JOSÉ ROBERTO DAMASCENO DA SILVA

UM ESTUDO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
Campo Grande/MS
2005

JOSÉ ROBERTO DAMASCENO DA SILVA

UM ESTUDO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada como exigência final para obtenção do grau de Mestre em Educação à Comissão Julgadora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul sob a orientação do Professor Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
CAMPO GRANDE
2005

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas

Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti

Marilena Bittar

Profa. Dra. Marilena Bittar

DEDICATÓRIA

Ofereço este trabalho:

Ao meu Deus, por sempre estar comigo;

Às minhas filhas, Lorena e Roberta, com muito amor, por serem a fonte de energia para a vida do papai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, especialmente, ao Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas, meu orientador, que soube compreender minhas dificuldades e permitiu que eu desenvolvesse esse trabalho de acordo com as minhas possibilidades.

Muito grato sou ao Prof. Dr. Méricles Tadeu Moretti, à Profª. Drª. Marilena Bittar e ao Prof. Dr. José Genésio Fernandes, pelas preciosas sugestões apresentadas na banca de qualificação.

Ao Prof. Dr. Antônio Carlos do Nascimento Osório e a todos os professores que compõem o Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, pela dedicação ao mesmo.

Aos professores doutores: David Victor-Emmanuel Tauro, Antônio Carlos do Nascimento Osório, Regina Tereza Cestari de Oliveira, Alda Maria do Nascimento Osório, Shirley Takeco Gobara, Marilena Bittar, José Luiz Magalhães de Freitas e Luiz Carlos Pais, pelos ensinamentos em suas respectivas disciplinas.

Às minhas amigas Jacqueline Mesquita de Almeida e Tatiana Calheiros Lapas, pelo incentivo no momento de maior dificuldade e pelos momentos de descontração.

À minha mãe por ter cuidado de minhas filhas, possibilitando assim, as inúmeras viagens à Campo Grande.

Aos meus colegas, pelo convívio, pelo incentivo, alegrias e tristezas compartilhadas ao longo do curso.

Meus agradecimentos a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho e, sobretudo, ao meu Deus por ter colocado essas pessoas em meu caminho.

RESUMO

Esta é uma pesquisa de caráter diagnóstico, que tem como objetivo investigar o conhecimento de alunos, que já passaram por um curso de Cálculo Diferencial e Integral, sobre os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, à luz da Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval. Os dados experimentais foram obtidos pela aplicação de um teste. As análises são qualitativas e quantitativas. Como conclusão, destaca-se: as dificuldades dos alunos em reconhecer os vários sistemas de registros de representação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções de uma variável. Como conseqüência disso, a não habilidade de efetuar conversões entre os sistemas de registros, bem como os tratamentos relacionados a eles. No caso das conversões, partindo-se de um sistema de registro gráfico e chegando-se a um sistema de registro simbólico ou em linguagem natural e vice-versa. E, finalmente, a não habilidade dos alunos em coordená-los para solucionar problemas de otimização. A pesquisa mostra indícios de práticas pedagógicas que privilegiam o enfoque procedimental em detrimento da compreensão conceitual.

Palavras-chave: Ensino/Aprendizagem, Cálculo, Máximos e Mínimos de Funções, Sistema de Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This is a research of character diagnosis, which objective is to investigate the students' knowledge about the Differential and Integral Calculus, on the concepts of Maxima and Minima of Functions, to the light of the Theory of the Registrations of Representation of Raymond Duval. The experimental data were obtained by the application of a test. The analyses are qualitative and quantitative. As a conclusion, stands out: the students' difficulties in recognizing the several registrations system of representation of the concepts of Maxima and Minima of Functions of a variable. As a result we observe the students' non ability to make conversions among registrations system, as well as the treatments with them. In the case of the conversions, being taken by the students as departure graphical registration system and as arrival registration system they have a symbolical registration system or in natural language and vice-versa. And finally, we observe the students' non ability in coordinating the registrations system of representation to solve optimization problems. The research shows indications of pedagogical practices that privilege the focus procedural to the detriment of the conceptual understanding.

Keywords: Teaching, Learning, Calculus, Maxima and Minima of Functions, Registrations System of Semiotic Representation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O interesse por esta pesquisa está relacionado à nossa prática docente, a qual está direcionada ao processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, dentre outras. A atenção está focada nas dificuldades que os alunos têm em relação à aprendizagem de conceitos do Cálculo, em especial os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções. A escolha desse tema tem origem em nossa prática pedagógica e em estudos sobre a aplicação prática dos conceitos da Matemática como um todo, buscando alcançar um ensino mais próximo das realidades sociais dos nossos alunos. Nos cursos de cálculo que ministramos, questionamentos de alunos sobre valores práticos e instrumentais da Matemática, através de perguntas do tipo: "Pra que serve isto?", "Onde se aplica essa teoria?" "Onde vou usar no meu dia-a-dia?" entre outras, também serviram de estímulo para que o estudo sobre os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções viesse a se tornar o objetivo principal de pesquisa. Nessa perspectiva, o objeto de estudo passou a ser a investigação do processo de ensino-aprendizagem da noção de Máximos e Mínimos de Funções, sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica, cuja teorização foi desenvolvida por Duval.

O presente trabalho é referente ao processo de ensino-aprendizagem de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, em particular de conceitos relativos a Máximos e Mínimos de Funções. Trata-se de um estudo diagnóstico sobre o conhecimento de alunos que já passaram por um curso de Cálculo I (Cálculo de funções de uma variável).

Buscamos investigar quais sistemas de registros de representação, relativos aos conteúdos de Máximos e Mínimos de Funções os alunos utilizam e possíveis dificuldades nos tratamentos e conversões dos mesmos, diante dos problemas propostos. O trabalho está organizado em cinco capítulos. No Capítulo 1 são apresentados o Quadro Teórico e a Problemática, ou seja, é delimitado o problema desta pesquisa, e apresentadas as noções que julgamos fundamentais da teoria dos *Registros de Representação* e suas implicações no processo de ensino-aprendizagem de um conceito científico. O capítulo 2 é destinado à descrição dos procedimentos metodológicos. Nele estão caracterizados os sujeitos pesquisados, descrita a realização das fases da pesquisa e o instrumento de coleta de dados. No capítulo 3 está apresentado um estudo sobre os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções e seus significados à luz dos livros didáticos mais utilizados pelos professores dos alunos investigados. O capítulo 4 é dedicado à parte experimental, envolvendo a coleta e análise dos dados, a partir da aplicação de um teste diagnóstico. No capítulo 5 estão as conclusões e as considerações finais.

QUADRO TEÓRICO E PROBLEMÁTICA

Um dos maiores desafios no ensino atual é promover uma mudança da prática educativa tradicional para uma experiência que busque construir conhecimentos através da necessidade prática dos conteúdos a serem trabalhados no ambiente escolar. Nesse sentido, propor problemas que estejam próximos do universo vivenciado pelos alunos tem-se mostrado uma estratégia bastante motivadora. Assim, o estudo de Máximos e Mínimos de Funções tem um papel muito importante no ensino do Cálculo Diferencial e Integral em cursos de graduação, pois está diretamente ligado aos estudos de otimização de custos de toda natureza que as empresas tanto buscam, cujo objetivo principal é economizar. Esse conteúdo, além de ser importante para a resolução de problemas de outras áreas do conhecimento é também ferramenta fundamental para o estudo de comportamentos de funções e construção de gráficos em vários campos da Matemática.

Porém, os obstáculos encontrados para o aprendizado de Máximos e Mínimos de Funções, bem como das disciplinas de Cálculo como um todo, continuam enormes, como mostram os resultados das avaliações de desempenho dos alunos. A dificuldade de compreensão da Matemática, em particular da linguagem utilizada, pode dar origem ao fracasso e bloqueio no aluno. Para entender melhor essa problemática, decidimos, fundamentados na teoria desenvolvida pelo pesquisador francês Raymond Duval[1] sobre registros de representações[2] semióticas, investigar quais desses registros são utilizados por alunos diante de problemas envolvendo Máximos e Mínimos de Funções.

1 – REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Noções sobre representação semiótica surgem com os trabalhos de Pierce, Chomsky, Benveniste, Granger e outros. Dentre eles, Benveniste ajuda a ampliar a

---

[1] Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês, é professor emérito na Université du Littoral Cote d’Opale, França. Consolidou sua carreira de pesquisador no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, França (1970 – 1999), com importantes estudos relativos à Psicologia Cognitiva.

[2] Um registro de representação é, segundo Duval (1999), um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais em nível do funcionamento cognitivo consciente.

discussão com o conceito de sistemas semióticos que ele introduz, onde procura mostrar a importância de relacionar diferentes sistemas entre eles. Finalmente surgem trabalhos a respeito de registros de representação relativos ao conhecimento matemático e sua aprendizagem, destacando-se entre eles o modelo teórico proposto por DUVAL.

Segundo DUVAL, um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo três funções, ou seja, a comunicação, o tratamento da informação e a objetivação. Assim sendo, as representações semióticas apresentam dois aspectos, sua *forma* (o representante) e seu *conteúdo* (o representado). Para ele "[...] as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento" (DUVAL, 1993, p.39). Portanto, podemos dizer que as representações semióticas "são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento" (ibidem, p.39).

De acordo com DUVAL as representações semióticas são *externas e conscientes do sujeito*: "As representações externas são, por natureza, representações semióticas. Essas representações estão então estreitamente ligadas a um estado de desenvolvimento e de domínio de um sistema semiótico." (DUVAL, 1995, p.25). Podemos então deduzir que elas dependem de um sistema semiótico mais amplo no qual estão inseridas. É um erro considerar que as representações semióticas têm unicamente a função de comunicar as representações mentais. Duval chama "semiósis a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e noésis os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência" (ibidem, p.2-3).

No caso da apreensão conceitual de um objeto matemático, quanto maior for a atividade de conversão[3] realizada entre os sistemas de registros de representação, maior será a possibilidade de apreensão do mesmo.

[3] Consiste numa mudança entre dois sistemas de registros de representação conservando a referência aos mesmos objetos.

1.1 – Caracterização da atividade matemática do ponto de vista cognitivo

Uma das diferenças entre o funcionamento do pensamento em Matemática e o funcionamento do mesmo em outras áreas do conhecimento científico encontra-se nos tipos de Registros de Representações Semióticas. Analisando a epistemologia da Matemática é possível perceber a importância das representações semióticas em seu desenvolvimento, pois "a Matemática guarda uma forte dependência das formas de representações e da manipulação dos seus objetos" (MORETTI, 2002, p.344). Essa importância se dá, inicialmente, ao fato das possibilidades de tratamento matemático e em seguida pela possibilidade de conversões de registros.

Para ilustrar a importância dos registros na Matemática basta tentar imaginar o que teria acontecido com o desenvolvimento dessa ciência se não tivesse surgido o sistema posicional de numeração. Além dos sistemas de numeração (decimal, binário, etc.), as figuras geométricas, as notações algébricas, os símbolos matemáticos, os gráficos e a língua materna são exemplos dessa grande variedade de representações semióticas de que se utiliza a Matemática. A seguir, apresentaremos alguns exemplos de tipos de registros de representação semiótica de conceitos de Máximos e Mínimos de Funções:

- REGISTROS SIMBÓLICOS (LINGUAGEM FORMAL):
  1. Seja c um valor crítico de uma função f e (a, b) um intervalo aberto contendo c. Suponhamos f contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), exceto possivelmente em c.
     (i) Se $f'(x)>0$ para $a<x<c$ e $f'(x)<0$ para $c<x<b$, então $f(c)$ é máximo local de f.
     (ii) Se $f'(x)<0$ para $a<x<c$ e $f'(x)>0$ para $c<x<b$, então $f(c)$ é mínimo local de f.
     (iii) Se $f'(x)>0$ ou se $f'(x)<0$ para todo x em (a, b) (exceto possivelmente $x = c$), então $f(c)$ não é extremo local de f.
  2. Seja f diferenciável em um intervalo aberto contendo c e $f'(c) = 0$.
     (i) Se $f''(c)<0$, então f tem máximo local em c.
     (ii) Se $f''(c)>0$, então f tem mínimo local em c.

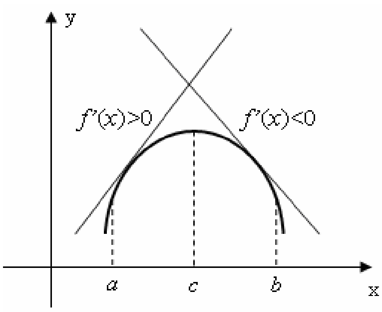
- REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL:

  1. Diz-se que uma função tem um *valor máximo relativo* em um ponto qualquer, se existir um intervalo aberto contendo esse ponto, onde a função está definida, tal que a imagem desse ponto é maior ou igual à imagem de qualquer outro ponto nesse intervalo.
  2. Diz-se que uma função tem um *valor mínimo relativo* em um ponto qualquer, se existir um intervalo aberto contendo esse ponto, onde a função está definida, tal que a imagem desse ponto é menor ou igual à imagem de qualquer outro ponto nesse intervalo.
  3. Diz-se que uma função tem um *valor máximo absoluto num intervalo*, se existir algum número no intervalo, tal que a imagem desse número é maior ou igual à imagem de qualquer outro número no intervalo. Assim, a imagem desse número será o valor máximo absoluto da função no intervalo.
  4. Diz-se que uma função tem um *valor mínimo absoluto num intervalo*, se existir algum número no intervalo, tal que a imagem desse número é menor ou igual à imagem de qualquer outro número no intervalo. Assim, a imagem desse número será o valor mínimo absoluto da função no intervalo.

Os registros a seguir pertencem ao mesmo sistema de representação, ou seja, sistema de registros figurais. Porém, utilizamos denominações distintas para diferenciar um registro figural que se utiliza de alguns elementos da geometria cartesiana (eixos coordenados, esboço de curvas e retas tangentes) de um registro figural representado por uma figura comum. Aos registros gráficos que permitem mudanças de sistemas de coordenadas denominamos gráficos cartesianos.

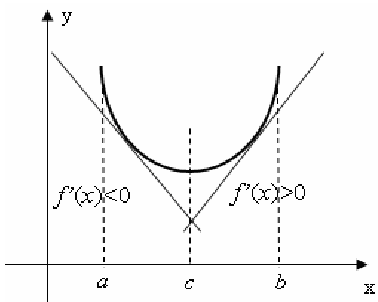
- REGISTRO GRÁFICO:

1.



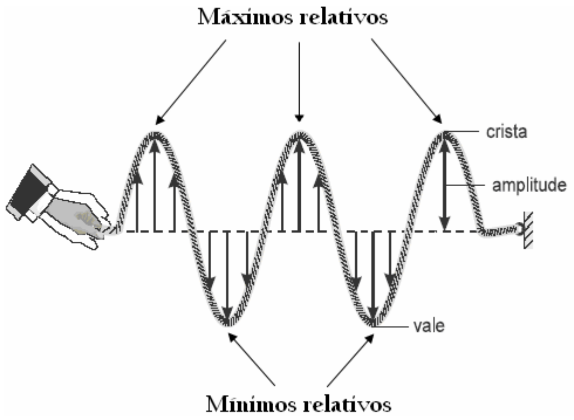
Máximo local em *c*

2.



Mínimo local em *c*

- REGISTRO FIGURAL:



No estudo de Máximos e Mínimos de Funções, o registro gráfico e o registro figural, utilizados nos exemplos acima, são registros que não permitem operações. Eles são fins em si mesmo, funcionando apenas como apoio heurístico. DUVAL (2003, p.15) afirma que "a compreensão em Matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas". Dessa forma, uma grande dificuldade pode residir no fato de que todas as operações a serem realizadas devam ser efetuadas no registro em linguagem formal, implicando que a conversão de registros não encontra um ambiente favorável nesse estudo.

1.2 – Tipos de transformação de representações semióticas

É preciso atentar para a existência de dois tipos de transformações nas representações semióticas, pois são totalmente distintas. São elas: os tratamentos e as conversões. Quando da resolução Matemática de um problema ocorre a permanência no mesmo sistema de registro, diz-se *tratamento*. Porém, se houver a mudança de sistema de registro com a conservação da referência aos mesmos objetos, diz-se *conversão*. Esse último tipo de transformação pode conduzir o aluno a enfrentar os fenômenos de não-congruência semântica (quando a representação terminal não transparece absolutamente na representação de saída), caso contrário é dita congruência. DUVAL (1995, p.181) evidencia que "a possibilidade de tratamentos figurais está ligada à possibilidade de modificações mereológicas, óticas e posicionais de uma figura, modificações que podem ser feitas fisicamente ou mentalmente, e, independente de todo conhecimento matemático".

Quando realizamos uma reorganização de uma ou várias sub-figuras diferentes de uma figura dada, dizemos tratar-se de um tipo de tratamento denominado *Reconfiguração*, isto é:

> A operação de reconfiguração consiste, basicamente, na complementaridade de formas, ou seja, das partes obtidas por um fracionamento que podem ser reagrupadas em sub-figuras incluídas na figura inicial. Portanto, o fracionamento de uma figura, ou o exame desta a partir de suas partes elementares, permite a aplicação da operação de reconfiguração. (MORETTI e FLORES, 2005, p. 8)

Convém lembrar que os tratamentos são ligados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático. Além disso, o tratamento de figuras não se aplica ao estudo de Máximos e Mínimos de Funções, pois as figuras e gráficos envolvidos nesses conceitos não são operacionalizáveis. Na conversão devemos estabelecer a diferença entre significado e significante, isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação.

Existem duas atividades que estão muito próximas da conversão e, por esse motivo são confundidas, frequentemente, com ela. São a *ação de codificar* e a *interpretação*. Nesta última há uma necessidade de mudança de quadro teórico, ou a modificação de contexto. Já a *ação de codificar* é a transcrição de uma representação em outro sistema semiótico, diferente daquele no qual ela é dada.

A *conceitualização* ocorre somente se o sujeito consegue articular vários registros de representação, pois fazer tratamentos e conversões de registros de representação semiótica é uma condição necessária para a apreensão de objetos matemáticos.

> [...] não adianta o sujeito resolver uma operação usando material concreto ou através de um desenho se não conseguir enxergar/coordenar estes procedimentos no tratamento aritmético (algoritmo da operação), no problema envolvendo esta operação ou mesmo em outro registro de representação qualquer. (DAMM, 2002, p.147)

Fazendo um paralelo com Máximos e Mínimos de Funções, seria o mesmo que o sujeito perceber, em um determinado gráfico de uma função derivável, os valores extremos, mas não perceber que a derivada de primeira ordem naqueles extremos vale zero (admitindo que a função seja derivável nesses pontos), já que a reta tangente a esses pontos seria paralela ao eixo das abscissas, ou também, perceber que o sujeito não seria capaz de articular os testes da derivada primeira e da derivada segunda para confirmar esses extremos.

Daremos agora um exemplo de tratamento e um exemplo de apoio heurístico de registros gráficos na determinação dos extremos relativos de uma função.

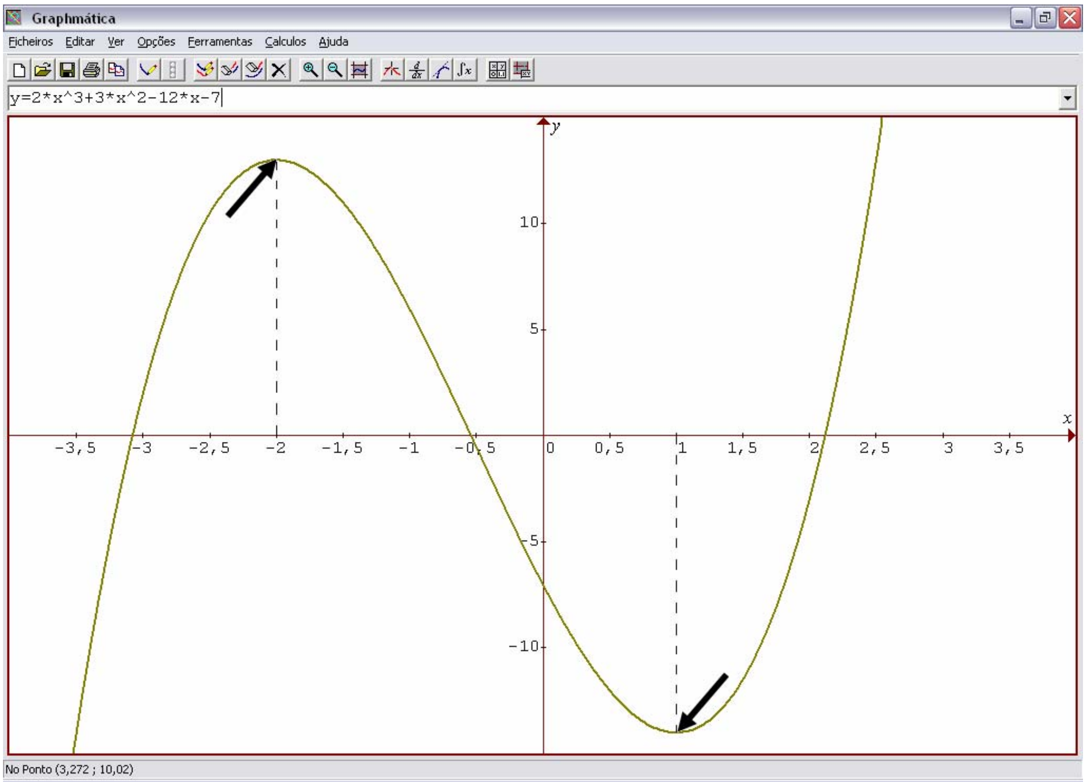
Um exemplo de tratamento (algébrico) ocorre na seguinte situação:
Usar o teste da derivada segunda para calcular o máximo e o mínimo relativos da função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.

Solução: Como a derivada $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$ é nula em x = -2 e x = 1, os pontos correspondentes (-2, 13) e (1, -14) são pontos críticos de primeira ordem de *f*. Para testar estes pontos, calcula-se a derivada segunda $f''(x) = 12x + 6$ e calcula-se seu valor, para x = -2 e x = 1. Como $f''(-2) = -18 < 0$, segue-se que (-2,13) é um máximo relativo, e como $f''(1) = 18 > 0$, segue-se que (1, -14) é um mínimo relativo.

Apoio heurístico de registros gráficos ocorre quando se utiliza os gráficos produzidos por um aplicativo como, por exemplo, o software Graphmatica, para ajudar na visualização dos conceitos envolvidos na resolução do problema anterior. Estudo elaborado por Dagher (1993), em sua tese, destacou o problema da conceitualização das relações entre as representações algébricas e gráficas das funções. Nesse estudo o autor analisou alguns softwares educacionais da França e dos Estados Unidos. Dos softwares pesquisados, nenhum permitia o registro automático (feito pelo computador das ações dos alunos) esperado na interação aluno/máquina. Também elaborou um software educacional com o objetivo de proporcionar uma ajuda eficaz na aprendizagem da articulação entre os registros algébricos e gráficos das funções afins e quadráticas, especialmente permitindo interações dificilmente realizáveis no ambiente papel/lápis. Esse software, chamado Functuse, que serviu de suporte para a pesquisa, funcionava como um jogo: uma curva aparecia na tela do computador e o aluno tinha como objetivo encontrar a equação correspondente. Trabalhou com dois grupos equivalentes ao 1º e 3º ano do ensino médio no Brasil, realizando um pré-teste e um pós-teste somente com papel/lápis. No intervalo entre os testes foram realizadas sessões de ensino num ambiente informático. A análise dos dados recolhidos foi feita por métodos de análise estatística qualitativa e a análise das fichas dos alunos. Em suas conclusões, Dagher apontou que o efeito da sessão informática foi positivo, pois possibilitou a uma boa parte dos estudantes uma melhor capacidade de precisar ou estimar os valores dos coeficientes das funções afins e quadráticas, a partir de suas representações gráficas. Tal experimentação tende ainda a comprovar que a articulação algébrica e gráfica de representação das funções, que é de difícil concretização no ensino tradicional é, no entanto, susceptível de saltos qualitativos importantes por meio da interação de curta duração com o ambiente informático.

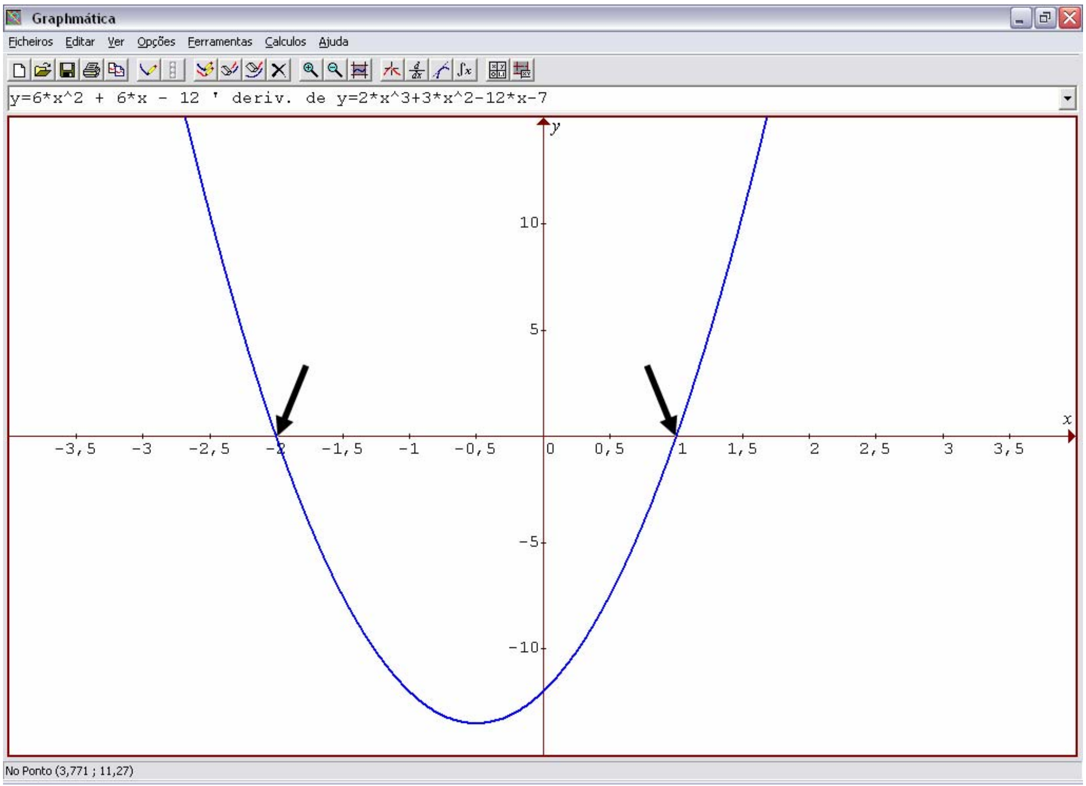
No exemplo a seguir, há um destaque para o uso do software Graphmatica, onde o mesmo realiza um papel importante na agilização da articulação entre o registro algébrico e o registro gráfico da função dada:

1º passo: Determinar o gráfico da função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.



Nele, estão assinalados, através de setas, dois pontos correspondentes a valores dos extremos relativos da função.

2º passo: Determinar o gráfico da derivada de primeira ordem da função *f*, identificar e analisar os pontos críticos indicados no gráfico, se esses pontos do gráfico serão extremos relativos para a função dada. Assim sendo:



Uma análise do gráfico mostra que f ’(-2) = f ’(1) = 0.

3º passo: Com o apoio da tabela de pontos do software, pode-se também verificar que as abscissas indicadas pelas setas são zeros da função derivada primeira.

Tabela de Pontos

Equações
y=6*x^2 + 6*x - 12 ' deriv. de y=2*x^3+3*x^2-12*x-7

x	y
-3,5	40,5
-3,0	24,0
-2,5	10,5
-2,0	0
-1,5	-7,5
-1,0	-12,0
-0,5	-13,5
0	-12,0
0,5	-7,5
1,0	0
1,5	10,5
2,0	24,0
2,5	40,5
3,0	60,0
3,5	82,5

4º passo: Para complementar a análise observa-se valores dessa função, em particular das ordenadas desses dois pontos com a ajuda da tabela de pontos do software.

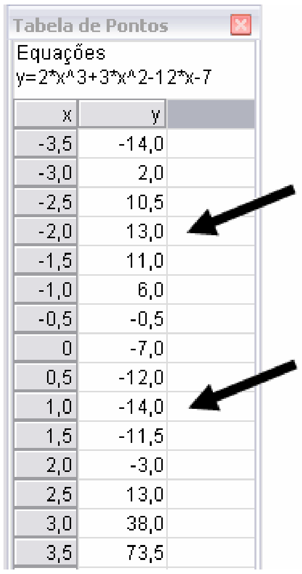


Tabela de Pontos

Equações

y=2*x^3+3*x^2-12*x-7

x	y
-3,5	-14,0
-3,0	2,0
-2,5	10,5
-2,0	13,0
-1,5	11,0
-1,0	6,0
-0,5	-0,5
0	-7,0
0,5	-12,0
1,0	-14,0
1,5	-11,5
2,0	-3,0
2,5	13,0
3,0	38,0
3,5	73,5

As conversões envolvendo as representações gráficas, simbólicas e tabelas são recursos importantes para concluir que (-2, 13) é um ponto de máximo relativo e que (1, -14) é um ponto de mínimo relativo da função dada.

1.2.1 – Considerações sobre a conversão

Apesar da conversão, sob o ponto de vista matemático, não efetuar nenhum papel intrínseco nos processos de justificação e prova, ela é de fundamental importância, sob o ponto de vista cognitivo, pois interfere diretamente na condução dos mecanismos subjacentes à compreensão. Para caracterizar melhor o sentido que estamos atribuindo à palavra conversão, apresentamos a seguir alguns aspectos que consideramos importantes nesse conceito:

- A irredutibilidade da conversão a um tratamento;
- Os dois tipos de fenômenos característicos da conversão das representações;
- A conversão de representações e o paradoxo da compreensão em Matemática.

Como foi observado anteriormente, o tratamento se verifica no interior de um sistema de registro, enquanto que na conversão entre registros há necessidade de exteriorizar em relação ao registro de partida. É um grande equívoco reduzir a conversão a uma forma simplória de tratamento. Não são regras de correspondência para passar de um registro a outro ou simplesmente codificações que caracterizam uma conversão, mas sim, a apreensão global e qualitativa que a conversão permite embutir nas mudanças de registros.

> Há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos registros. (DUVAL, 2003, p.17).

Isso justifica porque a conversão das representações não pode ser redutível a um tratamento.

Como dito anteriormente, se compararmos as representações de registros de partida com de chegada, observaremos que se a representação de chegada transparece na representação de partida, teremos um fenômeno de *congruência*. Caso contrário, teremos um fenômeno de *não-congruência*. Um segundo tipo de fenômeno se refere ao sentido da conversão. Quando se invertem os sentidos de partida e de chegada, nem sempre ocorre a conversão.

No cotidiano escolar, em todos os níveis, é fácil observar que fracassos e bloqueios nos alunos ocorrem com mais intensidade quando há a necessidade de efetuar uma mudança de registro ou utilizar dois registros simultaneamente. A Teoria de Duval pressupõe o fato de que, para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, é fundamental que os alunos compreendam e coordenem diferentes registros de representação. Segundo ele a identificação do objeto com sua representação implica em dificuldades para a aprendizagem:

> “Toda confusão entre o objeto e sua representação acarreta, de modo geral, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se então rapidamente inutilizáveis fora de seu contexto de aprendizagem: seja por não recordar ou porque eles permanecem representações “inertes”, não sugerindo nenhum tratamento produtor.” (DUVAL, 1995, p.2).

Conforme DUVAL (2003, p.21), os bloqueios dos alunos, nos diversos níveis de ensino, aumentam sensivelmente quando uma mudança de registro é requerida ou quando uma mobilização simultânea de dois registros é solicitada. Quando as conversões requeridas são não-congruentes, essas dificuldades são mais fortes. O sucesso para a maioria dos alunos em Matemática se dá em atividades com monorregistros, o que nos causa estranheza, pois a compreensão em Matemática está intimamente relacionada à capacidade que o aluno desenvolve na mudança de registros. O acesso aos objetos matemáticos depende de suas representações semióticas, uma vez que jamais devemos confundir um objeto e sua representação. Isto explica a razão da evolução dos conhecimentos matemáticos ter desenvolvido uma diversificação de registros de representação. Do exposto vemos surgir o seguinte paradoxo: "como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?" (DUVAL, 2003, p.21). O autor revela que passar de uma representação para outra não é simplesmente alterar o modo de tratamento, e sim explicar os diferentes aspectos do mesmo objeto. Ele observa ainda que muitos alunos têm dificuldade em mudar de uma representação para outra:

> "... mudar a forma de uma representação se torna, para muitos alunos, de diferentes níveis de escolaridade, uma operação difícil, senão impossível. *Tudo se passa como se a compreensão que a grande maioria dos alunos tem de um conteúdo permanecesse limitada à forma de representação utilizada*." (DUVAL, 1995, p. 19)

Assim sendo, vemos o porquê da compreensão em Matemática depender de pelo menos dois registros de representação diferentes, pois dessa forma poderemos evitar a confusão entre o conteúdo de uma representação e o objeto representado. Essa particularidade da Matemática em relação às outras ciências é que nos leva a observar que para o aluno ter um bom desenvolvimento na aprendizagem da Matemática é fundamental que ele possa, por si próprio, promover modificações ou transferências de formulações ou representações das informações durante o processo de resolução de problemas, visto que *não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação* (DAMM, 2002, p.137). Devido a essa particularidade cabe a seguinte indagação:

Como os processos de aprendizagem da Matemática devem ser estudados?

Essa pergunta nos leva às outras perguntas, tais como: O que é necessário observar nos trabalhos dos alunos quando da resolução de problemas matemáticos? Que modelo é adequado para a interpretação e análise das observações ou resultados de seus trabalhos? Devemos levar em conta que o objetivo da pesquisa é evidenciar os mecanismos próprios da compreensão em Matemática e não unicamente analisar os trabalhos dos alunos por meio de critérios matemáticos, através da reconstrução de modos mais ou menos hipotéticos dos procedimentos utilizados. Sendo o objetivo da pesquisa evidenciar os mecanismos próprios da compreensão em Matemática, faz-se necessário a diversidade de registros de representação para compreendermos o funcionamento do pensamento humano, pois essa diversidade permite efetuarmos tratamentos de forma mais econômica, ou seja, com baixo *"custo"* de tratamento; além de podermos coordenar melhor as limitações representativas específicas a cada registro, através da comparação entre diferentes modos de representação, justificando a necessidade da complementaridade de registros e poderemos, também, observar a coordenação de registros de representação como uma implicação da conceitualização. A regra básica para fazer uma análise cognitiva através de registros de representação é tomar dois registros simultaneamente e não cada um separadamente, e observar a importância da forma das representações, quando da passagem de um registro para outro, ou seja, observar cuidadosamente o processo de conversão. Dessa forma faz-se necessária a seguinte indagação:

Qual deve ser o método para pesquisar processos de aprendizagem?

A coordenação de vários registros de representação semiótica e a conversão entre eles são os fenômenos a serem observados nas produções dos alunos. Um método capaz de pesquisar esses tipos de fenômenos deve analisar o que se destaca no tratamento de cada registro utilizado, bem como o que se destaca nas conversões de registros, pois a análise desses tratamentos e dessas conversões pode remeter a campos de problemas diferentes cognitivamente. Em segundo lugar, deve-se levar em conta a natureza dos registros apresentados, pois o grau de profundidade das dificuldades encontradas na resolução de problemas de Matemática varia dependendo da natureza dos registros apresentados. A partir desses dois pontos levantados poderemos, então, utilizar a conversão como um instrumento de análise para evidenciar as variáveis cognitivas particulares do funcionamento e explorar as oscilações de congruência e de não-congruência que surgem entre dois registros nas várias representações de objetos matemáticos.

Em uma pesquisa de processos de aprendizagem devemos levar em conta as seguintes orientações de como categorizar e organizar as respostas coletadas: em primeiro lugar, perceber que do ponto de vista cognitivo, os acertos simples não são determinados pelos itens separadamente, mas, sim, pelo reagrupamento dos mesmos. Na construção do teste diagnóstico devem ser propostas atividades que favoreçam o uso de vários registros bem como conversões entre eles e, para cada sentido da conversão deve haver atividades que permitam analisar casos de congruência e de não-congruência. Dependendo do grau de compreensão que se deseja alcançar de um determinado conceito matemático, é necessário propor questões que sejam formadas por dois ou três pares de registros, sendo, por exemplo, um par apresentando registro em língua natural e registro simbólico de um lado e um par apresentando dois registros simbólicos do outro. Assim, para a pesquisa que desenvolvemos, trabalhos de simples reconhecimento de registros de representação podem ser tão importantes quanto os trabalhos de produção.

Como já dissemos, a diversidade dos registros de representação possui papel fundamental na compreensão, que por sua vez requer a coordenação de diferentes registros. A grande maioria dos alunos não atinge essa compreensão, justificando, assim, suas dificuldades e limitações na aprendizagem de conceitos matemáticos. As únicas experiências de sucesso dessa maioria se dão no interior dos registros simbólicos, sem significados e sem utilidade em outro contexto de suas aprendizagens. Dessa forma, devemos considerar que os sistemas semióticos estejam integrados nos modelos de arquitetura cognitiva das pessoas. Para tanto, quatro idéias são imprescindíveis:

1. Para que ocorra o desenvolvimento da capacidade mental de representação de um sujeito é necessário que ocorra também o desenvolvimento cultural de sistemas semióticos, porque os mesmos não atendem somente uma função de comunicação, mas também uma função de tratamento e de objetivação

consciente para o sujeito. Um dos pontos prioritários da formação inicial é a apropriação e o domínio desses sistemas.

2. A coordenação de registros de representação semiótica interfere no progresso de aquisição de conhecimentos matemáticos nos sujeitos em período de desenvolvimento e de formação inicial.
3. Algumas variáveis cognitivas podem ser retomadas como varáveis didáticas. Os exemplos de aprendizagem utilizados quotidianamente com a intenção de facilitar a aprendizagem podem não ter qualquer valor se não tiverem relação com a estrutura cognitiva existente.
4. Quanto mais a Matemática apresentar variedade de representações semióticas, mais ela poderá contribuir para o desenvolvimento cognitivo do sujeito.

Assim sendo, se quisermos analisar as dificuldades de aprendizagem em Matemática, em nossa pesquisa, no estudo de Máximos e Mínimos de Funções, são essenciais estudos sobre a conversão das representações e não somente sobre os tratamentos. Não esquecendo que existe uma variedade de registros de representação, cuja articulação é condição primordial para a compreensão em Matemática.

2 – CONSIDERAÇÕES SOBRE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

No ensino do Cálculo Diferencial e Integral, dois tipos de enfoques podem ser observados: o conceitual, ligado aos conceitos e definições e o procedimental, voltado mais para técnicas e processos. Segundo o NAEP[4] os estudantes demonstram **compreensão conceitual** em Matemática quando eles mostram evidências de que podem reconhecer, classificar e generalizar exemplos e contra-exemplos de conceitos; usar e inter-relacionar modelos, diagramas, manipulações e **variadas representações de conceitos**; identificar e aplicar princípios (isto é, validar declarações generalizando relações entre conceitos na forma condicional); conhecer e aplicar fatos e definições; comparar, contrastar e integrar conceitos e princípios relatados para estender a natureza dos conceitos e princípios; reconhecer e aplicar os signos, símbolos e termos usados para representar conceitos ou interpretar as

[4] National Assessment of Educational Progress (NAEP) é o único órgão nacional Norte-Americano de representatividade e avaliação contínua do que os estudantes americanos sabem e podem saber.

suposições e relações envolvendo conceitos nas colocações Matemáticas. A **compreensão conceitual** reflete a habilidade de um estudante para argumentar em colocações que envolvem a aplicação cuidadosa de definições de conceitos, relações ou representações de ambos. Os estudantes demonstram **compreensão conceitual** quando produzem exemplos de representações comuns ou sem igual, ou quando manipulam idéias centrais sobre um conceito de vários modos. Em relação ao **conhecimento procedimental**, os estudantes demonstram essa habilidade em Matemática quando selecionam e aplicam procedimentos apropriados corretamente; verificam ou justificam a precisão de um procedimento usando modelos concretos ou métodos simbólicos; estendem ou modificam procedimentos para lidar com fatores inerentes em colocações de problema. O **conhecimento procedimental** inclui os vários algoritmos numéricos na Matemática que têm sido criados como ferramentas para satisfazer necessidades específicas eficazmente. O **conhecimento procedimental** também inclui as habilidades para ler e produzir gráficos e tabelas; executar construções geométricas e executar habilidades tais como arredondamento e ordenação. Estas atividades posteriores podem ser diferenciadas da **compreensão conceitual** por uma suposição de que o estudante a tem de uma representação e pode aplicá-la como uma ferramenta para criar um produto ou alcançar um resultado numérico. Nestas colocações, a questão de avaliação é quão bem o estudante executou um procedimento ou selecionou o procedimento apropriado para executar uma determinada tarefa. O **conhecimento procedimental** é freqüentemente refletido numa habilidade do estudante em conectar um processo algorítmico com uma dada situação problema, empregando esse algoritmo corretamente, e comunicando os resultados do algoritmo no contexto da colocação do problema. O **conhecimento procedimental** também inclui uma habilidade do estudante em argumentar através de uma situação, descrevendo por que um procedimento particular resolverá um problema no contexto descrito. Na resolução de problemas é exigido dos estudantes o uso dos conhecimentos acumulados de Matemática em novas situações. Resolver problemas requer que os estudantes reconheçam e formulem problemas; determinem a suficiência e a consistência dos dados; usem estratégias, dados e modelos; generalizem, estendam e modifiquem procedimentos; usem argumentos (espaciais, indutivos, dedutivos, estatísticos ou proporcionais) em novas colocações e julguem os argumentos e correções das soluções. Situações de resolução de problemas requerem dos estudantes a articulação de todo o seu conhecimento matemático de conceitos, procedimentos, raciocínios e habilidades de comunicação/representacional em confronto com novas situações. Como tal, essas situações são, talvez, as medidas mais precisas de competência dos estudantes em Matemática.

Concluindo, observamos que todas as indicações levantadas pelo NAEP podem ser implementadas, a partir de uma proposta didática que considerem as duas compreensões simultaneamente, ou seja, desenvolver um trabalho didático favorecendo tanto a **compreensão conceitual** quanto a **conhecimento procedimental**, com a devida valorização dos sistemas de registros de representação.

3 – A PROBLEMÁTICA

A prática docente e pesquisas como as de GODOY (2004) e LEME (2003) têm indicado que nas disciplinas de cálculo, em particular no estudo de Máximos e Mínimos de Funções, os estudantes têm obtido resultados satisfatórios quando o enfoque procedimental é valorizado, enquanto um fracasso em massa é observado quando é dado um enfoque conceitual. Isso nos leva a acreditar que não está havendo um trabalho de valorização dos diversos registros de representação dos assuntos estudados em cálculo, bem como na exploração das relações entre eles. Apesar dessas constatações, o nosso objetivo não é investigar o trabalho do professor de Cálculo, e sim investigar dos estudantes que já estudaram os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, quais são os registros desses conceitos que eles reconhecem e se os mesmos possuem habilidade no tratamento e conversão dos registros dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, além de investigar se os alunos conseguem articulações com esses registros para obter solução de problemas práticos que se utilizem desses conceitos. Tomando como referencial a Teoria dos Registros de Representação de Duval, levantamos como problemática de pesquisa, que muitas das dificuldades dos estudantes estão, exatamente, em distinguir os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções e suas representações semióticas, bem como transitar pelos diversos registros que representam esses conceitos, além de observar se eles são capazes de coordenar esses diversos registros para a solução de problemas práticos que envolvam esses conceitos. Considerando todos esses aspectos, formulamos as seguintes questões para esta pesquisa:

- Quais sistemas de registros de representação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções são reconhecidos pelos estudantes?

- Os estudantes dominam os tratamentos efetivados no interior dos sistemas de registros escolhidos e as conversões entre eles?

- Quais conversões entre os sistemas de registros dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções são mais, espontaneamente, utilizadas pelos estudantes?

- É possível identificar que sistema de registro dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções gera para o aluno maior dificuldade de interpretação?

Portanto, o objetivo desta pesquisa é contribuir para a análise de dificuldades relativas ao uso dos registros de representação semiótica dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções e, conseqüentemente, indicar elementos que devem ser levados em consideração para nortear as abordagens que buscarão uma melhoria para o ensino de Cálculo. Nossa contribuição está em diagnosticar dificuldades que os alunos possam apresentar em distinguir sistemas de representações semióticas dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, bem como o domínio dos tratamentos e conversões. Estamos considerando que a apresentação ou exposição dos registros de representação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções pelos livros didáticos e também pelos professores, nas diferentes situações em que os conceitos são abordados possam não estar chegando ao estudante de modo que ele consiga tirar proveito para o seu conhecimento. É possível que este fato colabore com outras dificuldades que os estudantes devam ter para reconhecer nos sistemas de registros o significado dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções e serem impedidos de transitar entre os sistemas de registros de representação do mesmo conceito matemático.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

1 – INTRODUÇÃO

O objeto de nossa pesquisa é a análise de registros de representação semiótica utilizados por alunos de cursos de graduação da área de Ciências Exatas, diante de questões envolvendo conceitos de Cálculo, em particular de Máximo e Mínimo de Funções.

Para o desenvolvimento desta pesquisa optamos por alunos de uma universidade pública. O critério para a escolha da mesma se deu pela nossa vivência profissional, onde realizamos trabalho pedagógico com disciplinas da área de Matemática há muitos anos. O passo seguinte foi a escolha dos cursos, cujo critério foi o de que deveria ser em número de dois no mínimo, sendo que um deles deveria ser o de Licenciatura em Matemática, escolha devida à relação que o futuro profissional terá com o ensino da matemática, e o outro, um curso de Bacharelado da área de exatas, escolha devida ao interesse de investigar se a não relação do futuro profissional com o ensino provocaria uma aproveitamento diferenciado na aprendizagem dos conceitos estudados, esse curso deveria apresentar uma grande concorrência no vestibular dentro dessa área, objetivando analisar sujeitos com certo interesse em buscar novos conhecimentos. A terceira etapa foi a escolha das turmas, cujo critério foi o de que o tempo passado desde o estudo de Máximos e Mínimos de Funções fosse, na medida do possível, no máximo um semestre, pois além de mais acessível na memória evitaria uma interferência maior de disciplinas afins.

Em seguida foi realizada pesquisa bibliográfica para a identificação dos registros de representação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, que haviam sido mostrados aos estudantes por ocasião dos seus cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Os livros de Cálculo foram selecionados para análise, obedecendo ao critério de maior utilização por parte dos professores dos estudantes pesquisados ou por apresentar inovações metodológicas.

Fizemos ainda uma revisão da literatura referente aos trabalhos de pesquisa realizados sobre registros de representação semiótica dos conceitos utilizados no processo de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Nesse sentido, além dos trabalhos de DUVAL, analisamos as dissertações de mestrado de GODOY (2004), MEYER (2003) e LEME (2003) sobre o processo de aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, pois trazem contribuições para reflexões sobre as dificuldades observadas no processo de aprendizagem dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções no Cálculo Diferencial e Integral.

Visando complementar a revisão da literatura referente à pesquisas sobre registros de representação semiótica, analisamos também alguns trabalhos sobre o processo de aprendizagem de conteúdos fora do Cálculo Diferencial e Integral, mais precisamente as dissertações de mestrado de LOPES (2003), TRAUDI (2002) e CASTRO (2001) sobre registros de representação semiótica de outros conceitos utilizados no processo de aprendizagem da Matemática.

2 – A ESCOLHA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Após definir as turmas que seriam investigadas, fizemos entrevistas com professores do Departamento de Matemática, responsáveis por disciplinas de Cálculo, para identificarmos quais livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral eram mais utilizados por eles para o ensino dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções. O critério para escolha dos professores foi o de que os mesmos deveriam ter ministrado a disciplina de Cálculo para os referidos cursos e, se possível, ser do quadro regular do Departamento. Os livros apontados por eles foram:

1) ANTON, HOWARD. *Cálculo:* Um Novo Horizonte. v.1 – 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
2) LEITHOLD, LOUIS. *O Cálculo com Geometria Analítica*. v.1 – 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.
3) FLEMMING, DIVA MARÍLIA; GONÇALVES, MIRIAM BUSS. *Cálculo A*. 5.ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
4) STEWART, JAMES. *Cálculo*. v.1 – 4.ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2001.
5) SWOKOWSKI, EARL WILLIAM. *Cálculo com Geometria Analítica*. v.1 – 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

A análise dos livros didáticos apontados pelos professores, nos possibilitou delimitar os possíveis registros de representação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções que nos deram uma referência para uma análise comparativa com os registros de representação que seriam utilizados pelos sujeitos na resolução do teste diagnóstico. Uma análise desses registros se encontra no capítulo 3 sobre Máximos e Mínimos de Funções.

3 – SISTEMAS DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO NA APRENDIZAGEM DO CÁLCULO

Nesta parte nos dedicamos à revisão bibliográfica referente a trabalhos sobre a aprendizagem de conceitos de Cálculo que tenham utilizado registros de representação. Nesse sentido, estudamos os trabalhos de dissertação de mestrado de GODOY (2004), MEYER (2003) e LEME (2003) sobre a aprendizagem da derivada, e o trabalho de dissertação de mestrado SILVA (2004) sobre a aprendizagem da integral. Esses trabalhos vêm compor um foco de pesquisa sobre a aprendizagem de conceitos de Cálculo tendo como referencial a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Esses trabalhos trazem contribuições importantes para a reflexão sobre as dificuldades pelas quais os acadêmicos dos cursos de graduação que estudam Cálculo têm encontrado. Estamos particularmente interessados em investigar relações entre essas dificuldades e os registros de representação semiótica dos conceitos de Cálculo estudados, em nosso caso, a aprendizagem dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções.

O trabalho de GODOY (2004), intitulado *Registros de Representação da Noção de Derivada e o Processo de Aprendizagem,* propõe investigar o conhecimento sobre a noção de derivada de alunos que já passaram por um curso de Cálculo Diferencial e Integral, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Ele desenvolveu uma pesquisa de caráter diagnóstico, obtendo os dados através da aplicação de testes, sobre os quais fez análises qualitativas e quantitativas. Em seu trabalho detecta que o registro de maior dificuldade para os alunos pesquisados é o gráfico, tanto em sua utilização como registro de partida, quanto como registro de chegada. Em contrapartida, o registro de língua natural se mostrou o mais utilizado, principalmente nos testes em que havia a necessidade de efetuar uma conversão de registro. Godoy também detecta que os alunos pesquisados apresentaram dificuldade em reconhecer no registro de representação simbólico *f'(x)* o significado da derivada como coeficiente angular da reta tangente. Para Godoy dois tipos de enfoques podem ser encontrados no ensino da noção de Derivada, o teórico, ligado a conceitos e definições, ou o técnico voltado mais para processos e técnicas. "A prática docente e também pesquisas, como: AMIT e VINNER (1990), HIEBERT e LEFEVRE (1986) e LEME (2003) têm indicado que estudantes conseguem bons resultados em trabalhos sobre derivada que enfocam os aspectos operatórios, não sendo o caso quando realizam trabalhos sobre o mesmo tema, porém, com enfoques conceituais" (GODOY, 2004, p.8). A pesquisa de Godoy indica que as dificuldades de ensino-aprendizagem do conceito de Derivada podem estar relacionadas ao fato de no ensino privilegiarem-se alguns registros de representação na introdução da noção deste conceito, nos problemas e exercícios, em detrimento de outros. Observando que, no processo de ensino, a prática da sala de aula vem carregada da experiência do professor, cabendo a ele explorar os significados e a diversidade de registros de representação do conceito estudado.

> Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em Matemática, embora, várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. (DUVAL, 2003, p.31).

Para Godoy, referenciado por Duval, a articulação dos registros constitui uma condição de acesso à compreensão de um conceito matemático, sendo assim, ele indica para novas pesquisas, a busca de abordagens de ensino que favoreçam a aprendizagem do conceito de Derivada, onde haja a otimização da articulação entre registros de representação desse conceito nas diferentes situações que envolvem seus significados.

O trabalho de SILVA (2004), intitulado *A Noção de Integral em Livros Didáticos e os Registros de Representação Semiótica*, propõe analisar como dois livros didáticos de Cálculo tratam o tema Integral, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Trata-se de uma análise qualitativa, baseada num exame cuidadoso dos livros: *Um Curso de Cálculo, volume I, 5ª edição* *de Hamilton Luiz Guidorizzi, da editora LTC, Rio de Janeiro, 2001; e Cálculo, volume I, 4ª edição de James Stewart, da editora Pioneira, São Paulo, 2002.* Segundo Silva, os resultados mostram que se os registros de representações apresentados nos livros forem utilizados adequadamente, tanto pelos alunos quanto pelos professores, através da utilização das conversões, a partir das situações propostas, podem levar o aluno a um maior nível de compreensão. O autor procurou mostrar os diversos registros usados pelos autores, os tratamentos realizados e as conversões, entre os registros, que segundo a teoria de Duval, são de fundamental importância para a aquisição do conhecimento. Para ele, apesar do avanço do uso de recursos tecnológicos no ensino de Cálculo, o livro didático continua sendo o carro chefe no processo de ensino e aprendizagem. Em sua experiência em sala de aula, Silva observa que muitos alunos não compreendem o conceito de Integral. Para ele essa dificuldade se revela quando o aluno ao se deparar com um problema na língua natural em que se pede para calcular a área de uma região, em geral, tem dificuldade de representar graficamente tal situação e de interpretar a integral como sendo a ferramenta, por excelência, para efetuar esse cálculo. Ele indica que tais dificuldades talvez sejam devidas ao ensino que, na maioria das vezes, se restringe à aplicação de técnicas, de regras e de algoritmos, ou seja, o ensino de enfoque procedimental. O autor cita uma série de pesquisas que indica um baixo aproveitamento nas disciplinas de Cálculo. Dentre elas destaca a de BARBOSA & NETO (1992), que realizaram um estudo em relação ao rendimento dos alunos na mesma disciplina de Cálculo na Universidade Federal do Ceará, através de uma amostra de 97 alunos de 18 turmas dessa disciplina. Foi constatado que apenas 27,9% dos alunos obtiveram aprovação e o restante, 72,1%, não obtiveram êxito. Em alguns casos estes percentuais de aprovação são baixíssimos, como ocorreu com uma turma do curso de Matemática, com 9,4% de aprovação e uma turma do curso de Geologia, com 6,4% de aprovação. Silva menciona inclusive o processo de transposição didática como um dos fatores que também influencia no baixo aproveitamento da disciplina de Cálculo. Para ele, qualquer que seja o processo utilizado para se alcançar sucesso na aprendizagem se apóia em algum tipo de representação, uns mais sofisticados com representações dinâmicas (softwares), outros mais simples, usando papel e lápis. Pode-se observar que essas tais representações são importantes, pois o aluno, na tentativa de resolver qualquer questão, procura representá-lo de alguma forma, como meio de auxiliar o entendimento. Após essas considerações o autor levanta algumas questões tais como: Será que os dois livros trazem todas as formas para a representação de Integral? Os tratamentos são explorados nos seus diversos registros? É dada importância às conversões? Como isso se dá? As conversões não-congruentes são exploradas? Os tratamentos são diferenciados das conversões? Os livros dão condições para que o aluno não confunda o objeto e sua representação? Para justificar o uso dos registros de representação na análise de livros didáticos de Cálculo o autor faz referência à obra “Conversion et Articulation des Representations Analogiques” de Duval, que é dedicada a analisar as representações produzidas em um capítulo de livro, em uma seqüência, em trabalhos de alunos, ou mesmo em artigos de revista de grande público ou até mesmo em um hipertexto.

Em seu capítulo II sobre procedimentos metodológicos, Silva destaca que pretende analisar se os autores, nos livros, propiciam articulação entre registros de representação: simbólico, figural, língua natural e tabela. Além disso, ele se propõe a investigar os tratamentos envolvidos em cada registro considerado. Em seguida, indica que faz uma análise de como o conceito integral é apresentado em cada um dos livros em termos dos registros de representação semiótica. É dada ênfase às seções que tratam propriamente da definição de Integral e, nas aplicações, indica que a prioridade foi dada ao cálculo de área, de volume, de comprimento de arco, de distância e de trabalho. Ele procura investigar como os assuntos são trabalhados, como os exemplos são tratados, em que quantidade e, quais as características das listas de exercícios. Como já foi dito anteriormente, o autor optou pela análise de dois livros que, segundo ele, se diferenciam quanto a sua origem, sendo que um dos autores, Guidorizzi, é brasileiro e outro, Stewart, norte americano. Segundo ele, o fato da sociedade americana dispor de maior acesso a uma tecnologia mais aperfeiçoada e que já está inserida nas escolas e universidades, é importante para justificar as opções metodológicas dos autores. As abordagens são diferenciadas: um deles apresenta os assuntos, seguindo o padrão: definição, exemplo, teorema, exercício,... O outro introduz o conteúdo através da apresentação de problemas e, somente após a resolução e discussão destes é que oficializa a definição. Além disso, este último lança mão de recursos tecnológicos, tais como: computador, calculadora, etc. Segundo ele, a quantidade de exercícios colocada em cada obra é bem diferenciada. O livro de Stewart apresenta uma quantidade muito superior ao do Guidorizzi. Há uma variedade de registros utilizados nos enunciados dos exercícios e exemplos. Ambos valorizam exercícios que utilizam as técnicas de integração. Na tentativa de responder as questões propostas, Silva observa que os autores utilizam vários registros, não só na apresentação do conteúdo, como também, nos exemplos e nos enunciados dos exercícios propostos, em alguns casos, propondo aos leitores a mudança de registros. Na apresentação das definições, Stewart explora mais registros, principalmente, o gráfico. Ambos os autores dão grande ênfase ao registro simbólico quando trabalha as técnicas de integração, apresentando de maneira sutil a mudança de variável através do registro gráfico, o que normalmente é feito no registro simbólico. Em muitos exemplos as conversões são exploradas nas resoluções, especialmente nos capítulos em que são trabalhadas as aplicações. Silva pôde identificar várias situações-problema que exigem, de forma natural, a conversão para que sejam resolvidas. Ele observa que até mesmo as conversões não-congruentes são contempladas. As conversões foram utilizadas na apresentação e interpretação de situações problema, com a utilização dos registros gráficos, simbólicos e língua natural para o desenvolvimento dos exemplos. Ele aponta que houve a exploração, principalmente, do registro gráfico que ajuda na visualização da região a ser encontrada e a conversão para o registro tabela que melhor quantifica o valor da área. Os tratamentos são fundamentais, em especial, nos registros língua natural e simbólico, os quais são bastante explorados em todos os capítulos. Naqueles em que são trabalhadas as técnicas, sua utilização é acentuada. Segundo ele, Stewart faz, de forma interessante, tratamentos no registro gráfico, que são importantes para que o leitor perceba que as integrais inferiores e superiores tendem para um mesmo valor, na medida em que se aumenta o número de retângulos.

Quanto a não confundir o objeto (integral) e a sua representação, Silva não percebeu um trabalho mais específico dos autores. Segundo ele, essa questão deveria ser mais explorada na tentativa de esclarecer para o leitor o que é o objeto e como diferenciá-lo da representação. Quanto às aplicações da integral, além dos clássicos casos da Geometria e da Física, no livro de Stewart são encontrados exemplos e exercícios relativos a outras áreas do conhecimento, como: Biologia, Química, Medicina, Estatística, Economia, Probabilidade, etc. Além das diferenças já apontadas na abordagem da integral feita nos livros analisados, ele destaca a presença de "projetos de extensão" encontrados no final dos capítulos do livro de Stewart. Segundo o autor, tais projetos poderiam ser um instrumento para envolver os estudantes e torná-los aprendizes ativos.

Silva conclui que os registros são apresentados, os tratamentos e conversões são explorados e assim, ele espera que professores e alunos façam uso mais cuidadoso dos livros didáticos para poder tirar maior proveito do potencial de registros de representação que eles disponibilizam, para que, dessa forma, possa haver uma diminuição dos problemas de aprendizagem de Cálculo.

O trabalho de MEYER (2003), intitulado *Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual*, propõe investigar, através de uma pesquisa de caráter diagnóstico, elementos da imagem conceitual e definição conceitual, relativos ao conceito de derivada, quando interpretados geometricamente. A base teórica de sua pesquisa é a teoria de David Tall e Shlomo Vinner, sobre imagem conceitual e definição conceitual. A autora assume que a compreensão de um conceito matemático está associada ao estabelecimento de conexões entre as diversas partes do conhecimento matemático, relativo a esse conceito. Em sua pesquisa, ela busca uma melhor compreensão do processo de estabelecimento das conexões entre as diversas partes do conhecimento matemático, relativo ao conceito de derivada, por meio da elaboração de um diagnóstico sobre elementos que compõem a imagem conceitual e definição conceitual dos sujeitos pesquisados, referente ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente. Ela considera que poder inferir aspectos da imagem conceitual relativa a uma noção matemática. É um meio de poder inferir como o sujeito concebe essa noção. Assim, considera que a inferência de aspectos da imagem conceitual é necessária para enfrentar dificuldades de aprendizagem. O objetivo de sua pesquisa é inferir como estudantes universitários que já cursaram as disciplinas de Cálculo I e II concebem e expressam o conceito de Derivada, quando interpretado geometricamente. A autora destaca a existência dos enfoques conceituais e procedimentais no ensino de Cálculo, baseando-se no trabalho de HIEBERT e LEFEVRE (1986). A partir disso, se propõe a investigar o processo de estabelecimento de relações entre as várias partes da informação que constituem o conhecimento matemático, buscando responder as seguintes questões: “*Que imagem conceitual e definição conceitual podem ser inferidas de estudantes que já cursaram as disciplinas Cálculo I e II, a partir dos aspectos relativos ao conceito de derivada, mobilizados por eles na resolução de tarefas que envolvam tal conceito?”, “Que tipos de relações existem entre imagem conceitual, definição conceitual e a definição formal de derivada?”*. A partir desses questionamentos, a autora supõe a existência de uma ampla diversidade de representações visuais, imagens mentais e coleções de impressões e experiências relativas ao conceito de Derivada, constituindo a imagem conceitual a ser investigada em alunos que já cursaram as disciplinas de Cálculo I e II.

Finalizando as observações sobre o trabalho de Meyer, destacamos uma de suas conclusões:

> Dessa forma, acreditamos que apenas inserir estudantes em contextos capazes de motivá-los a mobilizar elementos conflitantes da sua imagem conceitual, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, não seja o suficiente para promover a aquisição de uma compreensão conceitual, relativa ao conceito de derivada. (MEYER, 2003, p.94-95).

Observando esses resultados, pensamos que nosso trabalho, juntamente com o trabalho de Godoy venha complementar a pesquisa de Meyer, pois, acreditamos que para o aluno ser capaz de ativar seu sistema cognitivo para a apreensão de objetos matemáticos, é necessário envolver os registros de representação semiótica.

O trabalho de LEME (2003), intitulado *“Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada”*, pretende investigar possíveis causas de dificuldades para a compreensão conceitual da noção de derivada, fundamentando-se no pressuposto teórico de SFARD (1991), segundo o qual, noções abstratas podem ser concebidas de duas maneiras fundamentalmente diferentes: estruturalmente – como objetos, e operacionalmente – como processos. A transição de uma concepção “processo” para uma concepção “objeto” decorre da conquista dos estágios de interiorização[5],

[5] O processo é tido como interiorizado quando “pode ser carregado por meio de representações (mentais)”, e para que possa ser considerado, analisado e comparado, ele necessita ser, na verdade, executado.

condensação[6] e reificação[7]. Sua pesquisa foi desenvolvida por meio de análise de um livro didático, selecionado a partir de critérios relacionados à abordagem de Cálculo, e a conteúdos específicos de Derivada, cujas análises possibilitaram apresentar como conclusão, as seguintes causas: as dificuldades inerentes ao desenvolvimento do pensamento científico; o privilégio da representação simbólica da derivada, encontrado nos livros didáticos; a falta de atividades, discussões ou exercícios que propiciem aos estudantes atingir o estágio de reificação. Segundo Leme, como docentes da disciplina de Cálculo, dizemos ou já ouvimos dizer frases do tipo: “Os alunos chegam à universidade sem base”, “Os alunos não estudam”, “O Cálculo é uma disciplina difícil”. Enquanto os alunos, sujeitos da aprendizagem, apresentam argumentos diferentes, como: “Até sei resolver limites e derivadas, mas o conceito eu ainda não entendi direito”, “já aprendi a derivar. Sei que a derivada de sen x é cos x, mas não consigo entender o porquê”. Para o autor, depoimentos como estes parecem revelar que esses alunos estão num estágio de conhecimento em que as técnicas operatórias já são conhecidas. No entanto, tais técnicas não são suficientes para propiciar a compreensão conceitual dessa noção. As dificuldades apresentadas pelos alunos, relativamente à resolução de problemas que enfoquem mais conceitos do que técnicas operatórias são, em geral, interpretadas como resultantes de abordagens de ensino que priorizam a utilização de regras e cálculos. Porém, Leme encontra, na teoria de Sfard, indicação de que as causas das dificuldades podem estar além das abordagens de ensino, estando relacionadas ao processo de estruturação do pensamento científico.

> Diferentemente de objetos materiais, as elaborações de Matemática avançada são totalmente inacessíveis para nossos sentidos – elas só podem ser vistas pelos olhos de nossa mente. Além disso, <u>mesmo quando desenhamos uma função ou escrevemos um número, temos o cuidado em enfatizar que tal signo no papel é uma entre as várias representações possíveis da mesma entidade abstrata, que não pode ser vista nem tocada...</u> “Ver”, de alguma forma, estes invisíveis objetos parece ser um componente essencial da habilidade Matemática, e a falta de tal capacidade pode ser uma das maiores razões dos porquês da Matemática parecer impermeável às várias “mentes bem formadas”. (SFARD, 1991, apud LEME, 2003, p.19). (grifo nosso)

[6] Nesse estágio, o estudante é capaz de pensar sobre um dado processo, sem a necessidade de entrar em seus detalhes.

[7] Ocorre quando o estudante torna-se capaz de conceber a noção como um objeto.

O destaque, em negrito, que fizemos na fala de Sfard, demonstra que nossa pesquisa vem ao encontro da pesquisa de Leme, no sentido de que os Sistemas de Registros de Representação desempenham um papel de destaque na compreensão dos conceitos de Cálculo, em particular, nos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções. Como já citamos acima, um dos pontos apontados por Leme, em sua conclusão da pesquisa, é o privilégio da representação simbólica da derivada, encontrado nos livros didáticos. Acreditamos que nosso trabalho venha somar às investigações de Leme (2003) para poder compreender melhor essas dificuldades encontradas pelos estudantes no Cálculo e, em geral, na Matemática, apontadas, por ele, em sua pesquisa.

4 – SISTEMAS DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Dedicamos aqui à revisão bibliográfica referente a trabalhos sobre a aprendizagem de conceitos em Matemática que tenham se utilizado dos registros de representação, consistindo numa grande quantidade de trabalhos realizados. Destacamos alguns trabalhos de mestrado realizados por pesquisadores na PUC – SP, por utilizarem referenciais teóricos e abordarem temas que se aproximam de nosso objeto de pesquisa.

Inicialmente, analisamos o trabalho de conclusão de mestrado de LOPES (2003), intitulado *“A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: Uma proposta de ensino”*. Este trabalho se constitui em uma proposta de avaliação de uma seqüência didática, visando a introdução do conceito de função, em particular da função afim. Fundamenta-se em elementos teóricos propostos por R. Duval e B. J. Caraça. De modo mais específico, pretende-se avaliar os fenômenos didáticos ocorridos na resolução de problemas envolvendo a conversão do registro gráfico de uma função afim para o algébrico e vice-versa. A proposta foi desenvolvida em uma classe de 8ª série do ensino fundamental de uma escola pública na zona leste da cidade de São Paulo. Essa pesquisa revelou a importância da utilização de múltiplas representações no processo de conceitualização de função, favorecendo a coordenação entre as variáveis visuais pertinentes, no registro gráfico, e os correspondentes valores categoriais no registro algébrico. Em sua prática como professor do ensino médio e superior, Lopes pôde constatar a dificuldade dos alunos em conteúdos que têm como pré-requisito o conceito de função, cuja formação dá-se em um processo longo e demorado, e que inclui limites, derivadas e integrais no ensino superior, e funções quadráticas, trigonométricas e logarítmicas, no ensino médio. Levando em consideração observações sobre as dificuldades dos alunos na interpretação da representação gráfica e da conversão desta, para uma linguagem algébrica, Lopes desenvolve e avalia uma proposta de ensino, constituída de atividades introdutórias à noção de função, ou seja, de atividades que envolvam implicitamente conceitos e propriedades relativas a essa noção. Ele faz opção por trabalhar com diversos registros de representação e por ter, como foco central, as representações gráfica e algébrica de função. Segundo ele, o gráfico cartesiano é um instrumento privilegiado para representar e caracterizar regularidades possíveis de serem descritas em linguagem simbólica. A descoberta e a generalização dessas regularidades constituem um desafio para os alunos. Tais regularidades, quando representadas graficamente, apresentam aspectos visuais mais facilmente percebidos do que quando essas mesmas regularidades são apresentadas na forma de uma expressão algébrica, ou de uma tabela de pares ordenados. Lopes destaca que SILVA *et all* (2002) propõem a alunos do primeiro ano do curso de Cálculo, que reconheçam características das funções a partir de suas representações gráficas. Embora enfoquem a questão sob a ótica do contrato didático, estes autores consideram aspectos importantes envolvidos na atividade de conversão entre as representações gráfica e algébrica de funções. Para ele, a constante integração entre as representações gráfica e algébrica sem, no entanto, perder o foco principal dado à função e suas características, reforça a importância atribuída por Duval ao fato de não se confundir o objeto matemático com nenhuma de suas representações e à necessidade de coordenação entre os diversos Sistemas de Registros de Representação. A proposta de ensino de Lopes desenvolveu-se em um ambiente, onde os alunos discutiram suas escolhas e decisões sobre suas ações, buscaram a validação através de debates coletivos, e, por fim, viram suas conclusões institucionalizadas com o estatuto de saber matemático. Para ele, um ambiente assim criado não visa apenas à aquisição desse ou daquele conhecimento matemático, mas:

> [...] através dele, o desenvolvimento da capacidade de pensamento da criança e do pré-adolescente. O desenvolvimento dessa capacidade depende das aquisições funcionais dos diferentes sistemas requeridos para a compreensão de todos os conhecimentos que devem adquirir não somente na escola, mas depois dela. (DUVAL, 1999, p. 20)[8].

Lopes busca responder, principalmente, as seguintes questões:

- Que fenômenos didáticos ocorrem, quando o aluno faz o tratamento dentro de um mesmo registro, ou uma conversão entre diferentes registros, nas condições institucionais e de ensino em que se deu a pesquisa?
- Que dificuldades ele encontra e de que procedimentos se utiliza nessa tarefa?
- Em que medida uma proposta de ensino, voltada às atividades de conversão e tratamento de registros de representação, permite o domínio de aquisições funcionais dos diferentes sistemas de representação requeridos para a formação do conceito de função?

Vindo ao encontro de nossa pesquisa, Lopes, em sua avaliação dos procedimentos de resolução das atividades proposta em sua seqüência didática, pôde constatar que a utilização de diferentes registros de representação possibilitou uma relativa diversidade desses procedimentos: uso ou não de tabelas na mediação entre registro gráfico e geométrico, idas e vindas dos pontos do gráfico às suas coordenadas e vice-versa, diferentes maneiras de buscar a coordenação entre os registros em jogo, favorecendo, assim, a aprendizagem do aluno.

Tendo em vista o destaque que o termo resolução de problema tem tido na Educação Matemática e de algumas dificuldades dos alunos em resolvê-los, o trabalho de TRALDI (2002), intitulado *“Sistema de Inequações do 1º Grau: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações”*, busca investigar se os alunos que estão terminando o Ensino Médio resolvem alguns problemas de programação linear que podem ser solucionados com conceitos e procedimentos já estudados, entre eles o sistema de inequações do 1º grau. Tendo como pressuposição que alguns alunos teriam dificuldades em resolver esses problemas, o autor faz um teste diagnóstico para confirmar sua proposição. Depois dela confirmada e tendo como questão de pesquisa observar, se como

---

[8] Apud LOPES, 2003, p.16-17.

proposta por DUVAL (1993), as atividades que consideram o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros de representação de um determinado objeto contribuem no processo ensino-aprendizagem desse objeto, elabora uma seqüência didática. Após o desenvolvimento dessa seqüência-didática, em uma outra turma da 3ª série, ele aplica um pós-teste e faz uma análise comparativa entre o teste diagnóstico da primeira turma e o pós-teste aplicado na segunda turma. Segundo Traldi, essa análise evidencia que, enquanto os alunos da primeira turma não obtiveram sucesso na resolução dos problemas de programação linear e somente resolveram corretamente algumas das atividades sobre inequações do 1º grau, os alunos da segunda turma abordaram os problemas e a maioria deles obteve sucesso na resolução. Sendo assim, ele pôde inferir que as atividades de tratamento, conversão e coordenação dos registros de representação do objeto matemático sistema de inequações, trazem uma importante contribuição para a formação do conceito e a aplicação dele na resolução de problemas de programação linear.

Finalizando a tarefa de revisão bibliográfica referente aos trabalhos de pesquisas realizados sobre os registros de representação semiótica de conceitos utilizados no processo de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e da Matemática, de forma geral, apresentamos uma análise do trabalho de conclusão de mestrado de CASTRO (2001), intitulado *"Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação"*. Esse trabalho se enquadra no âmbito das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, tendo por foco a noção de vetor. A autora utilizou como base teórica a Teoria dos Registros de Representação de DUVAL (1995). Ela desenvolveu a pesquisa pela concepção, realização, observação e análise de uma seqüência didática, focando a articulação de registros do conceito de vetor. A pesquisa foi realizada com alunos que tinham estudado ou estavam cursando a disciplina Vetores e Geometria Analítica. A elaboração da seqüência didática contempla três categorias de registros: simbólica, figural e língua natural. Na simbólica, "n-uplas" e "combinações lineares", na figural a "flecha" e na língua natural "vetor". As análises preliminares para a elaboração da seqüência foram efetivadas por um teste diagnóstico, aplicado a 70 alunos de três escolas de engenharia. Os resultados obtidos nesta pesquisa inferiram que os alunos apresentavam dificuldades em atividades envolvendo conversão de registros de vetor, o que, segundo Duval, indica uma falha na apreensão dos conceitos estudados. Essa pesquisa veio reforçar a importância dos registros de representação na aprendizagem de conceitos da Matemática do ensino superior. Além disso, a Geometria Analítica apresenta proximidade com o Cálculo e os procedimentos metodológicos (Engenharia Didática e análise de protocolos), utilizados por CASTRO (2001), se aproximam dos utilizados em nosso trabalho.

Todas as pesquisas realizadas no contexto do Cálculo Diferencial e Integral são corroboradas pelas realizadas sobre outros conceitos da Matemática, o que reforça a problemática da nossa pesquisa, ou seja, muitas das dificuldades dos estudantes podem estar relacionadas ao fato de não distinguirem os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções de suas representações semióticas e também à dificuldade de transitar pelos diversos registros que representam esses conceitos, assim como coordenar esses diversos registros para a solução de problemas práticos.

A NOÇÃO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

1 – INTRODUÇÃO

A história do desenvolvimento do Cálculo nos mostra que os processos de determinação de valores extremos sempre estiveram ligados aos métodos de tangentes. Foram Fermat[9] e Descartes[10] que protagonizaram as primeiras discussões sobre esses métodos, visto que os gregos não possuíam um conceito bem definido sobre ângulos e tangentes. No século XVII diversos problemas que necessitavam da determinação de máximos e mínimos apareceram, tais como: o problema de Kepler[11], que estudou a melhor forma para os barris de vinho, o problema de Huygens[12], que se utilizou do método de Fermat para determinar a forma que apresentasse a menor aberração esférica para uma lente de determinada abertura e distância focal e a demonstração da lei de refração de Snell[13], onde Leibniz também aplicou o método de Fermat, que consistia em determinar pontos onde a função assume um máximo ou um mínimo.

> Ele comparou o valor de f(x) num ponto com o valor f(x+E) num ponto vizinho. Em geral esses valores serão bem diferentes, mas num alto ou num baixo de uma curva lisa a variação será quase imperceptível. Portanto para achar os pontos de máximo e de mínimo Fermat igualava f(x) e f(x+E), percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase iguais. Quanto menor o intervalo E entre os dois pontos mais perto chega a pseudo-equação de ser uma verdadeira equação; por isso Fermat, depois de dividir tudo por E fazia E = 0. (Boyer, 1974, p.255).

O método de Fermat corresponde hoje à determinação da derivada de primeira ordem e a conseqüente igualdade dela a zero.

---

[9] FERMAT, Pierre de, nasceu na cidade de Beaumont-de-lamagne, França, a 17 de Agosto de 1601 e morreu em Janeiro de 1665, em Castres (também na França). Em Bordeaux ele esteve em contato com Beaugrand e durante esse período ele produziu importantes trabalhos sobre máximos e mínimos.
[10] DESCARTES, René (1596 – 1650), filósofo e matemático francês.
[11] KEPLER, Johann (1571 – 1630), astrônomo alemão.
[12] HUYGENS, Christiaan (1629 – 1695), matemático, físico e astrônomo holandês.
[13] SNELL, Willebrord van Roijen (1591 – 1626), matemático holandês.

Um outro matemático que trouxe grande contribuição para a teoria de Máximos e Mínimos de Funções foi Leibniz[14]. Percebendo que seu método poderia perder a importância no meio científico de sua época e já o tendo escrito a nove anos, resolveu publicá-lo em 1684, com o título de *"Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais".* Dessa forma expôs, pela primeira vez, seu Cálculo Diferencial, apresentando as fórmulas de derivação do produto, do quociente e da potência como a conhecemos hoje, além de aplicações geométricas. Ele percebeu a grande importância das notações como auxiliar do pensamento e foi responsável por muitas delas, como dx e dy para diferenciais em x e y, dentre outras.

Não poderíamos deixar de mencionar o outro inventor do Cálculo, Sir Isaac Newton[15], que em seus estudos sobre Cinemática (uma das partes da Física que estuda o movimento dos corpos) estabeleceu os princípios do Cálculo Diferencial e Integral. Ele representava as derivadas da função x(t) através de um ponto sobre a letra x, $\left(\dot{x}\right)$, para as derivadas de segunda ordem ele utilizava dois pontos sobre a letra x, $\left(\ddot{x}\right)$, notação pouco funcional, que não foi incorporada pelos outros cientistas. A principal contribuição dada por Leibniz e Newton foi o Teorema Fundamental do Cálculo, o que possibilitou todo o desenvolvimento do Cálculo.

Outro matemático de grande importância no desenvolvimento do Cálculo foi Lagrange[16], ele foi responsável pelas representações de derivadas que utilizam linhas do lado superior direito das letras que utilizamos para representar derivadas de funções (exemplos: *f', f'', y', y''),* ao usar uma linha estaria representando a derivada primeira; ao usar duas linhas a derivada segunda, e, assim, por diante. A Notação $D_x y$, muito utilizada hoje em dia, é atribuída ao matemático francês Arbogast[17].

Em nossa pesquisa vamos analisar os Registros de Representação Semiótica dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções envolvidos no processo de

---

[14] LEIBNIZ, Gottfried W. (1646 – 1716), matemático e filósofo alemão. Considerado o primeiro matemático a utilizar o termo função.

[15] NEWTON, Isaac (1642 – 1727), físico, matemático e astrônomo inglês, considerado, juntamente com Leibniz, os pais do Cálculo Diferencial e Integral.

[16] LAGRANGE, Joseph Louis (1736 – 1813), matemático francês.

[17] ARBOGAST, Louis François Antoine (1759 – 1803), introduziu essa notação em 1800.

aprendizagem, por parte dos alunos pesquisados, buscando relacionar a aquisição desses conceitos por parte dos mesmos, com os livros didáticos adotados pelos professores que apresentaram esses conceitos para eles. É possível que no processo de aprendizagem desses conceitos tenha havido a influência dos professores por meio de suas próprias anotações, bem como pela formação individual de cada um desses professores.

A quantidade de livros didáticos que apresentam esses conceitos é muito grande. Acreditamos que a escolha desses livros esteja relacionada à influência da formação citada anteriormente, pois acreditamos que um livro não seja escolhido por acaso, mas sim pela identificação do professor com o mesmo, devido exatamente ao estilo de trabalhar com as representações semióticas de cada autor. E é essa identificação que tem importância fundamental no processo de aprendizagem desses conceitos. Dessa forma optamos por verificar, nos livros mais adotados pelos professores dos alunos pesquisados, quais são os registros de representação semiótica que tiveram maior influência nesse processo de aprendizagem. Acreditamos que a criatividade do professor interfira de maneira fundamental na apresentação de outros registros de representação diferentes dos registros apresentados nos livros adotados por ele. Assim, queremos dizer que os cursos não seguem fielmente o que é proposto pelos autores dos livros didáticos, mas que certamente fornece elementos importantes para o desenvolvimento da aprendizagem dos conceitos apresentados aos estudantes.

Apresentamos, a seguir, uma análise da abordagem dos Sistemas de Registros de Representação Semiótica dos livros didáticos, concernentes ao objeto de nossa pesquisa.

2 – ANTON, H. *Cálculo:* Um Novo Horizonte

Professor Howard Anton é graduado em Matemática pela Lehigh University, mestre em Matemática pela University of Illinois e também se doutorou em Matemática na Polytechnic University of Brooklyn. Ele é muito conhecido pela sua grande produção de livros-textos em Matemática, com traduções para inúmeras línguas, sendo desta forma um dos autores com livros mais usados no mundo. Anton se interessa muito por tecnologia computacional relacionada à Educação Matemática. No prefácio desse livro ele deixa clara a preocupação em se alinhar com as tendências atuais do ensino de Cálculo, buscando focalizar mais, nessa edição, a questão da compreensão conceitual e a questão da aplicabilidade desses conceitos. Nesse trabalho Anton destaca o uso da tecnologia, fornecendo materiais para que os leitores que desejarem possa utilizar calculadoras gráficas, computadores ou sistemas algébricos computacionais. Destaca, também, os módulos que ele chama de horizonte, os quais são colocados no texto para serem elaborados para projetos individuais ou para projetos de grupos. Um outro destaque é a Modelagem Matemática que, através de um módulo horizonte, discute a obtenção de modelos matemáticos a partir de dados experimentais. Além de outros destaques, o autor apresenta o enfoque para a aplicabilidade do Cálculo, buscando uma maior aproximação da disciplina com o mundo real e com a experiência própria do aluno.

Em seu capítulo 6, sobre aplicações da Derivada, Anton propõe investigar problemas que têm como objetivo principal desempenhar melhor uma tarefa, ou seja, resolver problemas de otimização. Em seu tópico inicial, ele introduz os conceitos de Máximos e Mínimos Relativos e Absolutos, utilizando a língua natural associada a um registro figural, como é destacado abaixo:

> [...] observamos que se o gráfico de uma função for imaginado como sendo uma cordilheira em duas dimensões (Figura 3.2.1), então os máximos e mínimos relativos correspondem ao topo de morros e à base de vales, isto é, eles são os pontos mais alto e mais baixo em sua vizinhança próxima. [...] estamos preocupados com o problema mais abrangente de encontrar os pontos mais alto e mais baixo de toda a paisagem, isto é, procuramos pelo mais alto dos topos e pela mais baixa base de vales. Em termos matemáticos, procuramos o maior e o menor valor de uma função em um intervalo. (ANTON, 2000, p.330).

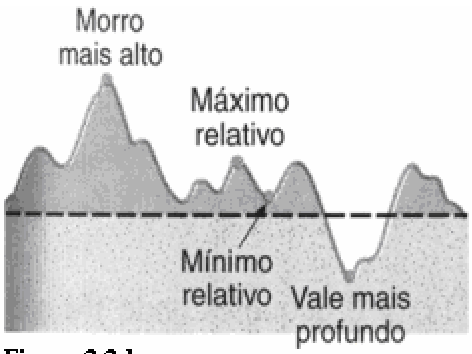


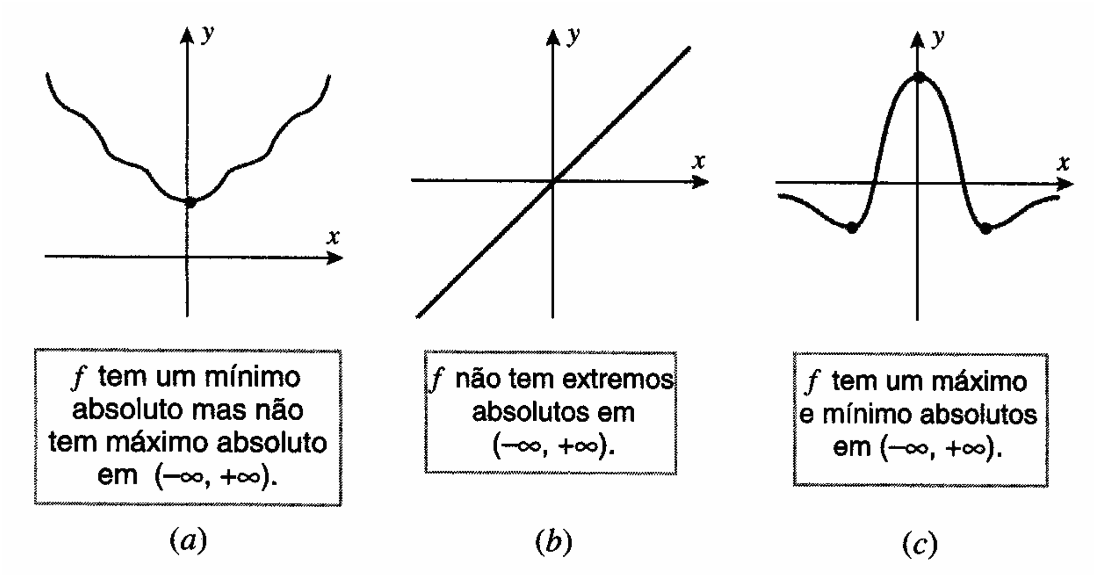
Figura 3.2.1

Logo em seguida à introdução, Anton apresenta a definição de Máximo e Mínimo Absolutos, utilizando um misto de dois registros de representação (linguagem natural e linguagem formal):

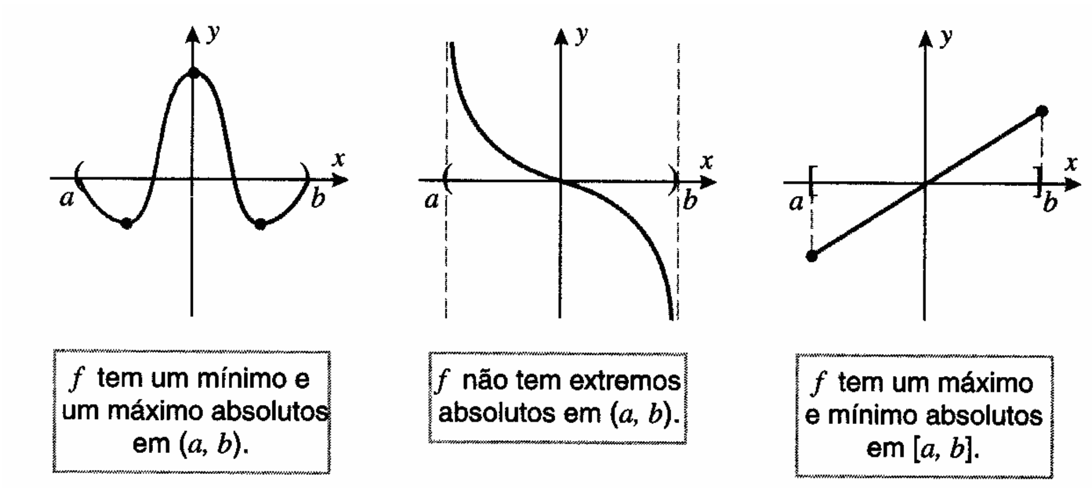
> Dizemos que uma função f tem um **máximo absoluto** em um intervalo I num ponto x_0 se $f(x_0)$ for o maior valor de f em I; isto é, $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x em I. Analogamente, dizemos que f tem um **mínimo absoluto** em um intervalo I num ponto x_0 se $f(x_0)$ for o menor valor de f em I; isto é, $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x em I. Se f tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto em I, dizemos que f tem em x_0 um **extremo absoluto em I**. (ANTON, 2000. p.330).

Em conformidade com DUVAL (1995, p.137-172), consideramos registro simbólico aquele que utiliza a escrita simbólica usada na lógica, e da qual a escrita conceitual de Frege[18] se baseou. Inclui quatro tipos de unidades elementares: as letras de função proposicional, os símbolos de quantificadores, as letras das variáveis (dependentes ou independentes) e os símbolos de operadores ou conectores proposicionais.

O autor faz uso abundante de registros gráficos para ilustrar a definição, conforme se segue:

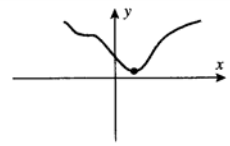
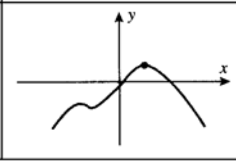
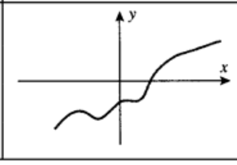
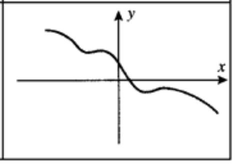


[18] FREGE, Friedrich Ludwig Gottlob (1848 – 1925), matemático, lógico e filósofo alemão.



(*d*) (*e*) (*f*)

Anton, ao apresentar os conceitos de extremos absolutos em intervalos infinitos, faz muitas associações de registros para melhor compreensão por parte do leitor, conforme ilustrada na tabela abaixo:

Limites	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
Conclusões se f for contínua	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$.	f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$.	f não tem nem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$.	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$.
Gráficos				

No tópico sobre Problemas Aplicados de Máximo e de Mínimo, Anton apresenta uma série de exemplos para o leitor, dentre os quais destacamos dois deles:

1º Exemplo:

Uma caixa aberta deve ser feita de uma folha de papelão medindo 16 por 30 cm, destacando-se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados (Figura 3.2.2). Qual é o tamanho dos quadrados para se obter uma caixa com maior volume?

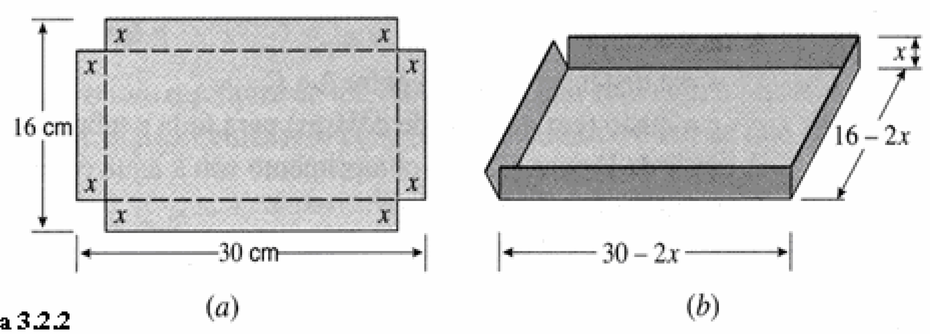


Figura 3.2.2

Solução: Seja

x = comprimento (em cm) dos lados dos quadrados a serem cortados

V = volume (em cm^3*) da caixa resultante*

Como estamos removendo quadrados de lados x de cada canto, a caixa resultante terá dimensões 16 – 2x por 30 – 2x por x (Figura 3.2.2b). Como o volume de uma caixa é o produto de suas dimensões, temos:

$$V = (16 - 2x)(30 - 2x)x = 480x - 92x^2 + 4x^3 \qquad (1)$$

A variável x nesta expressão está sujeita à certas restrições. Como x representa um comprimento, este não pode ser negativo e como a largura do papelão é de 16 cm, não podemos cortar quadrados com lados maiores do que 8 cm de comprimento. Assim, a variável x em (1) deve satisfazer $0 \le x \le 8$ *e, desta forma, reduzimos o nosso problema ao de encontrar o valor (ou valores) de x no intervalo [0, 8], para os quais (1) é máximo. A partir de (1) obtemos:*

$$\frac{dV}{dx} = 480 - 184x + 12x^2 = 4(120 - 46x + 3x^2)$$

Equacionando $\frac{dV}{dx} = 0$*, obtemos:*

$$120 - 46x + 3x^2 = 0$$

Que resolvida pela fórmula quadrática resulta nos pontos críticos:

$x = \frac{10}{3}$ *e x = 12*

Como x = 12 cai fora do intervalo [0, 8], o valor máximo de V ocorre ou no ponto crítico $x = \frac{10}{3}$ *ou em um dos extremos x = 0, x = 8. Substituindo em (1) estes valores obtém-se o maior volume possível* $V = \frac{19600}{27} cm^3 \cong 726cm^3$, *o qual ocorre quando cortamos quadrados com* $\frac{10}{3} cm$ *de lado. Isto está de acordo com o gráfico de (1), mostrado na Figura 3.2.3.*

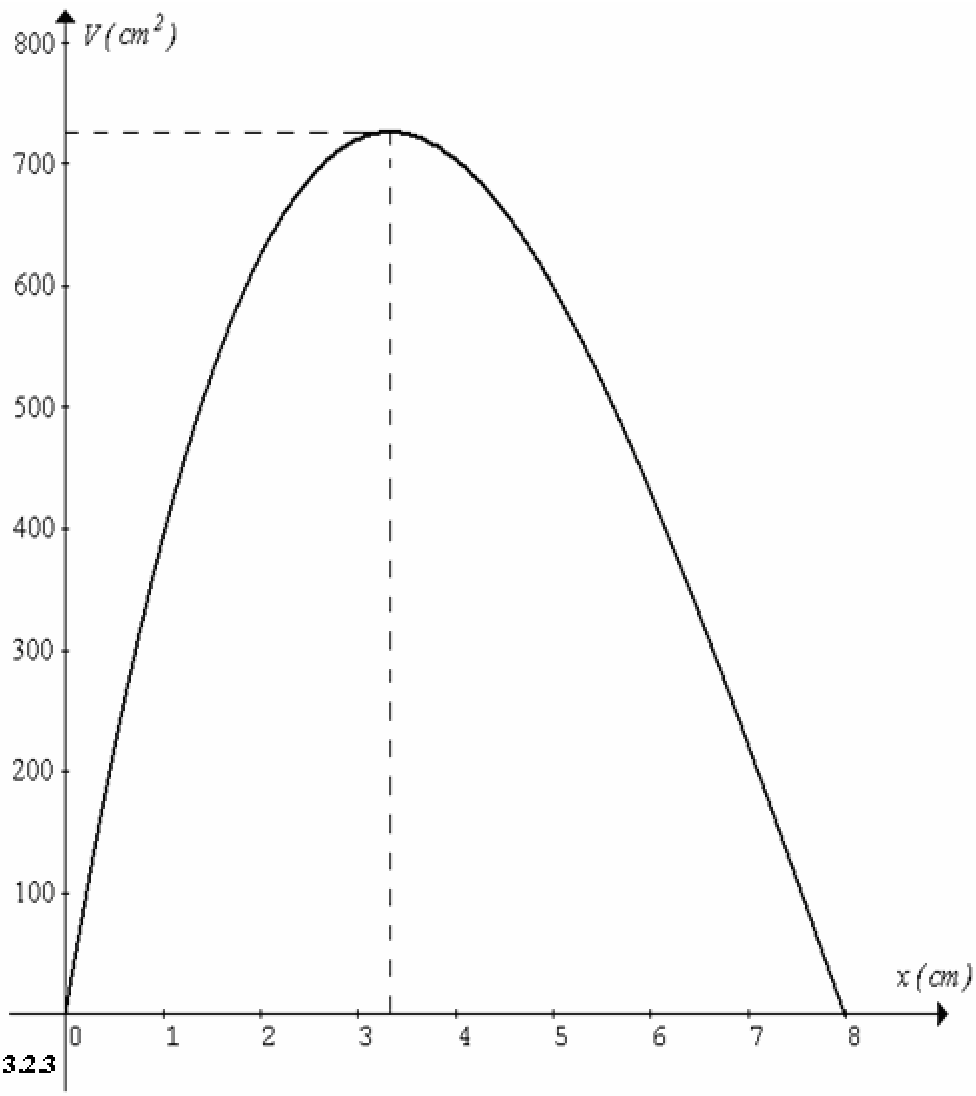


Figura 3.2.3

Esse exemplo mostra um tratamento feito dentro de um registro algébrico, seguido de um registro gráfico, onde Anton ilustra o comportamento da função para auxiliar a compreensão do resultado encontrado.

O outro exemplo é o seguinte:

Uma lata cilíndrica fechada deve conter 1 litro ($1000cm^3$) de líquido. Como poderíamos escolher a altura e o raio para minimizar o material usado na confecção da lata?

Solução: Seja

h = altura da lata (em cm)

r = raio da lata (em cm)

S = área da superfície da lata (em cm^2)

Supondo não haver perda nem superposição, a quantidade de material necessária para a confecção será igual a área da superfície da lata. Como a lata consiste de dois discos circulares de raio r e uma folha retangular com dimensões h por 2πr (Figura 3.2.4), a área da superfície será:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad (2)$$

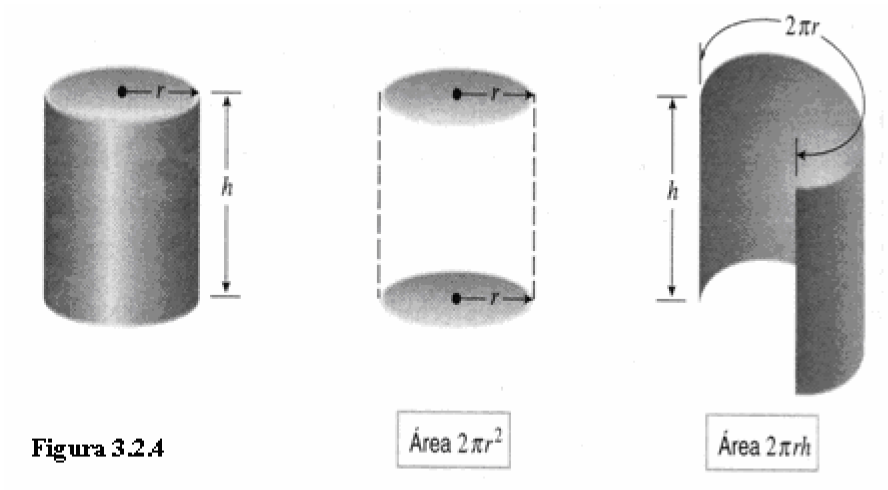


Figura 3.2.4

Como S depende de duas variáveis, r e h, vamos procurar por alguma condição no problema que nos permita expressar uma delas em termos da outra. Tendo isso em mente, observamos que o volume da lata é de $1000cm^3$; assim, a partir da fórmula $V = \pi r^2 h$ para volume de cilindro, temos:

$$1000 = \pi r^2 h \quad ou \quad h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad (3-4)$$

Substituindo (4) em (2), obtemos:

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad (5)$$

Assim, reduzimos o problema a encontrar um valor de r no intervalo (0, +∞) para o qual S é mínimo, desde que haja realmente um mínimo[19]*. Porém, S é uma função contínua de r no intervalo (0, +∞) e*

$$\lim_{r\to 0^+}\left(2\pi r^2 + \frac{2000}{r}\right) = +\infty \quad e \quad \lim_{r\to +\infty}\left(2\pi r^2 + \frac{2000}{r}\right) = +\infty$$

Assim sendo, S tem um mínimo no intervalo (0, +∞). Como esse mínimo deve ocorrer em um ponto crítico, calculamos:

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \qquad (6)$$

Equacionando $\frac{dS}{dr} = 0$, *obtemos:*

$$4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \quad ou \quad r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}} \qquad (7)$$

Como (7) é o único ponto crítico no intervalo (0, +∞), esse valor de r dá lugar ao valor mínimo de S. A partir de (4), o valor de h correspondente a esse r é

$$h = \frac{1000}{\pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}} = 2r$$

Segunda solução: A conclusão de que um mínimo ocorre no valor de r em (7) pode ser deduzida do teorema que afirma que se f é contínua e tem exatamente um extremo relativo em um intervalo I, então este extremo também será absoluto de f em I; e do teste da derivada segunda, observando que:

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

---

[19] O valor $r = 0$ deve ser excluído, pois uma lata cilíndrica com raio 0 cm não pode ter um volume de 1000 cm^3.

é positiva se r > 0, e logo é positiva se $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$*. Assim sendo, ocorre no ponto crítico* $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}} \cong 5{,}4$ *um mínimo relativo e, portanto, um mínimo absoluto.*

Terceira solução: A existência de um mínimo é sugerida pelo gráfico de S versus r, na Figura 3.2.5. Conforme mostrado em (7), esse mínimo ocorre em $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

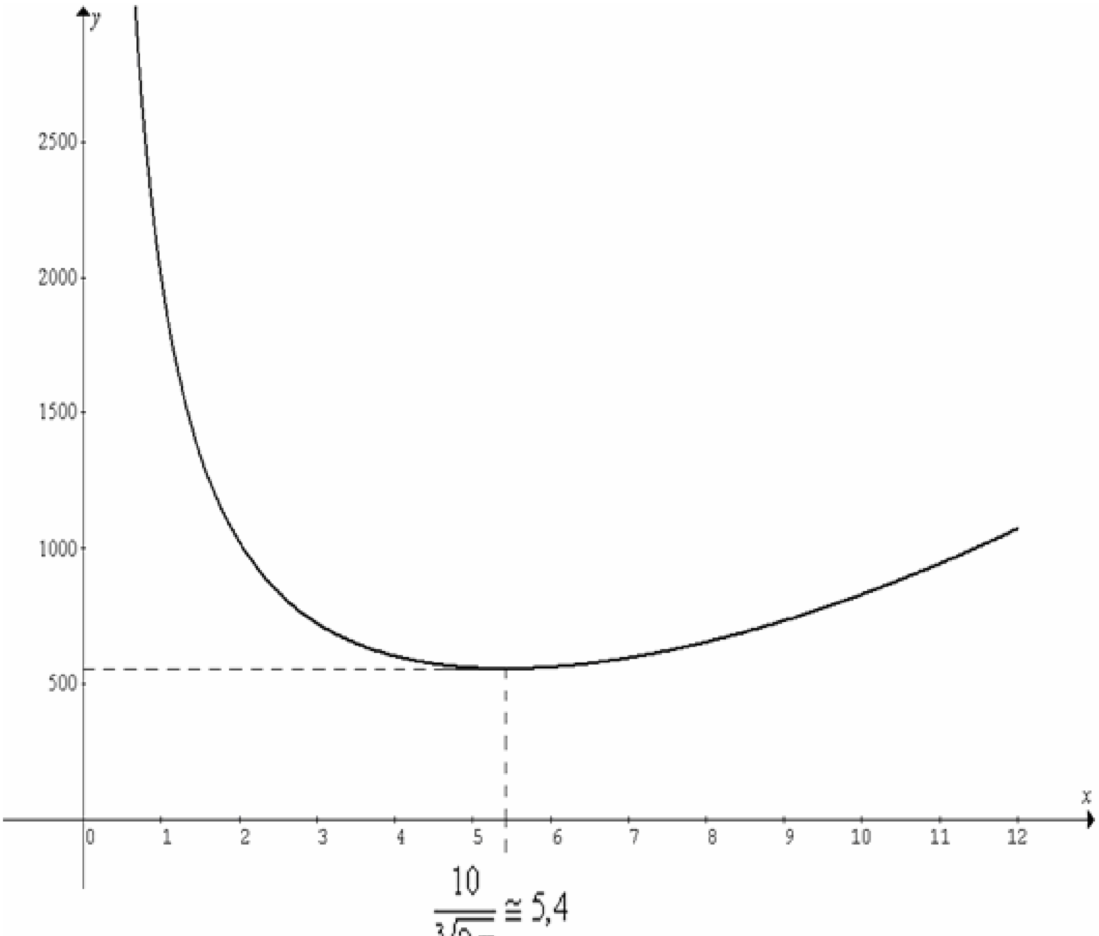


Figura 3.2.5

Como podemos constatar nesse último exemplo, para apresentar as duas primeiras soluções desse problema, Anton utiliza tratamentos de registros algébricos e na terceira solução faz uso de um registro gráfico para dar apoio às soluções anteriores.

Ainda dentro do tópico de problemas aplicados de Máximo e de Mínimo, vemos um grande número de situações-problema em diversas áreas do conhecimento, o que torna a compreensão da Teoria dos Registros de Representação de Duval essencial para possibilitar aos alunos maior facilidade em assimilar conceitos tão importantes para soluções práticas da vida do cidadão, tais como:

- Na Economia

  Uma forma líquida de penicilina fabricada por uma firma farmacêutica é vendida a granel a um preço de \$200 por unidade. Se o custo total de produção (em dólares) para x unidades for $C(x) = 500.000 + 80x + 0{,}003x^2$ *e a capacidade de produção da firma for de, no máximo, 30.000 unidades em um tempo especificado, quantas unidades de penicilina devem ser fabricadas e vendidas naquele tempo para maximizar o lucro?*

- Na Biologia

  Suponha que o número de bactérias em uma cultura no instante t é dado por $N = 5000(25 + t.e^{-t/20})$*. Ache o maior e o menor número de bactérias durante o intervalo de tempo* $0 \leq t \leq 100$*.*

- Na Pecuária

  Uma fazenda de gado permite 20 novilhos por 50 m^2 *de pasto; o peso médio de seus novilhos no mercado é de 900 kg. Estimativas do Departamento de Agricultura (EUA) indicam que o peso médio ficará reduzido em 22,5 kg para cada novilho que for acrescentado nos 50* m^2 *de pasto. Quantos novilhos devem ser colocados nos 50* m^2 *para que o peso médio deles seja o maior possível?*

- Na Física

  Suponha que a intensidade de uma fonte pontual de luz é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional à distância da *fonte. Dois pontos de luz com potências S e 8S estão separados por uma distância de 90 cm. Onde no segmento de reta entre as duas fontes a intensidade é mínima?*

Além desses exemplos o livro apresenta uma grande variedade de problemas e aplicações em diversas áreas de conhecimento.

3 – LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*

Leithold é um dos autores mais citados na relação dos livros didáticos de Cálculo, indicado pelos professores entrevistados no formulário de pesquisa. Analisando o capítulo sobre aplicações da Derivada, que apresenta os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, vemos que o autor privilegia um desenvolvimento dos conceitos de forma extremamente tradicional, ou seja, apresentando, inicialmente, a definição (ou o teorema), seguida de exemplos, tópico a tópico de forma linear. Em relação ao uso dos registros de representação, Leithold sempre utiliza pelo menos dois registros de representação na apresentação das definições e teoremas, sendo que um deles é sempre do tipo gráfico, apresentados com uma característica muito marcante a ser destacada – as definições ou os teoremas são sempre apresentados através de um registro na linguagem formal acompanhado de um ou mais exemplos que utilizam registros gráficos para ilustração dos conceitos trabalhados, como vemos a seguir:

Diz-se que uma função f tem um valor máximo absoluto num intervalo, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x no intervalo. Neste caso, f(c) será o valor máximo absoluto de f no intervalo.

Diz-se que uma função f tem um valor mínimo absoluto num intervalo, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x no intervalo. Neste caso, f(c) será o valor máximo absoluto de f no intervalo.

Leithold faz uso de um registro na língua natural para enfatizar as definições acima, como segue:

Um extremo absoluto de uma função no intervalo é um valor máximo absoluto ou um valor mínimo absoluto da função no intervalo. Uma função pode ou não ter um extremo absoluto num intervalo dado.

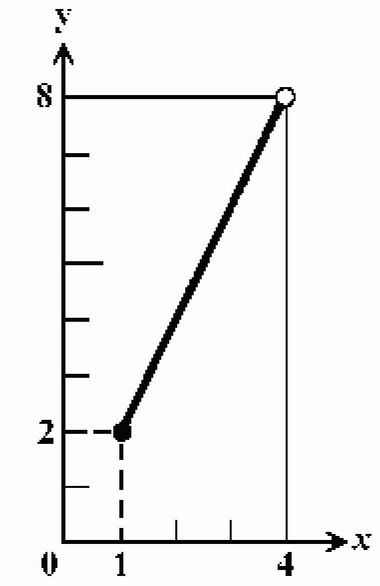


Figura 3.3.1

Em seguida, o autor apresenta cinco exemplos com suas respectivas soluções. Em cada solução vemos um registro gráfico dando um importante apoio para a assimilação desses conceitos.

Exemplo 1: *Dada f(x) = 2x encontre os extremos absolutos de f no intervalo [1, 4) se existirem.*

Solução: A figura 3.3.1 apresenta um esboço do gráfico de f em [1, 4). A função f tem um valor mínimo absoluto de 2 em [1, 4). Não existe um valor máximo absoluto de f em [1, 4), pois $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 8$*, mas f(x) é sempre menor que 8 no intervalo dado.*

Exemplo 2: *Dada f(x) = -x^2 encontre os extremos absolutos de f em (-3, 2] se existirem.*

Solução: A figura 3.3.2 mostra um esboço do gráfico de f em (-3, 2]. A função f tem um valor máximo absoluto de 0 em (-3, 2]. Não existe valor mínimo absoluto de f em (-3, 2], pois $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -9$*, mas f(x) é sempre menor que -9 no intervalo dado.*

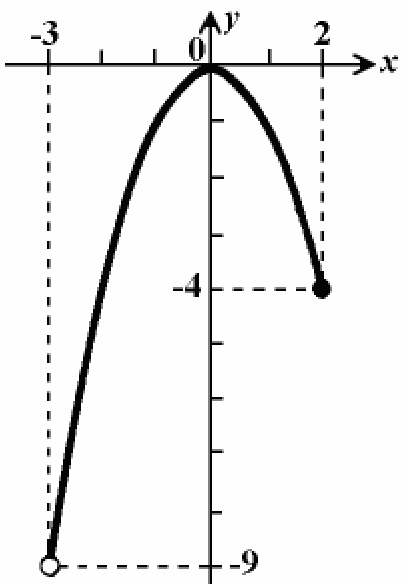


Figura 3.3.2

Exemplo 3: *Dada* $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ *encontre os extremos absolutos de f em (-1, 1) se existirem.*

Solução: A figura 3.3.3 mostra um esboço do gráfico de f em (-1, 1). A função f não tem valor máximo absoluto nem valor mínimo absoluto em (-1, 1).

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

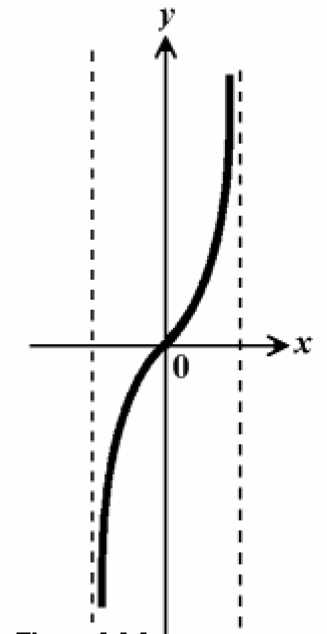


Figura 3.3.3

Exemplo 4: *Dada* $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x<1 \\ x^2 - 6x + 7, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$ *encontre os extremos absolutos de f em [-5, 4] se existirem.*

Solução: A figura 3.3.4 mostra um esboço do gráfico de f em [-5, 4]. O valor máximo absoluto de f em [-5, 4] ocorre em 1 e f(1) = 2; o valor mínimo absoluto de f em [-5, 4] ocorre em -5 e f(-5) = -4.

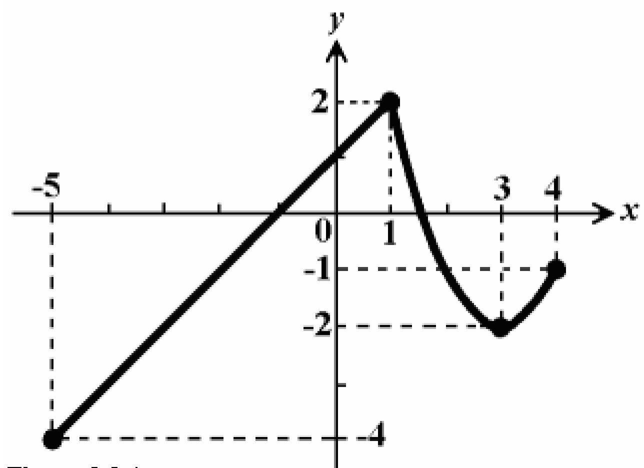


Figura 3.3.4

Exemplo 5: *Dada* $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ *encontre os extremos absolutos de f em [1, 5] se existirem.*

Solução: A figura 3.3.5 apresenta um esboço de f. A função f não tem valor máximo absoluto nem valor mínimo absoluto em [1, 5]. Como $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, *então f(x) pode ser menor que qualquer número negativo, desde que 0 < (3-x) < δ para um δ positivo adequado. Também,* $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, *ou seja, f(x) pode ser maior que qualquer número positivo para 0 < (x-3) < δ e um δ positivo apropriado.*

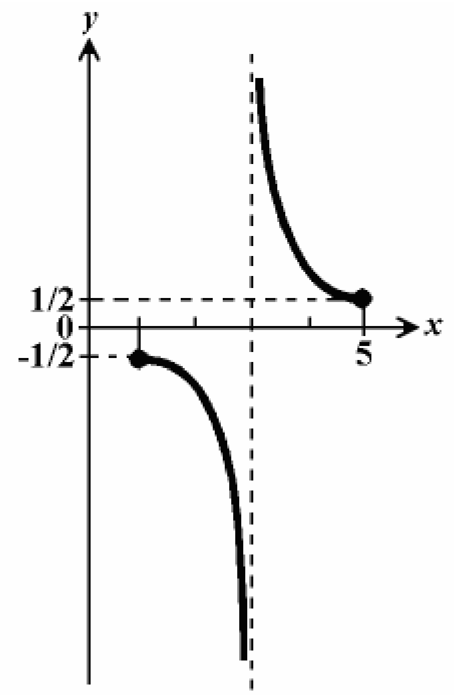


Figura 3.3.5

Também observamos em seu livro texto certa preocupação com o rigor matemático, pois demonstra os teoremas que enuncia. Um outro ponto de destaque em seu trabalho é o número de problemas de aplicação que ele traz. Talvez isso justifique o fato dele ser o autor mais citado, dentre os autores presentes na relação de livros selecionados, pelos professores entrevistados. É, possivelmente, o autor que maior influência tenha tido sobre a formação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções nos estudantes que realizaram o teste diagnóstico.

4 – FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A*

O livro de Flemming & Gonçalves é o único livro de autoria nacional que consta na indicação dos professores entrevistados. Ele é o resultado de mais de vinte anos de experiências adquiridas pelas professoras Diva Marília Flemming e Miriam Buss Gonçalves, do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Esse volume apresenta os conteúdos programáticos da disciplina de Cálculo I. As autoras deram continuidade a esse trabalho com os volumes *Cálculo B* e *Cálculo C*.

Analisando o capítulo sobre aplicações da Derivada, que apresenta os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, percebemos que Leithold pode ter exercido influência sobre o trabalho das professoras (ele é citado em sua bibliografia), pois elas desenvolvem os conceitos de forma similar à apresentada por ele, ou seja, vemos que as autoras privilegiam um desenvolvimento dos conceitos de forma extremamente tradicional, isto é, apresentando, inicialmente, a definição (ou o teorema), seguidos de exemplo, tópico a tópico de forma linear, porém, com uma característica muito marcante a ser destacada – as definições ou os teoremas são sempre apresentados através de um registro na linguagem formal, acompanhado de um registro gráfico, ou vice-versa, como mostram os exemplos abaixo:

Exemplo1: As autoras apresentam os conceitos de Máximo Relativo e Mínimo Relativo, inicialmente, através de um registro gráfico, seguido de um registro em linguagem formal[20], como segue:

A figura 3.4.1 mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.

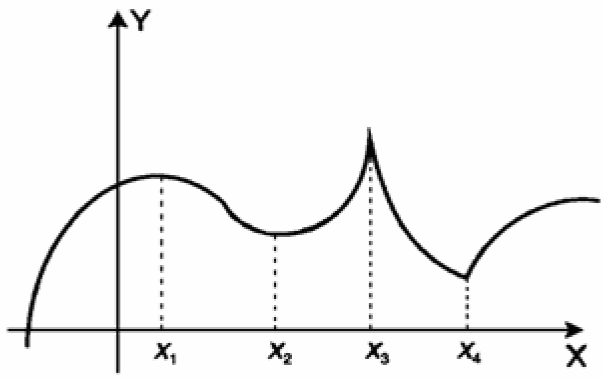


Figura 3.4.1

[20] As definições apresentadas pelas autoras possuem um grau de formalidade bastante suavizado, no sentido de não usarem uma linguagem formal muito carregada.

Esses pontos são chamados pontos extremos da função. $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são chamados máximos relativos. $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são chamados mínimos relativos.

Podemos formalizar as definições:

Definição 1: Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cup D(f)$.

Definição 2: Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cup D(f)$.

Exemplo 2: No Teorema do Valor Médio, as autoras fazem o contrário, ou seja, apresentam o teorema, inicialmente, através de um registro formal, seguido de um registro gráfico, como segue:

Seja f uma função contínua em [a, b] e derivável em (a, b). Então existe um número c no intervalo (a, b), tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

As autoras propõem antes da prova do teorema, apresentar sua interpretação geométrica.

Geometricamente, o teorema do valor médio estabelece que se a função y = f(x) é contínua em [a, b] e derivável em (a, b), então existe pelo menos um ponto c entre a e b onde a tangente à curva é paralela à corda que une os pontos P(a, f(a)) e Q(b, f(b)) (ver Figura 3.4.2).

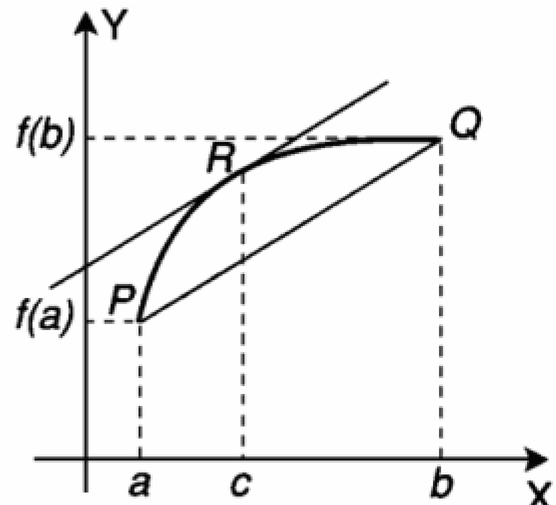


Figura 3.4.2

Exemplo3: Nas definições de concavidade as autoras fazem uso dos registros gráficos, utilizando a linguagem natural para analisá-los e, em seguida, fazem uso de registros em linguagem formal para definí-los, como representados a seguir:

Na figura 3.4.3(a) observamos que dado um ponto qualquer c entre a e b, em pontos próximos de c o gráfico de f está acima da tangente à curva no ponto P(c, f(c)). Dizemos que a curva tem concavidade voltada para cima no intervalo (a, b).

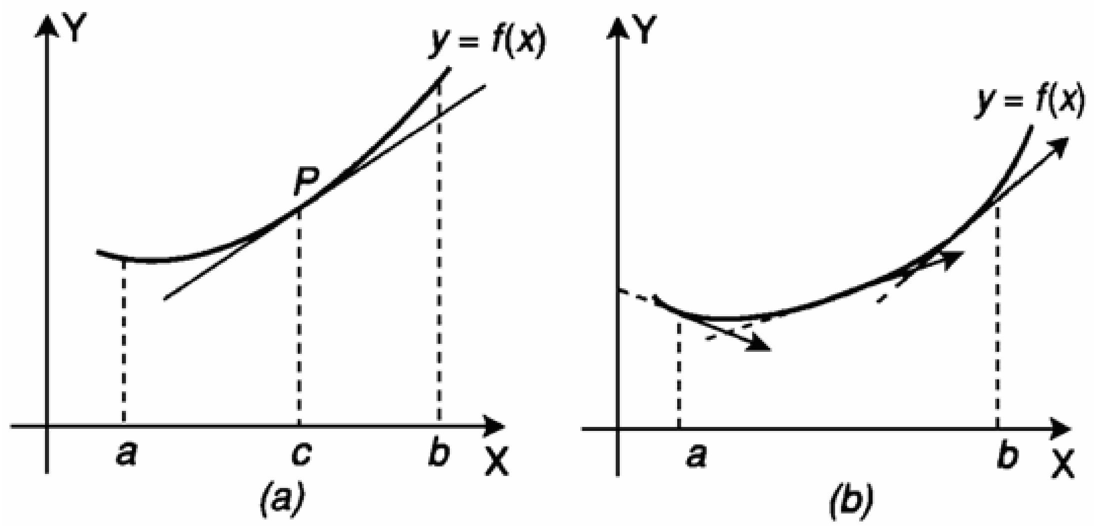


Figura 3.4.3

Como f'(x) é a inclinação da reta tangente à curva, observamos na Figura 3.4.3(b) que podemos descrever esta mesma situação, afirmando que no intervalo (a, b) a derivada f'(x) é crescente. Geometricamente, isto significa que a reta tangente gira no sentido anti-horário à medida que avançamos sobre a curva da esquerda para a direita.

Analogamente, a Figura 3.4.4(a) descreve uma função que tem concavidade voltada para baixo no intervalo (a, b).

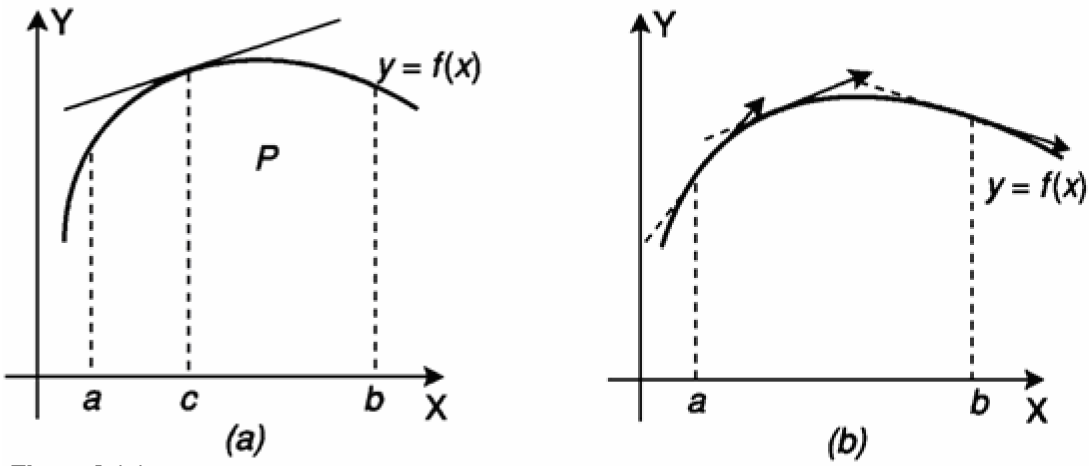


Figura 3.4.4

Na figura 3.4.4(b) vemos que a tangente gira no sentido horário quando nos deslocamos sobre a curva da esquerda para a direita. A derivada f'(x) é decrescente em (a, b).

Temos as seguintes definições:

Definição 1: Uma função f é côncava para cima no intervalo (a, b), se f'(x) é crescente neste intervalo.

Definição 2: Uma função f é côncava para baixo no intervalo (a, b), se f'(x) for decrescente neste intervalo.

Continuando a explanar sobre concavidade, as autoras se utilizam de um caso de interpretação quando apresentam a seguinte proposição:

Seja f uma função contínua no intervalo [a, b] e derivável até 2^a ordem no intervalo (a, b):

(i) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para cima em (a, b).

(ii) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para baixo em (a, b).

Ao apresentar a definição de pontos de inflexão, as autoras se utilizam de três formas de representação de registros, mostrados a seguir:

1. Registro em linguagem natural:

   Podem existir pontos no gráfico de uma função, nos quais a concavidade muda de sentido. Esses pontos são chamados pontos de inflexão.

2. Registro que se utiliza de uma leitura mista de dois registros (registro em linguagem natural e registro em linguagem simbólica):

   Um ponto P(c, f(c)) do gráfico de uma função contínua f é chamado um ponto de inflexão, se existe um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das seguintes situações ocorra:

   (i) f é côncava para cima em (a, c) e côncava para baixo em (c, b).

   (ii) f é côncava para baixo em (a, c) e côncava para cima em (c, b).

3. Registro gráfico:

   Na figura 3.4.5, os pontos de abscissa c_1, c_2, c_3 e c_4 são pontos de inflexão. Vale observar que c_2 e c_3 são pontos extremos de f e que f não é derivável nesses *pontos. Nos pontos c_1 e c_4, existem as derivadas $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$. Nos correspondentes pontos $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$ a reta tangente corta o gráfico de f.*

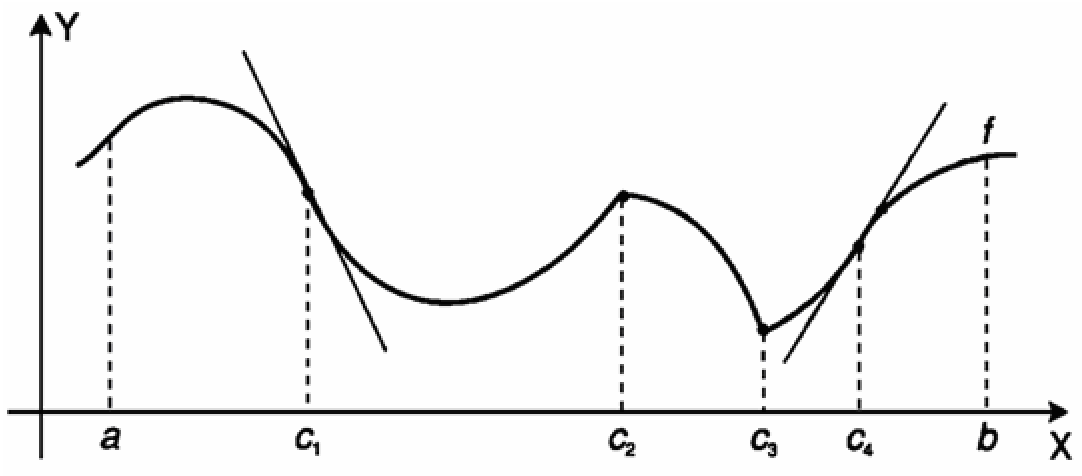


Figura 3.4.5

Essa é a tônica de todo o trabalho sobre Máximos e Mínimos de Funções das professoras Diva Marília Flemming e Mírian Buss Gonçalves, ou seja, sempre apresentam pelo menos dois tipos de registros de representação em cada conceito que introduzem, sendo que na maioria das vezes o registro do tipo gráfico está presente. Elas encerram o assunto trazendo uma seção sobre problemas de maximização e minimização, onde apresentam uma quantia razoável de problemas de cunho prático.

5 – STEWART, J. *Cálculo*

James Stewart é professor emérito da McMaster University do Canadá e nesse trabalho, assim como Anton, ele procura transmitir ao leitor um sentido de utilidade do Cálculo, bem como dar ênfase à compreensão dos conceitos. Esta última influenciada pela Conferência de Tulane, de 1986, onde apresenta como recomendação fundamental a focalização na compreensão conceitual. Segundo o professor Stewart os tópicos devem ser apresentados geometricamente, numericamente e algebricamente, além do ponto de vista verbal ou descritivo. Como principais características, sua obra apresenta:

- Exercícios conceituais que exigem a explicação do significado do conceito básico dado na seção;

- Dados do mundo real: exercícios que abordam situações práticas do cotidiano nas diversas áreas conhecimento (dados obtidos através de suas pesquisas realizadas em companhias, órgãos governamentais, dentre outros);
- Projetos (busca através de projetos de extensão tornar os alunos mais ativos). Como exemplo de projetos cita:
    - *Os projetos aplicados*, que envolvem aplicações,
    - *Os projetos de laboratório*, que envolvem tecnologia,
    - *Os projetos escritos*, que pedem aos alunos para comparar os métodos atuais com aqueles utilizados pelos fundadores do Cálculo,
    - *Os projetos descobertas*, que antecipam resultados que serão discutidos posteriormente;
- Tecnologia: o uso de calculadoras gráficas, computadores, bem como sistemas algébricos computacionais;
- Resolução de problemas: ênfase para a resolução de problemas, utilizando a estratégia das quatro etapas de George Polya[21].

Em seu capítulo, sobre aplicações da diferenciação, Stewart inicia o assunto sobre Máximos e Mínimos de Funções destacando a importância dos problemas de otimização no estudo das aplicações do Cálculo Diferencial. Algumas questões sobre otimização são lançadas antes mesmo de introduzir qualquer conceito referente ao tema, como por exemplo:

- *Qual é a forma de uma lata que minimiza o custo de manufatura?*
- *Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial?*
- *Qual o raio de uma traquéia contraída que expele mais rapidamente o ar durante uma tosse?*
- *Sob que ângulo os vasos sanguíneos devem ramificar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue?*

Nas questões acima vemos algumas das áreas do conhecimento humano contempladas no estudo dos problemas de otimização, tais como: Economia, Física e

[21] POLYA, George – Nasceu em 13 de Dezembro de 1887 em Budapeste, de família judaica de origem polaca. Foi um ótimo estudante no ensino secundário apesar da escola que freqüentava valorizar muito a aprendizagem com base na memória, prática que Polya considerava monótona e sem utilidade.

Biologia. Os problemas de otimização estão presentes em muitas outras áreas do conhecimento humano e as ferramentas matemáticas apropriadas para seu estudo são os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções.

Assim como os autores anteriores, Stewart apresenta as definições sobre os valores de Máximos e Mínimos de Funções fazendo uso de registros na linguagem formal, seguido de registros gráficos. Em particular, nos chamou a atenção sua apresentação do Teorema do Valor Extremo, pois ele omite a demonstração do mesmo, mas faz uso dos registros gráficos para justificá-lo, como no exemplo abaixo:

O Teorema do Valor Extremo: Se f for contínua em um intervalo fechado [a, b], então f assume um valor máximo absoluto f(c) e um valor mínimo absoluto f(d) em algum número c e d em [a, b].

O Teorema do Valor Extremo está ilustrado na Figura 3.5.1. notamos que um valor extremo pode ser assumido mais de uma vez. Embora o Teorema do Valor Extremo seja intuitivamente muito plausível, ele é difícil de ser provado, e assim omitimos sua demonstração.

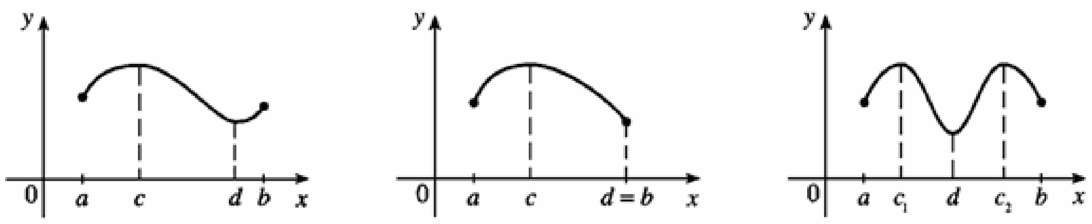


Figura 3.5.1

As Figuras 3.5.2 e 3.5.3 mostram que a função pode possuir valores extremos, se for omitida alguma das hipóteses (continuidade ou intervalo fechado) do Teorema do Valor Extremo.

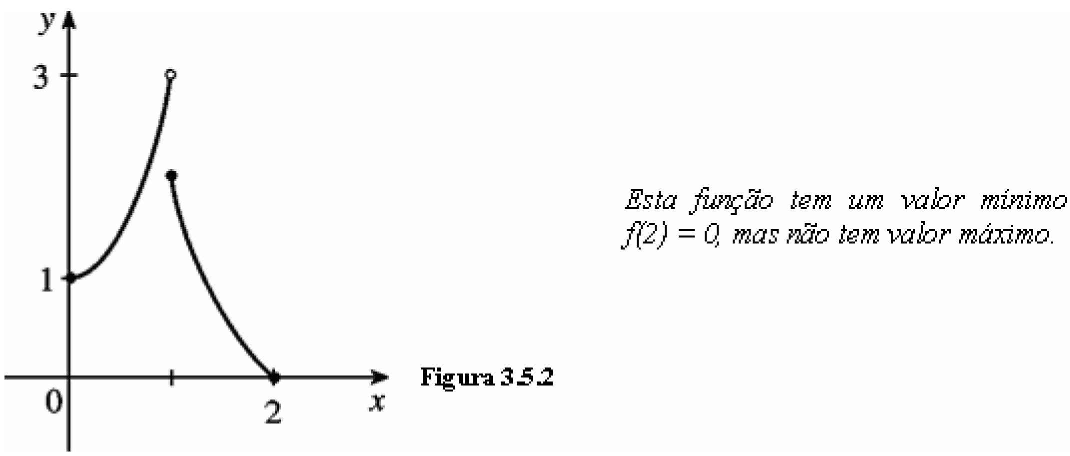
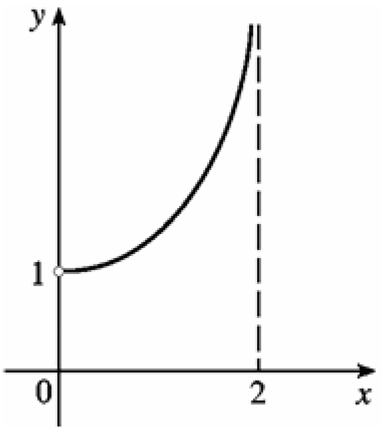


Figura 3.5.2



Esta função contínua g não tem nem máximo nem mínimo.

Figura 3.5.3

A função f, cujo gráfico está mostrado na Figura 3.5.2, está definida no intervalo fechado [0, 2], mas não tem um valor máximo. Observamos que a variação de f é [0, 3). A função assume valores arbitrariamente próximos de 3, mas nunca realmente o valor 3. Isso não contradiz o Teorema do Valor Extremo, pois f não é contínua. Não obstante, uma função descontínua pode ter valores máximo e mínimo.

A função g da Figura 3.5.3 é contínua no intervalo aberto (0, 2), mas não tem nem valor máximo, nem mínimo. A variação de g é (1, ∞). A função assume valores arbitrariamente grandes. Isso não contradiz o Teorema do Valor Extremo, pois o intervalo (0, 2) não é fechado.

6 – SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica*

O texto dessa edição do trabalho de Swokowski apresenta as seguintes características:

1. Um grande número de exemplos de aplicações abrangendo áreas do conhecimento, como engenharia, física, química, biologia, economia, fisiologia, sociologia, psicologia, ecologia, oceanografia, meteorologia, radioterapia, astronáutica, transporte, planejamento de computadores, análise de graus de temperatura e medida da espessura da camada de ozônio, efeito estufa, circulação dos ventos dentro de um tornado, energia liberada pelos terremotos, densidade da atmosfera, movimento dos braços de um robô e efeitos do gás radon sobre a saúde. Como podemos observar, há uma grande variedade de aplicações em áreas moderníssimas do conhecimento;
2. Muitos exemplos que contêm gráficos, quadros ou tabelas que auxiliam os estudantes a compreender os processos e as soluções;

3. Muitos exercícios que utilizam registros gráficos, além de um número bastante acentuado de exercícios que necessitam do auxílio de uma calculadora científica ou um computador para melhor trabalhar os registros de representação do tipo numérico e do tipo gráfico, facilitando, assim, a articulação entres eles;
4. Aconselha os estudantes a utilizar calculadoras adequadas para as soluções dos diversos problemas, onde os registros gráficos se fazem necessários;
5. As ilustrações são muito marcantes nesse trabalho;
6. A presença de pelo menos dois registros de representação é constante na apresentação das definições e teoremas.

Essas são algumas das características do texto, dentre outras.

Swokowski introduz os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções através de um registro gráfico associado a um registro em língua natural, como segue:

Suponhamos que o gráfico da Figura 3.6.1 tenha sido feito por um instrumento registrado que mede a variação de uma quantidade física. O eixo-x representa o tempo e o eixo-y representa mensurações tais como temperatura, resistência em um circuito elétrico, pressão sangüínea de um indivíduo, quantidade de um produto químico em uma solução, ou contagem de bactérias em uma cultura.

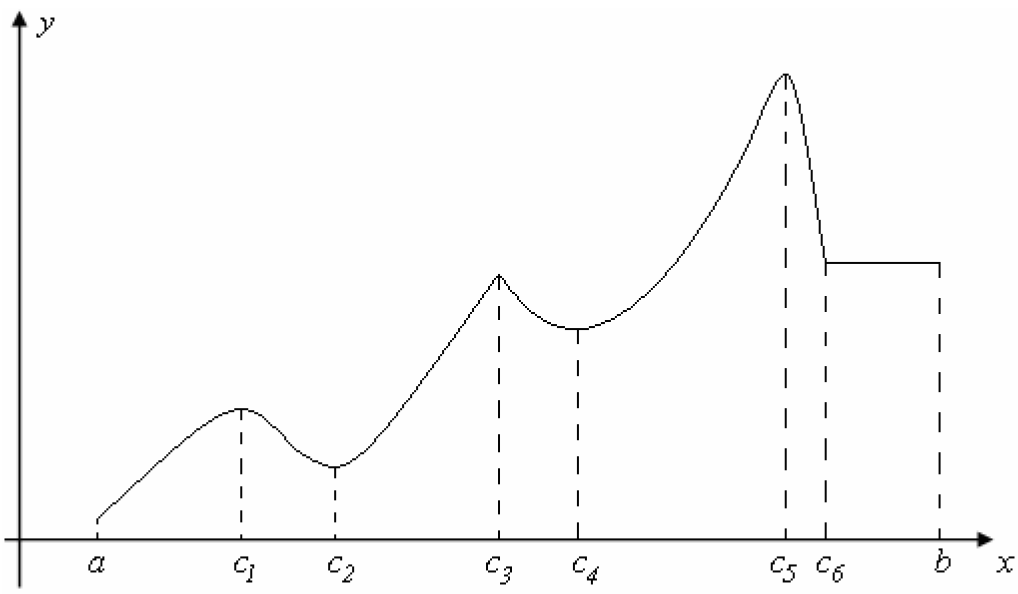


Figura 3.6.1

O gráfico indica que a quantidade aumentou no intervalo de tempo [a, c_1], decresceu em [c_1, c_2], aumentou em [c_2, c_3], decresceu em [c_3, c_4] e assim por diante. Restringindo-nos ao intervalo [c_1, c_4], vemos que a quantidade toma seu maior valor (ou máximo) em c_3 e seu menor valor (ou mínimo) em c_2. Em outros intervalos verificam-se diferentes valores máximos e mínimos. Em todo o intervalo [a, b], o máximo ocorre em c_5 e o mínimo em a.

Um outro ponto que nos chamou a atenção foram os exemplos que Swokowski apresentou no texto utilizando registros gráficos, quadros ou tabelas, para a melhor compreensão do estudante.

Na seção 4.4 do capítulo 4 sobre as aplicações da derivada que trata sobre concavidade e o teste da derivada segunda, os exemplos 3 e 4 nos chamaram muito a atenção devido à manipulação dos registros do tipo tabelas, que Swokowski utiliza na resolução dos problemas propostos nesses exemplos, como a seguir:

Exemplo3: Se $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$, use o teste da derivada segunda para determinar os extremos locais de f. Discuta a concavidade, ache os pontos de inflexão e esboce o gráfico de f.

Solução:

Diferenciando f(x) duas vezes

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2)$$
$$f''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1 - 3x^2)$$

A expressão de f'(x) permite achar os números críticos 0, 1 e -1. Para esses números os valores de f'' são:

$$f''(0) = 4 > 0, f''(1) = -8 < 0 \text{ e } f''(-1) = -8 < 0$$

Logo, pelo teste da derivada segunda, a função tem mínimo local em 0 e máximos locais em 1 e -1. Os valores correspondentes da função são f(0) = 12 e f(1) = 13 = f(-1). A tabela seguinte resume nossa discussão.

Número crítico c	*f''(c)*	*Sinal de f''(c)*	*Conclusão*
-1	*-8*	-	*Máximo local* *f(-1) = 13*
0	*4*	+	*Mínimo local* *f(0) = 12*
1	*-8*	-	*Máximo local* *f(1) = 13*

Para localizar possíveis pontos de inflexão, resolvemos a equação f''(x) = 0 (isto é, 4(1 – 3x²) = 0), obtendo as soluções $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *e* $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$*. Examinemos a seguir o sinal de f''(x) em cada um dos intervalos:*

$$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ e\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$$

Como f'' é contínua e não tem zeros em nenhum dos intervalos, podemos usar os valores de teste para determinar o sinal de f''(x). Disponhamos nosso trabalho em forma tabular, como segue. A última linha é conseqüência do teste da concavidade.

Intervalo	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$
k	*-1*	*0*	*1*
Valor de teste f''(k)	*f''(-1) = -8*	*f''(0) = 4*	*f''(1) = -8*
Sinal de f''(x)	-	+	-
Conclusão	*para baixo*	*para cima*	*para baixo*

Como f''(x) muda de sinal em $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *e* $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$*, os pontos correspondentes* $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{119}{9}\right)$ *e* $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{119}{9}\right)$ *no gráfico são pontos de inflexão. São os pontos em que a concavidade muda. Conforme se vê na tabela, o gráfico é côncavo para cima no* *intervalo aberto* $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ *e côncavo para baixo fora de* $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. *O gráfico acha-se esboçado na Figura 3.6.2.*

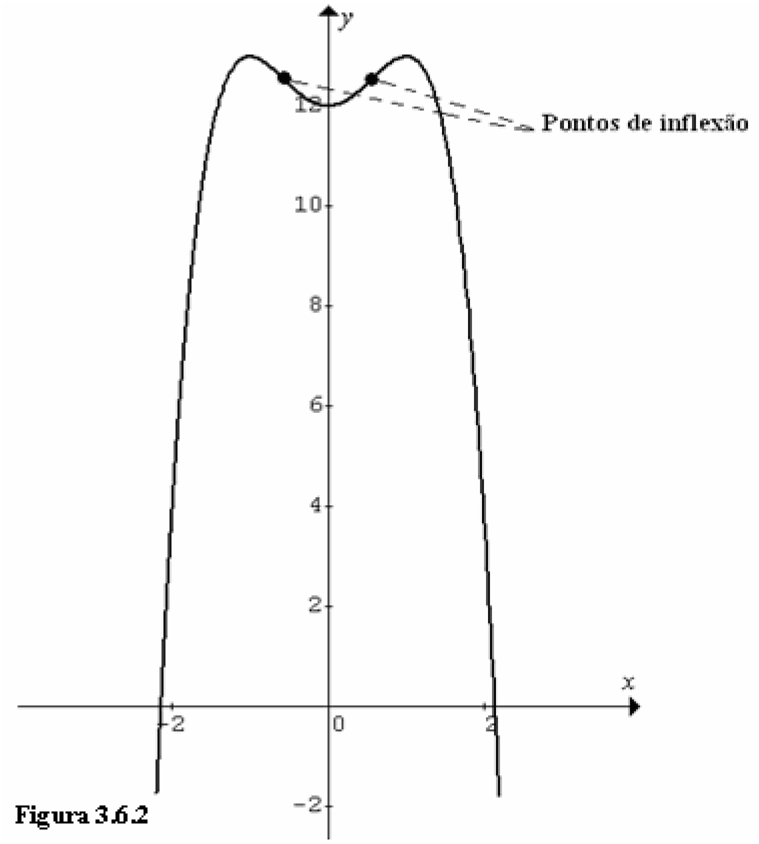


Figura 3.6.2

Exemplo 4: Se $f(x) = x^5 - 5x^3$, *determine os extremos locais de f. Analise a concavidade, determine os pontos de inflexão e esboce o gráfico de f.*

Solução

Começamos por diferenciar f(x) duas vezes:

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$$

$$f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x(2x^2 - 3)$$

Resolvendo a equação $f'(x) = 0$ *obtemos os números críticos 0,* $-\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{3}$. *Tal como no Exemplo 3, temos a tabela seguinte:*

Número crítico c	f''(c)	Sinal de f''(c)	Conclusão
$-\sqrt{3}$	$-30\sqrt{3}$	-	*Máximo local* $f(-\sqrt{3}) = 6/\sqrt{3}$
0	*0*	*Nenhum*	*Nenhuma*
$\sqrt{3}$	$30\sqrt{3}$	+	*Mínimo local* $f(\sqrt{3}) = -6/\sqrt{3}$

Como f''(0) = 0 não se pode aplicar o teste da derivada segunda em 0, aplicamos, assim, o teste da derivada primeira. Pode-se mostrar, usando valores de teste, que se $-\sqrt{3} < x < 0$, *então f'(x) < 0, e se* $0 < x < \sqrt{3}$, *então f'(x) < 0. Como f'(x) não muda de sinal, não há extremo em x = 0.*

Para achar possíveis pontos de inflexão, consideremos a equação f''(x) = 0, isto é, $10x(2x^2 - 3) = 0$. *As soluções, em ordem de grandeza, são* $-\sqrt{6}/2$, *0 e* $\sqrt{6}/2$. *Tal como no exemplo 3, construímos uma tabela.*

Intervalo	$\left(-\infty, -\sqrt{6}/2\right)$	$\left(-\sqrt{6}/2, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{6}/2\right)$	$\left(\sqrt{6}/2, \infty\right)$
k	*-2*	*-1*	*1*	*2*
Valor de teste f''(k)	*-100*	*10*	*-10*	*100*
Sinal de f''(x)	-	+	-	+
Conclusão	*para baixo*	*para cima*	*para baixo*	*para cima*

O sinal de f''(x) muda em $-\sqrt{6}/2$, *0 e* $\sqrt{6}/2$, *donde decorre que os pontos (0, 0),* $\left(-\sqrt{6}/2,\ 21\sqrt{6}/8\right)$ *e* $\left(\sqrt{6}/2,\ -21\sqrt{6}/8\right)$ *são pontos de inflexão. O gráfico consta da Figura 3.6.3, com escalas diferentes para os dados eixos x e y. As raízes da função são* $-\sqrt{5}$, *0 e* $\sqrt{5}$.

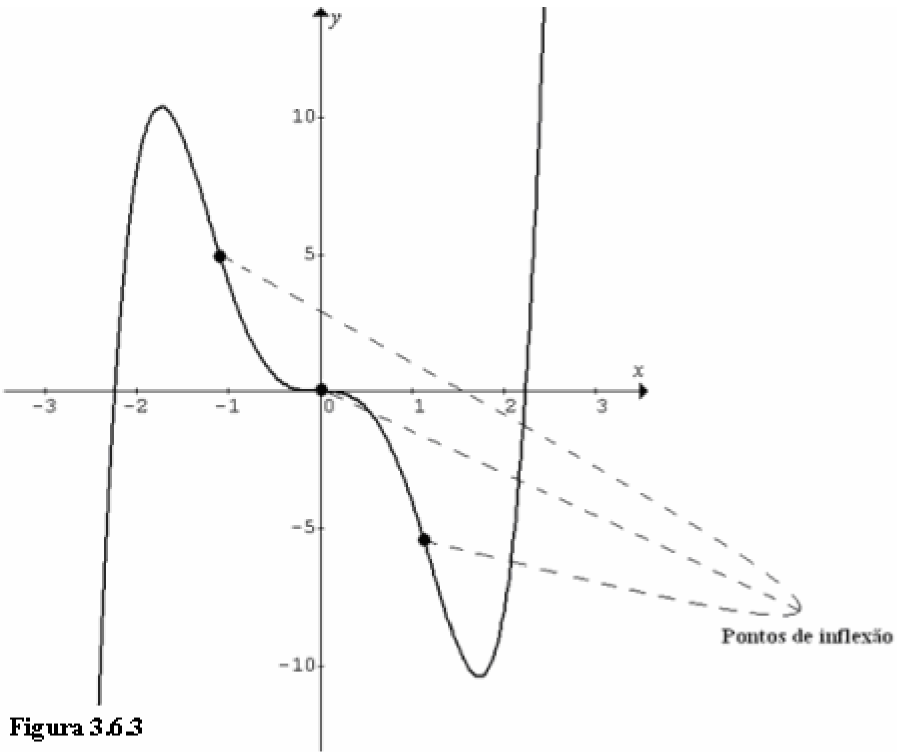


Figura 3.6.3

Concluímos, assim, uma investigação sobre os registros de representação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, apresentados nos livros didáticos indicados pelos professores entrevistados. Esperando que essas indicações tenham tido alguma influência sobre os conceitos assimilados pelos estudantes submetidos ao teste diagnóstico, decorrentes do uso desses livros pelos professores em seus cursos de Cálculo. Admitindo, ainda, que o professor ministrou o curso de Cálculo trabalhando os conceitos, sem seguir fielmente o livro texto, podendo ter feito um apanhado geral dos vários autores citados, bem como ter elaborado seqüências didáticas próprias e trabalhado com listas de exercícios baseadas nesses ou em outros autores.

Neste estudo dos livros didáticos identificamos e selecionamos os diversos tipos de registros utilizados na representação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções apresentados ao longo deste capítulo. Isto se faz necessário, uma vez que nossa intenção é analisar a diversidade de registros mobilizados pelos estudantes, e que, possivelmente, estão relacionados com os registros que constam nos livros didáticos utilizados por eles.

7 - REGISTROS SEMIÓTICOS DOS CONCEITOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES

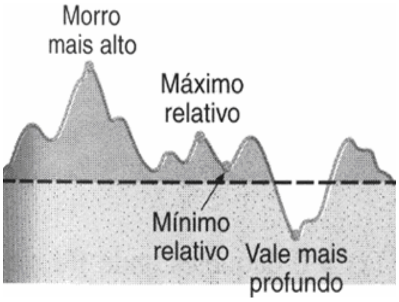
Para finalizar apresentamos, de forma sintética, os principais registros de representação semiótica dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, presentes nos livros didáticos analisados:

☑ **Registro na Língua Natural**

“(...) observamos que se o gráfico de uma função for imaginado como sendo uma cordilheira em duas dimensões, então os máximos e mínimos relativos correspondem ao topo de morros e à base de vales, isto é, eles são os pontos mais alto e mais baixo em sua vizinhança próxima.”

(Anton, 2000. p.330)

☑ **Registro Figural**



(Anton, 2000. p.330)

☑ **Registro na Linguagem Formal**

"Dizemos que uma função f tem um **máximo absoluto** *em um intervalo I num ponto x_0 se $f(x_0)$ for o maior valor de f em I; isto é, $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x em I. Analogamente, dizemos que f tem um* **mínimo absoluto** *em um intervalo I num ponto x_0 se $f(x_0)$ for o menor valor de f em I; isto é, $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x em I. Se f tiver em x_0, qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto em I, dizemos que f tem em x_0 um* ***extremo absoluto em I****".*

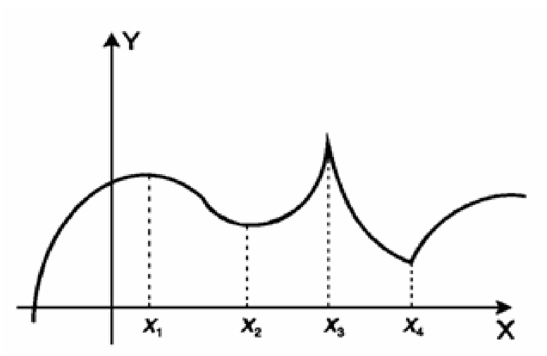
(Anton, 2000. p.330)

☑ **Registro em Linguagem Formal**

Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cup D(f)$. Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in I \cup D(f)$.

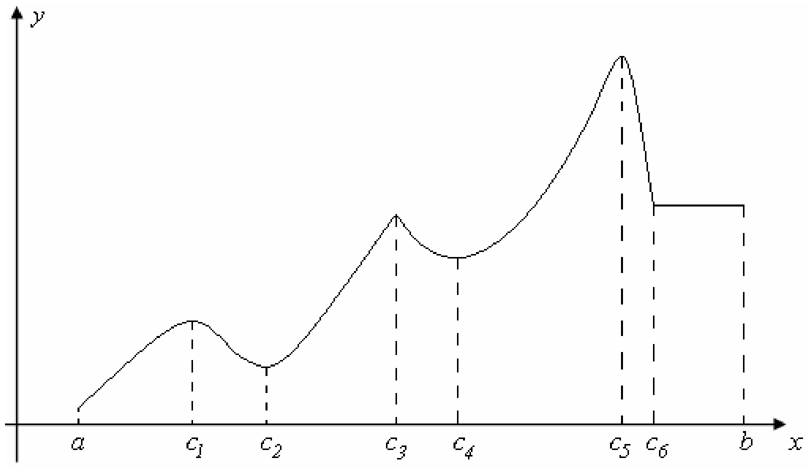
(Flemming, 1992, p.259)

☑ **Registro gráfico**



(Flemming, 1992, p.259)

☑ **Registro gráfico**



(Swokowski, 1994, p. 212)

A PARTE EXPERIMENTAL

1 – A COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Para coletar e analisar os dados experimentais, fomos buscar uma metodologia de pesquisa da Didática da Matemática denominada “engenharia didática”. A “engenharia didática”, segundo ARTIGUE[22](1988), é caracterizada como: “... um esquema experimental baseado sobre “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino”. Nesse sentido, em sua realização, devem ocorrer quatro etapas: análises preliminares; análise “a priori”; aplicação das atividades da seqüência e, por fim, análise “a posteriori” e validação.

O desenvolvimento experimental propriamente dito foi o seguinte:

Foi aplicado um teste, com objetivo diagnóstico, para 22 alunos da universidade pública escolhida. Devido à falta de disponibilidade de horários dos alunos que se prontificaram a participar do teste, ocasionada pelas atividades acadêmicas do semestre letivo e por compromissos particulares e, principalmente, devido à dificuldade de se conseguir voluntários, esses alunos foram divididos em 4 grupos distintos, conforme iam surgindo:

- O primeiro grupo foi composto por 5 alunos, todos cursando o 3º semestre do curso de Licenciatura em Matemática. Segundo a estrutura do curso, os alunos matriculados no 3º semestre estão cursando a disciplina de Cálculo II.
- O segundo grupo foi composto por 9 alunos, sendo 8 deles pertencentes ao 3º semestre do curso de Bacharelado em Ciência da Computação e 1 pertencente ao 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática. Segundo a estrutura do curso de Bacharelado em Ciência da Computação, os alunos matriculados no 3º semestre

[22] ARTIGUE, 1988, p. 285 apud MACHADO, 2002, p. 199.

estavam cursando a disciplina de Cálculo III. O aluno do 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática já cursou todos os Cálculos.

- O terceiro grupo foi composto por 7 alunos, sendo 4 deles pertencentes ao curso de Licenciatura em Física, 2 ao curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica e 1 ao curso de Bacharelado em Ciência da Computação. Em relação aos 4 alunos do curso de Licenciatura em Física, um pertence ao 2º semestre e está cursando a disciplina Cálculo II, os outros 3 alunos estão cursando a disciplina Cálculo III, sendo 2 deles pertencentes ao 3º semestre do curso e o outro remanescente de turma mais adiantada.
- O quarto grupo ficou caracterizado pela presença de um único aluno, pertencente ao 5º semestre do curso de Licenciatura em Matemática, que alegando problemas de disponibilidade de horário, nos solicitou realizar o teste em separado, o que prontamente aceitamos. No dia combinado, ele compareceu à sala dos professores e realizou o teste.

Nenhum aluno foi coagido a realizar o teste diagnóstico, assim como não houve nenhum tipo de pressão para que participassem. Todos aceitaram o convite voluntariamente, diante das visitas feitas às várias salas de aula. O professor de Cálculo II do curso de Licenciatura em Matemática nos cedeu o seu horário de aula para que pudéssemos aplicar o teste para o primeiro grupo de alunos. Da mesma forma, os professores de Cálculo III do curso de Bacharelado em Ciência da Computação e de Licenciatura em Física procederam, possibilitando assim, a aplicação dos testes nos outros dois grupos, respectivamente.

É importante ressaltarmos que a quase totalidade dos alunos do segundo grupo foi oriunda de escolas particulares, com tempo quase exclusivo para dedicação aos estudos, enquanto que nos outros grupos os alunos, em sua quase totalidade, foram oriundos de escolas públicas, representando alunos trabalhadores.

Programamos o teste para ser realizado com duração referente a um tempo de aula dessa instituição, ou seja, duas horas, pois é o tempo utilizado por quase todos os professores por ocasião da aplicação de suas avaliações. E, também, porque gostaríamos que o fator tempo não tivesse nenhuma interferência na resolução das questões do teste. Observamos que nenhum aluno necessitou de todo esse tempo.

Alguns entregaram na primeira meia hora de teste, inclusive os que não conseguiram responder a nenhuma das questões. A maioria gastou pouco mais da metade do tempo previsto e alguns utilizaram quase todo o tempo disponibilizado.

Como o número de alunos nos três primeiros grupos era pequeno, os participantes tiveram bastante espaço nas salas de aula que foram utilizadas, evitando, assim, a comunicação entre eles. Estivemos presentes o tempo todo na aplicação do teste aos três grupos, bem como na aplicação do teste ao aluno que realizou separadamente.

Alguns alunos comentaram sobre a dificuldade relacionada à interpretação dos conceitos envolvidos nas questões, justificando que, durante o seu curso de Cálculo I, o que havia sido cobrado foi a parte operacional e que, de modo geral, os conceitos e as análises mais teóricas de Máximos e Mínimos de Funções foram pouco explorados.

Para a análise dos protocolos contendo as produções dos alunos, atribuímos códigos aos sujeitos investigados, como segue:

- Para os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, o código atribuído foi formado pelas letras L e M seguidas por um número. Exemplo: LM2.
- Para os alunos do curso de Licenciatura em Física, o código atribuído foi formado pelas letras L e F seguidas por um número. Exemplo: LF2.
- Para os alunos do curso de Bacharelado em Ciência da Computação, o código atribuído foi formado pelas letras B, C e C seguidas por um número. Exemplo: BCC2.
- Para os alunos do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica, o código atribuído foi formado pelas letras B, E e E seguidas por um número. Exemplo: BEE2.

A análise dos dados foi essencialmente qualitativa, mas apresentamos também alguns dados quantitativos, como veremos a seguir.

2 – O TESTE

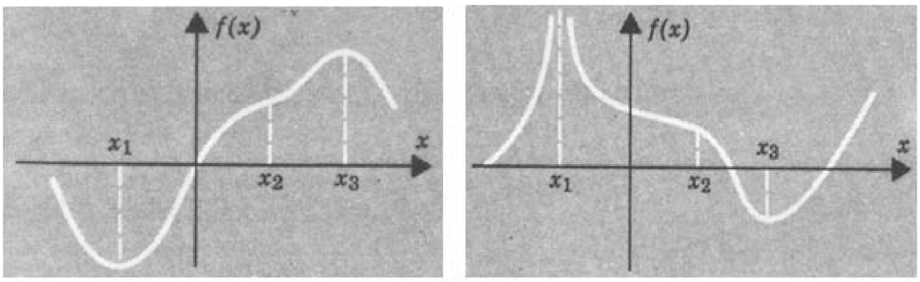
As questões do teste diagnóstico foram elaboradas com objetivo de realizar observações referentes ao uso das Representações Semióticas na resolução de problemas de aplicações dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções. O teste apresentado aos alunos foi composto pelas seguintes questões:

1ª Questão: Como você define formalmente (usando a linguagem simbólica da Matemática), o *máximo relativo* (ou *máximo local*) de uma função? E o *mínimo relativo*?

2ª Questão: Que outro(s) tipo(s) de registros de representação você poderia utilizar para definir o *máximo relativo* e o *mínimo relativo* de uma função?

3ª Questão: Considere a função f: R → R, dada por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$. Determine os extremos relativos (máximo ou mínimo) dessa função e apresente uma justificativa para sua resposta.

4ª Questão: Indique, nos gráficos a seguir, os valores de *x,* onde *f* atinge um extremo relativo. Justifique sua resposta.



(a) (b)

5ª Questão: Quatro alunos de Cálculo fazem as afirmações abaixo sobre extremos relativos. Identifique quais deles estão corretos e justifique:

MARIA: Se f está definida no intervalo (a, b) e f ’(x) < 0 para todo x do intervalo (a, x_o) e f ’(x) > 0 para todo x do intervalo (x_o, b) então f possui um **mínimo relativo** (ou local) em x_o.

JOSÉ: Se f está definida no intervalo (a, b) e f ’(x) < 0 para todo x do intervalo (a, x_o) e f ’(x) > 0 para todo x do intervalo (x_o, b) então f possui um **máximo relativo** (ou local) em x_o.

JOÃO: Se f ’(x_o) = 0 e f ”(x_o) > 0, então x_o é abscissa de ponto de **máximo relativo** (ou local).

TEREZA: Se f ’(x_o) = 0 e f ”(x_o) < 0, então x_o é abscissa de ponto de **máximo relativo** (ou local).

6ª Questão: Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas de pedaços quadrados de papelão, com 12 cm de lado, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados. Encontre o comprimento do lado do quadrado que se deve cortar para obter uma caixa cujo volume seja o maior possível.

Na primeira folha do teste foram feitas as seguintes observações:

1ª Obs.: Pedimos que não apague o desenvolvimento da questão, inclusive os rascunhos utilizados. O verso de cada folha poderá ser usado como espaço destinado a rascunhos.

2ª Obs.: Este teste faz parte da coleta de dados para a pesquisa de Mestrado sobre a Aprendizagem dos Conceitos de Máximos e Mínimos de Funções.

O anexo II mostra um layout do teste diagnóstico com uma pequena diferença daquele entregue aos alunos, que continha em cada folha uma única questão. A intenção era que o aluno tivesse bastante espaço para desenvolver suas resoluções, sem que houvesse necessidade de utilizar papéis extras. Apesar de constar no cabeçalho do teste a identificação da Universidade, da turma e dos sujeitos pesquisados, estes mesmos foram avisados de que haveria sigilo na identificação dos participantes. As questões do teste foram elaboradas de forma a possibilitar a exploração de elementos importantes da Teoria dos Registros de Representação de Duval, ou seja, tipos de Registros de Representação de conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, tais como: registros em língua natural, em linguagem simbólica, figurais e gráficos; tratamentos de registros algébricos e conversões entre registros de representação, envolvendo os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções. As questões foram elaboradas para favorecer um inter-relacionamento entre elas, ou seja, o aluno poderia estar usando o resultado de uma questão para ajudar a solucionar outra.

2.1 – Análise a *priori*

A análise a *priori* de cada questão apresentou nossas expectativas quanto às possíveis soluções dos alunos avaliados.

1ª Questão: Como você define formalmente (usando a linguagem simbólica da Matemática), o *máximo relativo* (ou *máximo local*) de uma função? E o *mínimo relativo*?

Na primeira questão procuramos avaliar se o aluno conhecia os registros de representação do tipo simbólico ou se apresenta um registro misto dos conceitos pedidos, ou seja, registros que se utilizem da linguagem simbólica e da natural dos Conceitos de Máximos e Mínimos de Funções. A nossa expectativa diante da referência indicada pelos professores entrevistados foi que alguma das definições constantes nesses livros pudesse aparecer nas respostas do aluno ou até mesmo definições de livros de outros autores, constantes do acervo da biblioteca, que, porventura o aluno pudesse ter tido contato em seus estudos individuais, tais como:

Registros mistos (linguagem simbólica e natural):

- *Uma função **f** possui um **máximo relativo** (ou **máximo local**) em um ponto **c** se existe um intervalo aberto **I** contendo **c** tal que **f** seja definida em **I** e **f(c)≥f(x)** seja verdadeira para todo **x** em **I**. Uma função **f** possui um **mínimo relativo** (ou **mínimo local**) em um ponto **c** se existe um intervalo aberto **I** contendo **c** tal que **f** seja definida em **I** e **f(c)≤ f(x)** seja verdadeira para todo **x** em **I**.*

  (MUNEM, 1983, p. 168)

- *Uma função f tem um máximo relativo em x_0, se $f(x)\leq f(x_0)$, para todo x em um intervalo aberto contendo x_0. A função tem um mínimo relativo em x_0, se $f(x)\geq f(x_0)$, para todo x em um intervalo aberto contendo x_0.*

  (SHENK 1985, p.152)

- *Dizemos que um ponto c é um ponto de* ***máximo local ou relativo de f*** *se $f(x) \leq f(c)$, para todo x que esteja no domínio de f, em algum intervalo aberto contendo c.*

(SANTOS; BIANCHINI, 2002, p. 192)

- *Dizemos que um ponto d é um ponto de* ***mínimo local ou relativo de f*** *se $f(d) \leq f(x)$, para todo x que esteja no domínio de f, em algum intervalo aberto contendo d.*

(SANTOS; BIANCHINI, 2002, p. 192)

Mais do que isso, caso não consiga respondê-la de imediato, esperamos que o aluno, após ler a quinta questão utilize as afirmações de Maria e de José, com a devida correção da afirmação de José, como respostas às definições requeridas, dentro dos tipos de registros a serem investigados por essa questão. Respostas do tipo "não lembro", "não sei", "eu aprendi apenas calcular", dentre outras, também são esperadas, pois como já mencionamos anteriormente, há pesquisas mostrando que o Cálculo tem sido trabalhado sob o enfoque procedimental, valorizando a parte de operacionalização em detrimento da valorização dos conceitos, ou seja, do enfoque conceitual. Devido à dificuldade de escrever essas definições em linguagem formal, esperamos que alguns alunos respondam a essa questão utilizando suas próprias palavras para expressar o que entendem por Máximos e Mínimos Locais. Nos casos em que isso ocorrer, teremos uma indicação de que os conceitos podem ter sido aprendidos num nível intuitivo. Essa questão busca investigar se o aluno tem familiaridade com a linguagem formal concernente a esses conceitos. Já que essa questão não favorece a conversão de registros, não poderá ocorrer uma congruência dos mesmos, uma vez que a mesma é um fenômeno relativo à conversão.

2ª Questão: Que outro(s) tipo(s) de registros de representação você poderia utilizar para definir o *máximo relativo* e o *mínimo relativo* de uma função?

Na segunda questão procuramos investigar se o aluno consegue utilizar diferentes tipos de registros de representação, em particular, aqueles em língua natural, registros figurais e os registros gráficos. A nossa expectativa em relação à solução desta questão é que os registros gráficos sejam utilizados pela quase totalidade dos sujeitos pesquisados, seguidos dos registros em língua natural, apresentados segundo suas próprias palavras. Isso se deve ao fato dos registros gráficos serem muito utilizados no estudo de Máximos e Mínimos de Funções, já que na representação de funções o registro gráfico tem um papel fundamental, tornando a visualização dos conceitos mais simples. O número de registros gráficos utilizados nos livros didáticos para o estudo desses conceitos é muito grande, como pudemos observar na análise dos registros apresentados nos livros indicados pelos professores das disciplinas de Cálculo. Não esperamos que os alunos façam uso de registros figurais, já que no capítulo anterior observamos que os registros gráficos dominam as abordagens dos conteúdos de Máximos e Mínimos de Funções, ficando os figurais reduzidos a um número limitado de autores. Caso o aluno não tenha sucesso imediato na solução dessa questão, esperamos que ele, após ler a quarta questão, faça uso da mesma para respondê-la e, a partir dela, consiga escrever as definições pedidas na linguagem natural, fazendo uso adequado do apoio heurístico dos registros gráficos. Também, considerando que os autores indicados pelos professores, bem como outros autores consultados por eles, tenham tido influências na formação desses alunos, outras respostas esperadas seriam:

- Registro na linguagem natural:
  "*Um máximo relativo de uma função é um "pico", o ponto máximo do gráfico da função em relação a qualquer outro ponto vizinho a ele no gráfico. Um mínimo relativo é um "fundo de vale", o ponto mínimo do gráfico em relação a qualquer outro ponto vizinho".*

  (HOFFMANN, 1983, p. 84)

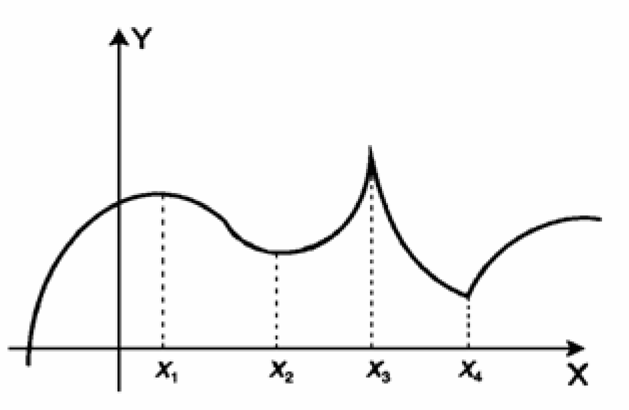
- Registro na linguagem natural:
  "(...) observamos que se o gráfico de uma função for imaginado como sendo uma cordilheira em duas dimensões, então os máximos e mínimos relativos correspondem ao topo de morros e à base de vales, isto é, eles são os pontos mais alto e mais baixo em sua vizinhança próxima."

  (ANTON, 2000. p.330)

- Registro gráfico:

(HOFFMANN, 1983, p. 85)

- Registro gráfico acompanhado de um registro em língua natural:
  "A figura nos mostra o gráfico de uma função y = f(x), onde assinalamos pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 *e* x_4*."*



"Esses pontos são chamados pontos extremos da função. $f(x_1)$ *e* $f(x_3)$ *são chamados máximos relativos.* $f(x_2)$ *e* $f(x_4)$ *são chamados mínimos relativos."*

(FLEMMING, 1992, p.259)

Não descartamos a possibilidade de que a conexão entre esta questão e a quarta não seja percebida e, também que possam ocorrer protocolos de alunos com respostas em branco, provavelmente devido à valorização do enfoque procedimental, em detrimento do enfoque conceitual, no processo de ensino-aprendizagem.

3ª Questão: Considere a função f: R $\rightarrow$ R, dada por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$. Determine os extremos relativos (máximo ou mínimo) dessa função e apresente uma justificativa para sua resposta.

Nessa questão procuramos investigar os tratamentos de registros que os alunos estão habilitados a efetuar. Acreditamos que os mesmos se envolvam nesse tipo de atividade, uma vez que nos cursos de Cálculo os professores possam ter dado ênfase no aspecto técnico, valorizando o uso de regras para o cálculo algébrico da derivada. Sendo assim, esperamos que uma grande parcela dos alunos investigados apresente a solução dessa questão, seja utilizando o teste da derivada primeira ou através do teste da derivada segunda para justificá-la. O tratamento de registro esperado é o algébrico, pois no estudo de Máximos e Mínimos de Funções as operações a serem realizadas serão feitas, em sua totalidade, nos registros simbólicos. Para esta questão uma resposta esperada seria:

1º Tipo:

Como a derivada de primeira ordem

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)\cdot(x-2)$$

é nula em x = 1 e x = 2, os pontos correspondentes (1, 6) e (2, 5) são pontos críticos de primeira ordem de f. Para testar estes pontos, calcula-se a derivada segunda

$$f''(x) = 12x - 18$$

e calcula-se seu valor, para x = 1 e x = 2. Como

$$f''(1) = -6 < 0,$$

segue-se que (1, 6) é um ponto de máximo relativo, e como

$$f''(2) = 6 > 0,$$

segue-se que (2, 5) é um ponto de mínimo relativo.

Nesta resposta o aluno estaria utilizando o teste da derivada segunda, porém, seria perfeitamente possível que, ao invés disso, ele optasse por apresentar a solução como segue:

2º Tipo:

Primeiro diferenciemos f(x):

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)\cdot(x-2)$$

A forma fatorada de f'(x) e os números críticos 1 e 2 sugerem os intervalos abertos (-∞, 1), (1, 2) e (2, ∞). Em cada um desses intervalos, f' é contínua e não tem zeros; portanto, f'(x) tem o mesmo sinal em todo o intervalo. Este sinal pode ser determinado por um valor de teste adequadamente escolhido. Ou seja, substituindo um valor escolhido do intervalo na função derivada primeira, obtemos o sinal dessa função derivada no respectivo intervalo, pois em cada um deles *f'* é contínua e não tem raízes.

Estando o livro de Swokowski incluso na lista dos livros indicados pelos professores entrevistados, é de se esperar que algum aluno se utilize das mesmas tabelas que o autor apresenta para completar a resolução desse problema, o que enriqueceria, mais ainda, este tratamento. Dando prosseguimento à resolução da questão, temos:

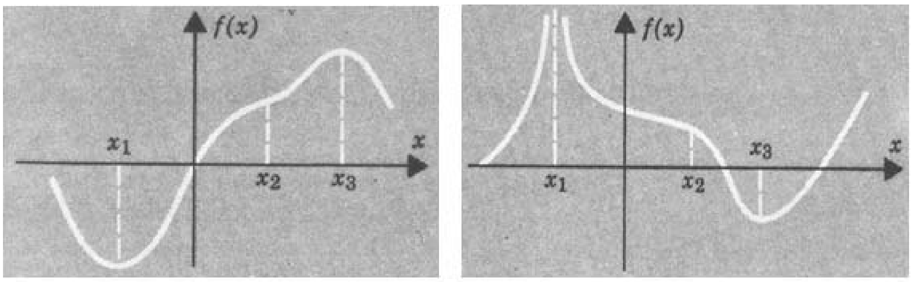
Os valores de k foram escolhidos de acordo com a conveniência. Escolhemos k = 0 em (-∞, 1), mas poderíamos ter escolhido qualquer outro número nesse intervalo, assim como escolhemos k = 3/2 em (1, 2) e k =3 em (2, ∞).

Intervalo	*(-∞, 1)*	*(1, 2)*	*(2, ∞)*
k	*0*	*3/2*	*3*
Valor de teste f'(k)	*f'(0) > 0*	*f'(3/2) < 0*	*f'(3) > 0*
Sinal de f'(x)	+	-	+
Conclusão	*f é crescente em (-∞, 1)*	*f é decrescente em (1, 2)*	*f é crescente em (2, ∞)*

Pelo teste da derivada primeira, f tem máximo local em 1, pois f' passa de positiva a negativa em 1 e f tem mínimo local em 2, pois f' passa de negativa a positiva em 2. Portanto, (1, 6) e (2, 5) são, respectivamente, os pontos de máximo e de mínimo locais de f.

Também são esperadas resoluções erradas ou respostas em branco, mesmo sabendo que estes tópicos da Teoria de Máximos e Mínimos são bastante enfatizados nos cursos de Cálculo.

4ª Questão: Indique, nos gráficos a seguir, os valores de *x* onde *f* atinge um extremo relativo. Justifique sua resposta.



(a) (b)

(WHIPKEY, 1982, p. 175)

Nossa expectativa para a quarta questão é que o aluno confronte-a com as duas primeiras e, dessa forma, consiga respondê-la, demonstrando, assim, habilidade em fazer uso do apoio heurístico desses registros, aproveitando as soluções das duas primeiras questões e o enunciado da quinta, que pode tê-lo ajudado na solução da segunda questão. Para esta questão, além de respondê-la utilizando suas próprias palavras, uma resposta esperada para o item (a) seria:

- Na linguagem natural:
  x_1 é um mínimo relativo da função, pois é o ponto mais baixo do gráfico em relação a qualquer outro ponto vizinho a ele. x_3 é um máximo relativo da função, pois é o ponto mais alto do gráfico da função em relação a qualquer outro ponto vizinho a ele. x_2 é abscissa de ponto de inflexão, pois a curva muda de concavidade em sua vizinhança.

- Na linguagem natural:
  x_1 é um mínimo relativo da função, pois é um "fundo de vale", o ponto mínimo do gráfico em relação a qualquer outro ponto vizinho a ele no

gráfico. x_3 *é um máximo relativo da função, pois é um "pico", o ponto máximo do gráfico da função em relação a qualquer outro ponto vizinho a ele no gráfico.* x_2 *é abscissa de ponto de inflexão, pois a curva inverte a "boca" próximo de* x_2.

- Na linguagem formal:

  Mínimo relativo em $x = x_1$ *e máximo relativo em* $x = x_3$*. Pois existe um intervalo aberto* I_m *contendo* x_1 *tal que f é definida em* I_m *e* $f(x_1) \leq f(x)$ *é verdadeira para todo x em* I_m *e existe um intervalo aberto* I_n *contendo* x_3*, tal que f é definida em* I_n *e* $f(x_3) \geq f(x)$ *é verdadeira para todo x em* I_n.

O item (b) apresentaria soluções similares às do item (a), tendo apenas um mínimo relativo em $x = x_3$, pois em $x = x_1$ a função não está definida. Para esta questão não esperamos resposta em branco ou do tipo "não sei", pois acreditamos que o aspecto visual da questão induza o aluno a escrever algo, mesmo que incorreto, com base num possível apoio heurístico dos registros gráficos.

Não descartamos a possibilidade dos alunos não conseguirem justificar suas respostas, pois a justificativa da questão está relacionada com a solução da terceira, isto é, com o sucesso obtido ou não com os tratamentos de registros algébricos utilizados para resolvê-la.

5ª Questão: Quatro alunos de Cálculo fazem as afirmações abaixo sobre extremos relativos. Identifique quais deles estão corretos e justifique:

MARIA: Se f está definida no intervalo (a, b) e $f'(x) < 0$ para todo x do intervalo (a, x_o) e $f'(x) > 0$ para todo x do intervalo (x_o, b) então f possui um **mínimo relativo** (ou local) em x_o.

JOSÉ: Se f está definida no intervalo (a, b) e $f'(x) < 0$ para todo x do intervalo (a, x_o) e $f'(x) > 0$ para todo x do intervalo (x_o, b) então f possui um **máximo relativo** (ou local) em x_o.

JOÃO: Se $f'(x_o) = 0$ e $f''(x_o) > 0$, então x_o é abscissa de ponto de **máximo relativo** (ou local).

TEREZA: Se $f'(x_o) = 0$ e $f''(x_o) < 0$, então x_o é abscissa de ponto de **máximo relativo** (ou local).

Na quinta questão esperamos que ele reconheça, em primeiro lugar, o teste da derivada primeira nas afirmações de Maria e José, com a devida correção da afirmação de José, ou seja, trocando a palavra **máximo** pela palavra **mínimo** e, nas afirmações de João e Tereza, o teste da derivada segunda, com a devida correção da afirmação de João, trocando a palavra **máximo** pela palavra **mínimo**. Para o teste da derivada primeira é esperado que o aluno efetue uma conversão dos registros simbólicos para registros gráficos, como os dados na figura 4.2.1, aparecendo em suas resoluções, desenhados como rascunhos, para servir de apoio heurístico, com o intuito de ajudar na conclusão sobre a veracidade das afirmações de Maria e José. O teste da derivada segunda para extremos relativos, apresentado nas afirmações de João e Tereza, é facilmente percebido geometricamente. Dessa forma, esperamos que o aluno utilize o apoio dos gráficos, como os da figura 4.2.2, para tirar suas conclusões sobre a veracidade das afirmações de João e Tereza, através da interpretação dos mesmos, pois a figura 4.2.2(a) mostra o gráfico de uma função f e um ponto crítico x_o tal que $f''(x_o) < 0$. A condição $f''(x_o) < 0$ indica que o gráfico de f é côncavo para baixo numa vizinhança do ponto $(x_o, f(x_o))$; daí, que f tem um máximo relativo em x_o. De forma análoga, a figura 4.2.2 (b) fará referência a um mínimo relativo em x_o.

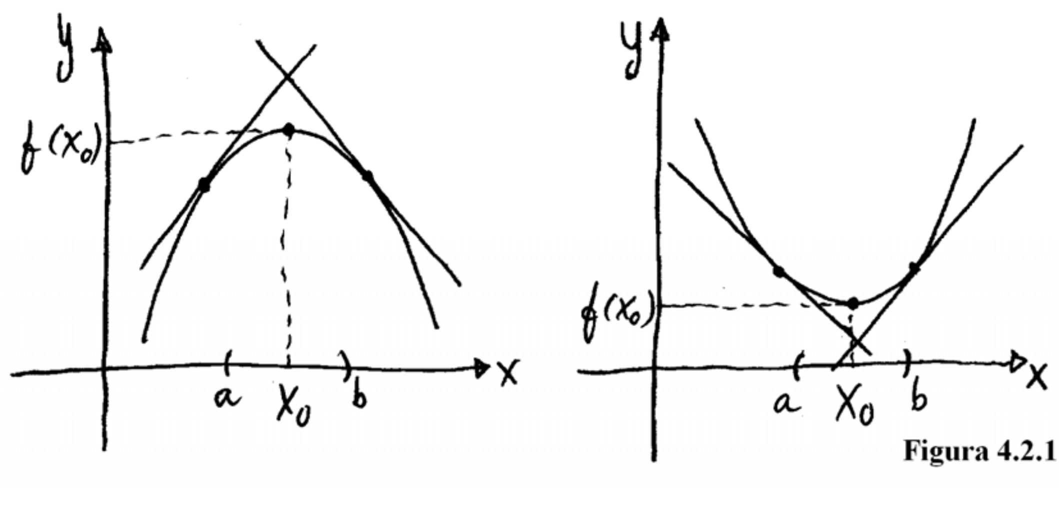


Figura 4.2.1

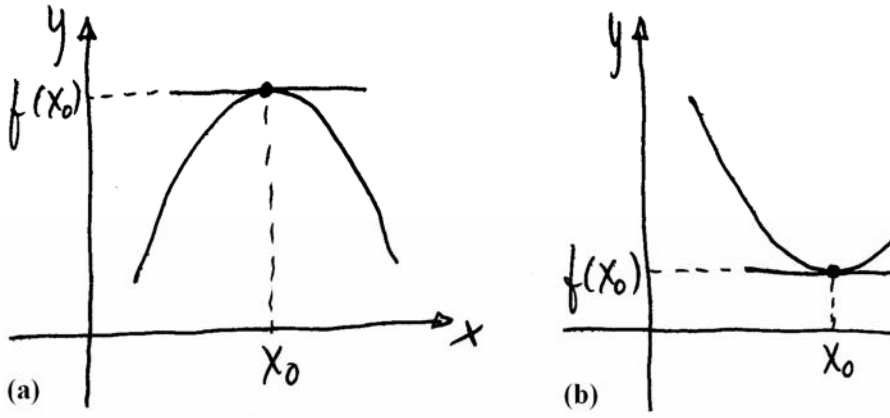


Figura 4.2.2

Ao reconhecer os dois testes para a determinação dos extremos relativos, o aluno investigado estará vivenciando um momento de interpretação de registros, atividade freqüentemente confundida com a conversão. Como se trata de uma questão de enfoque puramente conceitual e de uma análise difícil, sob o ponto de vista dos conceitos envolvidos na teoria dos registros de representação de Duval, os registros gráficos desses conceitos não são operacionalizáveis. Dessa forma, acreditamos que o índice de acerto seja muito baixo. Os erros, como a troca das afirmações corretas por falsas e vice-versa, podem ocorrer devido à interpretação errada dos registros desses conceitos, dados no enunciado, demonstrando, assim, que os conceitos podem não ter sido apreendidos, devido, possivelmente, à pouca importância dada ao enfoque conceitual no ensino do Cálculo.

6ª Questão: Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas de pedaços quadrados de papelão, com 12 cm de lado, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados. Encontre o comprimento do lado do quadrado que se deve cortar para obter uma caixa cujo volume seja o maior possível.

Na sexta questão procuramos investigar se o aluno é capaz de articular os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções para solucionar problemas que necessitem da aplicação dos mesmos. Apesar de ser uma questão que possibilita a articulação de vários registros para a descoberta da solução e também para a verificação dos resultados, o que deve prevalecer é o tratamento algébrico que esperamos encontrar nas resoluções dos alunos que terão sucesso na mesma.

Esperamos que isso ocorra por se tratar de um exercício clássico presente no tópico de aplicações dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções de quase todos os livros didáticos de Cálculo. Por isso a função correspondente ao modelo matemático pode ser obtida sem grandes dificuldades. Não podemos descartar que insucessos nessa questão possam ter origem em dificuldades de leitura e interpretação de exercícios de aplicação. Observaremos, ainda, que se o aluno obtiver sucesso na quinta questão, ele, possivelmente, terá nesta, pois o acerto da questão anterior demonstra que os conceitos de Máximos e Mínimos Relativos foram assimilados. Para esta questão uma resposta esperada seria:

Sejam:

x = o número de centímetros no comprimento do lado do quadrado a ser cortado

V = o número de centímetros cúbicos no volume da caixa

As dimensões em centímetros da caixa são x, (12 – 2x) e (12 – 2x). A Figura 4.2.3 representa um pedaço de papelão, e a Figura 4.2.4 representa a caixa.

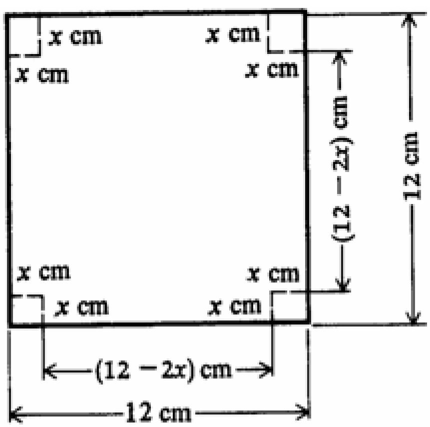


Figura 4.2.3

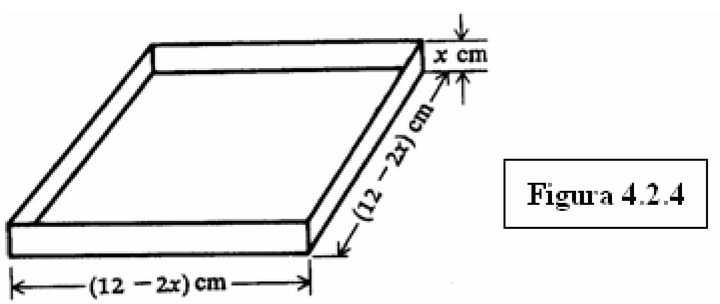


Figura 4.2.4

O volume da caixa é o produto de três dimensões, e assim V é uma função de x, dada por:

$$V(x) = x(12 - 2x)(12 - 2x) \quad (1)$$

Se x = 0, V = 0 e se x = 6, V = 0. O valor de x que queremos encontrar está no intervalo fechado [0, 6]. Como V é contínua no intervalo fechado [0, 6], segue do teorema de valor extremo, que V tem um valor máximo absoluto neste intervalo. Sabemos também que este valor máximo absoluto de V deve ocorrer num número crítico ou num dos extremos do intervalo. Para encontrarmos os números críticos de V, determinamos V'(x), e depois os valores de x, para os quais V'(x) = 0 ou V'(x) não existe.

Da Equação 1, obtemos

$V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$

Portanto,

$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$

V'(x) existe para todos os valores de x. Estabelecendo V'(x) = 0, temos

$12(x^2 - 8x + 12) = 0$

do qual obtemos

$x = 6$ *e* $x = 2$

Os números críticos de V são 2 e 6, ambos no intervalo fechado [0, 6]. O valor máximo absoluto de V em [0, 6] deve ocorrer num número crítico ou num dos extremos do intervalo. Como V(0) = 0 e V(6) = 0, enquanto V(2) = 128, concluímos que o valor máximo absoluto de V em [0, 6] é 128 e ocorre em 2.

Portanto, o máximo volume possível é de 128 cm^3 e este é obtido quando o comprimento do lado do quadrado cortado for de 2 cm.

(LEITHOLD, 1982, p. 156)

2.2 – Experimentação e análise a *posteriori*

Vamos aqui analisar as produções dos alunos para as questões que aplicamos.

1ª Questão:

Dos 22 alunos que realizaram o teste diagnóstico, 16 responderam de maneira incorreta, 2 deixaram em branco, 1 respondeu "não sei", 2 utilizaram o teste da derivada segunda para respondê-la e apenas um respondeu de maneira satisfatória.

A solução abaixo, apresentada pelo aluno LM3, mostra que ele considera procedimento algorítmico para encontrar o máximo como se fosse uma definição. Observamos o uso da linguagem natural para expressar regras memorizadas que utilizam para a resolução de problemas envolvendo Máximos e Mínimos. O aluno pode ter conhecimento dessas regras sem uma compreensão das mesmas ou sem saber como prová-las ou justificá-las.

Deriva-se a função primitiva. Acha as raízes da primeira derivada; Fazer a derivada da segunda em relação a função primitiva e coloca as raízes da primeira derivada no lugar da incognita.

Se o valor for >0 aquele ponto é o de mínimo local

Se o valor for <0 aquele ponto é o de máximo local

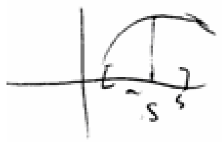
Nesse caso, a causa seria um enfoque procedimental no processo de formação dos alunos concernente aos conteúdos de Máximos e Mínimos de Funções. Neste caso específico, notamos que o enunciado da quinta questão não teve nenhuma influência sobre a resposta dada por este sujeito, pois como vemos, praticamente, nenhum traço de linguagem simbólica foi utilizado, não atendendo, assim, ao pedido da questão. O sujeito LM5 foi o único a fazer uso de registros simbólicos, apesar do equívoco com a desigualdade da segunda definição, dando a seguinte resposta:

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função expressa por uma lei
(*) $y = f(x)$, tomemos um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$,
se $s \in [a,b]$ e $f(s) \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$ então, $f(s)$ é máximo local

(**) Com as mesmas condições estabelecidas anteriormente,
se $s' \in [a,b]$ e $f(s') \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$ então, $f(s')$ é mínimo local.

Vemos que nesta parte da resposta, o sujeito havia usado, inicialmente, intervalos fechados para representar o subconjunto de *P*, onde estaria incluso *s*, fazendo em seguida a troca para intervalos abertos, através de uma sobreposição dos colchetes pelos parênteses, mudança feita após perceber uma relação com a quarta questão, expressa em sua observação e, devido a uma análise que fez ao se utilizar de um registro gráfico (no rodapé da página) para tirar sua conclusão, como observamos:

obs: Pelo exercício da questão 4, achei melhor mudar o $[a,b]$ p/ (a,b).



Apesar do erro de sinal ("≥" posto em lugar do "≤") na definição do mínimo relativo, vemos que o sujeito utilizou o tipo de registro de representação solicitado no enunciado da questão, o que pode contribuir para o sucesso nas demais questões. De maneira geral, os aproximados 4,5% de acerto nessa questão podem indicar certa desvalorização do enfoque conceitual, juntamente com a representação simbólica, nos cursos de Cálculo, quando comparado com o enfoque procedimental e o uso da linguagem natural, fazendo com que o uso dos registros em linguagem formal, para esse conceito, fique bastante prejudicado. Nossa expectativa de respostas do tipo "não lembro", "não sei", "eu aprendi apenas calcular", apontadas na análise a *priori*, foi confirmada. Sem que esses conhecimentos estivessem estabilizados ou "disponíveis", respostas incorretas, em branco, do tipo "não lembro" ou do tipo "não sei" eram inevitáveis. As do tipo "eu aprendi apenas calcular" são justificadas pelo uso do teste da derivada segunda, que demonstram conhecimento do algoritmo para determinar os extremos relativos. Porém, o que a questão busca é a definição dos mesmos, dentro de um tipo específico de registro de representação.

2ª Questão:

Nessa questão, 8 alunos não responderam adequadamente ao que foi solicitado, onde 1 criou um exemplo, que desenvolveu de maneira incompleta, para aplicar os testes da derivada e, através da construção de um gráfico, inferir sobre as definições de valores extremos; 4 deixaram em branco; 1 respondeu "não sei"; 1 respondeu "não lembro" e 1 utilizou o teste da derivada segunda para respondê-la. Os 7 restantes responderam de maneira satisfatória, sendo que desse total 2 utilizaram um registro na linguagem natural e 5 utilizaram um registro gráfico. Nessa questão o índice de acertos foi de 32%, aproximadamente, o que já mostrou um melhor desempenho em relação à questão anterior. Porém, foram respostas pouco elaboradas, além de terem se limitado a um só tipo de registro de representação, quando esperávamos que a presença dos registros gráficos acompanhados dos registros na linguagem natural, ou vice-versa, pudesse ocorrer. Outro fato que nos chamou a atenção foi o índice de, aproximadamente, 22% de questões em branco, ou do tipo "não sei" ou do tipo "não lembro", já que a questão oferecia várias possibilidades de resposta. Ao juntarmos esse grupo ao dos que apresentaram soluções incorretas e, levando em conta, o baixo índice de conhecimento do registro em linguagem formal, que demonstraram na primeira questão, há uma clara indicação de que esses alunos não possuem familiaridade com os vários tipos de registros de representação desses conceitos ou não sabem do que se trata. A solução dada abaixo, pelo sujeito LM1, que criou um exemplo, que desenvolveu de maneira incompleta, para aplicar os testes da derivada e, através da construção de um gráfico, inferir sobre as definições de valores extremos e, o próprio teste da derivada segunda, utilizada pelo sujeito LM3 como resposta, reforçam a indicação do efeito do enfoque procedimental no ensino de Cálculo.

Dado uma função $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, a $I [-2, 2]$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x - 2) = 0$

$\boxed{x = 2}$

$\boxed{x = 0}$

$f(-2) = -8 - 12 - 1 = -21$

$f(-1) = -1 - 3 - 1 = -5$

$f(0) = -1$

$f(1) = 1 - 3 - 1 = -3$

$f(2) = 8 - 12 - 1 = 5$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0$

$6x - 6 = 0$

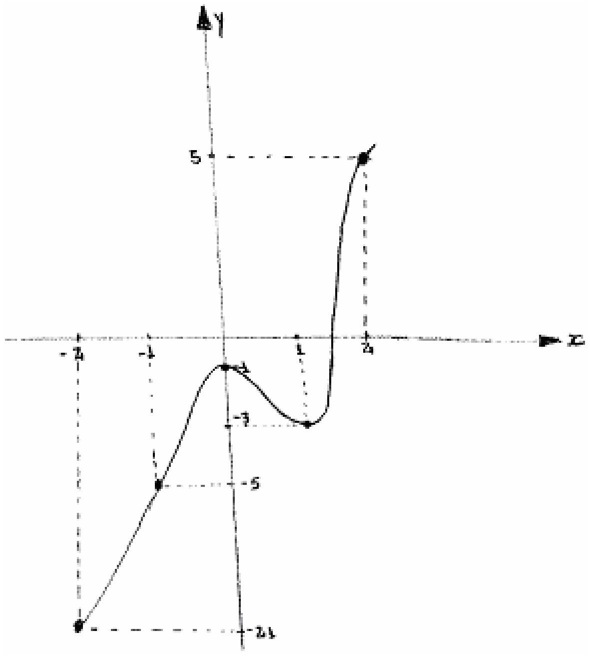
$6x = 6$

$\boxed{x = 1}$ pto de inflecão

$F(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

$F(0) = -1$ máximo local

$f(2) = 8 - 12 - 1 = 5$ mínimo local



Nossa análise a *priori* confirmou o que esperávamos, ou seja, que as soluções através de registros gráficos superassem as dadas através de registros na língua natural. Foram 5 registros gráficos contra 2 registros na língua natural, o que reforça o poder de apoio heurístico dos registros gráficos. Esperávamos, também, que a quarta questão tivesse influência na solução desta, mas isso não foi percebido. Testes em branco, também, se confirmaram.

As duas primeiras questões buscaram investigar se os alunos conhecem os vários tipos de registros de representação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções.

Como os alunos pesquisados poderiam demonstrar compreensão dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções?

Segundo Duval, uma condição necessária para que isso ocorresse, seria a necessidade de coordenar pelo menos dois registros de representação. Porém, os resultados apurados demonstraram que a quase totalidade dos alunos não obtiveram sucesso nas duas questões simultaneamente. A exceção foi o sujeito LM5.

3ª Questão:

Nessa questão, 5 alunos responderam de maneira errada ou incompleta; 5 deixaram em branco; 3 responderam "não lembro" e 2 responderam "não sei". Os 7 restantes responderam de maneira correta, com destaque para a solução do sujeito BCC7, que apresentou uma observação (destacada por nós) que reflete bem o ensino de Cálculo no enfoque procedimental, que prioriza o tratamento algébrico, como podemos observar na produção abaixo:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$\Delta = 324 - 288 = 36$$

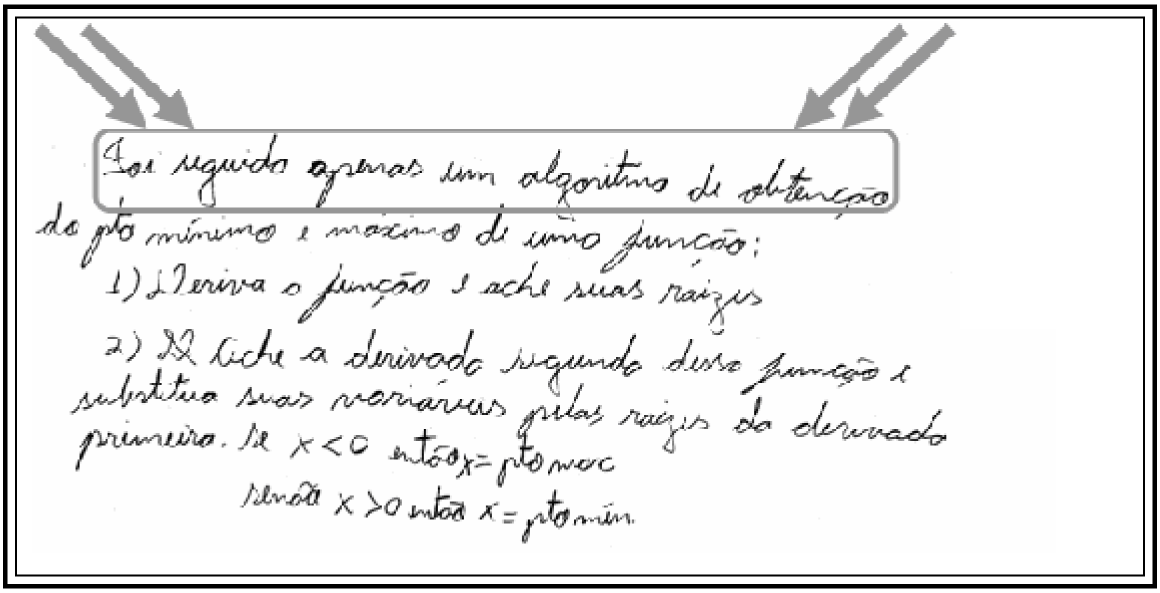
$$x = \frac{18 \pm 6}{12} \qquad x' = 2 \qquad x'' = 1$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \\ -288 \\ \hline 036 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \times 12 \\ \hline 48 \\ 24 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$f''(x) = 12x - 18 = 0$$

$$f''(2) = 24 - 18 = \boxed{6} \Leftarrow \text{pto mínimo.}$$

$$f''(1) = 12 - 18 = \boxed{-6} \Leftarrow \text{pto máximo}$$


Foi seguido apenas um algoritmo de obtenção do pto mínimo e máximo de uma função:
1) Deriva a função e ache suas raízes
2) ~~Se~~ Ache a derivada segunda dessa função e substitua suas variáveis pelas raízes da derivada primeira. Se $x<0$ então $x=$ pto max
senão $x>0$ então $x=$ pto min.

A produção dos alunos relativa a essa questão é um forte indicativo de que: Se o aluno se lembra da "**regra**", então resolve e acerta; caso contrário, ou deixa em branco, ou responde "não lembro", ou responde "não sei", ou, simplesmente, erra. É importante observar que, acreditamos que outros procedimentos possam ocorrer, caso os alunos dominem esse conteúdo com maior profundidade. Caso a apreensão dos conceitos tenha ocorrido de fato, é esperado que o aluno seja capaz de usar de vários registros de representação, onde o apoio heurístico de alguns desses registros enriquecem a compreensão da solução do problema.

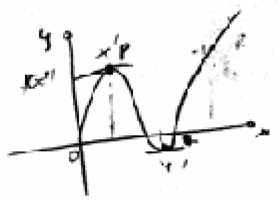
Todos os alunos que acertaram essa questão utilizaram o teste da derivada segunda. A exceção foi o sujeito LF3 que fez uso do teste da derivada primeira, e inclusive utilizou uma tabela para analisar os intervalos de crescimento e decrescimento da função, como havíamos previsto na análise a *priori*. Quase 32% de sujeitos que acertaram a questão demonstraram competência no tratamento algébrico dos registros trabalhados, como era esperado.

4ª Questão:

Nessa questão, 7 alunos responderam de maneira incorreta (alguns indicaram as extremidades dos gráficos e outros indicaram os pontos de inflexão como extremos relativos da função), 1 deixou em branco e 1 respondeu "não sei". Os 13 restantes responderam de maneira correta, porém sem justificativa ou com justificativa parcial, exceção o sujeito LM5, que apresentou uma justificativa baseada no teorema do valor extremo, demonstrando que a parte de operacionalização ficaria a cargo de um registro na linguagem formal, devido à impossibilidade de ser feita dentro desse registro gráfico. As respostas em branco ou do tipo "não sei", contrariaram as nossas expectativas, pois em nossa análise a *priori*, indicávamos que o aspecto visual da questão propiciaria algum tipo de resposta diferente. Apesar dos 59% de respostas certas, a questão confirma nossa expectativa quanto ao não descarte da possibilidade dos alunos não obterem sucesso na apresentação da justificativa, devido ao não estabelecimento da relação com a questão anterior; exceção, como já comentada, o sujeito LM5, que apresentou a seguinte justificativa, aproveitando a resolução da terceira questão:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x + 2$

$f(x)$ deve possuir uma representação do tipo:



Por um pto passam infinitas retas, entre elas x', y', ... que passam por P, Q, ... e são paralelas a Ox:

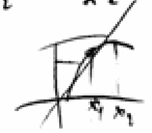
Pela definição de derivada:

$F'(x) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$; mas $\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} = tg\,\alpha$, isto é,

é a tangente do ângulo que uma reta que passa pelos pontos $F(x_2)$ e $F(x_1)$ faz com o eixo Ox.

Aplicando $\lim_{x_2 \to x_1} \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$, encontramos o coeficiente angular da reta tangente ao pto $(x_1, F(x_1))$.

No caso particular de uma reta x' ser paralela ao eixo Ox, possui uma lei do tipo $f(x)=c$, $\forall x \in \mathbb{R}$; assim $f(x_2)=f(x_1)$, e $\lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \lim_{x_1 \to x_2} 0 = 0$ [limite de função constante é uma função constante]

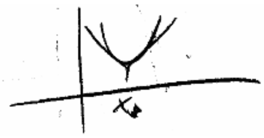


Em relação ao sujeito LM5, o seu sucesso nessa questão está compatível com o desempenho demonstrado nas questões anteriores, já que demonstrou conhecer diversos tipos de Registros de Representações Semióticas dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, como era de se esperar que ele apresentasse uma habilidade na coordenação desses registros. Isso nos permite acreditar que ele venha a ter sucesso nas questões seguintes, pois são questões que necessitam das habilidades já demonstradas por ele.

5ª Questão:

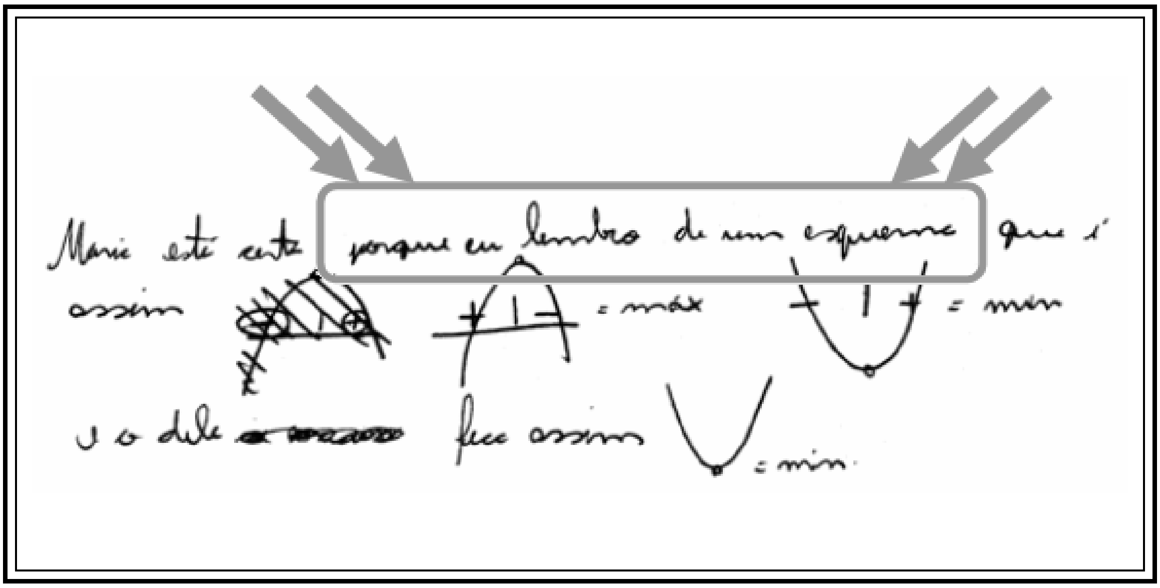
Nessa questão, 4 alunos responderam de maneira errada; 4 deixaram em branco; 3 responderam "não sei" e 8 responderam de maneira parcialmente correta. Somente 3 alunos apresentaram respostas que aceitamos como corretas, dos quais, apenas um justificou toda a questão. O único aluno que justificou toda a questão utilizou a linguagem natural para isso. Nas respostas dadas pelos 8 alunos que responderam parcialmente, destacamos três que fizeram uso do apoio heurístico de registros gráficos desses conceitos. Mais uma vez, destacamos a solução dada pelo sujeito LM5, que apresentou o registro gráfico abaixo, para justificar a afirmação de MARIA.

Maria :



verdadeira

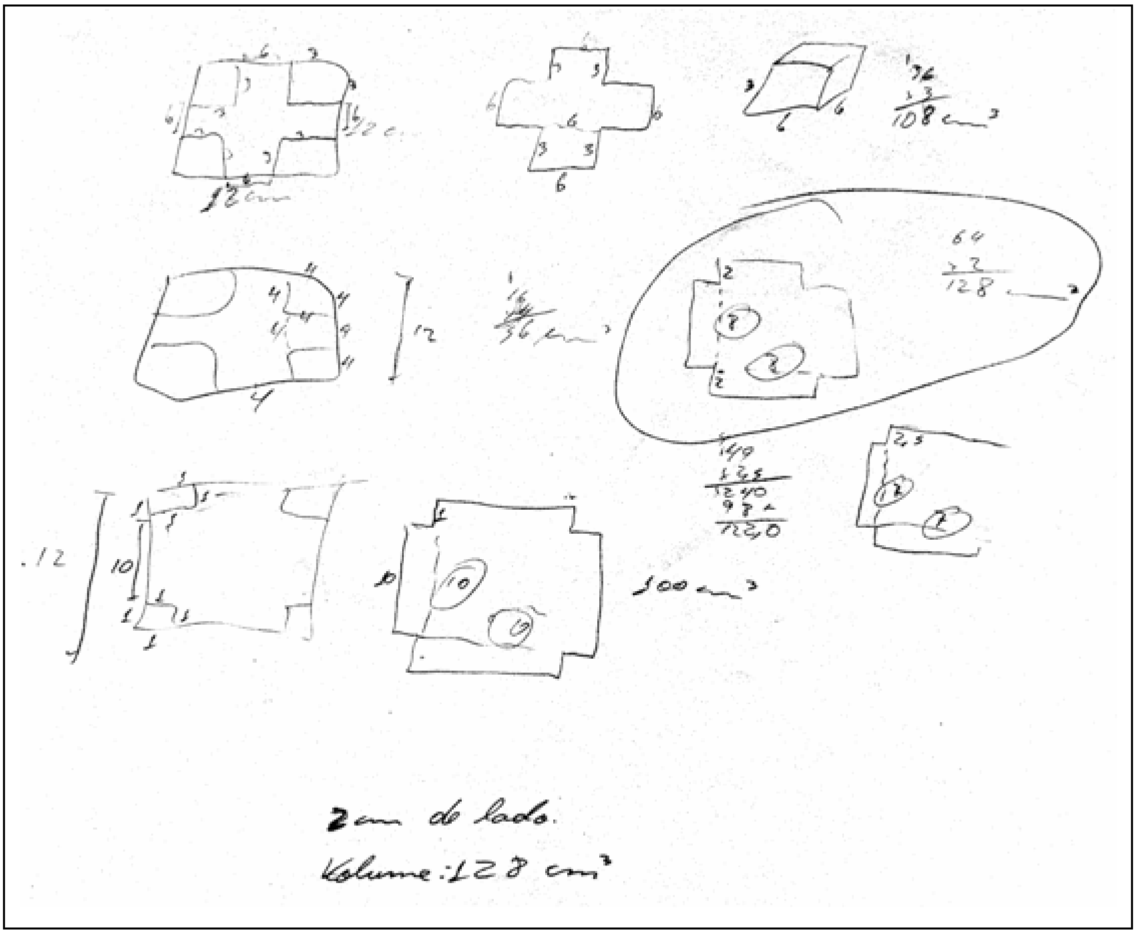
Uma outra justificativa da afirmação de MARIA foi dada pelo sujeito BCC6, que deixa claro que o registro que ele está utilizando não é conseqüência de uma apreensão de conceitos e sim, de uma memorização de esquemas, como podemos observar:



Nossa expectativa foi confirmada, pois houve inversões dos testes da derivada primeira e segunda. O índice de acerto foi muito baixo, aproximadamente, 4,5% para as respostas completamente corretas e, cerca de 36% para as parcialmente corretas, apresentando uma baixa utilização do apoio heurístico dos registros gráficos, reforçando a indicação de que o enfoque procedimental do ensino de Cálculo pode estar apresentando relevância em nossa formação.

6ª Questão:

Nessa questão, 7 alunos responderam de maneira errada ou incompleta; 3 deixaram em branco e 8 responderam "não sei". Somente 4 alunos, aproximadamente 18% do total, deram a resposta correta, sendo que dois destes conseguiram chegar à resposta através de um método de tentativas, o que faria o índice de acertos cair para cerca de 9%, pois como veremos numa dessas resoluções, o aluno não apresenta nenhuma fundamentação teórica, baseado em conceitos matemáticos, que garantam ser mesmo a resposta correta. Vejamos:



Nossa expectativa em relação ao acerto desta questão estar vinculado ao desempenho na questão anterior se confirmou. Somente não esperávamos que o índice de acertos fosse tão baixo. No entanto, esta questão é importante em nossa análise, pois percebemos que mesmo não obtendo sucesso na mesma, alguns alunos buscaram utilizar o apoio heurístico dos registros figurais, na tentativa de encontrar uma solução para o problema.

Para contribuir em nossas conclusões, apresentamos a classificação das questões em "conceituais" e "procedimentais", aplicadas no teste diagnóstico. Os resultados são os seguintes:

1ª Questão	2ª Questão	3ª Questão	4ª Questão	5ª Questão	6ª Questão
Conceitual	Conceitual	Procedimental	Conceitual	Conceitual	Procedimental
1 c / 16 x	7 c / 8 x	7 c / 5 x	13 c / 7 x	3 c / 4 x	4 c / 7 x

Os símbolos utilizados na terceira linha da tabela indicam o número de itens corretos (c) e de incorretos (x), que os alunos apresentaram ao responder cada questão. A diferença entre os totais é devido às questões deixadas em branco por alguns alunos. Em relação às questões conceituais vemos um total de 24 corretas e 35 incorretas, representando cerca de 41% de acertos e 59% de erros. Enquanto, em relação às procedimentais, vemos um total de 11 corretas e 12 incorretas, representando cerca de 48% de acertos e 52% de erros em relação ao total das procedimentais. Os números indicam um melhor aproveitamento em questões procedimentais. Talvez isto se deva ao fato do curso visar mais o desenvolvimento de habilidades técnicas, mas pode também estar relacionado com o tipo de formação dessa disciplina ou a outros fatores, que possam ser investigados numa outra pesquisa. Há um forte indício de privilégio do enfoque procedimental, o que pode estar dificultando um maior envolvimento dos alunos com a utilização adequada de vários registros de representação desses conceitos.

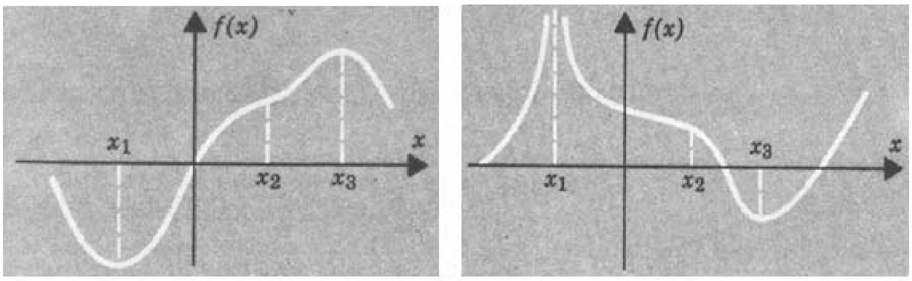
CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando as produções dos acadêmicos diante do teste proposto, pudemos observar alguns elementos que corroboram com a identificação da origem das dificuldades surgidas no processo do ensino-aprendizagem dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções. O estudo teórico e experimental nos permitiu identificar e analisar dificuldades relacionadas aos tratamentos e conversões de registros de representação semióticas concernentes aos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções em diferentes situações.

Observamos que os sujeitos que não responderam ou responderam de maneira incorreta às questões 1 e 2 do teste: “Como você define formalmente o *máximo relativo* (ou *máximo local*) de uma função? E o *mínimo relativo*?” e “Que outro(s) tipo(s) de representação(ões) você poderia utilizar para definir o *máximo relativo* e o *mínimo relativo* de uma função?”, reforçam o fato de que estes alunos não foram capazes de definir os conceitos solicitados utilizando os registros em linguagem formal, nem por meio da linguagem natural ou por meio de figuras dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções.

A 4ª questão do teste,

Indique, nos gráficos a seguir, os valores de x onde f atinge um extremo relativo. Justifique sua resposta.



(a) (b)

que traz dois registros gráficos, pode ter ajudado alguns alunos a responder parte da 2ª questão, que solicitava resposta por meio de outros registros de representação. É provável que eles tivessem conhecimento de outros registros, mas só se lembraram diante da visualização dos registros gráficos apresentados na questão 4.

É possível que alguns alunos que acertaram a 3ª questão do teste,

Considere a função f: R $\rightarrow$ R, dada por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$. Determine os extremos relativos (máximo ou mínimo) dessa função e apresente uma justificativa para sua resposta.

tenham conseguido, devido a uma memorização do algoritmo que representa o teste da derivada segunda, como demonstrou o sujeito BCC7. Observamos que, de modo geral, os alunos só conseguem resolver a questão quando se lembram da “regra”. É possível que a dificuldade resida no fato de os alunos não utilizarem a conversão para o registro gráfico, pois este não oferece possibilidade de tratamento, somente de interpretação. Apesar disso, foi possível constatar que pelo menos o sujeito LM5 tinha domínio sobre esses conceitos, uma vez que ele obteve quase 100% de sucesso em todo o teste, dando indicação de que conhecia os vários registros de representação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, bem como conseguiu coordená-los para aplicar nos problemas que os exigem, além de efetuar um tratamento de registro, como era exigido nessa questão.

Acreditamos que outros procedimentos poderiam ocorrer caso os alunos dominassem esse conteúdo com maior profundidade. Caso a apreensão dos conceitos tivesse ocorrido de fato, seria esperado que os alunos fossem capazes de fazer uso de mais de um registro de representação, onde o apoio heurístico de outros registros poderia ajudar na solução do problema.

A 4ª questão, como já comentamos, pode ter ajudado alguns alunos a responder parte da 2ª questão, mas a sua função principal era indicar que alunos conseguiriam efetivar uma conversão de registros, ou seja, mudar de registro. Pois, segundo Duval, a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque *não se deve jamais confundir um objeto e sua representação*. Os 59% de acertos nessa questão não significam que os 13 alunos que indicaram de maneira correta os valores extremos da função deram justificativas para a mesma. Foi assim que percebemos que a grande maioria dos alunos pesquisados, não tinha apreendido os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções em seus cursos de Cálculo I, pois, no trabalho com as representações semióticas, a conversão é fundamental para a aprendizagem matemática. Sendo assim, nesse momento, passamos a prever que nos resultados das questões 5 e 6, os prognósticos seriam confirmados, o que de fato ocorreu.

Na 5ª questão,

> Quatro alunos de Cálculo fazem as afirmações abaixo sobre extremos relativos. Identifique quais deles estão corretos e justifique:
>
> JOÃO: Se f ’(x_o) = 0 e f ”(x_o) > 0, então x_o é abscissa de ponto de **máximo relativo** (ou local).
>
> TEREZA: Se f ’(x_o) = 0 e f ”(x_o) < 0, então x_o é abscissa de ponto de **máximo relativo** (ou local).
>
> MARIA: Se f está definida no intervalo (a, b) e f ’(x) < 0 para todo x do intervalo (a, x_o) e f ’(x) > 0 para todo x do intervalo (x_o, b) então f possui um **mínimo relativo** (ou local) em x_o.
>
> JOSÉ: Se f está definida no intervalo (a, b) e f ’(x) < 0 para todo x do intervalo (a, x_o) e f ’(x) > 0 para todo x do intervalo (x_o, b) então f possui um **máximo relativo** (ou local) em x_o.

O índice de aproveitamento nessa questão confirma a falta de habilidade, por parte dos alunos, na conversão de registros e na interpretação dos mesmos. As questões 4 e 5 foram elaboradas de maneira a favorecer a conversão de registros nos dois sentidos, ou seja, do gráfico para a linguagem formal ou natural (4ª questão) e da linguagem formal para a representação gráfica (5ª questão). Os alunos demonstraram um índice muito baixo de desempenho diante delas, dando forte indício de que toda a apreensão dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções estava comprometida.

A 6ª questão do teste: “Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas de pedaços quadrados de papelão, com 12 cm de lado, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados. Encontre o comprimento do lado do quadrado que se deve cortar para obter uma caixa cujo volume seja o maior possível.”, foi proposta para investigar se os alunos conseguiriam coordenar os vários tipos de registros de representação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções para solucionar um problema de otimização. Os resultados indicaram uma conseqüência dos insucessos nas questões anteriores, que trouxeram toda a apreensão, em termos dos elementos principais da teoria de Duval, no que se refere aos registros de representação. Essa questão também buscou destacar o enfoque de utilidade dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções.

O trabalho de GODOY (2004) reafirma essa suposição, pois detecta que os alunos apresentam maiores dificuldades com registros gráficos, enquanto obtêm melhores resultados com os registros na língua natural na introdução da noção do conceito de derivada, justificando assim, um privilégio de alguns registros de representação em relação a outros, podendo este fato estar relacionado com as dificuldades de ensino-aprendizagem desses conceitos. Ele ainda afirma que "a prática docente e também pesquisas, como: AMIT e VINNER (1990), HIEBERT e LEFEVRE (1986) e LEME (2003) têm indicado que estudantes conseguem bons resultados em trabalhos sobre derivada que enfocam os aspectos operatórios, não sendo o caso quando realizam trabalhos sobre o mesmo tema, porém, com enfoques conceituais". (GODOY, 2004, p. 8)

SILVA (2004) também contribui para confirmar nosso trabalho, quando conclui que os resultados obtidos em sua pesquisa mostram que, se os livros forem bem explorados, podem levar o aluno a um maior entendimento, através da utilização das conversões, com visualização gráfica dos conceitos em uma situação contextualizada e motivadora. Ele também indica que tais dificuldades talvez sejam devidas ao ensino que, na maioria das vezes, se restringe à aplicação de técnicas, de regras e de algoritmos, ou seja, o ensino de enfoque procedimental. Dando seqüência à sua análise, Silva observa que os autores dos livros didáticos não realizam um trabalho mais específico para evitar que o leitor confunda o objeto (integral) e sua representação, justificando assim que o processo de conversão de registros fica prejudicado.

A nossa pesquisa também aponta indícios de que apesar dos livros didáticos indicados pelos professores entrevistados apresentarem uma boa gama de registros de representação na apresentação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, o nível de aproveitamento deles, pelos alunos, pode estar sendo baixo.

Vale ressaltar que, segundo Duval (2003), uma condição importante para a compreensão de conceitos matemáticos é não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado. Pois,

> Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. (DUVAL, 2003, p. 31).

Em concordância com essa afirmação de Duval, indicamos como um próximo passo para novas pesquisas a análise de abordagens de conceitos do cálculo diferencial e integral que explorem, de maneira mais intensa, tratamentos e conversões de diversos registros de representação semiótica e que favoreçam a articulação entre os mesmos. Acreditamos que um trabalho pedagógico dessa natureza favoreça a compreensão de conceitos, em concordância com a proposta de Stewart, que, além disso, procura também transmitir ao leitor um sentido de utilidade do cálculo.

Stewart, deixando-se influenciar pela Conferência de Tulane, de 1986, que apresenta como recomendação fundamental a focalização na compreensão conceitual, propõe que os tópicos devam ser apresentados, geométrica, numérica e algebricamente, além do ponto de vista verbal ou descritivo. Acreditamos que essa recomendação possa ser aprimorada por meio da exploração de diversos registros de representação semiótica, envolvendo o universo dessas abordagens.

Um outro ponto importante observado é que as conversões para o registro gráfico foram pouco utilizadas pelos alunos nessa experimentação. Acreditamos que, apesar dos registros gráficos não serem operacionalizáveis para esses conceitos, eles não foram devidamente explorados pelos alunos como apoio heurístico na resolução dos problemas de Máximos e Mínimos de Funções, propostos neste trabalho. Um outro ponto importante a ser considerado é o fato de que a definição de Máximos e Mínimos (sem o apelo ao uso de regras da derivada primeira ou segunda) não é operacional. A definição por si só não permite que os alunos obtenham sucesso na solução de problemas envolvendo Máximos e Mínimos de Funções. De fato, os tratamentos ficam restritos aos registros algébricos quando da utilização dos testes da derivada primeira e da derivada segunda, os quais são propriedades que podem ser deduzidas a partir da definição. Isto também sugere que quanto menor for o número de registros operacionalizáveis de um determinado conceito, maior serão as dificuldades dos alunos em assimilá-lo. Este é um aspecto que pode ajudar a explicar o insucesso dos alunos na resolução do teste diagnóstico que aplicamos em nossa pesquisa.

ANEXO I

O formulário de levantamento das informações do professor teve a seguinte formatação:

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Centro de Ciências Humanas e Sociais
Programa de Pós-Graduação em Educação
Mestrado e Doutorado

INFORMAÇÃO DO PROFESSOR

Instituição de Ensino:____

Nome:____

Titulação:____

Classe/Nível:____

Tempo de Magistério:____

Livro(s) de Cálculo (Assunto: Máximos e Mínimos de Funções de uma Variável) indicado e/ou adotado:

____

____

Critério(s) para a escolha do(s) livro(s):

____

____

____

____

Campus Universitário - Cidade Universitária, s/n - Caixa Postal 549
79070-900 - Campo Grande - Mato Grosso do Sul
Fone/Fax (67) 345 - 7616 - telefone: (67) 345 – 7617

Dados dos Professores Entrevistados

1. **Titulação:** Doutor

   Classe/Nível: Adjunto I

   Tempo de Magistério: 20 anos

   Livro(s) de Cálculo (Assunto: Máximos e Mínimos de Funções de uma Variável) indicado e/ou adotado:

   - STEWART, James. *Cálculo*. v.1 – 4.ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2001.
   - FINNEY, Ross L. et al. *Cálculo*. v.1 – 10.ed. São Paulo: Pearson, 2004.

   Critério(s) para a escolha do(s) livro(s):

   - Apresentação da teoria;
   - Nível dos exercícios;
   - Aplicações em problemas reais.

2. **Titulação:** Mestre

   Classe/Nível: Adjunto IV

   Tempo de Magistério: 35 anos

   Livro(s) de Cálculo (Assunto: Máximos e Mínimos de Funções de uma Variável) indicado e/ou adotado:

   - LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. v.1 – 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.
   - SWOKOWSKI, Earl William. *Cálculo com Geometria Analítica*. v.1 – 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1994.
   - ANTON, Howard. *Cálculo:* Um Novo Horizonte. v.1 – 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
   - FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. *Cálculo A*. 5.ed. São Paulo: Makron Books, 1992.

   Critério(s) para a escolha do(s) livro(s):

   - Rigor na abordagem;

- Tratamento didático, acessível aos alunos;
- Exercícios/Problemas priorizando a contextualização.

3. **Titulação:** Mestre

   Classe/Nível: Adjunto IV

   Tempo de Magistério: 29 anos

   Livro(s) de Cálculo (Assunto: Máximos e Mínimos de Funções de uma Variável) indicado e/ou adotado:

   - LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. v.1 – 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.
   - STEWART, James. *Cálculo*. v.1 – 4.ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2001.
   - ANTON, Howard. *Cálculo:* Um Novo Horizonte. v.1 – 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

   Critério(s) para a escolha do(s) livro(s):

   - Rigor na apresentação dos conceitos;
   - Apresentação (dos conteúdos, gráficos, exemplos, ...) de forma agradável ao leitor;
   - Quantidade de exercícios propostos.

4. **Titulação:** Mestre

   Classe/Nível: Assistente I

   Tempo de Magistério: 20 anos

   Livro(s) de Cálculo (Assunto: Máximos e Mínimos de Funções de uma Variável) indicado e/ou adotado:

   - LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. v.1 – 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.
   - ANTON, Howard. *Cálculo:* Um Novo Horizonte. v.1 – 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
   - ÁVILA, Geraldo. *Cálculo das Funções de uma Variável*. v.1 – 7.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

Critério(s) para a escolha do(s) livro(s): A escolha dos livros acima, entre outros, se pauta pela forma criteriosa e rigorosa, mas, ao mesmo tempo, acessível ao entendimento dos alunos. Além disso, mesmo dentro de aspectos ideais, pela contextualização dos problemas sem, obviamente, abordar a contextualização irreal e infundada.

5. **Titulação:** Especialista

   Classe/Nível: Auxiliar IV

   Tempo de Magistério: 25 anos

   Livro(s) de Cálculo (Assunto: Máximos e Mínimos de Funções de uma Variável) indicado e/ou adotado:

   - LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. v.1 – 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.
   - STEWART, James. *Cálculo*. v.1 – 4.ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2001.
   - SANTOS, Ângela Rocha dos, BIANCHINI, Waldecir. *Aprendendo o Cálculo com Maple:* Cálculo de uma variável. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

   Critério(s) para a escolha do(s) livro(s): Porque apresentam os conteúdos didaticamente claros, preservam o rigor matemático e têm uma gama de aplicações nas mais diversas áreas de aplicação.

6. **Titulação:** Especialista

   Classe/Nível: Professor Substituto

   Tempo de Magistério: 15 anos

   Livro(s) de Cálculo (Assunto: Máximos e Mínimos de Funções de uma Variável) indicado e/ou adotado:

   - FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. *Cálculo A*. 5.ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
   - LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. v.1 – 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.
   - STEWART, James. *Cálculo*. v.1 – 4.ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2001.

Critério(s) para a escolha do(s) livro(s): Por ser possuidora dos mesmos e achá-los bons para estudo, bem como pela maneira clara de expressar os conceitos que foram indicados aos alunos.

7. **Titulação:** Graduado

   Classe/Nível: Professor Substituto

   Tempo de Magistério: 5 anos

   Livro(s) de Cálculo (Assunto: Máximos e Mínimos de Funções de uma Variável) indicado e/ou adotado:

   - ANTON, Howard. *Cálculo:* Um Novo Horizonte. v.1 – 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
   - FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. *Cálculo A*. 5.ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
   - STEWART, James. *Cálculo*. v.1 – 4.ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2001.

   Critério(s) para a escolha do(s) livro(s):

   - Tendo uma breve revisão pré-cálculo;
   - Conceitos que possam ser compreendidos didaticamente;
   - Aplicações em diversas áreas;
   - Demonstrações de teoremas.

ANEXO II

O formulário do teste diagnóstico para coleta dos dados teve a formatação abaixo, porém, apresentando uma questão por folha.

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Centro de Ciências Humanas e Sociais
Programa de Pós-Graduação em Educação
Mestrado e Doutorado

TESTE DIAGNÓSTICO

Instituição de Ensino:____

Nome:____

Curso:____

Período:_______________________

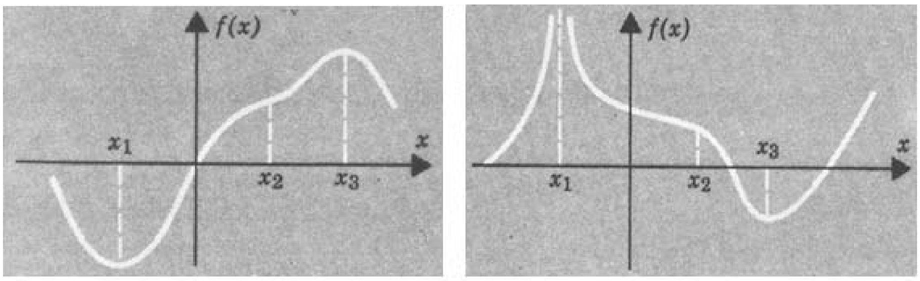
1ª Obs.: Pedimos que não apague o desenvolvimento da questão, inclusive os rascunhos utilizados. O verso de cada folha poderá ser usado como espaço destinado a rascunhos.
2ª Obs.: Este teste faz parte da coleta de dados para a pesquisa de Mestrado sobre a Aprendizagem dos Conceitos de Máximos e Mínimos de Funções.

1ª Questão: Como você define formalmente (usando a linguagem simbólica da Matemática), o *máximo relativo* (ou *máximo local*) de uma função? E o *mínimo relativo*?

2ª Questão: Que outro(s) tipo(s) de registros de representação você poderia utilizar para definir o *máximo relativo* e o *mínimo relativo* de uma função?

3ª Questão: Considere a função f: R $\rightarrow$ R, dada por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$. Determine os extremos relativos (máximo ou mínimo) dessa função e apresente uma justificativa para sua resposta.

4ª Questão: Indique, nos gráficos a seguir, os valores de *x* onde *f* atinge um extremo relativo. Justifique sua resposta.



(a) (b)

5ª Questão: Quatro alunos de Cálculo fazem as afirmações abaixo sobre extremos relativos. Identifique quais deles estão corretos e justifique:

MARIA: Se f está definida no intervalo (a, b) e f '(x) < 0 para todo x do intervalo (a, x_o) e f '(x) > 0 para todo x do intervalo (x_o, b) então f possui um **mínimo relativo** (ou local) em x_o.

JOSÉ: Se f está definida no intervalo (a, b) e f '(x) < 0 para todo x do intervalo (a, x_o) e f '(x) > 0 para todo x do intervalo (x_o, b) então f possui um **máximo relativo** (ou local) em x_o.

JOÃO: Se f '(x_o) = 0 e f "(x_o) > 0, então x_o é abscissa de ponto de **máximo relativo** (ou local).

TEREZA: Se f '(x_o) = 0 e f "(x_o) < 0, então x_o é abscissa de ponto de **máximo relativo** (ou local).

6ª Questão: Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas de pedaços quadrados de papelão, com 12 cm de lado, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados. Encontre o comprimento do lado do quadrado que se deve cortar para obter uma caixa, cujo volume seja o maior possível.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard. **Cálculo**: Um Novo Horizonte. v.1 – 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRITO, Arlete de Jesus; CARVALHO, Dione Lucchesi de. Representações geométricas. **VII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Rio de Janeiro, 2001. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/ANAIS/VII%20ENEM/ARQUIVOS/GT_6.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2005.

CASTRO, Samira Choukri de. **Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação**. 2001. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

DAGHER, A. **Environnement Informatique et Apprentissage de l ' articulation registres grafique et algébrique de représentation des fonctions**. In: SANTOS, E. P. dos. FUNÇÃO AFIM $y = ax + b$: A ARTICULAÇÃO ENTRE OS REGISTROS GRÁFICO E ALGÉBRICO COM O AUXÍLIO DE UM SOFTWARE EDUCATIVO. 2002. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

DAMM, Regina Flemming. **Registros de representação**. In: MACHADO, S. D. A. et al. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA INTRODUÇÃO. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 135-153.

DUVAL, Raymond. **Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de didactique et de Science Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, 1993. v. 5, p. 37-65.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals**. Neuchâtel (Suisse): Peter Lang, 1995.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo A**. 5.ed. São Paulo: Makron Books, 1992.

GODOY, Luiz Felipe Simões de. **Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem**. 2004. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

HERRERO, Sandra Mabel Segura de. Sistemas de ecuaciones lineales: Una secuencia didáctica. In: **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**. Mendoza, p. 49-78. mar. 2003.

HOFFMANN, Laurence D. **Cálculo**: Um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 1983.

LACHINI, Jonas; LAUDARES, João Bosco (Orgs.). **Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. 190 p.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. v.1 – 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LEME, Jayme do Carmo Macedo. **Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada**. 2003. 89 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

LOPES, Wagner Sanches. **A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: Uma proposta de ensino**. 2003. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

MACHADO, S. D. A. **Engenharia didática**. In: MACHADO, S. D. A. et al. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA INTRODUÇÃO. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 197-208.

MEYER, Cristina. **Derivada/reta tangente: Imagem conceitual e definição conceitual**. 2003. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

MORETTI, Méricles Thadeu. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. In: CONTRAPONTOS: **Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí**. Ano 2, n. 6, p.343-362, Itajaí, set./dez. 2002.

MORETTI, M. T.; FLORES, C. R. **Heurística, reconfiguração e aprendizagem matemática: uma possibilidade a partir do uso de figuras geométricas**. REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática. p.5-13. UFSC, 2005.

MUNEM, Mustafá A; FOULIS, David J. **Cálculo**. v.1 – 2.ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.

NAGB (National Assessment Governing Board) - U.S. Department of Education. **Mathematics Framework for the 2003 National Assessment of Education Progress**.

SILVA, Carlos Antônio da. **A noção de integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. 2004. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

STEWART, James. **Cálculo**. v.1 – 4.ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2001.

SWOKOWSKI, Earl William. **Cálculo com Geometria Analítica**. v.1 – 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

TRALDI Jr., Armando. **Sistema de Inequações do 1º Grau: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações**. 2002. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

WHIPKEY, Kenneth L.; WHIPKEY, Mary Nell. **Cálculo e suas múltiplas aplicações**. 3.ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.