SILVIA TERESINHA FRIZZARINI VALENZUELA

O USO DE DISPOSITIVOS DIDÁTICO PARA O ESTUDO DE TÉCNICAS RELATIVAS A SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES NO ENSINO FUNDAMENTAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO – MESTRADO EM EDUCAÇÃO
Campo Grande/ MS
2007

FICHA CATALOGRÁFICA

Valenzuela, Silvia Teresinha Frizzarini
O uso de dispositivos didáticos para o estudo de
técnicas relativas a sistema de equações lineares no
Ensino Fundamental / Silvia Teresinha Frizzarini Valenzuela –
Campo Grande, MS, 2007. 137p.

Orientador: José Luiz Magalhães de Freitas
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Grosso do Sul.

1. Sistema de Equações Lineares. 2. Praxeologia.
3. Dispositivos Didáticos I. Freitas, José Luiz Magalhães de
II. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. III. Título

SILVIA TERESINHA FRIZZARINI VALENZUELA

O USO DE DISPOSITIVOS DIDÁTICOS PARA O ESTUDO DE TÉCNICAS RELATIVAS A SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada como exigência final para obtenção do grau de Mestre em Educação à comissão julgadora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul sob a orientação do Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO – MESTRADO EM EDUCAÇÃO
Campo Grande/ MS
2007

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais

Prof. Dr. Chateaubriand Nunes Amâncio

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a todos os alunos e professores, do ensino fundamental, pela incansável batalha do dia a dia frente aos desafios colocados pelo ensinar/aprender. E a todos os funcionários que contribuem por uma Instituição de ensino melhor.

AGRADECIMENTOS

O mestrado parecia para mim um desafio imposto por muitas limitações, mas que se chegasse a ser concretizado seria não só a sensação do desafio vencido, das limitações ultrapassadas e sim muito mais, do sonho realizado. Mas ele não seria possível não fossem os familiares, os amigos, os colegas, todos cúmplices e parceiros.

Especial agradecimento ao meu orientador, professor José Luiz Magalhães de Freitas a quem coube a tarefa de compartilhar idéias, de fornecer a fonte para saciar a sede de conhecimento e que mais soube acreditar do que cobrar, por sua incansável compreensão.

Ao coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFMS, Dr. Antônio Carlos do Nascimento Osório, e seus professores. Agradecimento especial aos professores: Dra. Shirley Takeco Gobara, representante da linha Ensino de Ciências e Matemática, Dra. Marilena Bittar e Dr. Luiz Carlos Pais que possibilitaram um direcionamento mais qualitativo e objetivo desde a concepção do trabalho até as valiosas contribuições no momento da qualificação.

Coube também o apoio institucional da CAPES, sem o qual a árdua caminhada teria sido muito penosa. A colaboração de Jacqueline Mesquita de Almeida e de Aparecida de Jesus Fonseca pelos infindáveis trâmites burocráticos necessários a minha realização do mestrado.

Aos familiares coube a tarefa da esperança, da presença ausente que teve seu sentido e seu valor, nem sempre percebida. Agradeço aos meus pais Silvio Frizzarini (in memoriam) e Elisa Lopes Frizzarini, e a todos meus irmãos, cunhadas e sobrinhos, sempre presentes no meu coração. Obrigada ao meu filho Nicolas e ao Mirko pela paciência, tolerância e crença, frutos do amor.

Aos amigos, a força, a convivência neste momento de caminhada solidária que é a pós-graduação, obrigada Sonia Maria Burigato e Renato Gomes Nogueira. Também cabe agradecer ao professor Dr. Chateaubriand Nunes Amâncio por incentivar e acreditar, ao fazer parte da banca.

A presença de Deus em todos os momentos, a Ele o meu maior agradecimento.

RESUMO

O presente trabalho tem como objeto investigar dispositivos didáticos e suas incidências relativas ao estudo de técnicas de resolução de sistemas de equações lineares em uma 7ª série do Ensino Fundamental. Para o embasamento teórico-metodológico da pesquisa fomos buscar suporte nas teorias francesas da Didática da Matemática, em particular na Teoria Antropológica do Didático – TAD (Chevallard, 1999), na Engenharia Didática (Artigue,1990) e no modelo de análise teórica (Henry, 2006). Foram realizadas análises de livros didáticos, de aulas de Matemática e de produções de alunos com o uso do *software Aplusix,* concernentes ao conteúdo de sistemas de equações lineares. As análises desses dispositivos demonstraram que na organização matemática das aulas houve diminuição em relação àquelas encontradas no livro didático adotado, percebendo-se nas aulas um reducionismo de tarefas as quais visavam apenas à fixação de algumas das técnicas contidas nos livros. O uso do *software Aplusix* contribuiu para a comprovação de que os alunos eram capazes de mobilizar algumas técnicas de resolução de sistemas determinados. No entanto, diante de sistemas indeterminados ou impossíveis, encontravam dificuldade, pois nesse caso a necessidade de domínio de suas tecnologias era maior.

Palavras-Chave:

Sistema de Equações Lineares, Praxeologia, Dispositivos Didáticos.

ABSTRACT

The goal of this work is to investigate didactic tools and their incidences referring to the study of resolution techniques of linear equations system in an Elementary School seventh grade. In order to obtain theoretic and methodological basis to the research, we looked for support in the French theories in Didactics of Mathematics, especially Anthropological Theory of Didactic (Chevallard, 1999), Didactic Engineering (Artigue, 1990) and the theoretic analysis model (Henry, 2006). Schoolbooks, Mathematics classes and students works made in the software Aplusix were analysed, concerning linear equations system content. The analysis of these items showed that there was a decrease in the Mathematics organization referring to that ones found in the chosen schoolbook, noticing in the classes a reductionism of tasks, just aimed to the fixation of some tecniques contained in the schoolbook. The use of the software Aplusix contributed to the corroboration that the students were capable to do some resolution tecniques of determined systems. However, they found dificulties with indetermined or impossible systems, because in this case the need of tecnologies domain was bigger.

Key Words:
Linear Equations System, Praxeology, Didactic Tools

LISTA DOS PROTOCOLOS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ANEXOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) o fundamental no trabalho referente a sistemas de equações lineares é a compreensão de conceitos, como a formulação e a resolução de problemas por meio de equações, ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis. Para o conhecimento desses conceitos pode-se lançar mão de certos dispositivos como a construção e da interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador.

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas em que o aluno desenvolve processos importantes com intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos (PCN, BRASIL, 1998, p. 63).

Nota-se nos PCN, uma proposta para um novo enfoque no tratamento da Álgebra, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico, de modo que favoreça não só a diversificação de dispositivos didáticos, mas a diversificação de tarefas e técnicas a fim de que não se tornem um exercício mecânico do cálculo e sim um esclarecimento que promova a compreensão dos conceitos a serem adquiridos.

Considerando esse fato, junto à nossa prática docente, nos propusemos investigar alguns dispositivos didáticos e suas incidências relativas ao estudo de técnicas na resolução de sistemas de equações lineares em nível de 7ª série do Ensino Fundamental. Os dispositivos que investigamos nesta pesquisa são os livros didáticos, a própria aula de Matemática e, em especial, o computador, que vem se tornando cada vez mais presente nas escolas, além de conquistar espaço com salas de informática.

A área da Matemática na qual é estudado o conteúdo de sistema de equações lineares é a Álgebra Linear, cuja estruturação teve por base este mesmo conteúdo. Segundo Domingues, Callioli & Costa (1982), um curso de

Álgebra Linear, mesmo que introdutório, não deve se reduzir apenas a uma exposição teórica, mas chegar, tanto quanto possível, às aplicações, visto que estas, pelo caráter abstrato da Álgebra, geralmente não são perceptíveis pelos alunos de imediato, quando não estudadas explicitamente.

As principais orientações dos PCN são: a resolução de situações-problema com a discussão das raízes encontradas, a partir de construções de diferentes procedimentos, utilização de propriedades conhecidas e a obtenção de expressões equivalentes como podemos observar abaixo:

> CONCEITOS E PROCEDIMENTOS: NÚMEROS E OPERAÇÕES
> - Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do 1º grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta. (BRASIL, 1998, p.88).

No entanto o estudo de sistemas de equações lineares é considerado para os PCN (1998) um conteúdo da Álgebra que pode se tornar significativo para o aluno e favorecer que ele desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Este conteúdo é proposto para o ensino de Matemática no 4º ciclo, referente à 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, o qual faz parte do bloco Número e Operações *(ibid).*

Portanto, focalizamos nossos olhares em uma turma de 7ª série do Ensino Fundamental, para tentar compreender melhor a prática pedagógica de matemática nesse ambiente escolar. Além disso, poder contribuir com novos estudos, de tal modo, que certas teorias da área da educação Matemática, colocadas em prática junto com as atuais propostas brasileiras, favoreçam a construção do conhecimento relativo a sistema de equações lineares.

Para isso, buscou-se suporte teórico e metodológico em teorias francesas da Didática da Matemática, em particular na Teoria Antropológica do Didático, de Chevallard (1999), na Engenharia Didática proposta por Artigue (1990) e o conceito de análise teórica proposta por Henry (2006).

Foram analisados os dispositivos didáticos, citados acima, segundo a óptica das organizações praxeológicas de Chevallard (1999), presentes na instituição escolar na qual esta pesquisa de campo foi realizada. Verificamos nas análises desses dispositivos didáticos, a rigidez de determinadas técnicas, sendo necessária a investigação de novos tipos de tarefas e técnicas, de tal forma, a integrar o momento do trabalho da técnica com o momento teórico-tecnológico, proposto por Chevallard (1999). Para isso, foi elaborada e aplicada uma seqüência didática com o *software Aplusix*[1], permitindo-nos investigar as organizações matemáticas nas produções dos alunos.

O Capítulo I traz a apresentação do objeto de estudo desde sua escolha até a análise epistemológica, relativo a sistema de equações lineares e as delimitações da pesquisa, com as principais questões do nosso objeto de estudo.

No Capítulo II é apresentado o referencial teórico da Teoria Antropológica do Didático – TAD, de Chevallard (1999), com o detalhamento das quatro principais componentes de uma organização matemática – OM: *tipos de tarefas, técnicas, tecnologias* e *teorias*; caracterizando-na em organização *pontual, local, regional* e *global*, dependendo da forma em que esses componentes se articulam entre si e com outras OM. Ainda no capítulo II é apresentada a metodologia que subsidiou este estudo, de tal maneira que se pudessem aprofundar as investigações pretendidas, descrevendo as quatro fases que permitiram a concepção e a organização de uma seqüência didática: a análise preliminar, a análise *a priori,* a experimentação e a análise *a posteriori*, junto com o conceito de análise teórica proposta por Henry (2006).

No Capítulo III é discutida a análise teórica matemática relativa a sistema de equações lineares e suas técnicas utilizadas no Ensino Fundamental de acordo com as concepções da Álgebra. No final deste capítulo mostramos as principais ferramentas do *software*, possíveis de

[1] *Aplusix* é um *software* educativo de Álgebra que está sendo desenvolvido pelo Instituto de Informática e de Matemática Aplicada de Grenoble (IMAG), França. http://aplusix.imag.fr

investigar as técnicas relativas a sistemas de equações lineares, justificando nossas escolhas.

O Capítulo IV traz um estudo das organizações praxeológicas dos livros didáticos adotados, das aulas realizadas na 7ª série pesquisada, e da seqüência didática com o uso do *software,* relativos a sistema de equações lineares, segundo os elementos da TAD. Ainda na análise da nossa seqüência didática com o uso do *software,* são apresentados os objetivos, estratégias e variáveis didáticas possíveis de serem inseridas na elaboração de nossa seqüência didática.

No Capítulo V são descritos os conhecimentos prévios dos alunos, o ambiente experimental e a aplicação da seqüência didática, segundo a TAD, junto com a descrição das análises das produções dos alunos, confrontando os resultados esperados com os produzidos, quando foi possível tirar algumas conclusões, bem como levantar novas hipóteses. Finalizando o capítulo são apresentados os resultados da seqüência didática junto ao novo dispositivo didático inserido na 7ª série que fez parte da pesquisa.

Por fim são apresentadas as considerações finais e conclusões.

I. TRAJETÓRIA AO OBJETO DE PESQUISA

I.1 A escolha do tema

Pessoalmente, lecionando há treze anos nos Ensinos Fundamental e Médio do Estado de São Paulo como professora efetiva de Matemática, e dialogando com outros professores da área, percebo no ambiente escolar a frustração dos alunos. Estes não conseguem ter um desempenho satisfatório nas aulas de Matemática, em específico nas de Álgebra, já que muitas vezes os alunos não vêem sentido em aprender cálculo literal.

Ao lecionar sistema de equações lineares no Ensino Fundamental, em 2003, pude observar os questionamentos e dúvidas dos alunos quando se fazia necessário separar as duas equações do sistema para que o resolvessem pelos métodos da adição ou substituição. Os alunos compreendiam a necessidade de um sistema formado por duas equações e, por isso, questionavam os métodos ao isolarem essas equações.

Já no Ensino Médio pude observar que os alunos aprendiam sistema de equações lineares com técnicas diferentes daquelas conhecidas no Ensino Fundamental. Além disso, não faziam tantos questionamentos, apenas reproduziam as técnicas ensinadas, apresentando maiores habilidades com as mesmas.

Tais constatações acabaram por fazer com que eu me interessasse mais pelo tema, que veio a se tornar uma proposta para a dissertação de mestrado, com o objetivo de aprofundar meus conhecimentos visando encontrar respostas às dúvidas e aos questionamentos gerados, uma vez que, enquanto aluna aprendi a reproduzir variadas técnicas de resoluções e muitas vezes não parei para questioná-las.

Atualmente percebo, ao lecionar como professora substituta na Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD para alunos da turma de Química e Ciências Contábeis, que a compreensão de sistema de equações lineares é de grande importância para o ensino e a aprendizagem de Álgebra, pois seu manejo permite enfrentar uma gama de situações em contextos relacionados com a vida cotidiana, com a análise e resolução de problemas da área da Álgebra, de outras áreas da Matemática e em outros campos do conhecimento.

> Apesar de diversas idéias algébricas que surgiram no século XIX, a solução de equações e o estudo de propriedades de formas polinomiais continuam a ser o foco principal da Álgebra. O estudo de sistemas de equações levou à noção de determinantes e à teoria de matriz (ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA ONLINE, 2007).

O ensino da Álgebra tem sido objeto de pesquisas em Educação Matemática por vários autores, como Filloy (2001), Rojano (2001), Kieran (1992), Vergnaud (1990), pois são notórios os desafios para o ensino e a aprendizagem desse campo da ciência. Diversos trabalhos nessa área procuram elucidar a compreensão não somente do estágio atual do ensino e aprendizagem de Álgebra, mas também de sua evolução e possíveis correlações, pois, segundo Araújo (2005), o cenário atual do ensino de Álgebra reflete como ela evoluiu com o passar do tempo. Por essa razão, a seguir, tentamos mostrar a evolução do conteúdo sistema de equações lineares, até chegar ao atual cenário brasileiro.

Historicamente, as épocas que marcaram o aparecimento dos sistemas de equações são importantes no que concerne a sublinhar as principais passagens de uma evidente problemática. Coulange (2000) denomina a época entre o fim do século XV e início do século XVI como a pré-história dos sistemas de equações, quando estes estavam associados aos problemas tradicionais de aritmética das civilizações antigas.

Segundo a autora, antes do século XV, a Álgebra Elementar era considerada autônoma com relação à aritmética e à resolução de problemas concretos do primeiro grau, comparados com a simbolização. Sincopada desde a antiguidade, ela tornou-se numérica no início da Renascença e assim permaneceu até o final do século XVI.

> Começa neste tempo um estudo de sistema de equações, cujo objetivo principal resulta uma resolução efetiva e “particular” de equações obtidas a partir de problemas “concretos” do primeiro grau: o uso de letras para designar as grandezas ao mesmo tempo incomuns e comuns dentro da Arte Analítica de Viète, que marca para numerosos autores o “nascimento da Álgebra” e oferece a possibilidade de chegar a elas com as “práticas de

> modelagem algébrica”. No entanto, não ocasiona imediatamente a gênese de uma teoria geral dos sistemas de equações (COULANGE, 2000, p.73).

Entre o início do século XVI e meados do século XVII, com o advento da linguagem simbólica da Álgebra, é dado o nascimento dos sistemas de equações como objeto da Álgebra Elementar, que antes era vista como instrumento dos problemas tradicionais de aritmética. Continua marcante nesse período o caráter concreto dos problemas aritméticos, impedindo as questões de sistema com infinitas soluções. São vistos nesse período os casos de sistemas impossíveis ou indeterminados, mas somente como um fato particular ou de curiosidade.

A partir do início do século XVII, considerado como a fase de transição da Álgebra Elementar para a Álgebra Linear, organizou-se um estudo teórico de sistemas lineares. Os fatores que marcaram essa fase foram a busca de uma solução geral ao sistema quadrado de ordem “n” e o estudo de sistemas não quadrados.

Da segunda metade do século XVIII ao início do século XX foram realizados estudos teóricos dos sistemas de equações como objeto da Álgebra Linear, com a intenção de unificar esses estudos que buscam a solução de um sistema quadrado geral de ordem “n” e também dos sistemas não quadrados.

> Essas duas direções de pesquisa se unificam chegando a uma regra geral de resolução de um sistema de equação linear, quadrado ou não de ordem qualquer, dando origem aos primeiros conceitos chaves da Álgebra Linear: classe, dimensão e dualidade (COULANGE, 2000, p.73).

A partir do século XIX, o pretexto central da resolução de sistema de equações foi o estudo da linearidade e da gênese da Álgebra Linear, onde são encontrados os métodos de cálculos efetivos, exatos ou aproximados.

Nessa fase ocorreu um verdadeiro problema de existência, em que os métodos eram criados para a diminuição do custo de uma resolução de grandes sistemas, com o método dos quadrados menores de Legendre e de

Gauss. Os trabalhos de Astronomia e de Geodésia acabaram por induzir a Matemática a se inclinar sobre resolução de sistema muito particular.

Em resposta a esse problema de existência foram criadas numerosas técnicas, como as efetivas de resolução “exata” de Gauss, ou como a técnica “aproximada” de Jacobi.

Além destes aspectos relativos ao desenvolvimento histórico desta parte da Álgebra, fizemos também um breve estudo sobre o seu ensino no Brasil, particularmente a partir do momento em que a Álgebra passou a fazer parte do currículo educacional brasileiro a partir de 1799, de acordo com Miguel, Fiorentini & Miorim (1992). Nesse momento, a Matemática escolar apresentava-se dividida em compartimentos estanques, em que primeiro estudava-se a Aritmética, depois a Álgebra e, em seguida, a Geometria. No período entre 1799 e 1960, segundo os mesmos autores, a Álgebra apresentava um caráter mais instrumental, útil para resolver equações e problemas.

Miguel, Fiorentini & Miorim (1992) revelam que na década de 1960, com o surgimento do movimento da Matemática moderna, o ensino da Álgebra recebeu um maior rigor e assumiu uma acentuada preocupação com os aspectos lógico-estruturais dos conteúdos, além de uma maior formalização da linguagem. Em conseqüência disso, a Álgebra perdeu seu caráter pragmático e tecnicista útil para a resolução de problemas. Apesar disso, até a década de 1990 no Brasil, quando foi realizado o referido trabalho, os autores destacavam que a Álgebra, apesar de ocupar boa parte dos livros didáticos, não tinha recebido a devida atenção nos debates, estudos e reflexões a respeito do ensino da Matemática e que

> (...) a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões (MIGUEL, FIORENTINI & MIORIM, 1992, p. 40).

Corroborando com essa constatação, Lins e Gimenez (1997) e Falcão (1996), descrevem em seus trabalhos que o ensino de Álgebra que é realizado, assim como o que é apresentado nos livros didáticos, ainda preconiza a técnica (algoritmo), a prática (exercícios) e os transformismos algébricos.

Araújo (1999) constatou em uma pesquisa realizada com 378 alunos do primeiro ano de diferentes áreas do conhecimento do Ensino Superior e alunos concluintes do Ensino Médio que estes têm necessidade de seguir um procedimento padronizado para resolver equações algébricas simples, não conseguem atribuir significado para as equações e fazem uso indevido das incógnitas. Quanto aos erros referentes ao uso de técnicas de resolução das equações, Araújo (1999) observou o uso incorreto do princípio de equivalência e o uso indevido de regras como "ao mudar de lado muda-se o sinal".

A pesquisa realizada pela autora também verificou que se a Álgebra não for introduzida de maneira que faça interagir os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios já possuídos dos alunos, eles continuarão a encontrar dificuldades nos cálculos algébricos e apresentarão, cada vez mais, uma atitude negativa em relação à aprendizagem Matemática.

De acordo com o relatório do SAEB – Sistema Nacional de Avaliação Básica (*apud* PCN, BRASIL, 1998), os alunos das oitavas séries do Ensino Fundamental demonstram dificuldades com o uso da linguagem algébrica.

Biazi (2002) verificou em sua pesquisa que alguns erros e dificuldades apresentados no Ensino Fundamental permanecem no Ensino Médio e no Ensino Superior, tais como: "$a \cdot a = 2a$" ou "$8a^2 + 216x^6 = 224a^2x^6$". É possível perceber com esse e outros trabalhos que vários pesquisadores reconhecem e têm a atenção voltada para contribuir no processo de ensino-aprendizagem da Álgebra.

Atualmente, o Parâmetro Curricular Nacional - PCN (BRASIL, 1998) chama a atenção para esse fato, e orienta os professores de estar utilizando diferentes tarefas e técnicas, que permitam dar significados aos procedimentos utilizados visando a utilização da modelagem, generalização e demonstração de propriedades e fórmulas, como apresentado a seguir:

> O trabalho com a Álgebra neste ciclo tem como ponto de partida a "pré-álgebra" desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções

> algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos) e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações. Desse modo, o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significados à linguagem e às idéias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas) (PCN, BRASIL, 1998, p.84).

Os PCN salientam que não é desejável desenvolver, no 3º ciclo, um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações. As técnicas convencionais são propostas para um estudo mais detalhado no 4º ciclo, de forma gradativa e significativa ao invés de procedimentos puramente mecânicos e sem significados para os alunos.

Verificamos que, há quase 10 anos após a realização dessas propostas, ainda preconiza a técnica no 3º ciclo. Dos 23 livros didáticos que passaram na última avaliação do Programa Nacional do Livro Didático[2] (2005), o conteúdo sistema de equações lineares encontra-se nas seguintes séries:

Séries	**6ª**	**6ª e 7ª**	**7ª**	**nenhuma**
Porcentagem	13	26	53	8

Quadro 1: Séries que aparecem o conteúdo sistemas de equações lineares nos livros didáticos.

Apesar do conteúdo, como pode ser observado no quadro acima, aparecer mais nas 7ª séries, ele ainda aparece na 6ª série em alguns casos, mostrando um descompasso com as propostas PCN em que suas técnicas convencionais são propostas para um estudo mais detalhado no 4º ciclo, 7ª e 8ª séries, de forma gradativa e significativa. Outro fato importante

[2] O PNLD é uma iniciativa do Ministério da Educação e Cultura – MEC – que realiza, periodicamente, uma avaliação dessas obras. Teve sua origem com a criação da Comissão Nacional do Livro Didático, e sua primeira avaliação dos livros didáticos foi realizada em 1996. A partir de então, a avaliação vem ocorrendo a cada três anos.

constatado sobre o tema é que das coleções que passaram na avaliação do PNLD, 8% não apresentam sistema de equações lineares.

Contudo, existem livros que apresentam o conteúdo nas duas séries, 6ª e 7ª, como é o caso do livro adotado na instituição em que foi realizada nossa pesquisa. Por essa razão nos propomos a investigar, entre outros dispositivos, esses livros didáticos adotados, permitindo-nos aprofundar os trabalhos das técnicas, relativa a sistema de equações lineares, e corroborar com novos resultados.

Com esse rápido olhar sobre o desenvolvimento da Álgebra e do seu ensino, nota-se a existência de uma diversidade de tarefas e técnicas relacionadas à resolução de sistemas lineares, configurando-se em elementos importantes tanto para a organização matemática quanto didática.

Diante dos resultados apresentados por pesquisas já realizadas e da necessidade de um aprofundamento no assunto, escolhemos este tema com a intenção de investigar dispositivos didáticos, relativos ao estudo das técnicas na resolução de sistemas de equações lineares, em nível de 7ª série do Ensino Fundamental.

Passamos, agora, à apresentação da análise epistemológica considerada relevante acerca do referencial teórico adotado por nós, a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999). De início, tínhamos escolhido outro referencial teórico, mas que com o tempo percebemos a possibilidade de um melhor aprofundamento das técnicas, com esta nova teoria adotada.

I.2 Análise epistemológica

Nas revisões bibliográficas, em particular na pesquisa realizada por Azarquiel (1993), identificamos algumas tarefas, relativas a resolução de sistema de equações lineares, pouco compreensíveis por alunos do Ensino Fundamental e suas importâncias na compreensão das técnicas utilizadas para resolvê-las:

a) *Traduzir o enunciado de um problema da linguagem corrente para a linguagem matemática*

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), observa-se a necessidade de o aluno trabalhar a conversão da linguagem natural para a linguagem simbólica.

Para isso, a técnica modelagem, relativa a sistema de equações lineares, é importante para a contextualização de uma situação-problema e requer alguns passos à sua realização. Esses passos são muitas vezes incompreensíveis para os alunos, por não se apresentarem claros durante seu aprendizado. (AZARQUIEL, 1993)

b) *Reconhecer sistemas equivalentes*

Essa é a idéia fundamental para resolver sistemas de equações, em que pode-se substituir um sistema de equações por outro, de tal forma que ele tenha as mesmas soluções que o anterior. Esses sistemas são chamados equivalentes. Na maioria dos casos, os alunos não têm clara essa idéia; eles aprendem a usar uma técnica de resolução de sistema sem compreender seu real significado.

c) *Resolver sistemas, utilizando várias técnicas.*

As técnicas[3] de substituição, adição, comparação e gráfico são aprendidas separadamente, podendo dificultar a percepção das relações entre elas e tirar o sentido do aprendizado dos alunos. As técnicas algébricas permitem estabelecer uma série de relações entre si e podem ajudar a enriquecer a compreensão, apresentando diferenças ao dar sentido às ações que vão realizando.

d) *Interpretar e criticar a solução de um sistema indeterminado ou impossível relacionado ao problema.*

Com a rigidez das técnicas de resolução de um sistema de equações, os alunos freqüentemente encontram dificuldades no caso de o sistema ser indeterminado ou impossível. Além disso, as equações podem estar relacionadas a não-percepções da equivalência entre as equações desse sistema. Muitas vezes os alunos não estão conscientes de que podem ocorrer essas situações nem conseguem determinar em que momento elas vão ocorrer, pois não têm informações suficientes no problema ou não sabem utilizar as informações disponíveis.

[3] Embora os livros didáticos utilizem a palavra “método”, optamos por utilizar o termo “técnica” em conformidade com o referencial teórico da Praxeologia de Chevallard (1999).

e) *Discutir, apresentando argumentos do processo das técnicas usadas na resolução de um problema quando o sistema é determinado.*

O ensino da Matemática, quando realizado com ênfase em automatismos, além de proporcionar uma imagem distorcida das técnicas, provoca rejeições nos alunos por sua aplicabilidade – dificilmente superáveis devido à rigidez dos esquemas conceituais induzidos. Com isso, os alunos tornam-se incapazes de apresentar argumentos do processo utilizado na resolução de problemas.

Na pesquisa realizada por Azarquiel (1993), verificou-se que os alunos entre 12 e 14 anos, ao iniciarem o estudo da Álgebra na escola, têm uma maior sensibilidade para captar questões de caráter técnico que para compreender os problemas científicos. Para esses alunos o “como se faz” prevalece ao “por que se faz”, ou seja, os procedimentos e os automatismos lhes interessam mais que as definições e as idéias.

Com a intenção de investigar o uso de técnicas de resolução diante de situações-problema envolvendo sistemas de equações lineares e de posse com o ocorrido na pesquisa realizada por Azarquiel (1993), pode-se fazer uma analogia com um novo referencial teórico, entre o “como se faz”, ou seja, as técnicas; e o “por que se faz”, ou seja, as tecnologias que justificam essas técnicas. Por essa razão passamos a analisar as organizações existentes, nos dispositivos selecionados, entre a “práxis” e o “logos”, e adotou-se neste trabalho o referencial teórico da Organização Praxeológica de Chevallard (1999).

Por exemplo: dentre as técnicas mais utilizadas para se resolver uma tarefa de um sistema de equações linear com duas variáveis pode-se mencionar, de imediato, a da adição e a da substituição. A tecnologia deve justificar e validar essas técnicas, assegurando que elas possam cumprir bem as tarefas. Ao realizarmos combinações lineares com o sistema de equações o seu conjunto solução não se altera, segundo a Organização Praxeológica de Chevallard (1999), esta é uma tecnologia que justifica algumas técnicas de resolução de sistema de equações lineares, como a substituição, a comparação, a adição entre outras.

Nesse sentido, para os alunos que estão iniciando o contato com a Álgebra, as técnicas prevalecem sobre suas tecnologias, já que eles não entendem bem o significado da realização de cada passo dessas técnicas, tornando-as mecânicas. Segundo Azarquiel (1993), os alunos sabem que deve haver certo domínio operatório para mover-se com descrição nos percursos superiores da Matemática. Isso é o que mais os aflige na formulação de algoritmos. Entretanto, segundo sua pesquisa, percebe-se que não se deve centrar nos automatismos o objetivo da Matemática, pois isso pode proporcionar uma imagem distorcida ao ensino e à aprendizagem da matéria, provocando rejeições nos alunos.

Acreditamos que o importante não é iniciar com demonstrações do que se faz, mas dar sentido concreto aos procedimentos utilizados, ao porque se faz, já que, por experiências realizadas (AZARQUIEL, 1993), observa-se que o ato de aprender é um ato de sínteses, de generalizações, de abstrações, e que todos os alunos não são capazes de executar uma tarefa no mesmo ritmo.

> Apesar do tratamento simbólico e das relações funcionais da Álgebra, a proposta de resolução de sistemas de equações parece ser o ponto de chegada da Álgebra escolar; (...), no entanto para que seja efetivo esse aumento da capacidade de resolver problemas envolvendo sistemas de equações é preciso que os que o utilizam saibam o que é um sistema de equações e seu significado, sua solução, assim como, ser capazes de resolvê-lo com certas garantias de êxito (AZARQUIEL, 1993, p.109).

Os estudos realizados por Azarquiel (1993) mostram que o aluno, ao estudar separadamente as técnicas dos conceitos, sem basear o seu pensar em um quadro teórico constituído por julgamentos fundados em conceitos, acaba limitando seu conhecimento, obtido em uma cadeia progressiva e infindável de novos conceitos sem justificativas e sem sentido concreto.

Imenes e Lelis destacam que:

> Professores e alunos sofrem com a Álgebra da 7ª série. Uns tentando explicar, outros tentando engolir técnica de cálculo com letras que, quase sempre, são desprovidas de significados para uns e outros. Mesmo nas tais escolas de excelência, onde aparentemente os alunos da 7ª série dominam todas as técnicas, esse esforço tem pouco resultado. (IMENES e LELIS 1994, p. 2)

Os PCN de Matemática do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) sugerem que a escola, além do domínio de conceitos, precisa desenvolver atitudes e valores por meio de atividades que envolvam os alunos e, para isso, é necessário que uma nova postura metodológica se instale. Reconhecem, também, que essa nova postura sugerida é de difícil implementação, pois hábitos há tempos consolidados precisam ser alterados, sendo necessário um apoio científico e educacional de universidades para que mudanças efetivas possam ocorrer.

Tendo em vista, os motivos de nossa escolha do tema, as análises epistemológicas realizadas, acerca de experiências já realizadas por pesquisadores da área de Matemática, e definido nosso referencial teórico, fizemos algumas delimitações e questionamentos, chegando ao nosso objeto de estudo com seus respectivos objetivos, como mostramos a seguir.

I.3 Delimitações do trabalho

Das análises de aspectos que interferem na construção de conhecimentos, relativos a sistemas de equações lineares, emergiram as seguintes questões de pesquisa:

1. Com relação a sistema de equações lineares, quais organizações praxeológicas são ativadas nos livros didáticos utilizados, nas aulas e com o uso do *software Aplusix* por alunos de 7ª série?
2. Quais tarefas, técnicas e discursos teórico-tecnológicos que os alunos utilizam para resolver sistemas de equações lineares segundo as organizações praxeológicas encontradas na instituição escolar?

A partir da delimitação dessas duas questões a serem pesquisadas, temos o seguinte objeto de pesquisa:

Objeto de pesquisa

Investigar dispositivos didáticos e suas incidências relativas às técnicas de resolução de sistemas de equações lineares em nível de 7ª série do Ensino Fundamental.

Esse objeto pode ser detalhado pelos seguintes objetivos:

Objetivos específicos:

- Realizar um estudo de técnicas presentes em organizações praxeológicas dos livros didáticos, das aulas e no uso do *software Aplusix* com alunos de 7ª série, referente à resolução de sistema de equações lineares;
- Analisar tarefas, técnicas e discursos teórico-tecnológicos que os alunos utilizam para resolver sistemas de equações lineares com relação às organizações matemáticas encontradas na instituição escolar.

Elucidado o nosso objeto de pesquisa, com os pontos básicos a serem trabalhados, passamos ao próximo capítulo no qual apresentamos o referencial teórico-metodológico que subsidiou-nos ao seu desenvolvimento.

II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

II.1 Teoria Antropológica do Didático

Esta pesquisa fundamenta-se na abordagem da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (CHEVALLARD, 1999; CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001), desenvolvida na década de 1990 e que se inscreve dentro do Programa Epistemológico de Investigação em Didática das Matemáticas que teve sua origem nos trabalhos de Guy Brousseau, iniciado no final dos anos 70.

> Este programa nasceu como fruto da convicção de que muito dos problemas da Educação Matemática tem sua origem nas próprias *Matemáticas ensinadas* e que, portanto, se deve tomar a atividade Matemática como objeto primário de estudo, isto é, com nova "porta de entrada" das análises didáticas.(GASCÓN, 2003, p.15)

A Teoria Antropológica do Didático -TAD, de acordo com Chevallard, Bosch & Gascón (2001), envolve a atividade matemática, considerada no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Nesse sentido, tanto o conhecimento como as atividades matemáticas são construções sociais que se realizam em instituições, em comunidades, seguindo determinados contratos institucionais.

Estudar as condições de produção e difusão do conhecimento matemático requer a capacidade de descrever e analisar determinados tipos de atividades humanas em condições particulares. Esse conhecimento não pode ser considerado apenas do ponto de vista psicológico, como um processo individual, mas como produto da cristalização de determinado fazer humano pela capacidade que surge e permite realizar.

A Teoria Antropológica do Didático é uma teoria voltada para a organização do estudo, em especial do estudo relacionado ao conhecimento matemático, às atividades escolares e à sua relação com o conhecimento científico; examina o papel da escola e o seu trabalho na reconstrução, pelo estudante, do conhecimento produzido nas instituições científicas.

Um outro elemento destacado por Chevallard, Bosch & Gascón (2001), ao propor a TAD, diz respeito ao conhecimento matemático, considerado produto oriundo de atividades com a intenção de resolver determinados tipos de questões ou tarefas problemáticas para uma determinada comunidade, em um dado momento histórico. Para converter as tarefas problemáticas iniciais em rotineiras, isto é, para que possam ser realizadas de maneira relativamente eficaz, são elaboradas determinadas técnicas, as quais têm que ser inteligíveis e justificadas para que possam existir.

A TAD, no âmbito do Programa Epistemológico, descreve o conhecimento matemático em termos de organizações matemáticas e em termos de organizações didáticas. A organização matemática é a realidade matemática que pode ser construída na sala de aula relativamente a um tema escolhido, refere-se ao objeto de estudo. A organização didática, por outro lado, é a maneira como pode ser realizado o estudo do tema escolhido. Segundo Gascón (2003), uma Organização Matemática (OM) sugere sempre como resposta a uma questão ou a um conjunto de questões.

Essa teoria também permite abordar a complexidade que envolve a prática profissional do professor, que se encontra diante do problema de reconstruir as organizações matemáticas, que aparecem nos programas oficiais e nos livros didáticos, ao preparar um determinado tema para o ensino e aprendizagem em sala de aula. Cabe ao professor construir organizações didáticas tendo por objetivo proporcionar condições favoráveis para aprendizagens das organizações matemáticas em estudo.

A estrutura de uma OM pode ser demonstrada como sendo constituída por quatro componentes principais: *tipos de problemas*, *técnicas*, *tecnologias* e *teorias*, integrando a noção de praxeologia matemática, a qual faz parte do objeto de estudo e terá um melhor detalhamento neste trabalho.

II. 1.1. Organização praxeológica

Para Chevallard (1999), toda atividade humana consiste em realizar uma tarefa t do tipo T, por meio de uma certa técnica, que representamos por τ, justificada por uma tecnologia, representada por θ e também por uma teoria Θ.

Na raiz da noção de praxeologia, segundo Chevallard (1999), encontram-se as noções de várias tarefas t e tipo de tarefas T. Quando uma tarefa t toma parte de um tipo de tarefas T, escreve-se t $\in$ T. Na maioria dos casos, uma tarefa e um tipo de tarefa associados expressam-se por um verbo: limpar a casa, desenvolver a expressão literal dada, subir uma escada, etc.

Como exemplo, vamos considerar as seguintes tarefas: resolver o sistema do tipo $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$ $onde\ a, b\ e\ c \in Q, com\ a\ e\ b \neq 0,$ pelo método da substituição; ou resolver o sistema do tipo $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$ $onde\ a, b\ e\ c \in Q, com\ a\ e\ b \neq 0,$ pelo método da adição; ou, ainda, resolver o sistema do tipo $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$ $onde\ a, b\ e\ c \in Q, com\ a\ e\ b \neq 0,$ pelo método da comparação. Essas três tarefas são a origem de um tipo de tarefa. Geralmente não se quer responder pontualmente uma questão específica, mas sim todas as questões do mesmo tipo: não basta resolver o sistema pelo método da adição, é preciso saber como resolver um sistema de outras maneiras. Para facilitar a compreensão, ao vermos as técnicas retomaremos esse assunto.

O autor sublinha que a noção de tarefa é mais ampla que a da linguagem corrente, tratando de colocar em prática particularmente o “princípio antropológico”. A noção de tarefa, ou melhor, do tipo de tarefa, também supõe um objeto relativamente preciso. Calcular o valor de uma função em um ponto é um tipo de tarefa, mas calcular, simplesmente, se chama um gênero de tarefas que pede um determinante. Durante os anos de colégio, por exemplo, o gênero calcular se enriquece de novos tipos de tarefas, ocorrendo o mesmo quando se chega à universidade e aprende a calcular com vetores, depois a calcular com uma integral.

As tarefas, os tipos de tarefas e os gêneros de tarefas não são dados da natureza, são “artefatos”, “obras”, *construções institucionais*, conforme aponta Chevallard (1999), cuja reconstrução em uma determinada instituição, por exemplo, na classe, é um problema completo: *que é o mesmo objeto da didática*.

Uma praxeologia relativa a T requer, em princípio, uma maneira de realizar as tarefas $t \in T$: uma determinada maneira de fazer dá-se o nome de técnica τ. No exemplo acima, em que se pode resolver um sistema de várias maneiras, não basta observar que os enunciados são parecidos, é preciso elaborar uma técnica matemática capaz de abordá-los e de gerar um número maior de tarefas do mesmo tipo. Ao resolver novas tarefas inicialmente imprevisíveis, as técnicas permitem agrupá-las em tipos de tarefas. O autor ressalta também que uma técnica τ, considerada uma “maneira de fazer”, não tem êxito maior que sobre uma parte $P(\tau)$ das tarefas do tipo T a qual é relativa a parte que se denomina alcance da técnica.

É importante não confundir algoritmos com técnicas, embora os algoritmos sejam um tipo muito particular de técnica. Somente em ocasiões excepcionais uma técnica matemática pode chegar a ser sistematizada e considerada um algoritmo. De maneira geral, a aplicação de uma técnica matemática sempre mantém certo grau de indeterminação.

> Para que a técnica possa ser utilizada de maneira normatizada, deve aparecer como algo ao mesmo tempo correto, compreensível e justificado. A existência de uma técnica supõe também a existência subjacente de um discurso interpretativo e justificativo da técnica e de seu âmbito de aplicabilidade e validade. (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001, p.125).

De acordo com Chevallard (1999), uma tecnologia θ é um discurso racional sobre a técnica τ, discurso cujo primeiro objetivo é justificar “racionalmente” a técnica τ para assegurar a realização de tarefas do tipo T, se diz, realizar o que se pretende. E outras observações são feitas, de que em uma instituição I, qualquer que seja o tipo de tarefas T, a técnica τ relativa a T está sempre acompanhada de ao menos um embrião ou, mais freqüentemente, de um vestígio de tecnologia θ. Em numerosos casos, inclusive, alguns elementos tecnológicos estão inseridos na técnica, em que um mesmo discurso tem uma dupla função técnica e tecnológica.

Chevallard (1999) assinala uma segunda função da tecnologia: a de explicar, de fazer inteligível, de aclarar a técnica, e consiste em expor por que é correta. E uma terceira função correspondente a um emprego mais atual do termo de tecnologia: a função de produção de técnicas.

Ainda conforme Chevallard (1999), o discurso tecnológico tem afirmações mais ou menos explícitas, a um nível superior de justificação, explicação e produção da teoria Θ. Em todo âmbito, da natureza da teoria flutuará historicamente, como ocorre na matéria técnica ou tecnológica. Existe um progresso teórico que conduz, em geral, a substituição das evidências “metafísicas” por enunciados teóricos positivos.

> Em grego, *theôria* tomou a partir de Platão o sentido moderno de “especulação abstrata”. Mas, na origem, significava simplesmente a idéia de contemplação de um espetáculo - o *theôros* era o espectador que assistia a ação sem participar. De fato, os enunciados teóricos aparecem freqüentemente como “abstratos”, separados das preocupações dos “simples” tecnológos e técnicos. (Chevallard, 1999, p.226).

Para Chevallard (1999), esse efeito de abstração é correlativo ao que funda a grande generalidade dos enunciados teóricos – sua capacidade para justificar, para explicar, para produzir. Portanto, a tecnologia permite ao mesmo tempo refletir e produzir sobre a técnica, sendo justificada por uma teoria Θ. No plano teórico estão as definições, os teoremas, as noções mais abrangentes e abstratas que servem para explicar, justificar e produzir tecnologias.

Frente ao exposto, pode-se afirmar que toda atividade humana coloca em ação uma organização, composta de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias às quais são representadas por T, τ, θ, Θ, nomeadas praxeologia, ou organização praxeológica.

Dessa forma, é possível considerar que, para o estudo de um conceito ou tema, deve-se identificar e analisar elementos da Organização Praxeológica, ou seja, tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

Segundo Chevallard, Bosch & Gascón (2001), os elementos praxeológicos de uma organização matemática, que descrevem a atividade matemática, e o saber que dela emerge, consistem de dois blocos. O primeiro é o bloco da prática ou atividade “saber-fazer” (práxis), integrada por *tipos de problemas ou tarefas* problemáticas, e *tipos de técnicas* que permitem resolver os tipos de problemas. O outro é o bloco do discurso “saber” (logos), integrado pelas tecnologias que descrevem, explicam e justificam as técnicas, e a teoria que fundamenta e organiza os discursos tecnológicos.

Por essa razão, a noção de organização matemática é também denominada de organização praxeológica matemática, em que a palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, *práxis* e *logos*, que significam, respectivamente, prática e razão. *Práxis* e *logos* estão intimamente relacionados e a articulação entre eles permite dar forma à praxeologia matemática, que mesmo estando em dois níveis diferentes, são inseparáveis, construindo e definindo um processo dialético entre eles.

Segundo esses autores, ensinar e aprender matemática corresponde à atividade de reconstrução de organizações matemáticas para poder utilizá-la em novas situações, em distintas condições. O ensino ou a tarefa docente consiste basicamente em dirigir tais reconstruções, gerando em particular as condições que melhor permitir.

Acredita-se que uma das maneiras de estudar o processo de aprendizagem é identificar as técnicas que os alunos utilizam para resolverem determinadas tarefas e suas justificativas. Por isso, foram identificadas tarefas, técnicas e discursos teórico-tecnológicos apresentados e relativos a sistema de equações lineares. Lembrando que o discurso teórico-tecnológico que esta pesquisa analisa é relativo ao bloco tecnológico/teórico ou bloco do discurso “saber” (*logos*) integrado pelas tecnologias que descrevem, explicam e justificam as técnicas, e a teoria que fundamenta e organiza os discursos tecnológicos.

Com isso, é bom destacar a importância de uma investigação mais profunda de cada um desses blocos, que emerge a atividade matemática à luz da Teoria Antropológica de Chevallard, Bosch & Gascón (2001), para que se possa compreender um pouco mais as razões de algumas dificuldades muitas vezes encontradas na resolução de sistemas de equações lineares.

II.1.2 Organizações pontuais, locais, regionais e globais

Chevallard (1999) enfatiza que toda prática institucional pode ser analisada sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras em um sistema de tarefas relativamente bem circunscritas, que se desenvolvem no fluxo da prática. Além disso, ele diz que a realização de toda tarefa resulta colocar em ação uma técnica. As condições e exigências que permitem a produção e a utilização de tarefas e técnicas nas instituições implicam na existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas, a que se chama tecnologia da técnica. Toda tecnologia, por sua vez, precisa de uma justificativa, a que se denomina teoria da técnica. Este trabalho pode conduzir a construções de novas organizações matemáticas ou, simplesmente, à reprodução de organizações previamente concluídas.

Por conseguinte, as organizações praxeológicas são dinâmicas; muitas delas envelhecem quando seus componentes teóricos e tecnológicos perdem o brilho, a eficiência ou quando deixam de dar respostas satisfatórias para novos problemas; então surgem novas praxeologias.

O que caracteriza a Teoria Antropológica não é o "compreender um conceito", pois a análise da atividade matemática não é conceito e sim a organização matemática ou praxeológica de uma dada instituição, para determinados sujeitos. São essas atividades praxeológicas que dão vida ao conceito, assim como a dinâmica que articula entre si organizações matemáticas com outras, incluindo as questões problemáticas que motivam ou originam essas organizações.

A Teoria Antropológica de Chevallard (1999) estabelece uma marcante distinção entre as organizações matemáticas "pontuais", construídas ao redor de um único tipo de problema, cujas técnicas são utilizadas de maneira rígida e o enfoque tecnológico muito pobre em comparação às organizações "locais", que se obtêm articulando entre si, por via de um discurso tecnológico elaborado, distintas organizações "pontuais".

A praxeologia *local*, segundo Chevallard (1999), conduz geralmente a produções de novos elementos técnicos, novos discursos teórico-tecnológicos e ao planejamento de novos tipos de problemas. Por exemplo, se o professor utilizasse a *técnica resolver graficamente* um sistema de equações para a mesma *tarefa resolver o sistema representado algebricamente* proposta por ele, com as técnicas da substituição ou da adição já vistas, mais a nova técnica por resoluções gráficas, ambas se relacionariam produzindo novo discurso teórico-tecnológico. Assim, teríamos um tipo de tarefa T com duas ou três técnicas e dois discursos teórico-tecnológicos ao invés de um só discurso teórico-tecnológico para as duas técnicas trabalhadas.

> As organizações matemáticas ou praxeologia mais elementares se chamam *pontuais* e estão constituídas ao redor do que em uma determinada instituição é considerado como um único tipo de tarefas. Quando uma OM se obtém por integração de certo conjunto de OM *pontuais*, tais que todas elas aceitam um único discurso tecnológico θ, diremos que temos uma OM *local* caracterizada por tal tecnologia θ (GASCÓN, 2003, P.16).

Chevallard (1999) refere-se a uma organização *pontual*, da forma $\{T_i/\ \tau/\ \theta/\ \Theta\}$, e *local*, da forma $\{T_i/\ \tau_i/\ \theta/\ \Theta\}$. Para ele, as organizações *pontuais* são constituídas ao redor de um único tipo de tarefas considerado como gerador da obra estudada, enquanto a organização *local* agrega várias organizações *pontuais* por via de uma tecnologia comum θ, isto é, sua integração no centro de uma organização *regional* regida por uma mesma teoria Θ. Dessa forma, pode-se notar uma evolução, assim como pxplica Chevallard:

> Quando o tema de estudo imposto a uma certa tecnologia se identifica com certo tipo de tarefa matemática T (organização *pontual)* ou remete ao "núcleo gerador" de um bloco teórico-tecnológico (organização *local*) a evolução se apoiará sobre critérios explícitos, por precisar e justificar, cujas análises prévias deverá permitir decidir em que medida satisfaz a organização matemática que se vai evoluir (CHEVALLARD, 1999, p.27).

Do mesmo modo, a articulação de distintas organizações *locais* com um marco teórico comum pode formar uma organização matemática "regional". As organizações *regionais*, por sua vez, segundo Chevallard (1999), tendem a evoluir por via de aplicações aos tipos de tarefas cuja tecnologia é potencialmente produtora de tecnologias inéditas, e que não se encerram em "aplicações" definidas *a priori*.

Neste trabalho não nos restringiremos às organizações *pontuais* para não concebê-las como uma organização estática e determinada de antemão, como um conjunto de uma obra fechada. É preferível interpretá-la de maneira dinâmica: as técnicas geram novos problemas e apelam para novos resultados tecnológicos, que, por sua vez, permitem desenvolver técnicas já estabelecidas, assim como propor e abordar novas questões, que, dessa forma, permite-nos trabalhar também com as organizações *locais*.

Por exemplo, ao invés de investigarmos apenas com a resolução algébrica de um sistema linear, formado por distintas organizações pontuais, tais como resolver um sistema linear pelo método da adição ou substituição com o mesmo discurso teórico-tecnológico, estaremos investigando também a resolução de um sistema linear com ambas as técnicas – e outras, se necessário, que apresentem diferentes discursos teórico-tecnológicos, na tentativa de evoluir por via de aplicações a novos tipos de tarefas.

Contudo, segundo Chevallard (1999) numa instituição dada, I, uma teoria Θ responde de várias tecnologias $\theta_{ij,}$ cada uma das quais por sua vez justifica e faz inteligível várias técnicas τ_{ij}, correspondentes a outros tantos tipos de tarefas $T_{ij.}$ As organizações *pontais* vão assim a combinar-se, em primeiro lugar, em organizações *locais*, $\{T_i/ \ \tau_i/ \ \theta/ \ \Theta\}$, centradas sobre uma tecnologia θ determinada, e depois em organizações *regionais* $\{ T_{ij}/ \ \theta_{ij}/ \ \theta_j/ \ \Theta\}$, formadas ao redor de uma teoria Θ. Mais pra frente, se denominará organizações *globais* o complexo praxeológico obtido $\{ T_{ijk}/ \ \theta_{ijk}/ \ \theta_{jk}/ \ \Theta_k\}$, em uma instituição dada, pela agregação de várias organizações *regionais* correspondentes a vária teorias Θ_k.

II.1.3 Objetos ostensivos e objetos não-ostensivos

Segundo Chevallard (1999), para ativar uma determinada praxeologia são necessários dois tipos de objetos: os ostensivos e os não-ostensivos.

Os objetos ostensivos – do latim *ostender*e, que significa mostrar, apresentar com insistência – são todos aqueles que têm uma certa materialidade e que, por isso, adquirem para uma pessoa uma realidade perceptível: as palavras, os grafismos e os gestos.

Os objetos não-ostensivos são todos os "objetos" como as idéias, as intuições e os conceitos, que existem institucionalmente, mas que não podem ser vistos, percebidos ou mostrados por si mesmos. Eles só podem ser evocados por uma manipulação adequada de determinados objetos ostensivos associados (uma palavra, um grafismo, um gesto ou todo um discurso). Por exemplo, o conceito de sistema de equações lineares é um objeto não-ostensivo identificado e ativado por meio da escrita "$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$", ou da palavra (escrita ou falada) "sistema de equações lineares", ou por um gráfico, todos objetos ostensivos.

Para Bosch & Chevallard (*apud* Bosch, 2007, p.3,) salienta que:

> - os dois tipos de objetos (ostensivos e não-ostensivos) são sempre institucionais; a existência deles não depende da atividade de uma única pessoa;
> - os dois tipos de objetos (ostensivos e não-ostensivos) são unidos por uma dialética que considera os "não-ostensivos" como emergentes da manipulação dos "ostensivos" e, ao mesmo tempo, como meios de controle dessa manipulação;
> - os objetos ostensivos são manipuláveis pelo ser humano, ao passo que os não-ostensivos não são manipuláveis;
> - a presença simultânea de diferentes registros ostensivos é um invariante da prática matemática.

É importante observar que a abordagem antropológica propõe um modelo de atividade matemática que integra os *objetos ostensivos* como constituintes básicos do saber matemático, descrito em termos de organizações praxeológicas. No plano da tecnologia, situam-se os conceitos e as noções que permitem compreender e controlar a atividade humana; nele, objetos ostensivos são manipulados concretamente para materializar explicações e justificativas necessárias ao desenvolvimento da técnica, como também para produzir novas técnicas.

Analisando a parte histórica no que concerne a sistemas de equações lineares, pode-se perceber que há uma tendência em menosprezar a valência instrumental dos ostensivos de determinados registros, em particular do registro gráfico e da linguagem verbal. No entanto, em outro registro, como a escrita algébrica, por exemplo, observa-se uma maior valorização. O resultado é uma escassa atenção ao trabalho de manipulação do primeiro tipo de *objetos ostensivos* e um peso excessivo na exigência de interpretação do trabalho realizado com os ostensivos do segundo tipo, o formalismo algébrico.

É um fato conhecido e amplamente posto em evidência o frágil recurso a determinados tipos de *objetos ostensivos* na construção escolar de conhecimentos matemáticos, em benefício do registro da escrita e do formalismo algébrico.

Assim, à pergunta sobre a origem dos conceitos matemáticos (*não-ostensivos*) e sua relação com os objetos que os representam (*ostensivos*), a Teoria Antropológica responde em termos da dialética: os conceitos surgem da manipulação de ostensivos dentro de determinadas organizações matemáticas, como resposta a certas tarefas problemáticas e em torno tecnológico-teórico dado, e é esta mesma prática que, ao institucionalizar ou oficializar, estabelece os vínculos entre *ostensivos* e *não ostensivos*, que permitirão aos primeiros remitir ou representar aos segundos em atividades futuras.

Chevallard (1999) ressalta o fato de que acionar uma técnica significa manipular *ostensivos*, dirigidos pelos *não-ostensivos*. Além disso, todo discurso tecnológico ou teórico efetua-se concretamente pela manipulação de *ostensivos*, em particular, utilizando os discursivos e escritos, que permitem materializar as explicações e justificativas necessárias ao desenvolvimento das tarefas. O trabalho com os *ostensivos* deve ser, por sua vez, eficaz, legível e inteligível, contribuindo para dar aos *ostensivos* sua força instrumental e semiótica.

A abordagem antropológica propõe um modelo de atividade matemática que integra os *objetos ostensivos* como constituintes básicos do saber matemático, descrito em termos de organizações praxeológicas. Na evolução dessas praxeologias, nos seus desenvolvimentos históricos e nas suas transposições na sala de aula, os avanços e os recuos são sempre *ostensivos* e *não ostensivos*.

Dessa maneira, os *objetos ostensivos* – fórmulas, gráficos, tabelas, expressões verbais e outros grafismos – são os ingredientes básicos cuja manipulação faz emergir o saber/fazer e o saber sobre sistema de equações lineares.

II.1.4 Dispositivos didáticos

Sob a luz da TAD de Chevallard (1999), esta análise teve por finalidade investigar alguns dispositivos didáticos relativos ao estudo de técnicas de resolução de sistemas de equações lineares em nível de 7ª série do Ensino Fundamental.

O "meio matemático dos alunos" (Chevallard, Bosch & Gascón, 2001), isto é, todos aqueles objetos com os quais os alunos têm uma familiaridade matemática tal que podem manipulá-los com toda segurança e cujas propriedades lhes parecem inquestionáveis, se assemelha aos dispositivos didáticos de ajuda para o estudo, por intermédio dos quais se contextualiza a matemática ensinada *(Ibid.).*

> Em geral, um dispositivo escolar será qualquer "mecanismo" preparado para obter determinados objetivos educacionais. Assim, por exemplo, a aula de matemática, a de língua, o livro didático, a biblioteca, as provas, as perguntas que faz o professor em aula, as sessões de tutoria e os descansos são dispositivos escolares. À medida que cada um desses dispositivos incide sobre a estruturação e o desenvolvimento do processo de estudo da matemática, funcionando como um dispositivo de ajuda para o estudo da matemática, diremos que se trata, além disso, de um dispositivo didático (no sentido de didático-matemático). (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001, p.278).

Em um processo de estudo, segundo Chevallard, Bosch & Gascón (2001), podem ocorrer momentos que dificilmente são realizados na organização em que se encontra o ensino da Matemática. Surge, então, a necessidade de criar novos dispositivos que fujam da “aula de matemática” tradicional e sejam capazes de assumir funções que esta não pode assumir.

Dessa forma, os dispositivos aqui analisados serão, primeiramente, os livros didáticos e as aulas relativas a sistema de equações lineares, ambos considerados tradicionais na instituição em que foi realizada a pesquisa. Logo depois, o uso de um outro dispositivo será analisado: o *software* educativo de Álgebra, na sala de tecnologias. Durante essas análises, nossos olhares estarão focados nas organizações praxeológicas nesses dispositivos e nas maneiras como incidem sobre a estruturação e o desenvolvimento do processo de estudo do conteúdo sistema de equações lineares.

O primeiro dispositivo analisado é o livro didático, incluído nos tipos de documentos que fazem parte da análise documental que busca investigar informações factuais a partir de questões ou hipóteses de pesquisa. O livro didático é considerado por Cuba e Lincoln (apud LUDKE; ANDRÉ, 1986) como uma fonte estável e rica, que pode servir de base a diferentes estudos e de onde se podem retirar evidências para fundamentar afirmações e declarações, sendo, portanto, uma fonte de informação que não deve ser ignorada.

Segundo Chevallard, o livro didático para os alunos é freqüentemente utilizado como dispositivo pedagógico:

> No Ensino Fundamental, o livro didático de Matemática tende a ter um papel auxiliar e relativamente externo ao “curso” que “dita” o professor: serve, basicamente, para proporcionar listas de exercícios, alguns problemas resolvidos e o gráfico preciso de alguma figura complexa. Assim, para o estudante, o livro didático costuma ter um papel de dispositivo pedagógico, visto que suas funções são essencialmente independentes da matéria estudada, e, o que é mais importante, porque não incide de maneira significativa sobre a estruturação e o desenvolvimento do processo de estudo (CHEVALLARD, BOSCH, GASCON 2001, P. 284).

O segundo dispositivo são as aulas relativas a sistema de equações lineares. Chevallard, Bosch & Gascón (2001) destacam dois tipos de aulas: a “aula prática” e a “aula de problemas”. Consideram “aula prática” o dispositivo no qual possa se desenvolver plenamente o momento do processo de estudo denominado pelo professor como “momento do trabalho da técnica”, para realizar problemas muito parecidos entre si. Já a “aula de problemas” é o dispositivo em que o estudante tenta resolver, pela primeira vez, problemas concretos de diversos tipos e manipula pela primeira vez certas técnicas matemáticas para resolvê-los. As duas aulas podem ser confundidas devido ao fato de que o tipo de atividade central que se realiza em ambas pode ser descrito, à primeira vista, como “resolver problemas” *(Ibid.).*

> Enquanto na aula de problemas a atividade do estudante se centra em explorar tipos de problemas bem diferentes entre si e em buscar técnicas para resolvê-los, na aula de prática parte-se de uma técnica dada e de um conjunto de problemas do mesmo tipo, que são utilizados como instrumento para que os estudantes alcancem um domínio sólido dessa técnica. Na aula de problemas, a atividade evolui ao ir de um problema para outro. Na aula de prática, ao contrário, a evolução acontece pelo desenvolvimento interno das técnicas (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001, P.280).

Na descrição apresentada no capítulo IV, sobre a aula relativa a sistema de equações lineares, foi possível perceber que as aulas analisadas se caracterizam pela chamada “aula prática”, assim denominada pelos autores. Por outro lado, as atividades que planejamos, com diferentes tipos de tarefas, junto ao *software Aplusix,* possuem as características de uma “aula de problemas”, conforme definição dos autores.

As análises da estrutura do processo de estudo, com a presença dos dois dispositivos utilizados na sala de aula pesquisada, evidenciaram a necessidade de utilizar um outro dispositivo didático capaz de articular diferentes momentos do processo de estudo, relativos ao sistema de equações lineares. Portanto, escolhemos como novo dispositivo, o *software Aplusix,* sendo o terceiro e último dispositivo analisado.

Segundo Chevallard, Bosch & Gascón (2001), o desconhecimento do processo de estudo e a tendência de interpretar em termos psicopedagógicos todas as dificuldades da aprendizagem matemática impedem que as instituições escolares reconheçam a necessidade do uso de novos dispositivos didáticos.

Chamamos a atenção aqui para a diferença que os autores fazem entre dispositivos didáticos e dispositivos pedagógicos. O dispositivo didático, para eles, incide sobre a estruturação e o desenvolvimento do processo de estudo da Matemática, funcionando como um dispositivo de ajuda. O dispositivo pedagógico é um instrumento, material ou não, de ajuda ao ensino, independente do conteúdo a ser ensinado e, presumivelmente, deve funcionar como facilitador da aprendizagem de quaisquer conteúdos.

Chevallard, Bosch & Gascon (2001) destacam a crescente proliferação dos dispositivos pedagógicos, como os meios audiovisuais e a informática educativa. Por isso, salientamos que, ao introduzir o *software*, nossa preocupação era a de desenvolver uma seqüência de atividades que refletissem na estruturação e no desenvolvimento do processo de estudo, relativo a sistema de equações lineares, funcionando como um dispositivo de ajuda para o estudo em questão.

Para que esse objetivo pudesse ser alcançado foi utilizada a metodologia da Engenharia Didática de Artigue (1990), juntamente com o conceito de análise teórica proposta por Henry (2006).

II.2 Engenharia didática

O conhecimento é uma construção humana de significados em que o indivíduo constrói ativamente suas experiências e vivências em diferentes situações. Dessa forma, na perspectiva da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1990), que consiste em explorar situações de aprendizagem, houve uma investigação das organizações sobre o tema de sistema de equações lineares, permitindo a coleta de dados para análise e a busca de respostas às principais questões referentes ao objeto desta pesquisa.

Nessa metodologia o trabalho didático é comparável àquele de um engenheiro que, para realizar um projeto preciso, apóia-se em conhecimentos científicos de seu campo, aceitando submeter-se a controles específicos. Tal metodologia trabalha com objetos mais complexos que aqueles purificados da ciência, já que conjecturas relativas ao comportamento humano são mais difíceis de serem verificadas pela observação e pela experimentação.

> A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação, e a análise de seqüências de ensino – seqüências didáticas (ARTIGUE, 1990, p.285).

Acredita-se que esse tipo de metodologia se torna pertinente quando o processo de aprendizagem passa a ter novos significados na construção do conceito estudado, quando os alunos trazem consigo experiências vividas fora da sala de aula.

Machado *et al.* (2002) destaca a noção de engenharia didática que se construiu na Didática da Matemática com dupla função, na qual ela pode ser compreendida tanto como uma metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino.

Por isso, esse referencial metodológico foi utilizado nesta pesquisa, considerando a complexidade da sala e outros fenômenos ligados ao processo de aprendizagem de alunos de 7ª série, no âmbito da "engenharia" (MACHADO *et al.*, 2002), para que fosse possível encontrar respostas a uma das questões levantadas no primeiro capítulo deste estudo: Quais tarefas, técnicas e discursos teórico-tecnológicos que os alunos utilizam para resolver sistemas de equações lineares segundo a organização matemática encontrada na instituição escolar?

Os dados obtidos por meio dessa engenharia didática tornaram possível a investigação das organizações praxeológicas encontradas naquele ambiente escolar e, então, procurar responder aos objetivos apresentados anteriormente.

Vista como uma metodologia de pesquisa, a engenharia didática baseia-se nas relações didáticas em classe, ou seja, concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino. Ela se caracteriza também pelo estudo de casos onde a validação é essencialmente interna, utilizando como fundamento o confronto entre análise *a priori* e *a posteriori*.

Com uma investigação das realizações efetivas em classe, pretende-se questionar as relações entre as organizações matemáticas encontradas; como o pesquisador organiza e estrutura um processo de investigação de modo a reproduzir certas condutas dos alunos e qual a natureza e a amplitude da defasagem entre as condutas esperadas; dentre as obtidas, verificar instrumentos plausíveis para as hipóteses que serviram para construir o processo de investigação.

Considerando os objetivos gerais deste estudo, visando à investigação das organizações praxeológicas de Chevallard, Bosch & Gascón (2001) sobre sistema de equações lineares aprendidos por alunos da 7ª série, a opção por essa metodologia de pesquisa mostra-se compatível, uma vez que mediante investigações efetivas em classe é possível levantar um panorama das organizações matemáticas.

Machado *et al*. (2002) também diz que a engenharia didática se caracteriza por ser como um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino.

Segundo Artigue (1990), o trabalho do professor ou pesquisador na elaboração ou escolha de uma seqüência didática deve levar em conta o domínio do conhecimento, o conhecimento prévio do aluno, o papel do professor e dos seus alunos. Para tanto, em cada fase dessa metodologia é necessária a sua definição dando significado à investigação deste objeto.

A criação de uma seqüência didática dá-se em um processo interativo no qual o objetivo é a elaboração de um grupo de decisões para que os processos tenham significados e as estratégias sejam mais efetivas. Leva-se em consideração as respostas dos alunos e as condições às quais essas respostas estão submetidas.

Logo, o processo envolve: uma análise da situação proposta, das condições da organização, da escolha de estratégias baseadas nas análises da instrução dada, da determinação de critérios de avaliação, da elaboração de questões que estejam de acordo com os critérios determinados e de uma revisão de todo processo em função dessa avaliação.

Na metodologia da engenharia didática é possível identificar quatro fases que permitem a concepção e organização de uma seqüência didática:

a análise preliminar, a análise *a priori,* a experimentação e a análise *a posteriori*. A seguir são apresentadas essas fases com um pouco mais de detalhe.

Fase I - Análises Preliminares

Nesta pesquisa, as análises preliminares consistiram na análise do conteúdo sistema de equações lineares e no estudo sobre os processos educacionais desenvolvidos em classe: o meio, os instrumentos, a mediação do professor.

Para esta fase, usamos o conceito de análise teórica ou análise a *priori* proposta por Henry (2006). Como o nosso objetivo é investigar os dispositivos utilizados em sala de aula, e segundo esse autor a análise teórica é um conjunto de estudos com objetivo de analisar situações em sala de aula, a qual é composta das seguintes análises:

I – Análise do conhecimento em estudo: Levantamento teórico relativo a sistema de equações lineares – capítulo III.

Essa análise teórica se encontra no capítulo III, neste capítulo são apresentadas a análise teórica matemática relativa a sistema de equações lineares e suas técnicas, levando em consideração concepções envolvidas nos procedimentos internos das técnicas de resolução.

II – Análise didática: Análise das organizações praxeológicas dos dispositivos didáticos – capítulo IV.

Essa análise se encontra no capítulo IV, onde são analisados os livros didáticos adotados, assim como de aulas realizadas na 7ª série pesquisada e da seqüência didática com uso do *software,* todos relativos a sistema de equações lineares, tomando por base os elementos da TAD.

III – Análise pedagógica: Levantamento de conhecimentos prévios dos alunos – capítulo V.

Um breve levantamento de conhecimentos prévios dos alunos juntamente com os resultados obtidos nas análises dos dispositivos didáticos, possibilitou a decisão sobre quais situações didáticas e quais os problemas relativos a sistema de equações lineares seriam trabalhados com o auxílio do *software*, tendo em vista o ensino habitual.

Fase II – Análise *a priori*

Consistiu na preparação da seqüência didática e do esquema experimental para a ação na sala de informática, com o auxílio do *software* *Aplusix*, em que foram delimitadas variáveis de controle visando investigar as técnicas na resolução de sistema de equações lineares por alunos da 7ª série.

A análise a *priori* caracterizou-se fundamentalmente pela descrição e pela justificativa das escolhas, para o desenvolvimento da seqüência e da previsão de comportamentos possíveis e esperados durante a realização.

O objetivo da análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamento dos alunos e seus sentidos com a ação de verificar as estratégias possíveis diante do conteúdo escolhido.

Fase III – Experimentação

É a execução das sessões contendo as atividades elaboradas nas análises *a priori* e preliminar, ou seja, a realização de cursos pilotos em que se recorre à pesquisa/ação experimental em educação. Neste caso, observou-se o envolvimento do professor-pesquisador e dos alunos por meio de gravações em fita magnética e pelo *software* utilizado, no decorrer da experimentação.

As atividades preparadas desenvolvem-se segundo as expectativas do professor, investigando o que os alunos aprenderam efetivamente, a fim de reutilizar o que foi absorvido em problemas com um contexto similar, só que mais complexo, ou, em problemas com um contexto completamente diferente, de complexidade similar ou muito maior. Após sua realização, providenciou-se a análise *a posteriori*.

Fase IV - Análise *a posteriori*

Esta última fase da engenharia didática é a compreensão e a interpretação dos resultados da experimentação e seu objetivo é oferecer um *feedback* para o desenvolvimento de uma nova análise *a priori*, para surgir uma nova experimentação, concebendo o desenvolvimento das atividades como uma atualização dos processos em questão.

No próximo capítulo, apresentamos a análise teórica do conhecimento em estudo, proposta por Henry (2006).

III: ANÁLISE TEÓRICA RELATIVA A SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Neste capítulo apresentaremos a análise teórica matemática relativa a sistema de equações lineares e suas técnicas empregadas no Ensino Fundamental. Nestas análises serão descritas as teorias que irão esclarecer as análises praxeológicas dos próximos capítulos, ao mesmo tempo em que apresentaremos alguns de nossos comentários, levando em consideração concepções envolvidas nos procedimentos internos das técnicas de resolução. No final deste capítulo mostraremos as principais ferramentas do *software*, possíveis de investigar as técnicas relativas a sistemas de equações lineares, justificando nossas escolhas.

III.1 Análise Matemática

O significado da palavra "sistema" permite que se tenha um melhor entendimento sobre sistema de equações lineares, muitas vezes esquecido pelos alunos, que o resolvem utilizando técnicas de substituição ou adição aprendidas no Ensino Fundamental. Vinda do grego *sustéma*, a palavra "sistema" significa "combinar", "ajustar", "formar um conjunto".

> 1. Conjunto de elementos, materiais ou ideais, entre os quais se possa encontrar ou definir alguma relação. 2. Disposição das partes ou dos elementos de um todo, coordenado entre si, e que funcionam como estrutura organizada (AURÉLIO, 2007).

Desta maneira, quando se fala em um sistema de equações lineares com duas variáveis, refere-se a um conjunto de equações lineares interconectadas em que transformações ocorridas em uma delas acabam por influenciar todas as outras. As definições matemáticas para equação linear, sistema de equações lineares e suas soluções são as seguintes:

> **Definição 1** – Dados os números reais $\alpha_1, ..., \alpha_n$, β ($n \geq 1$), à equação
> $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = \beta$, onde os x_i são variáveis em R, damos o nome de *equação linear sobre R nas incógnitas $x_1, ..., x_n$*. Uma *solução* dessa equação é uma seqüência de n números reais (não necessariamente distintos entre si), indicada por $(b_1, ..., b_n) = \beta$, tal que $\alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n = \beta$ é uma frase verdadeira.
> **Definição 2** – *Um sistema de m equações lineares com n incógnitas* (m, n ≥1) é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente.Um sistema linear se apresenta do seguinte modo:
>
> $$S: \begin{cases} \alpha_{11}X_1 + ... + \alpha_{1n}X_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}X_1 + ... + \alpha_{2n}X_n = \beta_2 \\ .... \\ \alpha_{m1}X_1 + ... + \alpha_{mn}X_n = \beta_m \end{cases}$$
>
> Uma *solução* do sistema acima é uma n-upla $(b_1, ..., b_n)$ de números reais que é solução de *cada uma* das equações do sistema (DOMINGUES, CALLIOLI & COSTA, 1982, p.2).

Por isso que de acordo com a Encyclopædia Britannica Online (2007) sistema de equações lineares é também chamada de equações simultâneas, que são duas ou mais equações resolvidas em conjunto cuja solução, caso possua, satisfaça a todas as equações do sistema.

Resolver um sistema, segundo Machado (1996), significa determinar o seu conjunto solução.

> Os sistemas lineares que possuem solução são chamados *sistemas possíveis* ou *compatíveis*; os que não possuem solução são chamados *impossíveis* ou *incompatíveis.* Os sistemas possíveis podem ser ainda classificados em *determinados* (os que têm apenas uma solução) ou *indeterminados* (os que têm infinitas soluções) (MACHADO, 1996, p.91).

Para resolver um sistema de equações lineares existem várias técnicas, como por exemplo, a técnica da redução que propõe a idéia fundamental para resolver sistemas de equações, que é transformando em outro equivalente a ele, mas com algumas incógnitas a menos em qualquer uma de suas equações. Em cursos do ensino médio e superior se estuda o procedimento geral correspondente, para a resolução de sistemas de n equações com n incógnitas, o denominado método de Gauss.

Segundo Iezzi (2002), dois sistemas lineares são *equivalentes* quando toda solução de um é também solução de outro e vice-versa, ou seja, possuem o mesmo conjunto de soluções. Vamos apresentar duas propriedades que permitem construir sistemas equivalentes.

> **Propriedade 1:** Quando multiplicamos por k, $k \in R^*$, os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S, obtemos um novo sistema S' equivalente a S.
> **Propriedade 2:** Quando substituímos uma equação de um sistema linear S pela soma, membro a membro, dela com outra, obtemos um novo sistema S' equivalente a S (Iezzi *et al.*, 2002, p.342).

Muitas vezes incompreensíveis num ensinar e aprender de técnicas algorítmicas, essas duas propriedades justificam o discurso tecnológico que por sua vez esclarece as técnicas da adição e substituição, utilizadas por alunos do Ensino Fundamental.

Apresentamos a seguir, as principais técnicas de resolução de sistemas de equações lineares, encontradas nos dispositivos didáticos analisados, descrevendo passos presentes em cada uma delas.

III.2 Técnicas utilizadas no Ensino Fundamental

Lembrando o que foi dito por Chevallard, Bosch & Gascón (2001, p. 124), "de maneira geral, a aplicação de uma técnica matemática sempre mantém certo grau de indeterminação, mesmo quando sua definição seja precisa e por maior que seja o domínio que o estudante tenha dela".

Por essa razão, as técnicas matemáticas não serão sistematizadas aqui a ponto de torná-las algorítmicas, haja vista os pressupostos colocados acima. Apresentamos, a seguir, as técnicas identificadas em livros didáticos e práticas de docentes, buscando descrever os principais passos de cada uma delas, seguidos de um exemplo e de uma breve discussão das concepções algébricas segundo Usiskin (1995).

Reunimos, também, as técnicas que apresentam o mesmo discurso teórico-tecnológico, apresentando-o em seguida.

Técnica* τ_1*: Substituição.

PASSO 1: Reduzir o sistema à forma canônica;

PASSO 2: Isolar uma das incógnitas em uma das equações;

PASSO 3: Substituir o termo igual a essa incógnita na outra equação e obter uma equação com uma incógnita;

PASSO 4: Resolver a equação com uma incógnita encontrada;

PASSO 5: Substituir o valor encontrado, dessa incógnita, em uma das equações do sistema e resolver, determinando o valor da outra incógnita.

Exemplo: *Usando o método da substituição, resolva o seguinte sistema:*

$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - 3y = -12 \end{cases}$, *(GIOVANI, CASTRUCCI e GIOVANNI JR., 2002).*

PASSO 1: O sistema já está na forma reduzida.

PASSO 2: PASSO 3:

$\begin{cases} x + y = 20 \quad \Rightarrow x = 20 - y \\ x - 3y = -12 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x + y = 20 \\ (20 - y) - 3y = -12 \end{cases}$

PASSO 4:PASSO 5:

(20-y) - 3y = 12 $\qquad$ x + y = 20

20 – y – 3y = 12 $\qquad$ x + 2 = 20

-4y = 12 – 20 $\qquad$ x = 20 – 2

-4y = -8 $\times$(-1) $\qquad$ x = 18

4y = 8

y = 8/4 $\Rightarrow$ y = 2

Ao resolver o sistema pela técnica da substituição, as equações são separadas de forma que a estrutura do sistema seja desfeita e sua forma original deixe de existir para os alunos. O passo 4 dessa técnica é constituído de técnicas para se resolver equações com uma incógnita, ou seja, as técnicas da transposição ou operação inversa.

Técnicaτ_2: Adição.

PASSO 1: Reduzir o sistema à forma canônica;

PASSO 2: Multiplicar ambos os membros das equações por números convenientes, de modo que os coeficientes de uma das incógnitas sejam números opostos;

PASSO 3: Adicionar membro a membro as duas equações;

PASSO 4: Resolver a equação com uma só incógnita, assim obtida;

PASSO 5: Substituir o valor encontrado em uma das equações do sistema e determinar o valor da outra incógnita.

Exemplo: *Usando o método da adição, resolva cada um dos seguintes sistemas:* $\begin{cases} x = 2y \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$*, (GIOVANI, CASTRUCCI e GIOVANNI JR., 2002).*

PASSO 1:PASSO 2:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases} \begin{cases} x - 2y = 0 \quad \times(-2) \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$$

PASSO 3:PASSO 4:PASSO 5

$$\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ \underline{\ \ 2x - 5y = 3} \end{cases} \quad \begin{matrix} + - y = 3 \quad \times(-1) \\ y = -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2y \\ x = 2\times(-3) \\ x = -6 \end{matrix}$$

$$-\ y = 3$$

Os passos 1 e 2, nesta técnica, são combinações lineares, ou seja, são as propriedades de equivalência de sistemas vistas nas análises matemáticas do item anterior. Assim, o sistema mantém sua estrutura até o passo 2, e em seguida as equações são separadas ao eliminar-se uma das incógnitas do sistema. Do passo 3 em diante, novamente são utilizadas as técnicas de transposição ou operação inversa, assim como ocorreu na resolução do sistema com a técnica da substituição.

Técnica τ_3***: Comparação.***

PASSO 1: Reduzir à forma canônica o sistema;

PASSO 2: Isolar uma das variáveis nas duas equações;

PASSO 3: Substituir o termo igual a essa variável na outra equação, de forma que os termos iguais a essa variável se igualem, obtendo uma equação com uma variável;

PASSO 4: Resolver a equação com uma variável encontrada;

PASSO 5: Substituir o valor dessa variável em uma das equações do sistema e determinar o valor da outra variável.

Exemplo: *Usando o método da comparação, resolva o seguinte sistema:* $\begin{cases} x+y=10 \\ x+3y=14 \end{cases}$ *, (GIOVANI, CASTRUCCI e GIOVANNI JR., 2002).*

PASSO 1: O sistema já está na forma reduzida.

PASSO 2: PASSO 3:

$$\begin{cases} x+y=10 & \Rightarrow \quad x=10-y \\ x+3y=14 & \Rightarrow \quad x=14-3y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 10 - y = 14 - 3y$$

PASSO 4: PASSO 5:

10 - y = 14 – 3y	x + y =10
-y + 3y = 14 -10	x + 2 = 10
2y = 4	x = 10 - 2
y = 4/2 ⇒ y =2	x = 8

Nesta técnica, ao invés de isolar uma incógnita em uma única equação, como visto nas técnicas da substituição e da adição, a mesma incógnita é isolada nas duas equações para depois substituí-la na outra equação, onde a incógnita outrora foi isolada. Nos passos seguintes são utilizadas as técnicas de resolução de equações, portanto, pode-se concluir que essas três técnicas – substituição, adição e comparação – apresentam características comuns, já que em todas elas há primeiramente a redução para, então, se fazer a resolução.

Assim, esse procedimento comum nessas três técnicas parece ser mais rápido e mais simples aos alunos. Nele, elimina-se uma variável e obtém-se uma equação para obter o valor de uma das incógnitas. Só depois é resolvida a outra equação, reduzindo-a até chegar ao valor da outra incógnita. Outro processo possível e mais rápido seria reduzir as duas equações ao mesmo tempo, como veremos na técnica da redução.

Técnica τ_4***: Redução***

PASSO 1: Reduzir à forma canônica o sistema;

PASSO 2: Multiplicar ambos os membros das equações por números convenientes e/ou substituir uma equação de um sistema linear pela soma, membro a membro, dela com outra, permanecendo o sistema com a equação que não foi modificada.

PASSO 3: Repetir o passo 1 até reduzir uma das equações, a uma só incógnita, encontrando seu valor.

PASSO 4: Repetir o passo 1 até reduzir a outra equação, isolando a outra incógnita até encontrar o seu valor.

Exemplo: Resolver o sistema: $\begin{cases} 3x + 4y = 9{,}50 \\ x + 2y = 3{,}50 \end{cases}$

PASSO 1: O sistema já está na forma reduzida.

PASSO 2:PASSO 3:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 9{,}50 \\ x + 2y = 3{,}50 \end{cases} - \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 6{,}00 \div (2) \\ x + 2y = 3{,}50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 3{,}50 \end{cases} - \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 0{,}50 \end{cases}$$

PASSO 4: $\begin{cases} x + 0{,}50 = 3 \\ y = 0{,}50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2{,}50 \\ y = 0{,}50 \end{cases}$

Nestas quatro primeiras técnicas as letras são incógnitas, valores desconhecidos. Para Usiskin (1995), as instruções-chave para o aluno são simplificar e resolver. E, segundo ele, em alguns casos essas duas instruções são semelhantes, pois, ao tentarmos resolver uma equação, fazemos simplificações na tentativa de encontrar uma equação equivalente com a mesma solução.

Além da concepção de incógnitas, nesta técnica da redução existe também a concepção de estrutura. Quando pedimos para aos alunos realizarem combinações mantendo sempre a estrutura do sistema, desejamos que eles consigam operar com as letras seguindo regras próprias, de modo a encontrar um outro sistema equivalente. Nesse caso, a concepção da letra é diferente de todas técnicas citadas aqui, não se trata de nenhuma relação, ou função, e não se separam as equações para resolver o sistema, ou algum modelo em Aritmética, para generalizar. A variável acaba tornando-se um símbolo arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades, vistas na análise matemática. Compartilhamos das idéias propostas por Usiskin (1995) a respeito do que se espera em relação aos procedimentos que os alunos precisam dar conta de adotar, ou seja, é necessário que eles consigam operar com as variáveis, seguindo as regras próprias da estrutura em que se está trabalhando, e que, quando preciso, saibam voltar aos referenciais, em geral números reais.

Apresentamos a seguir um exemplo para ilustrar de forma ostensiva as três primeiras técnicas em relação a esta técnica da redução, a fim de buscar uma melhor compreensão do discurso teórico-tecnológico que as justificam:

Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=10 \\ x+3y=14 \end{cases}$

<u>Substituição</u> <u>Adição</u> <u>Comparação</u>

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} x=10-y \\ x+3y=14 \end{cases} & \begin{cases} x+y=10 \\ -x-3y=-14 \end{cases} & \begin{cases} x=10-y \\ x=14-3y \end{cases} \\ \Rightarrow 10-y+3y=14 & \Rightarrow -2y=-4 & \Rightarrow 10-y=14-3y \\ \Rightarrow 2y=4 & \Rightarrow 2y=4 & \Rightarrow 2y=4 \\ \Rightarrow x=8;\ y=2 & \Rightarrow x=8;\ y=2 & \Rightarrow x=8;\ y=2 \end{array}$$

<u>Redução</u>

$$\begin{cases} x+y=10\times(-1) \\ x+3y=14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x-y=-10 \\ x+3y=14 \end{cases} +$$

$$\begin{cases} -x-y=-10 \\ 2y=4\ \times(1/2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x-y=-10 \\ y=2 \end{cases} +$$

$$\begin{cases} -x=-8\times(-1) \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}$$

Como foi possível perceber, nas três primeiras técnicas ocorreu a eliminação da incógnita x de uma equação para que se pudesse encontrar o valor da incógnita y, e só depois voltar em uma das equações do sistema e achar o valor de x. Por outro lado, na técnica da redução, a estrutura do sistema se manteve, realizando combinações lineares, mas sem separar as equações.

Desta forma, as propriedades vistas na análise matemática acima estão mais evidentes, permitindo esclarecer o discurso teórico-tecnológico das três primeiras técnicas, nas quais as equações são isoladas e resolvidas separadamente do sistema, o que, de forma implícita, são combinações lineares também. Assim, de forma resumida, o discurso teórico-tecnológico que justifica as quatro técnicas é:

Discurso teórico-tecnológico: *Propriedades relativas ao conjunto solução de um sistema, garantido pelas propriedades já descritas na análise teórica de sistemas equivalentes, ou seja, ao realizar combinações lineares com o sistema de equações, o seu conjunto solução não se altera.*

O *software* que usaremos para investigar técnicas utilizadas pelos alunos, como será descrito posteriormente, reconhece a resolução de um sistema apenas com a técnica da redução, na qual deve ser preservada a estrutura do sistema de equações, as quais representamos ligadas por uma chave. Para isso, o discurso teórico-tecnológico que fundamenta as técnicas utilizadas precisará estar claro aos alunos.

Técnica τ_5***: Tentativas***

PASSO 1: Desenhar uma tabela com uma coluna para cada incógnita e para cada operação realizada com essas incógnitas do enunciado;

PASSO 2: Descrever as incógnitas e operações de cada coluna na primeira linha conforme os dados fornecidos no enunciado.

PASSO 3: Completar a tabela traduzida até encontrar os valores desejados.

Exemplo: *Um jogo de voleibol manda assinalar 2 pontos para cada partida que a equipe vence e 1 ponto para cada partida que a equipe perde. Se uma equipe disputou 4 partidas e somou 7 pontos, quantas partidas venceu e quantas perdeu? (GIOVANI, CASTRUCCI e GIOVANNI JR., 2002).*

PASSO 1:

Número de incógnitas = 2 (número de partida que perdeu e venceu)

Número de operações = 2 (número de partidas disputadas e soma dos pontos)

PASSO 2:

Número de partidas que a equipe venceu	Número de partidas que a equipe perdeu	Número de partidas disputadas	Soma dos pontos

PASSO 3:

Número de partidas que a equipe venceu	Número de partidas que a equipe perdeu	Número de partidas disputadas	Soma dos pontos
0	4	0+4=4	0.(2)+4.(1)=4
1	3	1+3=4	1.(2)+3.(1)=5
2	2	2+2=4	2.(2)+2.(1)=6
3	1	3+1=4	3.(2)+1.(1)=7
4	0	4+0=4	4.(2)+1.(0)=8

Além de integrador e criador de objetos matemáticos, no momento do trabalho desta técnica podemos perceber a presença de duas concepções diferentes da Álgebra, segundo Usiskin (1995). A primeira como um estudo de procedimentos para resolver certos problemas, em que se utilizam tentativas para resolver a situação-problema até obterem-se os valores procurados, e a segunda o uso aritmético, em que não é fornecido e nem pedido algum tipo de expressão algébrica que generalize a situação-problema.

A tabela demonstrada pode servir como um suporte para diversas praxeologias. A partir dela, diversas tarefas podem ser pedidas, tais como:

- Modelar a situação-problema;
- Modelar e resolver de forma algébrica a situação-problema;

- Representar graficamente a situação;
- Resolver por tentativas a situação modelada.

Este é um momento do trabalho da técnica, para Chevallard, Bosch e Gascón (2001) e apresenta duas características essenciais: criar novos objetos matemáticos e integrar, de maneira natural, esse momento e o momento teórico-tecnológico.

Para chegar ao resultado é preciso atribuir valores que alcancem as condições estabelecidas na situação-problema. Desse modo, essa técnica é justificada pelo seguinte discurso teórico-tecnológico:

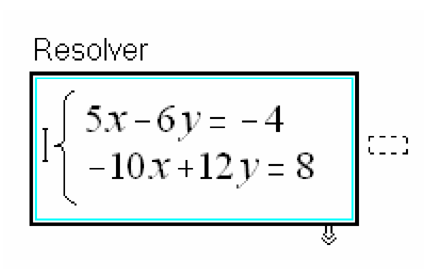
Discurso teórico-tecnológico: *A técnica é justificada pela definição de solução, descrita na análise teórica, de um sistema de equações lineares com duas variáveis. A solução do sistema é todo par ordenado que satisfaça às duas equações.*

Técnica τ_6 ***(apenas para sistemas indeterminados): Transposição ou operações inversas.***

PASSO 1: Reduzir, por meio de combinações lineares, as equações na forma canônica e verificar que as duas equações do sistema são iguais;

PASSO 2: Isolar uma incógnita de uma das equações, deixando uma variável em função da outra.

Exemplo*: Resolver (APLUSIX, 2006):*



PASSO 1: PASSO 2:

$$\begin{cases} 5x-6y=-4 & \times(-2) \\ -10x+12y=8 \end{cases} \qquad -10x+12y=8 \quad \times(-1)$$

$$\begin{cases} -10x+12y=8 \\ -10x+12y=8 \end{cases} \qquad 10x-12y=-8 \qquad x=\frac{-8+12y}{10}$$

Com esse tipo de sistema indeterminado, a concepção desta técnica é considerada como um estudo de relações entre grandezas, pois nesse caso as duas equações são equivalentes. O resultado é uma expressão $x = \frac{-8+12y}{10}$, em que a variável x vai depender da variável y, e em que as letras deixarão de representar incógnitas e passarão a representar variáveis.

Neste caso, as letras irão variar para cada valor atribuído ao y e será encontrado um valor diferente para x, possibilitando encontrar infinitas soluções para o sistema. Não encontraremos o valor de cada incógnita, mas sim generalizaremos um modelo, essencialmente algébrico, que não se parece em nada a um aritmético.

Discurso teórico-tecnológico: *A técnica é justificada pelo conceito de solução de uma equação linear com duas variáveis: para qualquer valor de x é possível encontrar um valor de y que satisfaça a equação, obtendo, desta forma, infinitas soluções(GIOVANI, CASTRUCCI e GIOVANNI JR., 2002).*

Técnica τ_7: Modelagem de uma situação-problema para a forma algébrica de um sistema.

PASSO 1: Identificar as incógnitas no enunciado fornecido;

PASSO 2: Traduzir em equações as operações sugeridas no enunciado em relação as incógnitas;

PASSO 3: Organizar a apresentação das duas equações de tal forma que estejam associadas algebricamente, essa associação pode ser por meio de uma chave, ou outro símbolo.

PASSO 4: Realizar os passos correspondente à uma das técnicas, descritas acima, para a resolução de sistema de equações lineares.

Exemplo: *Carlinhos e Celso têm, juntos, 201 figurinhas. Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso. Monte um sistema de equações para representar as duas condições dadas (GIOVANI, CASTRUCCI e GIOVANNI JR., 2002).*

PASSO 1:

Número de figurinhas de Carlinhos → x

Número de figurinhas de Celso → y

PASSO 2:

Carlinhos e Celso têm, juntos, 201 figurinhas → x+ y = 201

Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso → x = 2y

PASSO 3:

$$\begin{cases} x + y = 201 \\ x = 2y \end{cases}$$

Esta técnica permite trabalhar a concepção da Álgebra como um estudo de procedimentos para se resolver um problema. Para Usiskin (1995), as diferentes concepções da Álgebra estão relacionadas aos diversos usos que são feitos das letras. No enunciado do problema as incógnitas não estão explícitas e ao generalizá-lo deve-se conhecer as relações entre os números. Só depois de obtido o sistema $\begin{cases} x + y = 201 \\ x = 2y \end{cases}$ devem ser utilizados os procedimentos necessários para resolvê-lo.

Discurso Teórico-Tecnológico: *A técnica de modelar duas equações do primeiro grau com duas variáveis é justificada pelo conceito de Sistema de equações lineares, representado algebricamente, também definido na análise teórica. A forma canônica para sistema com duas variáveis é a seguinte:* $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$ $onde\ a, b\ e\ c \in R.$ *cuja solução é garantida pelas propriedades já descritas na análise teórica, de sistemas equivalentes, ou seja, ao realizar combinações lineares com o sistema de equações, o seu conjunto solução não se altera.*

Técnica τ_8: Gráfica

PASSO 1: Construir duas retas perpendiculares;

PASSO 2: Estabelecer uma escala em cada uma das retas (eixos cartesianos);

PASSO 3: Localizar dois pontos A e B no plano cartesiano de coordenadas $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ respectivamente, para a primeira equação.

PASSO 4: Construir a reta que passa pelos pontos A e B.

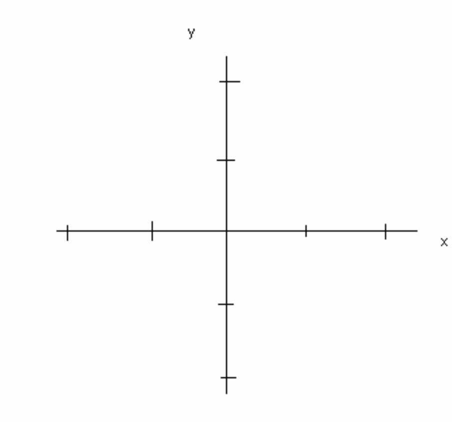
PASSO 5: Localizar dois pontos C e D, no mesmo plano cartesiano, de coordenadas $(x_1,\, g(x_1))$ e $(x_2,\, g(x_2))$ respectivamente, para a segunda equação.

PASSO 6: Construir a reta que passa pelos pontos C e D.

PASSO 7: Localizar o ponto de intersecção das duas retas, para o sistema determinado. Observar que se as retas forem paralelas o sistema é impossível, ou se as retas forem coincidentes o sistema é indeterminado existindo infinitas soluções.

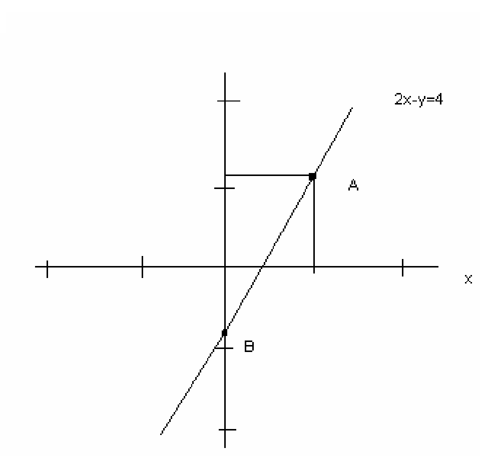
Exemplo: Resolver o sistema graficamente: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

PASSO 1 e 2



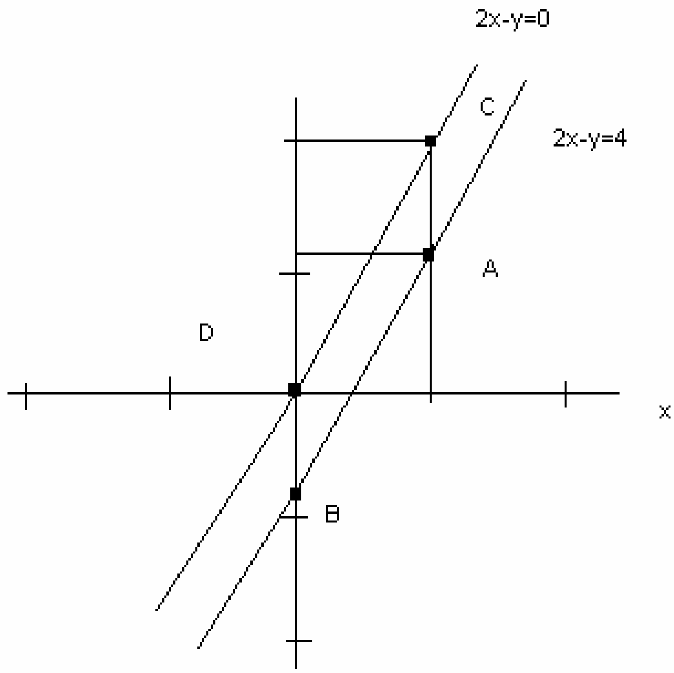
PASSO 3 e 4

$$2x - y = 4$$
$$x = 5 \Rightarrow y = 6 \quad A = (5,6)$$
$$x = 0 \Rightarrow y = -4 \quad B = (0,-4)$$



PASSO 5 e 6

$$2x - y = 0$$
$$x = 5 \Rightarrow y = 10 \quad C = (5,10)$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad D = (0,0)$$



PASSO 7: Retas paralelas, portanto o sistema é impossível.

Existem dois tipos de representações possíveis ao se utilizar esta técnica, a saber: a representação algébrica em que cada equação é definida por uma função linear, que resulta da utilização da Álgebra para traduzir uma relação entre grandezas, e a representação gráfica. Neste caso, o ostensivo mais adequado para representar as duas equações é “f(x) = ax + b” e “g(x) = ax+b”, respectivamente.

Para ligar os dois conceitos é necessário compreender que x e y designam duas grandezas distintas e também os diferentes valores (sem unidades) que elas podem assumir, correspondentemente.

Discurso teórico-tecnológico: *A técnica gráfica é justificada pela definição de gráfico de uma função linear. A função f definida em R e dada por y = Ax ou y = Ax + B onde A e B são números reais não nulo, recebe o nome de função linear ou função linear afim, respectivamente. O gráfico de y = Ax ou y = Ax + B é uma reta inclinada em relação ao eixo* $O\vec{x}$ *pelo ponto (0,0) ou (0,B) respectivamente (Medeiros, 1998).*

Seja qual for a técnica utilizada para a resolução de sistema de equações lineares, é importante validar os resultados encontrados. Para isso existem alguns passos que devem ser levados em questão:

Validação

PASSO 1: Substituir as incógnitas do sistema lineares pelo par ordenado encontrado ou fornecido;

PASSO 2: Resolver as duas equações do sistema linear;

PASSO 3: Verificar igualdades verdadeiras em cada uma das equações.

Exemplo: *Verifique se o par ordenado (8; 1) é a solução do sistema:*

$$\begin{cases} x - 8y = 0 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

(GIOVANI, CASTRUCCI e GIOVANNI JR., 2002).

PASSO 1:

$$\begin{cases} x - 8y = 0 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - 8 \times 1 = 0 \\ 8 - 3 \times 1 = 5 \end{cases}$$

PASSO 2:

$$\begin{cases} 8 - 8 \times 1 = 0 \Rightarrow 8 - 8 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ 8 - 3 \times 1 = 5 \Rightarrow 8 - 3 = 5 \Rightarrow 5 = 5 \end{cases}$$

PASSO 3:

0=0 e 5=5, portanto (8;1) é solução do sistema.

Ao substituir os valores das incógnitas nas equações, transformamos a expressão que era algébrica em numérica, mas o símbolo = continua com o foco algébrico, que significa uma igualdade dos dois membros da equação, uma relação de equivalência, e não o significado aritmético como é geralmente interpretado pelos alunos para obter-se uma resposta numérica.

Talvez por esse motivo esses passos não sejam bem compreendidos pelos alunos do Ensino Fundamental e a validação do problema deixe de ser realizada, permitindo muitas vezes resultados absurdos.

III.3 *Software Aplusix*

O *software* utilizado, como novo dispositivo didático aos alunos, foi o *Aplusix,* versão 1.73, criado pelo laboratório IMAG-Leibniz - França, voltado para o ensino de Álgebra.

Experimentações realizadas com este *software* mostram que ele pode contribuir para o desenvolvimento de competências dos alunos em Álgebra:

> Testes realizados na França mostraram que as competências dos alunos em Álgebra melhoram de forma significativa quando é utilizado o *APLUSIX*. A facilidade de manipulação do editor de expressões algébricas e a verificação dos cálculos do aluno, cada vez que ele assim deseja ou de forma permanente, são as principais razões dessa melhoria (*APLUSIX JUNIOR HOME EDITION*, 2004).

Levando-se em consideração aspectos das atuais propostas educacionais, tais como as indicações dos PCN e do Programa Nacional de Informática na Educação – PROINFO, referentes à informática educativa, a função pedagógica dos suportes digitais é desempenhar um papel de mediadores no processo de aprendizagem entre o sujeito e o objeto estudado.

Dessa forma, o *software Aplusix* foi escolhido, pois pode ajudar na aprendizagem da álgebra em específico do conteúdo sistemas de equações e contribui com o uso adequado de técnicas e métodos, fornecendo informações sem serem ensinadas diretamente, funcionando como uma ferramenta que não substitui o professor ou ameniza seu trabalho, mas que o auxilia.

Aplusix Standard tem três módulos funcionais:

> - O ambiente do aluno, *Aplusix.exe*, que permite que o professor veja as atividades anteriores dos alunos.
> - Um editor de exercícios, *EditorExercícios.exe*, que permite que os professores criem arquivos de exercícios ou de problemas de modelagem. Ele tem seu próprio manual de utilização.

- Um ambiente de administração, *Administração.exe*, que permite que os professores gerenciem as classes em um servidor. Ele também tem um manual de utilização (*APLUSIX*, 2006).

O *software* ofereceu-nos subsídios, de forma a organizar, preparar e avaliar o nosso trabalho, por meio do ambiente de administração, figura 1, *Administração.exe*, que nos permitiu gerenciar as classes e os alunos em um servidor.

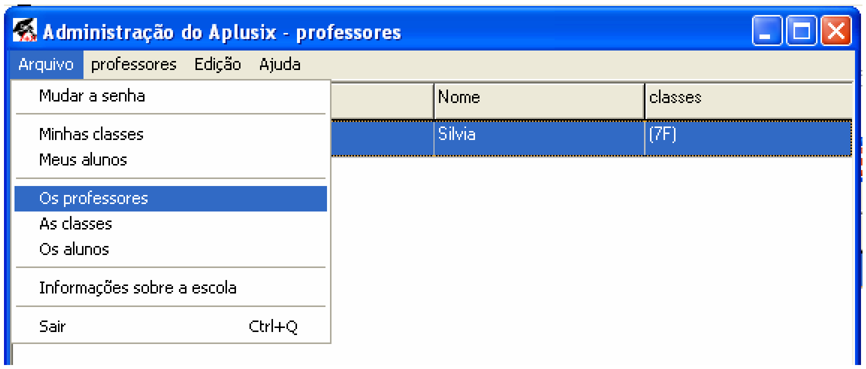


Figura 1 – Janela do módulo funcional no ambiente de administração do Aplusix.

As atividades planejadas em nossa seqüência didática foram aplicadas a partir do mapa de testes da família F2, figura 2, na verificação das técnicas utilizadas pelos alunos.

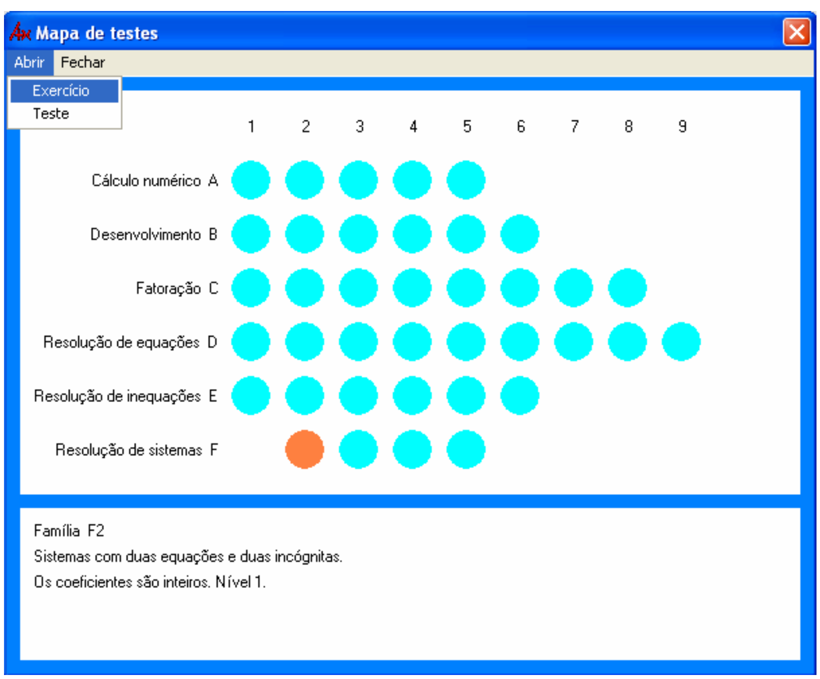


Figura 2 – Descrição da família F2 no mapa de testes gerado por *Aplusix*.

Apesar de o *software* oferecer outros tipos de sistemas de equações lineares, figura 3, com mais cinco famílias de atividades em que se apresentam coeficientes diferentes e com outros graus de dificuldade, optamos por criar outros tipos de atividades em que fosse possível utilizar outras técnicas.

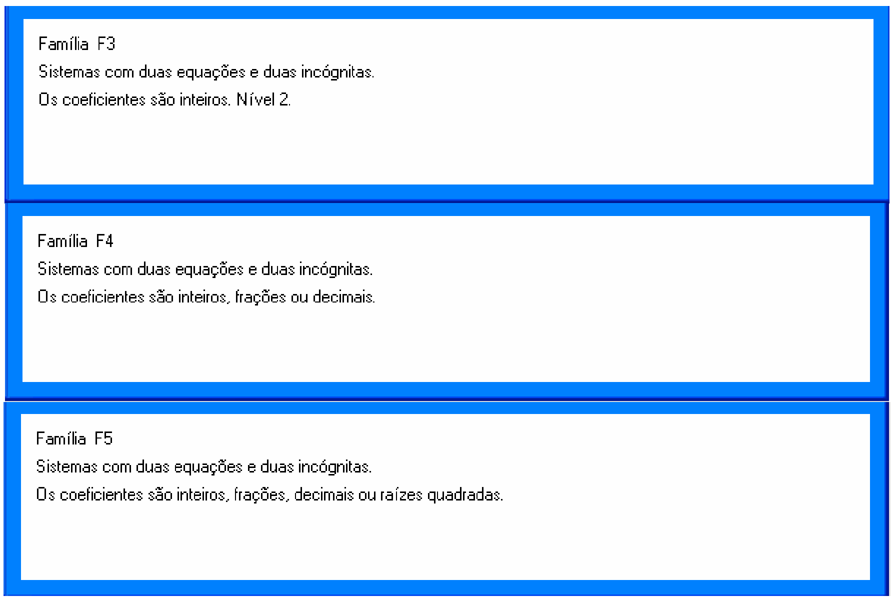


Figura 3 - Descrição das famílias F3, F4 e F5 no mapa de testes gerado por *Aplusix.*

Por meio do editor de exercícios *EditorExercícios.exe,* figura 4, criamos uma seqüência didática, de modo a incidir na estruturação e no desenvolvimento do processo de estudo, encontrado nas análises dos dispositivos utilizados em sala de aula e nas análises das técnicas utilizadas na família F2 do *software,* funcionando como um novo dispositivo de ajuda para o estudo em questão.

Esse *software* foi, assim, uma ferramenta de auxílio tanto à detecção quanto à organização e também à auto-avaliação da seqüência de atividades desenvolvidas. Todas as atividades que foram realizadas no modo <Exercícios> ficaram na memória do *software,* tanto a lista de exercícios do mapa de testes, quanto os exercícios que foram criados e resolvidos, permitindo ao aluno e ao professor rever cada passo de sua realização.

Foram utilizados o modo <Exercícios> com verificação permanente, o que permitiu o *software* informar ao aluno a equivalência ou não entre as etapas realizadas. Ele não dizia o que estava errado, somente que havia algum erro naquela passagem, assim, o aluno podia corrigir algum erro que viesse a cometer. Além disso, quando o aluno finalizava o exercício, o *software* exibia algumas mensagens, avisando se a resposta estava correta ou dizendo que havia algum erro, no caminho que conduzia ao resultado.

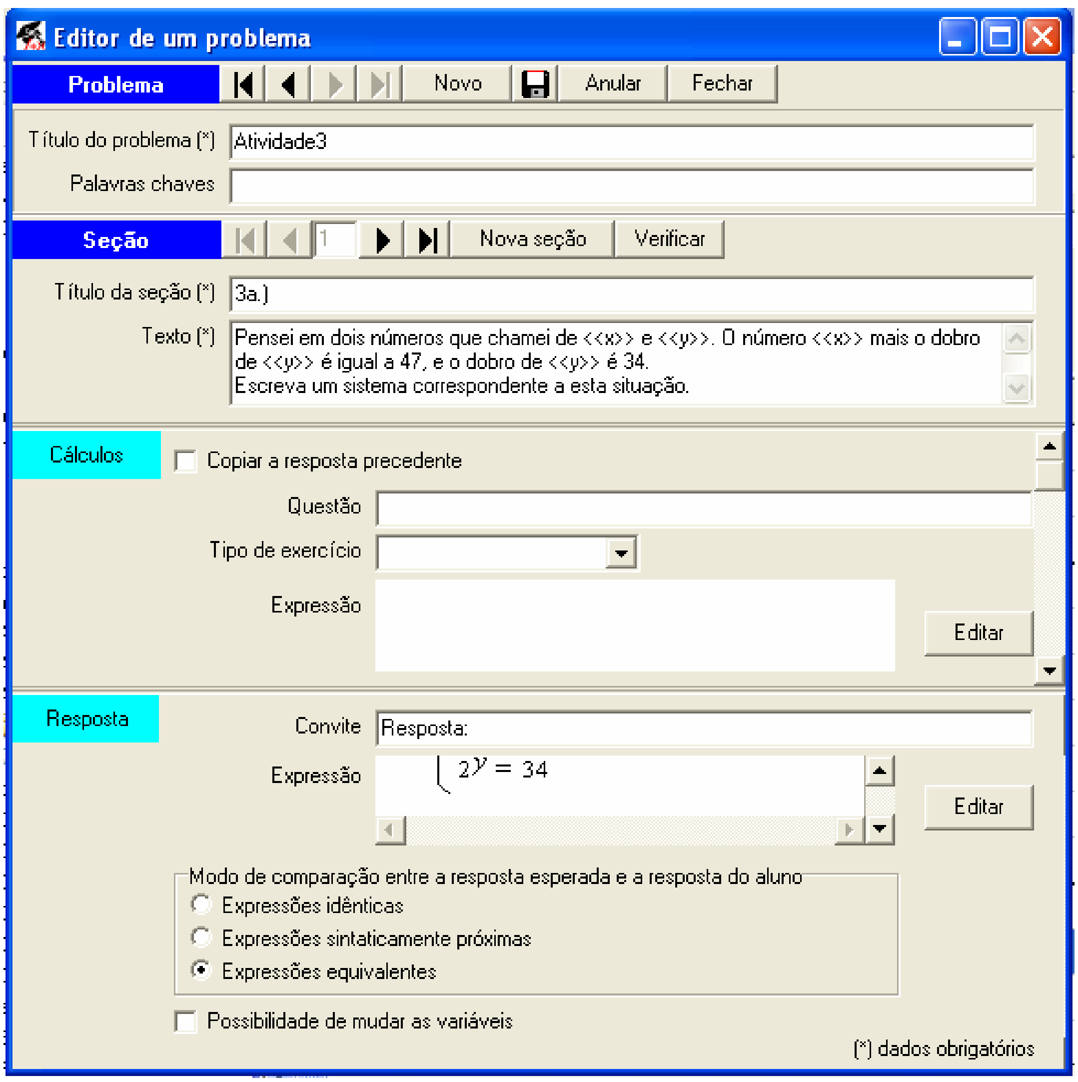


Figura 4 – Janela do módulo editor de exercícios do *Aplusix*.

A figura 5 apresenta a janela de observação em que nós, tanto na escola quanto em casa por meio da ferramenta videocassete, verificamos cada passo realizado pelos alunos nos exercícios ou testes. No entanto a ferramenta videocassete, em que pode observar cada passo do aluno, foi possível utiliza-la apenas nos exercícios do mapa de testes. Os exercícios criados com o *EditorExercícios.exe* nos permitiu apenas observar o resultado final do aluno, sem que pudesse observar cada passo corrigido pelo aluno, apenas os passos que ele considerou corretos e deixou em tela.

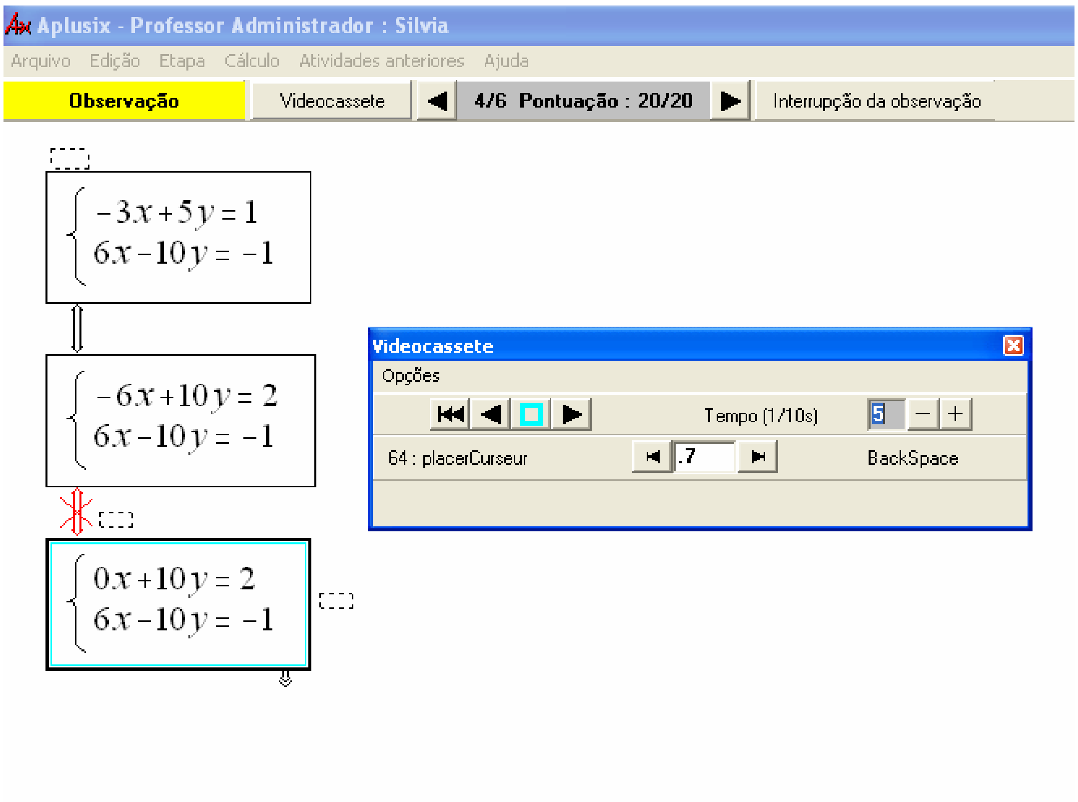


Figura 5 – Janela de observação de atividade realizada por alunos no *software Aplusix*

Na figura acima podemos ver o *software* indicar se seus cálculos estão corretos ou não, por meio de flechas pretas ou vermelhas, respectivamente. As flechas azuis que eventualmente venham a aparecer indicam quando a passagem do exercício está sendo resolvida corretamente, mas não está concluída. No botão <Modificar o exercício> este poderá ser modificado caso não esteja resolvido corretamente após sua finalização, mesmo depois de fechado o *software*. Desta forma, o *software* apresenta um meio dinâmico e interativo entre o usuário e a máquina, fornecendo informações adequadas tanto aos alunos quanto aos professores.

Escolhemos este tipo de personalização, pois o *software* só considera correto o sistema de equações quando escrito por uma chave, figura 5. E como poucos alunos conseguiram, na investigação das técnicas na família F1, resolver o sistema com esta estrutura decidimos criar outros tipos de tarefas com outras técnicas, de modo que os alunos sempre resolvessem, cada uma das passagens, os sistemas equivalentes, conectados por uma chave. Desta forma, o *software* permite a construção de novas organizações matemáticas, de maneira dinâmica em que: as técnicas geram novos problemas e apelam para novos resultados tecnológicos, que, por sua vez, permitem desenvolver técnicas já estabelecidas, assim como propor e abordar novas questões, que, dessa forma, permite-nos trabalhar com as organizações praxeológicas locais.

Ainda, na nossa seqüência de atividades, utilizamos a ferramenta "Estatística" que o *software* oferece, por meio da simulação gráfica, a possibilidades de acompanhar o rendimento de cada aluno ou de toda sala, como pode ser visto no próximo capítulo. Foi possível observar que, além de contribuir na familiarização com essa nova tecnologia, ele também serviu aos alunos de motivação na resolução das situações-problema propostas.

Tendo apresentado, neste capítulo, as análises teóricas relativas a sistema de equações lineares e suas possíveis técnicas de resolução, em nível de Ensino Fundamental, passaremos agora à apresentação da análise praxeológica dos dispositivos didáticos utilizados com uma turma de 7ª série, referentes a este mesmo conteúdo.

IV: ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DOS DISPOSITIVOS DIDÁTICOS

Neste capítulo fazemos uma análise dos livros didáticos adotados, assim como de aulas realizadas na 7ª série pesquisada e da seqüência didática com uso do *software,* todos relativos a sistema de equações lineares, tomando por base os elementos da TAD. Nesta análise, baseamo-nos no desenvolvimento teórico-metodológico descrito no capítulo anterior.

Como a TAD considera que toda atividade humana consiste em realizar uma tarefa t do tipo T, analisaremos alguns tipos de tarefas T e de técnicas que permitam resolvê-los, além de discursos teórico-tecnológicos a elas associados, já mencionados anteriormente.

Em suma, analisaremos o ***tipo* de *tarefa T:*** referente aos problemas e exercícios propostos, a ***técnica*** τ***:*** "maneira de fazer" do aluno ou do professor para executar a tarefa didática e o ***discurso teórico-tecnológico***: discurso racional sobre a técnica τ, cujo primeiro objetivo é justificar ou esclarecer "racionalmente" a técnica τ para assegurar a realização de tarefas do tipo T.

IV.1 Análise praxeológica dos livros didáticos

Serão analisados somente livros didáticos da coleção adotada e utilizada nas aulas, onde a parte experimental desta pesquisa foi realizada, com o intuito de entender algumas organizações didáticas presentes no processo de ensino e aprendizagem de sistema de equações lineares dos alunos que participaram da pesquisa. Salientamos que a escolha dos livros visou analisar o desenvolvimento teórico e as formas de abordagem, apenas do conteúdo de sistema de equações lineares.

Dessa forma, enquadraram-se nesse critério de escolha **dois** livros, o de **6ª e o de 7ª séries**, pois ambos abordam o assunto sistemas de equações lineares na coleção adotada: **A Conquista da Matemática: A+Nova** de GIOVANI et al, Editora FTD – São Paulo, 2002. Essa coleção está incluída no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (2005), de cuja avaliação destacamos:

> A diversidade de enfoques no estudo de alguns temas e a presença de demonstrações são pontos positivos da obra, por estimularem o método dedutivo e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
> Na metodologia de ensino-aprendizagem, a teoria é apresentada com exposição de conceitos e procedimentos e os exemplos funcionam como modelos a serem seguidos nos exercícios e nas atividades, predominantemente de fixação (BRASIL, 2005, p.9).

Apesar de o PNLD avaliar que a teoria dessa coleção é apresentada com exposição de conceitos e procedimentos, isso não ocorre com relação ao conteúdo de sistema de equações lineares. Os conceitos e as propriedades vistos na análise matemática que justificam e esclarecem cada passo das técnicas trabalhadas não são descritos e não estão explícitos nas técnicas apresentadas. No entanto, apresenta-se a definição de solução de sistema de equações, justificando apenas os resultados encontrados após a sua resolução e não os passos utilizados durante as técnicas trabalhadas.

Livro de 6ª série

No livro de 6ª série, o conteúdo sistema de equações lineares é introduzido com a seguinte situação problema: *Um jogo de voleibol manda assinalar 2 pontos para cada partida que a equipe vence e 1 ponto para cada partida que a equipe perde. Se uma equipe disputou 4 partidas e somou 7 pontos, quantas partidas venceu e quantas perdeu?*

O autor mostra que a resposta pode ser encontrada em um quadro em que apresenta todas as possibilidades quanto ao número de partidas que a equipe venceu e perdeu, de acordo com os dados, conforme exemplos que apresentamos no capítulo III para ilustrar a ***Técnica*** τ_5***: Tentativa.***

Essa técnica fornecida e analisada no capítulo anterior pode ser muitas vezes, longa e trabalhosa, e o autor ressalta a importância de se utilizar sistemas de equações lineares, onde se tem uma única solução, e, quando consideradas separadamente as equações, têm infinitas soluções.

Em seguida o autor trata como determinar a solução de um sistema de equações lineares, utilizando *a* ***Técnica*** τ_1***: Substituição*** *e a* ***Técnica*** τ_3***: Comparação,*** analisadas no capítulo anterior, e são chamadas pelo autor de métodos. No livro são colocados os passos de cada técnica, por meio de um exemplo. Descrevemos os passos sugeridos dessas técnicas:

> **Método da Substituição:** Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+y=7 \end{cases}$. Observe o processo de resolução.
> **1º passo**
> Como a equação mais simples do sistema é a primeira, vamos determinar o valor de x nessa equação: $x+y=4 \Rightarrow x=4-y$
> **2º passo**
> Na outra equação, vamos substituir a incógnita x pelo seu valor 4-y:
> **3º passo**
> Substituindo o valor de y em x=4-y, determinamos o valor da incógnita x:
> Logo, a solução do sistema é dada pelo par ordenado (3,1).
> **Método da Comparação:** Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+y=7 \end{cases}$
> **1º passo**
> Da primeira equação, vamos determinar o valor de x: x=4-y (1)
> **2º passo**
> Da segunda equação, vamos determinar o valor da mesma incógnita x:
> $x=\dfrac{7-y}{2}$
> 3º passo
> Comparando as igualdades (1) e (2), temos:
> $4-y=\dfrac{7-y}{2}$ $\rightarrow$ equação do 1º grau na incógnita y
> **4º passo**
> Substituindo o valor de y em x=4-y, temos:
> Logo, a solução do sistema é o par ordenado (3,1), (p.150-151).

No final dos exemplos o autor conclui:

> Resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, x e y, significa determinar o único par ordenado (x,y) que é solução do sistema.
> Para determinar a solução (x,y) de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, podemos usar o método da substituição ou o método da comparação (p. 152).

Logo após, apresenta mais um exemplo com uma situação-problema e em seguida um desafio na balança de dois pratos finalizando com exercícios e situações-problema.

Livro de 7ª série

No livro de 7ª série o conteúdo é introduzido a partir de um problema prático que busca estimular o aluno a pensar na resolução por tentativas, sem se deter em conceitos ou regras. Primeiro é feita uma abordagem de uma única equação com duas variáveis, mostrando que existem infinitas soluções que podem ser indicadas por pares ordenados, seguido de exercícios para verificar se os pares ordenados fornecidos são elementos do conjunto solução da equação.

O livro inicia o tratamento do conteúdo de sistema de equações lineares por meio de uma situação-problema, simulando tentativas até encontrar o par ordenado que satisfaça as duas equações, da seguinte forma: são fornecidos os pares ordenados (6,8), (10,4), (5,9) e pergunta-se se são soluções da equação x+y=14, verificando que todos os pares são soluções da equação. Em seguida, são fornecidos os pares ordenados (11,2), (9,6), (10,4) e pede-se para verificar se são soluções de outra equação 4x + 2y = 48, verificando que todos os pares são soluções desta outra equação. E o autor conclui no final: *Quando duas equações formam um sistema, embora cada equação apresente infinitas soluções, devemos procurar a solução que verifica as duas equações ao mesmo tempo*. Na seqüência, ele apresenta a definição de solução de sistemas de equações lineares, assim como descreveu no livro de 6ª série.

Depois de apresentar alguns exercícios de modelagem e validação dos pares ordenados fornecidos, o autor trabalha a resolução de um sistema pela ***Técnica*τ_1*: Substituição*** *e* ***Técnica*τ_2*: Adição*,** descritas em nossas análises teóricas, sem apresentar as propriedades que as justifiquem. São fornecidos alguns exemplos para cada técnica, descrevendo seus passos conforme ilustramos abaixo:

> **Método da substiuição**
> Considere, mais uma vez, o problema dado na abertura desta Unidade:

> Em um estacionamento há 14 veículos, entre carros e motos. Sabe-se que o número total de rodas é 48. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?
> Inicialmente, vamos indicar por:
> x→ o número de carros
> y→ o número de motos
> De acordo com os dados do problema, formamos o sistema de equações: $\begin{cases} x+y=14 \\ 4x+2y=48 \end{cases}$
> Da 1ª equação, determinamos o valor de x: x=14-y
> Na outra equação vamos substituir x por 14-y:
> 4(14-y)+2y=48→ equação do 1º grau na incógnita y e acha o número de motos.
> Substituímos y por 4 na equação x=14-y e temos: x=10→ número de carros
> Então, a solução do sistema é o par ordenado (10,4)
> **Método da adição**
> Determinar a solução (x,y) do sistema $\begin{cases} 5x+3y=21 \\ 2x-3y=14 \end{cases}$
> Observando que as duas equações apresentam termos opostos (3y na primeira e -3y na segunda), adicionamos as duas equações membro a membro. Este fato permite obter uma única equação, e sem a incógnita y:
> $$\begin{array}{l} 5x+3y=21 \\ \underline{2x-3y=14} \\ 7x+0=35 \Rightarrow x=5 \end{array}$$
> Substituindo x por 5 em uma das equações do sistema, temos: 5(5)+3y=21⇒y=-4/3
> A solução do sistema é o par (5,-4/3), ou seja S={(5,-4/3)} (p.158-161).

Em um outro exemplo, o autor usa o princípio multiplicativo ao apresentar um sistema em que não há termos opostos para que uma das incógnitas desapareça, assim como no primeiro passo descrito. Desta forma, tanto o princípio multiplicativo quanto o aditivo estão implícitos nesta técnica da adição ao reduzir separadamente cada equação do sistema, sem tratar com mais cuidado o assunto de sistemas equivalentes.

São propostos exercícios em que se utiliza a técnica da substituição separada dos exercícios com a técnica da adição, e outros com uma das duas técnicas, geralmente a mais conveniente. O livro traz também um subitem com sistema de equações fracionárias, ou ainda, quando pelo menos uma das equações do sistema apresenta uma das incógnitas no denominador. São propostos exercícios correspondentes aos modelos apresentados para, em seguida, introduzir a resolução de problemas na linguagem natural, finalizando com “Retomando o que aprendeu”.

Nesse livro, o conceito sistema de equações lineares com duas variáveis é apresentado junto com outros conceitos, retomando conhecimentos adquiridos anteriormente, só para depois explorar técnicas possíveis de resolução aplicando-os a problemas práticos, com grau de dificuldade que vai aumentando gradualmente com os sistemas fracionários e problemas.

Neste tipo de abordagem são levadas em conta as orientações dos PCN, que sugerem não trabalhar isoladamente o conteúdo, com apresentações exauridas em um único momento, ou de se retomar apenas com a perspectiva de utilizar o conteúdo como ferramenta para a aprendizagem de novas noções, ou ainda, subdividido em partes desarticuladas entre si. Dessa forma, o trabalho da técnica é favorecido, auxiliando o professor a utilizar um novo dispositivo – a aula de problemas –, em que explora tipos de problemas bem diferentes entre si e busca técnicas para resolvê-los (Chevallard, Bosch & Gascón, 2001, p.280).

No entanto, as propostas dos PCN de um estudo mais detalhado das técnicas só a partir do 4º ciclo, ou seja, na 7ª ou 8ª série, não são colocadas em prática nesta coleção, aparecendo no livro da 6ª série, como pudemos verificar, técnicas convencionais com procedimentos puramente mecânicos, como as técnicas da substituição e comparação.

Para facilitar a leitura, os dados foram apresentados por meio de uma tabela, visando mostrar um panorama geral quantitativo das tarefas propostas em cada livro da coleção adotada, 6ª e 7ª séries, em que aparecem sistemas de equações lineares, de acordo com os elementos dos tópicos apresentados acima.

Nas análises foram encontrados seis tipos de tarefas $T_{i,}$ nos livros da 6ª e 7ª série. A partir delas, serão apresentadas as técnicas τ_i aplicadas e os discursos teórico-tecnológicos, já detalhados e analisados na parte teórica.

Chamamos de T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 e T_6 os tipos de tarefas encontrados:

Tipos de tarefas T_i / *Livros*	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
6ª série	*3*	*6*	*11*	*12*	*1*	*1*
7ª série	*8*	*7*	*24*	*22*	*5*	*1*

Tabela 1 - Panorama quantitativo das tarefas T_i encontradas nos livros didáticos

Tipo de tarefa T_1: Dada uma situação-problema, modelar para uma forma algébrica de sistema.

Exemplo: *Carlinhos e Celso têm, juntos, 201 figurinhas. Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso. Monte um sistema de equações para representar as duas condições dadas. (6ª série, p.154)*

A técnica utilizada neste tipo de tarefa foi a ***Técnica τ_7: Modelagem de uma situação-problema para a forma algébrica de um sistema***, descrita na análise teórica juntamente com seu discurso teórico-tecnológico.

Este tipo de tarefa, em que apenas se escreve o sistema algebricamente sem resolvê-lo, é introdutório a um outro tipo de tarefa no qual, após terem aprendido as técnicas de resolução de sistema de equações lineares, os alunos irão utilizar, em conjunto, ambas as técnicas de modelagem e resolução do sistema. Por esse motivo, esse tipo de tarefa apareceu tanto no livro de 6ª série quanto no de 7ª série.

Tipo de tarefa T_2: Verificar se um dado par ordenado é solução de um dado sistema de equações lineares.

Exemplo: *Verifique se o par ordenado (10,7) é solução do sistema* $\begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ 2x + 3y = 41 \end{cases}$ *(7ª série, p.157).*

Este tipo de tarefa não é específico à resolução de sistema de equações lineares. Ele se constitui na validação da solução do sistema cujos passos estão descritos na análise teórica. Este tipo de tarefa é considerado importante, para evitar que se chegue a resultados absurdos após a resolução do sistema. No entanto, ele é tratado e apresentado separadamente dos tipos de tarefas referentes à resolução de sistema e geralmente é esquecido pelos alunos após a resolução dos mesmos.

Tipo de tarefa T_3: Resolver sistema de equações lineares do tipo $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$ $onde\ a, b\ e\ c \in Q, com\ a\ e\ b \neq 0.$

Exemplo: *Utilizando o método mais conveniente, determine a solução do seguinte sistema de equações:* $\begin{cases} 8x+5y=11 \\ 4x+5y=3 \end{cases}$ *(7ª série, p.163)*

São 3 as técnicas tratadas, nos livros de 6ª e 7ª série, para este tipo de tarefa, todas descritas nas análises teóricas com seus respectivos discursos teórico-tecnológicos: ***Técnica*** τ_1***: Substituição*** *(6ª e 7ª série),* ***Técnica*** τ_2***: Adição*** *(7ª série)* e a ***Técnica*** τ_3***: Comparação*** *(6ª série).*

Neste tipo de tarefa apareceu primeiro uma abordagem tratando das técnicas separadamente, para em seguida trabalhá-las a critério de escolha, por quem fosse resolvê-la. Desse modo, as técnicas pouco se relacionavam entre si, e eram usadas para resolver problemas na forma estereotipada, em que a teoria não aparecia com as justificativas dessas técnicas utilizadas.

É importante salientar que a classificação dos sistemas em determinados, indeterminados e impossíveis não apareceu em nenhum dos dois livros analisados. Portanto, as técnicas abordadas trabalharam apenas com sistemas determinados.

A técnica gráfica tampouco foi abordada para este tipo de tarefa, em que se poderia trabalhar de uma maneira mais concreta, relacionando a classificação de um sistema de equações lineares com as posições relativas às duas retas representadas por cada equação do sistema.

Tipo de tarefa T_4***: Dada uma situação-problema, modelar para uma forma algébrica de sistema e resolver.***

Exemplo: *Um terreno é retangular e tem 128 m de perímetro. O comprimento tem 20m a mais que a largura. Determine as dimensões desse terreno e a sua área. (7ª série, p.170).*

Este tipo de tarefa é composto por duas técnicas e seus respectivos discursos teórico-tecnológicos, descritos nas análises teóricas: ***Técnica*** τ_7***: Modelagem de uma situação-problema para a forma algébrica de um sistema*** *(6ª e 7ª séries)* e a ***Técnica*** τ_1***: Substituição*** *(6ª e 7ª séries), ou* ***Técnica*** τ_2***: Adição*** *(7ª série), ou* ***Técnica*** τ_3***: Comparação*** *(6ª série).*

Este tipo de tarefa permite trabalhar várias concepções da Álgebra, como descrito na análise teórica relativa às técnicas por ela utilizadas, e dois discursos teórico-tecnológicos referentes a modelagem e às técnicas de resolução de sistema, além de trabalhar de forma concreta situações presentes no dia-a-dia do aluno. Por esse motivo, esse tipo de tarefa foi escolhido para a elaboração da seqüência didática junto ao software, como será apresentada no próximo capítulo.

Tipo de tarefa T_5: Dada duas equações racionais, com duas incógnitas, determinar o valor de uma expressão algébrica dada.

Exemplo: *Dois números reais x e y são tais que* $\frac{x+4}{y+3}=1$ *e* $\frac{2y}{x+2}=4$. *Nessas condições, sendo x ≠ -2 e y ≠ -3, determine o valor de: (x+y)(x-y). (7ª série, p.167)*

Tipo de tarefa T_6: Resolver por tentativas

Este tipo de tarefa foi apresentado apenas na introdução do conteúdo de sistema de equações lineares, nos livros de 6ª e 7ª séries, descritos acima. Em nenhum dos livros analisados apareceu exercício com esse tipo de tarefa. A técnica utilizada na abordagem desse tipo de tarefa foi a ***Técnica*** τ_5***: Tentativas***, descrita na análise teórica.

Apesar do exemplo fornecido na análise teórica, em que se trabalha com uma tabela na forma aritmética, este tipo de tarefa permite trabalhar também com a forma algébrica, em que pares ordenados são substituídos nas equações dos sistemas até encontrar o par que as satisfaçam. O trabalho com a forma algébrica foi apresentado na análise do livro de 7ª série, em que o autor a utiliza ao introduzir sistema de equações lineares.

A forma com que foi utilizada a técnica neste tipo de tarefa, tanto de forma aritmética quanto algébrica, exemplifica o *momento do primeiro encontro* com um novo tipo de problema e, ao mesmo tempo, com o *momento do trabalho da técnica* (Chevallard, Bosch & Gascón, 2001). A noção de "momento" não é estritamente cronológica, pois as técnicas não devem ser trabalhadas de uma só vez, assim como acontece no momento em que terá de justificar a técnica, o *momento tecnológico-teórico (Ibid).*

IV.1.1 Síntese da análise dos livros didáticos

Foram encontradas nos dois livros, 6ª e 7ª séries, segundo a TAD, organizações *locais* que se obtêm articulando entre si, por meio de um discurso tecnológico elaborado, distintas organizações *pontuais.* Existe uma evolução para uma praxeologia local mediante a utilização de um número considerável de técnicas flexíveis permitindo que se relacionem entre si, conduzindo à produção de novos elementos técnicos, novos discursos tecnológicos e ao planejamento de novos tipos de problemas.

Observando a tabela, verifica-se que o livro de 6ª série apresenta os mesmos tipos de tarefas *T* que os livros de 7ª série, diferindo apenas nas técnicas, conforme as análises. Na 6ª série é apresentada a técnica da comparação e não é apresentada a técnica da adição, enquanto no livro de 7ª série ocorre o inverso. Além disso, ambos os livros apresentam a técnica da substituição.

Dos livros avaliados pelo PNLD em 2005, 26% apresenta o conteúdo sistema de equações lineares nas duas séries, 6ª e 7ª, sendo que na 7ª série deveria caracterizar-se como uma continuidade do estudo começado na 6ª série – o que não ocorre nesta coleção, onde os tipos de tarefas são semelhantes nas duas séries. De acordo com a proposta dos PCN, seria suficiente, na 6ª série, o aluno compreender a noção de variável e reconhecer expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas, evitando, desta forma, trabalhar com métodos e técnicas mais elaborados.

O tipo de Tarefa $T_{2,}$ que consiste na validação da solução encontrada no sistema, é apresentado tanto na 6ª quanto na 7ª série, mas antes de os alunos aprenderem a resolver sistemas de equações lineares. Desta forma, sua utilização não é favorecida, pois eles não vêem relação deste tipo de tarefa após trabalharem as técnicas de resolução de sistema de equações lineares.

No entanto, foi possível verificar nos livros didáticos diferentes organizações matemáticas, nas duas séries trabalhadas, referentes a sistema de equações lineares. Essas diferentes organizações aliadas ao estudo das orientações institucionais acabam por oferecer elementos para a compreensão do conteúdo tratado, caracterizando-se como um importante dispositivo didático a ser utilizado em sala de aula.

Quanto às organizações matemáticas oferecidas ao professor para as situações de aprendizagem, os dois livros analisados trazem sugestões para introdução do assunto sistema de equações lineares com novas estratégias, situações-problema, trabalho com tabelas, processos de descoberta por tentativas, interpretações de uma equação com duas variáveis; para só depois introduzir conceitos e técnicas de sistema de equações lineares.

Dessa maneira, os livros didáticos adotados pela escola oferecem subsídios ao professor para explorar de forma dialética os *objetos ostensivos* e *não-ostensivos*, segundo a organização proxeológica de Chevallard (1999). Lembrando que os *ostensivos* são todos os objetos que têm certa materialidade, ou seja, as palavras, o grafismo, os gestos; enquanto os *não-ostensivos* são os objetos, como as idéias, as intuições e os conceitos.

No entanto, nos dois livros analisados foi constatado que o conteúdo sistema de equações é apresentado em estreita relação com as técnicas de resolução das tarefas apresentadas. A presença de tecnologias e teorias é aleatória, abordada de forma implícita, sem uma justificativa evidente das técnicas utilizadas.

Essas diferenças do ponto de vista de uma organização praxeológica devem ser levadas em conta, para que na análise das técnicas utilizadas pelos alunos, seja possível compreender melhor a razão de algumas dificuldades difíceis de serem superadas.

IV.2 Análise praxeológica das aulas

Para essas análises, foram utilizadas observações presenciais, gravações em fita magnética, transcritas e documentadas (anexo 1), das aulas ministradas pelo professor da turma que fez parte desta pesquisa.

Antes de dar início à análise do trabalho pedagógico em sala de aula, ocorrido no mês de setembro de 2005, foi realizada uma entrevista com o professor da turma para saber quais conteúdos estava trabalhando naquele momento; qual era o livro didático adotado; quais eram suas expectativas em relação ao trabalho com sistema de equações lineares em sala de aula; como vinha trabalhado, efetivamente, esse conteúdo; se já havia trabalhado com os alunos na sala de informática e qual teria sido a receptividade deles.

Durante a investigação nas aulas foi possível observar também o trabalho de alguns alunos, o funcionamento da turma em conjunto, porém de maneira menos detalhada. Com essas observações, pretendia-se saber qual era o comportamento do aluno e do professor durante as aulas, no que se refere à compreensão das tarefas e técnicas propostas, ao modo de interagirem entre si e à maneira de resolverem essas tarefas com suas respectivas técnicas.

O principal dispositivo didático utilizado nas aulas do professor é o livro didático que, segundo ele, se adaptou ao planejamento escolar (anexo 3) vindo da Secretaria do Estado, e à realidade da escola. Para o professor, o livro ajuda bastante na parte de exercícios, já que não é preciso escrever no quadro, a não ser quando sinta necessidade de mais atividades de reforço ou complementação, que são geralmente encontradas em outros livros.

Na opinião do professor, uma parte dos alunos da 7ª série aprende com facilidade, mas considera a maioria um pouco imatura para trabalhar com a Álgebra. Essa é uma das dificuldades encontradas, pois segundo ele a turma ainda muito nova e por isso sente a dificuldade para interpretar problemas e resolver sistemas de equações lineares.

Para iniciar o conteúdo de sistema de equações lineares, o professor trabalhou antes uma só equação de duas variáveis com infinitas soluções, para depois introduzir duas equações com duas variáveis formando um sistema. Apresentou separadamente as técnicas da substituição e adição, utilizadas na resolução de sistema com equações lineares. No anexo 1, da aula do professor, percebemos que os passos utilizados por ele são muito semelhantes aos apresentados no livro didático.

Após a apresentação das duas técnicas, na mesma aula, propôs exercícios do livro didático, aos alunos, para que aplicassem essas duas técnicas. Planejou explorar em seguida sistemas com coeficientes fracionários e problemas, conforme o livro didático adotado, mas devido ao pouco tempo não foi possível.

Este tipo de aula utilizado pelo professor, segundo Chevallard, Bosch & Gascón (2001) é chamado de "aula de prática", em que o professor proporciona aos alunos um *corpus* de problemas que, aparentemente, são muito parecidos entre si. Os autores consideram a "aula prática" como um dispositivo de ajuda ao estudo:

> Chamamos "aula de prática" a um dispositivo no qual possa se desenvolver plenamente o momento do processo de estudo que a Professora denomina de "momento do trabalho da técnica" (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001, p.277).

Com esse tipo de aula o estudante, tem pela primeira vez, a responsabilidade de tornar oficialmente rotineira certas técnicas. "Essa nova responsabilidade se materializa na obrigação de resolver, na presença de seus colegas e do professor, muitos problemas aparentemente muito parecidos entre si". (Chevallard, Bosch & Gascón, 2001, p.279).

Outro fato destacado pelos autores e que pudemos perceber em nossas análises é a exigência de o estudante se familiarizar com certas técnicas, até alcançar um domínio tão resistente que chegue a utilizá-las como algo natural. "A partir daí, essas técnicas poderão ser consideradas de maneira oficial como técnicas *adquiridas* pelos alunos – passando a fazer parte do meio matemático da classe". (Chevallard, Bosch & Gascón, 2001).

Foram destinadas duas semanas, com quatro aulas semanais de 50 minutos cada, para que o conteúdo de sistema de equações lineares fosse abordado, cumprindo exigências burocráticas do planejamento. Por esse motivo, o professor apenas tratou as duas técnicas de resolução de sistemas lineares e logo aplicou uma avaliação.

Assim como foi feito nas análises dos livros didáticos, buscou-se identificar nas aulas sobre sistemas de equações lineares os tipos de tarefas tratadas e sugeridas aos alunos, as técnicas que permitem resolver essas tarefas, e o discurso teórico-tecnológico, que é o uso da teoria e da tecnologia em relação a uma técnica, de forma simultânea.

Portanto, foram identificados nas aulas: um tipo de tarefa, duas técnicas e um discurso teórico-tecnológico.

Tipo de tarefa: Resolver sistemas do tipo:

$$\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases} \; onde\ a, b\ e\ c \in Z,\ com\ a\ e\ b \neq 0.$$

Exemplo: *Resolver o sistema:* $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 8 \end{cases}$

Técnica τ_1***: Substituição*** e a ***Técnica*** τ_2***: Adição.***

Aparentemente, da forma com que foram apresentadas, as duas técnicas são independentes entre si, mas possuem um único discurso teórico-tecnológico que as justifica, conforme apresentado nas análises teóricas.

Uma outra técnica apresentada pelo professor, denominada por ele de técnica da subtração, não foi considerada nas análises realizadas, uma vez que se trata da mesma técnica da adição, pelo fato de os alunos já terem estudado as operações com inteiros relativos. A adição e a subtração podem ser consideradas como soma algébrica de inteiros.

IV.2.1 Síntese da análise das aulas em relação aos livros didáticos

Assim, as análises das aulas e do livro didático permitiram responder, em parte, à primeira questão levantada nesta pesquisa referente a sistema de equações lineares: Com relação a sistema de equações lineares, quais organizações praxeológicas são ativadas nos livros didáticos utilizados, nas aulas e no uso do *software Aplusix* com alunos de 7ª série?

Em síntese, as organizações praxeológicas encontradas nas aulas em relação ao livro didático adotado podem ser observadas no quadro 2.

Enquanto nas aulas encontramos apenas um tipo de tarefa, duas técnicas e um discurso teórico-tecnológico, o livro didático apresentou seis tipos de tarefas, seis técnicas e três discursos teórico-tecnológicos.

Neste caso, as aulas podem ser consideradas uma praxeologia *local*, em que se trabalha ao redor de um único tipo de tarefa com duas técnicas. No entanto, sua estruturação e desenvolvimento são bem parecidos a uma praxeologia *pontual*, em que a atividade é centrada na resolução de um único tipo de tarefa T, com pouca visão de fenômenos gerais.

	AULA	**LIVRO ADOTADO**
Tipos de Tarefas T_i	***1 Tipo:*** *T_1: Resolver sistemas do tipo:* $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$ *, onde a, b e c $\in$ Z com a e b ≠ 0.*	***6 Tipos:*** ***T_1:*** *Modelar a situação-problema para a forma algébrica de um sistema de equações lineares.* ***T_2:*** *Verificar se o par ordenado fornecido é solução do sistema de equações lineares.* ***T_3:*** *Resolver sistemas do tipo* $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$ $onde\ a, b\ e\ c \in Q, com\ a\ e\ b \neq 0.$ ***T_4:*** *Modelar a situação-problema para a forma algébrica de um sistema de equações e resolver.* ***T_5:*** *Resolver expressões algébricas com a solução do sistema.* ***T_6:*** *Resolver por tentativas.*
Técnicas τ_i	***2 técnicas:*** *-Substituição;* *-Adição.*	***6 técnicas:*** *τ_1: Modelagem de sistema de equações lineares.* *τ_2: Substituição;* *τ_3: Adição;* *τ_4: Comparação;* *τ_5: Modelagem e resolução de sistemas de equações lineares.* *τ_6: Tentativas.*
Discurso Teórico-Tecnológico	***1 discurso:*** *- Propriedades relativas ao conjunto solução de um sistema, ao realizar combinações lineares com o sistema de equações, o seu conjunto solução não se altera;*	***3 discursos:*** *-Conceito de sistema de equações lineares representado algebricamente na forma:* $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$ $onde\ a, b\ e\ c \in R.$ *-Propriedades relativas ao conjunto solução de um sistema, ao realizar combinações lineares com o sistema de equações, o seu conjunto solução não se altera;* *- Definição de solução de um sistema de equações lineares com duas variáveis: é todo par ordenado que satisfaça às duas equações.*

Quadro 02: Organizações praxeológicas utilizadas nas aulas em relação aos livros didáticos adotados.

Não foi possível observar evolução de uma praxeologia *local* mediante a utilização de mais de uma técnica, pois as duas técnicas abordadas no trabalho do professor não são flexíveis, permitindo que se relacionem entre si.

Mesmo tendo aparecido na aula um único tipo de tarefa, este se restringiu aos coeficientes das equações, que compunham o sistema, ao conjunto dos inteiros, enquanto que o livro didático foi mais abrangente no tipo de tarefa T_3: *resolver sistemas do tipo*,

$\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$ $onde\ a, b\ e\ c \in Q, com\ a\ e\ b \neq 0$ onde apareciam tipos de tarefas *t* com coeficientes além dos inteiros, também os fracionários.

Os outros tipos de tarefas, com suas respectivas técnicas e discursos teórico-tecnológicos, presentes no livro de 6ª série, em nenhum momento foram citados ou estiveram presentes nas aulas, pois supostamente acreditava-se que os alunos deveriam ter visto o conteúdo na série anterior. Uma dessas tarefas de fundamental importância, que poderia ser revista, é *o tipo de tarefa T_2: verificar se o par ordenado fornecido é solução do sistema de equações lineares*, auxiliando os alunos na verificação das soluções encontradas após terem resolvido o sistema.

Sendo assim, foi possível perceber que o ensino, nesta 7ª série analisada, se transforma em um conjunto reduzido de atividades matemáticas isoladas, de "casos" matemáticos encadeados arbitrariamente e independentes entre si.

Para Chevallard, esse tipo de ensino tende ao que se denomina de um "ensino instantâneo":

> Uma definição matemática é aprendida instantaneamente, um teorema, uma demonstração ou a utilização de uma técnica são objetos matemáticos "ensinado" e "aprendido" quase que ao mesmo tempo. A atividade de estudo do aluno não é considerada como um processo complexo e duradouro, mas como um auxiliar pontual e local para "fixar" e "consolidar" aquilo que já se aprendeu instantaneamente. Até mesmo o processo de "entender", considerado culturalmente como o ponto alto da aprendizagem, é considerado como algo "instantâneo". Nesse ensino instantâneo, desaparecem os objetivos a longo prazo em favor dos objetivos relativos ao funcionamento diário da classe (CHEVALLARD, 2001, p.286).

Apesar dos livros didáticos apresentarem sugestões de como introduzir sistema de equações lineares com novas estratégias, situações-problema, trabalhando com tabelas, processos de descoberta por tentativas, interpretações, para depois introduzir conceitos e técnicas de sistema de equações lineares, observamos que nenhumas dessas sugestões fizeram parte da organização matemática das aulas analisadas.

Assim, os *objetos ostensivos* e *não-ostensivos* perderam a força e o rigor de sua forma dialética: os *objetos não-ostensivos* apareceram com menos intensidade que os *objetos ostensivos,* dos registros na escrita algébrica.

Portanto, mais uma vez, assim como constatamos na análise epistemológica, o frágil recurso a determinados tipos de *não-ostensivos* na construção escolar, de conhecimentos matemáticos, em benefício aos *ostensivos,* o registro da escrita e do formalismo algébrico. Isto é, as técnicas de resolução das tarefas apresentadas prevalecem sobre o discurso teórico-tecnológico ou não são associadas com outras técnicas.

O discurso teórico-tecnológico nas aulas analisadas, assim como nos livros didáticos, aparece de forma aleatória sem ser abordado de forma explícita ou com uma justificativa evidente das técnicas utilizadas.

IV.3 Análise praxeológica da seqüência didática junto ao *software*

Na elaboração da seqüência de atividades, as escolhas didáticas e as análises *a priori* foram feitas tomando por base as organizações praxeológicas encontradas nos outros dois dispositivos analisados anteriormente a este.

Para os tipos de tarefas T_1, T_2 e T_3 foram utilizados o mapa de testes do *software Aplusix,* conforme descrições feitas na análise teórica. Os tipos de tarefas T_4 e T_5 foram montados com situações-problema semelhantes às atividades realizadas por Azarquiel (1993), devidamente reelaboradas e editadas por nós com o auxílio do editor de texto do *software* educacional.

A seguir, apresentamos os cinco tipos de tarefas T_i realizados junto ao *software*, acompanhados de seus objetivos e análises *a priori*, enquadrando-os dentro da TAD, em que são evidenciados suas técnicas e discursos teórico-tecnológicos já analisados na parte teórica.

Tipo de tarefa T_1: Resolver sistemas determinados, na seguinte forma:

$\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$, *onde* a, b *e* $c \in Z$, *com* a *e* $b \neq 0$.

Exemplo:

Resolver

$$\begin{cases} -3x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Este tipo de tarefa, resolver sistemas determinados, foi o único trabalhado nas aulas, com as técnicas ***Técnica τ_1: Substituição e Técnica τ_2: Adição,*** já analisadas na parte teórica com seus discursos teórico-tecnológicos. Esperamos que os alunos utilizem uma dessas duas técnicas, além da ***Técnica τ_3: Comparação,*** vista na analise do livro didático de 6ª serie, supostamente trabalhada nesta série.

Tipo de tarefa T_2: Resolver sistemas impossíveis, na seguinte forma:

$\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$, *onde* a, b *e* $c \in Z$, *com* a *e* $b \neq 0$ *e* $a' = ka''$, $b' = kb''$, $c' \neq kc''$ *com* $k \in Z$.

Exemplo:

Resolver

$$\begin{cases} -8x - y = 2 \\ 8x + y = 9 \end{cases}$$

Apesar deste tipo de tarefa não ter sido trabalhado nas aulas e tão pouco nos livros didáticos, esperamos que os alunos utilizem as mesmas técnicas, ***Técnica τ_1: Substituição ou Técnica τ_2: Adição ou Técnica τ_3: Comparação,*** utilizadas para resolver sistemas determinados. Pois, para os alunos, esses dois tipos de tarefas podem ser considerados os mesmos, já que suas formas algébricas são muito parecidas e considerando o fato de não terem visto o conceito de sistema impossível.

Tipo de tarefa T_3: Resolver sistemas indeterminados, na seguinte forma:

$$\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}, \; onde\ a, b\ e\ c \in Z,\ com\ a\ e\ b \neq 0\ e\ a' = ka'', b' = kb'', c' = kc''\ com\ k \in Z.$$

Exemplo:

Resolver

$$\begin{cases} 6x + 2y = -1 \\ 6x + 2y = -1 \end{cases}$$

Neste caso, ocorre o mesmo fato que o tipo de tarefa anterior, agora para sistemas indeterminados. Esperamos que os alunos utilizem as mesmas técnicas, ***Técnica τ_1: Substituição ou Técnica τ_2: Adição ou Técnica τ_3: Comparação.*** Além de poderem utilizar a ***Técnica τ_6 (apenas para sistemas indeterminados): Transposição ou operações inversas,*** uma vez que as equações são semelhantes, reduzindo o sistema a uma única equação, conforme visto pelos alunos nas aulas, ao se introduzir o conteúdo.

Portanto, para resolver esses três tipos de tarefas T_1, T_2 e T_3, os alunos podem utilizar-se da ***Técnica τ_1: Substituição ou Técnica τ_2: Adição ou Técnica τ_3: Comparação ou Técnica τ_6 (apenas para sistemas indeterminados): Transposição ou operações inversas.*** Essas técnicas são aparentemente independentes entre si, mas possuem um único discurso teórico-tecnológico que as justifica, conforme foi visto na análise teórica das técnicas. A única diferença é o resultado encontrado em cada tipo de tarefa T_i, pois na tarefa T_1, por meio de qualquer uma das técnicas, os alunos podem chegar a uma única solução, enquanto nas tarefas T_2 e T_3 as soluções são, respectivamente, impossíveis e infinitas. Após a aplicação das propriedades, reduzindo o sistema, se chega a uma igualdade falsa para o tipo de tarefa T_2 em uma das equações do sistema, da seguinte forma: ax + by = c, onde a = b = 0 e c ≠ 0. No tipo de tarefa T_3 se chega a uma igualdade da forma ax + by = c, onde a = b = c = 0.

Os objetivos específicos deste tipo de tarefa foram: identificar quais as técnicas mais utilizadas pelos alunos; identificar a capacidade de o aluno interpretar e criticar a solução de um sistema, sabendo quando podem ocorrer os sistemas possíveis, impossíveis e indeterminados; verificar se os alunos dominavam operações com os coeficientes dos sistemas quando inteiros, transformando-os em fracionários ou decimais durante as operações realizadas.

Na resolução dos tipos de tarefa T_2 e T_3, com sistemas impossíveis ou indeterminados, apesar de não terem trabalhado esses tipos de tarefas em aula, era esperado que alguns alunos, pouco a pouco na modalidade validação permanente do *software,* reconhecessem as informações dadas no seu processo de resolução. Tais informações são as formas em que se possa chegar, após aplicarem as técnicas vistas: ax + by = c, onde a = b = 0 e c ≠ 0 ou ax + by = c, onde a = b = c = 0, manifestadas na equivalência das equações do sistema.

Dessa maneira, presumia-se que existisse uma evolução a partir das distintas organizações pontuais da forma $\{T_i/\ \tau/\ \theta/\ \Theta\}$ presentes em cada tipo de tarefa T_i, mediante a utilização das três técnicas exploradas, para uma praxeologia local da forma $\{T_i/\ \tau_i/\ \theta/\ \Theta\}$, relacionando os três tipos de tarefas T_i, entre si, por via de um único discurso teórico-tecnológico presentes nas técnicas da adição, substituição e talvez da comparação.

As variáveis didáticas exploradas foram os tipos de sistemas, de maneira que aparecesse sempre um de cada tipo: possível, impossível ou indeterminado, e também o valor numérico dos coeficientes, que poderia variar de natural ou inteiro para fracionário ou decimal durante o transcurso da resolução.

Quanto às possibilidades de organização praxeológica do professor para as situações de aprendizagem, pode-se afirmar que esses três tipos de tarefa *Ti,* apresentados no mapa de teste do *software,* permitiram a exploração do assunto de sistema de equações lineares em um processo de descoberta e de interpretações conforme a classificação do sistema.

Assim, fica comprovado que o *software* oferece subsídios ao professor para o trabalho com *objetos ostensivos* e *não-ostensivos*, segundo a organização proxeológica de Chevallard (1999).

Nesse sentido, pode-se afirmar que os três tipos de tarefa Ti abordados podem possibilitar que os alunos descubram relações entre as técnicas de resolução das tarefas associadas, com suas respectivas justificativas, ou seja, os discursos teórico-tecnológicos, de maneira que utilizassem a técnica mais conveniente, como no caso dos sistemas indeterminados em que as equações são equivalentes, se resolvidas pela técnica da redução de uma equação com duas incógnitas.

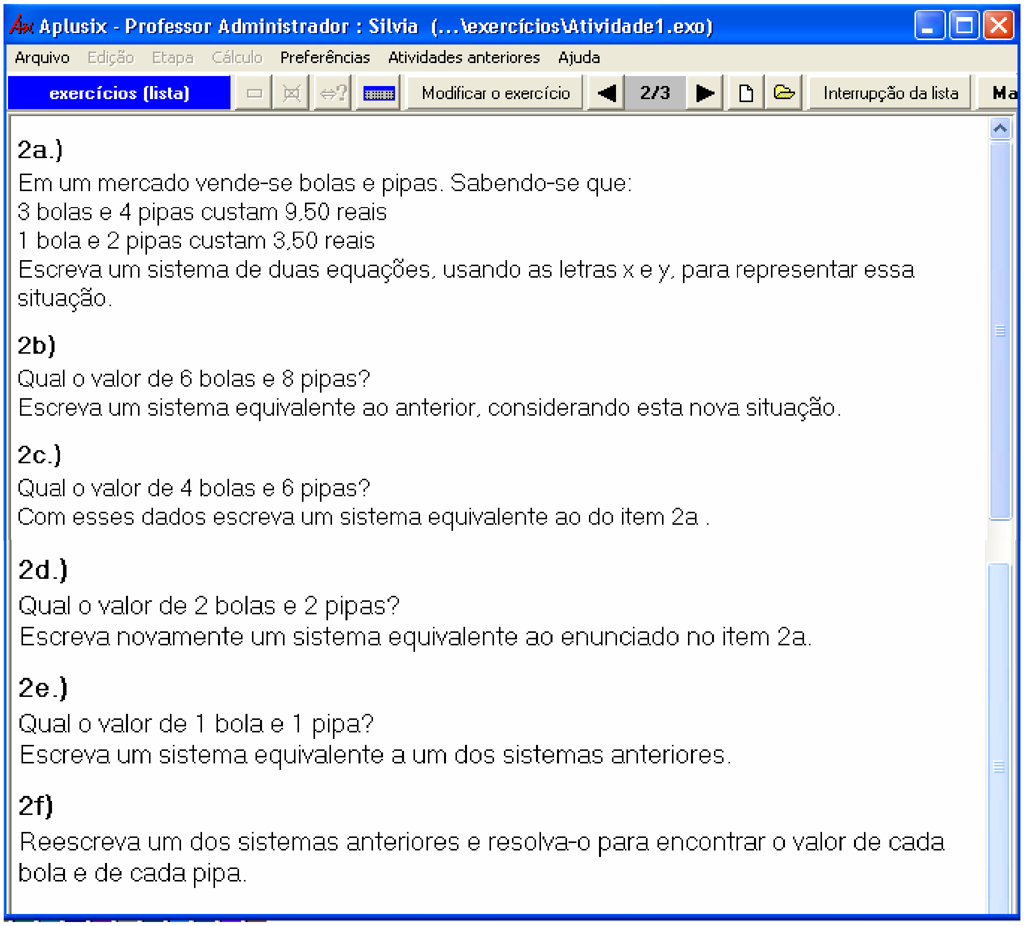
Apresentamos a seguir outros dois tipos de tarefas editadas por nós com o auxílio do editor de texto do *software Aplusix*.

Tipo de tarefa T_4: Dada uma situação-problema, modelar para a forma algébrica $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$, $onde\ a, b\ e\ c \in Q, com\ a\ e\ b \neq 0$ ***e reduzir cada item por meio de sistemas equivalentes.***

Este tipo de tarefa, quadro 3, é composto por dois tipos de tarefa ***T_1: Dada uma situação-problema, modelar para uma forma algébrica de sistema*** *e* ***T_2: Reduzir o sistema modelado por meio de sistemas equivalentes na forma*** $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$, $onde\ a, b\ e\ c \in Q, com\ a\ e\ b \neq 0.$

Para cada tipo de tarefa que a compõem tem sua respectiva técnica: ***Técnica τ_7: Modelagem de uma situação-problema para a forma algébrica de sistema*** e a ***Técnicaτ_4: Redução.***

Este tipo de tarefa com sua respectiva técnica e discursos teórico-tecnológicos, apresentados na análise teórica, é diferente de qualquer tipo de tarefa analisada tanto no livro didático quanto na aula, relativa a sistema de equações lineares, devido à presença de uma outra técnica, ***Técnicaτ_4: Redução,*** que não esteve presente nos dispositivos didáticos anteriormente analisados.



Quadro 03: Apresentação do tipo de tarefa T_4 editado no software.

O objetivo principal dessa tarefa foi investigar sistemas equivalentes por meio de combinações lineares, idéia fundamental para resolver sistemas de equações quando se pode substituir um sistema de equações por outro mais reduzido, de tal forma que ele tenha as mesmas soluções que o anterior, ou seja, que eles sejam equivalentes. Em outras palavras, investigar os princípios aditivos e multiplicativos na redução de um sistema, descritos na parte teórica, pelo fato de não termos evidenciados no tipo de tarefa anterior, após as resoluções dos alunos.

Os objetivos específicos desses dois tipos de tarefa que compõem o tipo de tarefa *T_4* foram:

- Introduzir o assunto sistema de equações lineares com novas situações problema, trabalhando processos de descoberta por tentativas e erros, interpretando-os de forma contextualizada. Por exemplo, subtrair as duas equações do sistema fornecido no enunciado, ou subtraindo o item “a” do item “b” para encontrar o resultado do item “c” e só depois introduzir conceitos e técnicas de sistema de equações lineares;

- Identificar sistema equivalente a outro, em que substituindo uma equação de um sistema por uma combinação linear, o novo sistema encontrado tem as mesmas soluções que o anterior independente da técnica utilizada;
- Por último, fazer com que o aluno reduza o número de incógnitas do sistema, dando sentido às situações colocadas neste tipo de tarefa quando as equações dadas são substituídas por equações equivalentes, a fim de ficar com uma só incógnita e calculá-la, resolvendo desta forma o sistema e mantendo sempre as chaves dos sistemas.

É possível, principalmente ao aplicar a ***Técnica*** τ_7***: Modelagem de uma situação-problema para a forma algébrica de um sistema*****,** que os alunos encontrem algumas dificuldades para traduzir o enunciado e representar pelas letras x e y as incógnitas do problema, devido às várias concepções da Álgebra, conforme foi verificado nas análises teóricas desta técnica. Além disso, os alunos estarão, provavelmente, realizando pela primeira vez, com sistema de equações lineares esse tipo de tarefa. Apesar de ter aparecido nos livros didáticos, este tipo não foi abordado em aulas.

Nesse caso, o enunciado pode ser representado por um problema em linguagem natural, de tal forma que possa estabelecer diferentes combinações lineares entre as equações do sistema, trabalhando com os *objetos ostensivos* do registro numérico: números naturais, inteiros, fracionários ou decimais. Logo, esse tipo de tarefa oferece subsídios para um novo *objeto ostensivo,* da oralidade, e concomitantemente um *não-ostensivo*, do significado de sistemas de equações equivalentes.

Além disso, segundo os autores, parte da atividade matemática é dedicada à produção de modelos (matemáticos):

> Um aspecto essencial da atividade matemática consiste em construir um modelo (matemático) da realidade que queremos estudar; trabalhar com tal modelo e interpretar os resultados obtidos nesse trabalho, para responder as questões inicialmente

> apresentadas. Grande parte da atividade matemática pode ser identificada, portanto, com uma atividade de modelagem matemática (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001, p. 50).

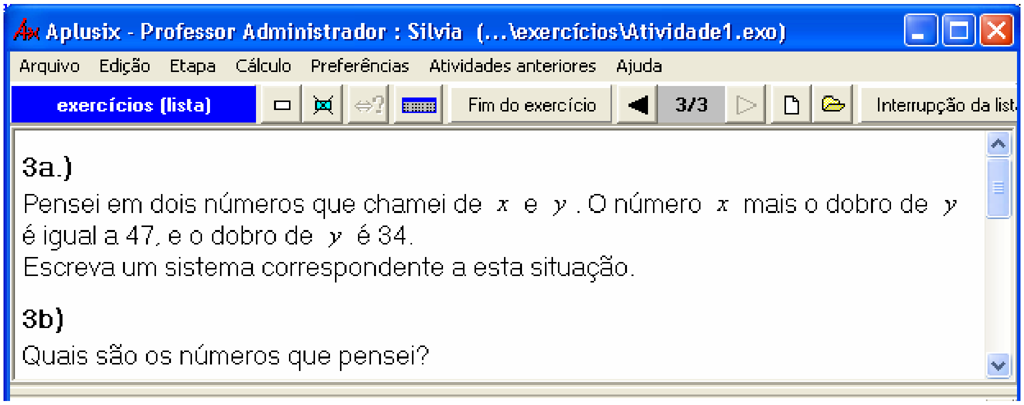
A partir disso, pode-se considerar que a equivalência de sistema de equações está presente, em estreita relação com as técnicas, em que para se reduzir o sistema seria necessário modelar um outro sistema equivalente ao anterior, mantendo sempre a chave do sistema. As duas técnicas, presentes neste tipo de tarefa, estão relacionadas, cada qual, com seu discurso teórico-tecnológico para encontrar a solução do sistema, ao contrário do tipo de tarefa anterior, para o qual existia um único discurso teórico-tecnológico para as quatro técnicas que viessem a utilizar.

A associação com os discursos teórico-tecnológicos dessas duas técnicas não foi aleatória como estavam acostumados os alunos, quando aprenderam as técnicas da adição e da substituição, para a resolução de sistemas de equações, sem uma justificativa evidente das técnicas utilizadas.

Portanto, esse tipo de tarefa, com a composição de outros dois tipos de tarefas, proporciona a evolução de duas praxeologias *pontuais* para uma praxeologia *local.* As distintas técnicas combinar-se-iam em organizações *locais* $\{T_i/\ \tau_i/\ \theta/\ \Theta\}$, formadas ao redor de um mesmo discurso teórico-tecnológico.

Quanto às possibilidades da organização proxeológica do professor para a situação de aprendizagem, é importante ressaltar que se permite explorar o assunto de equivalência de sistemas de equações lineares com novas maneiras de contextualização presentes na situação problema apresentada, trabalhando com a oralidade e os processos de descoberta por tentativas e erros durante as interpretações dos sistemas e seus equivalentes.

Tipo de tarefa T_5: Dada uma situação-problema, modelar para a forma algébrica $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$ $onde\ a, b\ e\ c \in Z^*, com\ a'' = 0\ e\ b' = b''$ ***e resolver.***



Quadro 04: Apresentação do tipo de tarefa T_5 editado no *software*.

Este tipo de tarefa, quadro 4, também é composto por dois tipos tarefas ***T_1: Dada uma situação-problema, modelar para a forma algébrica:*** $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$ $onde\ a, b\ e\ c \in Z^*, com\ a'' = 0\ e\ b' = b''$ e ***T_2: Resolver o sistema.***

Para cada tipo de tarefa que a compõem tem sua respectiva técnica:

Técnica τ_7: Modelagem de uma situação-problema para a forma algébrica de um sistema e a ***Técnica τ_1: Adição ou Técnica τ_2: Substituição ou Técnica τ_3: Comparação, Técnica τ_4: Redução ou Técnica τ_5: Tentativas.***

As duas técnicas e seus respectivos discursos teórico-tecnológicos, apresentados na análise teórica, são parecidos ao tipo de tarefa anterior e ao das analises dos livros didáticos, mas que não esteve presente nas aulas.

As técnicas que podem ser utilizadas pelas duplas são as mesmas técnicas encontradas nos livros didáticos, acrescidas da técnica da redução, apresentada pela primeira vez aos alunos na tarefa T_4, anterior a esta.

O seu objetivo principal foi analisar o procedimento utilizado pelos alunos na resolução da situação-problema apresentado. Em particular se eles usarão a técnica da redução, realizando-a primeiro mentalmente e oralmente, junto coma a técnica de tentativas, para depois representarem o sistema simbolicamente e aplicarem as técnicas já exploradas em aula, da adição ou substituição. E talvez a técnica da comparação, uma vez que não trabalharam em sala de aula com essa técnica.

Espera-se na técnica de redução do sistema, que as duplas estabeleçam relações com as outras três técnicas que podem enriquecer seu significado, presentes no mesmo discurso teórico-tecnológico, de forma a dar sentido às ações realizadas.

Almeja-se que os alunos apresentem justificativas do procedimento utilizado na resolução do problema, afastando-se dos automatismos, a fim de evitar uma imagem distorcida devido à rigidez dos esquemas conceituais induzidos.

Além disso, é esperado que os alunos encontrem algumas dificuldades ao traduzir o problema e até mesmo ao resolvê-lo, apesar de se tratar de uma tarefa fácil, em que a variável y do sistema já está isolada e os coeficientes dos outros termos são números inteiros de fácil realização dos cálculos. Apenas com uma coordenação consciente dessas mudanças de registros no tipo de tarefa T_1 - *Dada uma situação-problema, modelar para uma forma algébrica de sistema* e dos procedimentos utilizados ao aplicar as técnicas convenientes, poderá favorecer uma eficiente realização deste tipo de tarefa.

A variável didática são os coeficientes das equações, mantendo uma única incógnita em uma das equações do sistema, de coeficiente igual ao da outra equação, possibilitando aos alunos resolverem o problema por meio do cálculo mental, além do uso das três técnicas já vistas nos tipos de tarefas anteriores: adição, substituição e redução.

A composição dos dois tipos de tarefa T_1 e T_2 permitiu uma evolução das duas organizações *pontuais* $\{T_i / \tau / \theta / \Theta\}$ para uma organização *local* $\{T_i / \tau_i / \theta / \Theta\}$, em que as distintas tecnologias combinar-se-iam em uma única organização *local*, assim como ocorreu no tipo de tarefa anterior.

As possibilidades da organização praxeológica do professor para a situação de aprendizagem, foram concentradas em trabalhar o assunto de sistema de equações lineares primeiramente de forma oral, por meio de cálculos mentais, sem que o aluno precisasse escrevê-los, proporcionado sua resolução sem as dificuldades encontradas na simbolização. Depois que as duplas realizassem os cálculos mentalmente, o professor pediria a sua modelagem, com a ajuda do *software*.

Neste processo, os discursos teórico-tecnológicos, dos dois tipos de tarefas que compõem este tipo de tarefa, evidenciam-se devido ao fato de uma das equações já se apresentar reduzida, com uma única incógnita isolada, permitindo por meio dos cálculos mentais e, depois, dos cálculos algébricos, que as duplas cheguem com maior rapidez aos valores procurados.

Logo, o conteúdo sistema de equações deixa de ser apresentado em estreita relação com as técnicas, permitindo às duplas uma maior associação com o discurso teórico-tecnológico que se apresenta evidente, abordado de forma explícita, justificando as técnicas utilizadas.

IV.3.1 Síntese da análise da seqüência didática junto ao *software* em relação as aulas

Em síntese, apresenta-se a seguir uma tabela com as organizações praxeológicas utilizadas junto ao novo dispositivo didático utilizado na sala de tecnologias, em relação à aula sobre sistema de equações lineares.

Pode-se perceber, no quadro 5, a redução entre a exploração quase *pontual,* ao redor de um único tipo de problema, trabalhada em sala de aula, e os dispositivos didáticos, tanto os já vistos nos livros didáticos quanto o do *software* aqui analisado, que cria novas noções, novas técnicas e novas relações e integra o momento do trabalho da técnica e o teórico-tecnológico justificativo e interpretativo.

	NA AULA	**NO *SOFTWARE***
Tipos de Tarefas T_i	***1 Tipo:*** T_1: Resolver sistemas do tipo: $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$, onde a, b e c ∈ Z com a e b ≠ 0.	**5 Tipos**: *T_1: Resolver sistemas determinados, na seguinte forma* $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}, \; onde\ a, b\ e\ c \in Z, com\ a\ e\ b \neq 0;$ T_2: Resolver sistemas impossíveis, na seguinte forma: $\begin{cases} a'x + b'y = c', & onde\quad a, b, e\ c \in Z, com\ a\ e\ b \neq 0\ e \\ a''x + b''y = c'', & a' = ka'', b' = kb'', c' \neq kc''\ com\ k \in Z. \end{cases}$ *T_3: Resolver sistemas indeterminados, na forma:* $\begin{cases} a'x + b'y = c', & onde\ a, b\ e\ c \in Z, com\ a\ e\ b \neq 0\ e \\ a''x + b''y = c'', & a' = ka'', b' = kb'', c' = kc''\ com\ k \in Z. \end{cases}$ T_4: Modelar a situação-problema para a forma algébrica

		$\begin{cases} a'x+b'y=c' \\ a''x+b''y=c'' \end{cases}$, $onde\ a, b\ e\ c \in Q, com\ a\ e\ b \neq 0$ e reduzir cada item por meio de sistemas equivalentes. T_5: Modelar a situação-problema para a forma algébrica $\begin{cases} a'x+b'y=c' \\ a''x+b''y=c'' \end{cases}$ $onde\ a, b\ e\ c \in Z^*, com\ a''=0\ e\ b'=b''$ e resolver.
Técnicas τ_i	***2 técnicas:*** *-Substituição;* *-Adição.*	**7 técnicas:** τ_1: Substituição; τ_2: Adição; τ_3: : Comparação; *τ_4: Transposição ou operações inversas;* τ_5: Modelagem de sistema de equações lineares; τ_6: Redução *τ_7:Tentativas*
Discurso Teórico-Tecnológico	***1 discurso:*** *- Propriedades relativas ao conjunto solução de um sistema.*	***3 discursos:*** *-Propriedades relativas ao conjunto solução de um sistema, ao realizar combinações lineares com o sistema de equações, o seu conjunto solução não se altera;* *- Conceito de solução de uma equação linear com duas variáveis;* *-Conceito de sistema de equações lineares representado algebricamente;*

Quadro 05: Organizações praxeológicas das atividades aplicadas com o *software*.

A inserção deste outro dispositivo didático pode proporcionar a passagem das justificativas pontuais, verificadas na aula analisada, às justificativas de maior alcance, como resultado de uma atividade sustentada e estruturada, fonte de novos tipos de tarefas e técnicas, evitando desta forma a fragmentação da matemática ensinada, assim criticada pelos autores:

> Nas instituições escolares atuais impera uma forte tendência de fragmentar a matemática ensinada. O estudante se depara com alguns objetos matemáticos pouco relacionados entre si, com algumas técnicas muito rígidas, com problemas relativamente isolados (ou formando classes muito estereotipadas) e com uma teoria pouco relacionada com a prática matemática concreta (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001, p. 290).

Portanto, segundo Chevallard, Bosch & Gascón (2001) é necessária uma atividade matemática escolar realizada pelos alunos e submetida às restrições de um processo sustentado e estruturado, com mais possibilidades criativas na presença de novos dispositivos.

No próximo capítulo, apresentamos a experimentação com o uso do *software Aplusix.*

V. A EXPERIMENTAÇÃO COM USO DO *SOFTWARE APLUSIX*

Neste capítulo apresentaremos os conhecimentos prévios dos alunos referentes a sistema de duas equações lineares, que foram decisivos na escolha dos tipos de tarefas analisados no capítulo anterior, junto ao *software Aplusix*. Eles ainda permitiram-nos entender determinados procedimentos dos alunos durante a realização destes tipos de tarefas. Descreveremos a aplicação da seqüência didática, contendo as análises das produções dos alunos e confrontando os resultados esperados com os produzidos, os quais nos permitiram tirar algumas conclusões, bem como levantar novas hipóteses.

V.1 Conhecimentos dos alunos antes da experimentação

Nosso objetivo aqui é analisar conhecimentos prévios dos alunos referentes a sistema de duas equações lineares e o desempenho deles com relação à utilização do *software*.

Para isso, preparamos e aplicamos um questionário cujas questões, anexo 2, visavam averiguar expectativas que os alunos tinham sobre a sala de informática. No segundo momento, foram aplicadas algumas situações-problema do mesmo questionário, da questão quatro em diante, para identificar conhecimentos prévios dos alunos referentes a sistema de equações lineares.

Levando em conta as respostas obtidas, foi possível concluir que apesar do fato dos alunos não terem experiência com nenhum tipo de *software* educacional, a receptividade foi positiva. Os alunos estavam conscientes da importância de um trabalho diferenciado com o uso de novas tecnologias, além de perceberem que o manuseio oferecia pouca dificuldade.

Dando continuidade aplicamos cinco tipos de tarefas, com o objetivo de identificar conhecimentos disponíveis dos alunos referentes a *equações do primeiro grau com uma variável*, indispensável na resolução de sistema de equações lineare. Não descrevemos aqui esses tipos de tarefas e técnicas, porque o objetivo principal é observar a existência de alguns pré-requisitos necessários a este para nos auxiliar na elaboração de nossa seqüência didática.

A maioria dos alunos soube definir sistema de equações lineares com duas variáveis, descrevendo corretamente essa noção. Observamos que eles também puderam resolver *equações do primeiro grau com uma variável,* onde obtiveram bom resultado de acertos para esse tipo de tarefa. Pôde-se perceber que, sendo um assunto já estudado pelos alunos, houve uma forte presença do aspecto algorítmico da *técnica da transposição ou operações inversas,* para resolver equações com uma variável.

Verificou-se um baixo número de acertos para outros tipos de tarefas referentes, respectivamente, a: *modelar o enunciado por meio de uma equação; verificar se duas equações são equivalentes; verificar se o valor fornecido da incógnita é solução da equação.* Apenas a técnica *da transposição* foi utilizada para resolver equações do primeiro grau com uma.

Dessa forma, essa análise preliminar dos conhecimentos prévios dos alunos orientou a elaboração das atividades com o *software*, para investigarmos as técnicas de resolução de sistema de equações que eles utilizam. O nosso intuito foi abordar a construção de alguns desses tipos de tarefas, às quais os alunos obtiveram baixo índice de acerto, de tal forma que cada atividade proposta estivesse relacionada com as anteriormente exploradas.

V.2 Ambiente experimental da pesquisa

A seqüência de atividades foi aplicada no laboratório de informática, no segundo semestre do ano de 2005, com 29 alunos da 7ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual em Dourados/MS. Vale ressaltar que o laboratório em questão estava equipado com 14 computadores para o uso dos alunos e um para o professor coordenador da sala. Além disso, havia um quadro branco, permitindo a adequada realização da experiência.

O *software* não foi simplesmente encarado como um dispositivo técnico-pedagógico cujas funções fossem independentes da matéria explorada, mas sim como dispositivo didático que poderia incidir positivamente sobre a estruturação e o desenvolvimento do processo de estudo, levando em consideração as análises dos outros dispositivos utilizados com os alunos.

Antes de iniciarmos a seqüência didática, realizamos uma aula no laboratório de informática, para familiarização dos alunos com o *Aplusix.* Mesmo sem terem experiência alguma no laboratório, com nenhum tipo de *software* educativo, não encontraram barreira em utilizá-lo.

Os alunos, ao participarem dos encontros na sala de informática, organizavam-se da seguinte forma: 13 duplas e um grupo de três alunos fixos até o final das atividades. Referimo-nos aos alunos participantes sempre por "duplas", para a uniformização da apresentação nas análises, mesmo no caso do grupo com três integrantes. A organização das duplas ocorreu de forma espontânea e voluntária, com direito a interromper sua participação a qualquer momento. O acompanhamento de cada dupla foi realizado por meio de gravações das atividades realizadas no *software*, gravações das discussões coletivas em fita magnética e observações.

As atividades da seqüência didática planejada foram aplicadas pela pesquisadora com o auxílio do professor coordenador da sala de informática. Contudo, o professor regente, por motivos próprios, preferiu não participar.

A seqüência didática foi composta por 9 sessões, de 50 minutos cada, distribuída em três blocos de atividades, referentes aos cinco tipos de tarefas, somados ao pré-teste realizado.

No quadro abaixo apresentamos o panorama das sessões pertinentes aos blocos das atividades e pré-teste realizados no laboratório de informática, com as datas e a freqüência das duplas nos respectivos dias:

SESSÕES	DATAS	FREQÜÊNCIA DAS DUPLAS
Pré-teste	20/09	91%
Bloco 1	26/09 e 25/10	91% e 45%
Bloco 2	10, 21 e 22/11	72%, 72% e 81%
Bloco 3	28, 30/11 e 05/12	63%, 72% e 72%

Quadro 06: Apresentação das datas e freqüência das duplas às sessões no laboratório.

V.3 Desenvolvimento da seqüência didática

As sessões no laboratório de informática foram realizadas no horário de aula, distribuídas de acordo com as possibilidades do professor regente e a disponibilidade de horário do laboratório. Para cada sessão o *software* era instalado previamente e a sala preparada para que os alunos a utilizassem.

Foi pedido a cada dupla que se sentasse sempre no mesmo computador a cada novo encontro, devido ao fato de os computadores não estarem em rede, para que pudessem dar continuidade ao trabalho já gravado neles. Assim, cada dupla, ao iniciar seu trabalho no computador, criou seu nome e senha, evitando que outra dupla modificasse o que já havia sido feito. No início de cada sessão eram reforçadas as orientações e, no transcurso do encontro, eram dadas as instruções de processos de utilização ou mesmo de novos comandos no *software.*

Dentre as modalidades do software escolhemos “Verificação permanente dos cálculos”, encontrada no item “Preferências” na barra de ferramentas do programa*,* conforme descrição feita na análise teórica do *software*, no capítulo III. Com o uso da modalidade escolhida, o *software* fornecia informações adequadas e ajudando as duplas a resolverem passo-a-passo os exercícios e problemas, efetuando cálculos de sua escolha, com as etapas de sua escolha.

Lembrando que o objetivo dessa seqüência didática é investigar as técnicas de resolução de sistemas de equações lineares, com um novo dispositivo, de tal forma que possa incidir na sua organização praxeológica, em que o *software* auxilie as duplas tanto na detecção de erros quanto na auto-avaliação dos procedimentos para resolverem as atividades. Portanto, este tipo de personalização escolhida foi importante para análise do uso das técnicas que já haviam aprendido.

Não havia necessidade de estar ao lado de cada aluno para sinalizar se ele estava resolvendo corretamente suas atividades, ou não, pois o próprio *software* realizava essa função, oferecendo também a retroação sobre a validade de seus cálculos. Além disso, quando o aluno finalizava o exercício, o *software* exibia algumas mensagens, avisando se a resposta estava correta ou informando a existência de algum erro durante a resolução. Seguindo essa modalidade, os alunos eram capazes de auto-avaliarem suas respostas e buscarem algum acerto, quando conseguiam. Entretanto, independente da utilização desse recurso do *software*, os alunos podiam tirar dúvidas e foram deixados à vontade para trocar informações com duplas de alunos próximas.

Ao término dos exercícios, as respostas dos alunos eram copiadas em disquete, após o processo automático do *software*, que salvava a realização dos exercícios a cada passo, possibilitando que eles fossem analisados posteriormente.

Na coleta, o material utilizado para as análises foi constituído de:

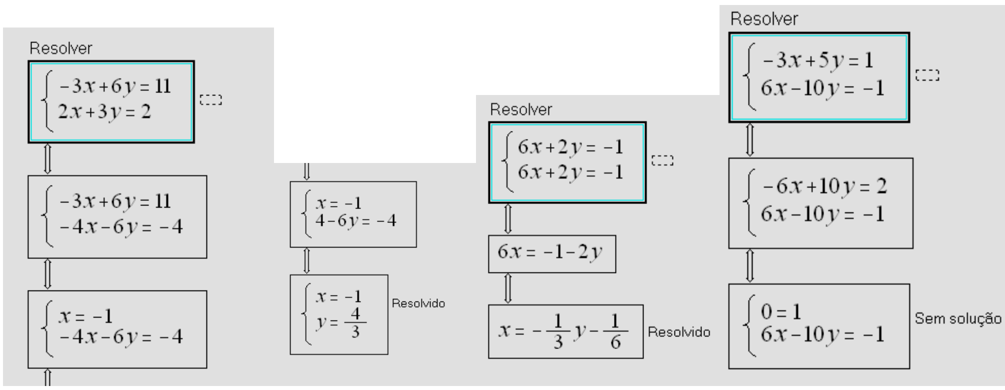
- Produção das duplas ao longo de todas as sessões de testes, gravada pelo próprio *software*, contendo a história das tentativas e dificuldades de cada dupla, as quais pôde-se observar com mais detalhes por meio dos botões “Atividades anteriores” e “Videocassete”, disponíveis na barra de ferramentas do programa;
- Transcrições dos comportamentos e diálogos das duplas, entre duplas e professor, e suas manifestações nos momentos de discussão coletiva, realizadas com o auxílio de um gravador de fita magnética;
- Respostas a questionamentos dos alunos, realizados por escrito, em papel avulso, sem identificação, após algumas atividades.

A seguir serão apresentadas as descrições das sessões que foram agrupadas em blocos de atividades, seguidas de suas análises correspondentes.

V.3.1 Descrição e análise das atividades do bloco 1

Primeiramente, foi pedido para que todas as duplas abrissem o “Mapa de Testes” do *software,* na mesma família F2 de exercícios sobre sistemas de equações lineares. Essa família de exercícios era composta por 13 sistemas, com os três primeiros tipos de tarefas analisados no capítulo anterior, porém cada dupla resolveu uma quantidade, determinada de acordo com seu ritmo.

Para cada dupla foram propostos os três tipos de tarefas, abertos na família F2 do mapa de testes, de acordo com a classificação dos sistemas – determinado, indeterminado e impossível, que apareciam de forma aleatória para cada uma delas, conforme o protocolo 01.



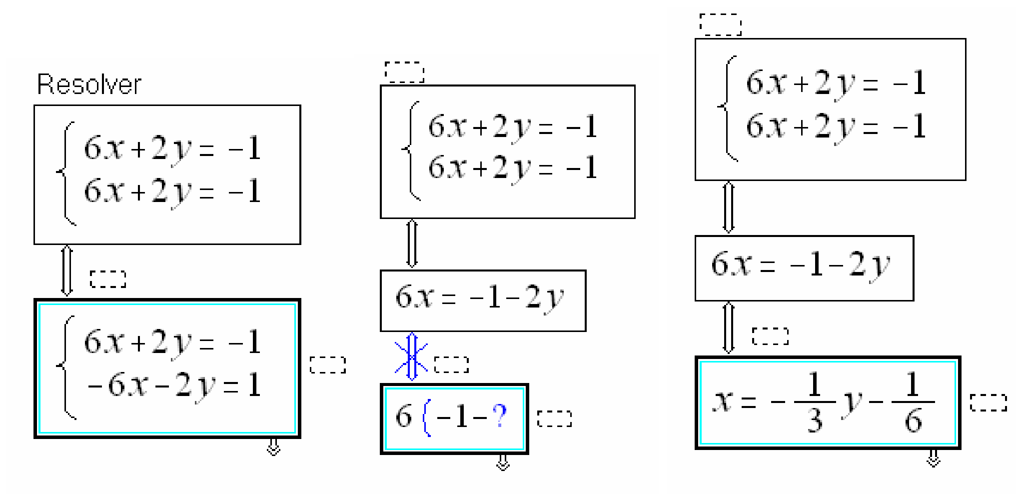
Protocolo 01: Observação em videocassete, dos 3 tipos de tarefas T_i, bem realizadas do bloco 1

As técnicas mais utilizadas pelas duplas, para resolver os três primeiros tipos de tarefas, foram a ***Técnicaτ_1: Substituição*** e a ***Técnicaτ_2: Adição*** vistas em aula. Poucas duplas utilizaram a ***Técnicaτ_6: Transposição ou operações inversas***, para os sistemas indeterminados e nenhuma dupla utilizou a ***Técnicaτ_3: Comparação***, vista nas análises dos livros didáticos.

Alguns erros foram observados quando os alunos aplicaram as técnicas da adição ou da substituição. Esses erros são vistos como sinais explícitos da dificuldade de os alunos reconhecerem sistemas equivalentes, encontrados nas proporcionalidades ou na igualdade dos coeficientes das duas equações que formam o sistema, visto no segundo sistema apresentado no protocolo 1. Por outro lado, quando ocorre igualdade ou a proporcionalidade apenas dos coeficientes dos termos dependentes, no caso de sistemas impossíveis, visto no terceiro sistema do mesmo protocolo 1, os coeficientes de uma equação são o dobro da outra, diferindo apenas o termo independente. Esses erros relacionam-se aos conceitos e concepções da Álgebra apresentados na análise teórica. Vamos analisar alguns dos erros que apareceram com maior freqüência.

A maioria das duplas começou a resolver o sistema indeterminado com as técnicas da adição e da substituição, como pode ser observado no protocolo abaixo, na primeira e segunda tentativa, respectivamente. Só depois de muitas tentativas, algumas duplas perceberam que as equações do sistema indeterminado eram idênticas e as resolveu como se fossem uma única equação de duas variáveis, fato observado na terceira tentativa da mesma dupla.

1ª tentativa	2ª tentativa	3ª tentativa
Técnica: Adição	***Técnica: Substituição***	***Técnica: Transposição***



Protocolo 02: Observação em videocassete do tipo de tarefa T_3 - bloco 1 - sistemas indeterminados.

A dependência de informações das duas equações do sistema não foi levada em conta, ou seja, a maioria das duplas resolveu o sistema pela técnica da substituição como se fossem duas equações diferentes e só depois de várias tentativas perceberam que poderiam considerar apenas uma equação. O mesmo aconteceu quando encontraram duas equações com coeficientes ordenadamente proporcionais, ou seja, quando as equações eram equivalentes. Essa falta de consciência da equivalência fica clara no momento em que outras duplas tentam resolver o sistema indeterminado pela técnica da adição, sendo que as duas equações são idênticas e deveriam obter 0x + 0y = 0.

Entretanto, pudemos observar que os alunos utilizam cálculos aritméticos, mas também uma aplicação de técnicas sem justificativa e compreensão de suas realizações. Os alunos teriam que perceber a condição para encontrar uma solução que não fossem apenas os valores numéricos das incógnitas, mas uma relação que fosse válida para infinitos valores de x e y, onde a concepção dos valores encontrados não é mais a de duas incógnitas e sim a de duas variáveis que podem assumir infinitos valores.

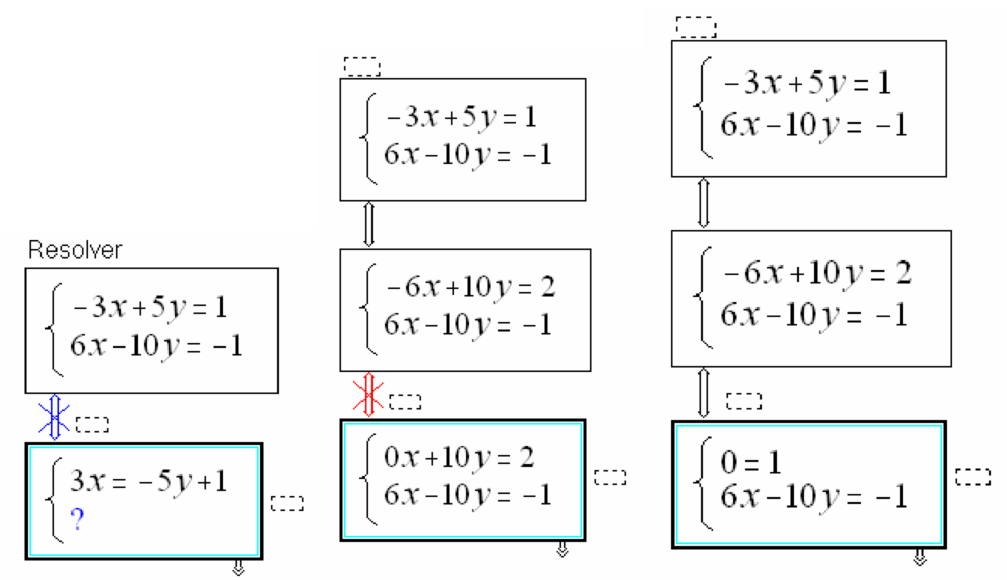
Ao se depararem com um sistema com duas equações equivalentes, algumas duplas passaram a resolvê-lo aplicando técnicas, como se estivessem resolvendo uma equação de primeiro grau com duas variáveis que já haviam visto, sem uma reflexão mais profunda que seria o campo de variabilidade que a própria equação proporcionava em uma relação funcional entre as variáveis. Assim, ao terminarem de resolver essa equação, o *software* confirmava que a resposta estava correta, devido a essa relação funcional entre as variáveis, como pode ser visto no protocolo acima, referente ao tipo de tarefa T_3, na terceira tentativa.

Essa noção apenas alguns alunos haviam compreendido previamente quando estudaram sistemas de equações lineares, considerada como um problema de fundo por Vergnaud (*apud* AZARQUIEL, 1993), pois essa é a relação conceitual entre as noções de incógnitas e equações por um lado e as de variáveis e funções por outro. Os autores ainda ressaltam que as noções de incógnitas e equações revelam, sobretudo, o aspecto instrumental da álgebra, enquanto as idéias de variáveis e funções fazem pensar na álgebra como um objeto específico de estudo.

No entanto, no sistema indeterminado poucos alunos perceberam as incógnitas como valores particulares de variáveis submetidas a mais de uma condição ou restrição, e, por isso, tiveram um número baixo de acertos.

De maneira geral, pôde-se perceber que os alunos possuíam uma idéia vaga e imprecisa sobre o conceito de sistemas de equações. Percebeu-se que, para eles, a solução consistia em encontrar valores para x e y por meio das técnicas aprendidas e não o conjunto dos números que deveria verificar as duas equações do sistema. Observou-se que, de modo geral, os alunos acreditavam que resolver os sistemas significava usar a técnica da adição ou a da substituição. No protocolo abaixo é possível verificar cada passo das tentativas realizadas por uma dupla.

1ª tentativa	2ª tentativa	3ª tentativa
Técnica: Substituição	***Técnica: Adição***	***Técnica: Adição***



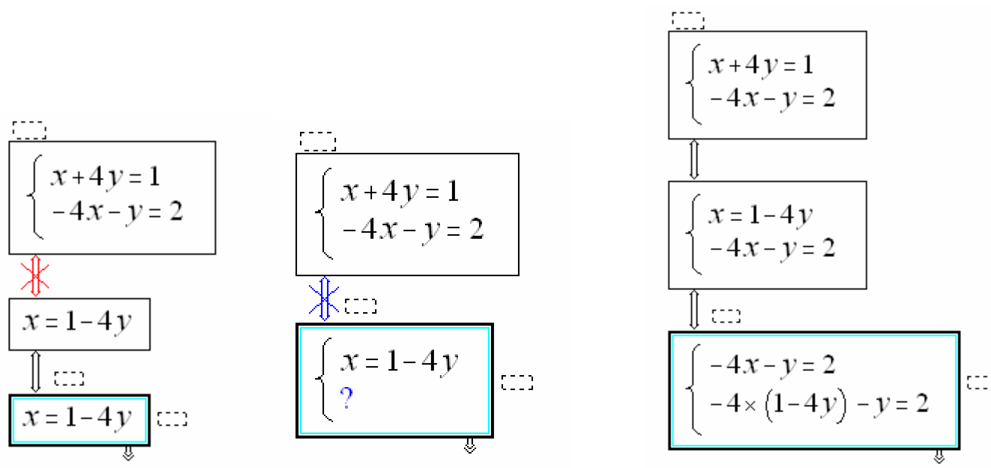
Protocolo 03: Observação em videocassete do tipo de tarefa T_2 – bloco 1- sistemas impossíveis.

No protocolo anterior pôde-se constatar que, na primeira tentativa, a dupla utilizou a técnica da substituição; na segunda tentativa, usou a técnica da adição; e na terceira tentativa, ainda pela técnica da adição, chegou a um sistema impossível, mas sem entender o resultado, deixou-o assim. A compreensão desse fato pelas duplas só seria possível se estivesse claro para elas que duas equações são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução; neste caso, as duas equações possuem o mesmo conjunto solução, o conjunto vazio. O *software* considerou correta a resposta da dupla mesmo aparecendo 0 = 1, pois a solução encontrada seria a de um sistema impossível, ou seja, sem solução ou vazio.

O mesmo aconteceu com os sistemas determinados, em que os alunos aprenderam a manejar as técnicas da adição e substituição, mas não sabiam o significado da realização de cada passo, ou seja, não havia uma dialética entre os blocos da práxis e do logos, segundo a TAD. Ficou claramente perceptível a ausência do conceito de sistemas equivalentes, acompanhada de erros decorrentes desse fato, ou seja, os alunos dominavam rudimentos da técnica sem nenhuma tecnologia ou teoria.

Como ilustração da falta de uma tecnologia que justifica e esclarece as técnicas, no protocolo abaixo são apresentados e descritos alguns desses erros:

1ª tentativa	2ª tentativa	3ª tentativa
Técnica: Substituição	***Técnica: Substituição***	***Técnica: Substituição***



Protocolo 04: Observação em videocassete do tipo de tarefa T_1 - bloco 1- sistemas determinados.

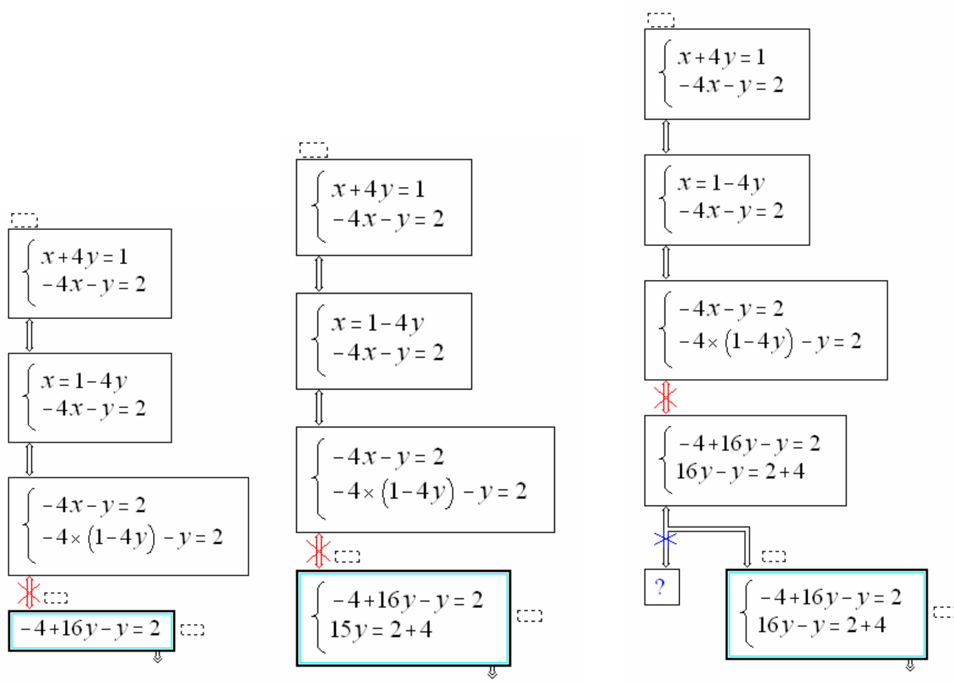
Com esse protocolo é possível perceber que, ao resolver o sistema determinado, a dupla optou, na primeira tentativa, pela técnica da substituição, isolando a variável x sem substituí-la na outra equação, esquecendo-se da equação restante.

Ao observar a flecha vermelha, na primeira tentativa, a dupla percebeu que estava fazendo algo errado. Já na próxima tentativa, ao observar a flecha e o ponto de interrogação azul, percebeu que deveria manter a chave do sistema, copiando a segunda equação do sistema inicial após ter isolado o x.

Na terceira tentativa, a mesma dupla copiou a segunda equação do sistema e, em seguida, substituiu o valor isolado de x na primeira equação. Dessa forma, no segundo passo da terceira tentativa, a dupla resolveu o sistema mantendo a chave, sem perceber que ela estava mantendo uma equivalência de sistemas.

No protocolo seguinte, na quarta tentativa, é possível notar que essa mesma dupla, ao continuar resolvendo o sistema em questão, tenta novamente trabalhar com uma única equação, mas deixando de utilizar a chave e a outra equação. Mais uma vez, houve a indicação do *software* de que a dupla estava fazendo algo errado.

4ª tentativa	5ª tentativa	6ª tentativa
Técnica: Substituição	***Técnica: Substituição***	***Técnica: Substituição***



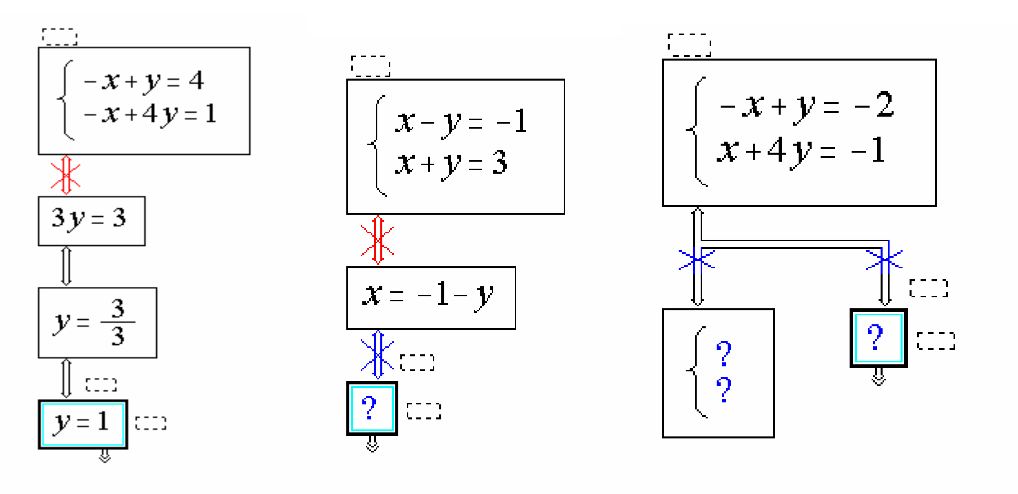
Protocolo 05: Continuação da observação em videocassete do tipo de tarefa T_1 - sistemas determinados.

Por isso, na quinta tentativa, manteve a chave do sistema para resolver essa única equação, após a substituição de x. Mais uma vez o *software* acusou erro com a flecha vermelha, pois o sistema deixou de ser equivalente quando a dupla passou a trabalhar com uma única equação, esquecendo da outra equação que formava o sistema. Possivelmente, esse procedimento pode ter como causa o fato de os alunos já terem resolvido o sistema com lápis e papel, de maneira simplificada, sem compreenderem os registros das equivalências necessárias ao funcionamento do *software*.

Na 6ª tentativa, a dupla tentou separar o sistema em dois lados. Ao perceber que a decisão não estava correta, fato ilustrado pela indicação da flecha vermelha na tela, a dupla desistiu, deixando de resolver o sistema.

Foi possível observar, no protocolo abaixo referente ao primeiro sistema, situações de duplas que conseguiram encontrar o valor de y com a técnica da adição e deixaram de encontrar o valor de x, pois não voltaram para substituir o valor de y em uma das equações que formam o sistema, ou vice-versa.

1º sistema	2º sistema	3º sistema
Técnica: Adição	***Técnica: Substituição***	***Técnica: Indefinida***



Protocolo 06: Observação em videocassete do tipo de tarefa T_1 - sistemas determinados.

No segundo sistema, as duplas tentaram resolver o exercício pela técnica da substituição isolando x, e outra vez, não substituíram esse valor na outra equação para encontrar o valor de y. No terceiro sistema, notou-se que nenhuma técnica foi aplicada – as duplas quiseram apenas separar as duas equações.

O fato de o *software* não reconhecer as resoluções de um sistema sem as chaves, que ligam as duas equações equivalentes, não impediria que as duplas o resolvessem corretamente se isso estivesse claro aos alunos. Nesse caso elas não deixariam de suprimir uma das incógnitas, encontrando apenas o valor de uma delas e esquecendo da outra incógnita, como ocorreu ao não utilizarem bem o conceito de equivalências de sistemas.

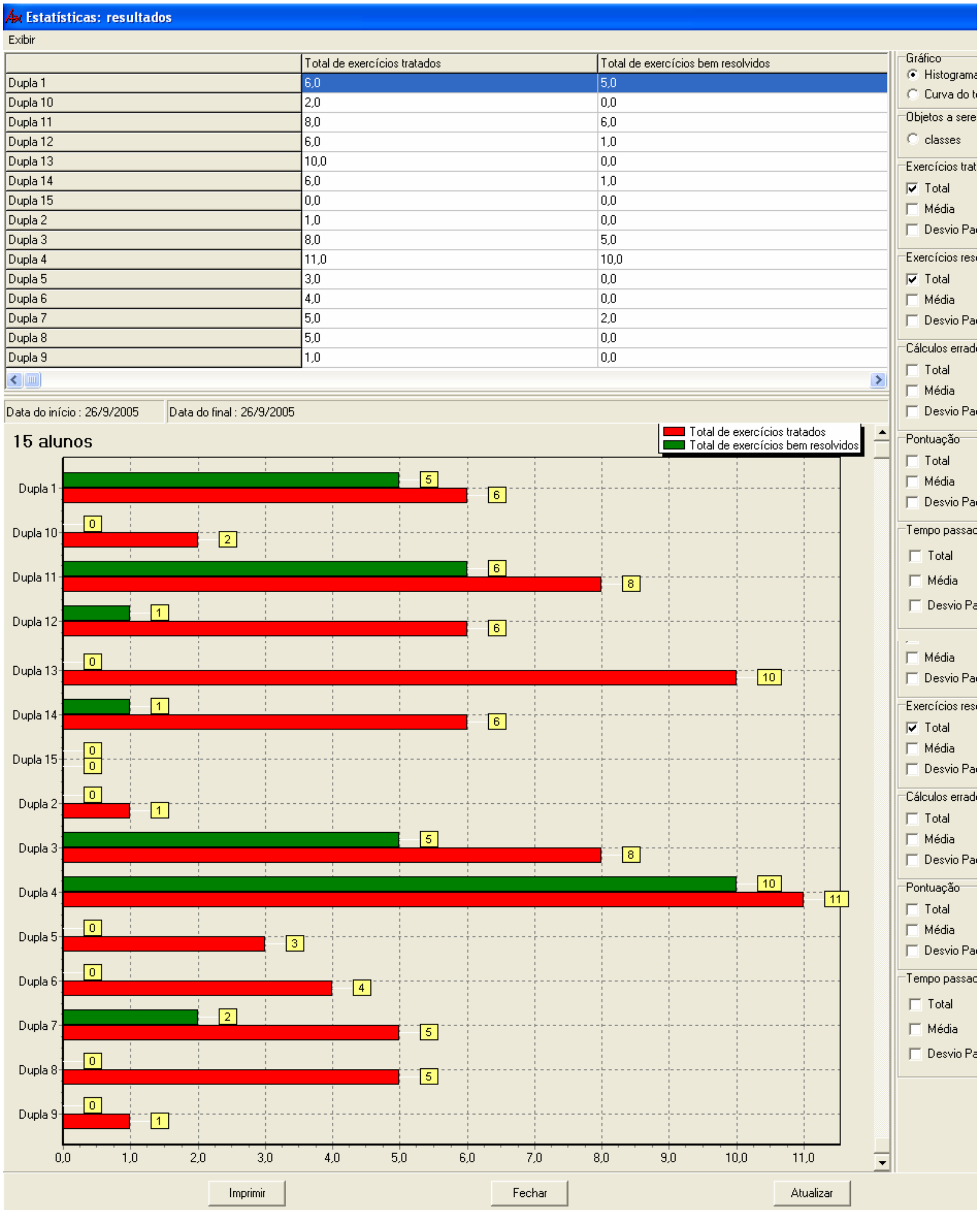
Os erros apresentados acima servem como exemplo para ilustrar o procedimento de muitos alunos diante da dificuldade de utilizarem as técnicas de resolução de sistema de equações lineares. Os procedimentos mostrados em uns poucos casos encontrados caracterizam-se em suprimir uma parte do problema, seja uma incógnita ou uma equação, reduzindo o campo de informação que lhe foi dado. Talvez esse fato deva-se à falta de um discurso teórico-tecnológico – *propriedades relativas ao conjunto solução de um sistema, ou seja, ao realizar combinações lineares com o sistema de equações, seu conjunto solução não se altera* – que justifique as técnicas utilizadas pelas duplas.

Dessa forma, pode-se considerar o fato como um uso abusivo de uma praxeologia didática tecnicista, que supervaloriza a técnica em detrimento da compreensão dos conceitos. Claramente, observou-se que houve um pseudoformalismo algébrico, quando os alunos trabalharam com as técnicas da adição e da substituição, sem compreenderem os conceitos e propriedades envolvidas na realização de cada passo dessas técnicas.

O fato que ocorreu é que nem todas as duplas possuíam conhecimentos teórico-tecnológicos das técnicas utilizadas, que lhes permitissem organizar os discursos de melhor nível, os objetos *não-ostensivos*, ou seja, as idéias, as intuições e os conceitos, não lhes permitiram interpretar e criticar a solução dos três tipos de sistema – determinado, indeterminado e impossível.

Portanto, apesar desses diferentes tipos de tarefas enquadrarem-se dentro de uma organização *local* $\{T_i/\ \tau_i/\ \theta/\ \Theta\}$, esta não se completou por parte dos alunos, pois apesar da utilização das técnicas eles mostraram não possuir um discurso teórico-tecnológico que as fundamentassem.

Por meio da ferramenta “Estatísticas”, disponível no *software Aplusix*, apresentamos a seguir, em um gráfico de barras, os resultados de cada dupla.



	Total de exercícios tratados	Total de exercícios bem resolvidos
Dupla 1	6,0	5,0
Dupla 10	2,0	0,0
Dupla 11	8,0	6,0
Dupla 12	6,0	1,0
Dupla 13	10,0	0,0
Dupla 14	6,0	1,0
Dupla 15	0,0	0,0
Dupla 2	1,0	0,0
Dupla 3	8,0	5,0
Dupla 4	11,0	10,0
Dupla 5	3,0	0,0
Dupla 6	4,0	0,0
Dupla 7	5,0	2,0
Dupla 8	5,0	0,0
Dupla 9	1,0	0,0

Figura 06: Resultados estatísticos das duplas com relação às atividades do bloco 1.

De acordo com os dados estatísticos, figura 7, pode-se notar que houve um baixo desempenho das duplas e que apenas 4 dentre as 14 resolveram mais da metade dos exercícios tratados. Vale ressaltar que o *software* mapeou 15 computadores na sala, mas um deles estava quebrado. As demais duplas obtiveram resultados inferiores a 50% dos exercícios tratados, dentre as quais sete não conseguiram resolver nenhum dos exercícios propostos.

Conforme já mencionado na análise a priori, era esperado que as duplas não obtivessem muito sucesso ao utilizarem as técnicas para resolver sistemas indeterminados ou impossíveis, por não terem explorado suficientemente esse conteúdo em nenhum dos dispositivos utilizados na sala de aula.

Para que pudesse existir uma evolução entre as organizações *locais* e *pontuais*, por intermédio da utilização de técnicas que se relacionassem entre si, foram propostos novos tipos de tarefas para que as duplas pudessem relacionar as técnicas já aprendidas e seus respectivos discursos teórico-tecnológicos conforme descrevemos a seguir.

V.3.2 Descrição e análise das atividades do bloco 2

Após todas as duplas acomodarem-se, cada qual no computador que haviam trabalhado anteriormente, foi pedido para que clicassem no item "Arquivos", na barra de ferramenta do *software Aplusix*; depois em "Abrir" e, finalmente, procurassem a pasta "Exercícios", ou, então, que clicassem diretamente na pasta de cor amarela, também encontrada na barra de ferramentas do programa.

Dentro da pasta "Exercícios", todas as duplas abriram o arquivo "Atividades" no qual encontrar as atividades do bloco 2 com o tipo de tarefa T_4, descritas no capítulo anterior. Este tipo de tarefa e o seguinte, que compõem a seqüência didática, foram elaborados e gravados por nós com o auxílio do editor de exercícios do *software*, EditorExercícios.exe.

Após as instruções para abrirem os tipos de tarefas propostos, as duplas começaram a representar algebricamente, com certa dificuldade, os sistemas de equações dados na linguagem natural, com a ***Técnica* τ_7*: Modelagem de uma situação-problema para a forma algébrica de um sistema.***

As duplas deveriam escrever o sistema na representação algébrica, para cada item da situação-problema proposta. As dificuldades encontradas pelas duplas concentraram-se em separar cada uma das informações independentes para cada item. A partir disso, foi possível observar duplas em diversas situações, escrevendo e apagando várias equações diante da mesma informação encontrada em cada item do problema.

Nesse sentido, a passagem da linguagem natural para a simbólica envolvendo variáveis algébricas, caracterizou-se como uma tarefa de elevado nível de dificuldade. Nesse nível de escolaridade os alunos não estavam acostumados a trabalharem com a linguagem natural, envolvendo sistemas de equações, conforme análises de conhecimentos prévios dos alunos, no início deste capítulo.

O objetivo principal deste bloco de atividades foi o de investigar sistemas equivalentes por meio de combinações lineares, antes de os alunos escreverem com símbolos. Por isso, foi possível verificar, antes de modelarem a situação-problema, como as duplas produziam as combinações lineares das equações, dentro de um contexto na forma verbal.

Algumas duplas perceberam rapidamente as combinações lineares que deveriam realizar em cada item do problema. No entanto, para outras duplas esse processo foi mais trabalhoso e, por isso, foi necessário fornecer outro significado às combinações lineares, da mesma forma que faziam as duplas quando se ajudavam para compreenderem os tipos de tarefas. No enunciado do problema não há incógnitas e ao generalizá-lo deve-se conhecer as relações conhecidas entre os números, só depois de obtido o sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 9{,}50 \\ x + 2y = 1{,}50 \end{cases}$ são utilizados os procedimentos.

Quando se falava somente em 3 bolas e 4 pipas alguns alunos tinham dificuldade em realizar relações com esses números ao generalizá-las. Por isso era necessário falar de algo mais próximo do que conheciam, como por exemplo, uma venda, um determinado momento, etc. Cada dupla precisava de um nível determinado de “concretização” diferente da outra, já que algumas delas percebiam as combinações lineares de imediato.

Reproduzimos abaixo um diálogo que ocorreu durante a experimentação, entre uma dupla e o professor:

> <u>O professor leu com a turma</u>: Em um mercado vendem-se bolas e pipas. Se 3 bolas e 4 pipas custam R$ 9,50 (nove reais e cinqüenta centavos) e 1 bola e 2 pipas custam R$ 3,50 (três reais e cinqüenta centavos), escrever um sistema de equações, usando as letras x e y, para representar essa situação. Depois encontrar o valor de:
> b) 6 bolas e 8 pipas.
> c) 4 bolas e 6 pipas.
> d) 2 bolas e 2 pipas.
> e) 1 bola e 1 pipa.
> f) de cada bola e depois de cada pipa.
> <u>Um aluno falou</u>: “Veja! 6 bolas e 8 pipas... É como se na Segunda-feira tivessem vendido 3 bolas e 4 pipas e lhe pagaram R$ 9,50 e na Terça-feira tivessem vendido o dobro... Quanto lhe pagou? Então é o dobro!”

E, assim, seguiu-se para as outras questões: as 4 bolas e 6 pipas representaram a soma dos dados do problema; as 2 bolas e 2 pipas, a diferença das mesmas; 1 bola e 1 pipa, a metade de 2 bolas e 2 pipas; até chegar em 1 pipa apenas e 1 bola apenas, completando um panorama de operações possíveis, que foram sendo exploradas quando bem compreendidas pelas duplas.

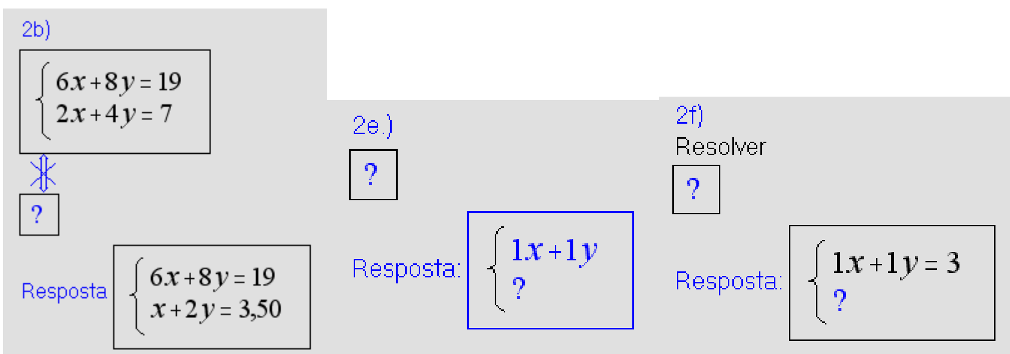
Foi necessário continuar ainda com esse tipo de exploração, perguntando quanto custaria 13 bolas e 18 pipas; 11 bolas e 16 pipas; e assim por diante, para que os alunos fossem se acostumando a realizar diversas combinações lineares, facilitando o trabalho posterior com os sistemas de equações escritos em forma simbólica.

O trabalho oral com as duplas favoreceu a experimentação no sentido de perceberem dentro de um contexto o conceito de combinação linear, tanto o princípio aditivo, quanto o multiplicativo. Adquiriu-se a experiência da idéia dessas combinações lineares até que puderam encontrar o preço de 1 bola e 1 pipa, que estava sendo pedido no problema. Mas ainda de forma oral, de forma não *ostensiva*, trabalhando com as idéias e os significados dentro de um contexto.

Um dos aspectos desse olhar pontual é de não ignorar a existência de outras técnicas de resolução, além das técnicas da substituição e adição já aprendidas pelos alunos, dentre as quais destacamos aqui a técnica da redução. De certa forma, as duplas estariam realizando de maneira introdutória a técnica da adição com um embrião da tecnologia que envolve a combinação dos princípios aditivos e multiplicativos, antes mais implícita nas técnicas.

Após esse trabalho oral, as duplas tentaram escrever algebricamente, com o auxílio do *software,* cada um dos sistemas de equações equivalentes que foram pedidos em cada item, como é possível verificar no protocolo abaixo:

Técnicas: Modelação e Redução



Protocolo 07: Observação das atividades do bloco 2, itens *b*, *e* e *f*.

No item *b* deveria encontrar o valor de 6 bolas e 8 pipas apenas, entretanto pode-se perceber que a dupla realizou a multiplicação por 2 das duas equações do sistema que representam o enunciado $\begin{cases} 3x+4y=9{,}50 \\ x+2y=3{,}50 \end{cases}$.

Nesse caso, a dupla realizou a combinação linear das duas equações, o que não estaria errado, mas logo modificou sua resposta, com a ajuda do *software*, realizando a combinação linear apenas da primeira equação e copiando a segunda equação sem que houvesse a necessidade de multiplicá-la por 2 também.

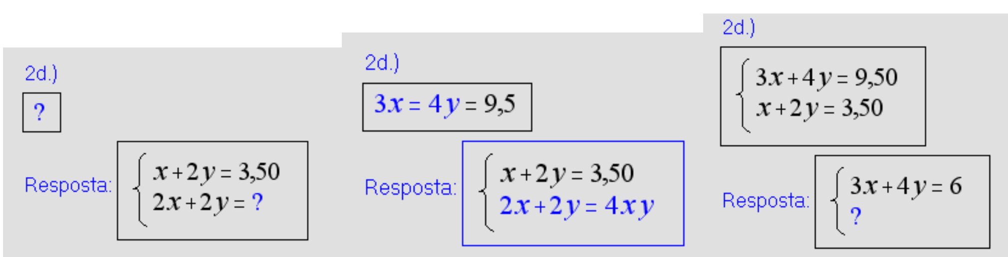
No item *e,* os alunos deveriam encontrar o valor de 1 bola e 1 pipa, e nessa ocasião uma dupla teve dificuldades para escrever a combinação linear correspondente, apenas representando algebricamente a soma dessas duas incógnitas que correspondiam à bola e à pipa com coeficientes 1, sem encontrarem o resultado dessa soma.

Por último, no item *f* os alunos deveriam encontrar, dentre os sistemas formados nos itens anteriores, qual deles era a melhor opção para se chegar a uma única incógnita. Uma das duplas utilizou o mesmo critério para resolver o exercício por meio da técnica da substituição, em que se escolhe o sistema de coeficientes menores para se isolar uma incógnita. Com isso, essa dupla não seguiu o mesmo raciocínio utilizado oralmente, por meio de combinações lineares como se esperava.

A maioria das duplas sabia com qual equação iria fazer a combinação linear, mas ainda não estava claro para elas que deveriam realizar a operação nos dois membros, inclusive com o termo independente. Copiavam uma equação e depois substituíam a outra por uma combinação linear desejada, mas com algumas dificuldades, como é possível observar no protocolo seguinte.

O item *d* pedia o valor de 2 bolas e 2 pipas. Assim, no protocolo 08, a dupla 1 subtraiu apenas os coeficientes dependentes do sistema do enunciado, deixando de subtrair também o coeficiente independente, e o *software* acusava erro. Após várias tentativas, essa dupla percebeu que deveria subtrair as duas equações do enunciado, membro a membro, inclusive os termos independentes, assim como havia realizado oralmente.

Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3
Técnica: Redução	***Técnica: Redução***	***Técnica: Redução***



Protocolo 08: Observação das atividades do bloco 2, item *d*.

Foi possível notar também que a dupla 2, protocolo 08, após ter feito a subtração dos coeficientes dos termos independentes das duas equações do enunciado, tentou resolvê-los 2x + 2y, como se pudessem somá-los obtendo o resultado 4xy. Nesse caso, trata-se de um erro conceitual, pois os alunos poderiam estar se confundindo por não terem ainda estabilizado as operações de adição e de multiplicação de monômios. O sinal de igual, para esta dupla, é considerado em termos de uma resposta, ou seja, o sinal representa um resultado e não uma relação de equivalência nesta equação. De acordo com Booth (1994), alguns alunos têm certa dificuldade em interpretar uma expressão algébrica como solução de problemas, em virtude do sinal de igualdade não representar um resultado.

Ainda no protocolo acima, é possível perceber que a dupla 3 fez o inverso do que fez dupla 1, copiando os mesmos coeficientes dos termos dependentes da primeira equação e realizando apenas a subtração dos termos independentes.

O mesmo nível de dificuldade aconteceu com as outras combinações lineares pedidas nos demais itens, como, por exemplo, “qual o valor de 4 bolas e 6 pipas?”. As duplas já sabiam qual combinação linear realizar, mas quando tentavam representar algebricamente o sistema equivalente, após a combinação linear, as dificuldades apareciam. Várias tentativas foram feitas pela maioria das duplas até conseguirem chegar ao resultado esperado.

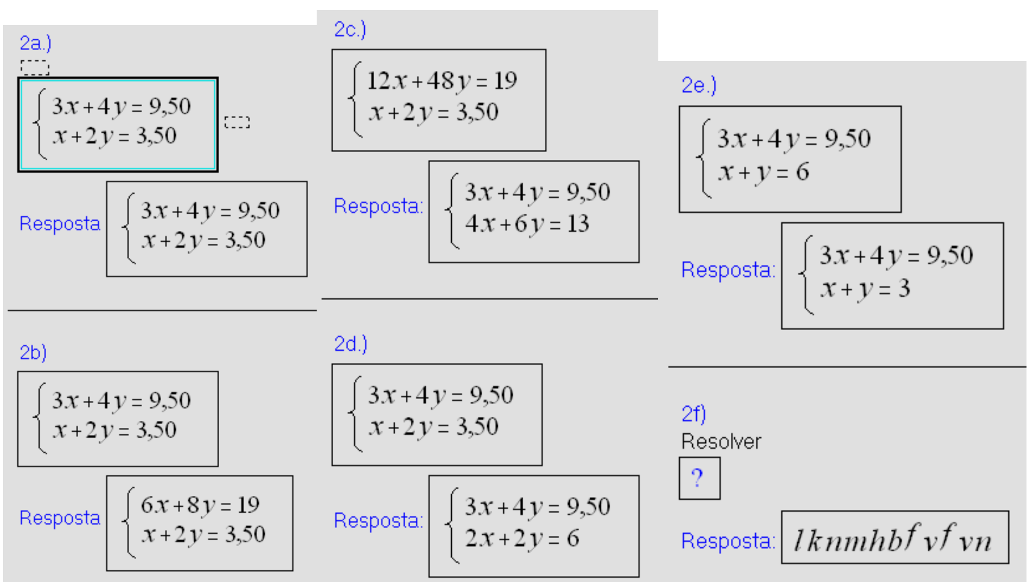
A partir desses protocolos, pôde-se perceber que as duplas passaram a trabalhar em cada item, primeiramente procurando entender o que era pedido para, depois, escrever algebricamente as equações dos sistemas correspondentes com as devidas combinações lineares.

Dessa forma, além de trabalharem com os *objetos não-ostensivos* referentes ao conceito de sistema e suas propriedades, por meio da oralidade dentro de um contexto, os alunos envolveram-se com *objetos ostensivos* da linguagem natural e algébrica dessa atividade, permitindo uma dialética entre eles. Essa mobilização possibilitou a ocorrência de processos internos de validação e, assim, foi possível observar na realização dessas tarefas o modo como os alunos fizeram suas escolhas – um aspecto didático importante entre *práxis* e *logos*, intimamente relacionado e articulado, permitindo dar forma a essa nova praxeologia matemática.

As validações permanentes do *software* possibilitaram que as duplas realizassem várias tentativas no intuito de encontrarem o sistema equivalente correto. Outros comandos do *software Aplusix* foram explicados na seqüência, necessitando de uma sessão a mais do que o previsto. Um dos comandos explicados para a autocorreção permitiu que as duplas continuassem suas atividades no dia seguinte partindo de onde pararam, clicando uma vez sobre o item “Atividades anteriores” na barra de ferramentas e, depois, uma vez em “Observar /corrigir meu trabalho”, escolhendo a data em que pararam; finalmente, um clique em “Modificar o exercício”. Desse modo as duplas puderam corrigir o que já haviam realizado anteriormente.

Os alunos perceberam, aos poucos, que ao substituir uma equação de um sistema por uma combinação linear, o novo sistema era equivalente ao anterior, isto é, eles tinham as mesmas soluções, evidenciando o discurso teórico-tecnológico pela técnica da redução. Porém, nenhuma dupla conseguiu chegar ao último item e encontrar a solução esperada do problema, após realizarem todas as combinações esperadas em cada item.

Técnicas: Modelação e Redução



Protocolo 9: Observação das atividades do bloco 2, item *a*, *b*, *c*, *d*, *e* e *f*.

Conforme foi previsto na análise a priori, as duplas tiveram bastante dificuldade em modelar o enunciado de cada item, mesmo porque, além de modelar cada item, elas teriam que realizar a combinação linear adequada, aplicando a segunda ***Técnica*** τ_4***: Redução,*** protocolo 10, introduzida pela primeira vez aos alunos, neste tipo de tarefa. Dessa forma, esse tipo de tarefa, composto por duas sub-tarefas, permitiu uma evolução de duas organizações *pontuais* para uma organização *local,* em que as duas técnicas trabalhadas combinaram-se em uma organização *local* $\{T_i/\ \tau_i/\ \theta/\ \Theta\}$, formadas por um discurso teórico-tecnológico.

Dentre as 14 duplas, 1 faltou e 10 resolveram bem mais que a metade dos itens propostos. Apenas três duplas realizaram menos que a metade dos itens. Todas as duplas foram capazes de responder aos dois primeiros itens da tarefa.

A tarefa seguinte foi direcionada para que as duplas pudessem trabalhar com as técnicas já aprendidas, adição e substituição, somadas à técnica da redução, vista no desenvolvimento deste tipo de tarefa, relacionando-as a um único discurso teórico-tecnológico.

V.3.3 Descrição e análise das atividades do bloco 3

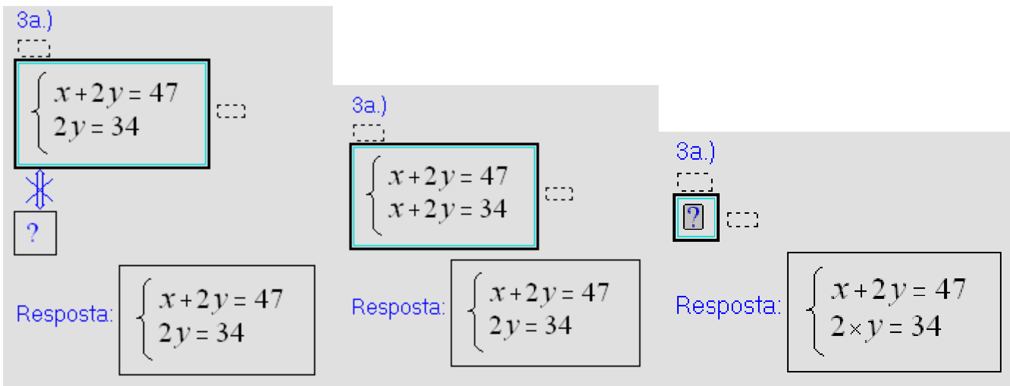
Dentro da pasta “Exercícios”, encontrada da mesma maneira que as atividades do bloco 2, descrita anteriormente, todas as duplas abriram o mesmo arquivo “Atividades” e encontraram o exercício 3, referente ao tipo de tarefa T_5 , analisado anteriormente, dando seqüência às atividades do bloco anterior. Assim como o bloco 2, estas atividades foram elaboradas e gravadas com o auxílio do editor de exercícios, EditorExercícios.exe, encontrado no *Aplusix*.

Após as instruções, as duplas abriram as tarefas deste bloco 3 e começaram a representar o sistema de equações do enunciado na forma simbólica algébrica, desta vez com menos dificuldade que a demonstrada no mesmo tipo de tarefa T_1 do bloco anterior.

Apesar de aparentemente tratar-se de uma tarefa fácil, algumas duplas encontraram dificuldades, como estava previsto na análise a priori, devido à pouca experiência com a ***Técnica*** τ_7***: Modelagem de uma situação-problema para a forma algébrica de um sistema.*** Ainda assim, esse tipo de tarefa favoreceu a exploração consciente dos *objetos ostensivos*, registros algébricos e linguagem natural.

Apresentamos abaixo o sistema de equações escrito por algumas duplas, com a ajuda do *software,* para este tipo de tarefa. Apesar de apresentarem alguns erros no início, as duplas logo conseguiram corrigi-los na resposta.

Técnica: Modelagem



Protocolo 10: Observação do tipo de tarefa $T_{1,}$ das atividades do bloco 3.

Após as duplas terem representado algebricamente o sistema de equações correspondente ao problema, foi possível iniciar sua resolução: primeiramente, discutiu-se de forma oral os procedimentos que seriam utilizados na resolução do problema com a ***Técnica*** $\boldsymbol{\tau_4}$***: Redução***, junto com a ***Técnica***$\boldsymbol{\tau_5}$***: Tentativas*** realizadas mentalmente, conforme o objetivo desses tipos de tarefas. Somente depois disso as duplas poderiam representar simbolicamente essa resolução e aplicar as técnicas já trabalhadas da adição e da substituição, que fizeram parte da sistemática do trabalho nos momentos de discussão e reflexão coletiva, de forma *não-ostensiva.*

Apresentamos a seguir alguns diálogos entre as duplas:

> <u>Dupla 1</u>: Olha, se o 2y é igual a 34, é só dividir 34 por 2 que encontramos o valor de y... que é 17!
> <u>Dupla 2</u>: Mas na equação de cima é preciso o valor de 2y e não de y... Então é só trocar o 2y por 34 que vai ficar x mais 34. Tem que dar 47.

> Dupla 3: É mesmo!? Mas qual o número que somado com 34 dá 47?
> Dupla 2: É só fazer 47 menos 34, né? É 13... Assim já temos o valor de x!

No diálogo acima é possível observar que a dupla 1 estava realizando cálculos mentais e revelando-os oralmente no uso da ***Técnica*** τ_1***: Substituição***, enquanto a dupla 2 percebeu que os termos com a variável y, nas duas equações, tinham os mesmos coeficientes e não precisaria estar isolando y. A terceira dupla só estava acompanhando o raciocínio, e continuou o seguinte diálogo:

> Dupla 4: Veja! Encontramos de outra forma o valor de y!
> Dupla 3: De que forma?
> Dupla 4: Veja bem: a primeira e a segunda equação do sistema têm o mesmo 2y, não é mesmo? Então é só subtrair uma equação da outra que o 2y que vai sumir o y... Ficamos somente com o x, que é 13... O que estávamos fazendo no exercício anterior.
> Dupla 3: Assim já temos o primeiro número pensado do problema.
> Dupla 1: E o segundo também, que é o valor de y, que nossa dupla já encontrou! É 17.

Nessa continuação do diálogo fica claro que a dupla 4 entrou na conversa e lembrou da técnica da redução utilizada na tarefa T_2 das atividades do bloco anterior (subtrair uma equação da outra), com o mesmo procedimento da ***Técnica*** τ_2***: Adição*** que exploraram em sala de aula, denominada pelo professor como técnica da subtração.

Durante as discussões, percebeu-se que algumas duplas ainda apresentavam dificuldades para entenderem a maneira como as demais estavam resolvendo o sistema de forma oral. Por isso, foi necessário trabalhar semanticamente sobre o formalismo, pensando sobre um sistema conceitual numérico, representado pelo sistema de equações formal, da seguinte forma:

> Professor: Se o dobro do número que foi pensado é igual a 34, é possível achar o valor desse número?
> Professor: O dobro de quanto que dá 34?
> Professor: Ou ainda - Qual é o número que somado com o dobro do outro número resulta 47? Ou seja: já que sabemos que 34 é o dobro do outro número, qual o número que somado a 34 resulta 47?

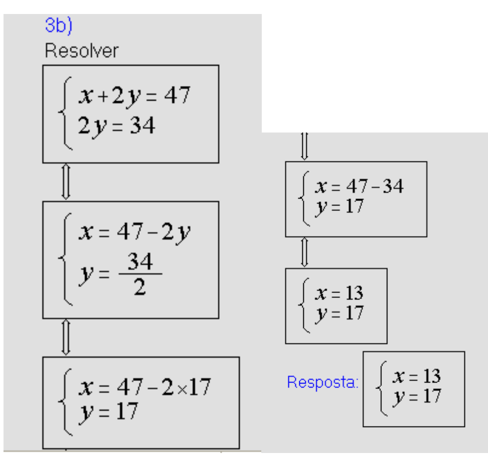
O trabalho realizado de forma oral, pela ***Técnica*** τ_5***: Tentativas***, permitiu que as duplas percebessem o tipo de raciocínio que poderiam realizar com o registro algébrico, da mesma forma que estavam realizando no tipo de tarefa T_4 do bloco anterior, mantendo a equivalência dos sistemas, mas utilizando desta vez a ***Técnica*** τ_1***: Adição ou Técnica*** τ_2***: Substituição*** além da ***Técnica*** τ_4***: Redução***, como mostra os protocolos a seguir. A ***Técnica*** τ_3***: Comparação,*** em nenhuma vez foi usada.

A tentativa e erro é uma técnica de resolução elementar, que pode fornecer uma base intuitiva para métodos de resolução mais estruturadas. Em seus estudos, Kieran (1980), relata que há evidências de que estudantes que usam o procedimento da tentativa para resoluções algébricas, como um expediente inicial, possuem uma noção mais elaborada do conceito de equivalência, do que aqueles que nunca a usam.

No protocolo abaixo, percebemos que a dupla 5 permaneceu com os sistemas equivalentes, mas começou isolando x na primeira equação e calculando o valor de y na segunda equação, depois substituindo-o na primeira equação com x já isolado. É importante ressaltar, mais uma vez aqui, um processo mecânico no uso das técnicas já aprendidas, quando se verificou que essa mesma dupla tentou resolver o sistema pelo processo da substituição, isolando a variável de coeficiente 1, mas mantendo desta vez a equivalência de sistemas, com as duas equações ligadas pela chave.

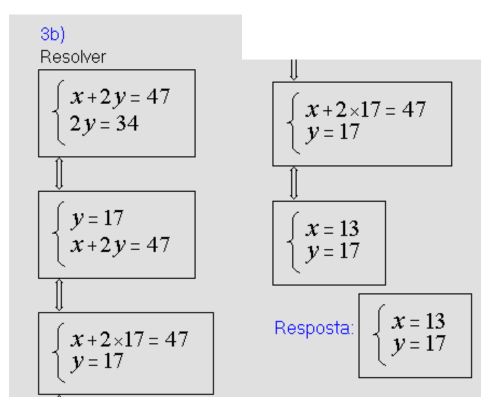
<u>Dupla 5</u>

Técnica: Substituição



<u>Dupla 6</u>

Técnica: Substituição



Protocolo 11: Observação do tipo de tarefa T_2, do bloco 3.

O mesmo processo mecânico foi constatado na resolução da dupla 6, já que inicia pela primeira equação tentando isolar uma incógnita y, mas logo em seguida troca a ordem dessas equações resolvendo de acordo com os procedimentos realizados oralmente.

Outras duplas, que já sabiam os resultados das incógnitas, apenas substituíram seus valores sem tentarem resolver algebricamente, mas sempre mantendo as chaves dos sistemas, da mesma maneira que o tipo de tarefa anterior do resolver com a ***Técnica*** $\tau_{4:}$ ***Redução,*** como é possível verificar nos próximos protocolos. Desta forma, realizaram a passagem do nível de desempenho rápido de resolução para a organização das idéias de sistema equivalentes, sem que a técnica se sobreponha em relação ao entendimento das propriedades e da estrutura do sistema.

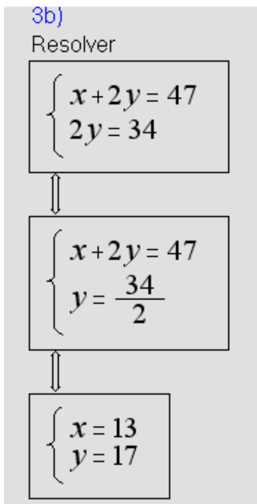
Percebemos neste tipo de tarefa, por meio dos procedimentos utilizados pelas duplas a evolução de praxeologias *pontuais* para uma praxeologia *local* justificada pelo mesmo discurso teórico-tecnológico das três técnicas utilizadas. Isso ocorreu quando os alunos utilizaram as técnicas relacionadas entre si para resolver o sistema de equações lineares. As duplas resolveram um mesmo sistema com procedimentos que fazem parte da técnica da substituição, pelo fato de isolarem uma letra, o que também ocorre na técnica da redução.

No entanto, a dupla 7 do protocolo 12, apenas escreveu a divisão realizada para encontrar o valor de y, mantendo a equivalência dos sistemas. No próximo passo, ela substituiu o valor de x, sem detalhar os procedimentos algébricos realizados para encontrar esse valor, o que parece ser uma possível tentativa de usar a técnica da substituição.

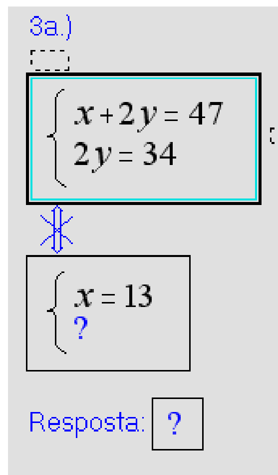
A dupla 8 substituiu apenas o valor de x, talvez por tentar resolver pela técnica da adição, mas não conseguiu escrever de forma simbólica os processos utilizados oralmente. E a dupla 9, por sua vez, substituiu diretamente os resultados antes mesmo de escrever qualquer técnica de resolução, possivelmente pelo mesmo motivo que a dupla 8.

Todas as duplas que conseguiram resolver o sistema de equações utilizaram ***Técnica*** $\tau_{2:}$ ***Substituição***, sendo que algumas delas substituíram o valor de 2y na primeira equação e encontraram o valor de x, enquanto outras acharam o valor de y primeiro para depois achar o de x. Nenhuma dessas duplas resolveu totalmente o sistema pela ***Técnica*** τ_{1}: ***Adição***, a não ser oralmente, utilizando a soma algébrica entre as duas equações. Nem mesmo a dupla que sugeriu essa técnica realizou algebricamente o que havia sido discutido, optando por escrever diretamente o resultado das incógnitas.

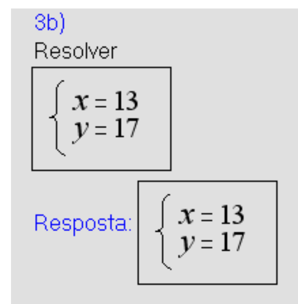
<u>Dupla 7</u> — ***Técnica: Indefinida***



<u>Dupla 8</u> — ***Técnica: Indefinida***



<u>Dupla 9</u> — ***Técnica: Indefinida***



Protocolo 12: Observação dos dois tipos de tarefas do bloco 3.

No entanto, todas as duplas observaram, nos cálculos mentais realizados, que independentemente das técnicas utilizadas elas possuíam a mesma justificativa, ao chegarem numa única solução do sistema. Desta forma, ocorreu um avanço notável, pois cada dupla apresentou diferenças ao dar sentido às ações que estavam realizando algebricamente.

Com isso, a maioria das duplas apresentou seus próprios procedimentos algébricos utilizados na resolução do problema, descentrando-se dos automatismos por meio de uma coordenação consciente dessas mudanças de técnicas, com o mesmo discurso teórico-tecnológico, dessa vez de maneira explícita. As duplas evitaram, assim, uma imagem distorcida devido ao uso de técnicas com suas justificativas implícitas, que agora se tornavam mais evidentes confirmando previsões da análise a priori.

Por isso, as variáveis didáticas desta tarefa, que foram os coeficientes das equações do sistema mantendo uma única incógnita em uma das equações do sistema de coeficiente igual ao da outra equação, proporcionou o cálculo mental e oral, dando sentido ao uso da ***Técnica*** τ_{1}***: Adição, Técnica*** τ_{2}***: Substituição, Técnica*** τ_{4}***: Redução e Técnica*** τ_{5}***: Tentativas.***

Diante do que foi observado, consideramos que o objetivo principal deste bloco de atividades foi atingido. Foi possível observar a técnica de redução do sistema, em que as duplas puderam estabelecer relações com as outras 3 técnicas que enriqueceram seu significado, presentes no mesmo discurso teórico-tecnológico, de forma a dar sentido às ações que foram realizando.

As possibilidades da organização praxeológica do professor nesses dois tipos de tarefas T_i ampliaram as relações das técnicas de resolução das tarefas apresentadas, associadas ao discurso teórico-tecnológico, o qual foi abordado de forma explícita e no decorrer da utilização dessas técnicas.

Dentre as 14 duplas envolvidas nesta pesquisa, 2 faltaram e 11 resolveram bem metade ou mais da metade dos exercícios propostos. Dentre as 11 duplas somente 4 resolveram algebricamente apenas o item ‘a’, passagem da linguagem escrita para a simbólica. No item ‘b’, que pedia a resolução do sistema, dentre essas mesmas 4 duplas três resolveram o sistema mentalmente, colocando apenas as respostas, como mostrou o protocolo, e apenas uma delas deixou de resolver o sistema. Foi possível observar também que apenas 1 dupla dentre todas não realizou nem o item ‘a’ nem o item ‘b’, demonstrando desinteresse pela tarefa.

V. 4 Resultados da experimentação

Na tabela 2 são apresentadas, para cada um dos blocos de atividades, as técnicas que os alunos utilizaram para resolvê-las.

Para resolver as situações-problema sobre sistema de equações lineares, as duplas utilizaram várias técnicas, mas todas essas técnicas são baseadas na idéia fundamental para resolver sistemas de equações, que consiste em transformá-los em outro sistema equivalente, mas com algumas incógnitas a menos em qualquer uma de suas equações. Essas técnicas são justificadas por um mesmo discurso teórico-tecnológico, em que basta identificar uma coordenação consciente dessas mudanças de técnicas com o mesmo discurso teórico-tecnológico para evitar uma imagem distorcida da aplicabilidade de cada uma delas.

BLOCOS / ***TÉCNICAS*** τ_i	***1***	***2***	***3***
$\tau_{1:}$ *Adição*	X		X
$\tau_{2:}$ *Substituição*	X		X
$\tau_{3:}$ *Transposição*	X		
$\tau_{4:}$ *Redução*		X	X
$\tau_{5:}$*Tentativas*			X
$\tau_{6:}$ *Modelagem de uma situação-problema*		X	X

Tabela 02: Panorama dos blocos de atividades relacionados com as técnicas utilizadas.

Na figura abaixo, observa-se a evolução das duplas desde a fase do pré-teste, referente às equações com uma variável, até o último bloco de atividades sobre sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis, que compõem a seqüência didática junto ao *software*:

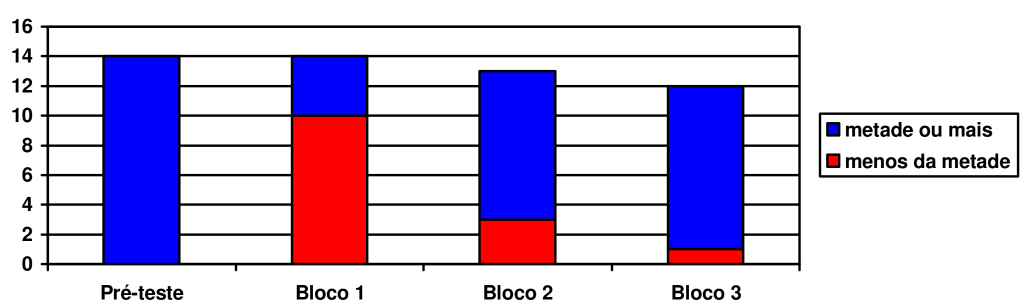


Figura 07: Quantidade de duplas que acertaram as atividades de cada bloco

Cada barra do gráfico indica os blocos das atividades realizadas com as duplas na sala de informática, desde o pré-teste até o bloco de atividades 3. A altura de cada barra indica a quantidade de duplas que realizaram as atividades, sendo que a cor azul representa a quantidade de duplas que tiveram um bom desempenho, resolvendo metade ou mais das questões; e a vermelha, a quantidade de duplas que apresentaram dificuldades, resolvendo menos que a metade das questões de cada atividade.

Dessa maneira, foi possível notar que na fase dos pré-testes 100% das duplas acertou mais que a metade dos exercícios propostos, ou seja, um índice considerado satisfatório para que a seqüência de tarefas desta pesquisa pudesse ser aplicada.

Ao introduzir as atividades do bloco 1, sobre sistemas de equações lineares determinados, indeterminados e impossíveis, o índice de acertos baixou consideravelmente: de um total de 14 duplas, apenas 4 tiveram um bom desempenho, realizando metade ou mais dos exercícios nessa atividade. Poucas duplas puderam reconhecer os sistemas determinados, indeterminados e impossíveis e chegar a uma solução devido à rigidez das técnicas aprendidas em sala, em que eram separadas as duas equações que formavam o sistema, sem que houvesse uma interconexão entre elas. E quando os alunos escreviam duas equações juntas, ligadas por uma chave, essas duas equações não eram equivalentes. Nesse ponto, encontrou-se a ausência do conceito de equivalência de sistemas de equações e talvez da representação equivalência de sistemas utilizada pelo *software*, o que dificultou a aplicação das técnicas já estudadas.

Nas atividades do bloco 2, o número de acertos aumentou, subiu de 4 para 10 o número de duplas que tiveram um bom desempenho, realizando metade ou mais dos exercícios. A ***Técnica*** τ_4***: Redução*** proporcionou às duplas que se descentralizassem da rigidez das técnicas e percebessem o significado dos sistemas equivalentes, tornando mais claro o conceito de sistema de equações lineares, para o qual deveria haver uma interconexão entre as equações do sistema. Ainda neste tipo de tarefa foi introduzida a transformação de registro da linguagem natural para a algébrica, favorecendo um trabalho com diferentes tipos de *objetos ostensivos*, no intuito de os alunos identificarem o mesmo objeto matemático a partir de diferentes representações.

Finalizando a análise das atividades com o bloco 3, percebemos que ainda houve um pequeno aumento nos acertos das duplas que tiveram bom desempenho. Foram trabalhados, primeiramente, alguns tipos de *objetos ostensivos*, além da representação mental e oral com ***Técnica*** τ_5***: Tentativas***, dando significado às ações realizadas em cada passo das técnicas já aprendidas, principalmente a ***Técnica*** τ_2***: Substituição*** e ***Técnica*** τ_1***: Adição*** junto com a ***Técnica*** τ_4***: Redução***, proporcionando o esclarecimento de seu *discurso teórico-tecnológico* junto aos objetos *não-ostensivos*, para depois permitir que as duplas trabalhassem com os outros tipos de *ostensivos*, da representação simbólica.

> (...) As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas (DUVAL, 2003, p. 31).

Concordamos com Azarquiel (1993), quando diz que o trabalho com a álgebra deve incluir tanto as técnicas informais como as técnicas formais, iniciando com as técnicas informais e através de um contexto adequado ir passando, paulatinamente, as técnicas mais formalizadas. Booth (1994) aponta na mesma direção, quando diz que os alunos ao aprender a usar os procedimentos mais formais, primeiro devem perceber a sua necessidade. Ressalta que se deve dispor aos alunos de técnicas informais e que o valor dessas técnicas sejam reconhecidas e discutidas, tentando usá-las em outros tipos de tarefas, da mesma espécie, porém mais difíceis até chegar a reconhecer a necessidade de um procedimento mais geral.

Nesta perspectiva, Mason (1996) afirma que a Matemática evolui na medida em que possibilita resolver determinados problemas através de uma sistematização de regras, criando assim uma rotina de procedimentos. E ressalta que se deve tomar o cuidado ao privilegiar a técnica em virtude do desejo de só obter êxito em curto prazo, através da valorização de um algoritmo, para não divergir com o raciocínio lógico em alcançar o conhecimento em longo prazo, com o desenvolvimento do pensamento matemático, entendido como o ato de reconhecer, relacionar, observar regularidade e generalizar.

Desta forma, as técnicas trabalhadas, para sistemas determinados com o *software*, tiveram as mesmas justificativas que enriqueceram os significados, apresentando apenas diferenças na forma de dar sentido às ações que iam realizando, principalmente quando utilizados vários *objetos ostensivos*, como as representações da linguagem natural, oral e simbólica. Em conseqüência disso, os *objetos não-ostensivos,* como idéias, conceitos e intuições, que existiram institucionalmente, favoreceram o esclarecimento das técnicas utilizadas, tanto da adição quanto da subtração e da redução, realizada com a representação algébrica, possibilitando, assim, uma dialética entre elas.

Por conseguinte, pode-se considerar tais resultados satisfatórios, uma vez que as duplas trabalharam com diferentes tipos de tarefas nos três blocos dentro de organizações praxeológicas *locais*, ou seja, OM = $\{T_i/ \tau_i/ \theta/ \Theta\}$ com um mesmo *discurso teórico-tecnológico*. Acredita-se que, com isso, as atividades proporcionaram às duplas uma familiarização com essas diversos *tipos de tarefas* e *técnicas*, deixando evidente o *discurso teórico-tecnológico* e o conceito de equivalências de sistemas de equações, que antes permanecia implícito.

VI. CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Nesta pesquisa buscou-se investigar dispositivos didáticos e suas incidências relativas às técnicas de resolução de sistemas de equações lineares em nível de 7ª série do Ensino Fundamental. Para isso, foram utilizados referenciais teóricos desenvolvidos por pesquisadores franceses em Didática da Matemática, em particular a Teoria Antropológica do Didático – TAD, de Chevallard (1999), a Engenharia Didática proposta por Artigue (1990) e o modelo de análise teórica proposto por Henry (2006).

Para que fosse possível chegar aos objetivos desta pesquisa, buscou-se responder a duas questões levantadas em seu início:

1. Com relação a sistema de equações lineares, quais organizações praxeológicas são ativadas nos livros didáticos utilizados nas aulas e com o uso do *software Aplusix* por alunos de 7ª série?

2. Quais tarefas, técnicas e discursos teórico-tecnológicos que os alunos utilizam para resolver sistemas de equações lineares segundo as organizações praxeológicas encontradas na instituição escolar?

As técnicas identificadas em livros didáticos e práticas de docentes foram oito, a saber: a técnica da substituição, adição, comparação, redução, tentativas, transposição, modelagem e gráfica. O discurso teórico-tecnológico que justifica as quatro primeiras técnicas é o mesmo: *ao realizar combinações lineares com o sistema de equações, o seu conjunto solução não se altera.* Mas na realização dos passos de cada uma delas, apenas a técnica da redução torna evidente esse discurso, pois a estrutura do sistema se mantém a cada passo depois de aplicado o princípio aditivo e multiplicativo.

As técnicas da substituição, adição e comparação não mantêm essa estrutura. Elas apresentam características comuns, já que nas três técnicas há primeiramente a redução para, então, se fazer a resolução com uma equação de uma só incógnita.

O princípio de funcionamento do *software Aplusix* é o conceito de sistemas equivalentes em que se deve manter a estrutura do sistema, ou seja, as duas equações ligadas por uma chave a cada passo de sua resolução, assim como na técnica da redução. Portanto, ao utilizar esse dispositivo, o discurso teórico-tecnológico, que fundamenta as técnicas utilizadas, precisaria estar claro aos alunos.

A organização matemática – OM – das aulas, comparada à OM dos livros didáticos, teve reduzido o número de tipos de tarefas e técnicas, conforme as análises no capítulo IV. Dentre as cinco técnicas – modelagem, substituição, adição, comparação e tentativas – abordadas nos livros didáticos adotados durante as aulas trabalhou-se apenas com as técnicas de substituição e adição, em um único tipo de tarefa isolado, na forma $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$, onde a, b *e* c $\in$ Z com a e b ≠ 0, encadeado arbitrariamente e independente das duas técnicas utilizadas.

Dessa forma, a característica da OM encontrada nas aulas foi a de enfatizar os aspectos mais rudimentares "do momento do trabalho de técnica" (Chevallard, Bosch e Gascón, *apud* Gascón, 2003), que é chamado de *tecnicismo*. O ensinar e o aprender Matemática identificam-se com ensinar e aprender técnicas algorítmicas no reducionismo que isso implica.

Apesar dos PCN salientarem que não é desejável desenvolver, no 3º ciclo (5ª e 6ª série), um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações, as técnicas convencionais de resolução de sistema de equações apareceram tanto no livro de 6ª série quanto no de 7ª série.

O discurso teórico-tecnológico que esclarece as técnicas, tanto nos livros didáticos quanto nas aulas, apareceu de forma aleatória sem ser abordado explicitamente ou com uma justificativa evidente das técnicas utilizadas. Certamente por isso, conforme as análises no capítulo V, os alunos não foram capazes de mostrar, com o uso do *software Aplusix*, que tinham domínio de tecnologias que justificassem as técnicas utilizadas na resolução de sistemas.

Além disso, os alunos encontraram dificuldades na resolução de tipos diferentes de sistemas presentes no *software*, conforme sua classificação: determinados, indeterminados e impossíveis, talvez pelo fato de os sistemas indeterminados e impossíveis não terem sido abordados em nenhum dos dois dispositivos utilizados anteriormente a este.

Com o intuito de aprofundarmos ainda mais as investigações das técnicas utilizadas pelos alunos durante o uso do dispositivo, elaboramos uma seqüência didática, de modo que os alunos trabalhassem outros tipos de tarefas e técnicas, nas quais apresentaram baixo índice de acertos no pré-teste realizado e evidenciado em alguns dos itens encontrados nas análises epistemológicas do capítulo I, que foram*: modelar o enunciado de um problema, realizar equivalências de equações e verificar se um par ordenado é a solução de um problema.*

Foram propostos dois tipos de tarefas diferentes, além dos tipos de tarefas para sistemas determinados, indeterminados e impossíveis, citados anteriormente. Para resolver esses tipos de tarefas, os alunos poderiam utilizar sete técnicas: modelagem, adição, substituição, comparação, redução, transposição e tentativas, dentro de organizações praxeológicas *locais*, ou seja, OM = $\{T_i/\ \tau_i/\ \theta/\ \Theta\}$ com um mesmo *discurso teórico-tecnológico*.

Esses tipos de tarefas levaram em conta duas características: em primeiro lugar, eles foram desenvolvidos a partir de algum contexto familiar do aluno, e, depois, foram adaptados do ponto de vista algébrico mais amplo possível, isto é, daquele que coloca em relação incógnitas e equações com variáveis e funções.

Momentos de discussão e reflexão coletiva fizeram parte da sistemática do trabalho, em que os alunos eram estimulados a resolver por tentativa e erro uma técnica de resolução elementar, fornecendo uma base intuitiva para métodos de resolução mais estruturados, segundo Kieran (1980). O acompanhamento de cada dupla de alunos foi realizado por meio de gravações das atividades realizadas no *software*, gravações das discussões coletivas em fita magnética e observações. Tais gravações permitiram que os processos e as descobertas dos alunos voltassem a eles como objetos de reflexão, disponibilizados pela ferramenta de auto-correções encontrada no *software*, conforme análises no capítulo V.

Pudemos observar que para resolverem sistemas de equações lineares foi de fundamental importância que os alunos tivessem as noções de solução de um sistema e de sistemas equivalentes. A importância de conhecer essa noção refletiu diretamente na aplicação das técnicas de resolução de sistema de equações. Para os alunos, sistema de equações significava apenas aplicar técnicas para encontrar o valor de x e de y das duas equações do sistema, em que às vezes encontravam apenas o valor de y ou de x, esquecendo da outra incógnita. Além disso, o significado de interação, ligação ou inter-relação entre as equações, como foi observado no significado de sistemas, capítulo III, não fazia muito sentido para esses alunos.

Por essa razão, quando as duplas não sabiam resolver um sistema por meio de sistemas equivalentes com as técnicas aprendidas em aula, e acabavam por escrever uma equação em cima e a transformação dessa mesma equação abaixo, formando um sistema não equivalente ao anterior, ou seja, quando resolviam separadas as equações sem haver ligação entre elas, desvinculavam-se de elementos ostensivos e não-ostensivos fundamentais desses sistemas, evidenciando assim a importância do conceito de equivalência de sistemas para o uso adequado dessas técnicas. Segundo Chevallard (1999), qualquer que seja o tipo de *tarefas T*, a *técnica* τ, relativa a *T* está sempre acompanhada de ao menos um embrião, ou mais freqüentemente, de um vestígio de *tecnologia* θ.

Analisando as produções dos alunos, após a experimentação das atividades propostas a eles com outros tipos de tarefas e técnicas, foi possível identificar progressões, as quais levaram algumas duplas a conjecturas, elaborando e testando suas concepções, propiciando um ambiente de pesquisa na sala de informática e permitindo que dessas duplas esclarecessem, aos poucos, o discurso teórico-tecnológico necessário ao entendimento das técnicas estudadas anteriormente por um único tipo de tarefa, para sistemas determinados. No entanto, para sistemas indeterminados ou impossíveis, em que encontraram dificuldade, a necessidade de domínio de suas tecnologias era maior.

Os resultados obtidos na investigação dos dispositivos mostraram que a construção dos conhecimentos por via de determinados *objetos ostensivos*, presentes nas técnicas da adição, substituição e comparação, não tornou possível evidenciar o seu discurso teórico-tecnológico justificativo. Assim, verificamos que os *objetos não-ostensivos,* a idéia de combinações lineares de duas equações e o conceito de equivalência de sistemas emergiram somente com a manipulação *dos objetos ostensivos*, dando significado às técnicas já aprendidas. Nesse caso, integrou-se o momento do trabalho da técnica com o momento teórico-tecnológico. Para Chevallard, Bosch e Gascón (2001), o momento do trabalho da técnica apresenta duas características essenciais:

> (a) No processo de estudo de um tipo de problema, o momento do trabalho da técnica se torna criador de novos objetos matemáticos. Nele, surgem novas noções, novas técnicas e novas relações entre objetos que podem ser considerados, ao mesmo tempo, como novos objetos.
> (b) O momento do trabalho da técnica completa o estudo exploratório e integra, de maneira natural, esse momento e o momento tecnológico-teórico no processo. Pode-se perceber, com isso, que a fragilidade dessa dimensão da atividade matemática criaria, por um lado, um abismo entre a exploração pontual e rígida de problemas e, por outro, os dispositivos "teóricos" (justificativos e interpretativos) (p.289).

Esse abismo citado pelos autores confirmou-se com os resultados encontrados nas análises dos livros didáticos e das aulas realizadas nessa turma de 7ª série experimentada. Uma escassa atenção ao trabalho de manipulação dos objetos *não-ostensivos* e um peso excessivo na exigência de interpretação do trabalho realizado com os *ostensivos*. O resultado disso foi o formalismo algébrico que não falou por si só, pois os alunos, ao manipular esses ostensivos, não foram capazes de explicitar o significado das expressões algébricas manipuladas quando resolveram os sistemas de equações lineares por meio de equivalências junto ao *software*.

Acreditamos que com esse trabalho foi possível conhecer mais sobre os elementos do processo da organização praxeológica, referentes às técnicas de resolução de sistema de equações lineares, induzidos nos dispositivos didáticos com uma turma de 7ª série do Ensino Fundamental, atingindo, desta forma, o objetivo principal desta pesquisa.

No desenrolar desta pesquisa enfrentaram-se muitas outras questões que valeriam a pena serem investigadas. No entanto, ao determos em duas questões apenas, com um olhar mais pontual, foi possível perceber que o momento do trabalho da técnica com diferentes dispositivos didáticos pode dar vida ao conceito, assim como a dinâmica que articula entre si organizações matemáticas com outras, respondendo, desta forma, às questões problemáticas que motivaram ou originaram essa pesquisa.

ANEXO 1

Transcrição das aulas realizadas pelo professor regente da turma analisada:

1ª Aula – dia 12/09/05

a) $\begin{cases} x+y=20 \rightarrow x+y=20 \\ x-y=8 \qquad x=20-y \end{cases}$

$20-y-y=8$

Professor: *Só temos a variável y... Agora vamos encontrar o valor do y.*

P*: -1y com -1y?*

O professor aguarda, então, que algum aluno lhe responda enfatizando o 1 com a letra y.

Alunos: *-2y.*

P: *Com a variável negativa, trocamos o sinal da equação: 2y é igual a*...

O professor aguarda a resposta.

A: *12.*

P: *Está resolvido o sistema?*

A: *sim, não...* (os alunos divergem)

P: *Não, agora temos que achar o valor de x, correto?*

P: *Agora que já temos o valor do y, poderemos encontrar o valor de x.*

P: *x = 20 – 6, x é igual a*...

O professor aguarda a resposta.

A: *14.*

P: *E a solução?*

A: *14 e 6.*

b) $\begin{cases} 3x-y=18 \\ x+y=10 \end{cases}$

Professor: *Na letra b, qual das duas equações podemos isolar com mais facilidade?*

Alunos: *x + y = 10.*

P: *A segunda, não é? " x + y = 10". Aqui tanto x como y são positivos, por isso tanto faz... Vamos isolar quem?*

A: *x.*

P: *x de novo?*

P: *x = 10 – y. Agora nós escolhemos a segunda, então temos que substituir na primeira, certo?*

$$\begin{cases} 3x - y = 18 \\ x + y = 10 \rightarrow x + y = 10 \end{cases}$$
$$x = 10 - y$$

P: *Precisamos copiar 3x – y = 18.*

P: *3x... "3 vezes x"... Quem é x? 10 – y e continuamos copiando –y = 18.*

P: 3 vezes 10?

A: 30.

P: Mais com menos?

A: Menos!

P: 3 vezes y?

A: 3y.

Dessa maneira, o professor prossegue a resolução, falando em voz alta cada passo escrito no quadro-negro de forma a criar uma interação com os alunos, fazendo algumas perguntas ou mesmo esperando que eles completem a sentença começada por ele.

c) $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - 3y = -26 \end{cases}$

Professor: *Na letra c, qual das equações está melhor para isolarmos?*

Alunos: *A de cima... a de baixo*... (os alunos discordam entre si)

P: *Qual delas?*

A: *A de baixo... a de cima*... (continuam discordando)

P: *Se escolhermos a de cima, teremos que escolher qual variável?*

A: *y.*

P: *Se escolhermos a de baixo, vamos escolher x, não é?! Por quê? São as variáveis que têm coeficiente 1, certo? Aqui tanto faz também. A primeira?*

P: *2x + y = -3... Então aqui temos que escolher quem?*

A: *y.*

P: *y.*

P: *y = -3 -2x. Escolhemos a primeira e isolamos o y. Agora devemos substituir no lugar de y!*

$$\begin{cases} 2x + y = -3 & \rightarrow 2x + y = -3 \\ x - 3y = -26 & \quad y = -3 - 2x \end{cases}$$

P: *x – 3 vezes o y.*

P: *No lugar do y, -3.*

P: *-2x igual –26...*

P: *x, menos com menos?*

A: *mais!*

P: *3 vezes 3?*

A: *9.*

P: *Menos com menos?*

A: *mais!*

P: *3 vezes 2x?*

A: *6x.*

P: *igual a –26.*

....

....

....

P: *Solução -5, 7.*

A: *Daria a mesma coisa se tivéssemos escolhido a segunda equação!*

P: *Teria que dar!*

Os alunos produzem risos.

P: *Ok, vejam bem, quando digo que temos a opção de escolher uma ou a outra, não importa qual você escolha, mas a solução tem que ser a mesma. Mesma coisa é o método, se vocês resolverem pela substituição ou adição, não tem problema, o resultado vai ser o mesmo porque se é o mesmo sistema, tem que ser a mesma solução.*

d) $\begin{cases} x + 5y = -24 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$

Professor: *E na letra d? Em qual das equações é melhor nós isolarmos a variável?*

Alunos: *x!*

P: *Agora vamos para a primeira x + 5y = -24... Vou isolar quem?*

A: *x.*

P: *x = -24 menos...*

A: *-5y.*

P: *Certo! Escolhemos a primeira e isolamos o x. Agora vamos substituir na segunda equação*.

P: *3 vezes x.*

A: *-24...*

P: *3 vezes - 24 - 5y.*

A: *-5y.*

P: *- 2y = -4.*

P: *3 vezes... Mais com menos...*

P: *Solução? -4,-4.*

P: *Vejam bem, utilizamos o método da adição... Mudamos o método, mas a solução é a mesma, tá? Vamos deixar aqui este mesmo sistema, mas vamos mudar o método.*

O professor volta ao exercício de letra “a” e o refaz pelo Método da Adição:

P: *O que é adição?*

A: *É mais.*

P: *É mais. Então quando você faz pelo método da adição, você tem que somar os sistemas. Só que aqui, quando formos somar, temos que observar que fora da soma vamos cancelar uma das variáveis. Se somarmos x + x, quanto dá?*

A: *2x*.

P*: Se eu somar +y com – y?*

A: *Cancela...*

P: *Então, como isso cancelou uma das variáveis, podemos dizer que ele está pronto para adição.*

P: *Nós vamos somá-lo agora, já... Nós vamos somar, sinal de +, uma continha, 20 + 8, 28.*

$$+\begin{cases} x + y = 20 & \rightarrow x + y = 20 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

$$-----$$

$$2x = 28$$

P: *Agora temos que achar o x, certo?*

P: *x vai ser + 28 por 2... Quanto dá?*

A: *14.*

P: *Não era isso que dava?*

P: *Agora precisamos achar o y. Para achar o y, eu tenho que olhar aqui em cima no sistema. Onde está melhor? Onde o y está positivo ou onde ele está negativo?*

A: *Positivo!*

P: *Então, vou copiar esta equação aqui: x + y = 20. Como nós já temos o valor de x, 14 + y = 20. Agora temos que achar o valor de y, y = 20 – 14.*

P: *Quanto dá?*

A: *6.*

P: *A solução continua sendo 14 e 6?! Não era isso que dava?*

O professor passa outros exercícios para serem resolvidos pelo método da adição e ressalta:

P: *Esse já pode somar? Para saber isso, o que eu tenho que fazer?*

O professor faz a pergunta e ele mesmo responde.

P: *Ver se na hora da soma vai ser cancelada alguma variável, ok?!*

Assim, o professor resolve todo o exercício da mesma forma que o anterior, descrevendo oralmente toda a passagem, também colocada no quadro-negro.

Ele escreve, então, o exemplo de um sistema em que, logo de início, percebe-se que não há como somar suas equações.

$$\begin{cases} 5x + y = 30 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

P: *E aqui? Posso somar?*

A: *Pode.*

P: *Vamos cancelar quem?*

Nenhum aluno responde.

P: *Então? Quem a gente cancela?*

A: *Nenhum!*

P: *Então eu não posso somar este daqui, tudo bem?*

P: *Neste caso aqui ainda está fácil, nós temos x coeficientes 5 e 2, coeficientes diferentes, e y 1 e 1 neste caso são iguais... Eu devo cancelar quando?*

P: *Quando eles são opostos: +3 com -3, +1 com –1, ok?*

P: *Vejam... Para eu deixar um deles com o sinal oposto, o que eu deveria fazer?*

A*: vezes -1?*

P: *Só trocar de sinal. Aí devemos trocar o sinal de quem?*

P: *Quando vai trocar o sinal, você escreve um outro sistema. Vejam!*

P: *Neste caso, eu troquei a 2ª e copiei a 1ª.*

A: *Professor, aí vai ficar assim -2x – y =*

P: *-6!*

P: *Precisa trocar todos os sinais.*

A*: Aí vai poder trocar tudo?*

P: *Não. Espera lá... 5x + y = 30. Esses nós não mexemos!*

P: *Agora aqui -2x – y = -6.*

$$\begin{cases} 5x + y = 30 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

P: *Aí você vai mexer só nesses dois.*

A*: Ah!*

P: *Depois, temos que somar de 2 em 2, só o sistema.*

P: *Quanto que dá 5x – 2x?*

A*: +3.*

P: *+3x.*

P*: +y - y?*

A: *Cancelou!*

P*: 30 – 6?*

A: *24.*

P: *x = 24 dividido por 3.*

P*: x é igual a...?*

A: *8!*

....

....

....

P*: Na mesma página em que vocês fizeram o exercício 1, vamos fazer o 2 agora.*

P*: Na Quinta-feira teremos prova.*

A: *E com fração...*

P*: Eu explico amanhã.*

A: *Que lição é para fazer hoje?*

O professor escreve no quadro-negro: *2 (a,b,c,d)*.

A: *Vai ter revisão?*

P: *Não.*

A: *Ah, professor!*

A: *Quanto vale a prova?*

P: *8,0.*

2ª Aula – dia 13/09/05

Correção dos exercícios do dia anterior, página 163 do livro didático adotado, exercícios 2 (a, b, c, d):

Professor*:Vocês têm dúvidas em relação à letra "a"?*

Alguns alunos respondem*: não!*

P: *Letras "a" e "b", então, sem problemas?*

P: *Letra "c"?*

P: *Letras "a" e "b"?*

A: *"A" e "b" não; letra "c".*

P: *Pessoal, esse sisteminha já podemos somar?*

b) $\begin{cases} 6x - 3y = 20 \\ 4x + 3y = 40 \end{cases}$ *método da adição*

P*: Podemos somar já?*

A: *Podemos.*

P*: Se eu somar, vejam o que acontece!*

P: *6x + 4x.*

A*: 10x.*

P: *-3y + 3y…*

A: *Cancela.*

....

....

....

P: *y vai ser 16 dividido por 3, tá? Então, não divide, não é?! Porque não vai dar um quociente inteiro, nem vai simplificar... Por isso vamos deixar como está.*

P: *Entendeu Lígia? Continua lendo (o* professor chama atenção de uma aluna que estava lendo outra coisa).

c) $\begin{cases} 7x + 6y = 23 \\ 5x + 6y = 21 \end{cases}$

P*: Este daqui vocês falaram que teria que trocar o sinal?*

P: *Poderia não trocar o sinal se vocês fizessem pelo método da subtração, ao invés de somar, vocês subtraem.*

P*: 6 – 6?*

A: *Cancela.*

P: *Então, quando tem coeficiente igual você pode subtrair... Também dá certo, vejam!*

P: *7x – 5x?*

A: *2x.*

Referindo-se aos coeficientes de y, o professor diz: *2x = este vai cancelar!*

P*: 23 – 21?*

A: *2!*

P*: está certo!*

P: Aí fica x = 2 dividido por 2... Isso vai dar...

A: *1!*

P: *Ok, quem trocou o sinal direitinho tem que chegar na mesma resposta.*

P: *Agora para achar y?*

....

....

....

P*: 16, então y é 16 por 6. Vejam...*

P: *O quociente não vai dar inteiro também, só que aqui ele pode simplificar.*

P: *Então y vai dar...*

A: *8/3!*

ANEXO 2

Questionário realizado com os alunos:

1) Você acha importante a utilização da sala de informática para sua aprendizagem? Por quê?

2) Quantas vezes por mês sua turma costuma utilizar a sala de informática em cada disciplina?
Língua Portuguesa _____ Ciências _____
Matemática _____História _____
Língua Inglesa _____Geografia _____
Ed. Artística _____Ed. Física _____

3) Quais as dificuldades encontradas no seu processo de aprendizagem com a utilização da sala de informática?

4) Em um reservatório havia cinqüenta litros de água, quando foi aberta uma torneira que despeja vinte litros de água por minuto. Após alguns minutos, o reservatório conterá duzentos e noventa litros de água. Escreva essa situação com um modelo matemático, isto é, em forma de equação.

5) Resolva as equações:
  a) 3 – y = 4b) 3 - 4 = 9b +11

6) A equação 4x + 3 = 2x – 1 é equivalente à 2x + 2 = -2? Justifique sua resposta.

7) O valor x = 1 é a solução da equação 2x – 3 = 6x – 7?

8) O que é um Sistema de Equações com Duas Variáveis?

BIBLIOGRAFIA

APLUSIX STANDARD. **Manual de Utilização**, versão 1.73. França: MeTAH au laboratoire IMAG-Leibniz, Grenoble, . http://aplusix.imag.fr, última visita em 12/2006.

APLUSIX JUNIOR HOME EDITION. **Manual de Utilização**. França: MeTAH au laboratoire IMAG-Leibniz, Grenoble. http://aplusix.imag.fr, última visita em 11/ 2004.

ARAUJO, E. A., **Contextualização do Ensino da Álgebra e Formação de professores**, PUC - Campinas - www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas-redondas/mr12c.doc, última visita 14/07/2005.

______. **Influências das habilidades e das atitudes em relação a matemática e a escolha profissional.** Tese de doutorado. FE – UNICAMP: Campinas/SP, 1999.

ARTIGUE, M. **Ingénierie didactique: Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 9, n. 3, Éditions La Pensée Sauvage, 1990.

AURÉLIO, http://200.225.157.123/dicaureliopos/home.asp?logado=true, última visita em 13 Jan.2007.

AZARQUIEL, GRUPO, **Ydeas y actividades para enseñar álgebra,** Madri, Editorial Síntesis, 1993

BIAZI, L. M. C., **Erros e dificuldades na aprendizagem de álgebra**. Dissertação de mestrado. FACIPAL: Palmas/PR, 2002.

BOOTH, L. R., COOK, J. **Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. As idéias da álgebra.** Org. Arthur F. Coxford, Alberto P. Shulte. N: C:T:M. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

BOSCH, M. C., **Un Punto De Vista Antropológico: La Evolución De Los "Instrumentos De Representación" En La Actividad Matemática,** http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin11.htm, última visita em 14 Jan.2007.

BRASIL (País). Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, v. 3. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. **Programa Nacional do Livro Didático** - 5ª à 8ª série, vol 3 – Guia de Livros Didáticos. Brasília: MEC/SEF, 2005.

CHEVALLARD, Y., **L´analyse des pratiques enseignantes em théorie antropologique du didactique. Recherces en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, no 2, p. 221 – 265, 1999.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

COULANGE, L., **Estude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième.** These pour obtenir le grade de Doucteur de L'Universite Joseph Fourier, 2000.

DOMINGUES, H. H., CALLIOLI, C. A., & COSTA, R. C. F., **Álgebra Linear e Aplicações**, 3ª ed., São Paulo : Atual, 1982

DUVAL, R., **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**, Campinas, SP: Papirus (Coleção Papirus Educação), 2003.

Encyclopædia Britannica On-line, http://www.britannica.com/eb/article-9380069, última visita 13 Jan. 2007.

FALCÃO, J. T. R., - Clinical analysis of difficulties in algebraic problem solving among brasilian students: principal aspects and didactic issues. **Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education - PME**, Vol. 2, Seville, Spain, p. 257-264, 1996.

FILLOY, E., Rojano, T., **Algebraic syntax and word problems solution: first steps.** In Marja van den Heuvel-Panhuizen. (ed.) Proceedings of the Twenty-fifth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol.2, pp. 417-424. Utrecht-The Netherlands, 2001.

GASCÓN, J. – **La necesidad de utilizar modelos em didática das matemáticas**. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.5, n.2, pp.11-37, 2003.

GIOVANNI, J. R., CASTRUCCI, B. e GIOVANNI JR., J. R., **A Conquista da Matemática: A+Nova – 6ª e 7ª série**, Editora FTD – São Paulo 2002.

HENRY, M. **Analyse Theorique de Situations Didactiques**. Recife-Pernambuco, 2006. Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa de Educação Matemática, Recife – UFPE, 2006.

IEZZI, G. *(et al.)*, **Matemática**, volume único, Atual Editora, São Paulo, 2002.

IMENIES, L. M., LELLIS, M., **Matemática para todos. Ensino Fundamental.** São Paulo: Scipione, 1994.

KIERAN, C., **The learning and teaching of school álgebra.** Montreal: Université du Québec à Montreal, 1992.

KIERAN, C., **The Interpretation of the equal sign: symbol for an equivalence relation vs. an operator symbol.** In R.K.L. Hall(Ed.) Proceedings of the Fourth International Conference for The P:M.E.(p. 163-169) Berkeley, California, 1980.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J., **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas, SP: Papirus, 1997.

LUDKE, M., ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo. EPU, 1986.

MASON, J. **El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidade**. UNO – Revista de Didática de lãs Matemáticas, n. 9 (p.15-22). Barcelona, 1996.

MACHADO, A. S**., Matemática na escola do segundo grau**, Atual Editora, São Paulo, 1996.

MACHADO, S. D. A., *(et al.)*, **Educação Matemática: uma introdução**, - 2. ed.- São Paulo : EDUC, 2002.

MEDEIROS, S.S. *(et al.)*, **Matemática: para cursos de economia, administração e ciências contábeis.** São Paulo: Atlas, 1988.

MIGUEL, A., FIORENTINI, D. e MIORIM, A.**, Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?**, Pró-posições, vol. 3, n° 1, Campinas, SP, 1992.

ROJANO, T. And Sutherland R., **Arithmetic World-Algebraic World** in H. Chick, K. Stacey, J, Vicent and J. Vicent (eds.) Proceedings of the Twelfth ICME Study conference: The Future of the Teaching of Algebra and Learning of Algebra, Vol. 2, pp. 515-522. Melbourne, Austrália, 2001.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a Álgebra da escola Média e Utilizações das Variáveis.** In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. (Org.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, p.9-22,1995.

VERGANAUD, G. (*et al.)*. **Cognitive processes involved in learning school algebra.** Pearla, N. And Jeremy, K. (eds.), ICMI Study Series, Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group ror the psychology of mathematics education, Great Britain. Cambridge University Press. pp. 96-112, 1990.