftrightarrow 11x + \frac{5\pi}{7} = k\pi$, para todo inteiro k

$\Leftrightarrow 11x = -\frac{5\pi}{7} + k\pi$, para todo inteiro $k \Leftrightarrow x = \left(\frac{-5+7k}{77}\right)\pi$, para todo inteiro k ,

concluimos que o conjunto solução é o conjunto $\left\{\left(\frac{-5+7k}{77}\right)\pi / k \text{ é um inteiro qualquer}\right\}$

b) $\cos(5x + \frac{3\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Como $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então

$\cos(5x + \frac{3\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 5x + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $5x + \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, para todo inteiro $k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \left(\frac{-5+8k}{20}\right)\pi$ ou $x = \left(\frac{-7+8k}{20}\right)\pi$, para todo inteiro k .

Logo, o conjunto solução é o conjunto $\left\{\left(\frac{-5+8k}{20}\right)\pi \text{ ou } \left(\frac{-7+8k}{20}\right)\pi / k \text{ é um inteiro qualquer}\right\}$

c) $\sin(2x + 1) = -\cos(3x - 5)$

Como

$\sin(2x + 1) = -\cos(3x - 5) \Leftrightarrow -\sin(2x + 1) = \cos(3x - 5) \Leftrightarrow \sin(-2x - 1) = \cos(3x - 5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2x - 1) = (3x - 5) + \frac{(4k+1)}{2}\pi$ ou $(-2x - 1) = -(3x - 5) + \frac{(4k+1)}{2}\pi$, para todo inteiro k

$\Leftrightarrow -5x + 4 = \frac{(4k+1)}{2}\pi \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} - \frac{(4k+1)}{10}\pi$ ou $x = 6 + \frac{(4k+1)}{2}\pi$, para todo inteiro k .

Logo, o conjunto solução é o conjunto $\left\{ \frac{4}{5} - \frac{(4k+1)}{10}\pi \text{ ou } 6 + \frac{(4k+1)}{2}\pi / k \text{ é um inteiro qualquer} \right\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 5.2.18

1. Resolva as equações a seguir.

i) $\sin(3x + \pi) = 0$;

ii) $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = -1$;

iii) $\sin(4x - \pi) = \frac{1}{2}$;

iv) $\cos\left(5x + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

v) $\sin(6x - \pi) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$;

vi) $\cos(11x + \pi) = \cos\left(9x - \frac{3\pi}{2}\right)$;

vii) $\sin(4x - 7) = \cos(5x - \pi)$;

viii) $\sin(2x - 3) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

ix) $\cos(11x + 3) = -\cos(9x - 8)$;

x) $\sin(7x + 4) = -\cos(3x - 5)$.

5.2.2 FUNÇÃO TANGENTE E CO-TANGENTE

Definição 5.2.19. Definimos as **funções tangentes e co-tangente**, denotadas pelos símbolos

$$\text{tg}: D_{\text{tg}} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = \text{tg } x,$$

e

$$\text{cotg}: D_{\text{cotg}} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = \text{cotg } x,$$

respectivamente, como as funções trigonométricas cujas regras de correspondências e seus domínios são dados por

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ para todo } x \in D_{\text{tg}},$$

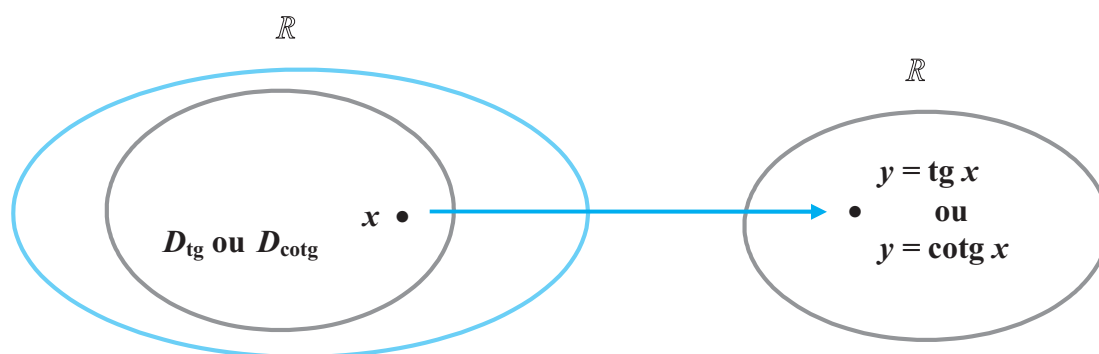
em que $D_{\text{tg}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\},$

e

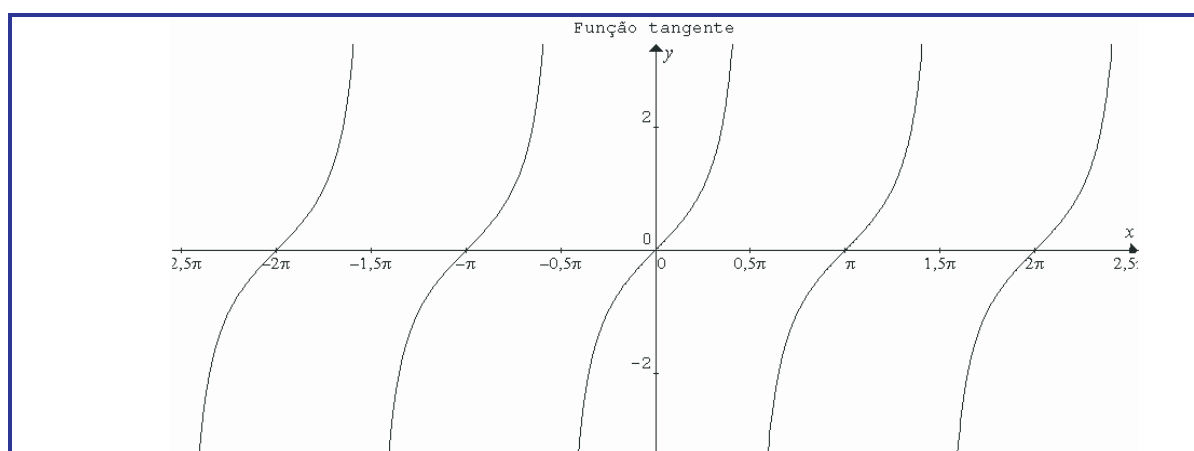
$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}, \text{ para todo } x \in D_{\cotg},$$

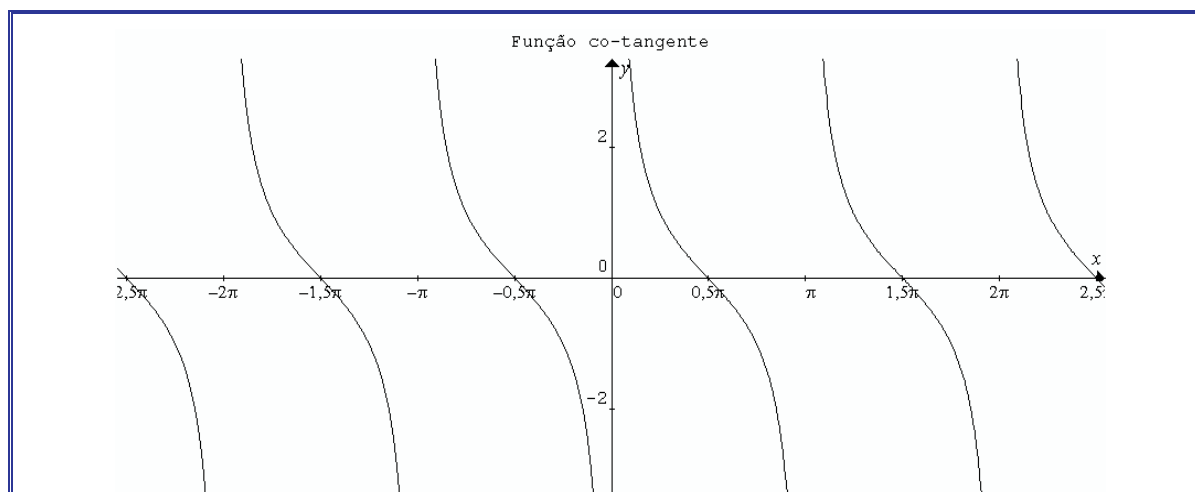
em que $D_{\cotg} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}.$

A interpretação das funções tangente e co-tangente, em diagramas de *Venn*, podem ser vistas como mostra a figura a seguir.



Os gráficos das funções tangente e cotangente são como nas próximas figuras.





Os resultados que seguem são conseqüências diretas das aplicações das Propriedades P2, P3, P4 e P5 do Teorema 5.2.1, das identidades da Proposição 5.2.4 e das Proposições 5.2.8, 5.2.10 e 5.2.12, nas definições das funções tangentes e co-tangente. Deixaremos as suas demonstração a cargo do leitor.

Proposição 5.2.20. Valem as seguintes afirmações.

- i) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, para todo número real $x \in D_{\operatorname{tg}}$.
- ii) $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$, para todo número real $x \in D_{\operatorname{cotg}}$.

Proposição 5.2.21. Valem as seguintes afirmações.

- i) $\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$, quaisquer que sejam os números reais $a, b \in D_{\operatorname{tg}}$.
- ii) $\operatorname{cotg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b \mp 1}{\operatorname{cotg} a \pm \operatorname{tg} b}$, quaisquer que sejam os números reais $a, b \in D_{\operatorname{cotg}}$.

Proposição 5.2.22. Para todo número real $x \in D_{\operatorname{tg}}$, temos:

- i) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg} x;$
- ii) $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x;$
- iii) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg} x;$
- iv) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x;$

$$v) \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x;$$

$$vi) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x;$$

$$vii) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} x;$$

$$viii) \operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x;$$

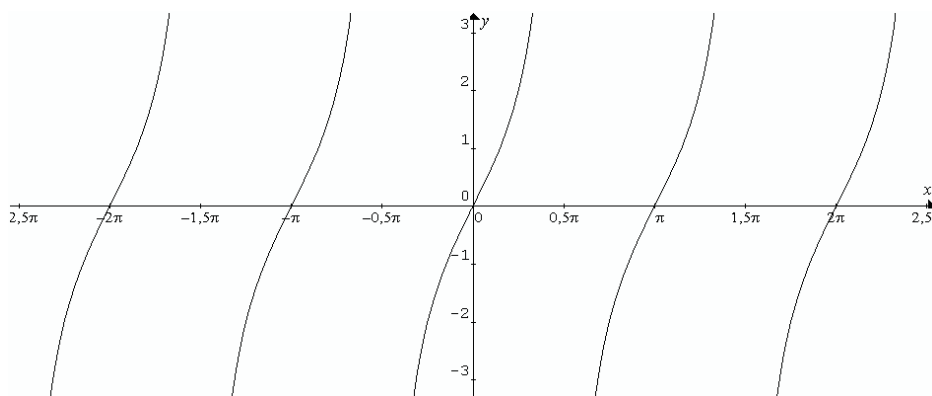
$$ix) \operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg} x.$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Determine os domínios máximos e esboce os gráficos das funções dadas.

a) $f(x) = 7\operatorname{tg} x$

A partir do domínio da função tangente, temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$. O gráfico pode ser visto na figura a seguir.

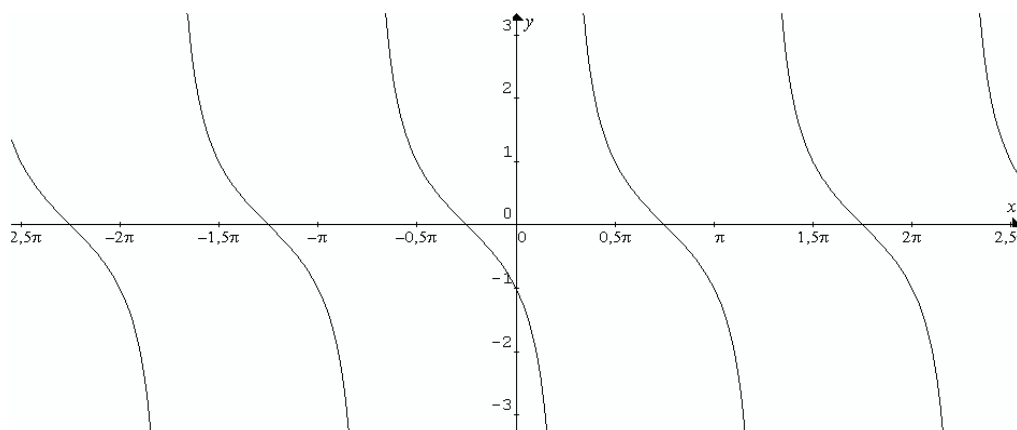


b) $f(x) = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

A partir do domínio da função co-tangente, temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\} =$

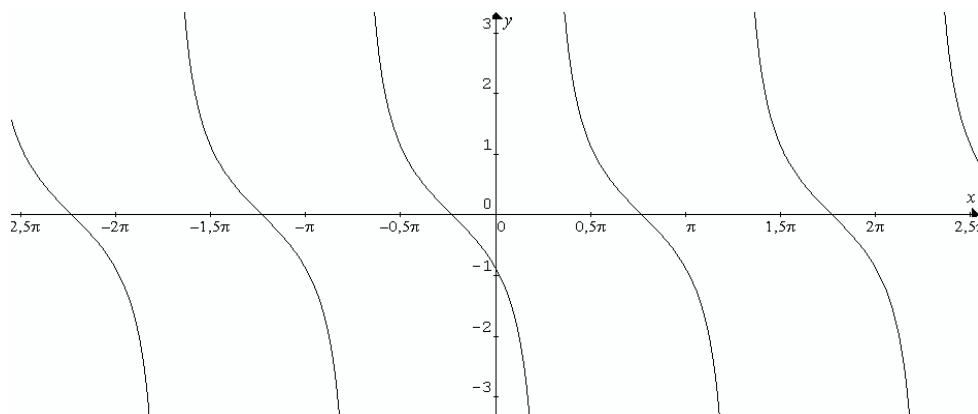
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$. O gráfico de f será o gráfico da função co-tangente,

transladado horizontalmente (no eixo ox) $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita e pode ser visto na figura a seguir.



c) $f(x) = -\operatorname{tg}(x + 7)$

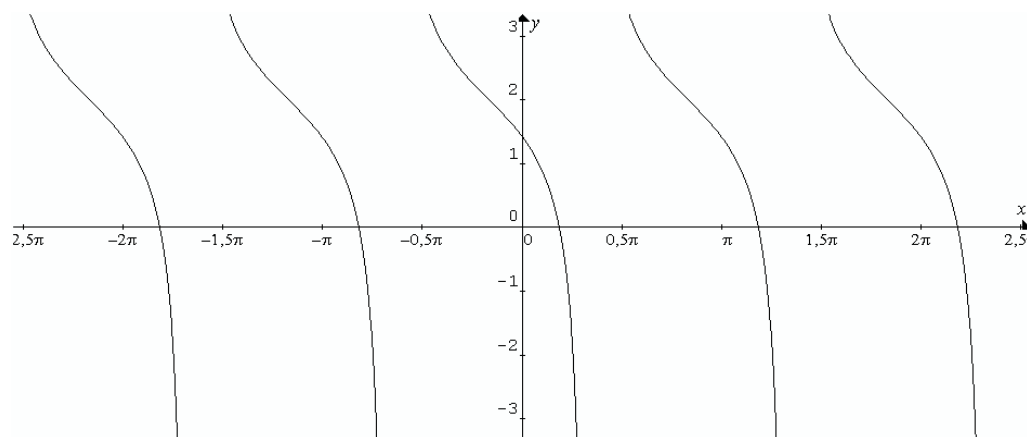
A partir do domínio da função tangente, temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 7 \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -7 + \frac{(2k+1)}{2}\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$. O gráfico de f será o gráfico da função tangente transladado horizontalmente (no eixo ox) 7 unidades para a esquerda, acrescido de uma rotação de 180° em torno do eixo ox , e pode ser visto na figura a seguir.



d) $f(x) = \operatorname{cotg}(x - \frac{\pi}{3}) + 2$

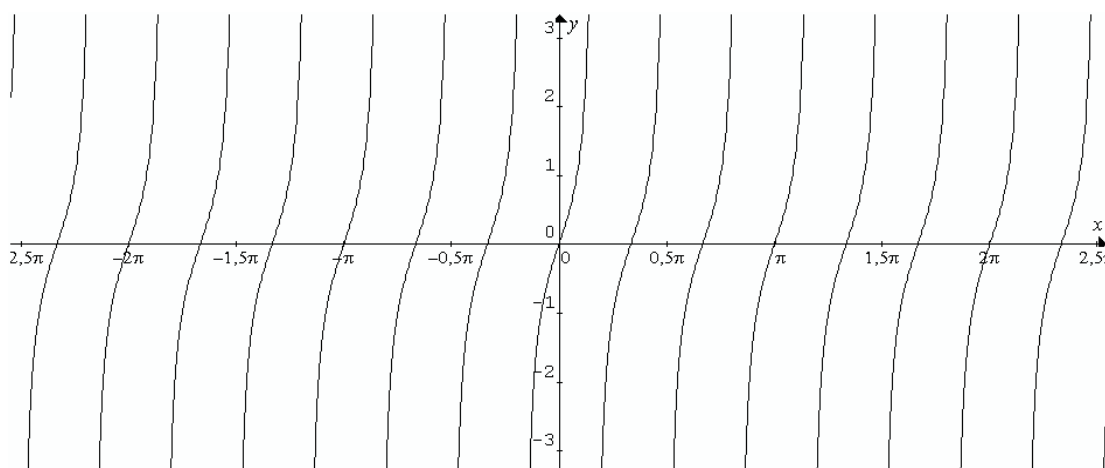
A partir do domínio da função co-tangente, temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\} =$
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$. O gráfico de f será o gráfico da função co-tangente,

transladado horizontalmente (no eixo ox) $\frac{\pi}{3}$ unidades para a direita e transladado também verticalmente (no eixo oy) 2 unidades para cima, e pode ser visto na figura a seguir.



e) $f(x) = \text{tg}(3x)$

A partir do domínio da função tangente, temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{(2k+1)}{6}\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$. O gráfico de f pode ser visto na figura a seguir.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS 5.2.23

1) Para todo número real $x \in D_{\cotg}$, determine.

$$i) \cotg \left(x + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$ii) \cotg (x + \pi);$$

$$iii) \cotg \left(x + \frac{3\pi}{2} \right);$$

$$iv) \cotg \left(\frac{\pi}{2} - x \right);$$

$$v) \cotg (\pi - x);$$

$$vi) \cotg \left(\frac{3\pi}{2} - x \right);$$

$$vii) \cotg \left(x - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$viii) \cotg (x - \pi);$$

$$ix) \cotg \left(x - \frac{3\pi}{2} \right).$$

2) Determine os domínios máximos e esboce os gráficos das funções dadas.

$$i) f(x) = 7 \operatorname{tg} x;$$

$$ii) f(x) = -3 \cotg x;$$

$$iii) f(x) = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{2} \right);$$

$$iv) f(x) = \cotg \left(x - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$v) f(x) = \operatorname{tg} (5x);$$

$$vi) f(x) = -\cotg (9x);$$

$$vii) f(x) = -\operatorname{tg} (x + 5);$$

$$viii) f(x) = \cotg (x - 13);$$

$$ix) f(x) = -8 \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$x) f(x) = 15 \cotg (x - \pi);$$

$$xi) f(x) = 9 \operatorname{tg} (5x);$$

$$xii) f(x) = -11 \cotg (7x);$$

$$xiii) f(x) = \operatorname{tg} (x + 3) + 11;$$

$$xiv) f(x) = \cotg (x - 13) - 9;$$

$$xvii) f(x) = -8 \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - 3;$$

$$xviii) f(x) = 5 \cotg (x - \pi) - 2.$$

5.2.3 FUNÇÕES SECANTE E CO-SECANTE

Definição 5.2.24. Definimos as **funções secante e co-secante**, denotadas pelos símbolos

$$\sec: D_{\sec} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = \sec x,$$

e

$$\operatorname{cosec}: D_{\operatorname{cosec}} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = \operatorname{cosec} x,$$

respectivamente, como as funções trigonométricas cujas regras de correspondências e seus domínios são dados por

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ para todo } x \in D_{\sec},$$

em que $D_{\sec} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$ ($= D_{\text{tg}}$)

e

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \text{ para todo } x \in D_{\operatorname{cosec}},$$

em que $D_{\operatorname{cosec}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\}$ ($= D_{\cotg}$).

Os dois resultados que seguem são conseqüências diretas do Lema 5.2.2. Deixaremos as suas demonstrações a cargo do leitor.

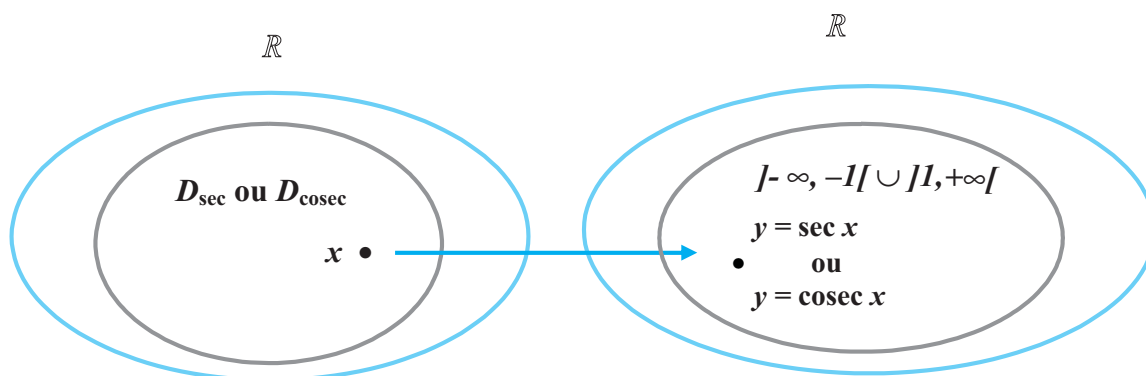
Proposição 5.2.25. Valem as seguintes afirmações.

- i) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, para todo número real $x \in D_{\sec}$ ($= D_{\text{tg}}$);
- ii) $1 + \cotg^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$, para todo $x \in D_{\operatorname{cosec}}$ ($= D_{\cotg}$).

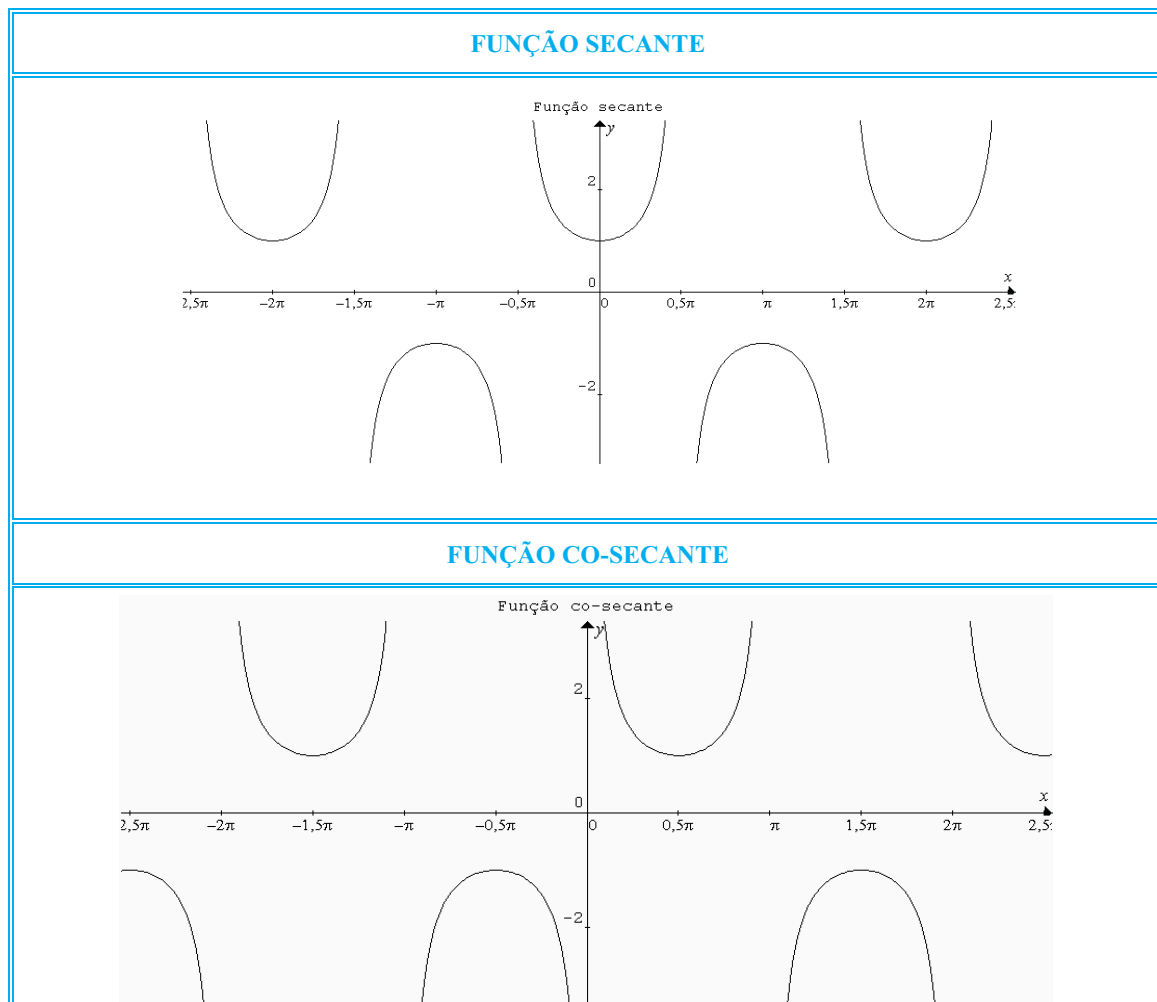
Proposição 5.2.26. Valem as seguintes afirmações.

- i) $\sec x \leq -1$ ou $\sec x \geq 1$, para todo número real $x \in D_{\sec}$;
- ii) $\operatorname{cosec} x \leq -1$ ou $\operatorname{cosec} x \geq 1$, para todo $x \in D_{\operatorname{cosec}}$.

As interpretações das funções secante e co-secante, em diagramas de Venn, podem ser vistas como mostram as figuras que a seguir.



Os gráficos das funções **secante** e **co-secante** são como nas próximas figuras

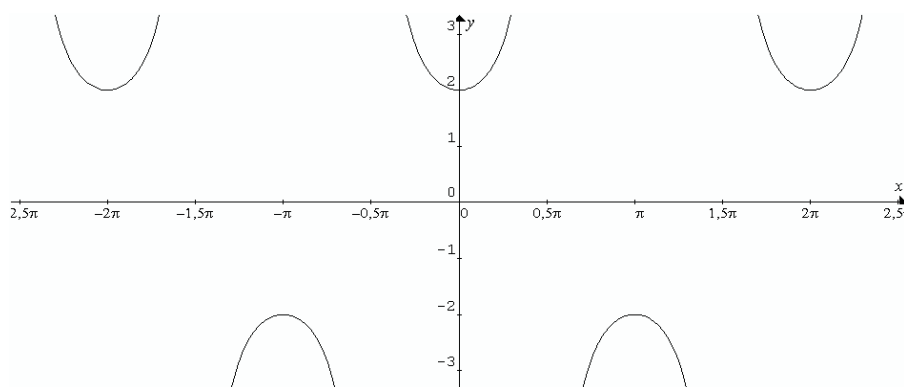


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Determine os domínios máximos e esboce os gráficos das funções dadas.

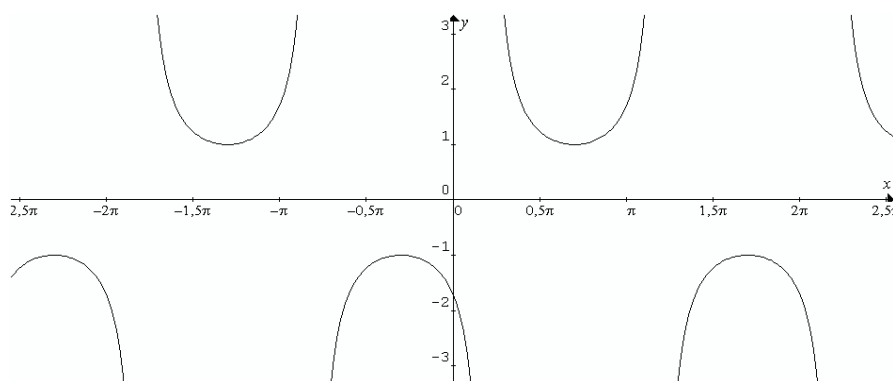
a) $f(x) = 2\sec x$

A partir do domínio da função secante, temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$. Seu gráfico pode ser visto na figura a seguir.



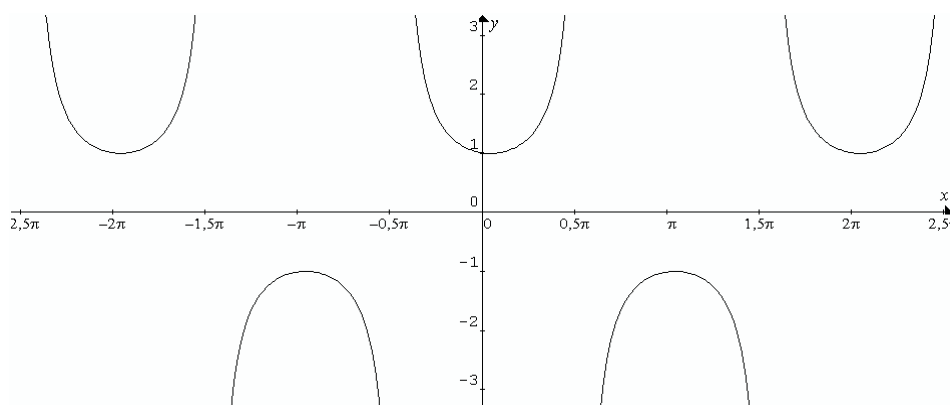
b) $f(x) = \operatorname{cosec} \left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

A partir do domínio da função co-secante, temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \frac{\pi}{5} \neq k\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{5} + k\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$. O gráfico de f será o gráfico da função co-secante, transladado horizontalmente (no eixo ox) $\frac{\pi}{5}$ unidades para a direita, e pode ser visto na figura a seguir.



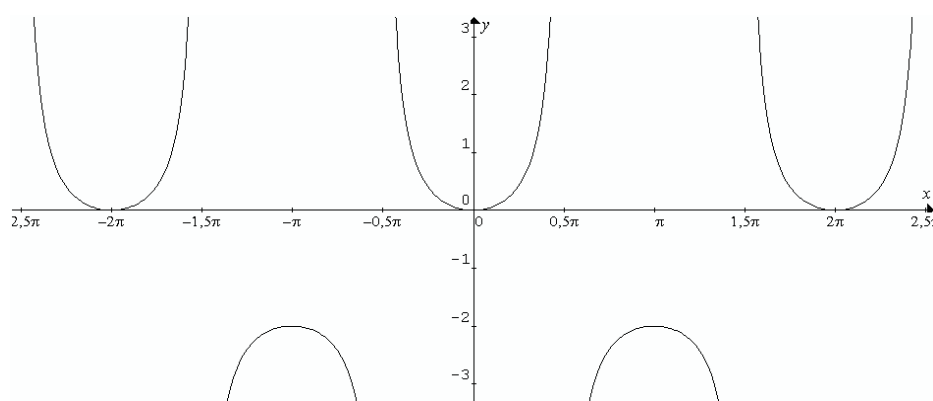
c) $f(x) = -\sec(x + 3)$

A partir do domínio da função secante, temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3 + \frac{(2k+1)\pi}{2}, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$. O gráfico de f será o gráfico da função secante transladado horizontalmente (no eixo ox) 3 unidades para a esquerda, acrescido de uma rotação de 180° em torno do eixo ox , e pode ser visto na figura a seguir.



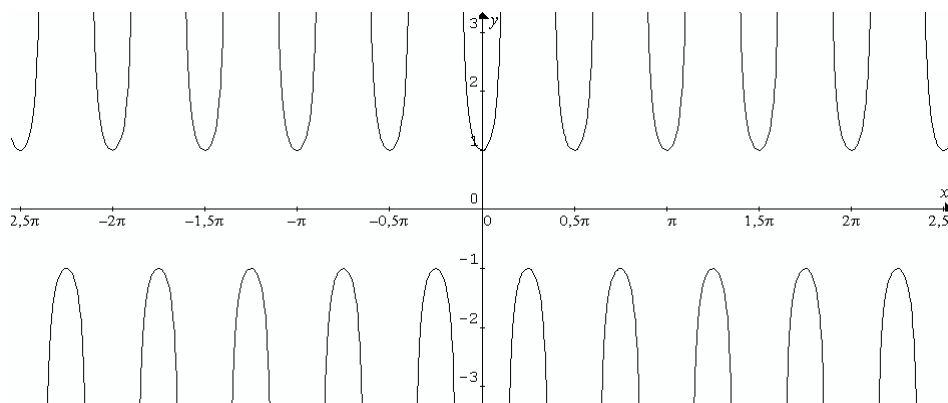
d) $f(x) = \operatorname{cosec}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 1$

A partir do domínio da função co-secante, temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \frac{3\pi}{2} \neq k\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{2} + k\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$. O gráfico de f será o gráfico da função co-secante, transladado horizontalmente (no eixo ox) $\frac{3\pi}{2}$ unidades para a direita e transladado também verticalmente (no eixo oy) 1 unidades para baixo, e pode ser visto na figura a seguir.



e) $f(x) = \sec(4x)$

A partir do domínio da função secante, temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{(2k+1)}{8}\pi, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$. O gráfico de f pode ser visto na figura a seguir.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS 5.2.27

1) Para todo número real $x \in D_{\sec}$, determine:

- i)* $\sec(-x)$; *ii)* $\sec(x + \frac{\pi}{2})$; *iii)* $\sec(x + \pi)$; *iv)* $\sec(x + \frac{3\pi}{2})$; *v)* $\sec(\frac{\pi}{2} - x)$;
vi) $\sec(\pi - x)$; *vii)* $\sec(\frac{3\pi}{2} - x)$; *viii)* $\sec(x - \frac{\pi}{2})$; *ix)* $\sec(x - \pi)$; *x)* $\sec(x - \frac{3\pi}{2})$.

2) Para todo número real $x \in D_{\csc}$, determine:

- i)* $\csc(-x)$; *ii)* $\csc(x + \frac{\pi}{2})$; *iii)* $\csc(x + \pi)$; *iv)* $\csc(x + \frac{3\pi}{2})$;
v) $\csc(\frac{\pi}{2} - x)$; *vi)* $\csc(\pi - x)$; *vii)* $\csc(\frac{3\pi}{2} - x)$; *viii)* $\csc(x - \frac{\pi}{2})$;
ix) $\csc(x - \pi)$; *x)* $\csc(x - \frac{3\pi}{2})$.

3) Determine os domínios máximos e esboce os gráficos das funções dadas.

- i)* $f(x) = 7\sec x$; *ii)* $f(x) = -3\operatorname{cosec} x$; *iii)* $f(x) = \sec\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$;
- iv)* $f(x) = \operatorname{cosec}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; *v)* $f(x) = \sec(5x)$; *vi)* $f(x) = -\operatorname{cosec}(9x)$;
- vii)* $f(x) = -\sec(x + 5)$; *viii)* $f(x) = \operatorname{cosec}(x - 13)$; *ix)* $f(x) = -8\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;
- x)* $f(x) = 15\operatorname{cosec}(x - \pi)$; *xi)* $f(x) = 9\sec(5x)$; *xii)* $f(x) = -11\operatorname{cosec}(7x)$;
- xiii)* $f(x) = \sec(x + 3) + 11$; *xiv)* $f(x) = \operatorname{cosec}(x - 13) - 9$; *xvii)* $f(x) = -8\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3$;
- xviii)* $f(x) = 5\operatorname{cosec}(x - \pi) - 2$.

5.3 REFERÊNCIAS ELETRÔNICAS

Para referências de Funções, sugerimos que o leitor consulte os seguintes endereços eletrônicos.

1. <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/>

1.1. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS**1.2.**

Relações Trigonométricas: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria.htm>

Funções Trigonométricas Circulares: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria07.htm>

Funções Trigonométricas Inversas: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria08.htm>

2. <http://www.fund198.ufba.br/>

2.1. TRIGONOMETRIA

Relações Trigonométricas: <http://www.fund198.ufba.br/trigonometria.htm>

Funções, Equações Trigonométricas e Exercícios: <http://www.fund198.ufba.br/trigonometria.htm> e

<http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo/>

Capítulo 6

CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos apareceram no século XVI ao longo das descobertas de procedimentos gerais para resolução de equações algébricas de terceiro e quarto grau. No século XIX, aparece a representação geométrica dos números complexos, motivada pela necessidade em Geometria, Topografia e Física, de se trabalhar com o conceito de vetor no plano. Os números complexos passam a ser aplicados em várias áreas do conhecimento humano, dentro e fora da Matemática. O que veremos a seguir é apenas uma introdução aos Números Complexos e o tema será aprofundado nas próximas disciplinas, quando convier.

6.1 INTRODUÇÃO. UMA REFLEXÃO SOBRE A SUA EXISTÊNCIA

Sabemos que o polinômio quadrático: $P(x) = x^2 + 1$ não possui raízes no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, isto é, a equação algébrica $x^2 + 1 = 0$ não possui raízes em $\mathbb{R}$. Consideremos a seguinte questão:

Existe um conjunto numérico $\mathbb{S}$, contendo o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e herdando as propriedades algébricas 1 – 9, relativas às operações binárias de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$, tal que o polinômio $P = P(x)$ possua ao menos uma raiz?



Você já deve ter discutido esta questão no módulo I, mas antes de dar continuidade ao seu estudo, reflita novamente a questão acima.

Para respondermos a esta questão, façamos a seguinte análise.

Se tal conjunto numérico $\mathbb{S}$ existe, então este possui um número, que denotaremos pelo símbolo i , tal que $P(i) = 0$, isto é, $i^2 + 1 = 0$.

Conseqüentemente, $i^2 = -1$.

Como o conjunto $\mathbb{S}$ herda as mesmas propriedades algébricas, das operações de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$, então $-i = (-1)i$, o que implica em $(-i)^2 = -1$.

Estamos em condições de enunciar três resultados importantes.

Resultado 1. Em $\mathbb{S}$, i e $-i$ são as *únicas* raízes do polinômio $P = P(x)$.

Prova. Suponhamos que j seja uma outra raiz, em $\mathbb{S}$, do polinômio $P = P(x)$. Então,

$$\begin{aligned} P(j) = j^2 + 1 = 0 &\Rightarrow j^2 = i^2 (= -1) \Rightarrow j^2 - i^2 = 0 \Rightarrow (j - i)(j + i) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow j - i = 0 \text{ ou } j + i = 0 \Rightarrow j = i \text{ ou } j = -i. \end{aligned}$$

Resultado 2. O conjunto $\mathbb{S}$ contém todos os números da forma $x = a + bi$, onde a e b são números reais.

Prova. Evidente.

Resultado 3. Em $\mathbb{S}$ a seguinte relação de igualdade vale: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$.

Prova. É evidente que a direção $\Leftarrow$ é verdadeira. Por outro lado, se $a + bi = c + di$, então

$$(a - c) + (b - d)i = 0 \Rightarrow (b - d)i = (c - a). \text{ Se } b \neq d, \text{ então } i = \frac{c - a}{b - d}, \text{ o que é um absurdo, pois } i \notin \mathbb{R}.$$

$$\text{Logo, } b = d \Rightarrow a - c = 0 \Rightarrow a = c.$$

Isto nos sugere os seguintes questionamentos.

Consideremos o subconjunto de $\mathbb{S} : \mathbb{R} + \mathbb{R}i = \{x \mid x = a + bi, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\}.$

i) $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$ é um subconjunto numérico de $\mathbb{S}$, contendo $\mathbb{R}$ e herdando as propriedades algébricas 1 – 9 de $\mathbb{R}$, tal que o polinômio quadrático $P = P(x)$ possua ao menos uma raiz?

ii) em $\mathbb{S}$ existem subconjuntos numéricos, contendo $\mathbb{R}$ e herdando as propriedades algébricas 1 – 9 de $\mathbb{R}$, tais que, em cada um desses subconjuntos numéricos, o polinômio quadrático $P = P(x)$ possua ao menos uma raiz?

iii) em $\mathcal{S}$ existe um *menor* subconjunto numérico, contendo $\mathcal{R}$ e herdando as propriedades algébricas 1 – 9 de $\mathcal{R}$, tal que o polinômio quadrático $P = P(x)$ possua ao menos uma raiz?

Analise tais questões.

Seja $\{\mathcal{S}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, em que Λ é um conjunto de índices, a família de todos os subconjuntos numéricos de $\mathcal{S}$, contendo $\mathcal{R}$ e herdando as propriedades algébricas 1 – 9 de $\mathcal{R}$, tal que, para cada índice $\lambda \in \Lambda$, o polinômio quadrático $P = P(x)$ possua ao menos uma raiz em $\mathcal{S}_\lambda$. Tomemos o subconjunto

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_\lambda.$$

Vamos mostrar que o conjunto $\mathcal{C}$ também pertence a essa família. De fato, observemos que:

- i)** $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}$; a soma de elementos de $\mathcal{C}$ está em $\mathcal{C}$; o produto de elementos de $\mathcal{C}$ está em $\mathcal{C}$;
- ii)** o conjunto $\mathcal{C}$ possui um único elemento zero;
- iii)** para todo elemento de $\mathcal{C}$, o seu simétrico aditivo está em $\mathcal{C}$;
- iv)** o conjunto $\mathcal{C}$ possui uma única unidade multiplicativa;
- v)** para todo elemento não nulo de $\mathcal{C}$, o seu inverso multiplicativo está em $\mathcal{C}$;
- vi)** as propriedades 1 – 9 de $\mathcal{R}$, são válidas em $\mathcal{C}$, pois são válidas em $\mathcal{S}$.

Além disso, temos também:

- viii)** $\mathcal{R} + \mathcal{R}i \subseteq \mathcal{C}$.

Estes resultados sugerem que investiguemos os efeitos das operações binárias de adição e multiplicação, de $\mathcal{S}$, sobre o conjunto $\mathcal{R} + \mathcal{R}i$.

Resultado 4. (Adição em $\mathcal{R} + \mathcal{R}i$) Sejam os números $x = a + bi$, $y = c + di$, $z = e + fi$ de $\mathcal{R} + \mathcal{R}i$, com a, b, c, d, e e f números reais. Então, a soma $x + y$ é um número de $\mathcal{R} + \mathcal{R}i$, a saber:

$$x + y = (a + c) + (b + d)i.$$

Além disso, as seguintes propriedades da adição sobre $\mathcal{R} + \mathcal{R}i$, estão verificadas:

- 1)** $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- 2)** $x + y = y + x$;

- 3) o número $0 = 0 + 0i$ é o elemento **zero** de $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$, isto é, $x + 0 = 0 + x = x$, para todo $x \in \mathbb{R} + \mathbb{R}i$;
- 4) para todo número $x = a + bi$, o número $(-x) = (-a) + (-b)i$ é o **simétrico aditivo** de x , isto é, $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Demonstração. Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

Resultado 5. (Multiplicação em $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$) Sejam números $x = a + bi$, $y = c + di$, $z = e + fi$ de $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$ com onde a, b, c, d, e e f números reais. Então, o produto xy é um número de $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$, a saber:

$$xy = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Além disso, as seguintes propriedades estão verificadas:

- 5) $(xy)z = x(yz)$;
- 6) $xy = yx$;
- 7) o número $1 = 1 + 0i$ é o **elemento neutro da multiplicação** de $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$, isto é, $1x = x1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R} + \mathbb{R}i$;
- 8) para de todo número $x = a + bi \neq 0$, o número $\frac{1}{x} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)i$, é o **inverso multiplicativo** de x , isto é, $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$;
- 9) $(x + y)z = xz + yz$ e $x(y + z) = xy + xz$.

Demonstração. Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

Os resultados 2, 4 e 5 permitem-nos obter as conclusões a seguir.

Resultado 6. O conjunto $\mathbb{R} + \mathbb{R}i = \{x \mid x = a + bi, \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são números de } \mathbb{R}\}$ é um “**subconjunto numérico de } \mathbb{S}**”, contendo $\mathbb{R}$ e herdando as propriedades algébricas

1 - 9 de $\mathbb{R}$, tal que o polinômio $P(x) = x^2 + 1$ possui ao menos uma raiz. Além disso, $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$ é o menor

subconjunto numérico possuindo essa propriedade. Neste caso,

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R} i.$$

Demonstração. Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

6.2 CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A reflexão acima permite-nos conjecturar sobre uma apresentação do conjunto numérico $\mathbb{C}$, que responda satisfatoriamente às questões levantadas. Assim, utilizando o *Sistema de Coordenadas Cartesianas Oxy*, consideraremos a apresentação do conjunto numérico $\mathbb{C}$, como segue abaixo:

Nota: A sigla *SCC Oxy* significará *Sistema de Coordenadas Cartesianas Oxy*.

Definição 6.2.1. Seja o conjunto $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid \text{onde } a \text{ e } b \text{ são números de } \mathbb{R}\}$.

Definição 6.2.2. (Conceito de igualdade em $\mathbb{C}$): $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Definição 6.2.3. (Operações binárias de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$)

Operação de adição em $\mathbb{C}$: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Operação de multiplicação em $\mathbb{C}$: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Notação para a multiplicação: Omitiremos o ponto na multiplicação e escreveremos $x \cdot y$ ($= xy$).

Proposição 6.2.4. (Propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{C}$) Quaisquer que sejam os elementos de $\mathbb{C}$: $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ e $z = (e, f)$, com a, b, c, d, e e f números reais, tem-se que

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

2) $x + y = y + x$;

3) o elemento $0 = (0, 0)$ é o **zero** de $\mathbb{C}$, isto é, $x + 0 = 0 + x = x$, para todo elemento x em $\mathbb{C}$;

4) o elemento $(-x) = (-a, -b)$ é o **simétrico aditivo (único)** de todo elemento $x = (a, b)$, isto é, $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

5) $(xy)z = x(yz)$;

6) $xy = yx$;

7) o elemento $1 = (1, 0)$ é a **unidade multiplicativa** de $\mathbb{C}$, isto é, $1x = x1 = x$;

8) o elemento $\frac{1}{x} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ é o **inverso multiplicativo (único)** de todo elemento $x = (a, b) \neq 0$, isto é, $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$;

9) $(x + y)z = xz + yz$ e $x(y + z) = xy + xz$.

Demonstração. Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

Além disso, o subconjunto $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(a, 0) \mid \text{onde } a \text{ percorre } \mathbb{R}\}$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{R}$, em $\mathbb{C}$, pela identificação $a \mapsto (a, 0)$.

Definindo $i = (0, 1)$, temos que $i \notin \mathbb{R} \times \{0\}$ ($\neq \mathbb{R}$) e a partir de um cálculo direto podemos mostrar que $i^2 = -(1, 0) = -1$.

Finalmente, todo elemento $x = (a, b)$ pode ser representado de *maneira única* na forma

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) (0, 1).$$

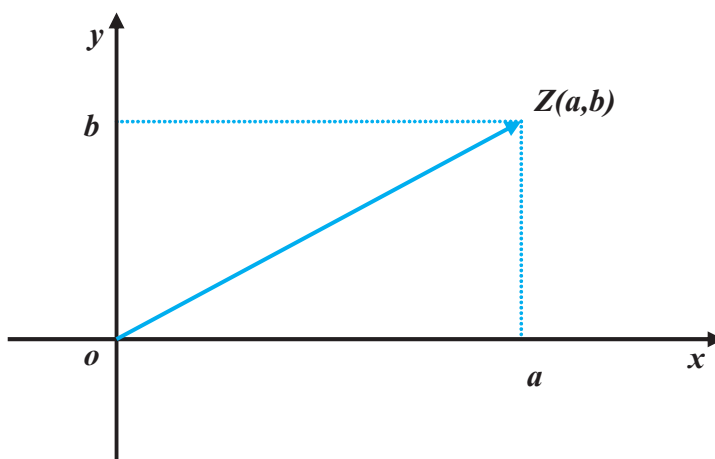
Simbolicamente, podemos concluir que $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \{0\} + \mathbb{R} \times \{0\} (0,1)$, isto é, $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R} i$.

Demonstração. Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

A partir de agora, denominaremos os elementos do sistema numérico $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ de *números complexos*.

6.2.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A própria construção e definição dos números complexos nos sugere uma maneira muito fácil de interpretá-los geometricamente, a saber: todo número complexo $z = (a, b) = a + bi$ pode ser identificado como um ponto $Z(a, b)$ do SCC Oxy , cuja abscissa é dada pelo valor a e a ordenada pelo valor b , como mostra a figura a seguir.

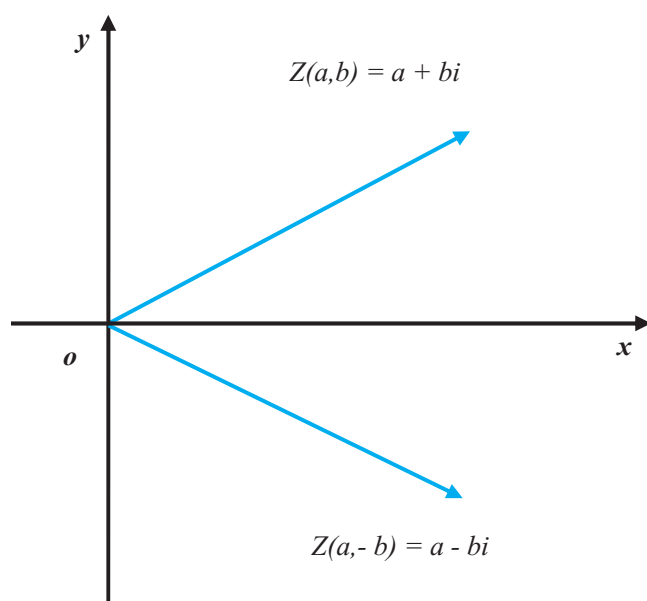


6.2.2 O COMPLEXO CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Definição 6.2.5. Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos a *parte real de z* e a *parte imaginária de z* , denotadas, respectivamente, pelos símbolos $Re(z)$ e $Im(z)$, como sendo os números reais dados por $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$. Assim, para todo número complexo z , $z = Re(z) + Im(z)i$.

Definição 6.2.6. Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos o seu **complexo conjugado**, denotado pelo símbolo $\bar{z}$, como sendo o número complexo dado por $\bar{z} = a - bi = a + (-b)i$.

A interpretação geométrica, no SCC Oxy , do complexo conjugado de um número complexo, pode ser visto na figura a seguir.



Proposição 6.2.7. Quaisquer que sejam os números complexos w e z , então

$$i) \quad z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i;$$

$$ii) \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2};$$

$$iii) \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2};$$

$$iv) \quad \overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z};$$

$$v) \quad \overline{wz} = \bar{w}\bar{z};$$

$$vi) \quad \overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}, \text{ se } z \neq 0;$$

$$\text{vii) } (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = z\bar{z}.$$

Demonstração. Deixaremos essas demonstrações a cargo do leitor.

Determine $\operatorname{Re}(\frac{\overline{2+i}}{3+5i})$ e $\operatorname{Im}(\frac{\overline{2+i}}{3+5i})$.

$$\text{Como } \frac{\overline{2+i}}{3+5i} = \frac{2-i}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i} = \frac{1-13i}{3^2+5^2} = \frac{1}{34} - \frac{13}{34}i, \text{ então } \operatorname{Re}(\frac{\overline{2+i}}{3+5i}) = \frac{1}{34} \text{ e } \operatorname{Im}(\frac{\overline{2+i}}{3+5i}) = -\frac{13}{34}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 6.2.8

1) Determine:

$$\text{i) } \operatorname{Re}(\frac{1}{2+i}); \quad \text{ii) } \operatorname{Im}(\frac{\overline{2-i}}{3+4i}); \quad \text{iii) } \operatorname{Re}(\frac{(1+i)^2}{3+2i}); \quad \text{iv) } \operatorname{Im}(\frac{2-i}{4+3i});$$

$$\text{v) Se } z = 0 + bi, b \neq 0, \text{ determine: } \operatorname{Re}(z^3), \operatorname{Im}(z^4) \text{ e } \operatorname{Im}(\frac{1}{z^2}).$$

2) Sejam $z = 2 + 3i$ e $w = 4 - 3i$. **Expresse os números complexos** z *a seguir* **na forma** $z = a + bi$.

$$\text{i) } z^2 + \bar{z}w; \quad \text{ii) } \operatorname{Im}(w^2) + i \operatorname{Re}(\bar{w}^2); \quad \text{iii) } \frac{5\bar{z}}{\bar{w}}$$

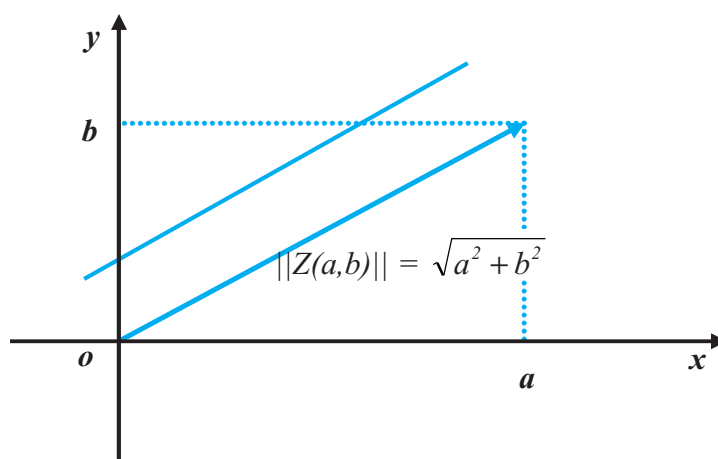
6.2.3 VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

A interpretação geométrica dos números complexos também nos sugere definir um conceito análogo ao de valor absoluto de um número real.

Definição 6.2.9. Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos o **valor absoluto** de z , denotado pelo símbolo $|z|$, como sendo o número real dado por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

A interpretação geométrica do valor absoluto de um número complexo, pode ser visto na figura a seguir.



Proposição 6.2.10. Quaisquer que sejam os números complexos w e z , temos que:

- 1) $|w| \geq 0$. Além disso, $|w| = 0$ se, e somente se, $w = 0$;
- 2) $|z|^2 = z\bar{z} = \bar{z}z$;
- 3) $|wz| = |w||z|$;
- 4) $|w + z| \leq |w| + |z|$;
- 5) $||w| - |z|| \leq |w \pm z|$.

Demonstração. Deixaremos as demonstrações a cargo do leitor.

Definição 6.2.11. Sejam w e z números complexos quaisquer. Definimos a **distância entre w e z** , como sendo o número real dado por $|w - z|$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine $\left| \frac{\overline{2+i}}{3+5i} \right|$

$$\left| \frac{\overline{2+i}}{3+5i} \right| = \frac{\overline{2+i}}{3+5i} = \frac{|\overline{2+i}|}{|3+5i|} = \frac{|2+i|}{|3+5i|} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{34}}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 6.2.12

1) Demonstre que quaisquer que sejam os números complexos w e z , $z \neq 0$, então: $\left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|}$.

2) Determine: i) $|z|^2$; ii) $\left| \frac{1+4i}{4+i} \right|$; iii) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right|$, para $z \neq -1$.

6.2.4 FORMA POLAR DE UM NÚMERO COMPLEXO

A partir das definições da trigonometria plana, a representação geométrica de um número complexo z permite identificar um ângulo θ , compreendido entre o segmento Oz e o eixo das abscissas Ox .

Definição 6.2.13. Dado um número complexo $z = a+bi \neq 0$, chamamos de **argumento do número complexo z** , e denotamos pelo símbolo $\arg(z)$, qualquer um dos ângulos θ que o segmento Oz forma com o semi-eixo positivo Ox . Todo número complexo $z \neq 0$ possui uma infinidade de argumentos. Quaisquer dois argumentos de z diferem entre si por um múltiplo de 2π . Assim,

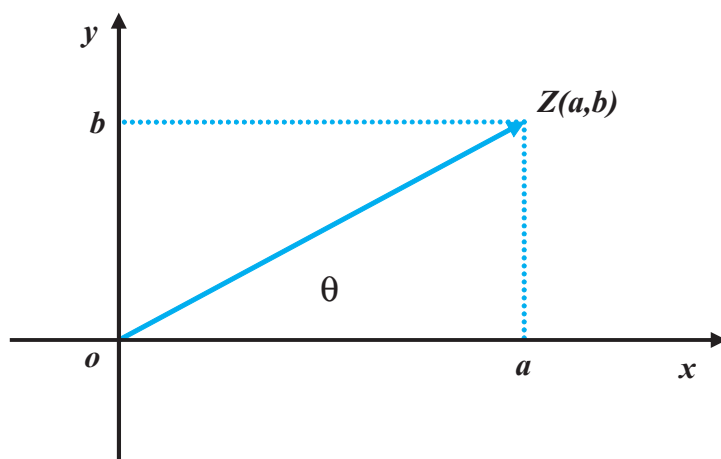
$$\arg(z) = \theta = \theta_0 + 2k\pi, \text{ com } 0 < \theta_0 < 2\pi, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

O ângulo θ_0 também é um argumento de z e é chamado de **valor principal do argumento ou argumento principal de z** . O valor do argumento de z satisfaz as condições

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Tomando $s = \sqrt{a^2 + b^2}$, então podemos escrever $z = s (\operatorname{sen} \theta + i \cos \theta)$, denominada de **forma polar do número complexo z** .

No SCC Oxy , o argumento de um número complexo z pode ser interpretado como a medida angular de um arco de vértice na origem O , com raio inicial sobre o eixo Ox e o raio final sobre o segmento Oz , como mostra a figura a seguir.



Lema 6.2.14. (Igualdade de complexos na forma polar) Consideremos dois números complexos na forma polar $w = r (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ e $z = s (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, em que r e s são seus valores absolutos e φ e θ são seus argumentos. Então, $w = z$ se, e somente se,

$$r = s \quad \text{e} \quad \cos \varphi = \cos \theta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \theta.$$

Demonstração.

Se $w = z$, então

$$r = \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \operatorname{sen} \varphi)^2} = |w| = |z| = \sqrt{(s \cos \theta)^2 + (s \operatorname{sen} \theta)^2} = s.$$

Assim, temos que $\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$. Logo, $\cos \varphi = \cos \theta$ e $\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \theta$.

Reciprocamente, se $r = s$, $\cos \varphi = \cos \theta$ e $\sin \varphi = \sin \theta$, e temos que $w = z$.

Corolário 6.2.15. Consideremos dois números complexos na forma polar $w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ e $z = s (\cos \theta + i \sin \theta)$, em que r e s são seus valores absolutos e φ e θ são seus argumentos. Então, $w = z$ se, e somente se, $r = s$ e $\varphi = \theta + 2k\pi$, para algum número inteiro k .

Demonstração. Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

Lema 6.2.16. (Multiplicação de complexos na forma polar) Consideremos dois números complexos $w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ e $z = s (\cos \theta + i \sin \theta)$, em que r e s são seus valores absolutos e φ e θ são seus argumentos. Então

$$w \cdot z = r s [\cos (\varphi + \theta) + i \sin (\varphi + \theta)]$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} w z &= [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)] [s (\cos \theta + i \sin \theta)] \\ &= r s (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r s [(\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) + i(\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta)] \\ &= r s [\cos (\varphi + \theta) + i \sin (\varphi + \theta)]. \end{aligned}$$

Corolário 6.2.17. (Quociente de complexos na forma polar) Consideremos dois números complexos $w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ e $z = s (\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0$, em que r e s são seus valores absolutos e φ e θ são seus argumentos. Então

$$\frac{w}{z} = \frac{r}{s} [\cos (\varphi - \theta) + i \sin (\varphi - \theta)]$$

Demonstração. Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determine o valor absoluto, um valor do argumento e o valor principal do argumento, dos seguintes números complexos.

$$\text{a) } z = \frac{\overline{1-5i}}{2-3i}$$

$$\text{Como } \frac{\overline{1-5i}}{2-3i} = \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{1+5i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{-13+13i}{2^2+3^2} = -1+i,$$

então o valor absoluto de z é $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Como $-1+i$ é um número complexo do segundo quadrante do SCC Oxy , então

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\frac{3\pi}{4} + (2k+1)\pi)$$

$$\text{e } (\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi) \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \text{ para algum inteiro } k.$$

Assim, um valor do argumento de z é $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, para algum inteiro k . Seu valor principal é

$$\theta_0 = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{b) } z = \bar{i}(1+\sqrt{3}i)$$

Observemos que $\bar{i}(1+\sqrt{3}i) = (-i)(1+\sqrt{3}i) = \sqrt{3}-i$, então o valor absoluto de z é $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$. Como $\sqrt{3}-i$ é um número complexo do quarto quadrante do SCC Oxy , então

$$\text{sen } \theta = -\frac{1}{2} \text{ e } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (\theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\frac{11\pi}{6} + (2k+1)\pi)$$

$$\text{e } (\theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\frac{11\pi}{6} + 2k\pi) \Leftrightarrow \theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \text{ para algum inteiro } k.$$

Assim, um valor do argumento de z é $\theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, para algum inteiro k . Seu valor principal é

$$\theta_0 = \frac{11\pi}{6}.$$

2) Usando a forma polar, mostre que $\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} = i$

Se $w = 1 + \sqrt{3}i$, então $|w| = 2$ e $\arg(w) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, para algum inteiro k . Da mesma forma, se $z =$

$\sqrt{3} - i$, então $|z| = 2$ e $\arg(z) = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi$, para inteiros k e l . Assim, $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|} = 1$ e

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{w}{z}\right) &= \arg(w) - \arg(z) = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) + 2(k-l)\pi = -\frac{3\pi}{2} + 2(k-l)\pi = \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\right) + 2(k-l)\pi = \\ &= \frac{\pi}{2} + 2(k-l+1)\pi, \text{ para algum inteiro } k-l+1. \end{aligned}$$

Como $|i| = 1$ e $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + m\pi$, para algum inteiro m , temos então $\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} = i$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 6.2.18

1) Determine o valor principal do argumento dos seguintes números complexos:

i) -3 ; ii) $3+3i$; iii) $1-i\sqrt{3}$; iv) -4 ;

2) Determine um valor de $\arg(z)$.

i) $\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$; ii) $\frac{-i}{2+2i}$

3) Usando a forma polar, mostre as identidades a seguir.

i) $\overline{i(1+i\sqrt{3})}(\sqrt{3}+i) = 2-2i\sqrt{3}$; ii) $\frac{5i}{2+i} = \overline{1-2i}$

6.3 POTÊNCIA DE UM NÚMERO COMPLEXO

6.3.1 EXPOENTE NATURAL

Definição 6.2.19. Dado um número complexo z , $z \neq 0$ e $z \neq 1$, e n um inteiro positivo. Definimos a *potência de base z e expoente n* , como sendo o número complexo, denotado pelo símbolo z^n , dado por

$$z^n = \underbrace{z \times \dots \times z}_{n \text{ vezes}}.$$

Proposição 6.2.20. Quaisquer que sejam os números complexos w e z ($\neq 0$ e $\neq 1$) e inteiros positivos m e n , temos

$$i) \quad w^{m+n} = w^m w^n;$$

$$ii) \quad (w^m)^n = w^{mn};$$

$$iii) \quad (wz)^n = w^n z^n.$$

Demonstração. A demonstração é a mesma da Proposição 1.4.2.

Corolário 6.2.21. Verifique que se n é um inteiro positivo, então

$$i) \quad \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n};$$

$$ii) \quad \left(\frac{w}{z}\right)^n = \frac{w^n}{z^n}, \text{ se } z \neq 0;$$

Demonstração. Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

Proposição 6.2.22. Seja z , $z \neq 0$, um número complexo na forma polar $z = s(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, em que s é seu valor absoluto e θ é o seu argumento. Então a **potência de k -ésima ordem de z** é dada por

$$z^k = s^k [\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta)].$$

Demonstração. Trata-se de uma consequência direta da Proposição 6.2.14.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine $(1+i)^{36}$

Como $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$, então

$$(1+i)^{36} = \sqrt{2}^{36} \left(\cos \left(36 \times \frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(36 \times \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2}^{36} (\cos (9\pi) + i \operatorname{sen} (9\pi)) = -\sqrt{2}^{36}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Determine: *i)* $(\sqrt{3}-i)^5$; *ii)* $(-1+i)^7$; *iii)* $(1+i\sqrt{3})^{10}$.

6.3.2 EXPOENTE INTEIRO

Definição 6.2.24. Seja um número complexo z , $z \neq 0$ e $z \neq 1$, e n um inteiro. Definimos a **potência de base z e expoente n** como sendo o número complexo, denotado pelo símbolo z^n , dado por

$$z^n = \begin{cases} z^n, & \text{se } n > 0; \\ 1, & \text{se } n = 0; \\ \frac{1}{z^{-n}}, & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Observação 6.2.25. Na definição de potência de base z e expoente inteiro n , fazemos um abuso de notação tomando o mesmo símbolo z^n , já definido anteriormente para expoentes naturais.

Proposição 6.2.26. Quaisquer que sejam os números complexos w e z ($\neq 0$ e $\neq 1$) e inteiros m e n , temos

$$i) \quad w^{m+n} = w^m w^n;$$

$$ii) \quad (w^m)^n = w^{mn};$$

$$iii) \quad (wz)^n = w^n z^n;$$

Demonstração. A demonstração é a mesma da Proposição 1.4.8.

Corolário 6.2.27. Quaisquer que sejam os números complexos w e z ($\neq 0$ e $\neq 1$) e um inteiro n , então

$$i) \quad (w^{-1})^n = (w^n)^{-1} = w^{-n};$$

$$ii) \quad (wz^{-1})^n = w^n (z^n)^{-1} = w^n z^{-n}.$$

Demonstração. Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

Proposição 6.2.28. Seja z , $z \neq 0$, um número complexo na forma polar $z = s(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, em que s é seu valor absoluto e θ é o seu argumento. Então, a potência de k -ésima ordem de $1/z$ é dada por

$$\frac{1}{z^k} = \frac{1}{s^k} [\cos (-k\theta) + i \operatorname{sen} (-k\theta)].$$

Demonstração. Trata-se de uma consequência direta do Corolário 6.2.15.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine $(1+i)^{-7}$

A partir do último exemplo, temos

$$\begin{aligned} (1+i)^{-7} &= \sqrt{2}^{-7} (\cos (-7 \times \frac{\pi}{4}) + i \operatorname{sen} (-7 \times \frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}^{-7} (\cos (-2\pi + \frac{\pi}{4}) + i \operatorname{sen} (-2\pi + \frac{\pi}{4})) = \\ &= \sqrt{2}^{-7} (\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}^{-7} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}^{-8} (1+i). \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 6.2.29

1) Determine:

$$i) \quad (\sqrt{3} - i)^{-5};$$

$$ii) \quad (-1 + i)^{-7};$$

$$iii) \quad (1 + i\sqrt{3})^{-10}.$$

6.3.3 RAÍZES N-ÉSIMAS DE UM NÚMERO COMPLEXO

Definição 6.2.30. Dado um número inteiro positivo n e um número complexo z , dizemos que um número complexo w é uma **raiz n -ésima de z** se $w^n = z$.

Neste caso, denotaremos tal raiz pelo símbolo $\sqrt[n]{z} = w$.

Proposição 6.2.31. Todo número complexo z possui exatamente n raízes n -ésimas distintas, $w_0, \dots, w_{n-1}$, para todo inteiro positivo n . Neste caso, se $z = s(\cos \theta + i \sin \theta)$ é a sua **forma polar**, então suas raízes n -ésimas são dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{s} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Demonstração.

Se $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ é uma raiz n -ésima de z , então

$$w^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)] = z = s(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Assim, $r = \sqrt[n]{s}$ e $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, para algum inteiro k , pelo Corolário 6.2.15. Como existem n arcos φ distintos, no intervalo semi aberto $\left[\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + 2\pi \right)$, a saber: para $k = 0, 1, \dots, n-1$, as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π e todos outros os arcos φ diferem desses arcos por um múltiplo de 2π rd, quando k percorre o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, concluímos que

$$w = \sqrt[n]{s} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \text{ para algum } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Reciprocamente, se $z = s(\cos \theta + i \sin \theta)$, então definindo os distintos números complexos $\{w_k\}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, conforme no enunciado da Proposição, é evidente que $(w_k)^n = z$, para todo $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, pela Proposição 6.2.22.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determine todos os valores das seguintes raízes e indique os pontos correspondentes no plano complexo.

a) $z = \sqrt{1+i}$

Como $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, então as raízes quadradas de z são

$$w_k = \sqrt{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{2} \right) \right), \text{ para } k = 0, 1.$$

$$\text{Mas, } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)},$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)},$$

$$\sin \frac{9\pi}{8} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{8} \right) = -\sin \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \text{ e}$$

$$\cos \frac{9\pi}{8} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{8} \right) = -\cos \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}.$$

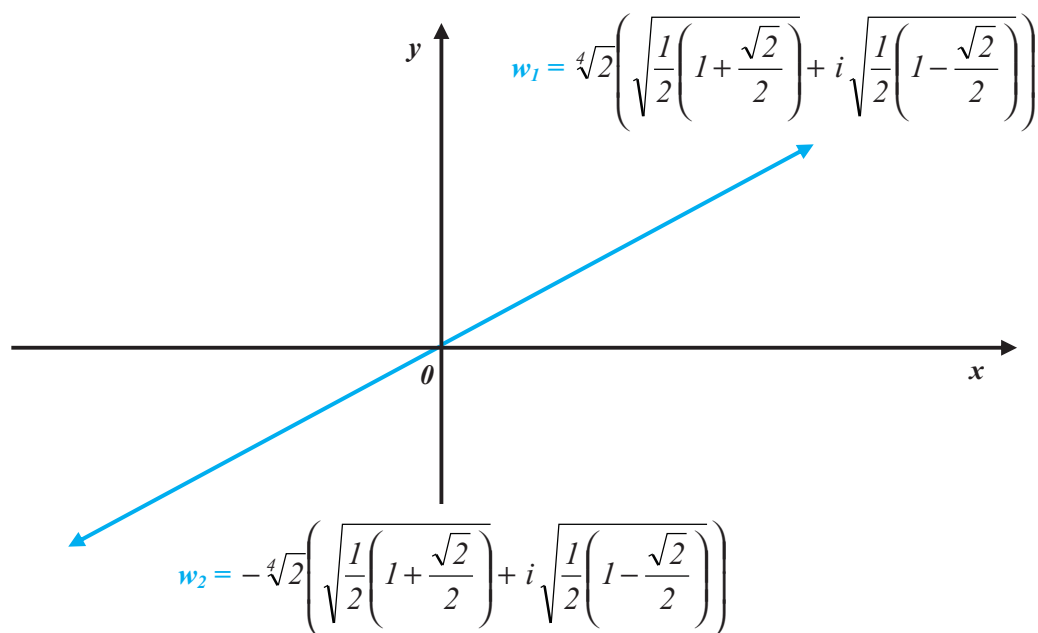
Logo,

$$w_1 = \sqrt[4]{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} + i \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \right)$$

e

$$w_2 = -\sqrt[4]{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} + i \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \right).$$

A visualização geométrica, no plano complexo, dessas raízes são mostradas na figura a seguir.



2) Determine as soluções da equação $z^3 - (1+i)z = 0$

Como $z^3 - (1+i)z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 - (1+i)) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 = 1+i$, então suas raízes são

$$z = 0 \text{ ou } z = \sqrt[4]{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} + i \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \right) \text{ ou } z = -\sqrt[4]{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} + i \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \right).$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 6.2.32

1) Determine todos os valores das seguintes raízes e marque os pontos correspondentes no plano complexo.

i) $\sqrt{i}$; ii) $\sqrt{-i}$; iii) $\sqrt{-4}$; iv) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; v) $\sqrt[3]{-1}$; vi) $\sqrt[3]{i}$;

vii) $\sqrt[3]{-i}$; viii) $\sqrt[3]{1+i}$; ix) $\sqrt[4]{-1}$; x) $\sqrt[5]{-1}$; xi) $\sqrt[6]{-1}$; xii) $\sqrt[8]{1}$.

2) Determine e marque no plano complexo as soluções das seguintes equações.

i) $z^3 = 27$; **ii)** $z^4 + 5z^2 = 36$; **iii)** $z^4 - (1 + 4i)z^2 + 4i = 0$.

6.4 REFERÊNCIAS ELETRÔNICAS

Para referências de Números Complexos, sugerimos que o leitor consulte os seguintes endereços eletrônicos.

1. <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/>

1.1. ENSINO MÉDIO

Números Complexos: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/medio.htm>

1.2. ENSINO SUPERIOR

Números Complexos: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/vcomplex/vc01.htm>

1.3. ENSINO SUPERIOR

Conjunto de Pontos no Plano Complexo:

1. <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/vcomplex/vc02.htm>

2. http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complexo

6.5 REFERÊNCIAS

1. Hazzan, S.; Iezzi, G. - Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções - vol. 1, Atual Editora.

2. Iezzi, G.; Dolce, O.; Murakami, C. - Fundamentos de Matemática Elementar: Logaritmos - vol. 2, Atual Editora.

3. Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria - vol. 3, Atual Editora.

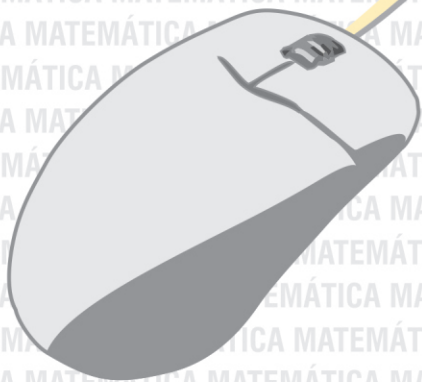
4. Hazzan, S.; Iezzi, G. - Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, Polinômios - vol. 6, Atual Editora.
5. Iezzi, G., Murakami C.; Machado, N. J. - Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas e Noções de Integral – vol. 8, Atual editora.
8. Caraça, B. J., Conceitos Fundamentais da Matemática, Livraria Sá da Costa Ed., Lisboa, 1984.
9. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM.
10. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Publicação quadrimestral da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro.

6.6 SITES ELETRÔNICOS PARA COMPLEMENTAÇÃO

1. <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/livros/livros.htm>
2. http://www.fund198.ufba.br/apos_cnf/bibli.pdf
3. <http://www.fund198.ufba.br/expo/bibli.pdf>

Neste volume é abordado o estudo das funções reais, visto que muitas delas podem descrever situações práticas e resolver problemas com variáveis relacionadas. Assim, são estudadas algumas das funções elementares, tais como: as polinomiais de primeiro ou segundo grau e graus superiores; as funções racionais; as funções modulares; as funções logarítmicas e exponenciais; e as funções trigonométricas.

No desenvolvimento do conteúdo buscou-se desenvolver idéias muito úteis e que, certamente, irão ampliar os horizontes no que diz respeito à compreensão do gráfico de uma função, por meio das eventuais transformações por ele sofridas, em comparação ao gráfico de uma função mais simples.



Universidade Federal
de Mato Grosso do Sul



Coordenadoria de Educação
Aberta e a Distância



UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

ISBN 978-85-7613-150-2



9 788576 131502