Mustapha Rachidi
Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

CONCEITOS BÁSICOS PARA A INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

editora UFMS

Mustapha Rachidi
Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

CONCEITOS BÁSICOS **PARA A INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

editora UFMS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Diretoria de Bibliotecas – UFMS, Campo Grande, MS, Brasil)

Rachidi, Mustapha.
Conceitos básicos para a introdução ao cálculo diferencial e integral [recurso eletrônico] / Mustapha Rachidi, Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato, Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli. – Campo Grande, MS : Ed. UFMS, 2023.
390 p. : il. color.

Dados de acesso: https://repositorio.ufms.br
Bibliografia: p. 378-379.
ISBN 978-85-7613-624-8

1. Cálculo. 2. Cálculo diferencial – Problemas, questões, exercícios. 3. Cálculo integral – Problemas, questões, exercícios. I. Burigato, Sonia Maria Monteiro da Silva. II. Mongelli, Magda Cristina Junqueira Godinho. III. Título.

CDD (23) 515

Bibliotecário responsável: Jaziel V. Dorneles – CRB 1/2.592

Mustapha Rachidi
Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

CONCEITOS BÁSICOS **PARA A INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Campo Grande - MS
2023

editora UFMS

1ª edição: 2023

Projeto Gráfico, Editoração Eletrônica
TIS Publicidade e Propaganda

Revisão
A revisão linguística e ortográfica
é de responsabilidade dos autores

A grafia desta obra foi atualizada conforme o Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa, de 1990, que entrou em vigor no Brasil em 1° de janeiro de 2009.

editora UFMS

Secretaria da Editora UFMS - SEDIT/AGECOM/UFMS
Av. Costa e Silva, s/n° - Bairro Universitário
Campo Grande - MS, 79070-900
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Fone: (67) 3345-7203
e-mail: sedit.agecom@ufms.br

Editora associada à

ABEU
Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

ISBN: 978-85-7613-624-8

Versão digital: junho de 2023

Edital AGECOM nº 4 /2021 - Seleção de Propostas para
Apoio a Publicação de Livros Científicos em formato digital
pela Editora UFMS - PUBLICA UFMS - 2021.

PREFÁCIO

Pressupõe-se que os estudantes dominem conhecimentos e habilidades típicas que serão desenvolvidas em disciplinas de cursos de graduação ao ingressar na universidade. Conhecimentos prévios como: números reais, fun- ções reais e trigonometria, que serão necessários para o desenvolvimento dos conceitos que serão trabalhados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Todavia, nossa experiência em sala de aula tem mostrado que isso não é a realidade de nossos estudantes. Muitos alunos chegaram na universidade sem dominar estes conceitos.

Este livro busca contribuir, nesse sentido, ao abordar tópicos de matemática básica que fazem parte da disciplina de Introdução ao Cálculo, que é oferecida a estudantes de diversos cursos, como: Matemática, Física, Engenharias, entre outros. Esta disciplina tem o objetivo de preparar esses estudantes ingressantes para a disciplina de CDI. A constituição desse livro teve origem em notas de aulas produzidas por professores do INMA, que ministraram a disciplina de Introdução ao Cálculo (Rachidi e Burigato), para acadêmicos do Curso de Matemática - Licenciatura em 2019. Momento em que buscamos escrever os conteúdos que seriam trabalhados na ementa desta disciplina e disponibilizar antecipadamente em um ambiente de aprendizagem para os alunos estudarem ao longo do semestre. Isso permitiu que eles pudessem estudar os conceitos que seriam trabalhados antes da aula e, assim, se concentrarem mais nas explicações do professor durante os encontros em sala de aula. Com isso, as questões e dúvidas surgidas durante esses momentos iam complementando os conteúdos do material disponibilizado. Essa abordagem foi bem recebida pelos estudantes e os resultados das avaliações foram muito bons, para a maioria dos alunos.

Diante disso, essas notas de aula foram retomadas em um projeto de pesquisa em que buscamos identificar os conteúdos propostos pela ementa da disciplina de Introdução ao Cálculo oferecido pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. A partir disso, realizamos um estudo teórico sobre o ensino e aprendizagem desses conceitos, com foco na sua importância no desenvolvimento dos conceitos envolvidos no CDI. Bem como, em pesquisas que versam sobre o tema. Durante seu desenvolvimento, esse material foi sendo utilizado por membros desse projeto em suas disciplinas, culminando, ao final, na produção deste livro e de artigos.

Assim, esse material foi sendo modificado ao longo dessas experiências, em que buscamos fazer uma proposta didática para a disciplina de Introdução ao Cálculo. Nossa intenção foi elaborar um texto que tratasse de números reais e de funções, sem o caráter de ser uma "revisão" do Ensino Médio. Mas que trabalhasse aspectos desses dois conceitos que são importantes para os estudantes ao lidarem, por exemplo, com o conceito de limite de uma função real, ou seja, já com uma abordagem própria para o ensino universitário. Ao longo destes anos pudemos comprovar a importância desses conceitos para o estudo das disciplinas subsequentes de CDI. Além disso, levamos em consideração que no curso de Matemática - Licenciatura, caso da disciplina que trabalhamos, esses conteúdos aqui apresentados serão objeto de trabalho desses estudantes como futuros professores. Por este motivo, acreditamos que estes conteúdos precisam ser tratados com a profundidade e o rigor necessários a fim de possibilitar-lhes as melhores escolhas já no início do curso, ou seja, ao ingressarem na universidade. Mas também almejamos que pudessem contribuir com estudantes de outros cursos.

O conteúdo da disciplina "Introdução ao Cálculo" centra-se essencialmente no conjunto dos números reais, nas funções e na trigonometria. Embora esses conteúdos estejam presentes em vários níveis do ensino fundamental e médio, o objetivo aqui é dar a esses conteúdos uma forma mais adequada, com um aprofundamento dos conceitos e a utilização dos métodos de raciocínio matemático, necessários aos estudos da matemática na universidade. Tal abordagem constitui não apenas uma base fundamental para a compreensão de outros conteúdos envolvidos no cálculo diferencial e integral, mas também para a própria matemática e sua presença no meio socioeconômico.

Deixamos nossos sinceros agradecimentos aos estudantes dessa disciplina pelos comentários frutíferos, que ajudaram a melhorar o material inicial ao longo desses dois anos. Aos editores, pelo incentivo, inclusive as modificações ora apresentadas, nosso reconhecimento. Um agradecimento especial ao Prof. Leandro de Lima e a acadêmica Mariah Souza, pela leitura cuidadosa que fizeram do nosso manuscrito, resultando em muitas observações e sugestões que trouxeram valiosas melhorias para este livro. Agradecemos também a Lohayne Sousa, redatora da Editora UFMS, pelos comentários e sugestões.

Antecipadamente já agradecemos aos leitores e deixamos um convite para nos enviar observações e sugestões para melhorarmos este livro.

Por fim, esperamos que você estudante da UFMS possa se beneficiar desse material.

Os autores

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este livro destina-se aos estudantes da disciplina de Introdução ao Cálculo. Tem o objetivo de contribuir com o estudo e com aprendizagem desses alunos preparando-os para as disciplinas de Cálculo I e de Cálculo II. Daremos as definições e propriedades fundamentais para a disciplina de Introdução ao Cálculo, conforme a ementa, além disso buscamos aprofundar algumas propriedades importantes para o Cálculo Diferencial e Integral.

O presente material, que não tem a pretensão de substituir o conteúdo coberto nos ensinos fundamental e médio, tampouco ser um compêndio no assunto. Buscamos elaborar um texto que contribuísse para o melhor desenvolvimento da disciplina que inicia o estudo do Cálculo I. Em particular, tornar mais suave (menos traumatizante) a transição do ensino médio para o primeiro semestre do curso em que esta disciplina se faz presente. Para isso, focamos no resumo das aulas e na resolução de exercícios, em vez do desenvolvimento formal da teoria. Foi também a maneira que entendemos ser mais eficaz de dar nossa contribuição para o ensino junto a esse público.

Apresentamos, então, o conteúdo a ser desenvolvido, em particular, a ementa da disciplina Introdução ao Cálculo, que é a nossa preocupação básica. O objetivo é que este livro se torne um material de estudo para os alunos. Assim, para cada capítulo, oferecemos exemplos de aplicação dos resultados dos temas apresentados e propomos questões sobre o conhecimento desenvolvido no capítulo e também alguns exercícios. Por outro lado, os exercícios resolvidos propostos buscam esclarecer aos estudantes vários pon- tos metodológicos importantes sobre os métodos de resolução e também de aplicação das propriedades. Além de propor uma familiaridade com os termos e notações utilizadas no ensino superior. Esta abordagem ajudará o aluno na restituição, de modo organizado, do conhecimento e dos conteúdos desta disciplina. Permitindo que ele compreenda melhor as definições, os teoremas e as aplicações dos conceitos trabalhados. E assim, o encadeamento lógico que é a base do trabalho científico matemático.

Podemos dizer que o conteúdo do manuscrito está focado em três temas: Conjunto dos números reais, generalidades sobre as funções e funções usuais, trigonometria, bem como funções trigonométricas. De forma precisa, organizamos esse material da seguinte forma: no Capítulo 1 trazemos uma breve introdução à linguagem de conjuntos numéricos, que é necessária para nos expressarmos formalmente e corretamente em matemática. Os Capítulos 2 e 3, são destinados ao estudo do conjunto dos Números Reais, e também aos seus subconjuntos, com especial atenção para os conjuntos dos números racionais e irracionais. Os vários tipos de intervalos são apresentados buscando familiarizar o estudante com a representação especial desses conjuntos. Fazemos um estudo detalhado das equações e inequações que se resolvem por meio das propriedades de números reais e também do módulo de um número real. Buscando evidenciar as relações e as representações desses conceitos que serão importantes no CDI.

No Capítulo 4, apresentamos o plano cartesiano retomando alguns aspetos necessários para trabalharmos nos próximos capítulos com as representações gráficas das funções. Enfatizando no trabalho de observação dessa representação juntamente com a representação algébrica.

No Capítulo 5, trazemos o conceito de Função, que é essencial para as próximas disciplinas e também para a compreensão dos próximos capítulos, no caso, o estudo das funções elementares. Fazemos um estudo das funções e de suas propriedades de modo geral: domínio e imagem, representações gráficas, crescimento e decrescimento, etc. Nos Capítulos 6, 7, 8, e 9 tratamos detalhadamente das funções elementares: função afim, função quadrática, funções polinomiais e racionais, e, de modo geral, as operações com as funções e a função inversa.

Nos Capítulo 10 e 11 são trabalhadas as funções exponencial e logarítmica. Nos Capítulo 12 e 13 estudamos as propriedades fundamentais da trigonometria, que serão importantes para o estudo das funções trigonométricas que serão tratadas no Capítulo 14.

Além disso, uma lista de exercícios resolvidos, com soluções padrão, acompanha os capítulos. Várias soluções vêm com notas e regras úteis. Para cada capítulo, escolhemos um número reduzido de exercícios significativos com soluções padrão para:

- Ilustrar a importância de usar as propriedades fundamentais do capítulo; - Permitir a aquisição de métodos de raciocínio matemático, em particular os de análise matemática;

- Desenvolver no estudante a habilidade de completar etapas importantes para se chegar a resposta correta, para isso foram omitidos alguns passos da solução de alguns exercícios.

Gostaríamos de salientar que quase todas as curvas, tabelas, gráficos e quadros foram elaborados pelos autores. Quando necessário indicaremos as fontes.

A última parte é dedicada a alguns apêndices, cujos temas estão relacionados tanto ao desenvolvimento do conteúdo desses capítulos, como ao trabalho com aspetos necessários ao desenvolvimento do raciocínio matemático. Trazemos também algumas orientações para os estudantes buscando favorecer o estudo com as diversas linguagens e o modo de encadeamento lógico, próprio desta área.

COMO USAR ESTE LIVRO?

Este livro destina-se principalmente aos estudantes do primeiro semestre do curso que contém a disciplina de CDI. Consideramos, portanto, que é importante dar-lhes alguns conselhos básicos para seu uso. Isso lhes permitirá obter o máximo benefício tanto para validar as provas desta disciplina, como para abordar com mais serenidade as disciplinas de CDI.

1. Para as aulas. Para cada capítulo é muito importante de: - Conhecer bem a definição de cada conceito.

- Estudar as propriedades do capítulo, e também os diferentes tipos de raciocínio utilizados para estabelecer cada uma dessas propriedades.

- Entender melhor a ilustração de cada propriedade nos exemplos de aplicação.

- Compreender as diferentes formas de raciocínio utilizadas nos exemplos.

2. Para os exercícios. Para validar cada disciplina matemática, o aluno

deve passar por provas escritas. Cada prova envolve exercícios e problemas. A resolução de exercícios e problemas requer atividades sucessivas por parte do aluno, que por vezes se sobrepõem, nomeadamente:

Passo 1: Uma boa leitura do texto do exercício, que permite compreender e interpretar melhor a informação resultante das hipóteses, bem como a(s) pergunta(s) formulada(s). Esta etapa é importante para configurar o método adequado para responder às perguntas.

Etapa 2: O processo de pesquisa e investigação para responder às questões do exercício. Durante este processo, temos que relacionar os conhecimentos adquiridos, as técnicas e as ferramentas adequadas para conseguirmos produzir uma demonstração correta. Para isso, a aquisição das definições e o trabalho sobre as propriedades e os exemplos, contribuirão de forma importante para o desenvolvimento de tais provas.

Passo 3: Escreva bem a solução do exercício ou problema, pois a boa redação é uma forma de comunicação que possibilita convencer do seu bom domínio do conteúdo da disciplina.

As etapas anteriores representam uma atividade matemática, que necessariamente levará o aluno à adoção de diferentes formas de raciocínio e demonstrações.

3. Reforçar o trabalho de raciocínio e demonstração. O aluno que chega do ensino médio, será confrontado nesta disciplina matemática, com o raciocínio matemático e a demonstração. Percebemos que para a maioria dos alunos isso é novidade para eles. No Anexo 1, achamos útil apresentar algumas formas de raciocínio e provas matemáticas encontradas neste livro. Esta iniciativa visa conscientizar os alunos sobre o trabalho matemático exigido na universidade. Em geral, os diferentes tipos de raciocínio e demonstração que podem ser implementados em cada parte do programa e em cada nível são: Raciocínio dedutivo; Raciocínio por disjunção de caso; Raciocínio pelo absurdo; Raciocínio por contra-exemplo; Raciocínio indutivo.

CAPÍTULO 1
Conjunto dos Números

Objetivos

Este capítulo trata dos conjuntos numéricos, e das propriedades desses conjuntos. Mais precisamente, estruturamos a apresentação da linguagem (geral) de conjuntos como: pertinência entre elemento e conjunto; conjunto unitário, vazio e universo; subconjuntos; reunião; intersecção; diferença e complementar. Os símbolos matemáticos desempenham um papel muito importante. Assim, neste capítulo, apresentamos as diferentes notações úteis para o cálculo. O objetivo é de desenvolver as ferramentas necessários para a disciplina de Introdução ao Cálculo, e de maneira geral, os instrumentos utilizando a linguagem de conjuntos como representação de situações e conceitos matemáticos.

1.1 Definição e notações

Este parágrafo trata de definições e notações usuais de conjuntos. Nos concentramos sobre o conjunto dos números reais.

Conjunto e relação de pertinência. Observe antes de tudo que a noção de conjunto, assim como a noção do elemento e da relação de pertinência entre elemento e conjunto são conceitos naturais. Em geral, um conjunto é intuitivamente uma coleção de objetos, chamados de elementos do conjunto.

Definição 1.1 *Um conjunto E é uma coleção de objetos, que constituem os elementos do conjunto. Em outras palavras, um conjunto E é uma coleção de objetos e os objetos do conjunto E são chamados de elementos. O número de elementos do conjunto pode ser finito ou infinito.*

Representação de conjunto. Em geral, para descrever um conjunto, usamos chaves, dentro das quais escrevemos os elementos do conjunto. Isto é, um par de chaves usadas para delimitar palavras ou símbolos pode descrever um conjunto. Temos várias maneiras de especificar um conjunto:

1. Listar entre chaves os elementos ou alguns elementos do conjunto;

2. Escrever a propriedade que caracteriza os elementos do conjunto.

Às vezes, um conjunto pode ser descrito com as duas formas anteriores. Por outro lado, podem existir duas propriedades equivalentes que descrevem o mesmo conjunto. Portanto, podemos usar uma ou outra, dependendo do contexto mais simples ou mais adequado.

Por exemplo, se E for o conjunto dos números naturais menor ou igual a 6, podemos escrever o conjunto E listando seus elementos, como:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Podemos também escrever o conjunto E, usando uma propriedade, como:

$$E = \{n, \text{ tal que } n \text{ seja um número natural menor ou igual a } 6\},$$

ou

$$E = \{n, \text{ tal que } n \text{ seja um número natural com } n \leq 6\},$$

Mas dependendo do caso, pode-se simplesmente colocar, dentro das chaves, a lista dos elementos do conjunto, por exemplo, no caso de um conjunto E com um número finito de elementos $e_1, ..., e_n$, onde n é um inteiro positivo, escrevemos:

$$E = \{e_1, ..., e_n\}.$$

No caso de um conjunto, cujos elementos verificam uma determinada propriedade Γ, escrevemos:

$$E = \{x,\, \Gamma(x)\} \text{ ou } E = \{x;\, \Gamma(x)\} \text{ ou } E = \{x|\, \Gamma(x)\},$$

que designa o conjunto de elementos x de modo que a propriedade Γ seja verificada para x.

Existe também conjuntos com números infinitos de elementos, por exemplo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\},\ \mathbb{Q} = \{\text{ Números racionais}\} \text{ e } \mathbb{R} = \{\text{ Números reais}\}$$

Para dizer que um elemento pertence ou não pertence a um conjunto E, adotamos notações matemáticas simples.

Notação 1.1 ***Pertence ($\in$) e Não Pertence ($\notin$).***

1- Para dizer que x ***é um elemento de*** *E usamos a notação: $x \in E$ (lê-se: x pertence ao conjunto E). Significa que o objeto x é elemento do conjunto E.*

2- Se um elemento y não pertence a E nós escrevemos: $y \notin E$ (lê-se: Y não pertence ao conjunto E).

Exemplo 1.1 *Seja o conjunto E =* {1,2,3, 4}*. Assim, temos:*

1. O número x = 2 é um elemento do conjunto E: $2 \in E$.

2. O número x = 0 não é um elemento do conjunto E: $0 \notin E$.

Exemplo 1.2 *1. O conjunto E =* {2, 4, 6, 7, 9} *é um conjunto finito cujos elementos são* 2, 4, 6, 7, 9.

2. O conjunto cujos elementos são os números inteiros pares maiores ou iguais a 8, pode ser escrito da seguinte forma:

$$E = \{8,\ 10,\ 12,\ ....\}\ ;\ E = \{2n;\ n \geq 4\}\ ;\ E = \{m;\ m = 2n\ \ onde\ n \geq 4\}.$$

Com o exemplo, podemos observar que a representação de um conjunto não é única. E algumas vezes a propriedade que caracteriza o conjunto envolve a relação de pertinência, por exemplo: $E = \{2n;\ n \in \mathbb{N}\}$, onde $\mathbb{N}$ é o = conjunto dos números naturais.

O conjunto vazio.

Definição 1.2 *Um conjunto que não contém elementos é chamado de conjunto vazio e é denotado por* $\emptyset$.

Isto é, um conjunto vazio é um conjunto desprovido de elementos, e ele é denotado também por: $\emptyset$ = {}. Por exemplo, os conjuntos:

$$E = \{n \in \mathbb{N},\ n + 1 = 0\} \text{ ou } F = \{n \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0\},$$

são conjuntos vazios. Outro exemplo, seja $2\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais pares maiores do que zero, e seja o seguinte conjunto:

$$E = \{n \in 2\mathbb{N}^*, \text{ com } n \text{ ímpar } \}.$$

Como um número inteiro diferente de zero não pode ser ao mesmo tempo par e ímpar, então o conjunto E é o conjunto vazio, isto é, $E = \emptyset$.

Conjuntos Especiais Fundamentais.

Para a Introdução ao Cálculo, bem como para os Cálculo I e II, e para Análise Real, precisamos usar vários conjuntos clássicos, que são conjuntos numéricos representados por letras especiais. Estes conjuntos, são subconjuntos dos números reais bem conhecidos, como:

1. O conjunto dos números naturais é denotado por: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

2. O conjunto dos números naturais pares denotado por:

$2\mathbb{N} = \{0,2,4,...\}$ ou $2\mathbb{N} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ ou $2\mathbb{N} = \{m; m = 2n \text{ onde } n \geq 0\}$.

3. O conjunto dos números naturais ímpares denotado por:

$2\mathbb{N} + 1 = \{1, 3, 5, ...\}$ ou $2\mathbb{N} + 1 = \{2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$ ou

$2\mathbb{N}+1 = \{m; m = 2n + 1 \text{ onde } n \geq 0\}$.

4. O conjunto dos números inteiros, ou seja, formado pelo conjunto dos números inteiros que são positivos ou nulos, e pelo conjunto dos números inteiros que são negativos ou nulo, denotado por:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

5. O conjunto $2\pi\mathbb{Z}$ dos números que são múltiplos de 2π:

$$2\pi\mathbb{Z} = \{..., -6\pi, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi...\} = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

6. O conjunto dos números racionais, ou seja, números escritos da forma $\frac{p}{q}$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$, denotado por:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; \text{onde } p, q \in \mathbb{Z} \text{ com } q \neq 0\}.$$

7. O conjunto dos números reais: $\mathbb{R}$.

Temos também outras notações relacionadas aos conjuntos numéricos reais tais como: o conjuntos dos números não nulos; o conjuntos dos números positivos e o conjuntos dos números negativos. Seja E um dos conjuntos clássicos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Assim, para denotar o conjunto de números reais não nulo do conjunto E, adotamos a seguinte notação.

Notação 1.2 Notação E*; *Ao escrever um conjunto com E com o exponente "*", isso significa que excluímos o número 0 do conjunto E, isto é, o uso do asterisco * indica que estamos considerando o conjunto E sem o zero.*

Por exemplo:

1. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ *é o conjunto* $\mathbb{N}$ *do qual, o número 0 foi excluído. Isto é,* $\mathbb{N}^*$ *é o conjunto dos números naturais sem o zero e* $x \in \mathbb{N}^*$ *significa que x é um número natural não nulo.*

2. $\mathbb{R}^*$ *é o conjunto* $\mathbb{R}$ *do qual o número 0 foi excluído.*

Para denotar o conjunto dos números positivos ou nulos do conjunto E, adotamos a seguinte notação.

Notação 1.3 Notação *E^+: Quando escrevemos E^+, isso significa que consideramos apenas os números positivos e o zero desse conjunto de E. Por exemplo:*

1. $\mathbb{Z}^{+}$ *denota o conjunto dos números inteiros positivos ou nulo. Isto é,* $\mathbb{Z}^{+} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ *é conjunto dos números inteiros não negativos.*

2. $\mathbb{R}^{+}$ *denota o conjunto dos números reais positivos ou nulo.*

E para o conjunto dos números negativos ou nulos do conjunto *E*, adotamos a seguinte notação.

Notação 1.4 Notação E^{-} *: Quando escrevemos* E^{-}*, isso significa que consideramos apenas os números negativos e o zero desse conjunto de E. Por exemplo:*

1. $\mathbb{Z}^{-}$ *denota o conjunto dos números inteiros negativos e o zero. Isto*

$\mathbb{Z}^{-} = \{..., -3, -2, -1, 0\}$ *é conjunto dos números inteiros negativos.*

2. $\mathbb{R}^{-}$ *denota o conjunto dos números reais negativos e o zero.*

As vezes podemos combinar as notações E^{*} com E^{+} ou E^{-}. Por exemplo:

Notação 1.5 Notação E_{+}^{*}*: Quando escrevemos* E_{+}^{*}*, isso significa que consideramos apenas os números positivos desse conjunto de E que são não nulos. Por exemplo:*

1. Q_{+}^{*} *denota o conjunto dos números racionais positivos não nulos.*

2. R_{+}^{*} *denota o conjunto dos números reais positivos não nulos.*

De maneira semelhante, para os números negativos não nulos, também usamos a notação:

Notação 1.6 Notação E_{-}^{*}*: Quando escrevemos* E_{-}^{*}*, isso significa que consideramos apenas os números negativos desse conjunto de E que são diferente de 0. Assim, por exemplo:*

Q_{-}^{*} *denota o conjunto dos números racionais negativos diferente de 0.*

R_{-}^{*} *denota o conjunto dos números reais negativos diferente de 0.*

1.2 Inclusão e Subconjuntos

Neste parágrafo, apresentaremos as operações usuais entre os conjuntos. Essas operações são fundamentais para o restante deste curso.

Relação de Inclusão e Subconjuntos.

Definição 1.3 : ***Subconjunto.*** *Sejam dois conjuntos E e F. Se todos os elementos do conjunto F são elementos do conjunto E, dizemos que F é um subconjunto do conjunto E. Em outras palavras, se todo elemento do conjunto F for também elemento do conjunto E, então F será um subconjunto de E.*

Isto é, quando todo elemento de um conjunto *F* é também elemento de um conjunto *E*, dizemos que *F* está incluido (ou contido) em *E*. Neste caso *F* é chamado um subconjunto de *E*. A notação matemática comumente usada para dizer que: *F* é um subconjunto de *E* é a seguinte.

Notação 1.7 ***"está incluído ou contido" ou*** $\subset$. *Para dizer que F é um subconjunto de E usamos a notação: F* $\subset$ *E.*

O símbolo $\subset$ *significa que o conjunto F* ***está incluído ou contido em*** *E, o que equivale a dizer que F é um subconjunto de E.*

Exemplo 1.3 *Para os dois conjuntos a seguir* $E = \{n \in \mathbb{N},\, 0 < n < 14\}$ *e* $F = \{n \in \mathbb{N},\, 1 < n < 10\}$*, temos que* $F \subset E$*, pois todo número inteiro entre 1 e 10 também está entre 0 e 14.*

Exemplo 1.4 *Para os conjuntos* $E = \{x \in \mathbb{R},\, x^2 - 4 = 0\}$ *e* $F = \{-2\}$*, temos que* $F \subset E$*, pois* $E = \{-2,\, 2\}$.

Em cálculo estamos interessados nos subconjuntos de $\mathbb{R}$ dos números reais. Como por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Temos a propriedade de inclusão bem conhecida, entre esses conjuntos:

Proposição 1.1 *Para os conjuntos* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R}$, *temos as seguintes inclusões:* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Temos a seguinte proposição básica.

Proposição 1.2 *Seja o conjunto* E. *Então, temos:* $E \subset E$ e $\emptyset \subset E$.

Embora a Proposição 1.2 seja elementar, ela será usada posteriormente, para estabelecer outras propriedades. Por outro lado, ela é muito útil em várias áreas de Matemática, especialmente em probabilidade.

Conjuntos Iguais.

Definição 1.4 ***Conjuntos iguais.*** *Dois conjuntos* E_1 *e* E_2 *serão iguais, e escrevemos* $E_1 = E_2$, *se* E_1 *e* E_2 *tiverem elementos idênticos. Em outras palavras, os dois conjuntos* E_1 *e* E_2 *são iguais se todos os elementos de* E_1 *forem elementos de* E_2 *e todos os elementos de* E_2 *forem elementos de* E_1.

Proposição 1.3 *Dados dois conjuntos* E_1 *e* E_2. *Então temos:*

$$E_1 = E_2 \quad \Longleftrightarrow \quad E_1 \subset E_2 \quad \textbf{e} \quad E_2 \subset E_1.$$

E*m outras palavras,* $E_1 = E_2$ *equivale a dizer que* E_1 *é um subconjunto de* E_2 *e* E_2 *é um subconjunto de* E_1, *isto é, temos* $E_1 = E_2$ *se, e somente se, todo elemento de* E_1 *é elemento de* E_2 *e todo elemento de* E_2 *é elemento de* E_1.

Prova. $\Longrightarrow$ Se $E_1 = E_2$ então E *e* E_2 tem elementos idênticos. Assim, a Proposição 1.2 implica que $E_1 \subset E_1 = E_2$ e $E_2 \subset E_2 = E_1$. Então, temos $E_1 \subset E_2$ e $E_2 \subset E_1$.

$\Longleftarrow$ Se $E_1 \subset E_2$ e $E_2 \subset E_1$. A inclusão $E_1 \subset E_2$ implica que todos os elementos de E_1 são elementos de E_2. Também, a inclusão $E_2 \subset E_1$ implica que todos os elementos de E_2 são elementos de E_1. Então, segundo a Definição 1.4 da igualdade de dois conjuntos, deduzimos que $E_1 = E_2$. **C.Q.D.**[1]

[1] C.Q.D. significa "Como se Queria Demonstrar"e é usada no final de demonstrações matemáticas quando se chega ao resultado pretendido

Assim, para mostrar que dois conjuntos A e B são iguais basta mostrar que:

$$x \in E_1 \Leftrightarrow x \in E_2.$$

Por exemplo, sejam os conjuntos $E_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $E_2 = \{2n + 1, 0 \leq n \leq 4\}$. Ambos os conjuntos consistem em números naturais que são menores ou iguais a 9, então eles são iguais, e escrevemos, $E_1 = E_2$.

<u>Propriedades da Inclusão.</u>

A relação de inclusão tem algumas propriedades que são úteis, para a Introdução ao Cálculo, como para Análise Real. Utilizando as Proposições 1.2 e 1.3, podemos deduzir que a relação de inclusão possui as seguintes propriedades:

1. **Reflexiva**: Para todo conjunto A temos $A \subset A$, isto é, todo conjunto é subconjunto de si próprio.

2. **Anti-simétrica**: Dados dois conjuntos A, B. Se $B \subset A$ e $A \subset B$, então $A = B$.

3. **Transitiva**: Dados os conjuntos A, B e C. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Observação 1.1 ***Propriedade anti-simétrica:*** *Esta propriedade é ligada a Proposição 1.3, na verdade ela contém, nela embutida, a condição de igualdade entre conjuntos. Esta propriedade é constantemente usada nos raciocínios matemáticos quando se deseja mostrar que dois conjuntos são iguais, mostra-se que duas inclusões ocorrem.*

Observação 1.2 ***Propriedade Transitiva****: A propriedade transitiva é fundamental no raciocínio dedutivo, e usada, por exemplo, em lógica. Isto é, esta propriedade é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama de silogismo.*

1.3 Operações entre conjuntos

Considerando um conjunto E, que chamaremos de **conjunto universo**, podemos fazer operações com os subconjuntos de E.

Intersecção de conjuntos.

Definição 1.5 *Dados dois conjuntos E_1 e E_2. A interseção de E_1 com E_2, denotada $E_1 \cap E_2$ (lê-se "E_1 intersecção E_2"), é o conjunto dos elementos que pertencem a E_1 e também a E_2, e escrevemos:*

$$E_1 \cap E_2 = \{x, \text{ tais que } x \in E_1 \text{ e } x \in E_2\}.$$

Por exemplo, sejam os conjuntos $E_1 = \{5, 7, 10, 13\}$ e $E_2 = \{5, 11, 13, 19, 23\}$. A interseção de E_1 e E_2 é dada por:

$$E_1 \cap E_2 = \{5,\ 13\}.$$

Quando a intersecção de dois conjuntos E_1 e E_2 é o conjunto vazio, isto é, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, dizemos que E_1 e E_2 são conjuntos disjuntos.

Proposição 1.4 *As seguintes propriedades da intersecção dadas a seguir são válidas para quaisquer conjuntos A, B, C e F, subconjuntos de um conjunto E.*

1. *Propriedade associativa*: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
2. *Propriedade comutativa*: $A \cap B = B \cap A$.
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
4. $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.
5. *Se* $F \subset A$ *e* $F \subset B$, *então* $F \subset A \cap B$.
6. *Se* $A \subset B$ e $F \cap A \subset F \cap B$.
7. $A \cap B = A$ *se, e somente se,* $A \subset B$.

Para provar as propriedades anteriores utilizamos a igualdade de conjuntos (propriedade anti-simétrica da inclusão) e a definição de intersecção. A prova detalhada dessas propriedades será fornecida na lista de exercícios (Veja o Parágrafo 1.5). Aqui daremos os pequenos detalhes sobre essas propriedades:

a) A Propriedade 1 permite operar com mais de dois conjuntos (a definição de intersecção se refere somente a dois conjuntos), basta operar de dois em dois.

b) A Propriedade 2, como a adição de números reais, a ordem dos conjuntos não altera a intersecção.

c) Com a Propriedade 3, se um elemento *x* pertencer ao conjunto $A \cap \emptyset$, ele deve pertencer simultaneamente a A e ao $\emptyset$. Como o conjunto vazio não tem elementos, também não haverá elementos em $A \cap \emptyset$.

d) Para a Propriedade 4, se $x \in A \cap B$, então x é um elemento de A e também de B. Logo, temos a inclusão de $A \cap B$ em A e também em B.

<u>União de conjuntos.</u>

Definição 1.6 ***União de conjuntos.*** *Dados dois conjuntos E_1 e E_2. A união de E_1 e E_2, denotada $E_1 \cup E_2$, é o conjunto de elementos que pertencem a E_1 ou E_2, e escrevemos:*

$$E_1 \cup E_2 = \{x, \;\; tais \; que \; x \in E_1 \; ou \; x \in E_2\}.$$

Por exemplo, sejam os conjuntos $E_1 = \{5, 7, 10, 13\}$ e $E_2 = \{5, 11, 13, 19, 23\}$. A união de E_1 *e* E_2 é dada por:

$$E_1 \cup E_2 = \{5, 7, 10, 11, 13, 19, 23\}.$$

Proposição 1.5 *As seguintes propriedades da intersecção a seguir são válidas para quaisquer conjuntos A, B e C, subconjuntos de um conjunto E.*

1. *Propriedade associativa:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

2. *Propriedade comutativa:* $A \cup B = B \cup A$.

3. $A \cup \emptyset = A$.

4. $A \subset A \cup B$.

5. $A \cup B = B$ *se, e somente se,* $A \subset B$.

Para provar as propriedades anteriores utilizamos a igualdade de conjuntos (propriedade anti-simétrica da inclusão) e a definição da união. A prova detalhada dessas propriedades será fornecida na lista de exercícios. Aqui daremos pequenos detalhos sobre a provas dessas propriedades:

a) A Propriedade 1 permite operar mais de dois conjuntos (a definição da união se refere somente a dois conjuntos), basta operar de dois em dois.

b) A Propriedade 2, como a adição de números reais, a ordem dos conjuntos não altera a união.

c) Com a Propriedade 3, se um elemento x pertencer ao conjunto $A \cup \emptyset$, ele deve pertencer simultaneamente a A ou ao $\emptyset$. Como o conjunto vazio não tem elementos, então o elemento *x* pertence a A.

d) Para a Propriedade 4, se $x \in A$, então x é um elemento de $A \cup B$, ou seja, $x \in A$ ou $x \in B$. Logo, temos a inclusão de $A \subset A \cup B$.

Diferença de conjuntos.

Definição 1.7 ***Diferença de dois conjuntos.*** *Dados dois conjuntos E_1 e E_2. A diferença de E_1 e E_2, denotada $E_1 \smallsetminus E_2$, é o conjunto de elementos que pertencem a E_1 privado dos elementos que pertencem a E_2, e escrevemos:*

$$E_1 \smallsetminus E_2 = \{x, \ \ tais \ que \ x \in E_1 \ \ e \ x \neq y \ \ para \ todo \ y \in E_2\}$$

Isto é, a diferença dos conjuntos E_1 *e* E_2 é o conjunto dos elementos de E_1 que não pertencem a E_2, ou seja,

$$E_1 \setminus E_2 = \{x, \text{ tais que } x \in E_1 \text{ e } x \notin E_2\}.$$

Por exemplo, sejam os conjuntos $E_1 = \mathbb{R}$ e $E_2 = \{2, 5\}$. A diferença $E_1 \setminus E_2$ de E_1 e E_2 é dada por:

$$E_1 \setminus E_2 = \mathbb{R} \setminus \{2, 5\} = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } x \neq 2, x \neq 5\}$$

Também, sejam os conjuntos $E_1 = \mathbb{R}$ e $E_2 = 2\pi\mathbb{Z}$. A diferença $E_1 \setminus E_2$ de E_1 e E_2 é dada por:

$$E_1 \setminus E_2 = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } x \neq 2k\pi \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\}$$

Outro exemplo, $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ é o conjunto dos números racionais que não são inteiros.

Observação 1.3 *Note que os conjuntos $E_1 \setminus E_2$ e $E_2 \setminus E_1$ não são necessariamente iguais.*

Complementar de um conjunto.

Definição 1.8 ***Complementar de um conjunto****. Dados dois conjuntos E_1 e E_2 tal que $E_2 \subset E_1$. O complemento de E_2 em E_1 é o conjunto $E_1 \setminus E_2$, denotado por $\complement_{E_1}^{E_2}$ ou $\overline{E_2}$, que consiste nos elementos que pertencem a E_1, mas não pertencem a E_2:*

$$\complement_{E_1}^{E_2} = E_1 \setminus E_2 = \{x, \textit{ tais que } x \in E_1 \textit{ e } x \neq y \textit{ para todo } y \in E_2\}$$

Isto é, o complementar de E_2 em relação a um conjunto E_1, é o conjunto dado por:

$$\complement_{E_1}^{E_2} = E_1 \setminus E_2 = \{x \in E_1, x \notin E_2\}.$$

Quando E é o conjunto universo, denotamos o complementar de $F \subset E$ por F^c, assim:

$$F^c = \complement_E^F = \{x \in E, x \notin F\}.$$

Por exemplo, sejam os conjuntos $E_1 = \mathbb{R}$ e $E_2 = \{0\}$, então $E_2 = \{0\} \subset E_1 = \mathbb{R}$. O complementar de $\complement_{E_1}^{E_2} = E_1 \setminus E_2$ de $E_2 = \{0\}$ em $E_1 = \mathbb{R}$ é dado por:

$$\complement_{\mathbb{R}}^{\{0\}} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*.$$

Outro exemplo, sejam os conjuntos $E_1 = \mathbb{R}$ e $E_2 = 2\pi\mathbb{Z}$, então $E_2 \subset E_1 = \mathbb{R}$. O complementar de $\complement_{E_1}^{E_2} = E_1 \setminus E_2$ de E_2 em E_1 é dado por:

$$\complement_{E_1}^{E_2} = E_1 \setminus E_2 = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } x \neq 2k\pi \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\}$$

Observação 1.4 *Podemos observar que $x \in F^c$ se, e somente se, $x \notin F$. Também, $x \notin F^c$ se, e somente se, $x \in F$. Assim, temos $F \cap F^c = \emptyset$. Consequentemente, para o conjunto universo E, temos $\emptyset^c = E$ e $E^c = \emptyset$.*

Proposição 1.6 *Para A e B dois subconjuntos de um conjunto E, temos as seguintes propriedades:*

1. $(A^c)^c = A$
2. $A \setminus B = A \cap B^c$.
3. *Leis de De Morgan:*

   $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \text{ e } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

4. $A \subset B$ *se, e somente se,* $B^c \subset A^c$.
5. *Se* $A \cap B = \emptyset$, *então* $B \subset A^c$

Para provar esta propriedade utilizamos a igualdade de conjuntos, isto é, propriedade anti-simétrica da inclusão, e as definições de complementar, união e intersecção.

Algumas dessas propriedades serão tratadas na lista de exercícios resolvidos (veja o parágrafo 1.5). A prova dos outros é deixada como exercício.

<u>**Conjunto das partes de um conjunto.**</u>

Definição 1.9 ***O conjunto das partes de um conjunto.*** *Seja E um conjunto não vazio. Seja $\wp(E)$ o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de E (ou partes de E). Isto é, temos $A \in \wp(E)$ equivale a $A \subset E$. Dizemos que $\wp(E)$ é o conjunto dos partes de E. Isto é, o conjunto das partes de E é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto E.*

O conjunto dos partes $\wp(E)$, contém pelo menos os dois conjuntos E e $\emptyset$.

Observação 1.5 *O conjunto das partes que nos interessa é o dos números reais. Já demos alguns desses subconjuntos de números reais, como: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^+$... No Capítulo 3, construiremos outros conjuntos de números que são importantes para o estudo de funções, assim que para os Cálculos I e II em geral.*

1.4 Conclusão.

Neste capítulo estudamos as propriedades dos conjuntos numéricos, os tópicos trabalhados foram:

1. Conjuntos e Elementos: relação de pertinência e representação de conjuntos;

2. Inclusão e Subconjuntos: propriedades da inclusão e subconjuntos; especíais de $\mathbb{R}$;

3. Operações entre Conjuntos: União, Intersecção, Diferença e Propriedades dessas Operações;

4. Complementar de um Conjunto: relação com a inclusão e propriedades;

5. Cardinalidade de um conjunto: número de elementos de um conjunto;

6. Conjunto das Partes de um Conjunto: conjunto formado por todos os seus subconjuntos.

O estudo dos conjuntos numéricos representa em geral uma linguagem essencial na construção dos conceitos matemáticos. Aqui estamos interessados apenas em conjuntos numéricos, que são formados por números reais.

1.5 Exercícios

Escrevendo um conjunto.

Exercício 1.1 *Seja A o conjunto dos números naturais menores que 7. Escreva o conjunto A de duas maneiras diferentes.*

Solução. O conjunto A pode ser escrito sobre uma da seguinte forma:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ ou } A = \{n \in \mathbb{N}; 0 \leq n \leq 6\}.$$

Exercício 1.2 *Listar entre chaves os elementos dos conjuntos:*

1. *Dos números naturais múltiplos de 5.*

2. *Dos números naturais estritamente maiores do que 5 e estritamente menores do que 30 e que sejam divisíveis por 3.*

3. $A = \{x \in \mathbb{R} \ tal\ que\ \ x^2 - 4 = 0 \ \ ou\ 2x - 1 = 11\}$

4. $B = \{n \in \mathbb{N} \ \ tal\ que\ n\ \ \acute{e}\ divis\acute{i}vel\ por\ 3\}$

Solução.

1. Os primeiros números múltiplos de 5 são: 0, 5, 10, 15, 20,..... Em geral, qualquer número múltiplo natural de 5 pode ser escrito como: 5 k com k um número natural. Logo, o conjunto dos números naturais múltiplos de 5 é dado por:

$E = \{n = 5k \text{ tal que } k \in \mathbb{N}\}$ ou $E = \{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = 5k, \text{ onde } k \in \mathbb{N}\}.$

2. Os números naturais estritamente maiores do que 5 e estritamente menores do que 30 e que sejam divisíveis por 3, são os números naturais estritamente maiores do que 5 e estritamente menores do que 30 e que sejam múltiplos de 3. Então, esses números são dados por: 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

3. Se $x \in A$ então x verifica pelo menos uma das seguintes equações:

$$x^2 - 4 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 11, \text{ isto é, } x^2 = 4 \text{ ou } 2x = 12.$$

Logo, pela primeira equação temos $x = 2$ ou $x = -2$, e pela segunda equação temos $x = 6$. Então, o conjunto A é dado por: $A = \{-2,\ 2,\ 6\}$.

4. Os primeiros números divisíveis por 3 são: 0, 3, 6, 9, 12, ... Em geral, qualquer número natural divisível por 3 pode ser escrito como: $3k$ com k um número natural. Logo, o conjunto dos números naturais divisíveis por 3 é dado por: $B = \{n = 3k$ tal que $k \in \mathbb{N}\}$ ou $B = \{n \in \mathbb{N}$ tal que $n = 3k$,, onde $k \in \mathbb{N}\}$.

Exercício 1.3 ***Uma experiência aleatória***

1. Um jogador joga um dado de 6 faces uma única vez, qual é o conjunto E dos resultados desta experiência aleatória?

2. Um jogador joga um dado de 6 faces duas vezes, qual é o conjunto F dos resultados desta experiência aleatória?

Solução.

1. Se o jogador joga um dado de 6 faces uma única vez, o conjunto *E* dos resultados desta experiência aleatória é dado por:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ ou } E = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 6\}$$

2. Se o jogador joga um dado de 6 faces duas vezes, qual é o conjunto *E* dos resultados desta experiência aleatória, é formado pelas duplas:

$$F = \{(1,1), (1,2), ..., (1,6); (2,1), (2,2), ..., (2,6); ...; (6,1), (6,2), ..., (6,6)\}$$

De maneira mais simples, podemos escrever o conjunto *F* sobre a forma:

$$F = \{(n, m); \text{ onde } n,\ m \in \mathbb{N} \text{ com } 1 \leq n \leq 6 \text{ e } 1 \leq m \leq 6\}.$$

<u>Inclusão, União e diferença de conjuntos.</u>

Exercício 1.4 Inclusão.

1. *Determinar todos os possíveis conjuntos E que satisfazem simultaneamente as duas condições:*

$$E \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \ e \ \{0, 1, 2\} \subset E.$$

2. *Sejam os conjuntos A* = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {0, 3 ,5 ,7 ,9}. *Listar os conjuntos E tais que:* $E \subset A \ e \ E \subset B.$

Solução.

1. Os conjuntos E tais que E $\subset$ {1,2,3,4,5,6} e {0,1,2} $\subset$ E são dados por:

$$E = \{0,1,2\},\ E = \{0,1,2,3\},\ E = \{0,1,2,3,4\},$$

$$E = \{0,1,2,3,4,5\} \text{ e } E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

2. Os conjuntos E tais que $E \subset A$ e $E \subset B$ são dados por:

$$E = \emptyset,\ E = \{0\},\ E = \{3\},\ E = \{5\},\ \{0,3\},\ \{0,5\},\ \{3,5\} \text{ e } \{0,3,5\}$$

Observação 1.6 *Pode observar que os conjuntos E tais que $E \subset A$ e $E \subset B$são os subconjuntos da interseção $A \cap B =$*{0,3,5}.

Exercício 1.5 ***Pertence - Inclusão***. *Seja B = {3,4,5, {2}, {3, 6}}, classifique cada sentença em verdadeiro ou falso:*

1) $\{2\} \in B$, 2) $\{3,6\} \subset B$, 3) $4 \in B$, 4) $\{\{2\},\{3,6\}\} \subset B$,

5) $B \subset \{3,4,5\}$, 6) $\{\{2\}\} \subset B$, 7) $\{3,6\} \in B$, 8) $2 \notin B$.

Solução.

1. **Afirmação Verdadeira.** Por que o conjunto {2} é considerado um elemento de *B*.

2. **Afirmação Falsa**. Aqui o conjunto {3,6} é um elemento de *B*, mas não é um subconjunto de *B*, por que $6 \notin B$.

3. **Afirmação Verdadeira**. Por que 4 é um elemento de *B*.

4. **Afirmação Verdadeira**. Como {2} e {3,6} são elementos de *B*, então {{2}, {3,6}} $\subset$ *B*.

5. **Afirmação Falsa**. Por que o elemento {2} não pertence a {3, 4, 5}.

6. **Afirmação Verdadeira**. Aqui o conjunto {2} é um elemento de B e {{2}} é o subconjuto de *B* formado pelo elemento {2}.

7. **Afirmação Verdadeira.** Por que o conjunto $\{3,6\}$ é um elemento de B,

8. **Afirmação Verdadeira**. Observamos que o conjunto $\{2\}$ é um elemento de B, mas não é o caso do número 2.

Exercício 1.6 ***Inclusão***

Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Dê as diferentes inclusões entre os conjuntos A, B, C.

Solução.

Podemos ver que $A \subset C$ e $B \subset C$.

Exercício 1.7 *Construir subconjuntos A, B e C de $\mathbb{N}$ que satisfaçam simultaneamente as condições:*

C1) $A \subset B$,

C2) $C \subset B$,

C3) $A \cap C = \emptyset$

Solução. Seja o conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Para os conjuntos:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ e } C = \{7, 8, 9, 10\},$$

Podemos observar que:

$$A \subset B,\ C \subset B \text{ contudo } A \cap C = \emptyset.$$

Exercício 1.8 *Sejam A e B dois conjuntos.*

1. *Indicar as condições que devem satisfazer os conjuntos A e B para que se verifique* $A \cup B = B$.

2. *Indicar as condições que devem satisfazer os conjuntos A e B para que se verifique* $A \cap B = B$.

Solução.

1. Sejam dois conjuntos A e B. Seja $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, então $x \in A$ ou $x \in \mathrm{B}$. Assim, se $A \cup B = B$ temos que $x \in B$. Logo, temos: $A \subset B$. Reciprocamente, se $A \subset B$ então se $A \cup B = B$.

2. Sejam dois conjuntos A e B. Seja $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e $x \in B$. Assim, se $A \cap B = B$ temos que $x \in A$. Logo, temos: $B \subset A$. Reciprocamente, se $B \subset A$ então se $A \cap B = B$.

Exercício 1.9 Sejam A, B e C três conjuntos tais que $A \subset B$ e $A \subset C$. Provar que

$$A \subset B \cap C.$$

Solução. Seja $x \in A$, como $A \subset B$ então $x \in B$, também pelo fato que $A \subset C$ temos $x \in C$. Portanto, se $x \in A$ então $x \in B$ e $x \in C$, assim $x \in B \cap C$. Logo, temos $A \in B \cap C$.

Exercício 1.10 ***União e interseção de conjuntos***

Sejam $E = \{n \in \mathbb{N},\ n \geq 4\}$ e $F = \{n \in \mathbb{N},\ n \leq 12\}$. Dê os seguintes conjuntos:

1. $E \cup F$.

2. $E \cap F$.

Solução. Podemos escrever os conjuntos E e F sobre a forma:

$$E = \{4, 5, ..., 12, 13, 14, ...\} \text{ e } F = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 12\}.$$

Logo, temos:

1. $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., \} = \mathbb{N}$.

2. $E \cap F = \{4,..., 12\} = \{n \in \mathbb{N}; 4 \leq n \leq 12\}$.

Exercício 1.11 ***A diferença de dois conjuntos e o complementar de um conjunto***

Sejam $E = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 4\}$ e $F = \{n \in \mathbb{N}, n \leq 12\}$. *Dê os seguintes conjuntos:*

1. $E \setminus F$

2. $F \setminus E$.

Solução. Podemos escrever os conjuntos E e F sobre a forma:

$$E = \{4, 5, ..., 12, 13, 14, ...\} \text{ e } F = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 12\}.$$

Logo, obtemos:

1. $E \setminus F = \{13, 14, ...\} = \{n \in \mathbb{N}; n \geq 13\}$

2. $F \setminus E = \{0, 1, 2, 3\}$.

<u>**Complementar de um conjunto.**</u>

Exercício 1.12 ***O conjunto das partes de um conjunto***

Seja $E = \{1, 2, 3\}$. *Listar todos os subconjuntos de E.*

Solução. O conjuntos das partes do conjunto E é formado pelos subconjuntos de E:

$$\wp(E) = \{0, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, \}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Exercício 1.13 ***Complementar, união e interseção***

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Estabelecer as seguintes propriedades, relacionadas a união, a interseção e ao complementar.*

1. $\complement_C^{(A\cup B)} = (\complement_C^A) \cap (\complement_C^B)$.
2. $\complement_C^{(A\cap B)} = \complement_C^A \cup \complement_C^B$.

Solução.

1. Como $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ temos:

$$\complement_C^{(A\cup B)} = \{9, 10\}.$$

Por outro lado, como $\complement_C^A = \{5, 6, 8, 9, 10\}$ e $\complement_C^B = \{1, 2, 3, 9, 10\}$, logo temos:

$$\complement_C^A \cap \complement_C^B = \{9, 10\}$$

Em conclusão, temos:

$$\complement_C^{(A\cup B)} = \complement_C^A \cap \complement_C^B = \{9, 10\}.$$

2. Como $A \cap B = \{4, 7\}$ temos:

$$\complement_C^{(A\cap B)} = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}.$$

Por outro lado, como $\complement_C^A = \{5, 6, 8, 9, 10\}$ e $\complement_C^B = \{1, 2, 3, 9, 10\}$, assim obtemos:

$$\complement_C^A \cup \complement_C^B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}.$$

Observação 1.7 *As perguntas do Exercício 13 são propriedades gerais sobre os conjuntos. Nesse exercício estamos trabalhando com a igualdade de conjuntos. Então, vamos aplicar frequentemente a seguinte regra:*

Conjuntos iguais. *Dois conjuntos E_1 e E_2 serão iguais, e escrevemos $E_1 = E_2$, se E_1 e E_2 tiverem elementos idênticos. Em outras palavras, os dois conjuntos E_1 e E_2 são iguais se todos os elementos de E_1 forem elementos de E_2 e todos os elementos de E_1 forem elementos de E_1. Em outras palavras, temos: $E_1 = E_2 \Leftrightarrow E_1 \subset E_2$ e $E_2 \subset E_1$.*

Exercício 1.14 ***A diferença de dois conjuntos***

Sejam $E = \{n \in \mathbb{Z},\ n \geq -3\}$ e $F = \{n \in \mathbb{Z},\ n \leq 2\}$. *Dê os seguintes conjuntos:*

1. $E \setminus F$ e $F \setminus E$ e **2.** $\complement_{\mathbb{Z}}^{E}$ *e* $\complement_{\mathbb{Z}}^{F}$.

Solução.

1. Podemos escrever os conjuntos E e F sobre as seguintes formas: $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, ..., 12, 13, 14, ...\}$ e $F = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$. Assim, temos:

$E \setminus F = \{3, 4,...\} = \{n \in \mathbb{Z},\ n \geq 3\}$ e

$F \setminus E = \{..., -6, -5, -4, \} = \{n \in \mathbb{Z},\ n \leq -4\}$.

2. Para os complementares temos:

$\complement_{\mathbb{Z}}^{E} = \{..., -6, -5, -4\} = \{n \in \mathbb{Z},\ n \leq -4\}$, e $\complement_{\mathbb{Z}}^{F} = \{3, 4, ...\} = \{n \in \mathbb{Z},\ n \geq 3\}$

Exercício 1.15 *Considere os conjuntos* $A = \{0,1,2,3, 4\}$ *e* $B = \{2,4,6,8\}$.

Determine os conjuntos a seguir:

1. *Diferença de A e B:* $A \setminus B$.

2. *Diferença simétrica de A e B:* $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

3. $(A \cup B) \setminus (B \cap A)$.

Solução.

1. A diferença $A \setminus B$ é dada por: $A \setminus B = \{0, 1,3\}$.

2. Como $B \setminus A = \{6,8\}$ e $A \setminus B = \{0, 1, 3\}$, a diferença simétrica de A e B é dada por:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0,1,3,6,8\}.$$

3. Como $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ e $A \cap B = \{2,4\}$, temos:

$$(A \cup B) \setminus (B \cap A) = \{0, 1, 3, 6, 8\}.$$

Exercício 1.16 *Considere os conjuntos* $A = \{0, 1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$. *Considerando A e B como subconjuntos num universo* $U\{n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 \leq n \leq 9\}$, *determine os seguintes conjuntos:*

1. *Complementar da diferença de A e B:* $(A \setminus B)^c$.

2. *Complementa da intersecção de A e B:* $(A \cap B)^c$.

3. *Complementa da união de A e B:* $(A \cup B)^c$.

4. *Complementar da diferença simétrica de A e B:* $(A \triangle B)^c$.

Solução. O universo é dado por: $U = \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

1. Como $A \setminus B = \{0, 1, 3, 7\}$, então temos:

$$(A \setminus B)^c = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\}.$$

2. Como AnB = {5}, então temos:

$$(A \cap B)^c = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}.$$

3. Como $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, então temos:

$$(A \cup B)^c = \{9\}.$$

4. Aqui temos $A \setminus B = \{0, 1, 3, 7\}$ e $B \setminus A = \{2, 4, 8\}$, assim deduzimos: $A \triangle B$={0, 1, 2, 3, 4, 7, 8). Logo, obtemos:

$$(A \triangle B)^c = \{5, 6, 9\}.$$

<u>Algumas Propriedades sobre os Conjuntos.</u>

Exercício 1.17 ***Algumas propriedades da união e interseção***

Sejam E, F dois conjuntos. Demonstre as seguintes afirmações:

1. Se $F \subset E$ então $E \cup F = E$. Deduza os seguintes conjuntos: $E \cup E$ e $E \cup \emptyset$.

2. Se $F \subset E$ então $E \cap F = F$. Deduza os seguintes conjuntos: $E \cap E$ e $E \cap \emptyset$

Solução.

1. Seja $F \subset E$. Pela definição da inclusão, se $x \in E$ então $x \in F \cup E$, logo temos a inclusão $E \subset F \cup E$. Agora, pela definição da união, se $x \in F \cup E$, então $x \in F \subset E$ e $x \in E$, logo temos a inclusão $F \cup E \subset E$. Em conclusão, temos a igualdade $F \cup E = E$.

Como $E \subset E$, deduzimos que $E \cup E = E$. Também, como $\emptyset \subset E$, temos $\emptyset \cup E = E$.

2. Seja $F \subset E$. Pela definição da inclusão se $x \in F \subset E$ então $x \in F \cap E$, logo temos a inclusão $F \subset F \cap E$. Agora, pela definição da interseção, se $x \in F \cap E$, então $x \in F \subset E$, logo temos a inclusão $F \cap E \subset F$. Em conclusão, temos a igualdade $F \cap E = F$.

Como $E \subset E$, deduzimos que $E \cap E = E$. Também, como $\emptyset \subset E$, temos $\emptyset \cap E = \emptyset$.

Exercício 1.18 ***Propriedade da união***

Sejam A, B e C três conjuntos. Provar as seguintes propriedades, relacionadas à união.

1. $A \cup A = A$ (Propriedade do idempotente).

2. $A \cup B = B \cup A$ (Propriedade de comutatividade).

3. $A \cup \emptyset = A$ (Propriedade do elemento neutro).

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Propriedade de associatividade).

Solução.

1. Vamos aplicar a primeira propriedade do Exercício 1.17. Como $A \subset A$ a Propriedade 1 do Exercício 1.17 temos $A \cup A = A$ (Propriedade do idempotente).

2. Seja $x \in A \cup B$ então temos $x \in A$ ou $x \in B$. Assim, temos $x \in B$ ou $x \in A$, logo temos $x \in B \cup A$. Assim, temos $A \cup B \subset B \cup A$. Da mesma maneira, se $x \in B \cup A$ temos $x \in A \cup B$, assim $B \cup A \subset A \cup B$. Em conclusão, temos $A \cup B = B \cup A$ (Propriedade de comutatividade).

3. Também vamos aplicar a primeira propriedade do Exercício 1.17. Como $\emptyset \subset A$ a Propriedade 1 do Exercício 1.17 temos $\emptyset \cup A = A$ (Propriedade do elemento neutro).

4. Seja $x \in A \cup (B \cup C)$ então temos $x \in A$ ou $x \in B \cup C$. Assim, temos $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$, logo temos $x \in A \cup B$ ou $x \in C$, logo $x \in (A \cup B) \cup C$. Assim, temos $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$. Da mesma maneira, se $x \in (A \cup B) \cup C$ temos $x \in A \cup (B \cup C)$, assim $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. Em conclusão, temos $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Propriedade de associatividade)

Exercício 1.19 ***Propriedades da interseção***

Sejam A, B e C três conjuntos. Provar as propriedades da interseção:

1. $A \cap A = A$ (Propriedade idempotente).

2. $A \cap B = B \cap A$ (Propriedade comutativa).

3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Propriedade de associatividade).

4. Se $A \subset E$ temos $A \cap E = A$ (Propriedade do elemento neutro).

Solução.

1. Vamos aplicar a segunda propriedade do Exercício 1.17. Como $A \subset A$ a Propriedade 2 do Exercício 1.17 temos $A \cap A = A$ (Propriedade do idempotente).

2. Seja $x \in A \cap B$ então temos $x \in A$ *e* $x \in B$. Assim, temos $x \in B$ *e* $x \in A$, logo temos $x \in B \cap A$. Assim, temos $A \cap B \subset B \cap A$. Da mesma maneira, se $x \in B \cap A$ temos $x \in A \cap B$, assim $B \cap A \subset A \cap B$. Em conclusão, temos $A \cap B = B \cap A$ (Propriedade de comutatividade).

3. Seja $x \in A \cap (B \cap C)$ então temos $x \in A$ e $x \in B \cap C$. Assim, temos $x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C$, logo temos $x \in A \cap B$ *e* $x \in C$, logo $x \in (A \cap B) \cap C$. Assim, temos $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$. Da mesma maneira, se $x \in (A \cap B) \cap C$ temos $x \in A \cap (B \cap C)$, assim $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$. Em conclusão, temos $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Propriedade de associatividade).

4. Vamos aplicar a segunda propriedade do Exercício 1.17. Como $A \subset E$ a Propriedade 2 do Exercício 1.17 temos $A \cap E = A$ (Propriedade do elemento neutro).

Exercício 1.20 ***União e interseção***

Sejam A, B e C três conjuntos. Provar as propriedades relacionadas à união e interseção.

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(Distributiva da interseção em relação à união).*

2. $A \cup (A \cap B) = A$.

3. $A \cap (A \cup B) = A$.

Solução.

1. Seja $x \in A \cap (B \cup C)$ então temos $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Assim, temos $x \in A$ e [$x \in B$ *ou* $x \in C$], logo temos [$x \in A$ *e* $x \in B$] ou [$x \in A$ *e* $x \in C$]. Então, temos $x \in A \cap B$ *ou* $x \in A \cap C$, isto é, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Logo, temos $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Da mesma maneira, se $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, temos [$x \in A$ *e* $x \in B$] ou [$x \in A$ *e* $x \in C$], ou equivalentemente $x \in A$ e [$x \in B$ *ou* $x \in C$]. Logo, deduzimos que $x \in A \cap (B \cup C)$, assim $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$. Em conclusão, temos $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributiva da interseção em relação à união).

2. Vamos aplicar a segunda propriedade do Exercício 1.17. Como $A \cap B \subset E = A$ a Propriedade 2 do Exercício 1.17 temos $A \cup (A \cap B) = A$.

3) Também, vamos aplicar a segunda propriedade do Exercício 1.17. Como $A \subset E = A \cup B$ a Propriedade 2 do Exercício 1.17 temos $A \cap (A \cup B) =$ A.

CAPÍTULO 2

O Conjunto dos Números Reais: Axiomas e Estrutura Algébrica

Objetivos

Neste capítulo apresentamos uma construção axiomática do conjunto dos números reais. Mais precisamente, estruturamos a apresentação do conjunto dos números reais e de seus subconjuntos notáveis.

2.1 Preliminares

O estudo do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o estudo dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, começou no Ensino Fundamental e se alastrou no Ensino Médio. Foram estudadas as operações de adição, de multiplicação, de subtração e de divisão em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, e e m seguida em $\mathbb{R}$. A partir daí as "ferramentas" de trabalho são os números reais.

Na verdade, no Ensino Fundamental e Ensino Médio foi utilizado o fato de $\mathbb{R}$ ter uma "estrutura" (também chamada estrutura algébrica), que é obtida em um conjunto equipado com operações de adição e de multiplicação, mas estas operações têm determinadas propriedades. A construção formal de $\mathbb{R}$ nos permitiria definir as operações e provar todas as propriedades; no entanto, esta construção não será feita neste momento, como dissemos anteriormente. Assim, vamos considerar conhecidos o conjunto $\mathbb{R}$ e suas operações e vamos apresentar algumas propriedades como um conjunto de axiomas[1]. A partir daí, provaremos outros resultados importantes para a compreensão do conjunto $\mathbb{R}$.

[1] **Axioma**: São afirmações que admitimos verdadeiras, sem demonstração.

Neste capítulo estudaremos a estrutura algébrica do conjunto dos números reais, não só como uma ferramenta útil na construção de outros conceitos matemáticos, mas como um objeto matemático próprio. O conhecimento do conjunto dos números reais é de extrema importância no estudo dos Cálculo I e II, juntamente com as funções, nosso objeto de estudo dos próximos capítulos.

2.2 Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

Os primeiros conjuntos numéricos conhecidos pela humanidade são os chamados inteiros positivos ou naturais. Temos então o conjunto:

$$\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Até hoje, o conjunto dos números naturais é apresentado com um aspecto natural que é baseado no senso comum e uma espécie de conceito intuitivo de recursão, que é uma propriedade intrínseca dos números naturais, que não é outro senão a propriedade do sucessor. Assim, como cada número natural n de $\mathbb{N}$ tem um sucessor $n + 1$, podemos facilmente nos convencer de que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito.

Dados dois números naturais n e m, sabemos como definir a adição e a multiplicação desses números. Podemos sempre definir a adição $m + n$ e a multiplicação $m.n$ desses dois números, que também são números naturais. Assim, o conjunto de números naturais é fechado para ambas as operações de adição e de multiplicação. Em outras palavras, adição e multiplicação em $\mathbb{N}$ são operações que têm seu resultado em $\mathbb{N}$.

Por outro lado, o resultado de uma subtração de dois números naturais nem sempre é um número natural, por exemplo, $7-2 = 5 \in \mathbb{N}$ mas $2-7 \notin \mathbb{N}$. Daí a necessidade de criar um novo conjunto de números que contenha $\mathbb{N}$ e no qual a operação de subtração de dois números naturais ainda seja possível.

Os números -1, -2, -3,... são chamados números inteiros negativos. A união do conjunto dos números naturais com os inteiros negativos define o conjunto dos números inteiros que são denotados por

$$\mathbb{Z}= \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 4, ...\}.$$

Temos, claro, a seguinte inclusão:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Também, o resultado de uma divisão de dois números inteiros nem sempre é um número inteiro, por exemplo, $\frac{12}{4} = 3 \in \mathbb{Z}$ e $\frac{-12}{4} = -3 \in \mathbb{Z}$, mas $\frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}$. Daí a necessidade de criar um novo conjunto de números que contenha $\mathbb{Z}$ e no qual a operação de divisão de dois números inteiros ainda seja possível.

Os números da forma, onde $\frac{p}{q}$ estão em $\mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, são chamados de frações e formam o conjunto dos números racionais. Denota-se:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q},\ p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}.$$

Assim, na apresentação do conjunto dos números racionais usamos o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ e introduzimos, uma simbologia que é a da fração, que por sua vez precisa de uma informação adicional: a equivalência. Duas frações são ditas equivalentes ou iguais de acordo com o seguinte:

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow pn = qm.$$

neste caso, dizemos que representam o mesmo número racional. Por exemplo, temos:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \frac{14}{21},$$

Assim, as 4 frações representam o mesmo número racional.

Em geral, adotamos a convenção de que as frações de denominador 1 representam o inteiro que é igual ao numerador dessa fração. Então, o conjunto de números racionais $\mathbb{Q}$ contém números inteiros $\mathbb{Z}$. Temos, claro, as seguintes inclusões:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Assim, as quatro operações elementares adição, subtração, multiplicação e divisão podem se estender ao conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, que é fechado para essas operações.

Terminamos com duas observações elementares simples, que são muito importantes para o futuro, principalmente durante os cálculos com os quocientes.

Observação: Sobre a inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Essa inclusão mostra que qualquer inteiro é também um número racional. Assim, qualquer inteiro $n \in \mathbb{Z}$ pode ser representado por uma fração da seguinte forma: $n = \frac{n}{1}$ especialmente:

$$1 = \frac{1}{1} \text{ e } \frac{0}{1} = 0$$

Outra observação sobre a regra dos sinais com frações

Observação: Frações e regras dos sinais Seja $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$a = \frac{m}{n} = \frac{-m}{-n} = -\frac{-m}{n} = -\frac{m}{-n}.$$

Assim, qualquer fração admite um escrito com um denominador positivo, isto é,

$$\frac{a}{b} = \begin{cases} \frac{a}{b} & \text{se } b > 0, \\ \frac{-a}{-b} & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

Esta última observação é importante para estudar o relacionamento de ordem e comparação em $\mathbb{Q}$.

2.3 Propriedades gerais de $\mathbb{Q}$

Primeiro, temos um importante subconjunto de $\mathbb{Q}$, que é o conjunto dos números decimais definido por:

Definição 2.1 Conjunto dos números decimais. *Um subconjunto importante de $\mathbb{Q}$ é o conjunto $\mathbb{D}$ dos números decimais:*

$$\mathbb{D} = \{r \in \mathbb{Q},\ tal\ que\ r = \frac{p}{10^k},\ \ onde\ p \in \mathbb{Z},\ \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Isto é, todo número da forma $r = \frac{p}{10^k}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ é equivalente a uma fração 10 decimal.

Por exemplo, temos:

1. $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$ é um número decimal. =

2. $\frac{17}{50} = \frac{34}{10^2} = 0,34$ é um número decimal.

3. $\frac{1}{3} = 0,33333$..... não é um número decimal. Mas essa é uma representação na forma decimal de $\frac{1}{3}$.

Podemos dizer que o conjunto dos números decimais, consiste em números racionais que podem ser escritos da seguinte maneira:

$$+n_1n_2...n_s, d_1d_2...d_k \text{ ou } -n_1n_2...n_s, d_1d_2...d_k,$$

onde os números $n_1,\ n_2,...,\ n_s,\ d_1,\ d_2,\ ...,\ d_k$ estão em $\mathbb{N}$. Assim, na escrita decimal de um número do conjunto D, há um número finito de dígitos após a vírgula.

Por exemplo, temos a escrita decimal dos seguintes números racionais:

1. $\frac{17}{50} = \frac{34}{10^2} = 0,34$

2. $\frac{1}{3} = 0,33333.....$

3. $\frac{123}{7} = 17,57\ 142857\,142857\ldots$

A escrita decimal e a escrita fracionária de um número racional são equi- valentes no seguinte sentido:

Proposição 2.1 *Um número é racional se, e somente se, admite uma escrita decimal periódica finita ou infinita.*

A demonstração desta proposta exige muito esforço de computação e de técnicas. Damos abaixo um exemplo que ilustra a passagem da escrita decimal para fracionária.

Por exemplo, seja o número $r = 7,21\,21\ldots21....$ Mostrar que o número r é racional. Multiplicando por 100 de ambos aos lados de $r = 7,21\,21\ldots21...$, temos:

$$100r = 100 \times (7,21\,21\ldots21...),$$

$$100r = 721,21\ldots21... = 721 + 0,\ 21\ldots21...,$$

Como $r = 7,2121...21...$, vamos subtrair nos dois membros. Subtraindo r de $100r$ e $7,2121...21...$ do segundo membro, obtemos:

$$100r - r = 721 + 0,\ 21\ldots21... - 7,21\,21\ldots21... = 721 - 7 = 714.$$

Então, nós deduzimos que o número r é a solução da equação: $99r = 714$. Assim, o número r é um número racional dado por: $r = \frac{714}{99}$.

Observação. O método anterior é aplicado para mudar um número escrito na forma decimal para a forma fracionária. Pode ser adaptado para outras casas decimais como: $7,35.21.21.21....$ ou $11,735.214.214.214.....$

2.4 Operações sobre $\mathbb{Q}$

2.4.1 Adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$.

As operações com números racionais são as usuais, denominadas de adição e multiplicação, ficando subentendidas as operações **inversas** definidas a partir destas, que são a subtração e a divisão. O que supostamente são conhecidas são as operações com números inteiros, por isso apenas apresentamos as definições de adição e multiplicação de frações e enunciamos logo em seguida as propriedades básicas. As provas dessas propriedades são baseadas nas propriedades dos números inteiros e nas seguintes definições de adição e multiplicação dos números racionais escritos na forma fracionária.

Definição 2.2 *Sejam* $a = \frac{m}{n}$ *e* $b = \frac{p}{q}$ *dois elementos de* $\mathbb{Q}$. *Definimos a adição e a multiplicação de* $a = \frac{m}{n}$ *e* $b = \frac{p}{q}$ *como o seguinte número racional:*

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} \quad e \quad a.b = \frac{m}{n}.\frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

A definição 2.2 mostra que a adição e a multiplicação de números racionais é obtida a partir da adição e da multiplicação de números inteiros. Assim, as propriedades da adição e da multiplicação dos números inteiros podem ser transferidas para os números racionais, ou seja: Associatividade; Comutatividade; Existência do Elemento Neutro da Adição; Existência de Oposto para à Adição; Existência do Elemento Neutro da Multiplicação e Existência de Inverso para à Multiplicação. De fato, podemos deduzir que a adição e a multiplicação dos números racionais, possuem as seguintes propriedades, que têm por objetivo completar a apresentação do conjunto dos números reais e que são úteis no estudo das expressões algébricas.

Proposição 2.2 *Sejam* $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{m}{n}$ *e* $c = \frac{k}{s}$ *três números racionais, isto é, são elementos de* $\mathbb{Q}$*, então são válidas as propriedades a seguir:*

1. **Comutatividade da adição:** $a + b = b + a$.

2. **Associatividade da adição:** $a + (b + c) = (a + b) + c$.

3. **Existência de elemento neutro da adição:** $a + 0 = a$.

4. **Existência de Oposto:** *Existe a em* $\mathbb{Q}$ *satisfazendo à relação* $a + (-a) = 0$*, o número* $(-a)$ *chama-se o oposto do número a ou o simétrico do número a.*

5. **Comutatividade da multiplicação**: $a.b = b.a$.

6. **Associatividade da multiplicação**: $a.(b.c) = (a.b).c$.

7. **Existência de elemento neutro da multiplicação**: $a.1 = a$.

8. **Existência de Inverso:** *Se* $a \neq 0$*, existe um único número d em* $\mathbb{Q}$ *satisfazendo à relação* $a.d = 1$*, o número d é o inverso de a e denotado* $d = \frac{1}{a}$ *ou* $d = a^{-1}$.

9. **Distributividade**: $a.(b + c) = a.b + a.c$

Prova. Sejam $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{m}{n}$ e $c = \frac{k}{s}$ três números racionais.

Comutatividade da adição em $\mathbb{Q}$. Pela definição 2.2 temos que $a + b = \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + mq}{qn}$. A comutatividade da multiplicação e da adição em $\mathbb{Z}$, então nos permitem deduzir que:

$$a + b = \frac{pn + mq}{qn} = \frac{qm + np}{nq} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = b + a.$$

Associatividade da adição em $\mathbb{Q}$. Pela definição 2.2 temos que $(\frac{p}{q}+\frac{m}{n})+\frac{k}{s}=\frac{pn+mq}{qn}+\frac{k}{s}$ De novo, pala definição 2.2 temos:

$$(a+b)+c=\frac{pn+mq}{qn}+\frac{k}{s}=\frac{(pn+mq)s+qnk}{qns}.$$

Usando a associatividade da multiplicação, da adição e a distributividade em $\mathbb{Z}$, assim como a definição 2.2 deduzimos que:

$$(a+b)+c=\frac{p}{q}+(\frac{m}{n}+\frac{k}{s})=a+(b+c).$$

Existência de elemento neutro da adição em $\mathbb{Q}$. Como $0\in\mathbb{Z}$ temos $0=\frac{0}{1}$. Com as propriedades da multiplicação e da adição em $\mathbb{Z}$, temos:

$$a+0=\frac{p}{q}+\frac{0}{1}=\frac{p\times 1+q\times 0}{p\times 1}=\frac{p}{q}=a.$$

Existência de oposto. Seja $a_1=\frac{-p}{q}$, pela definição 2.2 temos:

$$a+a_1=\frac{p}{q}+\frac{-p}{q}=\frac{p-p}{q}=\frac{0}{q}=0.$$

Assim, $a_1=\frac{-p}{q}$ é o oposto de $a=\frac{p}{q}$, que é denotado por $a_1=-a=-\frac{p}{q}$.

Comutatividade da multiplicação: Pela definição 2.2 e a comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$, temos:

$$a.b=\frac{p}{q}.\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}=\frac{mp}{nq}=\frac{m}{n}.\frac{p}{q}.$$

Então, $a.b=b.a$.

Associatividade da multiplicação: Pela definição 2.2 temos:

$$(a.b).c=(\frac{p}{q}.\frac{m}{n}).\frac{k}{s}=\frac{p.m}{q.n}.\frac{k}{s}=\frac{(p.m).k}{(q.n).k}=\frac{p.(m.k)}{n.(q.s)}.$$

E com associatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$, deduzimos que:

$$(a.b).c=\frac{(p.m).k}{(q.n).k}=\frac{p.(m.k)}{n.(q.s)}=\frac{p}{q}.(\frac{m}{n}.\frac{k}{s}).$$

Então, $(a.b).c = a.(b.c)$. **C.Q.D.**

Existência de elemento neutro da multiplicação. Como $1 = \frac{1}{1}$, a definição 2.2 implica que:

$$a.1 = \frac{p}{q}.\frac{1}{1} = \frac{p.1}{q.1} = \frac{p}{q} = a,$$

por que 1 é o elemento neutro em $\mathbb{Z}$.

Existência de Inverso: Seja $a = \frac{p}{q} \neq 0$. Seja $d = \frac{q}{p}$, como $1 = \frac{d}{d}$ para todo $d \neq 0$ em em $\mathbb{Z}$, a definição 2.2 e mostra que:

$$a.d = \frac{p}{q}.\frac{q}{p} = \frac{p.q}{p.q} = 1.$$

Assim, $d = \frac{q}{p}$ é o único número em $\mathbb{Q}$ satisfazendo à relação $a.d = 1$. Então, o número d é o inverso de *a*, que é denotado por $d = \dfrac{1}{a}$ ou $d = a^{-1}$.

Distributividade. Pela definição 2.2, temos que:

$$a.(b+c) = \frac{p}{q}.(\frac{m}{n} + \frac{k}{s}) = \frac{p}{q}.\frac{ms+nk}{ns} = \frac{p(ms+nk)}{qns} = \frac{pms+pnk)}{qns}$$

Assim, deduzimos que

$$a.(b+c) = \frac{(pms+pnk)}{qns} = \frac{pm}{qn} + \frac{pk)}{qs} = \frac{p}{q}.\frac{m}{n} + \frac{p}{q}.\frac{k}{s} = ab + ac.$$

C.Q.D.

Proposição 2.3 *Seja* $a = \dfrac{p}{q} \neq 0$ *um número racional não nulo. Então, o inverso de a é dado por:*

$$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = 1.\frac{q}{p} = \frac{q}{p}.$$

De fato, nós temos:

$$\frac{p}{q}.\frac{q}{p} = \frac{p.q}{q.p} = \frac{p.q}{p.q} = \frac{1}{1} = 1.$$

Assim, temos $a^{-1} = \dfrac{1}{a} = \dfrac{q}{p}$

As propriedades da proposição precedente conferem ao conjunto de números racionais uma estrutura algébrica interessante, que é conhecida como **CORPO**. De maneira mais precisa, temos que:

Teorema 2.1 *O conjunto dos números* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais, equipado com a adição e multiplicação é um* **Corpo Comutativo e Unitário**, *e escrevemos,* $(\mathbb{Q}, +, .)$ *é um corpo comutativo e unitário.*

Porque a terminologia comutativo e unitário?

Observação. Dizemos que $(\mathbb{Q}, +, .)$ é um corpo comutativo e unitário, pois satisfaz as condições:

- Comutativo: porque a multiplicação é comutativa, isto é, $a.b = b.a$ para todo a, b em $\mathbb{Q}$.

Unitário: porque o número 1 é um elemento neutro da multiplicação, isto é, $1.a = a$ para todo a em $\mathbb{Q}$.

2.4.2 Relação de ordem sobre $\mathbb{Q}$.

Lembre-se que existe uma ordem em $\mathbb{Z}$, para comparar dois números inteiros. Isto é, para n, m em $\mathbb{Z}$ nós definimos um relacionamento $\leq$ (menor ou igual):

$$n \leq m \Leftrightarrow m - n \in \mathbb{N}.$$

ou em outras palavras, $n \leq m \Leftrightarrow m - n \geq 0$. Esta relação de ordem em $\mathbb{Z}$ também se estende a números racionais $\mathbb{Q}$. Vamos introduzir uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$, e estabelecer que essa relação tem propriedades semelhantes às estudadas em $\mathbb{Z}$.

Qual dos dois números é o maior: $\frac{29}{7}$ ou $\frac{37}{9}$?

Quaisquer que sejam as respostas, estas questões nos levantam a outra questão: É possível determinar a ordem em $\mathbb{Q}$ fazendo apenas operações entre inteiros relativos, isto é, sem usar a divisão? A resposta é simples, basta criar um denominador comum. Por exemplo:

$$\frac{29}{7} = \frac{29 \times 9}{7 \times 9} = \frac{281}{63} \text{ e } \frac{37}{9} = \frac{37 \times 7}{9 \times 7} = \frac{259}{63} \text{ logo } \frac{29}{7} > \frac{37}{9}.$$

A ordem em $\mathbb{Q}$ pode ser facilmente definida fazendo este cálculo. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois números de $\mathbb{Q}$, onde os denominatores b e d são positivos. Então, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \text{ e } \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}.$$

Como temos o mesmo denominador comum positivo bd, então para comparar os dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, basta comparar os dois numeradores ad e bc dos números $\frac{ad}{bd}$ e $\frac{bc}{bd}$.

Definição 2.3 *Sejam* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *dois números de* $\mathbb{Q}$*, onde* **os denominadores** b **e** d **são positivos**. *Diremos que* $\frac{a}{b}$ *é menor ou igual a* $\frac{c}{d}$*, e escrevemos* $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$*, se tem-se* $ad \leq bc$*. Equivalentemente, podemos escrever:*

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc.$$

Como sabemos que qualquer fração pode ser escrita com um denominador positivo, a suposição **dos denominadores positivos** não é restritiva.

Como para as operações de adição e multiplicação, a definição 2.5 mostra que as propriedades da relação de ordem dos inteiros possibilitam obter as seguintes propriedades da relação de ordem de números racionais.

Proposição 2.4 *Sejam* $\alpha,\ \beta$ *e* γ *de* $\mathbb{Q}$*, onde os* **denominadores** *b e d* **são positivos**. *Então, a relação de ordem tem as seguintes propriedades:*

1. *Reflexiva*: $\alpha \leq \alpha$

2. *Anti-simétrica: se* $\alpha \leq \beta$ *e* $\beta \leq \alpha$ *então* $\alpha = \beta$

3. *Transitiva: se* $\alpha \leq \beta$ *e* $\beta \leq \gamma$ *então* $\alpha \leq \gamma$

4. *Tricotomia: Dados* α, β tem-se $\alpha \leq \beta$ *ou* $\beta \leq \alpha$ *ou* $\alpha = \beta$

Prova. Todas as frações possuem **denominadores positivos**.

A relação ≤ é reflexiva, de fato, seja $\alpha = \frac{m}{n}$ com $n > 0$. Se $\beta = \frac{m}{n}$, $n > 0$, com $mn = nm$ temos que $mn \leq nm$. Então $\alpha \leq \alpha$.

A relação ≤ é anti-simétrica. Sejam $\alpha = \frac{m}{n}$ e $\beta = \frac{p}{q}$, com $n > 0$ e $p > 0$ se $\alpha \leq \beta$ temos que $mq \leq np$ e se $\beta \leq \alpha$ então $np \leq mq$, o que implica que $np = mq$. Assim, deduzimos:

$$\alpha - \beta = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq} = 0.$$

Então, $\alpha = \beta$.

A relação ≤ é transitiva. Sejam $\alpha = \frac{m}{n}$, $\beta = \frac{p}{q}$ e $\gamma = \frac{k}{s}$ com $n > 0$, $p > 0,\ s > 0$. Se $\alpha \leq \beta$ temos $mq \leq np$ e se $\beta \leq \gamma$ então $ps \leq kq$, o que implica que que $mq - np \leq 0$ e $ps - kq \leq 0$. Então, temos:

$$q(ms-nk) = qms-qnk = qms-nps+nps-nqk = (qm-np)s+(ps-qk)n \leq 0,$$

por ser $q > 0,\ n > 0,\ s > 0$ e $mq - np \leq 0,\ ps - kq \leq 0$. Assim, temos $ms - nk \leq 0$ e deduzimos: $\alpha \leq \gamma$.

C.Q.D.

Assim, como as precedentes propriedades dizemos que o conjunto dos números racionais é **um corpo comutativo bem ordenado**, e denotado por $(\mathbb{Q}, +, \, . \,, \leq)$

Observação. Por que a palavra "bem ordenado"? "bem ordenado" significa que podemos comparar quaisquer dois números racionais.

2.4.3 Quais são as motivações para a insuficiência de números racionais?

Em outras palavras, quais são as motivações para a criação de $\mathbb{R}$? Os gregos clássicos acreditavam que todas as quantidades eram expressas por números racionais. Eles perceberam que isso nem sempre acontecia. Na verdade, podemos construir números que não são racionais. Isto é, existem números que não são racionais, chamados de **números irracionais**. Números irracionais aparecem naturalmente em figuras geométricas. Por exemplo, o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 é o número irracional $\sqrt{2}$.

Proposição 2.5 *O número $\sqrt{2}$ não é um número racional, isto é, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Prova. Suponhamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, isto é, $\sqrt{2}$ pode ser escrito sobre a forma $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros que não tem divisor comum, dizemos que p e q são primos entre si. Assim, temos:

$$\sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2} \text{ o que equivale a } 2q^2 = p^2.$$

A última expressão implica que p^2 é par, então p é par. Se p fosse ímpar, isto é $p = 2k + 1$, temos que $p^2 = 2(p^2 + 2p) + 1 = 2q^2$, o que é impossível, porque não existe um número inteiro não nulo que é par e ímpar. Como $p = 2s$ temos que

$$2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2 \text{ o que equivale a } q^2 = 2s^2$$

Com o mesmo raciocínio, também percebemos que q é par, isto é, $q = 2r$. Então, 2 é um divisor comum dos números p e q. Como p e q são primos entre si, temos então uma contradição. Em conclusão, o número $\sqrt{2}$ não é um número racional, isto é, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. **C.Q.D.**

Lembra-se que a raiz quadrada de um número real a é um número único e não negativo r que, quando multiplicado por si próprio, se iguala a a, isto é, $r \times r = a$. Todo número real não negativo possui uma única raiz quadrada não negativa, a qual é denotada pelos símbolos:

$$r = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}.$$

Podemos dizer que encontramos números que não podem ser representados na forma $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, p, $q \in \mathbb{Z}$, tais como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π. Esses números formam o conjunto dos números irracionais. Da união do conjunto dos números **racionais** com o conjunto dos números **irracionais** resulta o conjunto dos números reais, como veremos a seguir.

2.5 O conjunto dos números reais R

2.5.1 Definição axiomática dos números reais

Em geral, apresentaremos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como sendo o conjunto dos números identificados com os pontos da reta numérica. Esta forma se deve ao fato de que os números racionais são identificados de forma simples como pontos da reta numérica, usando os conhecimentos da Geometria Plana. No entanto, o conjunto de inteiros $\mathbb{Z}$ é matematicamente construído a partir dos números naturais $\mathbb{N}$, então o conjunto $\mathbb{Q}$ é construído a partir dos inteiros, por um método matemático algébrico.

A construção do conjunto dos números reais é extremamente técnica e pode ser realizada com uso de vários métodos. Assim, essa construção não pode fugir do escopo de um curso básico de cálculo. A seguir apresentamos a construção axiomática, do conjunto dos números reais, bem como suas definições e propriedades.

Observação 2.1 ***Axioma:*** *É uma afirmação que admitimos verdadeira, sem demonstração.*

No conjunto dos números reais introduzimos duas operações, chamadas de adição e multiplicação, que representam uma extensão natural das operações de adição e multiplicação de $\mathbb{Q}$. Essas operações satisfazem os axiomas a seguir:

Definição axiomática dos números reais $\mathbb{R}$. As operações de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$ satisfazem os seguintes axiomas:

AXIOMA de **Fechamento**: Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}$, existe um, e somente um, número real denotado por $a + b$, chamado de **soma**, e existe um, e somente um, número real, denotado por ab (ou a x b, ou $a.b$), chamado de **produto**.

AXIOMA 1. **Associatividade da adição**: Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $a + (b+c) = (a+b)+c$.

AXIOMA 2. **Comutatividade da adição**: Se a, $b \in \mathbb{R}$, então $a+b = b+a$.

AXIOMA 3. **Existência de elemento neutro da adição**: Existem 0 em $\mathbb{R}$ tais que $a + 0 = a$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$. O 0 (zero) é elemento neutro da adição.

AXIOMA 4. **Existência do elemento oposto ou simétrico**: Todo a em $\mathbb{R}$, tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

AXIOMA 5. **Associatividade da multiplicação**: Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $a.(b.c) = (a.b).c$.

AXIOMA 6. **Comutatividade da multiplicação**: Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $a.b = b.a$.

AXIOMA 7. **Existência de elemento neutro da multiplicação**: Existe 1 em $\mathbb{R}$ tal que $a.1 = a$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$. O 1 é elemento neutro da multiplicação.

AXIOMA 8. **Existência do elemento inverso**: Todo $a \neq 0$ em $\mathbb{R}$, tem um inverso, denotado por $\frac{1}{a}$ ou a^{-1}, tal que $a.\frac{1}{a} = 1$ (ou $a.a^{-1} = 1$).

AXIOMA 9. **Distributividade**: Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $a.(b+c) = a.b + a.c$.

Com estes axiomas as operações de adição e multiplicação definem em $\mathbb{R}$ uma estrutura de "corpo comutativo".

Observação 2.2 *Vimos nos parágrafos 3 e 4 que os Axiomas precedentes são propriedades verificadas pelo conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, porque a adição e a multiplicação em $\mathbb{Q}$ são definidas a partir da adição e da multiplicação dos números inteiros.*

Observação 2.3 *Os quatro axiomas 1-4 referem-se à operação adição; os quatro seguintes 5-8, à operação multiplicação. O último axioma 9 relaciona as duas operações; lembre que este axioma também é conhecido como "distributividade", ou seja, "colocar em evidência"*

E quanto as outras duas operações conhecidas em $\mathbb{R}$, ou seja, a subtração e o quociente de dois números reais? Esses casos são resolvidos, a partir da adição e da multiplicação de $\mathbb{R}$. Assim, podemos definir as operações de subtração e de divisão em $\mathbb{R}$. A subtração é definida da seguinte forma:

Definição 2.4 Subtração. *Na verdade, a subtração é a operação inversa da adição, que consiste em "subtrair" em vez de "adicionar". A subtração é definida usando a adição e o simétrico, da seguinte maneira:*

$$a - b = a + (-b), \text{ para todos } a, b \text{e em } \mathbb{R}.$$

E o quociente de dois números reais é definida por:

Definição 2.5 Quociente. *A divisão é a operação inversa da multiplicação, que consiste em "dividir" ao invés de "multiplicar". A divisão é definida usando a multiplicação e o inverso, da seguinte maneira:*

$$\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b} = a.b^{-1},\ \ para\ a,\ \ b \neq 0\ \ em\ \ \mathbb{R}.$$

A definição 2.1 da soma e do produto dos quocientes dos números racionais também se estende aos quocientes dos números reais.

Definição 2.6 *Sejam* $\alpha = \dfrac{a}{b}$ *e* $\beta = \dfrac{c}{d}$*, com b > 0 e d > 0, dois números de* $\mathbb{R}$*. Definimos a adição e a multiplicação de* $\alpha = \dfrac{a}{b}$ *e* $\beta = \dfrac{c}{d}$ *como sendo o seguinte número real:*

$$\alpha + \beta = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad e \quad \alpha.\beta = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Vamos estender algumas propriedades dos números racionais para dar as primeiras propriedades dos números reais.

Proposição 2.6

1) O zero, elemento neutro da adição, é único.

2) O oposto de um número real é único.

3) Vale a lei do cancelamento para a adição, isto é,

Se $x + t = y + t$ então $x = y$

4) Vale a lei do cancelamento para a multiplicação, isto é,

Se $x \,.\, t = y \,.\, t$, onde $t \neq 0$ então $x = y$

5) O elemento 1, o elemento neutro da multiplicação, é único.

6) O inverso de cada número real não-nulo é único.

7) Se $x.y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.

8) Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $-(-x) = x$.

9) Para todo $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 0$, temos $(x^{-1})^{-1} = x$.

10) Para todo x, y $\in \mathbb{R}$*, temos -(x + y) = −x − y.*

11) Para todo x, y $\in \mathbb{R}$*, temos - (x.y) = (-x).y = x.(-y).*

Para a provar as propriedades da Proposição 2.6, todos os procedimentos de resolução são semelhantes aos realizados com os números racionais, e se originam nos axiomas ou propriedades dos números reais.

2.5.2 Propriedade dos números reais

Para todo número real a 0 sabemos que:

$$a^2 = \underbrace{a \times a}_{2\ vezes}\ ,\ a^3 = \underbrace{a \times a \times a}_{3\ vezes}.$$

De maneira geral, para todo número real a e todo número natural *n*, o número a^n é definido da seguinte maneira:

Definição 2.7 Potência. *Para todo a* $\in \mathbb{R}$*, com a* $\neq$ *0, e todo n* $\in \mathbb{N}$:

$$a^0 = 1 \ \ e \quad a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n\ vezes},\ \ se \ \ n \geq 1.$$

Dos axiomas dos números reais, várias propriedades usuais são conhecidas. Assim, com os axiomas de $\mathbb{R}$, temos as seguintes propriedades

Proposição 2.7 Identidades notáveis. *Sejam a, b números reais. Então:*

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3. $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$.

Prova. Sejam *a, b* em $\mathbb{R}$.

1) Pela definição 2.7 temos que $(a + b)^2 = (a + b).\ (a + b)$. Com a aplicação do Axioma 7 da distributividade duas vezes sucessivamente, temos:

$$(a+b)^2 = (a + b).\ (a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a.a+a.b+b.a+b.b,$$

e usando a definição 2.7 e o Axioma 2 da comutatividade deduzimos que:

$$(a + b)^2= a^2 + ab +ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2) Pela definição 2.7 temos que $(a - b)^2 = (a - b).\ (a - b)$. Com a aplicação do Axioma 7 da distributividade duas vezes sucessivamente, temos:

$$(a - b)^2 = (a - b).\ (a - b) = a(a - b) — b(a - b) = a.a - a.b - b.a + (-b).(-b),$$

e usando as regras de sinal, a definição 2.7 e o Axioma 2 da comutatividade deduzimos que:

$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2-2ab + b^2.$$

3) Aplicação do Axioma 7 da distributividade temos:

$$(a+b).\ (a - b) = a(a – b) + b(a – b) = a.a - a.b+b.a+b.(-b),$$

e usando as regras de sinal, a definição 2.7 e o Axioma 2 da comutatividade deduzimos que $(a+b).\ (a - b) = a^2 - a.b + a.b - b^2 = a^2 — b^2$.

C.Q.D.

As técnicas de demonstração da proposição anterior também permitem estabelecer as seguintes identidades:

1. $(a+b)^3 = a^3 +3a^2b +3ab2+b^3$.

2. $(a - b)^3 = a^3- 3a^2b +3ab^2-b^3$.

3. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). =$

As demonstrações das identidades notáveis 1) e 2) são feitas também por meio de cálculos direto usando a Definição 2.7:

$(a + b)^3 = (a + b).(a + b)^2$ e $(a - b)^3 = (a - b).(a - b)^2$.

Em seguida, o uso das identidades notáveis 1) e 2) da Proposição 2.7, bem como os axiomas da comutatividade, da associatividade e da distributividade, possibilitam a obtenção do resultado.

De fato, as identidades notáveis da Proposição 2.7 e as identidades precedentes são parte das fórmulas mais gerais.

Observação 2.4 *Para todo número inteiro n ≥ 4, podemos provar as importantes identidades:*

1$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + ... + n(n-1)a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$

2 $(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + ... + n(n-1)(-1)^{n-2}a^2b^{n-2}) + n(-1)^{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n b^n.$

3) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2.b^{n-3} + a.b^{n-2} + b^{n-1})$, para n ≥ 2.

As precedentes identidades são frequentemente encontrada em diferentes capítulos do Cálculo, como por exemplo, no capítulo sobre o estudo de sequências geométricas.

As expressões das identidades notáveis são relacionadas as potênciais, sendo que as potênciais de ordem superior possuem as seguintes propriedades:

Proposição 2.8 Propriedades do Potêncial. *Sejam a, b números reais. Então:*

1. *Para todo número natural m ≥ 0 e n ≥ 0, temos* $a^m.a^n = a^{m+n}$
2. *Para todo número natural m ≥ 0 e n ≥0, temos* $(a^m)^n = a^{mn}$.

3. *Para todo número natural $n \geq 1$ temos $(a.b)^n = a^n.b^n$.*

4. *Se $b \neq 0$, para todo número natural $n \geq 0$, temos $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.*

Prova. Sejam *a*, *b* em $\mathbb{R}$ e $m \geq 0$ $n \geq 0$ em $\mathbb{N}$.

1) Se $m = n = 0$, pela definição 2.7 temos $a^0.a^0 = a^{0+0} = a^0 = 1$. Também, se $m = 0$ e se $n \geq 1$ pela definição 2.7, temos $a^0.a^n = 1.a^n$ e $a^{0+n} = a^n$, assim $a^0.a^n = a^{0+n} = a^n$. Suponha que $m \geq 1$ $n \geq 1$, então pela definção 2.7 temos:,

$$a^m.a^n = (\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{m \ vezes})(\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \ vezes}),$$

e pelo Axioma 3 de associatividade, deduzimos que:

$$a^m.a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{m+n \ vezes} = a^{m+n}.$$

2) Se $m = 0$ ou $n = 0$, pela definição 2.7 temos $(a^0)^n = a^{0.n}$ ou $(a^m)^0 = a^{m.0}$. Então, deduzimos que: $(1)^n = a^0 = 1$ ou $(a^m)^0 = a^{m.0} = a^0 = 1$.

$$(a^m)^n = (\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{m \ vezes})^n = \underbrace{(\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{m \ vezes}) \times ... \times (\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{m \ vezes})}_{n \ vezes},$$

e pelo Axioma 3 de associatividade, deduzimos que:

$$(a^m)^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{m.n \ vezes} = a^{m.n}.$$

3) Se $n = 0$, pela definição 2.7 temos $a^0.b^0 = (a.b)^0 = 1$. Suponha que $n \geq 1$, então pela defínção 2.7 e a combinação do Axioma 2 da comutatividade e do Axioma 3 da associatividade, deduzimos o resultado:

$$(a.b)^n = \underbrace{ab \times ab \times ... \times ab}_{n \ vezes} = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \ vezes}\underbrace{b \times b \times ... \times b}_{n \ vezes} = a^n.b^n.$$

4) Suponha $b \neq 0$ e seja um número natural $n \geq 0$. Se $n = 0$, pela definição 2.7 temos $(\frac{a}{b})^0 = 1$ e $\frac{a^0}{b^0} = \frac{1}{1} = 1$, assim $(\frac{a}{b})^0 = \frac{a^0}{b^0} = 1$. Se $n \geq 1$, pelas definições 2.6 e 2.7, e a combinação do Axioma 2 da comutatividade e do Axioma 3 da associatividade, temos:

$$(\frac{a}{b})^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times ... \times \frac{a}{b}}_{n\ vezes} = \frac{\overbrace{a \times a \times ... \times a}^{n\ vezes}}{\underbrace{b \times b \times ... \times b}_{n\ vezes}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Se $a \neq 0$, para todo número natural $n \geq 0$, usamos a seguinte notação $(a^{-1})^n = (\frac{1}{a})^n = a^{-n}$. Assim, podemos escrever: $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \times \frac{1}{b^n} = a^n.b^{-n}$.

C.Q.D.

Proposição 2.9 Propriedades da raiz quadrada. *Sejam a, b números reais. Então:*

1. *Se a ≥ 0 temos* $(\sqrt{a})^2 = a$.
2. *Se a ≥ 0 temos* $\sqrt{a^2} = a$.
3. $a \geq 0\ e\ b \geq 0$, temos $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$.

Prova.

1) Seja $a \geq 0$ e $r = \sqrt{a}$, então, pela definição 2.7 temos $r \times r = r^2 = a$, então $(\sqrt{a})^2 = a$.

2) Sejam $a \geq 0$ e $r = \sqrt{a^2}$, como

$$r^2 = (\sqrt{a^2})^2 = a^2,$$

deduzimos que a raíz quadrada $r = \sqrt{a^2}$ de a^2 é igual a a, isto é, $\sqrt{a^2} = a$.

3) Sejam Se $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $r_1 = \sqrt{a.b}$, $r_2 = \sqrt{a}.\sqrt{b}$. Temos que $r_1^2 = \sqrt{a.b}^2 = a.b$ e

$$r_2^2 = (\sqrt{a}.\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2.\sqrt{b}^2 = a.b.$$

Assim, $r_1 = \sqrt{a.b}$ e $r_2 = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ são raízes quadradas de *a.b*. Como a raíz quadrada de a.b é única, deduzimos que $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$. **C.Q.D.**

Temos que ter muito cuidado com o problema da raiz quadrada. Para o caso $a < 0$, a expressão $(\sqrt{a^2})$ será discutida no próximo Capítulo. Agora, o que acontece com as identidades da Proposição 2.8, quando m, n são inteiros? Veremos mais adiante que as propriedades da Proposição 2.8 permanecem válidas para os números inteiros.

2.5.3 Considerações finais

A - Definição axoiomática de $\mathbb{R}$ e sua estrutura de corpo. A definição axiomática dos números reais é uma maneira usual e mais simples de apresentar as definições e propriedades referentes ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Por outro lado, as propriedades das precedentes proposições conferem ao conjunto dos números reais uma estrutura algébrica interessante, que é conhecida como: **Corpo**. De maneira mais precisa, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.2 *O conjunto R dos números reais, munido da operação de adição e da multiplicação é um* **Corpo Comutativo e Unitário**, *e escrevemos* $(\mathbb{R}, +, .)$.

Observação 2.5 *Porque as palavras comutativo e unitário?*

a) Comutativo: porque a multiplicação é comutativa, isto é, $a.b = b.a$ para todo a, b em $\mathbb{R}$.

b) Unitário: porque o número 1 é o elemento neutro da multiplicação, isto é, $1.a = a$ para todo a em $\mathbb{R}$.

A terminologia do corpo comutativo e unitário é mais geral. A teoria do corpo é uma área importante da matemática, que tem várias aplicações teóricas e práticas.

B - Racionalizar os quocientes. Para o número $\frac{1}{\sqrt{a}}$, o denominador é irracional. Seja $a > 0$ um número real, temos, que:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}.\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Assim, o número $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ tem um denominador sem raiz quadrada. De maneira semelhante, por exemplo, temos que:

$$\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{1}{a+\sqrt{b}} \times \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{(a+\sqrt{b}).(a-\sqrt{b})} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}.$$

para todo *a*, *b*$\in \mathbb{R}$ com $b > 0$ e $a^2 \neq b$. Então, o quociente $\frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$ tem um denominador sem raiz quadrada.

Esta técnica chamada de racionalização, é muito útil em cálculos numéricos, especialmente aqueles relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral.

C - Operações com números irracionais. Como já sabemos, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais; compõe-se de números racionais e irracionais. Lembre-se que um número irracional é aquele que não é racional, ou seja: dado um número real, ele só tem duas possibilidades: o número é racional ou o número é irracional, e este "**ou**" é exclusivo [No vocabulário matemático o "**ou**" exclusivo indica que uma possibilidade exclui a outra, isto é, se satisfaz a primeira possibilidade não pode satisfazer a segunda e vice-versa].

Com o conjunto dos números racionais, sabemos que quando operamos números racionais (com as operações adição, multiplicação, subtração, divisão) o resultado é ainda um número racional (as operações são fechadas em $\mathbb{Q}$). De modo geral, isto não acontece com os números irracionais. Isto é, a adição e a multiplicação de dois números irracionais pode ser um número racional ou um número irracional, por exemplo, sabemos que $\sqrt{2}$ é um número irracional, mas:

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q} \text{ e } \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}.$$

No entanto, temos alguns resultados de fechamento do conjunto dos números irracionais.

Proposição 2.10 *1. A soma de um número racional e um número irracional é um número irracional.*

2. O produto de um número racional não-nulo por um número irracional é um número irracional.

3. O oposto de um número irracional é um número irracional.

4. Para todo número inteiro primo positivo p, tem-se que $\sqrt{p}$ *é um número irracional.*

Observação 2.6 *Conhecendo números irracionais, e as propriedades da Proposição 2.10 podemos "produzir" números irracionais. Escolha por exemplo o número irracional,* $\sqrt{2}$*; para cada número racional* $a \neq 0$*, teremos os irracionais* $a + \sqrt{2}$ *e* $a.\sqrt{2}$*. Isto significa que, para cada número irracional escolhido, podemos construir uma infinidade de outros irracionais.*

D - Relação de ordem em $\mathbb{Q}$ e de ordem em $\mathbb{R}$. Lembre-se que temos uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$, que também se estende aos números racionais $\mathbb{Q}$. A relação de ordem em $\mathbb{Q}$ foi realizada a partir das operações sobre os números racionais e a comparação dos numeradores, que são números inteiros. A relação de ordem em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ é baseada sobre a comparação de dois números *a* e *b*, em ambos os conjuntos, trata-se de comparar *b* - *a* a 0. Assim, para *a* e *b* em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, podemos observar que:

$$a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a.$$

Com a precedente relação é possível determinar a ordem em $\mathbb{R}$ fazendo apenas a operação de subtração e comparar o resultado com 0.

No próximo capítulo, vamos definir da mesma maneira a relação de ordem em $\mathbb{R}$ e estudar várias propriedades em $\mathbb{R}$.

2.6 Exercícios

Exercício 2.1 Números racionais. *Efetue os seguintes cálculos*:

$$A = \frac{11}{5} - \frac{3}{4}, \qquad B = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{6}{7}, \qquad C = 5^{-2} \times 125 \times \frac{27}{25} - \frac{55}{25}.$$

Solução. As regras de cálculo das frações e das potências nos permitem ter:

- $A = \frac{11 \times 4}{5 \times 4} - \frac{3 \times 5}{4 \times 4} = \frac{29}{20}$.
- $B = \frac{5}{3} - \frac{24}{21} = \frac{5 \times 7}{3 \times 7} - \frac{24}{21} = \frac{11}{21}$.
- $C = 5^{-2} \times 5^3 \times \frac{27}{5^2} - \frac{5 \times 11}{5^2} = \frac{27}{5} - \frac{11}{5} = \frac{16}{5}$.

Exercício 2.2 Números racionais

1) Seja o número r = 7, 202 202 ... 202.... Mostrar que o número r é racional.

2) Seja o número r = 2,427 27... 27.... Mostrar que o número r é racional.

Solução. A Proposição 2.1 afirma que qualquer número que tenha uma escrita decimal periódica é um número racional. Como os números deste exercício tiverem uma escrita decimal periódica, usaremos o método utilizado no exemplo apresentado na Proposição 2.1.

1) Para o número $r = 7, 202\ 202 \ldots 202\ldots$, temos:

$$1000 \text{ x } r - r = 7202, 202\ldots202\ldots -7, 202\ 202 \ldots 202\ldots.$$

Logo, obtemos $1000r - r = 7195$, e assim deduzimos que $r = \dfrac{7195}{999}$

2) Para o número $r = 2, 427\ 27 \ldots 27\ldots$, temos:

$$1000 \times r - 10r = 2427, 27\ldots 27\ldots - 24, 27\ 27 \ldots 27\ldots.$$

Logo, obtemos $1000r - 10r = 2403$ deduzimos que $r = \dfrac{2403}{990}$

Exercício 2.3 *Determine a fração geratriz de cada dízima periódica.*

$$(1)\quad 0,777...., \qquad (2)\quad -1,222..., \qquad (3)\quad 3,25555...,$$

$$(4)\quad -16,2323...., \qquad (5)\quad 4,18282...., \qquad (6)\quad -2,516516....$$

Solução. Ao aplicar o método do exercício anterior, obtemos os seguintes

$$(1)\, 0,777.... = \frac{7}{9}, \qquad (2)\quad -1,222... = -\frac{11}{9}, \qquad (3)\quad 3,25555... = \frac{293}{90},$$

$$(4)\, -16,2323.... = -\frac{1607}{99},\ (5)\, 4,18282.... = \frac{4141}{990},\quad (6)\, -2,516516.... = -\frac{2514}{999}.$$

Exercício 2.4 *Classifique cada um dos números a seguir em racional ou irracional.*

$$(1)\ \frac{16}{5}, \qquad (2)\ -\frac{15}{11}, \qquad (3)\ \sqrt{3}, \qquad (4)\ -3\frac{5}{9}, \qquad (5)\ \frac{9}{4}.$$

$$(6)\ -\frac{3}{8}, \qquad (7)\ \sqrt{6}, \qquad (8)\ \sqrt{7}, \qquad (9)\ \frac{52}{9}, \qquad (10)\ \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Solução. Os seguintes números reais são número racionais:

$$\frac{16}{5}, \qquad -\frac{15}{11}, \qquad -3\frac{5}{9}, \qquad \frac{9}{4} \qquad -\frac{3}{8}, \quad \frac{52}{9}.$$

Os seguintes números reais são número irracionais:

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt{6}, \qquad \sqrt{7}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercício 2.5 Números naturais, inteiros, racionais e irracionais. *Observe o conjunto A e responda*:

$$A = \{\frac{-14}{2},\ \frac{21}{7},\ \pi,\ \sqrt{2}, \sqrt{16},\ \frac{24}{12}\}$$

1) Quais elementos são números naturais?

2) Quais elementos são números inteiros?

3) Quais elementos são números racionais?

4) Quais elementos são números irracionais?

Solução.

1) Os seguintes números são números naturais: $\frac{21}{7}$, $\sqrt{16}$, $\frac{24}{12}$.,

2) Os seguintes números são números inteiros: $\frac{-14}{2}$, $\frac{21}{7}$, $\sqrt{16}$, $\frac{24}{12}$.

3) Os seguintes números são números racionais: $\frac{-14}{2}$, $\frac{21}{7}$, $\sqrt{16}$, $\frac{24}{12}$.

4) Os seguintes números são números irracionais: π, $\sqrt{2}$.

Exercício 2.6 Números irracionais.

Sabemos que $\sqrt{3}$ *é irracional.*

1) Mostrar que os números $2+\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ *são irracionais.*

2) Seja r um número racional. Mostre que $r+\sqrt{3}$ *é irracional.*

Solução. Aqui aplicamos um raciocínio pelo absurdo. 1) Suponha que $2+\sqrt{3}$ é um número racional, então temos $2+\sqrt{3}=\frac{p}{q}$, onde p, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Logo, temos $\sqrt{3}=\frac{p}{q}-2=\frac{p-2q}{q} \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\sqrt{3}$ é um número racional. O que é uma contradição. Assim, $2+\sqrt{3}$ é o número real irracional.

De maneira semelhante, suponha que $2\sqrt{3}$ é um número racional, então temos $2\sqrt{3}=\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Z}^{**}$. Logo, temos $\sqrt{3}=\frac{p}{2q} \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\sqrt{3}$ é um número racional. O que é uma contradição. Assim, $2\sqrt{3}$ é o número real irracional.

2) Suponha que $r+\sqrt{3}$ é um número racional, então temos $r+\sqrt{3}=\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Logo, temos $\sqrt{3}=\frac{p}{q}-r=\frac{p-rq}{q} \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\sqrt{3}$ é um número racional. O que é uma contradição. Assim, $r+\sqrt{3}$ é o número real irracional.

De maneira semelhante, podemos provar que $r\sqrt{3}$ é um número real irracional.

Assim, a partir do número irracional $\sqrt{3}$, podemos construir um número infinito de números irracionais.

Exercício 2.7 *Sabemos que π é um número irracional. Mostre que os números 3 + π e 3π são irracionais.*

Solução. Aqui também aplicamos um raciocínio pelo absurdo.

Suponha que 3 + π é um número racional, então temos $3 + \pi = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Logo, temos $\pi = \frac{p}{q} - 3 = \frac{p - q}{q} \in \mathbb{Q}$, , ou seja, π é um número racional. O que é uma contradição. Assim, 3+ π é um número real irracional.

De maneira semelhante, suponha que 3π é um número racional, então temos $3\pi = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Logo, temos $\pi = \frac{p}{3q} \in \mathbb{Q}$, ou seja, π é um número racional. O que é uma contradição. Assim, 3π é um número real irracional.

Com os exercícios 2.6 e 2.7, podemos concluir que de maneira geral, a partir de um número irracional qualquer, podemos construir um número infinito de números irracionais.

Exercício 2.8 Seja x e y dois números racionais distintos, tais como $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ são irracionais.

1) Consideramos os dois números reais $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ *e* $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. *Mostre que o produto deles é racional e a sua soma é irracional.*

2) Mostre com exemplos, que $\sqrt{x}.\sqrt{y}$ *pode ser um número racional ou* um número irracional.

Solução.

1) Temos

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = \sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2 = x-y \in \mathbb{Q}$ e $(\sqrt{x}+\sqrt{y})+(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 2\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$.

Logo, o produto de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ e $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ é racional e a soma de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ e $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ é irracional.

2) Se $x = 4$ e $x = 9$ temos $\sqrt{x}.\sqrt{y} = 2 \times 3 = 6 \in \mathbb{Q}$, assim o produto $\sqrt{x}.\sqrt{y}$ é racional.

Se $x = 4$ e $x = 3$ temos $\sqrt{x}.\sqrt{y} = 2 \times \sqrt{3} = 6 \notin \mathbb{Q}$, assim o produto $\sqrt{x}.\sqrt{y}$ é irracional.

Exercício 2.9 Números racionais e irracionais. *Quaisquer que sejam o racional e x e o irracional y. Para cada uma das afirmações abaixo assinale com V, quando Verdadeira e com F quando for Falsa. Tente encontrar justificativa para cada uma dessas afirmações*:

1) x + 2y é um número racional.

2) x − y + $\sqrt{2}$ *é um número irracional.*

3) y.y é um número irracional.

4) x + y é um número irracional.

5) x + y é um número racional.

Solução.

1) $x + 2y$ é racional. **Falsa**. De fato, se $x + 2y = \frac{p}{q}$ é um número racional, temos $y = \frac{p}{2q} - \frac{x}{2} \in \mathbb{Q}$, o que é impossivel

2) $x-y+\sqrt{2}$ é um número irracional. **Falsa**, se $y = \sqrt{2}$, temos $x-y+\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.

3) $y.y$ é um número irracional. **Falsa**, se $y = \sqrt{2}$, temos $y.y = \sqrt{2}.\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}.$.

4) $x + y$ é um número irracional. **Verdadeira**, de fato, se $x + y = \frac{p}{q}$ é um número racional, temos $y = \frac{p}{q} - x \in \mathbb{Q}$, o que é impossivel.

5) $x + y$ é um número racional. **Falsa**, por que seguinte 4), $x + y$ é um número irracional.

Exercício 2.10 *Sejam a e b dois números irracionais. Prove que, se a + b é um número racional, então a – b é um número irracional.*

Solução.

Suponhamos que *a - b* fosse racional, ou seja $x = a - b \in \mathbb{Q}$. Como por hipótese *a + b* é racional, temos que $(a + b) + (a - b) = 2a \in \mathbb{Q}$, o que é uma contradição, já que $2 \in \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, pela afirmação 2 da Proposição 2.10, temos $2a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Logo, o número real *a – b* é irracional.

Exercício 2.11 Distributividade. *Usando a distributividade, efetuar os seguintes cálculos:*

1. $A = \sqrt{5}(2\sqrt{5} - 5\sqrt{2})$..
2. $B = \sqrt{2}(2\sqrt{2} - \sqrt{6})$.
3. $C = (2\sqrt{5} + 5\sqrt{2})\sqrt{10}$.
4. $D = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{6})$.
5. $E = (1 + \sqrt{3})(\sqrt{2} + 1)$
6. $F = (3\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Solução. Aplicando a distributividade, temos:

1. $A = \sqrt{5}(2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}) = 10 - 5\sqrt{10}.$
2. $B = \sqrt{2}(2\sqrt{2} - \sqrt{6}) = 4 - \sqrt{12} = 4 - 2\sqrt{3}.$
3. $C = (2\sqrt{5} + 5\sqrt{2})\sqrt{10} = 10\sqrt{2} - 4\sqrt{5}.$
4. $D = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{6}) = 2\sqrt{10} - 2\sqrt{15} - 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2}.$
5. $E = (1 + \sqrt{3})(\sqrt{2} + 1) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}.$
6. $F = (3\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 5\sqrt{6}.$

Exercício 2.12 Produtos notáveis *Seja um número real a . Provar que:*

1. $(a-2)(a+2) = a^2 - 4.$
2. $(3+a)^2 = a^2 + 6a + 9.$
3. $(a-5)^2 = a^2 - 10a + 25.$

Solução. Aplicando as identidades notáveis, temos:

1. $(a-2)(a+2) = a^2 - 2a + a^2 + 2a = a^2 - 4.$
2. $(3+a)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times a + a^2 = a^2 + 6a + 9.$
3. $(a-5)^2 = a^2 - 2 \times 5 \times a + 5^2 = a^2 - 10a + 25.$

Exercício 2.13 Produtos notáveis. *Usando os produtos notáveis, efetuar os seguintes cálculos:*

1. $A = (\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}).$
2. $B = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$

3. $C = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$.

4. $D = (2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$.

5. *Sejam* $a,\ b \in \mathbb{R},\ b > 0,\ E = (a + \sqrt{b})^2$.

6. $F = (a - \sqrt{b})^2$, *para todo* $a,\ b \in \mathbb{R}$, *com* $b > 0$.

Solução. Aplicando as identidades notáveis, temos:

1. $A = (\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \sqrt{3}^2 - \sqrt{5}^2 = -2$.
2. $B = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2 = -1$.
3. $C = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$.
4. $D = (2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = 23 + 4\sqrt{15}$.
5. Sejam $a,\ b \in \mathbb{R},\ b > 0,\ E = (a + \sqrt{b})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$.
6. Para todo $a,\ b \in \mathbb{R}$, com $b > 0$, temos $H = (a - \sqrt{b})^2 = a^2 - 2a\sqrt{b} + b$.

Exercício 2.14 Potência e raiz quadrada. *Seja o número real $a \geq 0$. Provar que:*

1. $(\sqrt{a})^{2n} = a^n$.

2. $(\sqrt{a^{2n}}) = a^n$.

Solução. 1) Se $n,\ m \geq 0$, sabemos que $(a^m)^n = a^{mn}$. Logo, temos $(\sqrt{a})^{2n} = (\sqrt{a}^2)^n = a^n$.

2) Se $n, m \geq 0$, sabemos que $(a^m)^n = a^{mn}$ e $\sqrt{b^2} = b$, para todo $b \geq 0$. Logo, temos $\sqrt{a^{2n}} = (\sqrt{a^n})^2 = a^n$, por que $a^n \geq 0$. =

Exercício 2.15 Raiz quadrada. *Sejam os números reais* $a \geq 0$ *e* $b > 0$.

1. *Provar que:* $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$.
2. *Deduzir que* $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Solução.

1) Sabemos que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, para qualquer números reais $a, b \geq 0$. Logo, temos:

$$1 = \sqrt{\frac{b}{b}} = \sqrt{b \times \frac{1}{b}} = \sqrt{b} \times \sqrt{\frac{1}{b}}$$

Logo, temos: $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$.

2) Sabemos que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, para qualquer números reais $a, b \geq 0$, temos:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \times \frac{1}{b}} = \sqrt{a} \times \sqrt{\frac{1}{b}}$$

Aplicando $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$, deduzimos: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exercício 2.16 Raiz quadrada e quocientes. *Provar que:*

1. $\frac{1}{5+\sqrt{2}} = \frac{5-\sqrt{2}}{23}$.
2. $\frac{1}{5-\sqrt{2}} = \frac{5+\sqrt{2}}{23}$.

Solução. Aqui vamos aplicar a identidade notável $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

1) Temos:

$$\frac{1}{5+\sqrt{2}} = \frac{1}{5+\sqrt{2}} \times \frac{5-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} = \frac{5-\sqrt{2}}{(5+\sqrt{2}) \times (5-\sqrt{2})} = \frac{5-\sqrt{2}}{23}.$$

1) De maneira semelhante, temos:

$$\frac{1}{5-\sqrt{2}} = \frac{1}{5-\sqrt{2}} \times \frac{5+\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} = \frac{5+\sqrt{2}}{(5-\sqrt{2}) \times (5+\sqrt{2})} = \frac{5+\sqrt{2}}{23}.$$

Exercício 2.17 Raiz quadrada e quocientes. *Sejam os números reais $a \geq 0$* e $b > 0$. Provar que:

1. $a + \sqrt{b} = \frac{a^2-b}{a-\sqrt{b}}$.

2. $a - \sqrt{b} = \frac{a^2-b}{a+\sqrt{b}}$.

Solução. Aqui vamos aplicar a identidade notável $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

1) Temos:

$$a + \sqrt{b} = a + \sqrt{b} \times \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}{a-\sqrt{b}} = \frac{a^2-b}{a-\sqrt{b}}.$$

1) De maneira semelhante, temos:

$$a - \sqrt{b} = a - \sqrt{b} \times \frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} = \frac{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}{a-\sqrt{b}} = \frac{a^2-b}{a+\sqrt{b}}.$$

Aplicações. Com uma computação semelhante, temos:

$$5 + \sqrt{2} = 5 + \sqrt{2} \times \frac{5-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} = \frac{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})}{5-\sqrt{2}} = \frac{23}{5-\sqrt{2}},$$

e

$$5 - \sqrt{2} = 5 - \sqrt{2} \times \frac{5+\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} = \frac{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})}{5+\sqrt{2}} = \frac{23}{5+\sqrt{2}}.$$

Observação 2.7 *Essas manipulações são importantes quando lidamos com algumas situações que aparecem na disciplina de Cálculo.*

CAPÍTULO 3

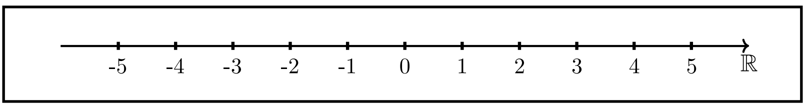
Propriedades de ordem em $\mathbb{R}$ e suas aplicações

Objetivos

Trataremos aqui da relação de ordem em $\mathbb{R}$, particularmente, das propriedades de ordem, de valor absoluto e dos subconjuntos importantes de $\mathbb{R}$, tais como os intervalos numéricos.

3.1 Preliminares

Lembre-se que geometricamente, o conjunto dos números reais pode ser visto como uma reta, através de uma correspondência entre os números reais e os pontos da reta:



Em outras palavras, os números reais podem ser representados por pontos sobre uma reta, na qual:

(1) A direção positiva (à direita) é indicada por uma flecha;

(2) Escolhemos um ponto de referência arbitrário, O, denominado **origem** da reta, que corresponde ao número real 0;

(3) Dada qualquer unidade (conveniente) de medida, temos que:

a. cada número positivo x é representado pelo ponto da reta que está a x unidades de distância à direita, da origem O;

b. cada número negativo $-x$ é representado pelo ponto sobre a reta que está a x unidades de distância, à esquerda, da origem O. Assim, todo número real é representado por um ponto sobre a reta, e todo ponto M sobre a reta corresponde a um único número real. O número real associado ao ponto M é chamado **coordenada de M**.

Definição 3.1 *A reta é chamada* **reta dos números reais**, *ou simplesmente reta real.*

Em geral, identificamos o ponto com sua coordenada e pensamos em um número como um ponto na reta real.

A utilização da reta para expressar o conjunto $\mathbb{R}$, que significa que a cada número real associamos um único ponto da reta e a cada ponto da reta associamos um único número real, é largamente utilizado em todas as séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Mas, como acabamos de lembrar, com este modelo, os números reais não estão colocados aleatoriamente sobre a reta: é preciso definir um ponto que será associado ao zero e uma unidade, que será o 1, como já sabemos. A partir disso os números reais podem ser associados aos pontos, seguindo uma **certa ordem**. Isto significa que, **dados quaisquer dois números reais, sabemos "qual vem antes", ou, em linguagem mais adequada, "qual é o menor"**. Já sabemos como localizar os números racionais na reta; os pontos que "sobram" após a identificação dos racionais serão "preenchidos" pelos irracionais. Assim, **os números reais estão dispostos na reta da esquerda para a direita, do menor para o maior**, como acontecia para os outros conjuntos numéricos. Esta "ordem" é que vamos estabelecer formalmente agora. Isto será feito com um cuidado especial: queremos que esta ordem permaneça a mesma que estabelecemos para os números racionais.

Para tanto, vamos tomar como axioma a existência de um determinado subconjunto de $\mathbb{R}$ (o conjunto dos números positivos) que goza de determinadas propriedades em relação às operações; a partir deste axioma, definiremos uma relação de ordem em $\mathbb{R}$: a conhecida relação "menor do que ou igual a", e denotada por $\leq$

3.2 Ordem em $\mathbb{R}$

3.2.1 Ordem e comparação em $\mathbb{R}$

Axioma 3.1 Axioma de ordem. *No conjunto dos números reais, existe um subconjunto denominado de conjunto dos números positivos, tal que, as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) Dado um número real x, então teremos exatamente uma das três possibilidades (ou alternativas):

$$\textbf{ou } x = 0, \quad \textbf{ou} \quad x \quad \textbf{é positivo} \quad \textbf{ou} \quad -x \quad \textbf{é positivo};$$

(2) A soma de dois números positivos é positivo: Se $a > 0$ e $b > 0$ então $a + b > 0$

(3) O produto de dois números positivos é positivo: Se $a > 0$ e $b > 0$ então $a.b > 0$.

Definição 3.2 *Um número real a é negativo se, e somente se, -a é positivo.*

Observamos que o axioma de ordem expressa a comparação de um número real x com 0 ou $-x$ com 0. No entanto, surge a questão da comparação de dois números reais a e b entre eles, em outras palavras, comparar dois números reais a e b é descobrir qual é o maior (ou o menor) ou se são iguais).

Definição 3.3 Comparação de dois números reais

(1) Dizer que o número a é menor do que número b, denotado por $a < b$, equivale a dizer que $a - b < 0$, ou equivalentemente: Dizer que o número b é maior do que número a, denotado por $b > a$, equivale a dizer que $b - a > 0$.

(2) Dizer que o número a é igual ao número b, denotado por a = b, equivale a dizer que a - b=0.

As duas relações < e > definem uma ordem entre os números reais e são chamadas **desigualdades estritas**. Também, podemos usar desigualdades não estritas, da seguinte maneira:

(a) Dizer que o número a é menor ou igual ao número b, denotado por $a \leq b$, equivale a dizer que $a - b \leq 0$.

(b) Dizer que o número b é maior ou igual ao número a, denotado por $b \geq a$, equivale a dizer que $b - a \geq 0$.

O símbolo ≤ significa que $a < b$ ou $a = b$, e da mesma forma o símbolo ≥ significa que $b > a$ ou $a = b$.

Também, as duas relações ≤ e ≥ definem uma ordem entre os números reais e são chamadas **desigualdades não estritas**.

Observação 3.1 *Simbolicamente, escrevemos*:

> *1. a é estritamente menor do que b, se, e somente se,* $b - a \in \mathbb{R}^+$ *se, e somente se, a < b.*
>
> *2. a é estritamente maior do que b se, e somente se,* $a - b \in \mathbb{R}^+$ so-*mente se, a > b.*
>
> *3. a é menor do que ou igual a b se, e somente se, a < b ou a = b.*
>
> *4. a é maior do que ou igual a b se, e somente se, a > b ou a = b.*

Observação 3.2 Dado um número real a, somente uma das três afirmações ocorre: ele é positivo $(a \in \mathbb{R}^+)$, ele é negativo $(-a \in \mathbb{R}^+)$, ou ele é zero, esta conclusão já era verdadeira para os números racionais.

Regra Prática. Conforme ao Axioma de ordem, comparar dois números reais a e b equivale ao estudo do sinal de $a - b$, isto é:

(a) Se *a* - *b* > 0, então isso indica que *a* > *b*,

(b) Se *a* - *b* < 0, então isso indica que *a* < *b*,

(c) Se *a* - *b* = 0, então isso indica que *a* = *b*.

Em outras palavras, o axioma de ordem garante que uma e somente uma das afirmações ocorra:

(a) *b* - *a* é positivo, ou seja, *a* < *b*,

(b) *b* - *a* é negativo, ou seja, – (*b* – *a*) = *a* - *b* é positivo, então *b* < *a*

(c) Se *a* - *b*= 0, ou seja, *a* = *b*.

Por exemplo, comparar os seguintes números:

(1) $a = \dfrac{27}{5}$ e $b = \dfrac{17}{3}$, (2) $c = 2\sqrt{3}$ e $d = \pi$, (3) $g = a^2+b^2$ e $h = 2ab$.

Indicação: Use para esses dois números irracionais, as seguintes aproximações $\sqrt{3} \cong 1,7320$ e $\pi \cong 3,1416$.

Solução. (1) Como $a = \dfrac{27}{5}$ e $b = \dfrac{17}{3}$ são números racionais, podemos usar as propriedades de ordem em $\mathbb{Q}$. Assim, com *m* = 27 x 3 = 81 e *n* = 5 x 17 = 85, temos que:

$$a - b = \frac{27}{5} - \frac{17}{3} = \frac{81}{15} - \frac{85}{15} = -\frac{4}{15} < 0.$$

Como $m - n = 81 - 85 = -4 < 0$ deduzimos que $a = \dfrac{27}{5} < b = \dfrac{17}{3}$.

Outro método, usando a escrita decimal dos números $a = \dfrac{27}{3}$ e $b = \dfrac{17}{3}$, temos que $a = \dfrac{27}{5} = 5,4$ e $b = \dfrac{17}{3} = 5,6666...$, assim:

$$a - b = 5,4 - 5,6666... = -0,2666... < 0$$

Como *a* - *b* < 0 podemos concluir que *a* < *b*.

(2) Como $c \cong 2\sqrt{3} = 2 \times 1,7320 = 3,464$ e $d = \pi \cong 3,1416,$, temos:

$$c - d = 2\sqrt{3} - \pi \cong 3,464 - 3,1416 = 0,323.$$

Assim, $c - d = 3,464 - 3,1416 = 0,323 > 0$ então $2\sqrt{3} > \pi$, isto é, $c = 2\sqrt{3} > d = \pi$.

(3) Sejam $g = a^2 + b^2$ e $h = 2ab$, onde *a* e *b* são números reais. Usando a identidade notável $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, temos:

$$g - h = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

Como $g - h = (a-b)^2 \geq 0$, deduzimos que $g = a^2 + b^2 \geq h = 2ab$.

Os exemplos anteriores mostram que os números reais *a* e *b* podem ser expressões algébricas.

Exemplo 3.1 *Encontre um número racional c e um número irracional d tais que a < c < b e a < d < b, para os números reais a e b dados, com a < b :*

1. $a = \dfrac{1300}{416}$ *e* $b = \dfrac{27}{8}$;
2. $a = \dfrac{160}{51}$ *e* $b = \dfrac{19}{6}$.

Solução. *(1) Usando a escrita decimal dos números a e b temos que* $a = \dfrac{1300}{416} = 3,125$ *e* $b = \dfrac{27}{8} = 3,375$. *Como π = 3, 14159... temos que a - π < 0 e b - π > 0, assim deduzimos que:* $a = \dfrac{1300}{416} < \pi < b = \dfrac{27}{8}$.

(2) Também, usando a escrita decimal números a e b temos que $a = \dfrac{160}{51} = 3,13725...$ *e* $b = \dfrac{19}{6} = 3,1666666....$ *Como π = 3, 14159... temos que* $a - \pi < 0$ *e* $b - \pi > 0$*, assim deduzimos que:* $a = \dfrac{160}{6} < \pi < b = \dfrac{19}{6}$.

Proposição 3.1 *A relação de ordem ≤ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. ***Relexiva***. *a ≤ a, para todo número real a.*

2. ***Anti-simétrica.*** *a ≤ b e b ≤ a, então a = b, para todos números Reais a, b.*

3. ***Transitiva***. *a ≤ b e b ≤ c, então a ≤ c, para todos números reais a, b e c.*

Observação 3.3 *As três condições da Proposição 3.1 caracterizam uma relação de ordem em qualquer conjunto. Assim, a relação $\mathbb{R}$ é uma relação de ordem em $\mathbb{R}$. Além disso, como dois números reais sempre são comparáveis pela relação $\leq$, dizemos que esta ordem é total. A estrutura de corpo e a ordem total $\leq$, fazem de $\mathbb{R}$ um corpo totalmente ordenado.*

Assim, usando o axioma de ordem, e a Observação 3.3 anterior, temos a seguinte propriedade:

Proposição 3.2 *Sejam dois números reais a e b, então, temos:*

$$a < b \text{ ou } b < a \text{ ou } a = b.$$

3.2.2 Ordem e as operações em $\mathbb{R}$

A relação de ordem em $\mathbb{R}$ e a operação de adição dos números reais estão relacionadas pelas seguintes propriedades.

Proposição 3.3 Ordem e adição. *Sejam a, b, c e d quatro números reais.*

Então, temos:

(1) Se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$. Em outras palavras, adicionar o mesmo número a cada membro de uma inequação não altera o sinal da desigualdade.

(2) Se $a \leq b$, então $a - c \leq b - c$. Em outras palavras, subtrair o mesmo número a cada membro de uma inequação não altera o sinal da desigualdade.

(3) Se $a \leq b$ e se $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$.

Prova. (1) Sejam a, b e c tal que $a \leq b$ então $a - b \leq 0$. Vamos comparar $a + c$ e $b + c$. Usando a associatividade da adição e a distributividade, temos:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b \leq 0.$$

Assim, deduzimos que $a + c \leq b + c$.

(2) Sejam a, b e c tal que $a \leq b$ então $a - b \leq 0$. Vamos comparar $a - c$ e $b - c$. Usando a associatividade da adição e a distributividade, temos:

$$(a - c) - (b - c) = a - c - b + c = a - b \leq 0.$$

Assim, deduzimos que $a - c \leq b - c$.

(3) Sejam a, b, c, d tal que $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a\text{-}b \leq 0$ *e* $c - d \leq 0$. Vamos comparar $a + c$ e $b + c$. Usando a associatividade da adição e a distributividade, temos:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d) \leq 0.$$

Assim, deduzimos que $a + c \leq b + d$.

C.Q.D.

As desigualdades da Proposição 3.3 expressam as relações de compatibilidade da adição com a relação de ordem em $\mathbb{R}$. Quanto à compatibilidade do relacionamento de ordem em $\mathbb{R}$ e a multiplicação, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.4 Ordem e multiplicação. *Sejam a, b, c e d quatro números reais. Então, temos:*

(1)Se $a \leq b$ *e* $c > 0$, *então* $a.c \leq b.c$.

Em outras palavras, multiplicar cada membro de uma desigualdade pelo mesmo número estritamente positivo, não altera o sinal da desigualdade.

(2) Se $a \leq b$ *e* $c < 0$, *então* $a.c \geq b.c$.

Em outras palavras, multiplicar cada membro de uma desigualdade pelo mesmo número estritamente negativo, muda o sinal de desigualdade.

(3) Se a, b, c e d são números reais positivos tais que $a \leq b$ *e* $c \leq d$, *então* $a.c \leq b.d$.

Em outras palavras, as desigualdades podem ser preservadas pela multiplicação membro para membro, quando a, b, c e d são números reais positivos.

Prova. (1) Sejam a, b e $c > 0$ tais que $a < b$ e $c > 0$. Vamos comparar $a.c$ e $b.c$. Como $a - b \leq 0$, usando a distributividade e as regras dos sinais, temos:

$$a.c - b.c\ (a - b).c \leq 0.$$

Assim, deduzimos que $a.c \leq b.c$.

(2) Sejam a, b e $c > 0$ tais que $a \leq b$ e $c < 0$. Vamos comparar $a.c$ e $b.c$. Como $a - b \leq 0$, usando a distributividade e as regras dos sinais, temos:

$$a.c - b.c\ (a - b).c \geq 0.$$

Assim, deduzimos que $a.c \geq b.c$ ou de maneira equivalente $b.c \leq a.c$.

(3) Sejam a, b, c e d são reais positivos tais que $a \leq b$ e $c \leq d$. Vamos comparar $a.c$ e $b.d$. Como $a - b \leq 0$ e $c - d \leq 0$, usando a distributividade e as regras dos sinais, temos:

$$a.c - bc + bc - b.d = (a - b).c + b.(c - d) \leq 0.$$

Assim, deduzimos que $a.c \leq b.d$ ou de maneira equivalente $b.c \geq a.d$. **C.Q.D.**

As desigualdades da Proposição 3.4 expressam as relações de compatibilidade da multiplicação com a relação de ordem em $\mathbb{R}$. Quanto à compatibilidade do relacionamento de ordem em $\mathbb{R}$ e à divisão, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.5 Ordem e divisão. *Sejam a, b, c e d quatro números reais.*

Então, temos:

(1) Se $a \leq b$ e $c > 0$, então $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.
Em outras palavras, dividir cada membro de uma desigualdade pelo mesmo número estritamente positivo, não altera o sinal da desigualdade.

(2) Se $a \leq b$ e $c < 0$, então $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

Em outras palavras, dividir cada membro de uma desigualdade pelo mesmo número estritamente negativo altera o sinal da desigualdade.

Prova. A prova é idêntica a da Proposição 3.4. Apenas observar que $\frac{a}{c} = a \times \frac{1}{c}$, $\frac{b}{c} = b \times \frac{1}{c}$, e substitua c por a $\frac{1}{c}$.

C.Q.D.

As Proposições 3.3, 3.4 e 3.5 são importante para o cálculo, por exemplo, na resolução das inequações de 1º grau e de uma classe de inequações de 2º grau, no estudo de variações das funções usuais e no estudo das sequências numéricas.

3.2.3 Ordem e propriedades de desigualdades usuais em $\mathbb{R}$

3.2.4 Comparação de *a*, a^2 e a^3

Nesta subseção aplicamos as regras de compatibilidade da multiplicação com a relação de ordem em $\mathbb{R}$.

Proposição 3.6 *Seja a um número real estritamente positivo. Então, temos:*

(1) *Se* $a \geq 1$, *temos* $a^3 \geq a^2 \geq a \geq 1.$.

(2) *Se* $a \leq 1$, *temos* $a^3 \leq a^2 \leq a \leq 1.$

Para $a = 0$ ou $a = 1$ temos $a = a^2 = a^3$.

Prova. (1) Seja $a \geq 1$, com $c = a > 0$ a desigualdade (1) da Proposição 3.4 implica que:

$$a \times a > 1 \times a \Rightarrow a^2 > a.$$

Assim, temos $a^2 \geq a \geq 1$. De novo, com $c = a > 0$ a desigualdade (1) da Proposição 3.4 implica que:

$$a^2 \times a \geq a \times a \Rightarrow a^3 \geq a^2.$$

Assim, temos $a^3 \geq a^2 \geq a \geq 1$.

(2) Seja $a \leq 1$, com $c = a > 0$ a desigualdade (1) da Proposição 3.4 implica que:

$$a \times a \leq 1 \times a \Rightarrow a^2 \leq a.$$

Assim, temos $a^2 \leq a \leq 1$. De novo, com $c = a > 0$ a desigualdade (1) da Proposição 3.4 implica que:

$$a^2 \times a \leq a \times a \Rightarrow a^3 \leq a^2.$$

Em conclusão, temos $a^3 \leq a^2 \leq a \leq 1$. E com uma simples verificação, temos que $a = a^2 = a^3$, para $a = 0$ ou $a = 1$.

C.Q.D.

Por exemplo, seja x um número real tal que $3 \leq x < 4$. Seja $a = 4 - x$. Compare os números a, a^2 e a^3.

Solução. Como $3 \leq x \leq 4$ então com a multiplicação dos termos dessa desigualdade por -1 temos $-4 < -x \leq -3$. Assim, a adição de 4 aos termos dessa Última desigualdade implica:

$$0 < a \leq 1, \quad \text{isto é} \quad 0 < 4 - x \leq 1.$$

Como $0 < a \leq 1$, a aplicação da precedente Proposição 3.6, implica que

$$0 < a^3 \leq a^2 \leq a \leq 1, \quad \text{isto é} \quad 0 < (4-x)^3 \leq (4-x)^2 \leq 4 - x \leq 1.$$

A Proposição 3.6 é importante para o cálculo, por exemplo, no estudo de funções usuais e no estudo das sequências numéricas.

3.2.5 Desigualdades com quadrados, raízes quadradas, cubos e inverso

O conteúdo desta subseção é importante para a disciplina de cálculo, para o estudo das variações das funções e outros tópicos da análise real.

Proposição 3.7 Comparação de potências e de raiz quadrada de reais positivos. *Sejam a e b dois números reais positivos, então:*

(1) Se $a \leq b$ *temos* $a^2 \leq b^2$.

Em outras palavras, dois números positivos são ordenados na mesma ordem que seus quadrados.

(2) Se $a \leq b$ *temos* $a^3 \leq b^3$.

Em outras palavras, dois números positivos são ordenados na mesma ordem que seus cubos.

(3) Se $0 \leq a \leq b$ *temos* $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Em outras palavras, dois números positivos e suas raízes quadradas são ordenados na mesma ordem.

Prova. Sejam a e b dois *números reais positivos* tais que $a \leq b$. Sejam $c = a$ e $d = b$ *assim* $c = a \leq d = b$. *Então, aplicando a regra (3) da Proposição 3.4:*

$$a.c \leq b.d \Leftrightarrow a.a \leq b.b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2.$$

Assim, deduzimos que $a^2 \leq b^2$.

(2) Sejam a e b dois *números reais positivos* tais que $a \leq b$. A precedente propriedade (1) implica que $a^2 \leq b^2$. Sejam $c = a$ e $d = b$ assim $c = a \leq d = b$. Aplicamos de novo a regra (3) da Proposição 3.4:

$$a^2.c \leq b^2.d \Leftrightarrow a^2.a \leq b^2.b \Leftrightarrow a^3 \leq b^3.$$

Assim, deduzimos que $a^3 \leq b^3$.

(3) Sejam a e b dois *números reais positivos* tais que $a \leq b$. Vamos comparar $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$. Com a identidade notável $(a - b).(a + b) = a^2 - b^2$, temos que:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}).(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a - b.$$

Se $a = b$, então $(\sqrt{a}-\sqrt{b}).(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = 0$, como $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq 0$, deduzimos que $\sqrt{a}-\sqrt{b} = 0$. Assim, temos que $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Se $a \neq b$, então $(\sqrt{a}-\sqrt{b}).(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = 0$, como $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq 0$ e $a - b < 0$ deduzimos que $\sqrt{a}-\sqrt{b} < 0$. Assim, temos que $\sqrt{a} < \sqrt{b}.$.

Em conclusão, se $0 \leq a \leq b$ temos $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

C.Q.D.

A propriedade (3) permitirá estudar as variações da função de raiz quadrada usual (consulte o Capítulo 5).

No caso dos números negativos a Proposição 3.7 toma a seguinte forma.

Proposição 3.8 Comparação de potências de reais negativos. *Sejam a e b dois* **números reais negativos***, então:*

(1) Se $a \leq b \leq 0$ temos $a^2 \geq b^2$.

Em outras palavras, dois números negativos NÃO são ordenados na mesma ordem que seus quadrados.

(2) Se $a \leq b < 0$ temos $a^3 \leq b^3$.

Em outras palavras, dois números negativos são ordenados NA mesma ordem que seus cubos.

Prova. (1) Se $a \leq b < 0$, aplicação da regra (2) da Proposição 3.4 com

$c = -1 < 0$, deduzimos que $-a \geq -b > 0$. Agora, aplicação da regra (1) da Proposição 3.7 implica que:

$$(-a)^2 \geq (-b)^2 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2.$$

(2) Se $a \leq b < 0$, aplicação da regra (2) da Proposição 3.4 com $c = -1 < 0$, deduzimos que $-a \geq -b > 0$. Agora, aplicação da regra (2) da Proposição 3.7 implica que

$$(-a)^3 \geq (-b)^3 \Leftrightarrow -a^3 \geq -b^3.$$

Assim, com a aplicação da regra (2) da Proposição 3.4 com $c = -1 < 0$, deduzimos que $a^3 \leq b^3$.

C.Q.D.

As Proposições 3.7 e 3.8 serão usadas durante o estudo de variações das funções usuais.

Proposição 3.9 Comparação de inversos dos reais. *Sejam a e b dois números reais, então:*

(1) Se $b \geq a > 0$ *temos* $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Em outras palavras, dois números estritamente positivos são ordenados na ordem inversa de seus inversos.

(2) Se $a \leq b < 0$ *temos a* $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Em outras palavras, dois números estritamente negativos são ordenados na ordem inversa de seus inversos.

Prova. (1) Sejam $a > 0$, $b > 0$ tais que $b \geq a$, assim temos $b - a > 0$. Vamos comparar os dois números $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$ e, temos: a

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}.$$

Se $a = b$ deduzimos $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = (b-a)\frac{1}{ab} = 0$, Como $ab \neq 0$ temos que $a - b = 0$, assim $a = b$.

Se $a \neq b$ então $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = (b-a)\frac{1}{ab} > 0$, por que $b - a > 0$ e $ab > 0$.

Assim, deduzimos que $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

(2) Sejam $a < 0$, $b < 0$ tais que $a \leq b$, assim temos $a - b \leq 0$. Vamos comparar os dois números $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$ temos:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}.$$

Se $a = b$ deduzimos $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = (b-a)\frac{1}{ab} = 0$. Como $ab \neq 0$ temos que $a - b = 0$, assim $a = b$.

Se $a \neq b$ então a $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = (b-a)\frac{1}{ab} > 0$, por que $b - a > 0$ e $ab > 0$.

Assim, deduzimos $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

C.Q.D.

3.3 Valor Absoluto e Distância

3.3.1 Distância entre dois números reais e valor absoluto

Definição 3.4 Distância entre dois números reais

A distância entre dois números reais x e y é a diferença entre o maior e o menor. Esta distância é denotada por $|x - y|$ ou $|y - x|$, e lê-se **valor absoluto de y menos x.**

Exemplo 3.2 Distância entre dois números reais

> *1. O número real $|3 - 5|$ é a distância entre os números reais $x = 3$ e $y = 5$. Como $x < y$, isto é, $3 < 5$ essa distância é igual a $|3 - 5| = |5 - 3| = 2$.*
>
> *2. O número real $|-2 -3|$ é a distância entre os números reais $x = -2$ e $y = 3$. Como $x = -2 < y = 3$ essa distância é igual a $|3 - (-2)| = |3 + 2| = 5$.*

Interpretação gráfica de $|x - y|$. Em uma linha de origem O graduada, seja M o ponto de abscissa x e N o ponto de abscissa y. Então, o número real $|x - y|$ representa a distância $\overline{MN}$ entre os pontos M e N, isto é, $\overline{MN} = |y - x|$.

Por exemplo:

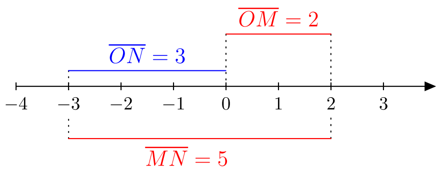
- Para os pontos O e M com as respectivas abcissas 0 e 2, temos $\overline{OM}$ = |2 - 0|= 2,

- Para os pontos O e N com as respectivas abcissas 0 e -3, temos $\overline{ON}$

|0 - (-3)| = 3,

- Para os pontos Me N que possuem respectivas abcissas 2 e -3, temos $\overline{MN}$= |2-(-3)| = 5.

Temos a seguinte ilustração gráfica:



3.3.2 Valor absoluto ou módulo

A ideia do valor absoluto ou módulo de um número real é a mesma que já foi considerada no Ensino Médio: utilizando o modelo da reta, o módulo de um número real é a distância desse número (do ponto associado a este número) até a origem (o ponto associado ao zero).

Definição 3.5 *Na expressão* $|x - y|$ *se consideramos* $y = 0$ *temos o número real* $|x - y| = |x - 0| = |x|$, *e definimos:*

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0. \end{cases}$$

Dizemos que o número real $|x|$ **é o valor absoluto do número** x.

Por exemplo, (1) Seja $x = 5$, como 5 é um número positivo, temos $|5| = 5$.

(2) Seja x = -3, como -3 é um número negativo, temos $|-3| = (-(-3)) = 3$.

Proposição 3.10 *Sejam* x, y *dois números de* $\mathbb{R}$. *Então, temos os seguintes propriedades:*

(1) $|x| = 0$ é *equivalente a* $x = 0$.

(2) $|-x| = |x|$.

(3) $|x| = |y|$ *é equivalente a* $x = y$ *ou* $x = -y$.

(4) $|x + y| \leq |x|+|y|$.

(5) $|x - y| \leq |x|+|y|$

Prova.(1) Se $x = 0$ então $|0| = 0 = -0 = 0$. Se $|x| = 0$ então $x = -x = 0$ assim temos que $x = 0$.

(2) Seja $x \in \mathbb{R}$ temos

$$|-x| = \begin{cases} -x & \text{se} \quad -x \geq 0 \\ x & \text{se} \quad -x < 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow |-x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Assim, deduzimos que $|-x| = |x|$.

(3) Sejam x, y em $\mathbb{R}$, Se $x = y$ então $|x| = |y|$. Se $x = -y$, seguinte a precedente regra (2), deduzimos que $|x| = |-y| = |y|$.

Agora, suponha que $|x| = |y|$. Como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases} \quad \text{e } |y| = \begin{cases} y & \text{se} \quad y \geq 0 \\ -y & \text{se} \quad y < 0. \end{cases}$$

Assim, se $|x| = |y|$ deduzimos que: $x = y$ ou $x = -y$.

(4) Sejam x, y em $\mathbb{R}$. Pela definição de $|x|$, temos:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow x \leq |x| \text{ e } -x \leq |x|.$$

Da mesma forma, nós temos:

$$y \leq |y| \text{ e } -y \leq |y|.$$

Assim, pela compatibilidade da adição com a relação de ordem, isto é, a propriedade (3) da Proposição 3.3, temos que:

$$-x - y \leq |x| + |y| \text{ e } x + y \leq |x| + |y|.$$

Como

$$|x + y| = \begin{cases} x + y & \text{se} \quad x + y \geq 0 \\ -x - y & \text{se} \quad x + y < 0 \end{cases}$$

deduzimos que: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(4) Sejam x, y em $\mathbb{R}$. Pelas precedentes propriedades (2)-(3), temos:

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y|.$$

Como $|-y| = |y|$ concluimos que $|x - y| \leq |x| + |y|$.

C.Q.D.

Observação 3.4 *As propriedades que acabamos de ver desempenham um papel muito importante nos próximos capítulos, no estudo das inequações. Também serão bastante úteis nas disciplinas de Cálculos I e II e na Análise real em geral. Podemos observar que para prová-las, usaremos basicamente a definição, e consideramos as duas possibilidades:* $x \geq 0$ *ou* $x < 0$.

Observação 3.5 *A propriedade* $|x| = |-x|$ *nos diz que um número real* x *e seu oposto* $(-x)$*, quando considerados como pontos na reta, são equidistantes da origem. Este fato já acontecia com os números inteiros. Também nos diz que a distância entre dois números reais* a *e* b*, quando considerados como pontos na reta, pode ser expressa como* $|a - b|$ *ou como* $|b - a|$*, uma vez que* $b - a = -(a - b)$*.*

Exemplo 3.3 *Resolva as equações:*

(1) $|x - 5| = 2$, (2) $|x + 7| = 5$, (3) $|2x - 3| = 7$, (4) $|x + 3| = -2$.

Solução. (1) Se $|x - 5| = 2$ então, a propriedade 3 da Proposição 3.10 implica que:

$$x - 5 = 2 \quad \text{ou} \quad x - 5 = -2.$$

Então, temos que:

$$x = 2 + 5 = 7 \quad \text{ou} \quad x = -2 + 5 = 3.$$

Assim, as soluções da equação $|x - 5| = 2$ são $x = 7$ ou $x = 3$.

(2) Se $|2x - 3| = 7$ então, a propriedade 3 da Proposição 3.10 implica que:

$$2x - 3 = 7 \quad \text{ou} \quad 2x - 3 = -7.$$

Então, temos que:

$$2x = 7 + 3 = 10 \quad \text{ou} \quad 2x = -7 + 3 = -4.$$

Assim, com a divisão por 2, deduzimos que as soluções da equação $|2x - 3| = 7$ são $x = 5$ ou $x = -2$.

(3) Se $|x + 7| = 5$ então, a propriedade 3 da Proposição 3.10 implica que:

$$x + 7 = 5 \quad \text{ou} \quad x + 7 = -5.$$

Assim, as soluções da equação $|x + 7| = 5$ são $x = -2$ ou $x = -12$.

(4) Se $|x+3| = -2$ então temos $|x+3| = -2 < 0$. O que é impossível porque $|a| \geq 0$, para todo número real a. Assim a equação $|x + 3| = -2$ não possui solução.

Proposição 3.11 *Sejam x, y dois números de $\mathbb{R}$. Então, temos as seguintes propriedades:*

(1) $\sqrt{x^2} = |x|$.

(2) $|x.y| = |x|.|y|$.

(3) *Se* $y \neq 0$, *temos:* $|\dfrac{1}{y}| = \dfrac{1}{|y|}$.

(4) *Se* $y \neq 0$, *temos:* $|\dfrac{x}{y}| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Prova. (1) Sabemos que para $a \geq 0$ temos $\sqrt{a^2} = a$. Assim, temos que: Se $x \geq 0$ temos $\sqrt{x^2} = x$,

Se $x < 0$ temos $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$, por que $-x > 0$.

Então, concluímos que:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases} \qquad \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x|.$$

(2) Sejam x, y dois números de $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \text{se } \; x \geq 0 \text{ e } \; y \geq 0 \; \text{ então temos } \; |x.y| = x.y = |x|.|y|, \\ \text{se } \; x \geq 0 \text{ e } \; y < 0 \; \text{ então temos } \; |x.y| = -x.y = x.(-y) = |x|.|y|, \\ \text{se } \; x < 0 \text{ e } \; y \geq 0 \; \text{ então temos } \; |x.y| = -x.y = (-x).y = |x|.|y|, \\ \text{se } \; x < 0 \text{ e } \; y < 0 \; \text{ então temos } \; |x.y| = x.y = (-x).(-y) = |x|.|y|. \end{cases}$$

Assim, temos que $|x.y| = |x|.|y|$.

(3) Sejam y um número de $\mathbb{R}$, com $y \neq 0$. Como $y.\frac{1}{y} = \frac{y}{y} = 1$, a precedente propriedade implica que:

$$|y.\frac{1}{y}| = |y|.|\frac{1}{y}| = 1.$$

Assim, temos $|\frac{1}{y}| = \frac{1}{|y|}$.

(4) Como $\frac{x}{y} = x.\frac{1}{y}$, a aplicação das precedentes propriedades (2) e (3), implica que:

$$|\frac{x}{y}| = |x.\frac{1}{y}| = |x|.|\frac{1}{y}| = |x|.\frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$$

Assim, concluímos que $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$. **C.Q.D.**

De maneira geral, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.12 *Sejam x, y dois números de $\mathbb{R}$ e $n \geq 0$ um número natural. Então, temos os seguintes propriedades:*

(1) $|x^n| = |x|^n$.

(2) $|x.y|^n = |x|^n.|y|^n$.

(3) *Se $y \neq 0$, então, temos:*

$$|\frac{x}{y}|^n = \frac{|x|^n}{|y|^n}$$

A prova dessa proposição é baseada sobre o método de indução.

Exemplo 3.4 *Seja a um real positivo. Efetuar o que se pede:*

(1) $\sqrt{(-a)^2}$. *Deduzir* $\sqrt{(-5)^2}$.

(2) $|(-a)^3|$. *Deduzir* $|(-2)^3|$.

(3) $|(\frac{1}{-a})^4|$. *Deduzir* $|(\frac{1}{-2})^4|$.

Solução. Usando as propriedades da Proposição 3.12, temos:

(1) Como $a > 0$ então $\sqrt{(-a)^2} = |-a| = a$ (Propriedade 1, Proposição 3.12). Assim, deduzimos que $\sqrt{(-5)^2} = 5.$.

(2) Como $a > 0$ a Propriedade 2 da precedente Proposição 3.12 implica que $|(-a)^3| = |-a|^3 = a^3$. Assim, deduzimos que $|(-2)^3| = 2^3$.

(3) Como $a > 0$ a Propriedade 4. $|(\frac{1}{-a})^4| = \frac{|1|^4}{|-a|^4} = \frac{1}{a^4}$. Assim, deduzimos que $|(\frac{1}{-2})^4| = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.

3.4 Intervalos Numéricos

Além dos subconjuntos dos números reais que já consideramos nos precedentes capítulos $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $2\pi\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e I (os números irracionais), existem outros subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são úteis para o estudo das funções. Esses conjuntos são chamados **intervalos numéricos**, e eles são construídos usando desigualdades dos números reais.

Os intervalos, que são subconjuntos do conjunto de números reais, pos- suem uma notação especial. Listamos a seguir estes subconjuntos especiais.

3.4.1 Desigualdade e intervalos notáveis

Sejam a, b em $\mathbb{R}$ com a <b. Temos, os seguintes intervalos limitados:

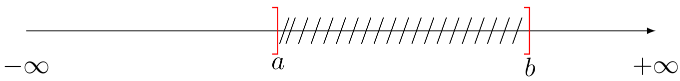
Intervalo	Defimição	denominação
$]a;\, b[$	$\{x \in \mathbb{R};\, a < x < b\}$	Intervalo aberto, os extremos a e b não pertencem ao intervalo.
$[a;\, b]$	$\{x \in \mathbb{R};\, a \leq x \leq b\}$	Intervalo fechado, os extremos a e b pertencem ao intervalo.
$[a;\, b[$	$\{x \in \mathbb{R};\, a \leq x < b\}$	Intervalo fechado no extremo a e aberto no extremo b.
$]a;\, b]$	$\{x \in \mathbb{R};\, a < x \leq b\}$	Intervalo aberto no extremo a e fechado no extremo b.

Além dos intervalos limitados, temos os seguintes intervalos ilimitados, nos quais -∞ significa menos infinitos e +∞ significa mais infinito:

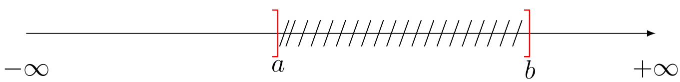
Intervalo	Defimição	denominação
$[a;\, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R};\, x \geq a\}$	Intervalo fechado a esquerda, ilimitado a direita e o extremo a pertence ao intervalo.
$]a;\, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R};\, x > a\}$	Intervalo aberto, ilimitado a direita e o extremo a não pertence ao intervalo.
$]-\infty;\, b]$	$\{x \in \mathbb{R};\, x \leq b\}$	Intervalo fechado a direita, ilimitado a esquerda e o extremo b pertence ao intervalo.
$]-\infty;\, b[$	$\{x \in \mathbb{R};\, x < b\}$	Intervalo aberto, ilimitado a esquerda e o extremo b não pertence ao intervalo.
$]-\infty,\, +\infty[$	$\mathbb{R}$	O conjunto dos números reais é um intervalo ilimitado a direita e a esquerda.

Usando a representação geométrica da reta dos números reais, também podemos fornecer uma representação gráfica dos precedentes intervalos de $\mathbb{R}$. Isto é, sejam a, b dois números reais, os intervalos limitados $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ e $]a, b[$ podem ser representados geometricamente sobre a reta dos números reais. São dados do seguinte modo:

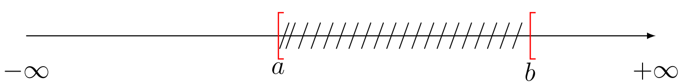
1) A representação geométrica do intervalo fechado $[a, b]$ é dada por:



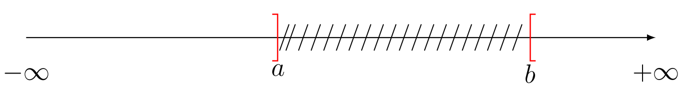
2) A representação geométrica do intervalo aberto a esquerda e fechado a direita $]a, b]$ é dada por:



3) A representação geométrica do intervalo aberto a direita e fechado a esquerda $[a, b[$ é dada por:

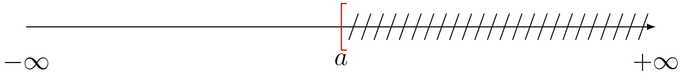


4) A representação geométrica do intervalo aberto $]a, b[$ é dada por: a b

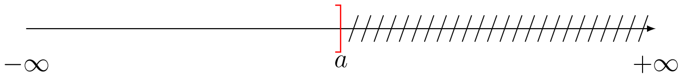


Para os intervalos ilimitados $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$ e $[a, +\infty[$, temos também as seguintes representações geométricas sobre a reta dos números reais.

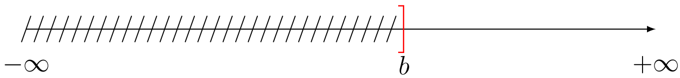
1) A representação geométrica do intervalo ilimitado a direita e fechado a esquerda $[a, +\infty[$ é dada por:



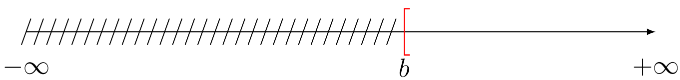
2) A representação geométrica do intervalo ilimitado a direita e aberto a esquerda $]a,+\infty[$ é dada por: $+\infty$



3) A representação geométrica do intervalo ilimitado a esquerda e fechado a direita $]-\infty, b]$ é dada por:



4) A representação geométrica do intervalo ilimitado a esquerda e aberto a direita $]-\infty, b[$ é dada por:



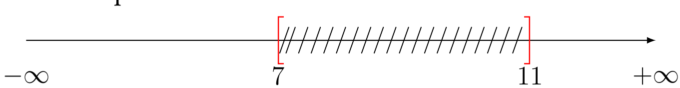
Exemplo 3.5 *Escrever cada intervalo, usando as duas terminologias anteriores, e os represente graficamente:*

(1) $I_1 = \{x \in \mathbb{R}; 7 \leq x \leq 11\}$ e $I_2 = \{x \in \mathbb{R}; 7 < x \leq 11\}$.

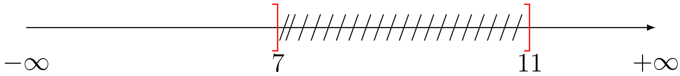
(2) $I_3 = \{x \in \mathbb{R}; -4 < x < 0\}$ e $I_5 = \{x \in \mathbb{R}; -4 < x \leq 0\}$

Solução.

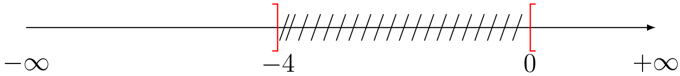
(1) O intervalo I_1 é escrito sobre a forma: $I_1 = [7, 11]$, e sua forma geométrica é dada por:



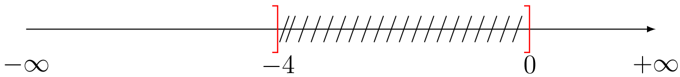
Para o intervalo I_2 temos a escrita sobre a forma: I_2 =]7, 11], e sua forma geométrica é dada por:



(2) O intervalo I_3 é escrito sobre a forma: I_3 =]-4, 0[, e sua forma geométrica é dada por:



Para o intervalo I_4 temos a escrita sobre a forma: I_4 =] — 4, 0], e sua forma geométrica é dada por:



Damos aqui uma caracterização dos intervalos de R. A prova dessa proposição está fora do objetivo deste texto.

Proposição 3.13 *Seja I uma parte de $\mathbb{R}$. As duas afirmações a seguir são equivalentes:*

(1) I é um intervalo de $\mathbb{R}$,

(2) Para todos os números a, b em I, temos [a; b] está incluído em I.

Observação 3.6 *Note que um intervalo é chamado "aberto" quando não contém seus extremos e é chamado "fechado" quando contém seus extremos.*

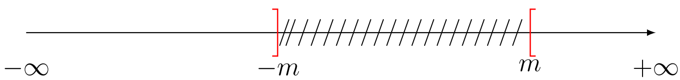
Observação 3.7 *É importante saber que os símbolos +∞ e -∞ não representam números. A notação $x \in [a, +\infty[$, é para expressar que x é um número real maior ou igual a a. Da mesma forma, ao escrevendo $x \in]-\infty, a]$, significa que x é um número real menor ou igual a a.*

3.4.2 Desigualdade $|x - a| \leq r$ (a e r fixo, $r > 0$)

Desigualdade, intervalos e valor absoluto estão ligados de várias maneiras. As ligações são importantes para o estudo de conceitos do cálculo diferencial e integral tais como: limite, continuidade e derivadas.

Sejam x um número real e $m > 0$ um real estritamente positivo. A desigualdade $|x| < m$ significa que a distância do número x ao 0 é menor que m, ou seja, x pertence ao conjunto $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}, -\mathrm{m} < \mathrm{x} < \mathrm{m}\}$, isto é, $\mathrm{x} \in]-m, m[$. Assim, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.14 *Sejam x um número real em um real estritamente positivo. Para um x real as três seguintes afirmações são equivalentes:*



A Proposição 3.14 é usada na resolução de inequações com valor absoluto, sem passar pela representação gráfica.

Por exemplo, resolva as inequações:

$$(1)\ |x - 5| < 2\ \ ,\ \ (2)\ |x + 7| \leq 5\ \ ,\ \ (3)\ |2x - 3| < 7.$$

Solução. (1) Se $|x - 5| < 2$ então, a propriedade 2 da Proposição 3.14 mostra que:

$$-2 < x - 5 < 2 \text{ então, temos que: } -2 + 5 < x < 2 + 5 \text{ assim } 3 < x < 7.$$

Assim, o conjunto das soluções da inequação $|x - 5| < 2$ é o intervalo $]3, 7[$.

(2) Se $|x + 7| \leq 5$ então, a propriedade 2 da Proposição 3.14 implica que:

$$-5 < x + 7 \leq 5 \text{ então, temos que: } -5 - 7 \leq x \leq 5 - 7 \text{ assim, } -12 < x < -2.$$

Assim, o conjunto das soluções da inequação $|x + 7| \leq 5$ é o intervalo [-12, -2].

(3) Se $|2x - 3| < 7$ então, a propriedade 2 da Proposição 3.14 implica que:

$-7 < 2x-3 < 7$ então, temos que: $-7+3 < 2x < 7+3$ assim, $-4 < 2x < 10$.

Assim, com a divisão por 2, o conjunto das soluções da inequação $|2x-3| < 7$ é o intervalo $]-2, 5[$.

Proposição 3.15 *Sejam a um número real e* $\in > 0$ *um real. Para um real x as duas afirmações são equivalentes:*

(1) $|x - a| < \in$.

(2) $a - \in < x < a + \in$ *equivale.*

(3) x *pertence ao intervalo* $]a - \in; a + \in[$.

Prova: (1) $\Rightarrow$ (2): A desigualdade $|x - a| < \in$ significa que a distância do número x ao número a é menor a $\in$, ou seja, $a - \in < x < a + \in$

(2) $\Rightarrow$ (3): $a - \in < x < a + \in$ e então deduzimos que x pertence ao conjunto $\{x \in \mathbb{R}, a - \in < x < a + \in\}$, isto é, $x \in]a - \in; a + \in[$.

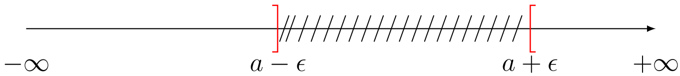
(3) $\Rightarrow$ (1): Se $x \in]a - \in; a + \in[$ então temos que $a - \in < x < a + \in$, o que implica que a distância do número x ao número a é menor a $\in$, isto é, $|x - a| < \in$.

C.Q.D.

Então podemos escrever que:

$$|x - a| < \in \Leftrightarrow a - \in < x < a + \in \Leftrightarrow x \in]a - \in; a + \in[.$$

A representação gráfica deste tipo de intervalo é dada por: a + e +∞



Estas equivalências são importantes para o estudo de certas desigualdades, bem como para as formulações das definições e das propriedades de limites e continuidade de funções, e também para a limitação e para a aproximação dos números reais.

3.5 Considerações finais

O conjunto de axiomas e propriedades dos números reais que acabamos de estudar visa esclarecer a origem de várias regras conhecidas consideradas na educação básica, tais como: a regra dos signos para se multiplicar, a regra para inverter frações, as regras para "multiplicar"as desigualdades etc. A origem de todas essas "regras" está nos axiomas e nas definições que acabamos de estudar. As regras são, na verdade, teoremas que podem ser provados por meio de axiomas e definições. Eles não foram "inventados", mas deduzidos de um grande conjunto de propriedades.

Também, os axiomas e propriedades dos números reais, são importante para:

1. A aproximação dos números reais com números racionais ou decimais.

2. A resolução das equações e inequações.

3. O estudo dos sinais das funções afins.

Por outro lado, o conjunto de axiomas e propriedades dos números reais que acabamos de estudar são a base do estudo das funções reais, e de maneira geral para o estudo dos Cálculos I e II.

3.6 Exercícios

Exercício 3.1 *Utilizando o símbolo < (menor que), ordene os seguintes números.*

$$\frac{23}{20}; \quad \sqrt{3}; \quad 1,5; \quad \sqrt{2}; \quad \frac{16}{9}; \quad \frac{16}{11}; \quad \frac{8}{5}.$$

Solução. Usando a regra de comparar a diferença *a* - *b* com o número 0, temos

$$\frac{23}{20} < \sqrt{2} < \frac{16}{11} < 1,5 < \frac{8}{5} < \sqrt{3} < \frac{16}{9}.$$

Exercício 3.2 *Sejam a e b dois números reais tais que a < b. Compare os números a, b com* $\frac{a+b}{2}$*.*

Solução. Comparando $\frac{a+b}{2}$ com *a* e com *b*, usando as diferenças $a - \frac{a+b}{2}$ com $b - \frac{a+b}{2}$ temos:

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} < 0 \text{ e } b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0.$$

Logo, deduzimos:

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Exercício 3.3 *Sejam a e b dois números reais. Compare os números* $a^2 + b^2$ *e* $(a + b)^2$*.*

Solução. Sabemos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Comparando $a^2 + b^2$ e $(a+b)^2$, usando as diferenças $(a+b)^2 - (a^2+b^2)$, temos:

$$(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab.$$

Assim, temos os seguintes casos:

a- Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ então $(a+b)^2 \geq a^2 + b^2$,

b- Se $a \leq 0$ e $b \leq 0$ então $(a+b)^2 \geq a^2 + b^2$,

c- Se $a \geq 0$ e $b \leq 0$ então $(a+b)^2 \leq a^2 + b^2$,

d- Se $a \leq 0$ e $b \geq 0$ então $(a+b)^2 \leq a^2 + b^2$.

Exercício 3.4 *Dados dois números reais $a > 0$ e $b > 0$. Provar que:*

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Deduzir que para qualquer número real $x > 0$, nós temos:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Solução. Como $a > 0$ e $b > 0$ temos $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2$. Logo, deduzimos:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0.$$

Assim, temos: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Considerando. $a = x$ e $b = \frac{1}{x}$, deduzimos que:

$$a + b = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2.$$

Logo, obtemos:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Exercício 3.5 *Seja x é um real tal que $-1 \leq x \leq 2$. Seja $B = -2x - 3$. Dar uma limitação do número B.*

Solução. Multiplicando os membros da desigualdade $-1 \leq x \leq 2$ por 2, obtemos: $-2 \leq 2x \leq 4$. Com a adição de 3, temos: $-2+3 \leq 2x+3 \leq 4+3$, isto é, $1 \leq 2x + 3 \leq 7$. Agora, multiplicando a desigualdade $1 \leq 2x + 3 \leq 7$ por -1, deduzimos que:

$$-7 \leq B = -2x - 3 \leq -1.$$

Exercício 3.6 *Escrever cada intervalo a seguir usando colchetes e represente-os graficamente:*

$I_1 = \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x \leq 8\}$, $I_2 = \{x \in \mathbb{R}; 2 < x \leq 8\}$ e $I_3 = \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x < 8\}$.

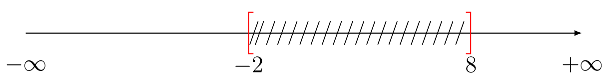
$I_4 = \{x \in \mathbb{R}; -5 < x < -3\}$, $I_5 = \{x \in \mathbb{R}; -5 < x \leq -3\}$ e $I_6 = \{x \in \mathbb{R}; -5 \leq x < -3\}$.

Solução. As representações dos intervalos I_j , j = 1, ..., 6, usando os colchetes são dadas por:

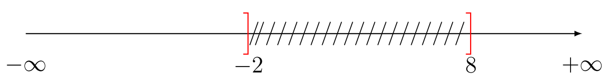
$I_1 = [2, 8]$, $I_2 =]2, 8]$, $I_3 = [2, 8[$, $I_4 =]-5, -3[$, $I_5 =]-5, -3]$, $I_6 = [-5, -3[$.

As representações geométricas dos intervalos I_j, $j = 1, ..., 6$, são dadas abaixo.

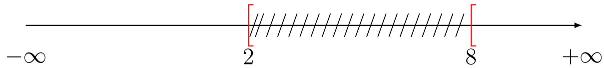
A representação geométrica do intervalo fechado $I_1 = [2, 8]$ é dada por:



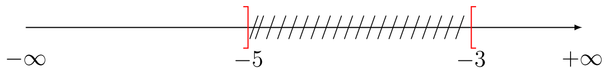
A representação geométrica do intervalo aberto a esquerda e fechado a direita $I_2 =]2, 8]$ é dada por:



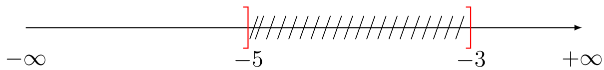
A representação geométrica do intervalo aberto a direita e fechado a esquerda I_3= $[2, 8[$ é dada por:



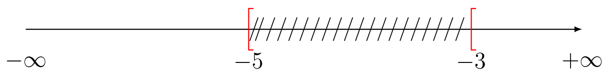
A representação geométrica do intervalo aberto I_4 =$]$-5, -3$[$ é dada por:



A representação geométrica do intervalo aberto a esquerda e fechado a direita $I_5 =]-5, -3]$ é dada por:



A representação geométrica do intervalo aberto a direita e fechado a esquerda I_6 = $[$-5, -3$[$ é dada por:



Podemos observar que as representações geométricas dos intervalos I_2 = $]2, 8]$, $I_3 = [2, 8[$ e $I_5 =]-5, -3]$, $I_6 = [-5, -3[$, são semelhantes.

Exercício 3.7 *Para cada item, determine* A ∪ B:

1. $A = [2, 5[$ e $B = [0, 3]$.

2. $A = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 6\}$.

3. $A = [5, 10[$ e $B =]4, 8[$.

4. $A = \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 2\}$.

Solução. Para a reunião A ∪ B, temos:

1. Se $A = [2, 5[$ e $B = [0, 3]$ temos, $A \cup B = [0, 5[$.

2. Se $A = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 6\}$ temos, $A \cup B = [-1, 6]$.

3. Se $A = [5, 10[$ e $B =]4, 8[$ temos, $A \cup B =]4, 10[$.

4. Se $A = \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 2\}$ temos, $A \cup B = [-1, 2]$.

Exercício 3.8 *Para cada item, determine $A \cap B$:*

1. $A = [-2, 2]$ e $B = [-3, 1]$.

2. $A = \{x \in \mathbb{R}, 3 \leq x < 9\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 5\}$.

3. $A =]2, 8]$ e $B =]3, 10]$.

4. $A = \{x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < -1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, -5 \leq x \leq -3\}$.

Solução. *Para a interseção $A \cap B$, temos:*

1. $A = [-2, 2]$ e $B = [-3, 1]$ temos, $A \cap B = [-2, 1]$.

2. $A = \{x \in \mathbb{R}, 3 \leq x < 9\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 5\}$ temos, $A \cap B = [3, 5[$.

3. $A =]2, 8]$ e $B =]3, 10]$ temos, $A \cap B =]3, 8]$.

4. $A = \{x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < -1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, -5 \leq x \leq -3\}$ temos, $A \cap B = \{3\}$.

Exercício 3.9 *Sejam os conjuntos:*

$A = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < 5\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$.

1. Escrever cada intervalo A, B e C usando os colchetes.

2. Represente-o graficamente.

3. Determine os conjuntos: $A \cap B$, $A \cap C$, $C \setminus B$ e $\complement_B^A$.

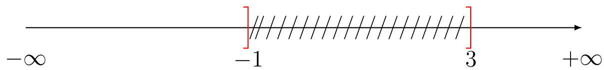
Solução.

1. Usando os colchetes temos:

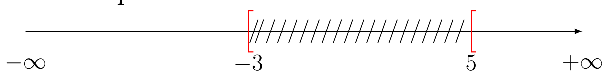
$A = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 3\} =]-1, 3]$, $B = \{x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < 5\} = [-3, 5[$ e $C = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 2\} = [2, +\infty[$

2. As representações gráficas dos conjuntos A, B e C são dadas abaixo.

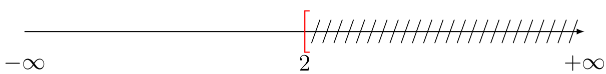
O conjunto A é um intervalo aberto a esquerda e fechado a direita $A =]-1, 3]$, e sua representação geométrica é dada por:



O conjunto $B = [-3, 5[$ é um intervalo fechado, e sua representação geométrica é dada por:



O conjunto $C = [2, +\infty[$ é um intervalo ilimitado a direita e fechado a esquerda, e sua representação geométrica é dada por:



3. Os conjuntos $A \cap B$, $A \cap C$, $C \setminus B$ e $\complement_B^A$ são dados por:

$A \cap B =]-1, 3]$, $A \cap C = [2, 3]$, $C \setminus B =]5, +\infty[$ e $\complement_B^A = [-3, 1] \cup]3, 5[$.

Exercício 3.10 Operações com intervalos *Sejam os conjuntos:*

$A = \{x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 5\}$.

Escrever o seguintes conjuntos usando os colchetes.

1. *Encontrar o conjunto $A \cup B$.*

2. *Encontrar o conjunto $A \cap C$.*

3. Encontrar o conjunto $A \setminus B$.

4. Encontrar o conjunto $\complement_A^C$.

5. Encontrar o conjunto $A \cap B \cap C$.

Solução. Usando os colchetes temos:

$A \cup B =]-2,+\infty[$, $A \cap C =]-1, 5]$, $A \backslash B =]-2, 0[$, $\complement_A^C =]-2,-1[\cup]5, 6]$

e $A \cap B \cap \mathrm{C} = [0, 5]$.

Exercício 3.11 Intervalos

Determine $r > 0$ de modo que $]4 - r, 4 + r[\subset]2, 5[$.

(Lembre-se: $A \subset B \Leftrightarrow A$ subconjunto de B.)

Solução. Para que $]4 - r, 4 + r[\subset]2, 5[$, o número real r tem a verificar a - seguinte desigualdade

$$2 < 4 - \mathrm{r} < 4 + \mathrm{r} < 5.$$

Logo, temos:

$$0 < \mathrm{r} < 4 - 2 = 2 \text{ e } 0 < \mathrm{r} < 5 - 4 = 1.$$

Logo, temos $0 < r < 1$. Assim, por exemplo para r = temos$]\frac{7}{2}, \frac{9}{2}[\subset]2, 5[$

Exercício 3.12 *Resolva as equações:*

$$|x - 15| = 7 \ , \ |x + 9| = 7 \ , \ |2x - 7| = 10.$$

Solução. Aqui usamos a seguinte regra:

$$|a| = b \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b,$$

para todos os números reais a e b com $b \geq 0$. Assim, aplicando a precedente regra vai permitir resolver as equações anteriores.

Para a equação $|x - 15| = 7$, temos

$$|x - 15| = 7 \text{ logo, temos } x - 15 = 7 \text{ ou } x - 15 = -7.$$

Assim, as soluções da equação $|x - 15| = 7$ são dados por $x = 22$ ou $x = 8$.

Para a equação $|x + 9| = 7$, temos:

$$|x + 9| = 7 \text{ logo, temos } x + 9 = 7 \text{ ou } x + 9 = -7.$$

Assim, as soluções da equação $|x+9| = 7$ são dados por $x = -2$ ou $x = -16$.
Para a equação $|2x - 7| = 10$, temos:

$$|2x - 7| = 10 \text{ logo, temos } 2x - 7 = 10 \text{ ou } 2x - 7 = -10.$$

Assim, as soluções da equação $|2x-7| = 10$ são dados por $x = \frac{17}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$

Exercício 3.13 *Resolva as inequações*:

$$|x - 15| < 7 \text{ , } |x + 9| < 7 \text{ , } |2x - 7| < 10.$$

Aqui usamos a seguinte regra:

$$|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b,$$

para todos os números reais a e b com $b > 0$.

Para a inequação $|x - 15| < 7$, temos:

$$|x - 15| < 7 \text{ logo, temos } -7 < x - 15 < 7.$$

Assim, temos $8 < x < 22$. Então, as soluções da inequação $|x\text{-}15|<7$ são os número reais que pertencem ao intervalo $]8, 22[$.

Para a inequação $|x + 9| < 7$, temos:

$$|x + 9| < 7 \text{ logo, temos } -7 < x + 9 < 7.$$

Assim, as soluções da inequação $|x+9| < 7$ são os número reais que pertencem ao intervalo $]-16,-2[$.

Para a inequação $|2x - 7| < 10$, temos:

$$|2x - 7| < 10 \text{ logo, temos } -10 < 2x - 7 < 10.$$

Assim, as soluções da inequação $|2x - 7| < 10$ são são os número reais que pertencem ao intervalo$]-\frac{3}{2}, \frac{17}{2}[$.

Exercício 3.14 *Sejam x, y dois números reais.*

1. Mostre que $|x| = \max\{x, -x\}$..

2. Mostre que:
$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

3. Mostre que
$$\min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Solução. 1- Seja $x \in \mathbb{R}$, sabemos que:

$$|x| = x \text{ se } x \geq 0 \text{ e } |x| = x \text{ se } x < 0.$$

Para $\max\{x,-x\}$, temos o dois seguintes casos:

a- Se $x \geq 0$ temos $\max\{x,-x\} = x$,

b- Se $x < 0$ temos $\max\{x,-x\} = -x$. Logo, deduzimos que:

$$|x| = \max\{x,-x\}.$$

2- Sejam x e y dois números reais. Se $x \geq y$ temos $|x - y| = x - y$, logo $x+y+|x-y| = x+y+x-y = 2x$, e de outro lado, $\max\{x, y\} = x$. Então, temos: $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x,y\}$, assim:

$$\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{2x}{2}.$$

Se $x \leq y$ temos $|x-y| = y-x$, logo $x+y+|x-y| = x+y+y-x = 2y$, e de outro lado, $\max\{x, y\} = y$. Então, temos: $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x,y\}$, assim deduzimos:

$$\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}.$$

3- Sejam x e Seja y dois números reais. Se $x \geq y$ temos $|x-y| = x-y$, logo $x + y - |x-y| = x + y + y - x = 2y$, e de outro lado, $\min\{x, y\} = y$. Então, temos: $\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x,y\}$, assim:

$$\min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Se $x \leq y$ temos $|x-y| = y-x$, logo $x+y-|x-y| = x+y+x-y = 2x$, e de outro lado, $\min\{x, y\} = x$. Então, temos: $\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x,y\}$, assim deduzimos:

$$\min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Exercício 3.15 Inequações e Intervalos

Expresse cada um dos conjuntos em notação de intervalo.

1. $A = \{x \in \mathbb{R}, 4x - 3 < 6x + 2\}$

2. $B = \{x \in \mathbb{R}, |x| < 2\}$

3. $C = \{x \in \mathbb{R}, |2x - 3| < 7\}$

Solução. 1- Para o conjunto A, temos:

$$4x - 3 < 6x + 2 \Leftrightarrow -3 - 2 < 6x - 4\text{x ou seja} - 5 < 2x,$$

logo, temos $x > -\frac{5}{2}$. Assim, em notações de intervalo o conjunto A tomou a seguinte forma:

$$A = \{x \in \mathbb{R}, 4x - 3 < 6x + 2\} =]-\frac{5}{2}, +\infty[.$$

2- Para o conjunto B, temos:

$$|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2,$$

Assim, em notações de intervalo o conjunto B tomou a seguinte forma:

$$B = \{x \in \mathbb{R}, |x| < 2\} =]-2, 2[.$$

3- Para o conjunto C, temos:

$$|2x - 3| < 7 \Leftrightarrow -7 < 2x - 3 < 7 \text{ ou seja} - 4 < 2x < 10,$$

logo, temos -2 < x < 5. Assim, em notações de intervalo o conjunto C tomou a seguinte forma:

$$C = \{x \in \mathbb{R}, |2x - 3| < 7\} =]-2, 5[.$$

CAPÍTULO 4

Produto Cartesiano e Plano Cartesiano

Objetivos

Neste capítulo, apresentamos os conceitos de produto cartesiano de conjuntos e de plano cartesiano, que são dois conceitos importantes da matemática. Em particular, esses dois conceitos desempenham um papel fundamental no estudo das funções e sua representação gráfica no Cálculo. Também ilustramos esses dois conceitos com exemplos básicos muito úteis.

4.1 Produto Cartesiano

4.1.1 Motivações

Motivação 1: Números de telefone da Turma. Seja I o conjunto dos alunos da Turma. Quais, dentre, os alunos da turma têm o número de telefone do outro aluno? A maneira mais clara de apresentar a resposta esperada é em forma de uma tabela de dupla entrada, onde para cada dupla, $x \in I$ e $y \in I$ é verificado se, e somente se, x tiver o número do telefone de y. Observe que, inversamente o aluno y não tem necessariamente o número de telefone do aluno x, portanto, a ordem entre x e y é importante. O conjunto dos alunos que têm o número de telefone do outro é formado pelo par ordenado (x, y), que é um subconjunto do conjunto de todas as duplas, denotado por $I \times I$, isto é:

$$I \times I = \{(x, y) \mid x \in I \text{ e } y \in I\}.$$

Motivação 2: Uma experiência aleatória. Um jogador tem um dado de 6 faces numerado de 1 a 6 e uma moeda com ambos os lados marcados com Cara (P) e coroa (F).

1) O jogador joga primeiro o dado e depois a moeda e observa os resultados. Qual é o conjunto E dos resultados desta experiência aleatória? Os resultados são apresentados em uma tabela cujas entradas são duplas (x, y), onde $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $y \in \{P, F\}$. Assim, escrevemos o conjunto dos resultados:

$$E = \{(x, y) | x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ e } y \in \{P, F\}\},$$

ou seja,

$$E = \{(1, P); (1, F); (2, P); (2, F); (3, P); (3, F);$$
$$(4, P); (4, F); (5, P); (5, F); (6, P); (6, F)\}.$$

E escrevemos:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{P, F\}$$

2) O jogador joga primeiro a moeda e depois o dado. Qual é o conjunto E dos resultados desta experiência aleatória? Os resultados são apresentados em uma tabela cujas entradas são duplas (x, y), onde $x \in \{P, F\}$ e $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Assim, o conjunto dos resultados é:

$$E = \{(x, y); x \in \{P, F\} \text{ e } y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} ,$$

ou seja,

$$E = \{(P, 1); (P, 2); (P, 3); (P, 4); (P, 5); (P, 6);$$
$$(F, 1); (F, 2); (F, 3); (F, 4); (F, 5); (F, 6)\}.$$

E escrevemos:

$$E = \{P, F\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Com as duas situações anteriores, conseguimos a partir de dois conjuntos E e F, a construção de um novo conjunto, denotado $E \times F$, cujos elementos são "pares ordenados" formados por elementos de E e de F, isto é, todos os possíveis pares de números de modo que o primeiro seja elemento de E e o segundo seja elemento de F. Assim, observamos que a ordem entre x e y nas duplas (x, y) é importante.

Devemos, portanto, distinguir as duplas e os pares, ou seja, partes de dois elementos. Isto é:

1. Para dupla (x, y) a ordem é importante.

2. Para uma parte $\{x, y\}$ de dois elementos x, y a ordem não é importante.

Observação 4.1 *Conjuntos de pares ordenados são úteis para descrever várias situações em matemática e em outras áreas. Por exemplo, a construção dos gráficos de funções ou da descrição de curvas no plano.*

4.1.2 Definição

Definição 4.1 *Sejam E e F dois conjuntos dados. O* **produto cartesiano** *dos conjuntos E e F, denotado por Ex F, é o conjunto que possui um elemento, chamado* **par ordenado** *(x, y), onde $x \in E$ e $y \in F$.*

Convenção. Para todos os x, x' em E e todos os y, y' em F, consideramos a convenção:

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ e } y = y'. \tag{4.1}$$

Sejam E e F dois conjuntos cujo produto cartesiano $E \times F$ é apresentado em forma de tabela. Para cada dupla (x, y) do produto cartesiano $E \times F$, dizemos que:

- x é a abscissa do par (x, y),
- y é a ordenada do par (x, y).

Em outras palavras, em um par ordenado (x, y), x é a primeira coordenada e y é a segunda coordenada

Observação 4.2 *Dados os conjuntos E e F, o produto cartesiano de E por Fé o conjunto:*

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E \text{ e } y \in F\}$$

A expressão $x \in E$ e $y \in F$ deve ser entendida no sentido de "x percorre E e y percorre F". Isto mostra que usamos todos os elementos de E e todos os elementos de F, construindo todos os possíveis pares ordenados.

Exemplo 4.1 *Os resultados de uma prova escrita é uma tabela com duas entradas:*

- *na ordenada y, os notas dos alunos,*
- *na abscissa x, os nomes dos alunos.*

A tabela é formada por um par (aluno, nota), isto é, pelo produto cartesiano do conjunto E dos alunos e pelo conjunto das notas F, isto é:

$$E \times F = \{(x, y) |\ x \text{ é o aluno} \quad \text{e} \quad y \text{ é a nota do aluno } x\}.$$

Observação 4.3 *Quando os conjuntos E e F são iguais, isto é, E = F, o produto cartesiano $E \times F = E \times E$ também é denotado por $E \times E = E^2$, ou seja:*

$$E^2 = \{(x, y),\ x \in E \text{ e } y \in E\}.$$

Usando a Observação 4.3 e os exemplos anteriores, podemos deduzir a seguinte proposição.

Proposição 4.1 *Sejam E e F dois conjuntos, não vazios, tais que $E \neq F$, então:*

$$E \times F \neq F \times E.$$

Observação 4.4 *Quando um dos conjuntos de um produto cartesiano é o conjunto vazio, temos*

$$E \times \emptyset = \emptyset \times F = \emptyset,$$

porque o conjunto vazio não tem elementos, assim não podemos construir pares ordenados.

4.2 Produto Cartesiano e Plano Cartesiano

4.2.1 Produto cartesiano de conjuntos numéricos

Sejam E e F dois subconjuntos dos números reais. O **produto cartesiano** $E \times F$ dos dois conjuntos E e F é formado pelo par (x, y), onde $x \in E$ e $y \in F$, isto é:

$$E \times F = \{(x, y) | \ x \in E \text{ e } y \in F\}.$$

Também, temos a convenção de que para todos os x, x' em E e todos os y, y' em F temos:

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ e } y = y'. \tag{4.2}$$

Exemplo 4.2 Sejam os intervalos $I_1 = [-1, 5]$ e $I_2 =]1, 7]$ o produto cartesiano de I_1 e I_2 é dado por:

$$I_1 \times I_2 = \{(x, y), \ x \in I_1 \text{ e } y \in I_2\}.$$

Escrevemos:

$$\mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2 = [-1, 5] \times]1, 7].$$

Exemplo 4.3 *Sejam os dois conjuntos numéricos* $A = \{-5, 0, 2, 3, 5\}$ *e* $I = [-2, 5]$ *o produto cartesiano de A e I é dado por:*

$$A \times I = \{(x, y), \ x \in A \text{ e } y \in I\}.$$

Escrevemos:

$$A \times I = \{-5, 0, 2, 3, 5\} \times [-2, 5].$$

Definição 4.2 *Seja $E = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, o* **produto cartesiano** *$E \times E$ é definido por:*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y), \text{ onde } x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Em geral, usamos também a notação:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Pergunta: Sabemos que geometricamente, o conjunto dos números reais pode ser visto como uma reta, através de uma correspondência entre os números reais e os pontos da reta. Agora a pergunta é o seguinte: Como podemos conseguir uma representação geométrica do produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Como podemos visualizar o produto cartesiano do conjunto dos números reais?

4.2.2 Plano cartesiano

Para conseguir uma representação geométrica dos elementos do produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e também uma visualização geométrica do produto cartesiano dos conjuntos dos números reais vamos proceder da seguinte forma.

Os elementos do produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pode ser visto como os pontos de um plano, através de uma correspondência entre os elementos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ e os pontos de um plano. Em outras palavras, os elementos (x, y) podem ser representados por pontos de plano, onde no qual:

1. Escolhe-se, no plano, uma reta como sendo o eixo x, ou eixo das **abscissas**. Toma-se sobre essa reta um ponto de referência arbitrário, O, denominado **origem** da reta que corresponde ao número real 0, e dada uma unidade de comprimento (+1) tal que a:

    a. cada número a positivo é representado por um ponto da reta que está a "**a**" unidades de distância à direita, da origem O;

    b. cada número a negativo é representado por um ponto sobre a reta que está a "($-a$)" unidades de distância, à esquerda, da origem O.

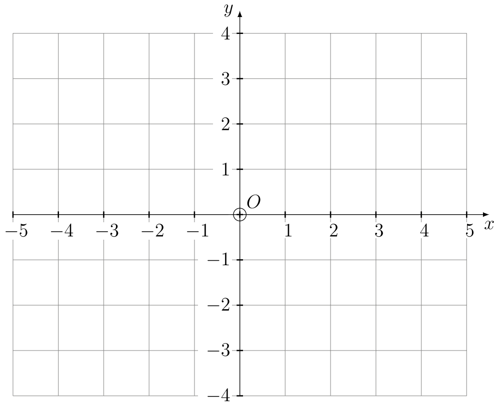
2. Tomamos agora uma segunda reta no plano, passando também por O e perpendicular a primeira reta, isto é, o eixo z. Esta segunda reta será o eixo y, ou eixo das **ordenadas**, e tomamos uma unidade de comprimento (+1) sobre o eixo y, tal que a:

    a. cada número b positivo é representado por um ponto da reta que está a b unidades de distância **acima** da origem O;

    b. cada número b negativo é representado por um ponto sobre a reta que está a ($-b$) unidades de distância abaixo da origem O.

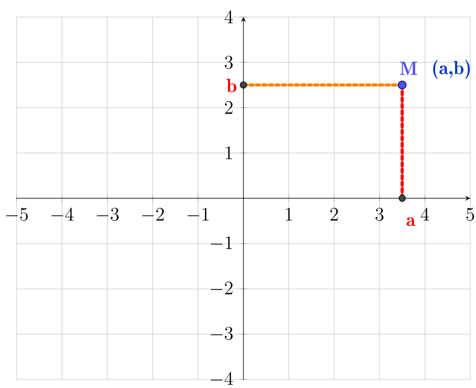
Assim, temos a seguinte definição.

Definição 4.3 *O plano equipado com a origem O, o eixo x e o eixo y, e as unidades desses eixos é chamado de plano cartesiano, cuja representação gráfica é dado por:*



Definição 4.4 *Cada elemento* (a, b) *pode ser representado por um ponto* M *do plano cartesiano e todo ponto* M *do plano cartesiano corresponde a um único elemento* (a, b)*. Os números reais* a *e* b *associados ao ponto* M *é chamado de* **coordenadas do ponto** M*:*

a é a abscissa do ponto M e b é a ordenada do ponto M.



Notações. Se M é um ponto do plano cartesiano de abscissa a e de ordenada b escrevemos:

$$M\,(a, b).$$

Se pensarmos num par ordenado (x, y) como a posição de um objeto no plano, então quando um ponto localizado em (x, y) estará na posição dada (a, b), podemos dizer que as coordenadas de (x, y) coincidirem com as coordenadas (a, b). Assim, estamos em acordo com a convenção anterior, temos a definição:

Definição 4.5 *Dois pares ordenados (x, y) e (a,b) são iguais se e somente se $x = a$ e $y = b$.*

Exemplo 4.4 *Para o ponto A de abscissa -2 e ordenada 3, escrevemos: $A(-2, 3)$. Para o ponto B de abscissa 3 e ordenada -3, escrevemos: B (3, -3).*

Representação gráfica de um ponto. Consideramos o ponto $M(a, b)$ e para representar este ponto no plano cartesiano, procedemos da seguinte forma:

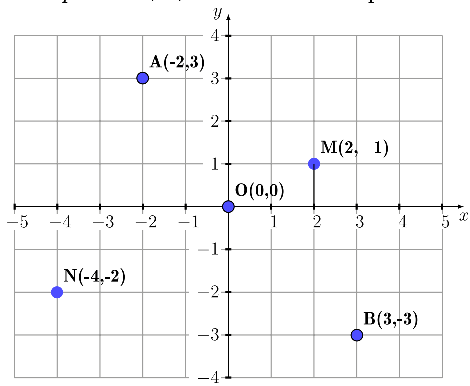
- Pelo ponto a traçamos uma reta paralela ao eixo y,
- Pelo ponto b do eixo y traçamos uma reta auxiliar tracejada paralela ao eixo x,

O ponto da intersecção das duas retas é o ponto **M** (a, b).

Exemplo 4.5 *Sejam os quatros pontos do plano cartesiano dados por:*

$$A(-2, 3), B(3,-3), M(2, 1), N(-4,-2).$$

As representações dos pontos A, B, M e N são dadas plano cartesiano a seguir.



4.3 Uma descrição detalhada do plano cartesiano

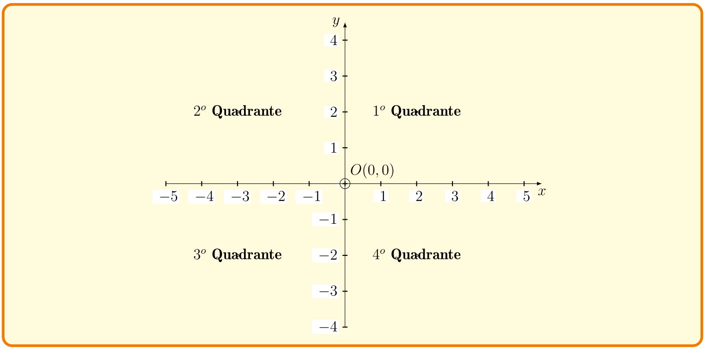
O plano cartesiano é definido com a origem O e dois eixos:

• O eixo x,

. O eixo y,

• As unidades desses eixos

Quando desenhamos esses eixos, o plano fica dividido em quatro regiões denominadas **quadrantes**, numerados no sentido anti-horário:



Sejam M(a, b) um ponto do plano cartesiano:

1) Se $a > 0$ e $b > 0$, então o ponto $M(a, b)$ é localizado no 1º quadrante.

2) Se $a < 0$ e $b > 0$, então o ponto $M(a, b)$ é localizado no 2º quadrante.

3) Se $a < 0$ e $b < 0$, então o ponto $M(a, b)$ é localizado no 3º quadrante.

4) Se $a > 0$ e $b < 0$, então o ponto $M(a, b)$ é localizado no 4º quadrante.

No caso que $a = 0$ ou $b = 0$, temos as seguintes casos:

1) Se $a = 0$ e $b = 0$, então o ponto $M(0, 0)$ é o ponto origem do plano cartesiano.

2) Se $a \neq 0$ e $b = 0$, então o ponto $M(a, 0)$ pertence ao eixo (Ox).

3) Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então o ponto $M(0, b)$ pertence ao eixo (Oy).

4.4 Bissetrizes do plano cartesiano

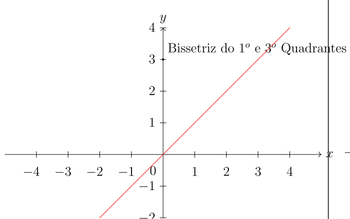
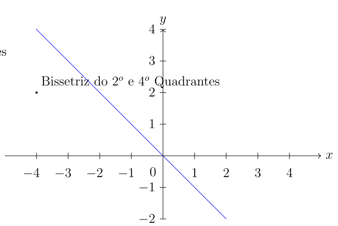
Ao definir a existência de quadrantes, convencionamos também a existência de bissetrizes, que são retas que cortam os quadrantes exatamente na metade (45°).

Definição 4.6 *As duas bissetrizes, são chamadas:*

1. A bissetriz dos Quadrantes Pares (2º *e* 4º*)*

2. A bissetriz dos Quadrantes Ímpares (1º *e* 3º*).*

Em outras palavras, as bissetrizes do plano cartesiano são as retas que dividem ao meio os quadrantes, vamos vê-las.

Bissetriz da 1^o e 3^o Quadrantes	**Bissetriz da 2^o e 4^o Quadrantes**
	

A bissetriz dos 1º e 3º Quadrantes é chamada 1ª bissetriz.

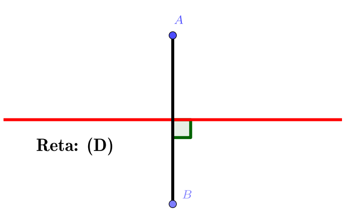
A bissetriz dos 2º e 4º Quadrantes é chamada 2ª bissetriz

1. **Bissetriz dos Quadrantes Ímpares**: Todo ponto que pertence a bissetriz dos quadrantes ímpares tem a abscissa (valor de y) igual à ordenada (valor de x). Assim sendo, chamando x de a, teremos que um ponto pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares é: $M(a, a)$.
2. **Bissetriz dos Quadrantes Pares**: Todo ponto que pertence a bissetriz dos quadrantes pares tem a abscissa (valor de x) oposta a ordenada (valor de y). Chamando x de a, teremos que um ponto pertencente à bissetriz dos quadrantes pares é: $P(a, -a)$.

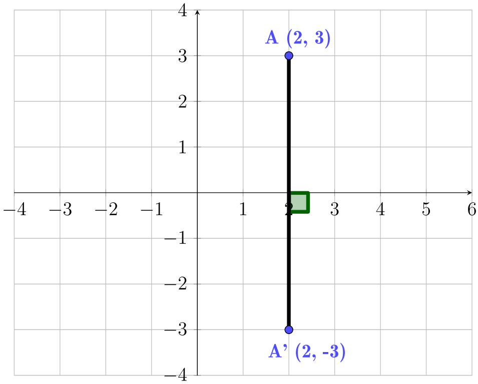
Estes serão os conceitos básico e fundamentais sobre o plano cartesiano e sobre ponto no plano cartesiano. Eles serão bases para o estudo de vários assuntos, como, por exemplo, funções, construções de representações gráficas e formas geométricas planas. Saber usar o plano cartesiano e definir pontos nele é extremamente importante para entender vários ramos da matemática, principalmente aqueles que necessitam de uma interpretação geométrica.

4.5 Simétrico de um ponto

Definição 4.7 *Dois pontos A e A' são simétricos em relação a uma reta (D), quando são equidistantes da reta (D), isto é,* $\overline{AO} = \overline{OA'}$ *e estão situados sobre a mesma perpendicular à (D).*



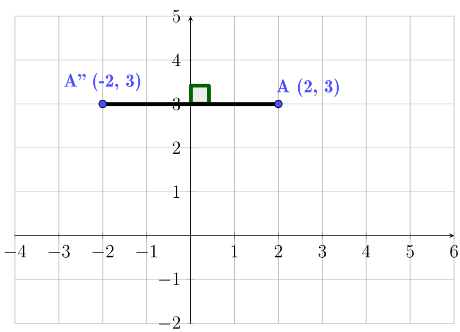
Simétrico de um ponto em relação ao eixo *x*. No exemplo a seguir, temos o ponto $A(2{,}3)$ e seu simétrico $A'(2{,}\text{-}3)$ em relação ao eixo x.



Através desse exemplo, perceba que os pontos têm a mesma abscissa e as suas ordenadas são simétricas. De maneira geral, temos:

O simétrico do ponto $A(a, b)$ em relação ao eixo x é o ponto $A'(a, b)$

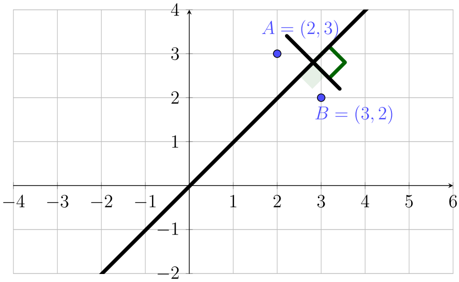
Simétrico de um ponto em relação ao eixo *y*. No exemplo a seguir, temos o ponto $A(2, 3)$ e seu simétrico $A''(\text{-}2, 3)$ em relação ao eixo y.



Através desse exemplo, perceba que os pontos têm a mesma ordenada e a sua abscissa é simétrica. De maneira geral temos:

O simétrico do ponto $A(a,\ b)$ em relação ao eixo y é o ponto $A''(-a,\ b)$

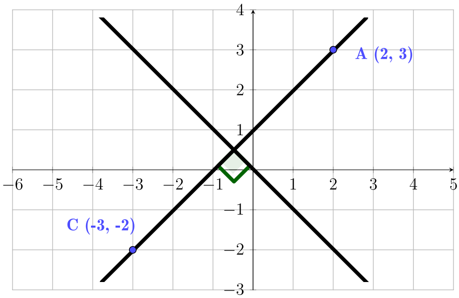
Simétrico de um ponto em relação a primeira bissetriz. No exemplo a seguir, temos o ponto $A(2,\ 3)$ e seu simétrico $B(3,2)$ em relação a primeira bissetriz, isto é, temos o ponto $A(2,\ 3)$ e seu simétrico $B(3,2)$ em relação a reta $y = x$.



Através desse exemplo, perceba que a abscissa e a ordenada do ponto $A(2,3)$ e seu simétrico $B(3,2)$ em relação a reta $y = x$, são trocadas. De maneira geral temos:

O simétrico do ponto $A(a,\ b)$ em relação a reta $y = x$ é o ponto $B(b,\ a)$

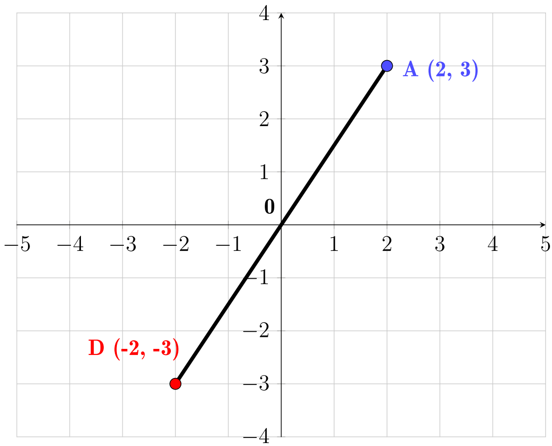
Simétrico de um ponto em relação a segunda bissetriz. No exemplo a seguir, temos o ponto $A(2,\ 3)$ e seu simétrico $C(-3,\ 2)$ em relação a segunda bissetriz, ou seja, em relação a reta $y = -x$.



Com esse exemplo, perceba que a abscissa e a ordenada do ponto C = (-3,-2) são negativas e a abscissa e a ordenadas ao trocadas em relação ao ponto A = (2,3). De maneira geral temos:

O simétrico do ponto $A(a, b)$ em relação a reta $y = -x$ é o ponto $B(-b, -a)$

Simétrico de um ponto em relação ao origem. No exemplo a seguir, temos o ponto $A(2, 3)$ e seu simétrico $D(-2, -3)$ em relação à origem, ou seja, em relação ao ponto $O(0,0)$.



Com esse exemplo, perceba que a abscissa e a ordenada do ponto D = (-2,-3) são negativas em relação a abscissa e a ordenadas do ponto A = (2,3). De maneira geral temos:

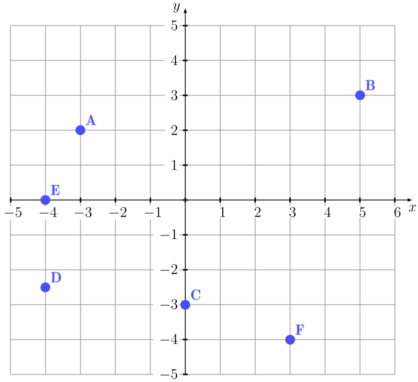
O simétrico do ponto $A(a, b)$ em relação a origem é o ponto $D(-a, -b)$

4.6 Exercícios

Exercício 4.1 *Localize os pares ordenados no plano cartesiano:*

A(-3, 2), B(5, 3), C(0, -3), D(-4, -2.5), E(-4, 0) e F(3, -4).

Solução. Os pares ordenados estão encontrados no plano cartesiano:



Exercício 4.2 *Em quais quadrantes estão localizados os pontos:*

$$(-2,-4), (8, 3), (8,-9), (-9, 3), (0, 6), (7, 0).$$

Solução.

1. Como $x = -2 < 0$ e $y = -4 < 0$, então o ponto $(-2,-4)$ está localizado no 3º quadrante.

2. Como $x = 8 >$ e $y = 3 > 0$ o ponto $(8, 3)$ está localizado no 1º quadrante.

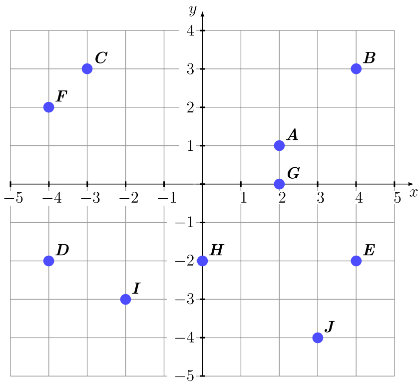
3. Como $x = 8 > 0$ e $y = -9 < 0$ o ponto $(8,-9)$ está localizado no 4º quadrante.

4. Como e $x = -9 < 0$ $y = 3 > 0$ o ponto $(-9, 3)$ está localizado no 2º quadrante.

5. Como e $x = 0$ $y = 6 > 0$ o ponto $(0, 6)$ está localizado no eixo (Oy).

6. Como e $x = 7 > 0$ $y = 0$ o ponto $(7, 0)$ está localizado no eixo (Ox).

Exercício 4.3 *Dê as coordenadas dos pontos em negrito localizados no plano de cartesiano*:

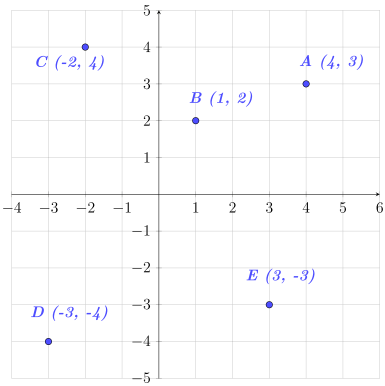


Solução. As coordenadas são:

$A(2, 1)$, $B\,(4, 3)$, $C\,(-3, 3)$, $D(-4,-2)$, $E\,(4,-2)$,

$F\,(-4, 2)$, $G(2, 0)$, $H\,(0,-2)$, $I\,(-2,-3)$, $J\,(3,-4)$.

Exercício 4.4 *No sistema de coordenadas a seguir estão marcados os pontos A, B, C, D e E. Determine as coordenadas dos simétricos desses pontos em relação ao eixo x.*



Solução. As coordenadas dos pontos simétricos, dos pontos *A, B, C, D*e *E*, em relação ao eixo x, são:

1. As coordenadas do ponto simétrico A' do ponto $A(4, 3)$ são dados por $A'(4,-3)$.

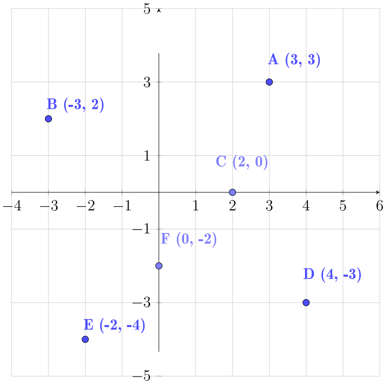
2. As coordenadas do ponto simétrico B' do ponto $B(1, 2)$ são dados por $B'(1,-2)$.

3. As coordenadas do ponto simétrico C' do ponto $C(-2, 4)$ são dados por $C'(-2,-4)$.

4. As coordenadas do ponto simétrico D' do ponto $D(-3,-4)$ são dados por $D'(-3, 4)$.

5. As coordenadas do ponto simétrico E' do ponto $E(3,-3)$ são dados por $E'(3, 3)$.

Exercício 4.5 *No sistema de coordenadas a seguir estão marcados os pontos A, B, C, D e E. Determine as coordenadas dos simétricos desses pontos em relação ao eixo y.*



Solução. Com a leitura gráfica, as coordenadas dos pontos simétricos, dos pontos *A, B, C, D, E* e *F,* em relação ao eixo *y,* são:

1. As coordenadas do ponto simétrico A'' do ponto $A(3, 3)$ são dados por $A''(-3, 3)$.

2. As coordenadas do ponto simétrico B'' do ponto $B(-3, 2)$ são dados por $B''(3, 2)$.

3. As coordenadas do ponto simétrico C'' do ponto $C(2, 0)$ são dados por $C''(-2, 0)$.

4. As coordenadas do ponto simétrico D'' do ponto $D(4,-3)$ são dados por $D''(-4,-3)$.

5. As coordenadas do ponto simétrico E'' do ponto $E(-2,-4)$ são dados por $E''(2,-4)$.

6. As coordenadas do ponto simétrico F'' do ponto $F(0,-2)$ são dados por $F''(0,-2)$.

Exercício 4.6 *Para os mesmos pontos do Exercício anterior, determine o simétrico deles em relação as retas:*

$$y = x \text{ e } y = -x.$$

Solução.

A. As coordenadas dos pontos simétricos, dos pontos A, B, C, D, E e F, em relação ao eixo $y = x$, são dados:

1. As coordenadas do ponto simétrico A_1 do ponto $A(3, 3)$, em relação ao eixo $y = x$, são dados por $A_1(3, 3)$.

2. As coordenadas do ponto simétrico B_1 do ponto $B(-3, 2)$, em relação ao eixo $y = x$, são dados por $B_1(2,-3)$.

3. As coordenadas do ponto simétrico C_1 do ponto $C(2, 0)$, em relação ao eixo $y = x$, são dados por $C_1(0, 2)$.

4. As coordenadas do ponto simétrico D_1 do ponto D(4,-3), em relação ao eixo $y = x$, são dados por $D_1(-3, 4)$.

5. As coordenadas do ponto simétrico E_1 do ponto E(-2,-4), em relação ao eixo $y = x$, são dados por E_1(-4,-2).

6. As coordenadas do ponto simétrico F_1 do ponto F(0,-2), em relação ao eixo $y = x$, são dados por F_1(-2, 0).

B. As coordenadas dos pontos simétricos, dos pontos A, B, C, D, E e F, em relação ao eixo $y = -x$, são dados:

1. As coordenadas do ponto simétrico A_2 do ponto $A(3, 3)$, em relação ao eixo $y = -x$, são dados por $A_2(-3,-3)$.

2. As coordenadas do ponto simétrico B_2 do ponto $B(-3, 2)$, em relação ao eixo $y = -x$, são dados por $B_2(-2, 3)$.

3. As coordenadas do ponto simétrico C_2 do ponto $C(2, 0)$ são dados por $C_2(0,-2)$.

4. As coordinadas do ponto simétrico D_2 do ponto $D(4,-3)$ são dados por $D_2(3,-4)$.

5. As coordenadas do ponto simétrico E_2 do ponto $E(-2,-4)$, em relação ao eixo $y = -x$, são dados por $E_2(4, 2)$.

6. As coordenadas do ponto simétrico F_2 do ponto $F(0,-2)$, em relação ao eixo $y = -x$, são dados por $F_2(2, 0)$.

Exercício 4.7 *Determine o valor do número real k de modo que:*

1. O ponto M(-2, k + 1) pertença ao eixo das abscissas.

2. O ponto N(k+4,-2) pertença ao eixo das ordenadas.

Solução.

1. O ponto $M(-2, k+1)$ pertence ao eixo das abscissas se sua ordenada $k+1$ é nula, isto é, $k + 1 = 0$. Logo, temos $k = -1$. Assim, o ponto $M(-2, k + 1)$ pertence ao eixo das abscissas para $k = -1$.

2. O ponto $M(k+4,-2)$ pertence ao eixo das ordenadas se sua absscissa $k+4$ é nula, isto é, $k + 4 = 0$. Logo, temos $k = -4$. Assim, o ponto $M(k + 4,-2)$ pertença ao eixo das ordenadas se, e somente, se $k = -4$.

Exercício 4.8 *Determine o valor do número real k de modo que:*

1. O ponto $N(k +4, -2)$ pertença a bissetriz do quadrantes.

2. O ponto $P(k + 2, -4)$ pertença a bissetriz do quadrantes.

Solução.

1. O ponto $N(k+4,-2)$ pertence as bissetrizes dos quadrantes se $N(k+4,-2)$ pertence a primeira bissetriz ou a segunda bissetriz.

(a) Se o ponto $N(k+4,-2)$ pertence a primeira bissetriz, então sua abscissa e sua ordenada são iguais, isto é, $k+4 = -2$, logo temos $k = -6$. Assim, o ponto $N(k + 4,-2)$ pertence a primeira bissetriz para $k = -6$.

(b) Se o ponto $N(k+4,-2)$ pertence a segunda bissetriz, então sua abscissa $x = k + 4$ e são ordenada $y = -2$ são tais que $y = -x$, isto é, $-2 = -(k + 4)$, logo temos $k = -2$. Assim, o ponto $N(k + 4,-2)$ pertence a segunda bissetriz para $k = -2$.

2. O ponto $P(k+2,-4)$ pertença as bissetrizes dos quadrantes se $P(k+2,-4)$ pertence a primeira bissetriz ou a segunda bissetriz.

(a) Se o ponto $P(k+2,-4)$ pertence a primeira bissetriz, então sua abscissa e sua ordenada sua iguais, isto é, $k + 2 = -4$, logo $k = -6$. Assim, o ponto $P(k + 2,-4)$ pertence a primeira bissetriz para $k = -6$.

(b) Se o ponto $P(k+2,-4)$ pertence a segunda bissetriz, então sua abscissa $x = k + 2$ e sua ordenada $y = -4$ são tais que $y = -x$, isto é, $-4 = -(k + 2)$, logo temos $k = 2$. Assim, o ponto $P(k + 2,-4)$ pertence a segunda bissetriz para, $k = 2$.

Exercício 4.9 *Determine o valor do n´umero real k de modo que:*

1. O ponto $S(2k - 3,-1)$ pertença à bissetriz dos quadrantes pares.

2. O ponto $R(2 - 3k, 7)$ pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Solução.

1. Se o ponto $S(2k -3,-1)$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares, então o ponto $S(2k - 3,-1)$ pertence a a segunda bissetriz. Assim, a abscissa $x = 2k-3$ e a ordenada $y = -1$ do ponto $S(2k-3,-1)$ são tais que $y = -x$, isto é, $-1 = -(2k - 3)$, logo temos $k = 2$. Assim, o ponto $S(2k - 3,-1)$ pertence a bissetriz dos quadrantes pares para $k = 2$.

2. Se o ponto $R(2-3k, 7)$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então ele pertence a primeira bissetriz. Assim, sua abscissa e sua ordenada sua iguais, isto é, $2 - 3k = 7$, logo $k = 3$. Assim, o ponto $R(2 - 3k, 7)$ pertence à bissetriz dos quadrantes ımpares para $k = 3$.

Exercício 4.10 *Dado o ponto $P(2,-3)$, determine as coordenadas:*

1. Do ponto P_1, sim´etrico de P em relação ao eixo das abscissas.

2. Do ponto P_2, sim´etrico de P em relação ao eixo das ordenadas.

3. Do ponto P_3, sim´etrico de P em relação à origem.

Solução. 1. Sejam $M(a, b)$ e $N(c, d)$ dois pontos do plano cartesiano. Sabemos que $M(a, b)$ e $N(c, d)$ s ão simétricos em relação ao eixo das abscissas se, e somente se,

$$a = c \text{ e } b = -d.$$

Assim, o simétrico $P_1(a, b)$ do ponto $P(2,-3)$ em relação ao eixo das abscissas, e dado por:

$$a = 2 \text{ e } b = -(-3) = 3.$$

Então, o simétrico do ponto $P(2,–3)$ em relação ao eixo das abscissas, é o ponto $P_1(2, 3)$.

2. Sejam $M(a, b)$ e $N(c, d)$ dois pontos do plano cartesiano. Sabemos que $M(a, b)$ e $N(c, d)$ são simétricos em relação ao eixo das ordenadas se, e somente se,

$$a = -c \text{ e } b = d.$$

Assim, o simétrico $P_2(a, b)$ do ponto $P(2,–3)$ em relação ao eixo das ordenadas, e dado por:

$$a = -2 \text{ e } b = -3.$$

Então, o simétrico do ponto $P(2,-3)$ em relação ao eixo das abscissas, é o ponto $P_2(-2,-3)$.

3. Sejam $M(a, b)$ e $N(c, d)$ dois pontos do plano cartesiano. Sabemos que $M(a, b)$ e $N(c, d)$ são simétricos em relação à origem se, e somente se,

$$a = -c \text{ e } b = -d.$$

Assim, o simétrico $P_3(a, b)$ do ponto $P(2,–3)$ em relação à origem,é dado por:

$$a = -2 \text{ e } b = -(-3) = 3.$$

Então, o simétrico do ponto $P(2,-3)$ em relação à origem, é o ponto $P_3(-2, 3)$.

Exercício 4.11 *Dado o ponto $Q(-4, 2)$, determine às coordenadas:*

1. Do ponto Q_1, simétrico de Q em relação à bissetriz do 1° e 3° quadrantes.

2. Do ponto Q_2, simétrico de Q em relação à bissetriz do 2° e 4° quadrantes.

Solução. 1. Sejam $M(a, b)$ e $N(c, d)$ dois pontos do plano cartesiano. Sabemos que se $M(a, b)$ e $N(c, d)$ são simétricos em relação à bissetriz do 1° e 3° quadrantes, então eles são simétricos em relação a primeira bissetriz. Assim, se $M(a, b)$ e $N(c, d)$ é o simétrico de $M(a, b)$ em relação a primeira bissetriz, temos:

$$c = b \text{ e } d = a.$$

Assim, as coordenadas do ponto $Q_1(c, d)$ simétrico de $Q(-4, 2)$ em relação à bissetriz do 1° e 3° quadrantes, são dadas por:

$$c = 2 \text{ e } d = -4,$$

isto é, o ponto Q_1 é dado por $Q_1(2,-4)$.

2. Sejam $M(a, b)$ e $N(c, d)$ dois pontos do plano cartesiano. Sabemos que se $M(a, b)$ e $N(c, d)$ são simétricos em relação à bissetriz do 2° e 4° quadrantes, então, eles são simétricos em relação a segunda bissetriz. Assim, se $M(a, b)$ e $N(c, d)$ é o simétrico de $M(a, b)$ em relação a segunda bissetriz, temos:

$$c = -b \text{ e } d = -a.$$

Assim, as cordenadas do ponto $Q_2(c, d)$ simétrico de $Q(-4, 2)$ em relação à bissetriz do 2° e 4° quadrantes, são dadas por:

$$c = -2 \text{ e } d = -(-4) = 4,$$

isto é, o ponto Q_2 é dado por $Q_1(-2, 4)$.

Exercício 4.12 Dados os pontos $Q(-4, 2)$, $P(2,-3)$ e $R(4, 3)$. *Determine as coordenadas dos pontos simétricos dos pontos Q, P e R em relação à origem.*

Solução. Sejam $M(a, b)$ e $N(c, d)$ dois pontos do plano cartesiano. Sabemos que se $M(a, b)$ e $N(c, d)$ são simétricos em relação à origem, então:

$$c = -a \text{ e } d = -b.$$

Assim, temos:

1. As cordenadas do ponto $Q_1(c, d)$ sim étrico de $Q(-4, 2)$ em relação à origem, são dadas por:

   $$c = -(-4) = 4 \text{ e } d = -2,$$

   isto é, o ponto Q_1 é dado por $Q_1(4,-2)$.

2. As cordenadas do ponto $P_1(c, d)$ simétrico de $P(2,-3)$ em relação à origem, são dadas por:

   $$c = -2 \text{ e d} = -(-3) = 3,$$

   isto é, o ponto P_1 é dado por ponto $P_1(-2, 3)$.

3. As cordenadas do ponto $R_1(c, d)$ simétrico de $R(4, 3)$ em relação à origem, são dadas por:

   $$c = -4 \text{ e } d = -3,$$

   isto é, o ponto R é dado por $R_1(-4,-3)$.

CAPÍTULO 5

Introdução às Funções Reais com Valores Reais

Objetivos

Neste capítulo estudamos o conceito de função, e suas propriedades. Mais precisamente, primeiro apresentamos um exemplo prático para introduzir e motivar o conceito de função. Em seguida, estamos interessados em passar do exemplo prático dessa atividade para a linguagem matemática de função. Também daremos uma definição do conceito geral de função e algumas propriedades gerais que são importantes para a Introdução ao Cálculo e, mais amplamente, para o ensino de matemática.

5.1 Preliminares

O conceito de função é um dos conceitos mais importantes da matemática. Ele está presente em vários conceitos da matemática, bem como em outras disciplinas das ciências exatas e aplicadas. Os conceitos trabalhados nos cap ítulos 1, 2, 3 e 4 serão amplamente utilizados em nosso estudo das funções na disciplina de Introdução ao Cálculo.

Historicamente, a ideia de função apareceu na forma de uma tabela de valores numéricos, como uma relação entre dois conjuntos finitos. A partir do século XVII o estudo matemático do conceito de função começa a ganhar importância, graças ao trabalho e esforço de vários matemáticos de renome como: Descartes, Leibniz, Johann Bernoulli, ... e por volta de 1750 por Leonhard Euler que deu a primeira definição rigorosa da noção de função, sistematizando também o uso da notação $f(x)$.

Hoje, todo o cálculo diferencial e integral desenvolvido por Isaac Newton e Leibniz no século XVII e aperfeiçoado ao longo dos séculos por vários matemáticos, principalmente por Auguste Cauchy por volta de 1820, gira em

torno de dois conceitos fundamentais: o conceito de função e o conceito de limite.

Neste capítulo, introduzimos o conceito de função a partir da modelagem matemática de um exemplo prático. Então, estamos interessados na transição da modelagem matemática deste exemplo prático para a linguagem

matemática funcional. A seguir, daremos uma definição matemática rigorosa do conceito geral do conceito de função. E também, apresentamos algumas propriedades gerais, que são importantes para a Introdução ao Cálculo e, de forma mais ampla, para o ensino da matemática do Cálculo I e II, e da análise matemática em geral.

5.2 Modelo prático e linguagem de função

5.2.1 Modelo de Atividade Prática: Curva de temperatura

Um aparelho possibilitou elevar a temperatura de uma sala, continuamente de 6 horas até 24 horas. Os pontos marcados em negrito na curva indicam leituras exatas (veja a curva de temperatura).

1. a) Dê a temperatura às 8h00 e às 14h00.

   b) A que horas a temperatura é (aproximadamente) 3°C?

   c) A que horas a temperatura é (aproximadamente) -2° C?

   d) A que horas a temperatura é (aproximadamente) 4°C?

2. a) Em que faixa(s) de horas a temperatura está aumentando?

b) Em que faixa(s) de horas a temperatura está diminuindo?

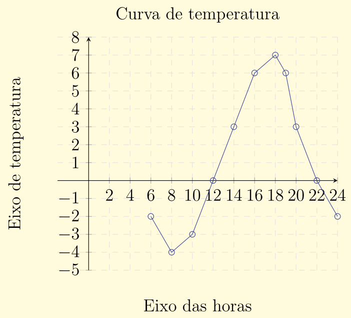
3. a) A que horas a temperatura é maxima?

b) A que horas a temperatura é mínima?

c) Quais s ão as temperaturas extremas?

4. a) Em que intervalo de tempo a temperatura é maior ou igual a 6º C?

b) Em qual(s) intervalo(s) a temperatura é negativa?



5.2.2 Modelagem Matemática: Da atividade prática à linguagem funcional

Agora vamos apresentar a modelagem matemática do exemplo anterior. Nosso objetivo é de introduzir a linguagem básica relacionada com a noção de função, através do modelo matemático da curva de temperatura.

Por um lado, o objetivo é modelar matematicamente as perguntas e respostas anteriores, relacionando com a situação da curva de temperatura. Por outro lado, é uma questão de familiarizar os alunos com a linguagem matemática ligada à noção de função, através da curva de temperatura, em que a temperatura é considerado uma função.

1 - Definição de função e definição de Domínio.

A partir da curva de temperatura, podemos deduzir dois conceitos matemáticos importantes, a saber: a noção de função ligada a curva de temperatura e a noção do domínio de uma função.

Temperatura em função de tempo	**Formulação Matemática**
A temperatura depende da hora: $$T\ : h \mapsto T(h).$$ Isto é, a temperatura é em função da hora do dia.	A temperatura é representada como uma função: $$f\ : x \mapsto f(x),$$ em que x representa a hora e $f(x)$ é a temperatura.
A temperatura foi medida entre 6h e 24h. **Nota:** fora deste período de tempo não sabemos a temperatura.	O intervalo $[6, 24]$ é chamado de **domínio de definição** da função f, e é notado $D(f) = [6, 24]$. A função f assume valores reais, dizemos que $\mathbb{R}$ é **contradomínio de definição** de f.

A função temperatura f não está definida fora de [6, 24], isto é, se x não estiver neste intervalo, então $f(x)$ não faz sentido ou não existe. Por outro lado, como o contradomínio de uma função f (função de temperatura) é o conjunto $\mathbb{R}$ (a temperatura pode ser positiva ou negativa), dizemos que f **é uma função real.**

Além disso, o domínio da função f (isto é, [6, 24]) é também um subconjunto de $\mathbb{R}$, isto é, $D(f) \subset$ R, dizemos que f **é uma função real de variável real**. Funções, como está serão objeto de estudo de Introdução ao Cálculo, e em geral dos Cálculos I e II.

Observação 5.1 *Frequentemente, mas nem sempre, a regra que define y = f(x) como função de x é dada por uma expressão analítica. No entanto, a função pode estar perfeitamente definida sem que tenhamos uma "fórmula" explícita, o que é o caso da função da temperatura.*

Observação 5.2 *Pelo fato do elemento f(x) (temperatura) estar associado a x (hora), escrevemos também "y = f(x)". Esta é a notação mais utilizada de função, apesar de não indicar os conjuntos.*

Observação 5.3 *O número* $x \in [6, 24]$ *(temperatura) é chamado "variável independente" e o número* $y = f(x) \in \mathbb{R}$ *é chamado "variável dependente".*

2- Imagem e Antecedente.

De acordo com a Observação 5.3, o número x ("variável independente") e o número $y = f(x)$ ("variável dependente") têm papéis importantes para a função f. Assim, é necessário dar-lhes uma denominação adequada, que será útil para o futuro.

Temperatura em função de tempo	**Formulação Matemática**
A temperatura às 8h é -4^oC. A temperatura às 18h é de 7^oC.	Com a função f escrevemos: $f : 8 \mapsto f(8) = -4$ ou $f(8) = -4$ $f : 18 \mapsto f(18) = 7$ ou $f(18) = 7$, Dizemos que: A **imagem** de 8 por f é igual a -4, A **imagem** de 18 por f é igual a 7.
A temperatura às 8h é -4^oC. A temperatura às 18h é de 7^oC.	Diz-se também que: 8 é o **antecedente** de -4, 18 é o **antecedente** de 7.

O contradomínio da função f (função temperatura), denotado por $C(f)$, é o conjunto:

$$C(f) = \{f(x), x \in [6, 24]\} = \{y \in \mathbb{R}, y = f(x), \text{ para algum } x \in [6, 24]\}.$$

Por outro lado, a expressão "$f(x)$ é a imagem de x" significa que $f(x)$ é a imagem do elemento x, pela função f. O contradomínio é formado pelas imagens $f(x)$, onde $x \in D(f)$.

Observação 5.4 *Para caracterizar uma função não basta conhecer somente a lei que a cada elemento do domínio associa um elemento no contradomínio. É preciso, além disso, estar claro quais são estes conjuntos, isto é: o Domínio e o Contradomínio.*

3- Antecedentes e equações.

O gráfico, que é o "retrato" da função temperatura f, permite responder as perguntas: "A que horas a temperatura é (aproximadamente) $3°C$? $-2°C$? $4°C$?" Ou o equivalente a resolver equações definidas pela função f do tipo $f(x) = k$, onde $k = 3$, -2 ou 4. Para nossa modelização matemática, a situação é apresentada da seguinte forma

Temperatura em função de tempo	**Formulação Matemática**
A temperatura é de 3^oC às 14h e 20h, ou seja: $T(h) = 3^o$C quando $h = 14$h ou $h = 20$h.	Os antecedentes de 3 são 14 e 20. Também é dito que a **Equação** $f(x) = 3$ admite soluções $x = 14$ ou $x = 20$.
A temperatura é de cerca de -2^oC às 6h, 11h e 20h, ou seja: $T(h) = -2^o$C quando h = 6h, h = 11h ou h = 24h.	Os antecedentes de -2 são 6, 11 e 20. Também dizemos que a **Equação** $f(x) = -2$ tem para soluções $x = 6$, $x = 11$ ou $x = 24$.

Observação 5.5 *Usando o processo matemático, podemos dizer que resolvemos graficamente as duas equações $f(x) = 3$* e *$f(x) = -2$.*

4- Antecedentes e inequações.

Também, o gráfico que é o retrato da função temperatura *f*, permite responder as perguntas: ”Em que intervalo de tempo a temperatura é maior ou igual a 6°*C*?”ou ”Em que intervalo de tempo a temperatura é negativa?", ou que equivale a resolver inequações definidas pela função *f* do tipo $f(x) \geq k$ ou $f(x) \leq k$. Para nossa modelização matemática, a situação é apresentada da seguinte forma.

Temperatura em função de tempo	Formulação Matemática
1) A temperatura é maior ou igual às 6°C entre ás 16h e às 19h. 2) A temperatura é negativa entre 6h e 12h e entre às 22h e às 24h.	1) A **Inequação** $f(x) \geq 6$ tem para soluções x tais que $16 \leq x \leq 19$. 2) A **Inequação** $f(x) \leq 0$ tem para soluções x tais que $6 \leq x \leq 12$ ou $22 \leq x \leq 24$.

Observação 5.6 *Usando o processo matemático, podemos dizer que resolvemos graficamente as duas inequações* $f(x) \geq 6$ e $f(x) \leq 0$.

5- Variações da função temperatura.

Para as variações da temperatura, o gráfico da função temperatura permite visualizar melhor o comportamento da função *f*, seu crescimento ou diminuição. Usando a nossa modelização matemática, a descrição matemática do crescimento ou diminuição da temperatura é descrita como segue.

Temperatura em função de tempo	Formulação Matemática
A temperatura está crescendo entre 8h e 18h, ou seja, se por exemplo $h_1 = 10$h e $h_2 = 14$h então $T(h_1) \leq T(h_2)$. De maneira geral, se $8 \leq h_1 \leq h_2 \leq 18$, temos $T(h_1) \leq T(h_2)$.	A função f é crescente no intervalo [8, 18], isto é, se $8 \leq x_1 \leq x_2 \leq 18$, então temos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Assim, investigamos graficamente o **crescimento** da função temperatura num determinado subconjunto de [6, 24].

Temperatura em função de tempo	**Formulação Matemática**
A temperatura está decrescendo entre 6h e 8h, ou seja, se por exemplo $h_1 = 6h30$ e $h_2 = 7$h, então $T(h_1) \geq T(h_2)$. De maneira geral, se $6 \leq h_1 \leq h_2 \leq 8$, temos $T(h_1) \geq T(h_2)$	A função f é decrescente no intervalo $[6, 8]$, isto é, Se $6 \leq x_1 \leq x_2 \leq 8$ então temos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Também, investigamos graficamente o **decrescimento** da função temperature num determinado subconjunto de [6, 24].

Observação 5.7 *Podemos notar que:*

1. As variações de temperatura entre 6h e 24h foram descritas (graficamente).

2. Estudamos (graficamente) as variações da função f no intervalo [6, 24]

6- Extremos: o Máximo.

O que é extremo? Extremo é uma palavra de origem latina "**extremus**", e que significa o ponto mais distante ou o limite. Muitas vezes a matemática é utilizada para tratar problemas reais, existem várias ferramentas para detectar os pontos extremos. No gráfico da função de temperatura, temos pontos extremos baixos e pontos extremos altos.

No gráfico anterior da função de temperatura podemos ver que o ponto mais alto é o ponto de abscissa $x = 18$, este ponto é designado por **máximo**.

Temperatura em função de tempo	**Formulação Matemática**
A temperatura máxima é de 7^oC é atingido às 18h, ou seja. $T(18) = 7$C e para qualquer hora h entre 6h e 24h temos $T(h) \leq 7^o$C.	A função f admite um máximo igual a 7, que é atingido ás $x_0 = 18$, isto é, $f(x_0) = f(18) = 7$ e para todos x em $[6; 24]$ temos $f(x) \leq 7$.

De fato, no gráfico da função temperatura, podemos observar um ponto mais alto de abscissa em $x = 18$, que em matemática chamamos de **máximo absoluto**.

Observação 5.8 *Na verdade, o máximo absoluto de uma função f quando existe, representa o valor máximo do conjunto imagem Im(f) da função f.*

7- **Extremos: o Mínimo.**

Também, no gráfico anterior da função de temperatura podemos ver que o ponto mais baixo é o ponto de abscissa $x = 8$, este ponto é designado por **mínimo**.

Temperatura em função de tempo	**Formulação Matemática**
A temperatura mínima é de -4^oC é atingida às 8 horas. $T(8) = -4^o$ C e para qualquer hora h entre 6h e 24h temos $T(h) \geq -4^o$C. As temperaturas -4^oC e 7^OC são as temperaturas extremas entre 6h e 24h.	A função f admite um mínimo igual a -4, que é alcançado em $x_0 = 8$, ou seja, $f(x_0) = f(8) = -4$ e para todos x em $[6; 24]$ temos $f(x) \geq -4$. O máximo e o mínimo da função f no intervalo $[6; 24]$ são chamados de extremos de f em $[6; 24]$.

De fato, no gráfico da função temperatura, temos um ponto mais baixo de abscissa $x = 8$, que em matemática chamamos de **mínimo absoluto**.

Observação 5.9 *Na verdade, o mínimo absoluto de uma função f quando existe, representa o valor mínimo do conjunto imagem Im(f) da função f.*

Extremos absolutos e Extremos relativos. No entanto, existem outras funções que admitem outros pontos onde a função atinge o que se denomina **mínimo relativo (ou local)** ou **máximo relativo (ou local)**. A distinção entre extremos absolutos e relativos é simples:

a) Um extremo absoluto, não é mais que o local onde a função atinge o ponto mais alto ou o ponto mais baixo. Como no caso do gráfico da temperatura onde podemos ver que o ponto mais alto é o ponto de absissa $x = 18$, este ponto é designado por **máximo absoluto**. Em contrapartida, o ponto representa o ponto mais baixo de abscissa $x = 8$, designado por **mínimo absoluto**.

b) Por outro lado, para outros pontos onde a função atinge um mínimo local (quando eles existem), onde a função atinge um mínimo local, por exemplo, o ponto é o mais baixo naquela "vizinhança" (ou intervalo), assim sendo, recebe o nome de mínimo relativo. Quanto ao ponto que é o mais alto junto dos seus vizinhos e assim sendo recebe o nome de máximo relativo.

Uma função pode ter vários máximos e mínimos relativos, no entanto, só pode ter um máximo absoluto e um mínimo absoluto. E a caracterização dos extremos será estudada de uma forma muito rigorosa usando o conceito de derivada no Cálculo I.

8- Quadro de variações. Uma quadro de variação da função temperatura T permite resumir seu comportamento, em seu domínio [0; 24].

Isso permite destacar os intervalos de [0; 24] em que T é estritamente crescente, os intervalos em que T é estritamente decrescente, usando setas inclinadas para cima ou para baixo, bem como os pontos em que a função temperatura T admite máximos e mínimos relativos.

Temperatura em função de tempo	**Representação do quadro de variações da temperatura T**
Variações na leitura da temperatura podem ser formuladas usando o seguinte quadro:	$\begin{array}{c\|ccccccc} h & 6 & & 8 & & 18 & & 24 \\ \hline & -2 & & & & 7 & & \\ T(h) & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & & & -4 & & & & -2 \end{array}$

A representação da quadro de variações da função de temperatura T, facilita, entre outras coisas, a análise de perspectivas de temperatura. Esta representação, permite visualizar melhor o comportamento da função, seu crescimento e seus máximos e mínimos.

Também, para a formulação Matemática, utiliza-se um quadro de variação da função para sintetizar o seu comportamento, no seu domínio [0; 24]. Isso permite destacar os intervalos de [0; 24] onde f é estritamente crescente, e os intervalos onde f é estritamente decrescente, usando setas inclinadas para cima ou para baixo, bem como os pontos onde a função f admite máximos e mínimos relativos.

Formulação Matemática	**Representação do quadro de variações da função f**
Quadro de variação de f: é o quadro que resume de forma "sintética" certas propriedades da função f.	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & 6 & & 8 & & 18 & & 24 \\ \hline & -2 & & & & 7 & & \\ f(x) & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & & & -4 & & & & -2 \end{array}$

Em relação ao estudo do quadro de variação de uma função real f de variável x, de domínio $D(f)$, podemos afirmar que com este quadro podemos visualizar a monotonia da função f nos intervalos I, em que $I \subset D(f)$. Assim, podemos estudar o sentido da variação de uma função através do quadro de variação que a representa ou com o recurso ao cálculo diferencial. Por vezes, utiliza-se um quadro de variação da função para sintetizar o seu comportamento, no seu domínio, explicitando neste os intervalos onde é estritamente crescente, os intervalos onde é estritamente decrescente, através de, respetivamente, setas inclinadas para cima ou para baixo, bem como os pontos onde a função admite máximos e mínimos relativos.

Em Cálculo, uma função $f : E \to \mathbb{R}$, onde E subconhjunto de $\mathbb{R}$, é monótona quando ela preserva ou inverte a relação de ordem ≤. Intuitivamente, a representação gráfica de uma função monótona em um intervalo é uma curva que constantemente "sobe" ou constantemente "desce". Se este aspecto gráfico é imediatamente revelador, não é, contudo, a única forma em que a propriedade da monotonia se revela: uma função monotônica é uma função que tem sempre o mesmo efeito na relação de ordem:

- Para uma função crescente, a ordem que existe entre duas variáveis x1 e x2, encontra-se na ordem das suas imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$: falamos de uma função crescente.

- Para uma função decrescente, a ordem das imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$ é invertida em relação à ordem dos antecedentes x_1 e x_2: falamos de uma função decrescente.

De forma rigorosa, uma função $f : E \to \mathbb{R}$, onde E subconhjunto de $\mathbb{R}$, é chamada de monótona quando ela preserva ou inverte a relação de ordem ≤, isto é,

- Quando f preserva a relação de ordem $\leq$ temos: $x_1 \leq x_2$ implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Assim, a função f é chamada de função crescente.

- Quando f inverte a relação de ordem $\leq$ temos: $x_1 \leq x_2$ implica que $f(x_1) \geq f(x_2)$, ou $f(x_2) \leq f(x_1)$. Assim, a função f é chamada de função decrescente.

Quando a relação de ordem $\leq$ é substituída por $<$, dizemos que a função f é estritamente monótona, em muitos contextos, isso fica implícito.

9- Tabela de valores e curva da função temperatura.

Os conjuntos de pares ordenados são úteis para descrever várias situações em Matemática e em outras áreas; assim é importante de saber como construir gráficos de funções a partir de um número finito de pares ordenados, da descrição de curvas no plano, ou de como procurar a temperatura em função de tempo ou uma rua no mapa de uma cidade. No caso da curva de temperatura a tabela dos pares ordenados (h, T), é usada para a construção da curva de temperatura da atividade:

<table>
<tr><th>Temperatura em função de tempo</th><th>Tabela de valores da temperatura T</th></tr>
<tr><td>A curva de temperatura foi dada em um gráfico, onde a hora é lida no eixo horizontal graduado e a temperatura no eixo vertical graduado, do plano cartesiano. Além disso, ambos os eixos são perpendiculares.</td><td>Por outro lado, a curva de T é obtida juntando os pontos (h, T) em negrito, correspondendo aos registros exatos, dados pela seguinte tabela:
<table>
<tr><td>h</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>22</td><td>24</td></tr>
<tr><td>T</td><td>-2</td><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td><td>6</td><td>3</td><td>0</td><td>-2</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Podemos notar que cada coluna nesta tabela de temperature representa um ponto em negrito na curva de temperatura *T*, que está associado a uma leitura exata.

A situação anterior, da tabela de valores da função temperatura *T*, pode ser modelada matematicamente para a função *f*, associado a função de temeratur *T*, da seguinte forma:

<table>
<tr><th>Formulação Matemática</th><th>Tabela de valores da função f</th></tr>
<tr><td>A curva da função f é desenhada no plano cartesiano. Essa curva, denotada por C_f, é o conjunto de pontos $M(x,\, y)$, onde a equação da curva é $y = f(x)$.</td><td>A construção da curva da função f é obtida juntando os pontos $(x_j, f(x_j))$, correspondendo aos pontos dados pela seguinte tabela:
<table>
<tr><td>x</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>22</td><td>24</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>-2</td><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td><td>6</td><td>3</td><td>0</td><td>-2</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Isto é, a construção da curva C_f da função *f* é obtida unindo pontos bem escolhidos de abscissas x_j dos quais $f(x_j)$ foi calculado. Daí o interesse de considerar uma tabela de valores. Assim, podemos notar que cada coluna nesta tabela representa um ponto em negrito na curva, que está associado a uma leitura exata.

De maneira geral, a tabela de valores é importante para conseguir (com lápis e papel) o esboço do gráfico da função *f*, que é uma representação da função por desenho ou figura geométrica, mediante a associação, um a um, dos pares ordenados de números reais com pontos de um plano, usando um sistema de eixos coordenados (como foi feito para números reais e pontos de uma reta).

5.3 Definição de uma Função

5.3.1 Definição de uma função

Definição 5.1 *Sejam D e F subconjuntos de* $\mathbb{R}$. Uma função:

$$f: D \to F \subset \mathbb{R},$$

é uma **Lei** *ou* **Regra** *que a cada elemento de D faz corresponder um único elemento de F.*

O conjunto D é chamado **domínio** *de f e é denotado por D(f).*

F é chamado de **contradomínio** *de f.*

Observação 5.10 *Em outras palavras, como visto acima com a atividade de temperatura, uma função f de uma variável real é um mecanismo que, a um número real x, chamado de variável, associa um único número real construído a partir de x, denotado f(x).*

Por exemplo, sejam $D = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ e $f: D \to \mathbb{N}$ uma lei definida por:

$$f(x) = 2x + 1, \text{ para todo } x \in D.$$

1. f é uma função: Seja $n \in D$, o número $f(n) = a$ é único, isto é, se $f(n) = a$ e $f(n) = b$ temos $a = 2n+1$ e $b = 2n+1$, assim $a = b = 2n+1$

Então, temos que f é uma função.

2. O domínio de f é $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

3. O contradomínio de f é $\mathbb{N}$.

Outro exemplo, sejam $D = \mathbb{N}$ e $f: D \to \mathbb{N}$ uma lei definida por:

$$f(x) = 2x + 1, \text{ para todo } x \in D.$$

1. f é uma função: Seja $n \in D$, o número $f(n)$ = a é único, isto é, se $f(n) = a$ e $f(n) = b$ temos $a = 2n+1$ e $b = 2n+1$, assim $a = b = 2n+1$

Então, temos que f é uma função.

2. O domínio de f é $D = \mathbb{N}$.

3. O contradomínio de f é $\mathbb{N}$.

5.3.2 Definições: Imagem e Conjunto Imagem

Daremos aqui algumas definições e propriedades relacionadas ao conceito de função.

Definição 5.2 Imagem de uma função. *Sejam E e F dois subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *e* $f : E \to F$ *uma função.*

1. Dado $x \in E$, o elemento $f(x) \in F$ é chamado de valor da função no ponto x ou de **imagem** *de x por f.*

2. O conjunto de todos os valores assumidos pela função f é chamado **conjunto imagem** *de f e denotado por Im(f).*

Por exemplo, sejam $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $F = Z$ e função:

$$f : E \to F,$$

definida pela regra: **a cada elemento** x **de** E **faz corresponder o dobro mais um**. Então: a regra que define f é $f(x) = 2x + 1$; assim temos:

1. A imagem do elemento 1 é 3, de 2 é 5, de 3 é 7, de 4 é 9 e de 5 é 11;

2. O domínio de f é $D(f) = E$;

3. O conjunto imagem de f é $Im(f) = \{3, 5, 7, 9, 11\}$.

Exemplo 5.1 *Sejam* $D = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ *e* $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ *uma lei definida por:*

$$f(x) = 2x + 1, \text{ para todo } x \in D.$$

1. f *é uma função: a imagem de* $n \in D$ *é o número* $f(n) = 2n + 1$*,*

2. O domínio de f *é* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$*.*

3. O conjunto imagem de f *é* $Im(f) = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$*, que é o conjunto dos números ímpares entre* 3 *e* 15*.*

Exemplo 5.2 *Sejam* $D = \mathbb{N}$ *e* $f : D \rightarrow R$ *uma lei definida por:*

$$f(x) = 2x + 1, \text{ para todo } x \in D.$$

1. f *é uma função: a imagem de* $n \in D$ *é o número* $f(n) = 2n + 1$*,*

2. O domínio de f *é* $D = \mathbb{N}$*.*

3. O conjunto imagem de f *é* $Im(f) = 2\mathbb{N} + 1$*, que é o conjunto dos números ímpares.*

Exemplo 5.3 *Seja a função* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = x^2,$$

1. f *é uma função: a imagem de* $x \in \mathbb{R}$ *é o número real* $f(x) = x2$*,*

2. O domínio de f *é* $D = \mathbb{R}$*.*

3. O conjunto imagem de f *é* $Im(f) = [0,+\infty[$*, que é o conjunto dos números positivos ou nulos.*

Quando trabalhamos com subconjuntos de R, é usual caracterizar a função apenas pela regra ou fórmula que a define. Neste caso, entende-se que o domínio de f é o conjunto de todos os números reais para os quais a função está definida.

5.3.3 Representação Gráfica de uma Função

Para entender, pelo menos de maneira qualitativa, a dependência de uma função $f(x)$ em relação à sua variável x, podemos representar a função no plano cartesiano, via o seu gráfico. O gráfico permite extrair a informação essencial contida na função, de maneira intuitiva, geométrica. Para uma função f com domínio $D(f)$, esboçar o gráfico de f consiste em traçar todos os pontos do plano cartesiano da forma $(x, f(x))$, onde $x \in D(f)$.

Definição 5.3 Representação gráfica de uma função. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D \subset \mathbb{R}$. A Representação gráfica da função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano, onde a abscissa x pertence ao domínio D da função f e a ordenada y é dada por:*

$$y = f(x).$$

A expressão $y = f(x)$ é chamada **equação da curva** *da função f.*

Como fazer o gráfico de uma função. Construaímos uma tabela de valores de f, da seguinte maneira:

1. Dando valores para abscissas x_1, x_2, ..., xm obtemos os valores correspondantes $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_m)$. Daí temos o que chamamos de tabela de valores:

x	x_1	x_2	.	.	.		.	.	.	.	x_m
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	.	.	.	.	.	.	.	.	$f(x_m)$

Cada par ordenado $(x_j , f(x_j))$ representa um ponto $A_j(x_j , y_j)$ da curva da função f.

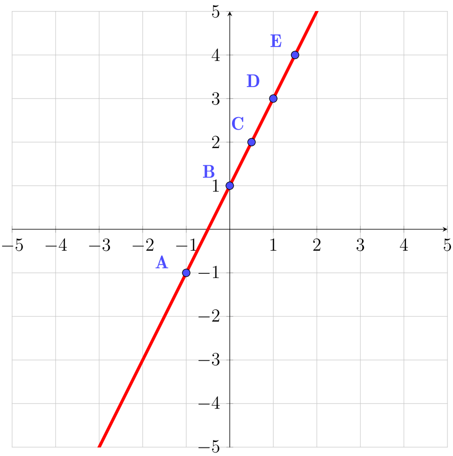
2. A construção da curva C_f é obtida unindo todos os pontos da tabela dos valores.

Observação 5.11 *De modo geral, para construir o gráfico de uma função com lápis e papel, não basta encontrarmos alguns pontos dando alguns valores* *para a variável independente. No próximo capítulo estudaremos as funções elementares e faremos o esboço de seus gráficos utilizando as propriedades destas funções. Também, o conhecimento dos gráficos das funções elementares é importante. Por outro lado, um outro processo de construção de gráficos é a utilização de programas computacionais especificamente criados para este fim.*

Exemplo 5.4 *Seja a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 2x + 1$. *Considerar a seguinte tabela de valores:*

x	-1	0	0.5	1	1.5
$f(x)$	-1	1	2	3	4

Unindo os pontos da tabela dos valores escolhidos, isto é, A(-1,-1), B(0, 1), C(0.5, 2), D(1, 3) *e* E(1.5, 4), *conseguimos a construção da curva* C_f *da função* f:



Observamos que a curva representativa da função $f(x) = 2x+1$ é uma linha reta, por que os pontos A(-1,-1), B(0, 1), C(0.5, 2), D(1, 3) e E(1.5, 4), estão alinhados. De fato, no capítulo sobre as funções usuais, veremos que, para as funções do tipo $f(x) = ax + b$ a curva representativa é uma linha reta. E, neste caso, precisamos apenas de dois pontos para desenhar sua curva representativa, ou seja, na tabela de valores estaremos satisfeitos com apenas dois valores

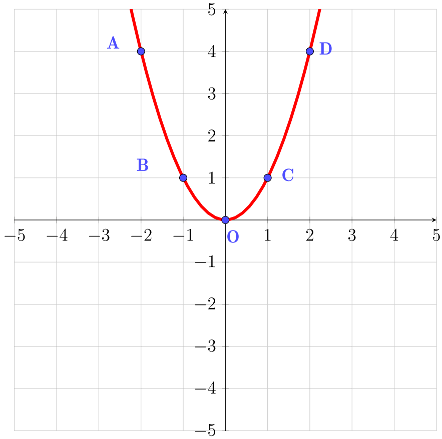
Exemplo 5.5 *Seja a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = x^2.$$

Considerar a seguinte tabela de valores:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

Unindo os pontos da tabela dos valores escolhidos, isto é, $(-2, 4)$*,* $(-1, 1)$*,* $(0, 0)$*,* $(1, 1)$*,* $(2, 4)$ *conseguimos a construção da curva* C_f *da função* f*:*



5.4 Exercícios

Exercício 5.1 Linguagem: Imagem e antecedente. *Seja f uma função. A frase "-5 é a imagem de 4 pela função f"equivale a expressão matemática "*$f(4) = -5$*".*

A frase "-5 é o antecedente de 4 pela função f"equivale a expressão matemática"$f(4) = -5$*".*

Da mesma maneira, traduzir simbolicamente por uma igualdade as seguintes frases:

1. 2 é a imagem de 0 pela função f.

2. Um antecedente pela função h de -3 é 5.

3. As imagens de -3 e 5 por g são zero

4. - 4 é um antecedente de 2 pela função u.

5. 46 é a imagem de 12 pela função v.

6. Um antecedente pela função w de -8 é 17.

Solução.

1. Para "2 é a imagem de 0 pela função f" escrevemos: $f(0) = 2$
2. Para "Um antecedente pela função h de -3 é 5" escrevemos: $h(5) = -3$.
3. Para "As imagens de -3 e 5 por g são zero" escrevemos: $g(-3) = 0$ e $g(5) = 0$.
4. Para - 4 é um antecedente de 2 pela função u" escrevemos: $u(-4) = 2$.
5. Para "46 é a imagem de 12 pela função v" escrevemos: $v(12) = 46$.
6. Para "Um antecedente pela função w de -8 é 17" escrevemos: $w(17) = -8$.

Exercício 5.2 Domínio, imagem e antecedente. Seja f a função definida por $f(x) = 2x^2$.

1. *Qual é o domínio da função f?*
2. *Calcular as imagens por f dos reais 0; 2; - 4.*

3. *Verifique se 4 tem dois antecedentes por f.*

4. *Por que - 4 não é a imagem de qualquer número real?*

5. *Quais são os números reais que têm $\frac{8}{5}$ por imagem por f?*

Solução. Seja f a função definida por $f(x) = 2x^2$.

1. O domínio da função f é $D_f = \mathbb{R}$, de fato, para todo número real x, podemos calcular x^2, logo a imagem $f(x) = 2x^2$ existe. Em outra palavras, todo número real x possui uma imagem pela função f.

2. As imagens dos reais 0; 2 e - 4 são dadas por: $f(0) = 2 \times 0^2 = 0$; $f(2) = 2 \times 2^2 = 8$ e $f(-4) = 2 \times (-4)^2 = 32$.

3. Os antecedentes de 4 por f são tais que $f(x) = 2x^2 = 4$, assim, temos $x^2 = 2$. Então, os antecedentes de 4 são $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

4. Como $f(x) = 2x^2 \geq 0$, para todo x em $\mathbb{R}$, então o número - 4 não é a imagem de qualquer número real, pela função f.

5. Seja x um número real que tem $\frac{8}{5}$ por imagem por f, então $f(x) = 2x^2 = \frac{8}{5}$. Assim, temos $x^2 = \frac{4}{5}$, e logo $x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ou $x = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Exercício 5.3 Imagen, antecedente e equações. *Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - 5x$.*

1. Fatorar f(x).

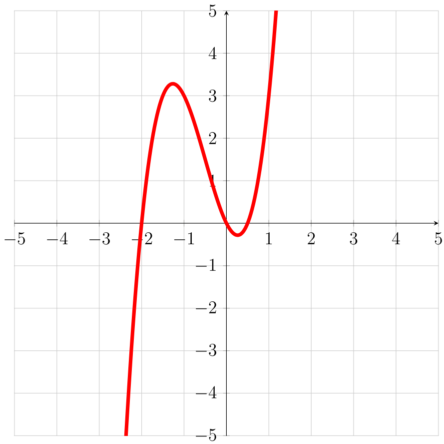
2. Calcule $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(\frac{4}{3})$.

3. Determine por cálculo os antecedentes de 0.

Solução. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - 5x$.

1. 1. A fatorização de $f(x)$ é dada por $f(x) = x^2 - 5x = x(x - 5)$.
2. 2. Os números $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(\frac{4}{3})$ são dados por: $f(0) = 0\times(0\text{-}5) = 0$; $f(1) = 1\times(1\text{-}5) = \text{-}4$; $f(2) = 2\times(2\text{-}5) = \text{-}6$; $f(3) = 3\times(3\text{-}5) = \text{-}6$; $f(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}\times(\frac{4}{3}\text{-}5) = \frac{4}{3}\times(-\frac{11}{3})$. Logo, obtemos $f(\frac{4}{3}) = -\frac{44}{9}$
3. Seja x um antecedente de 0, então $f(x) = x^2 - 5x = x(x - 5) = 0$. Logo, os antecedentes que verificam as equações são $x = 0$ ou $x - 5 = 0$. Então, os antecedentes de 0 são $x = 0$ ou $x = 5$.

Exercício 5.4 Leitura gráfica. *A curva abaixo é a curva representativa de uma função f.*



Corrija os erros na tabela de valores:

Solução. Seguinte o gráfico da função f, os valores exatos da tabela:

x	-2	-1	0	$0,5$	1
$f(x)$	-1	4	0	2	$3,5$

Exercício 5.5 Leitura gráfica. *Seja a função $f : [-4, 2] \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3.$$

1. Completar a seguinte tabela de valores

x	-4	-3	-2	0	1	2
$f(x)$						

2. Determine um valor aproximado:

- *para as imagens de 1,5 e -1,5*
- *para o(s) antecedente(s) de -0,5*

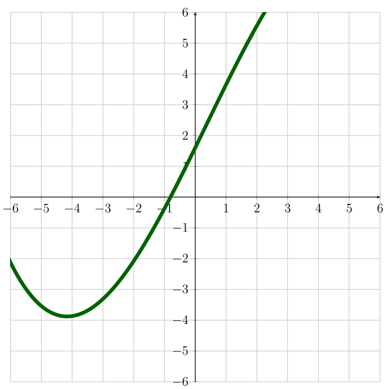
Solução. 1. A tabela de valores é dada por:

x	-4	-3	-2	0	1	2
$f(x)$	-1	$\frac{3}{4}$	2	3	$\frac{11}{4}$	2

2. Os valores aproximados são dados com uma aproximação de 0,01. Assim:

- Para os valores aproximados das imagens de 1,5 e -1,5 temos $f(1,5) \approx 2,44$ e $f(-1,5) \approx 2,44$.
- Para os valores aproximados do(s) antecedente(s) de -0,5 temos; $x_1 \approx -3,74$ e $x_1 \approx 3,74$.

Exercício 5.6 Leitura gráfica. *Seja f uma função definida sobre R, cuja curva representativa gráfica é dada abaixo:*



1. Por leitura gráfica dê as imagens $f(-4), f(-2), f(0), f(2), f(3,5), f(4), f(4,5), f(5)$.

2. Por leitura gráfica dê os antecedentes de 2,5 e -5.

3. Dê o conjunto das abcissas dos pontos cujas ordenadas são maior ou igual a 3.

4. Dê o conjunto de abscissas dos pontos da curva cuja ordenada é estritamente menor que -2,5.

5. Faça o quadro de variações da função f. Especifique os possíveis extremos da função f.

Solução.

1. As imagens são dadas por:

$$f(-4) \approx 0, f(-2) \approx -2,2, f(0) \approx 1, f(2) \approx 4,5, f(3,5) \approx 4,5, f(4) \approx 3,5, \\ f(4,5) \approx 2, f(5) \approx 0.$$

2. Para os antecedentes de 2,5 e -5, temos:

a. Os antecedentes de 2.5 são: $\approx -4,5; \approx 0,8$ e $\approx 4,4$.

b. O antecedente de - 5 é: $\approx 5,8$.

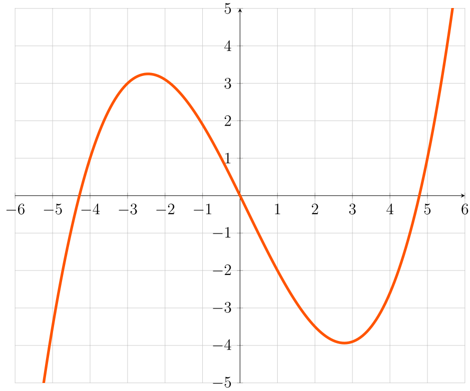
3. O conjunto das abcissas dos pontos cujas ordenadas são maior ou igual a 3 é o intervalo: $]-\infty, -4,7] \cup [1; \frac{9}{2}]$

4. O o conjunto de abscissas dos pontos da curva cuja ordenada é estritamente menor que -2,5 é o intervalo: $]5,5; +\infty[$

5. O quadro de variações da função f, com os extremos é dado por:

x	$-\infty$		$-2,75$		$2,75$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2,2$	$\nearrow$	$4,75$	$\searrow$	$-\infty$

Exercício 5.7 Leitura gráfica. *Seja f uma função, cuja curva representativa é dada abaixo:*



1. *Determine as imagens de f em : 2; -2 e 0. Conforme o Exercácio 1.1, faça uma frase para explicar essas imagens encontradas.*
2. *Resolva a equação $f(x) = 2$.*
3. *Resolva a equação $f(x) = -2$.*
4. *Resolva as desigualdades $f(x) > 2$.*
5. *Resolva as desigualdades $f(x) < -1$.*
6. *Para quais valores de k a equação $f(x) = k$, tem três soluções*
7. *Faça o quadro de variações da função f. Especifique os possíveis extremos da função f.*

Solução.

1. As imagens de 2; -2 e 0 com *f* são:

   a. Temos $f(2) = -3,5$, e dizemos também que 2 é o antecedente de -3,5.

b. Temos $f(-2) = 3,2$, e dizemos também que -2 é o antecedente de 3,2.

c. Temos $f(0) = 0$, e dizemos também que 0 é o antecedente de 0.

2. As soluções da equação $f(x) = 2$ são: $x_1 = -1$; $x_2 = -3,8$ e $x_3 = 5,2$.

3. As soluções da equação $f(x) = -2$ são: $x_1 = 1$; $x_2 = 4,25$ e $x_3 = -4,75$.

4. O conjunto das soluções da inequação $f(x) > 2$ é o intervalo: $]-3,8;-1[\cup]5,2;+\infty[$.

5. O conjunto das soluções da inequação $f(x) < -1$ é o intervalo dado por: $]-\infty;-4,3[\cup]0,5;4,5[$.

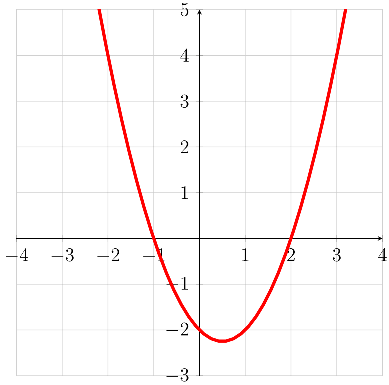
6. A equação $f(x) = k$ tem três soluções para k no intervalo $]-4;3,2[$.

7. O quadro de variações da função f, com os extremos é dado por:

x	$-\infty$		$-2,75$		$2,75$		$+\infty$
			$3,25$				$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-3,75$		

Exercício 5.8 Sinal de uma função.

Seja f a função definida em R por $f(x) = x2 - x - 2$, cuja curva representativa é dada abaixo:



Usando a representação gráfica de f, responda às seguintes perguntas:

1. *Resolva a equação $f(x) = 0$. Verifique pelo cálculo que as imagens dessas soluções verificam a equação $f(x) = 0$*

2. *Dê os intervalos de $\mathbb{R}$ onde a função f verifica $f(x) > 0$.*

3. *Dê os intervalos de $\mathbb{R}$ onde a função f verifica $f(x) < 0$.*

4. *Deduzir o quadro dos sinais da função f.*

Outro método.

1. *Verifique que para todo o real x, $(x - 1)(x + 2) = x^2 - x - 2$. Isto é, $f(x) = (x - 1)(x - 2)$, para todo o real x*

2. *Deduzir os sinais da função f.*

Solução.

1. As soluções gráficas da equação $f(x) = 0$ são $x = -1$ ou $x = 2$. Usando a expressão da função f temos:

$$f(-1) = (-1)2 - (-1) - 2 = 0 \text{ e } f(2) = 22 - 2 - 2 = 0.$$

Logo, as soluções da equação $f(x) = 0$ são $x = -1$ ou $x = 2$.

2. Com o gráfico de f, o conjunto das soluções da inequação $f(x) > 0$ é dado por: $]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$. Usando a expressão da função f temos: $f(x) = (x+1)(x-2)$, assim, $f(x) > 0$ se $x+1 > 0$ e $x-2 > 0$ ou $x+1 < 0$ e $x - 2 < 0$, ou seja, $x > 2$ ou $x < -1$. Logo, para as soluções x da inequação $f(x) > 0$, temos $x \in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$.

3. Com o gráfico de f, o conjunto das soluções da inequação $f(x) < 0$ é dado por: $]-1, 2[$. Usando a expressão da função f temos: $f(x) = (x+1)$

$(x-2)$, assim, $f(x) < 0$ se $x+1<0$ e $x-2>0$ ou $x+1>0$ e $x-2<0$, ou seja, $x < 2$ e $-1 < x$. Logo, para as soluções x da inequação $f(x) < 0$, temos $x \in]-1, 2[$.

4. Usando as respostas das questões 2. e 3. deduzimos que os sinais da função f são:

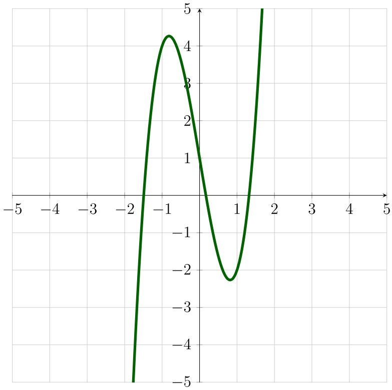
a. $f(x) = 0$, para $x = -1$ ou $x = 2$.

b. $f(x) > 0$, para $x \in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$.

c. $f(x) < 0$, para $x \in]-1, 2[$.

Exercício 5.9 Sinal de uma função.

Seja f a função definida em $\mathbb{R}$, cuja curva representativa é dada abaixo:



Usando a representação gráfica de f, responda às seguintes perguntas:

1. Resolva a equação $f(x) = 0$.

2. Dê os intervalos de $\mathbb{R}$ onde a função f verifica $f(x) > 0$.

3. Dê os intervalos de $\mathbb{R}$ onde a função f verifica $f(x) < 0$.

4. Deduzir os sinais da função f.

Solução. Usando a representação gráfica de f:

1. As soluções da equação $f(x) = 0$ são: $x_1 \approx -1,5$, $x_2 \approx 0,2$ e $x_3 \approx 1,25$.

2. As os intervalos de R onde a função f verifica $f(x) > 0$ são: $]-1,5; 0,2[$ e $]1,25; +\infty[$. Assim, temos $f(x) > 0$ para $x \in]-1,5; 0,2[\cup]1,25; +\infty[$.

3. As os intervalos de R onde a função f verifica $f(x) < 0$ são: $]-\infty; -1,5[$ e $]0,2; 1,25[$. Assim, temos $f(x) < 0$ para $x \in]-\infty; -1,5[\cup]0,2; 1,25[$.

4.Usando as respostas das questões 2. e 3. deduzimos que os sinais da função f são:

a. $f(x) = 0$, para $x_1 \approx -1,5$, $x_2 \approx 0,2$ e $x_3 \approx 1,25$.

b. $f(x) > 0$, para $x \in]-1,5; 0,2[\cup]1,25; +\infty[$.

c. $f(x) < 0$, para $x \in]-\infty; -1,5[\cup]0,2; 1,25[$.

É importante notar que os valores obtidos na leitura gráfica, da curva de função f, são geralmente valores aproximados.

CAPÍTULO 6

Funções Afins

Objetivos

Neste Capítulo apresentamos as funções afins. Mais precisamente, daremos a definição do conceito de função afim e algumas propriedades gerais que são importantes para o estudo de matemática.

6.1 Função constante

Definição 6.1 *Seja k um número real. Uma função constante é toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = k.$$

Isto é, uma função constante é do tipo $f(x) = k$, que associa a qualquer número real x um mesmo número real k.

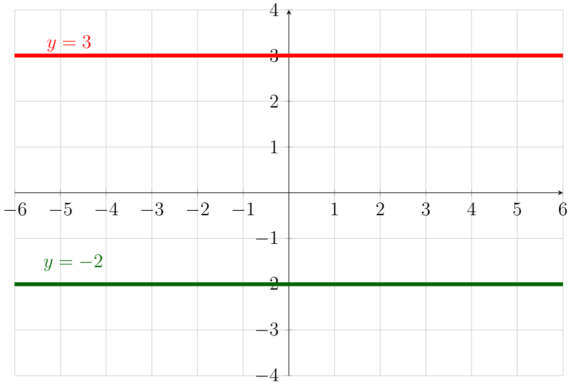
Assim, temos as seguintes propriedades: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função constante definida por $f(x) = k$.

1. O domínio da função constante $f(x) = k$, é $\mathbb{R}$.
2. O conjunto imagem da função constante $f(x) = k$ é o conjunto unitário $Im(f) = \{ k \}$.

Exemplo 6.1 A função f(x) = 3 é uma função constante com k = 3.

A função $f(x) = -2$ é uma função constante com $k = -2$.

A seguir fazemos as suas representações gráficas das duas funções constantes no mesmo plano cartesiano.



6.2 Função identidade

Definição 6.2 *A função identidade é a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

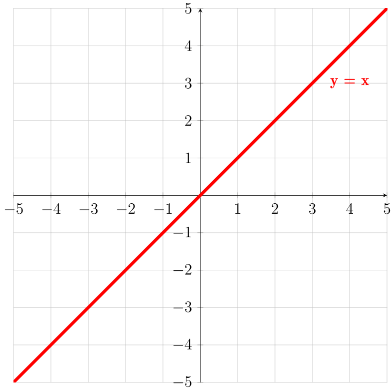
$$f(x) = x.$$

Isto é, a função identidade é a função que associa a qualquer número real x *o número real* x.

Assim, temos as seguintes propriedades:

Proposição 6.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função identidade definida por* $f(x) = x$.

1. *O domínio da função* f, *é* R.
2. *O conjunto imagem da função c* f *é o conjunto* $Im(f) = R$.
3. *O gráfico desta função é uma reta bissetriz do primeiro e terceiro quadrante.*



6.3 Funções afins ou funções de 1º grau

As funções afins são uma generalização das funções constantes e da identidade. Elas são definidas da seguinte maneira:

6.3.1 Definição geral

Definição 6.3 *Seja $a \neq 0$ e b dois números reais. Uma função afim (ou de 1º grau) é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = ax + b.$$

Isto é, uma função afim é do tipo $f(x) = ax + b$, associa a cada número real x o número real $ax + b$, onde:

1. *o número real a é chamado de coeficiente angular.*

2. *o número real b é chamado de coeficiente linear.*

Para as funções afins, temos as seguintes propriedades básicas:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim definida por $f(x) = ax + b$.

1. O domínio da função f é $\mathbb{R}$.

2. O conjunto imagem da função f é o conjunto $Im(f) = \mathbb{R}$.

3. O gráfico desta função é uma reta.

Por exemplo:

1. A função $f(x) = 2x + 3$ é uma função afim.

2. A função $f(x) = -3x + 2$ é uma função afim.

Representação gráfica de uma função afim. Seja f a função afim definida por $f(x) = ax + b$. A representação gráfica de f no plano cartesiano é uma reta. Esta reta tem equação:

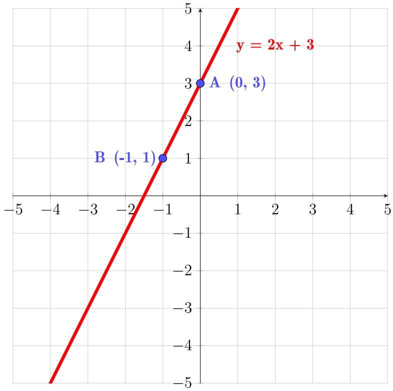
$$y = ax + b.$$

Como a representação gráfica de uma função afim é uma reta, o método básico para construção dessa reta no plano cartesiano, é idêntico à construção das curvas de funções, proposta no Capítulo 5. A regra prática é a seguinte:

Representação gráfica de uma função afim. Para representar graficamente a função $f(x) = ax + b$, montamos uma tabela de valores onde atribuímos valores para x e obtemos valores para $f(x)$ (imagem). Colocamos os pontos (x, y) com $y = f(x)$ no plano cartesiano e desenhamos a reta definida por esses pontos. Por exemplo, consideramos as funções afim $f(x) = 2x + 3$ temos:

1. Se $x = 0$ temos $f(0) = 3$, assim a curva da função f passa pelo ponto $A(0; 3)$,

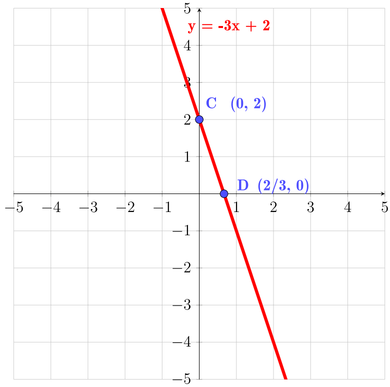
1. Se $x = -1$ temos $f(-1) = 1$, assim a curva da função f passa pelo ponto $B(-1; 1)$.



Outro exemplo, para a função afim $g(x) = -3x + 2$ temos:

1. Se $x = 0$ temos $g(0) = 2$, assim a curva da função g passa pelo ponto $C(0; 2)$,

1. Se $x = \frac{2}{3}$ temos $g(\frac{2}{3}) = 0$, assim a curva da função g passa pelo ponto $D(\frac{2}{3}; 0)$.



Casos especiais: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim definida por $f(x) = ax + b$.

1) Se b = 0, a função é chamada linear. Sua representação gráfica é uma linha reta passando pela origem do plano cartesiano.

2) Se a = 0, a função é constante. Sua representação gráfica é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

6.3.2 Determinando os parâmetros *a* e *b*

Em vários casos, somos levados a determinar as expressões algébricas das funções. Assim, o coeficiente linear e o coeficiente angular, podem ser determinados de maneira gráfica ou algébrica.

Apresentamos a seguir três métodos para determinar o coeficiente linear e o coeficiente angular. O primeiro método, baseado no cálculo algébrico, é o seguinte:

Método algébrico. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Sejam u e v dois números reais, com $u \neq v$, então temos $f(u) = au + b \neq f(v) = av + b$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(u)-f(v)}{u-v} = \frac{(au+b)-(av+b)}{u-v} = \frac{a(u-v)}{u-v} &= a \\ f(u) - au = (au+b) - au &= b \end{aligned}$$

Regra Prática: Primeiro Método Algébrico. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim com $f(x) = ax+b$ $(a \neq 0)$. Sejam u e v dois números reais, com $u \neq v$, suponha que $f(u)$ e $f(v)$ são dados. Então, nós temos:

1. $a = \dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}$.
2. $b = f(u) - au$

Assim, se conhecemos duas imagens $f(u)$ e $f(v)$, então podemos determinar o coeficiente linear e o coeficiente angular da função afim f.

Exemplo 6.2 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim com $f(x) = ax+b$ tais que:

$$f(4) = 14 \text{ e } f(2) = 8.$$

Determine os parâmetros a e b.

Solução. Vamos aplicar o primeiro método algébrico.

Como $f(4) = 14$ e $f(2) = 8$ temos $u = 4$ e $v = 2$. Aplicando o método prático, temos:

$$a = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{14 - 8}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Assim, $a = 3$. Depois temos que:

$$b = f(u) - au = f(4) - 3 = 14 - 12 = 2.$$

Então, temos $a = 3$ e $b = 2$.

Em conclusão, a expressão da função afim $f(x) = ax + b$ é dada por:

$$f(x) = 3x + 2.$$

Regra Prática: Segundo Método algébrico. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Seja u um número real.

1. Nós temos $f(u+1) = a(u+1)+b = au+a+b = au+b+a = f(u)+a$. Este resultado pode ser interpretado da seguinte forma: cada vez que x aumenta uma unidade, $f(x)$ aumenta a unidades. Esta propriedade permite definir a direção da reta de equação $y = ax+b$, razão pela qual o parâmetro a é chamado de coeficiente angular de f, isto é, $a = f(a + u) - f(u)$.

2. $b = f(0)$.

Exemplo 6.3 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim com $f(x) = ax+b$ $(a \neq 0)$. Suponha que $f(2) = 3$ e $f(1) = -1$. Determine os parâmetros a e b.*

Solução. Vamos aplicar o primeiro método algébrico.

Temos:

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) + a \Leftrightarrow 3 = -1 + a \Leftrightarrow a = 3 + 1 = 4.$$

Assim, temos $a = 4$. Além disso, como $f(0) = a \times 0 + b = b$, esse método implica que:

$$f(1) = f(1+0) = f(0)+a = f(0)+4 \Leftrightarrow b = f(0) = f(1)\text{-}a = \text{-}1\text{-}4 = \text{-}5.$$

Assim, temos $b = 0$. Em conclusão, a expressão da função afim $f(x) = ax+b$ é dada por:

$$f(x) = 4x - 5.$$

O segundo método é gráfico, é o seguinte::

Regra Prática: Método gráfico. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Seja a equação da reta representativa da função f cujo equação:

$$(D) : y = ax + b.$$

Dado $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, onde $x_A \neq x_B$, dois pontos da reta (D).

Então, nós temos:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ e } b = y_A - ax_A.$$

Assim, com esses valores de a e b obtemos a expressão da função afim f.

Exemplo 6.4 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim com $f(x) = ax+b$. Suponho que a reta representativa da função f cujo equação é dada por $y = ax + b$, passa pelos pontos:* $A(4, 9)$ e $B(7, 21)$.

Determine os parâmetros a e b.

Solução. A reta representativa $(D) : y = ax+b$ da função $f(x) = ax+b$ passa pelos pontos $A(4, 9)$ e $B(7, 21)$. Assim, temos $(x_A, y_A) = (4, 9)$ e $(x_B, y_B) = (7, 21)$. Ao aplicar o método anterior aos pontos A e B, o parâmetro *a é* dado por:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{21 - 9}{7 - 4} = \frac{12}{3} = 4.$$

De outro lado, o parâmetro b é dado por: $b = y_A - ax_A = 9 - 4 \times 4 = 9 - 16 = -7$. Assim, temos $a = 4$ e $b = -7$. Em conclusão, a expressão da função afim $f(x) = ax + b$ é dada por: $f(x) = 4x - 7$.

6.4 Variações da função afim

Seja f a função afim definida por $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, onde $x \in \mathbb{R}$. As variações de f depende do sinal do coeficiente angular a. Isto é, temos a seguinte propriedade.

Proposição 6.2 Variações da função afim. *Seja f a função afim definida por $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, onde $x \in \mathbb{R}$. Então, temos:*

1. *Quando $a > 0$ a função f é crescente, isto é, a medida que x cresce, $f(x)$ também cresce. Isto é, sejam x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, se $x_1 \leq x_2$ então temos $f(x_1) \leq f(x_2)$. O quadro de variações de f é da seguinte forma:*

x	$-\infty$ $+\infty$
Sinal de a	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

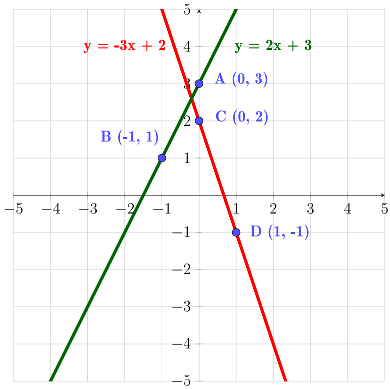
2. *Quando $a < 0$ a função f é decrescente, isto é, a medida que x cresce, $f(x)$ decresce. Isto é, sejam x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, se $x_1 \leq x_2$ então temos $f(x_1) \geq f(x_2)$. O quadro de variações de g é da seguinte forma:*

x	$-\infty$ $+\infty$
Sinal de a	$-$
$f(x)$	$\searrow$

Exemplo 6.5 *Consideremos as funções afins dos exemplos a seguir.*

1. *Para a função afim $f(x) = 2x + 3$, o coeficiente angular $a = 2 > 0$, então a função afim f é crescente. A representação gráfica de f é a reta de equação: $y = 2x + 3$, que passa pelos 1°, 2° e 3° quadrantes.*

2. *Para a função afim $g(x) = -3x + 2$, o coeficiente angular $a = -3 < 0$, então a função afim g é decrescente. A representação gráfica de g é a reta de equação: $y = -3x + 2$, que passa pelos 2°, 1° e 4° quadrantes.*



6.5 Sinal de uma função afim

Seja f a função afim definida por $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, onde $x \in \mathbb{R}$.

6.5.1 Equação $ax + b = 0$

Antes de estudar o sinal da função afim $f(x) = ax + b$ precisamos de determinar o zero da função, isto é, $f(x) = ax + b = 0$. Para isso, temos de resolver a equação do primeiro grau $ax + b = 0$. Assim, temos:

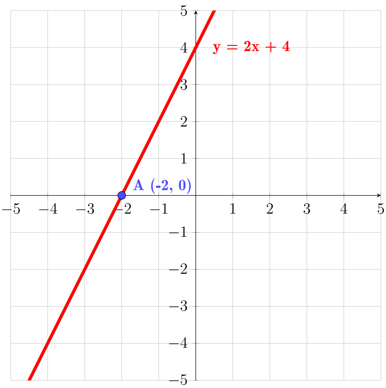
$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -b/a.$$

Graficamente, isso significa que a reta de equação $y = ax + b$ cruza o eixo x no ponto A de coordenada $A(\frac{-b}{a}, 0)$.

No exemplo a seguir, seja a função $f(x) = 2x + 4$, temos que:

$$2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4/2 = -2.$$

Assim, $x = -2$ é a solução da equação $2x+4 = 0$, ou de maneira equivalente, $x = -2$ é o zero da função f, isto é, $f(-2) = 0$. A representação gráfica da função $f(x) = 2x + 4$ é a reta de equação $y = 2x + 4$, que cruza o eixo x no ponto $A\,(\frac{-4}{2}, 0) = (-2, 0)$, assim $\mathrm{x} = \frac{-4}{2} = -2$ é a solução da equação $2x + 4 = 0$.



No exemplo a seguir, seja a função $g(x) = -2x + 3$, temos que:

$$-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = -3/-2 = 3/2.$$

Assim, $x = -3/2 = 1.5$ é a solução da equação $-2x + 3 = 0$, ou de maneira equivalente, $x = 1.5$ é o zero da função g, isto é, $g(1.5) = 0$. A representação gráfica da função $f(x) = -2x + 3$ é a reta de equação $y = -2x + 3$ que cruza o eixo x no ponto $B\,(\frac{3}{2}, 0) = (1.5, 0)$, assim $x = \frac{3}{2} = 1.5$ é a solução da equação $-2x + 3 = 0$.

6.5.2 Sinal de $f(x) = ax + b$

Seja f a função afim definida por $f(x) = ax + b$ com a $\neq 0$, onde $x \in \mathbb{R}$. Para o sinal da função f temos dois casos: $a > 0$ e $a < 0$.

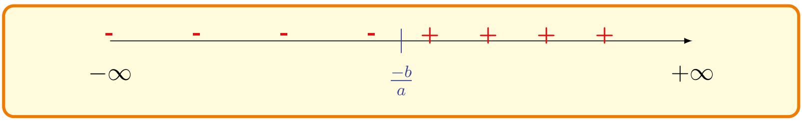
Caso $a > 0$. Se $f(x) > 0$ temos a inequação $ax + b > 0$. Assim, com as propriedades dos números reais e da desigualdade temos que $ax > -b$, e como $a > 0$ então:

$$x > -\frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\frac{b}{a}, +\infty[.$$

Igualmente, se $f(x) < 0$ temos a inequação:

$$ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -b/a \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{b}{a}[.$$

O gráfico a seguir ilustra os sinais da função afim $f(x) = ax + b$ quando $a > 0$:



Podemos também resumir os sinais da função $f(x) = ax + b$, quando $a > 0$ do seguinte modo:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
sinal de $f(x) = ax + b$		$-$	0	$+$	

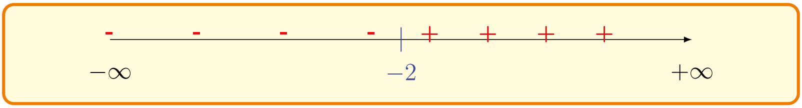
Também temos a seguinte regra geral para determinar os sinais de uma função afim, quando $a > 0$.

Regra Prática.

Se $a > 0$ a função afim $f(x) = ax + b$ é crescente, os valores de $f(x)$ evoluirão de valores negativos para valores positivos, passando por zero.

Por exemplo, seja a função $f(x) = 2x + 4$, temos que $2x + 4 = 0$ implica que $x = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{2} = -2$.

O gráfico a seguir ilustra os sinais da função afim $f(x) = 2x + 4$:



Os sinais da função $f(x) = 2x + 4$ são dados como a seguir:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
sinal de $f(x) = 2x + 4$	$-$	0	$+$

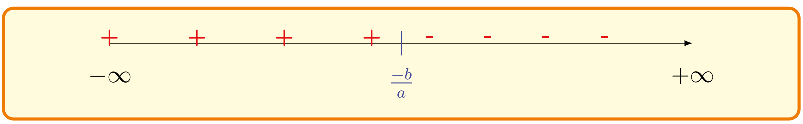
Caso $a < 0$. Se $f(x) > 0$ temos a inequação $ax + b > 0$. Assim, com as propriedades dos números reais e da desigualdade temos que $ax > -b$, e como $a < 0$ então:

$$x < -\frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, -\frac{b}{a}[.$$

Igualmente, como $a < 0$, se $f(x) < 0$ temos:

$$ax + b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax < -b \quad \Leftrightarrow \quad x > -b/a \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\frac{b}{a}, +\infty[.$$

O gráfico a seguir ilustra os sinais da função afim $f(x) = ax + b$ quando $a < 0$:



Podemos também resumir os sinais da função $f(x) = ax + b$, quando $a < 0$ como o seguinte:

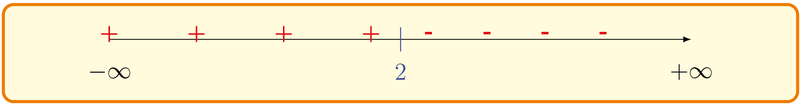
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
sinal de $f(x) = ax + b$	$+$	0	$-$

Também temos a seguinte regra geral para determinar os sinais de uma função afim, quando $a < 0$.

Regra Prática.

Se $a < 0$ a função afim $f(x) = ax + b$ é decrescente, os valores de $f(x)$ passarão de valores positivos para valores negativos, passando por zero.

Por exemplo, seja a função $f(x) = -2x + 4$, então temos $x = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{-2} = 2$.

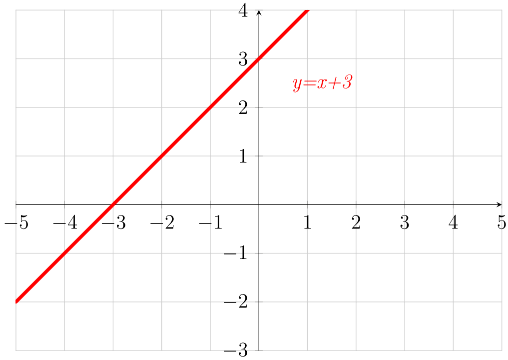


Também, os sinais da função $f(x)$ podem ser dados pela seguinte tabela:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
sinal de $f(x) = -2x + 4$		$+$	0	$-$	

6.6 Exercícios

Exercício 6.1 *Seja a função $f(x) = x + 3$. Seu gráfico $y = x + 3$ está representado na figura a seguir.*



1. *Qual o domínio da função $f(x)$?*

2. *Qual o conjunto imagem da função $f(x)$?*

Solução.

1. Graficamente, a função $f(x) = x + 3$ é definida para todo número real x, então seu domínio é dado por $D(f) = \mathbb{R}$. Por outro lado, para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos calcular $x + 3$, logo $f(x) = x + 3$ existe, assim $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Graficamente, o conjunto imagem da função $f(x) = x + 3$ é o conjunto $Im(f) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Por outro, para todo $y \in \mathbb{R}$, temos $f(y -3) = (y -3)+ 3 = y$. Logo, existe $x = y - 3$ tal que $f(x) = y$, assim o conjunto imagem é dado por $Im(f) = \mathbb{R}$

Exercício 6.2 *Seja a função $f(x) = x + 3$.*

> *1. Qual a coordenada do ponto onde o gráfico da função $f(x) = x + 3$ corta o eixo dos x?*
>
> *2. Qual a coordenada do ponto onde a função $f(x) = x + 3$ corta o eixo dos y?*

Solução.

1. Qual a coordenada do ponto onde o gráfico da função $f(x) = x + 3$ corta o eixo dos x?

A raiz da função afim é o ponto em que ela atravessa o eixo x, isto é, o ponto em que $y = 0$. Isso quer dizer que, para descobrir a raiz de uma função afim, basta substituir o y por 0 na expressão $f(x) = ax+b$, no caso, $f(x) = x+3$.

A raiz da função é o ponto $-b/a$ no eixo x. As funções de 1° grau têm apenas uma raiz. Fazendo isso, temos: $f(x) = x + 3$, assim se $f(x) = x + 3 = 0$ temos $x = -3$. Logo, para $y = 0$ temos $x = -3$. Então, o gráfico da função corta o eixo dos x no ponto (-3,0).

2. Qual a coordenada do ponto onde a função $f(x) = x + 3$ corta o eixo dos y?

O ponto em que a reta f(x) = $ax + b$ corta o eixo y, acontece quando $x = 0$.

Assim, o gráfico onde corta o eixo dos y no ponto (0, y) onde $y = b$. Fazendo isso, como $f(x) = x + 3$, temos: $f(0) = 0 + 3 = 3$. Logo, para $x = 0$ temos $y = 3$. Então, o gráfico da função corta o eixo dos y no ponto (0,3).

Exercício 6.3 *Considere a função f dada e responda:*

1. O ponto de coordenada (2,4) pertence ao gráfico da função $f(x) = x + 3$*?*

2. O ponto de coordenada (1,4) pertence ao gráfico da função $f(x) = x + 5$*?*

Solução.

1. O ponto de coordenada (2,1) pertence ao gráfico da função $f(x) = x + 3$?

Para verificar se o ponto (2,4) pertence ao gráfico da função $f(x) = x+3$, basta substituir esses valores na função e verificar se o resultado da igualdade é o valor sugerido para y. Se for, o ponto pertence ao gráfico. Fazendo isso, como $f(x) = x + 3$, temos: $f(2) = 2 + 3 = 5 \neq 4$. Veja, para $x = 2$ obtemos $y = 5$ e não $y = 4$. Assim, o ponto (2,5) pertence ao gráfico da função $f(x) = x + 3$ e o ponto (2,4) não pertence ao gráfico da função $f(x)$.

2. O ponto de coordenada (1,4) pertence ao gráfico da função $f(x) = x + 5$? Verificando se para $x = 1$, o valor de y é 6. De fato, como $f(x) = x+5$ temos $f(1) = 1 + 5 = 6$. Assim, o ponto (1,4) não pertence ao gráfico da função $f(x) = x + 5$.

Exercício 6.4 *Seja a função* $f(x) = x + 5$*. Fa¸ca uma tabela, atribuindo valores para* $x \geq 0$*, obtendo os valores de* $y = f(x)$ *correspondentes.*

O que aconteceu com os valores de $y = f(x)$ quando os valores de x vão se tornando cada vez maiores?

Solução.

Uma tabela de valores da função *f* para valores de $x \geq 0$:

Valor de x	0	1	10	100	1000	10000	100000
Valor de y=f(x)	5	6	15	105	1005	100005	1000005

Percebemos pela tabela que conforme aumentamos os valores atribuídos a x, os valores de $y = f(x)$ vão se tornando cada vez maiores.

Exercício 6.5 *Seja a função $f(x) = x + 5$. Fa̧ca uma tabela, atribuindo valores para $x \leq 0$, obtendo os valores de $y = f(x)$ correspondentes.*

O que aconteceu com os valores de $y = f(x)$ quando os valores de x vão se tornando cada vez menores?

Solução.

Uma tabela de valores da função f para valores de $x \leq 0$:

Valor de x	0	-1	-10	-100	-1000	-10000	-100000
Valor de y=f(x)	5	4	-5	-95	-995	-9995	-99995

Percebemos pela tabela que diminuindo os valores atribuídos a x, os valores de $y = f(x)$ vão se tornando cada vez menores.

Exercício 6.6 *Considere a função dada por* $f(x) = ax+b$, *com a e b números reais.*

a) Dê valores para os números a e b para que a função f seja uma função constante.

b) Dê valores para os números a e b para que a função f seja a função identidade.

c) Dê valores para os números a e b tais que a função f seja uma função afim (ou de 1º grau).

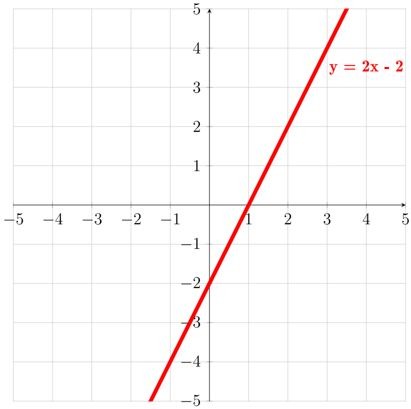
d) Faça a representação gráfica da função f obtida no item c).

Solução.

a) Para $a = 0$ temos $f(x) = 0 \times x + b = b$. Assim, f é a função constante se $a = 0$.

b) A função f é a função identidade se $f(x) = x$, para todo x. Logo, temos $f(x) = ax + b = x$, se $a = 1$ e $b = 0$.

c)-d) A função $f(x) = 2x–2$ é uma função afim. E sua representação gráfica $y = 2x – 2$ é dada no gráfico abaixo.



Exercício 6.7 *Esboce a representação gráfica das funções dadas por:* $f(x) = x + 2$ *e* $g(x) = -2x + 2$ *no mesmo plano cartesiano e determine:*

a) As raízes das funções f e g.

b) Os intervalos em que:

(i) $f(x) < 0$ *e* $f(x) > 0$,

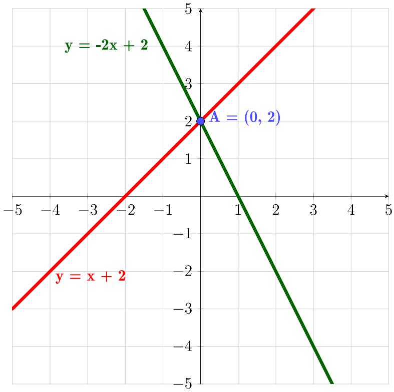
(ii) $g(x) < 0$ *e* $g(x) > 0$.

c) O ponto (x, y) *em que* $y = f(x) = g(x)$, *e indique no plano cartesiano o resultado obtido.*

d) O intervalo em que $g(x) > f(x)$.

Solução.

O esboço das representações gráficas das funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -2x + 2$:



a) As raízes das funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -2x + 2$ são dadas por: $f(x) = x + 2 = 0$ e $g(x) = -2x + 2 = 0$. Logo, temos $x = -2$ é a raiz da função $f(x) = x + 2$ e $x = 1$ é a raiz de $g(x) = -2x + 2$.

b) (i) O intervalo em que $f(x) < 0$ é o intervalo $]-\infty, -2[$, porque o coeficiente angular de $f(x)$ é $a = 1$. O intervalo em que $f(x) > 0$ é o intervalo $]-2, +\infty[$, porque o coeficiente angular de $f(x)$ é $a = 1$.

(ii) O intervalo em que $g(x) > 0$ é o intervalo $]-\infty, 1[$, porque o coeficiente angular de $g(x)$ é $a = -2$. O intervalo em que $g(x) < 0$ é o intervalo $]1, +\infty[$, porque o coeficiente angular de $g(x)$ é $a = -2$.

c) A abscissa do ponto (x, y) em que $y = f(x) = g(x)$, é deduzido a partir da resolução da equação $f(x) = g(x)$, isto é, $x + 2 = -2x + 2$, assim temos $x = 0$. Logo, o ponto (x, y) em que $y = f(x) = g(x)$, é o ponto $A(0, 2)$. O ponto $A(0, 2)$ é indicado no plano cartesiano acima.

d) O intervalo em que $g(x) > f(x)$ é deduzido a partir da resolução da inequação $-2x + 2 < x + 2$. Logo, temos: $-3x < 0$, então $x > 0$. Assim, o intervalo é dado por: $]0, +\infty[$

Exercício 6.8 *Considere a função $f(x) = (m-2)x+1$, com m número real.*

a) Determine m tal que a função f seja crescente.

b) Determine m tal que f seja uma função constante.

c) Determine m tal que a função f seja decrescente.

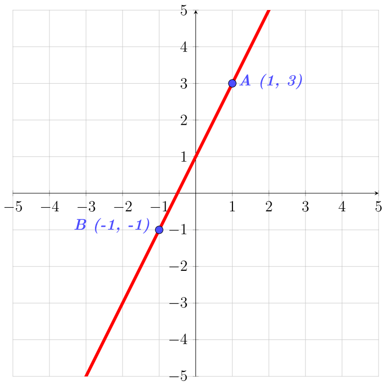
Solução.

a) A função $f(x) = (m - 2)x + 1$ é crescente se o coeficiente angular $a = m - 2 > 0$. Logo, $f(x) = (m - 2)x + 1$ é crescente para $m > 2$.

c) A função $f(x) = (m - 2)x + 1$ é constante se o coeficiente angular $a = m - 2 = 0$. Logo, $f(x) = (m - 2)x + 1$ é decrescente para $m = 2$.

c) A função $f(x) = (m - 2)x + 1$ é decrescente se o coeficiente angular $a = m - 2 < 0$. Logo, $f(x) = (m - 2)x + 1$ é decrescente para $m < 2$.

Exercício 6.9 *Determine a expressão da função f(x)=ax+b cuja reta representativa é dada por:*



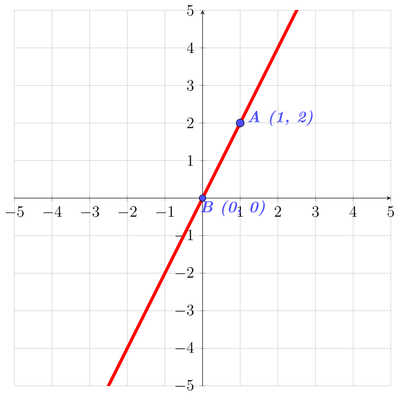
Solução.

Os pontos $A(1,3)$ e $B(-1,-1)$ pertencem a reta representiva da função $f(x) = ax + b$, assim os números reais a e b são dados por:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-3}{-1-1} = 2 \text{ e } b = y_A - a.x_A = 3 - 2 = 1.$$

Logo, a expressão da função $f(x) = ax + b$, é dada por: $f(x) = 2x + 1$.

Exercício 6.10 *Determine a expressão da função f(x)=ax+b cuja reta representativa é dada por:*



Solução.

Os pontos $O(0{,}0)$ e $A(1{,}2)$ pertencem a reta representativa da função $f(x)$ = ax+b. Assim, como $f(0) = a{\times}0{+}b = 0$ deduzimos que $b = 0$, logo $f(a) = ax$.

Por outro lado, como o ponto $A(1{,}2)$ pertencem a reta representativa da função $f(x) = ax$,

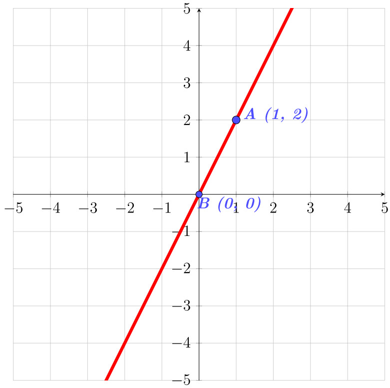
$$f(1) = a \times 1 = 2, \text{ isto é, } a = 2.$$

Logo, a expressão da função $f(x) = ax + b$, é dada por:

$$f(x) = 2x,$$

que é uma função linear.

Exercício 6.11 *Observando a representação gráfica da função f, responda às seguintes questões:*



a) Encontre o valor de x para o qual a f(x) = 0.

b) Encontre o intervalo de R em que a função satisfaz f(x) > 0.

c) Encontre o intervalo de R em que a função satisfaz f(x) < 0.

Solução.

a) Graficamente o valor de x para o qual a $f(x) = 0$, é dada por $x = 0$.

b) Graficamente o intervalo de $\mathbb{R}$ em que a função satisfaz $f(x) > 0$, é constituído dos valores x que são abscissas dos pontos da reta (x, y) tais que $y = f(x) > 0$. Graficamente, esse intervalo é dado por $]0,+\infty[$.

c) Graficamente o intervalo de $\mathbb{R}$ em que a função satisfaz $f(x) < 0$, é constituído dos valores x que são abscissas dos pontos da reta (x, y) tais que $y = f(x) < 0$. Graficamente, esse intervalo é dado por $]-\infty, 0[$.

Exercício 6.12 *Estude a variação do sinal das seguintes funções:*

a) $f(x) = x + 5$ *b)* $f(x) = -3x + 9$
c) $f(x) = 2 + \frac{\pi}{2}$ *d)* $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 3$
e) $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$ *f)* $f(x) = \frac{4x+6}{2}$
g) $f(x) = \frac{2-x}{2}$

Solução.

a) Para a função $f(x) = x+5$, temos $a = 1 > 0$, logo essa função é crescente sobre $\mathbb{R}$. Por outro lado, temos:

1. $f(x) = x + 5 = 0$ para $x = -5$.

2. $f(x) = x+5 > 0$ para $x > -5$, porque o coeficiente angular $a = 1 > 0$.

3. $f(x) = x+5 < 0$ para $x < -5$, porque o coeficiente angular $a = 1 > 0$.

b) Para a função $f(x) = -3x + 9$, o coeficiente angular é $a = -3 < 0$, logo essa função é decrescente sobre $\mathbb{R}$. Por outro lado, o sinal da função f é dado por:

1. $f(x) = -3x + 9 = 0$ para $x = 3$.

2. $f(x) = -3x + 9 > 0$ para $x < 3$, porque o coeficiente angular é $a = -3 < 0$.

3. $f(x) = -3x + 9 < 0$ para $x > 3$, porque o coeficiente angular é $a = -3 < 0$.

c) Para a função $f(x) = 2 + \frac{\pi}{2}$, o coeficiente angular é $a = 0$, logo essa função é constante sobre $\mathbb{R}$. Por outro lado, o sinal da função f é dado por:

$$f(x) = 2 + \frac{\pi}{2} > 0.$$

d) Para a função $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 3$, o coeficiente angular é $a = 0$, logo essa função é constante sobre $\mathbb{R}$. Por outro lado, o sinal da função f é dado por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 < 0.$$

Para as funções dos itens e), f) e g) podemos usar o mesmo raciocínio feito no casos a) e b), para estudar suas variações e sinais.

Exercício 6.13 *Considere a função dada por $f(x) = ax + b$, onde a, b são números reais.*

a) Determine valores para a e b da função f tal que a reta dada por f seja paralela a reta dada pela função $g(x) = -2x+3$. Represente no mesmo plano cartesiano as retas f e g.

b) Determine valores para a e b na função f de modo que a reta dada por f passe pelo ponto $(0, \frac{3}{2})$, mas tal que a reta dada pela função f não seja coincidente com a reta definida pela função $g(x) = -2x + 3$. Represente no mesmo plano cartesiano as retas de f e g.

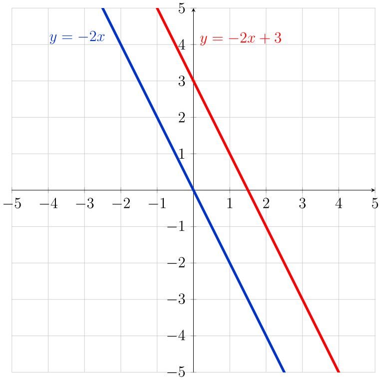
c) Determine valores para a e b na função f de modo que a reta dada por f passe pelo ponto (0; 0), mas tal que as retas f e g não tenham nenhum ponto em comum. Represente no mesmo plano cartesiano as retas f e g.

Solução.

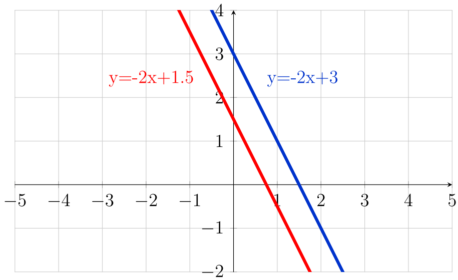
a) A representações gráficas das funções $f(x) = ax+b$ e $g(x) = -2x+3$ são as retas D_1 e D_2, cuja equações são dadas por,

$$y = ax + b, (D_1) \text{ e } y = -2x + 3 \ (D_2).$$

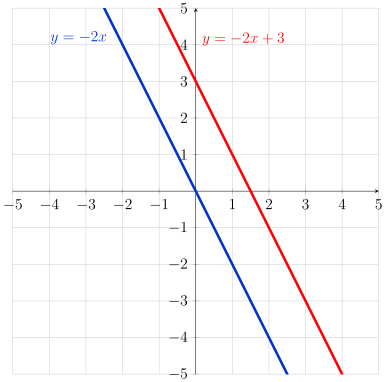
E as retas D_1 e D_2 são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais. Assim, as retas D_1 e D_2 são paralelas se a = -2. Como o valor de b pode ser qualquer, desse modo para a função $f(x) = -2x$ a reta $y = -2x$ é paralela a reta $y = -2x + 3$ da função $g(x) = -2x + 3$. As representações gráficas das retas D_1 e D_2 de f e g são dadas no seguinte plano cartesiano,



b) Se a reta dada por f passa pelo ponto $(0, \frac{3}{2})$, temos $f(0) = \frac{3}{2}$ e como $f(0) = a \times 0 + b = b$, obtemos $b = \frac{3}{2}$. Agora, se a reta dada por f não é coincidente com a reta definida pela função $g(x) = -2x + 3$, então essa reta é paralela a reta dada por g. Logo, as duas retas possuem o mesmo coeficiente angular, isto é, $a = -2$. Logo, a expressão da função f é dada por $f(x) = -2 \times x + \frac{3}{2}$. As representações gráficas no mesmo plano cartesiano das retas de f e g, são dadas por,



c) Se a reta dada por f passa pelo ponto $(0; 0)$, temos $f(0) = 0$ e como $f(0) = a \times 0 + b = b$, obtemos $b = 0$. Agora, se a reta dada por f não tem nenhum ponto em comum com a reta definida pela função $g(x) = -2x + 3$, então essa reta é paralela a reta dada por g. Logo, as duas retas possuem o mesmo coeficiente angular, isto é, $a = -2$. Logo, a expressão da função f é dada por $f(x) = -2 \times x$. As representações gráficas no mesmo plano cartesiano das retas de f e g, são dadas por,



CAPÍTULO 7

Funções Quadráticas

Objetivos

Neste Capítulo apresentamos as funções quadráticas, mais precisamente, daremos algumas propriedades gerais das funções quadráticas que são importantes para o Cálculo Diferencial e Integral.

7.1 Função Quadrática: Definições e propriedades

Nesta seção, fornecemos as definições básicas das funções quadráticas, bem como as primeiras propriedades dessas funções.

Definição 7.1 *Sejam a, b e c números reais, com $a \neq 0$. Uma função f definida por:*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

é chamada função quadrática ou função polinomial de grau 2.

O domínio da função quadrática f é o conjunto $\mathbb{R}$.

Os números reais a, b e c são chamados de **coeficientes** *da função quadrática.*

Por exemplo, sejam f, g, h e s as funções definidas por:

$$f(x) = x^2,\ g(x) = 2x^2 - 3x + 1,\ h(x) = (x+1)(x-3) \text{ e } s(x) = 2x^2 + x,$$

são funções quadráticas. Temos:

- Os coeficientes de f são $a = 1$ e $b = c = 0$,
- Os coeficientes de g são $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$
- Os coeficientes de h são $a = 1$, $b = -2$ e $c = -3$,
- Os coeficientes de s são $a = 2$, $b = 1$ e $c = 0$,

Exemplo 7.1 ***Contra exemplo.*** *Sejam u, v e w as funções definidas por:*

$$u(x) = x\text{-}2,\ v(x) = \text{-}3x^3\text{+}1,\ h(x) = (x\text{+}1)^2\text{-}(x\text{-}1)^2 \text{ e } w(x) = 2x^2\text{+}\frac{2}{x}\text{-}5,$$

não são funções quadráticas.

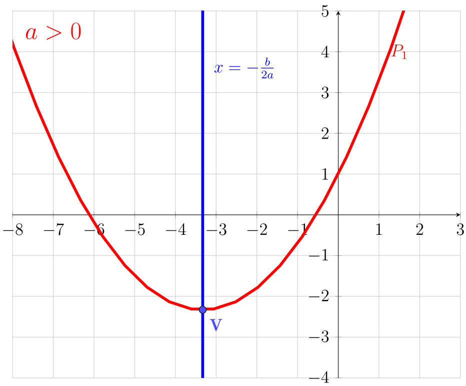
Definição 7.2 *A curva representativa de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, é o conjunto (P) dos pontos $M(x, y)$ do plano cartesiano tais que:*

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (P).$$

A curva (P) é chamada de **Parábola***.*

De acordo com o sinal de a, a parábola (P) assume uma forma definida.

Caso $a > 0$. A parábola tem a seguinte forma:



Em outras palavras, se o coeficiente a for positivo ($a > 0$), a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Caso $a < 0$. A parábola tem a seguinte forma.

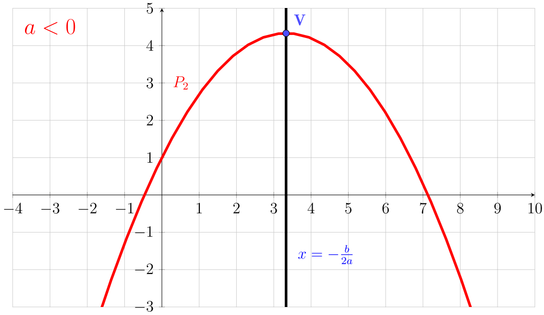


Grafico-2

Em outras palavras, se o coeficiente a for negativo ($a < 0$), a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Vértice e eixo de simetria da parábola

1. O vértice da parábola é o ponto V, cujo abscissa é: $x_V = -\dfrac{b}{2a}$.
2. A reta vertical $x = -\dfrac{b}{2a}$, ou simplesmente $x = x_V$, é o eixo de simetria da parábola.

   Em outras palavras: O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y.

A intersecção do eixo de simetria com a parábola é o ponto de vértice V da parábola.

A partir das representações gráficas anteriores, as variações de uma função quadrática são as seguintes:

Proposição 7.1 ***Variações das funções quadráticas.*** *Seja a função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.*

3. *Se $a > 0$ a função quadrática é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, -\frac{b}{2a}]$ e estritamente crescente no intervalo $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$.*
4. *Se $a < 0$ a função quadrática é estritamente crescente no intervalo $]-\infty, -\frac{b}{2a}]$ e estritamente decrescente no intervalo $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$.*

Consequentemente, os quadros de variações das funções quadráticas dependerão do sinal do parâmetro a. De fato, temos dois casos a considerar:

Caso $a > 0$. O quadro toma a seguinte forma:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	mínimo	$\nearrow$	$+\infty$

Lembre-se de que ”mínimo” é o valor mínimo obtido pela função, aqui este mínimo é o número real $f(x_V) = f(-\frac{b}{2a})$. **Caso** $a < 0$. O quadro toma a seguinte forma:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	máximo	$\searrow$	$-\infty$

Lembre-se de que ”máximo” é o valor máximo obtido pela função, aqui este máximo é o número real $f(x_V) = f(-\frac{b}{2a})$.

7.2 As várias formas das funções quadráticas

Funções quadráticas usam três expressões diferentes, cada uma dessas expressões permitem obter propriedades importantes dessas funções. Em particular, podemos provar algebricamente as variações das funções quadráticas, e, com isso, explicar melhor (matematicamente) as tabelas de variações e os gráficos associados.

A seguir apresentamos as expressões que definem as funções quadráticas. Iniciamos com a expressão na forma algébrica, em seguida na forma canônica e depois nas formas fatoradas.

Forma Algébrica e Discriminante de uma função quadrática.

Definição 7.3 *Sejam a, b e c números reais, com $a \neq 0$. A função quadrática f escrita:*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

é chamada **forma desenvolvida** *ou* **forma algébrica.**

Para formular as duas outras expressões, precisamos de um número real importante a ser conhecido, o discriminante associado à função quadrática considerada. Este número real é definido da seguinte forma.

Definição 7.4 *Seja a função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. O número real*

$$\Delta = b^2 - 4bc,$$

é chamado de discriminante da função quadrática $f(x) = ax2 + bx + c$ ou do polinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ de grau 2.

O discriminante de uma função quadrática é um número importante para o estudo de várias propriedades dessa função. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 7.2 *Os exemplos a seguir mostram que Δ pode assumir um valor positivo, negativo ou nulo.*

1) Seja a função $f(x) = 5x2 - 7x + 8$, temos $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 5 \times 8 = 49 - 160 = -111$.

2) Seja a função $g(x) = 8x^2 - 3$, temos $\Delta = (0)^2 - 4 \times 8 \times (-3) = 96$.

2) Seja a função $g(x) = x^2 - 4x + 4$, temos $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$.

Forma Canônica.

Seja a função quadrática f(x) = ax2 + bx + c onde a, b e c são números reais, com a $\neq$ 0. Seja os seguintes dois números:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Considere a expressão $a(x - x_V)^2 + x_V$, então temos

$$\begin{aligned}
a(x-x_V)^2 + y_V &= ax^2 - 2ax_Vx + ax_V^2 + ay_V \\
&= ax^2 + 2a\frac{b}{2a}x + a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a} \\
&= ax^2 + \frac{2ab}{2a}x + \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a} \\
&= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a} \\
&= ax^2 + bx + \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a} \\
&= ax^2 + bx + \frac{b^2-b^2+4ac}{4a} \\
&= ax^2 + bx + \frac{4ac}{4a} = ax^2 + bx + c.
\end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$f(x) = a(x-x_V)^2 + y_V = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Em resumo, temos a seguinte propriedade:

Proposição 7.2 *Toda função quadrática f(x) = ax2 + bx + c, onde a, b e c são números reais, com a ≠ 0, pode ser escrita sobre a forma:*

$$f(x) = a(x - x_V)^2 + x_V,$$

onde $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ e $x_V = \dfrac{-\Delta}{4a}$ *ou equivalentemente*

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

A forma da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ dada na Proposição 7.2 é a segunda expressão de uma função quadrática, assim temos a seguinte definição:

Definição 7.5 *Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com a ≠ 0. A expressão*:

$$f(x) = a(x - x_V)^2 + x_V,$$

onde

$$x_V = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad x_V = \frac{-\Delta}{4a},$$

é chamada de **Forma Canônica** *da função quadrática f(x).*

A expressão $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{2a}$ é muito útil quando queremos fazer um esboço rápido do gráfico de uma função quadrática, pois permite identificar a concavidade, o vértice e o eixo de simetria. Assim, temos:

Proposição 7.3 ***Vértice e eixo de simetria da parábola***. *Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.*

A partir da forma canônica $f(x) = a(x - x_V)^2 + x_V$ deduzimos que:

1. *O vértice da parábola é o ponto V, cujas coordenadas são (x_V, y_V),*

2. *O eixo de simetria da parábola é a reta vertical $x = -\dfrac{b}{2a}$,*

Por exemplo, seja a função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Determinar a forma canônica da função f.

Solução. Aqui, temos $a = 1$, $b = -6$ e $c = 5$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 16 \\ x_V &= \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \times 1} = 3 \\ y_V &= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \times 1} = -4. \end{aligned}$$

Assim, a forma canônica da função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 5$ é dada por:

$$f(x) = a(x - x_V)2 + y_V = (x - 3)2 - 4.$$

Deduzimos que o vértice da parábola é $V(3,-4)$ e o eixo de simetria é $x = 3$.

Por outro lado, como $a = 1 > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima.

Observação: Processo prático para determinar a forma canônica. Observe que a forma canônica foi obtida utilizando a fatoração de um quadrado da soma, ou diferença, de dois termos, no caso completando o quadrado. Podemos utilizar esse método para transformar uma função na forma desenvolvida para forma canônica. Vejamos como fazer com o exemplo dado anteriormente.

A função $f(x) = x^2 - 6x+5$ não é um quadrado perfeito, assim podemos simplesmente reescrevê-la, mas primeiramente vamos relembrar que o quadrado da diferença de dois termos é $(x - a)^2 = x^2 - 2.x.a + a^2$. Olhando para a expressão $x^2 - 6x+5$ vemos que já temos o correspondente ao x^2 que é primeiro termo ao quadrado, no caso x^2. Precisamos descobrir o correspondente ao segundo termo $-2.x.a$, para assim identificar o valor de a, para completar o quadrado. Igualando esses dois termos teremos que:

$$-2ax = -6x \text{ logo } a = \frac{-6x}{-2x} = 3.$$

Assim, podemos reescrever a expressão dada como:

$$x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$$

Observe que tivemos de subtrair 9 da expressão quando completamos o quadrado, pois ao fazermos o completamento inserimos o valor (9) que não existia na expressão inicial. Assim, a função dada na forma canônica será $f(x) = (x - 3)^2 - 4$.

Exemplo 7.3 *Para a função $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ temos $a = 2$, $b = 4$ e $c = -1$, assim:*

$$\Delta = b^2 - 4ac = 24, \quad x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times 2} = -1, \quad e \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-24}{8} = -3.$$

Assim, a forma canônica de f é dada por:

$$f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V = 2(x + 1)2 - 3.$$

Assim, temos

$$f(x) = 2(x + 1)^2 - 3.$$

Deduzimos que o vértice e da parábola é V(-1,-3) e o eixo de simetria é x = -1.

Por outro lado, como a = 2 > 0 a parábola tem concavidade voltada para cima.

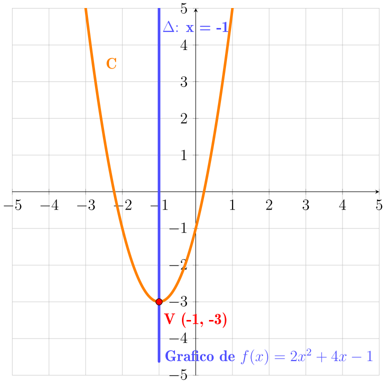


Gráfico da função $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

Forma Fatorada.

Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com a $\neq 0$. Com a forma canônica temos:

$$f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{2a} = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim, temos:

1) Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ temos $f(x) = a(x + \dfrac{b}{2a})^2$.

2) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ temos $f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Como $\frac{\Delta}{4a^2} = \left[\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right]^2 = \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]^2$, assim para todo x deduzimos que:

$$f(x) = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]^2\right] = a\left[(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})\right].$$

Assim, temos a seguinte proposição :

Proposição 7.4 *Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. Então, pode ser escrita sobre a forma:*

1. Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ *então, a função f pode ser escrita sobre a forma* $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$.

2. Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ *então a função f pode ser escrita sobre a forma*

$f(x) = a\left[(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})\right]$.

O resultado da proposição anterior nos leva à terceira forma de uma função quadrática.

Definição 7.6 *Seja a função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *onde a, b e c são números reais, com* $a \neq 0$ *tal que* $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. *Então as expressões:*

1. $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2,\ se\ \Delta = b^2 - 4ac = 0,$

2. $f(x) = a\left[(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})\right],\ se\ \Delta = b^2 - 4ac > 0.$

são chamadas as **Formas Fatoradas** *da função quadrática f.*

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, então $-\Delta > 0$, assim temos que: $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Então, como $a \neq 0$ deduzimos:

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{2a} = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \neq 0.$$

Em conclusão, uma função quadrática tem as seguintes formas: a Forma algébrica; a Forma canônica e a Forma fatorada. Resumimos essas três formas na tabela a seguir.

Forma	Expressão	denominação
Forma 1	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Forma algébrica.
Forma 2	$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$	Forma canônica.
Forma 3	$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$, se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.	Forma fatorada.
Forma 4	$f(x) = a\left[(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})\right]$, se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.	Forma fatorada.

Cada forma tem um uso prático específico para estudar as propriedades das funções quadráticas. Em particular, veremos no próximo parágrafo, como essas três formas permitem entender melhor a interpretação geométrica das raízes da equação de segundo grau $ax2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

7.3 Estudo das variações das funções quadráticas

7.3.1 Forma canônica e variações das funções quadráticas.

A forma canônica de uma função quadrática desempenha um papel importante no estudo de suas variações. Podemos distinguir os dois seguintes casos:

Forma canônica com: $a > 0$	Exemplo
$f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$. Como $a > 0$ temos $a(x-\alpha)^2 + \beta > \beta$	Seja $f(x) = 2(x-2)^2 - 1$. O minímo de f é atingido para $x = 2$ e é igual -1. Assim, a função quadrática f é decrescente no intervalo $]-\infty, 2]$ e crescente no intervalo $[2, +\infty[$.
O minímo é β que é atingido quando $a(x-\alpha)^2 = 0$, isto é, para $x = \alpha$	O quadro de variações é: $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 2 & & +\infty \\ \hline & +\infty & & & & +\infty \\ f(x) & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & -1 & & \end{array}$

Forma canônica com: $a < 0$	Exemplo
$f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$. Como $a < 0$ temos $a(x-\alpha)^2 + \beta < \beta$	Seja $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$. O minímo é atingido para $x = 2$ e é igual -1.
O maxímo é β que é atingido quando $a(x-\alpha)^2 = 0$, isto é, para $x = \alpha$	O quadro de variações é: $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 2 & & +\infty \\ \hline & & & -1 & & \\ f(x) & & \nearrow & & \searrow & \\ & -\infty & & & & -\infty \end{array}$

7.3.2 Aplicação da simetria da representação gráfica

Simetria da representação gráfica. Como a curva de uma função quadrática é simétrica, se encontrarmos dois pontos A e B dessa curva da mesma ordenada, deduzimos que o meio I do segmento AB está localizado no eixo de simetria. A abscissa de I é a abscissa do vértice V da parábola.

Por exemplo, seja $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Nós estamos procurando, por exemplo, os dois pontos A e B que têm para abscissa $y = 3$. Para isso, resolvemos $f(x) = 3$:

$$x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 0 \text{ ou } x = 4$$

A abscissa do vértice V é, portanto, $\mathrm{x} = \frac{0+4}{2} = 2$, e a ordenada de V é $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$. Assim, deduzimos que:

f é decrescente em $]-\infty; 2]$ e f é crescente em $[2,+\infty[$.

Aplicação de $x_0 = -\frac{b}{2a}$ com $a > 0$. Seja $f(x) = ax2 + \mathrm{b}x + c$ tal que $a \neq 0$, assim temos $x_V = -\frac{b}{2a}$. Suponha que $a > 0$, então:

f é decrescente em $]-\infty; x_V]$ e f é crescente em $[x_V ,+\infty[$

O mínimo de f é atingido por $x = x_V$ e sua valor é $m = f(x_V)$. Por outro lado, se $a < 0$ temos a seguinte regra prática:

Aplicação de $x_0 = -\frac{b}{2a}$ com $a < 0$. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $\mathrm{a} \neq 0$, assim temos $x_V = -\frac{b}{2a}$. Suponha que $a < 0$, então:

f é crescente em $]-\infty; x_V]$ e f é decrescente em $[x_V ,+\infty[$.

O máximo de f é atingido por $x = x_V$ e seu valor é $M = f(x_V)$.

Por exemplo, seja $f(x) = -x^2 - 2x + 3$. Temos que $a = -1$ e $b = -2$ então, $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = -1$. Assim, como $a = -1$ é negativo, deduzimos:

f é crescente em $]-\infty;-1]$ e f é decrescente em $[-1,+\infty[$.

O máximo de f é atingido por $x = -1$ e seu valor é $M = f(-1) = 4$.

7.4 Equações $ax^2+bx+c = 0$ e interpretação gráfica

Definição 7.7 *Seja uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. Todo $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ é chamado de:*

a) Raiz do polinômio *do segundo grau $ax^2 + bx + c$,*

b) Solução da equação do segundo grau *$ax^2 + bx + c = 0$.*

Segundo a Proposição 7.4, o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ torna possível determinar o número de soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde a é um real diferente de 0. Isto é, temos:

1. Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ então temos $ax2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$. Logo, obtemos $x + \frac{b}{2a} = 0$, e assim $x_0 = -\frac{b}{2a}$ é uma solução (dupla) da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

2. Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ então temos $ax^2+bx+c = a\left[(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})\right] = 0$, isso implica que: $x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$. Então, temos:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ então, como $a \neq 0$, temos:

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{2a} = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \neq 0.$$

E assim a equação não admite solução real.

Proposição 7.5 *As soluções reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, são:*

Sinal de Δ	*Soluções reais de* $ax^2+bx+c=0$	*Número de soluções*
$\Delta = b^2-4ac = 0$	$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	*Uma solução real dupla.*
$\Delta = b^2-4ac > 0$	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *e* $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	*Duas soluções reais distintas.*
$\Delta = b^2-4ac < 0$	*Não tem solução real*	*Zero solução real.*

Representações gráficas das funções quadráticas e soluções da equação $ax^2+bx+c=0$.

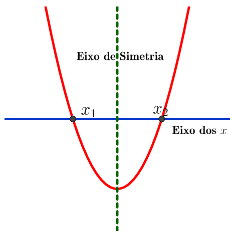
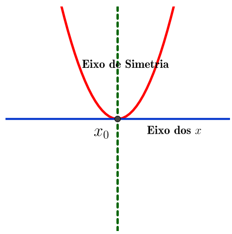
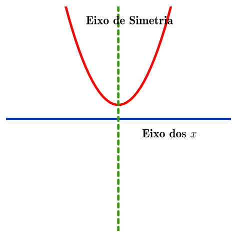
Graças às representações gráficas, podemos deduzir que a intersecção da parábola com o eixo dos x (eixo das abscissas) define os zeros da função (quando eles existem), isto é, os zeros da função são as soluções da equação $ax^2+bx+c=0$.

Assim, ao fazermos o estudo do sinal do número $\Delta = b^2-4ac$ podemos determinar se a equação $ax^2+bx+c=0$ admite, ou não, soluções reais, o que irá nos auxiliar também na construção da representação gráfica. Desse modo, a representação gráfica das soluções da equação $ax^2+bx+c=0$, onde $a \neq 0$, dadas na Proposição 7.5, pode ser ilustrada graficamente. Para isso, podemos distinguir os seguintes casos:

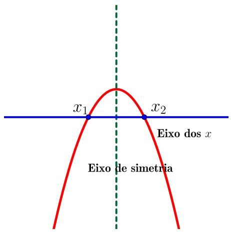
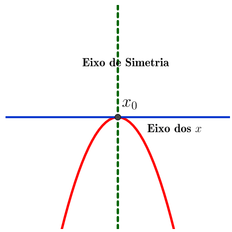
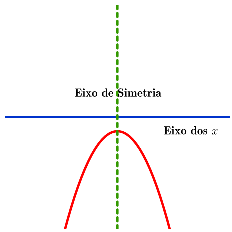
Caso 1: $a > 0$ com $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$,

Caso 2: $a < 0$ com $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$.

No quadro a seguir apresentamos todas as situações possíveis do caso $a > 0$ com $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$:

<table>
<tr><th>$a > 0$ e $\Delta > 0$</th><th>$a > 0$ e $\Delta = 0$</th><th>$a > 0$ e $\Delta < 0$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos.</td><td>A parábola intercepta o eixo dos x em um único ponto.</td><td>A parábola não intercepta o eixo dos x.</td></tr>
</table>

De mesmo modo, no quadro a seguir apresentamos todas as situações possíveis do caso $a < 0$ com $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$:

<table>
<tr><th>$a < 0$ e $\Delta > 0$</th><th>$a < 0$ e $\Delta = 0$</th><th>$a < 0$ e $\Delta < 0$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos.</td><td>A parábola intercepta o eixo dos x em um único ponto.</td><td>A parábola não intercepta o eixo dos x.</td></tr>
</table>

7.5 Sinal das Funções Quadráticas

Estudar o sinal de uma função $f: D_f \to \mathbb{R}$, onde D_f é o domínio de f consiste em determinar os valores de $x \in D_f$ para os quais:

$$f(x) = 0, f(x) > 0, f(x) < 0.$$

Isto é, determinar os conjuntos:

$$\{x \in D_f, f(x) = 0\}, \{x \in D_f, f(x) > 0\}, \{x \in D_f, f(x) < 0\}.$$

Para estudar o sinal da função real $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, temos que considerar:

1. O valor e o sinal do discriminante Δ,

2. O sinal do coeficiente a.

Vamos estudar o sinal das Funções Quadráticas de maneira geral. Depois, por meio de alguns exemplos, veremos como funciona o estudo do sinal dafunção quadrática.

A) Para $a \neq 0$ **e** $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ **temos**:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{2a} = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a(x - x_1)(x - x_2),$$

onde $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Proposição 7.6 *Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, suponha, para simplificar, que $x_1 < x_2$, onde x_1 e x_2 são as raízes de $f(x)$. Então, o sinal da função quadrática $f(x)$ é dado por:*

1. Se $a > 0$, então temos:

   (a) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, se $x \in]-\infty, x_1[$ ou $x \in]x_2, +\infty[$.
   (b) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) < 0$, se $x \in]x_1, x_2[$

2. Se a < 0, então temos:

(a) $f(x) = a(x - x_1)(x - x2) < 0$, se $x \in]-\infty, x_1[$ ou $x \in]x_2, +\infty[$.
(b) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, se $x \in]x_1, x_2[$.

Por meio de um exemplo veremos como funciona o estudo do sinal de uma função quadrática *f* no caso a > 0 e $\Delta > 0$.

Exemplo 7.4 *Seja a função quadrática* $f(x) = x^2 - 2x - 3$. *Temos que:*

- *O coeficiente a é dado por:* $a = 1 > 0$,
- *O valor e sinal de* Δ: $\Delta = b^2 - 4ac = 16 > 0$, *assim as raízes da função quadrática são:* $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -1$ *e* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 3$.

Logo, o sinal da função quadrática $f(x) = x^2 - 2x - 3$ *é dado por:*

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) > 0$, *se* $x \in]-\infty, -1[$ *ou* $x \in]3, +\infty[$.
2. $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) < 0$, *se* $x \in] - 1, 3[$

Agora, com esse outro exemplo, veremos como funciona o estudo do sinal de uma função quadrática *f* no caso $a < 0$, e $\Delta > 0$.

Exemplo 7.5 *Seja função quadrática* $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. *Temos que:*

- *O coeficiente a é dado por:* $a = -1 < 0$,
- *O valor e sinal de* Δ: $\Delta = b^2 - 4ac = 16 > 0$, *assim as raízes da função quadrática são:* $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -1$ *e* $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 3$.

Logo, o sinal da função quadrática $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ *é dado por:*

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) < 0$, se $x \in]-\infty, -1[$ ou $x \in]3, +\infty[$.
1. $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) > 0$, se $x \in] - 1, 3[$.

B) Para $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ **temos**:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{2a} = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \neq 0 \text{ para } x \neq -\frac{b}{2a}.$$

Proposição 7.7 *Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, o sinal da função quadrática f(x) é dado por:*

1. *Se $a > 0$, então temos: $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 > 0$, para todo real $x \neq -\frac{b}{2a}$.*
2. *Se $a < 0$, então temos: $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 < 0$, para todo real $x \neq -\frac{b}{2a}$.*

Com o exemplo a seguir, veremos como funciona o estudo do sinal de uma função quadrática f no caso $a > 0$, e $\Delta = 0$.

Exemplo 7.6 *Seja a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$. Temos que:*

- *O coeficiente a é dado por: $a = 2 > 0$,*
- *O valor e sinal de Δ: $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$, assim a raiz dupla da função quadrática é: $x_0 = \frac{-b}{2a} = 1$*

Logo, o sinal da função quadrática $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ é dado por:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x - x_0)^2 = 2(x - 1)^2 > 0 \text{ para todo } x \neq 1.$$

C) Para $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ **temos**:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{2a} = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \neq 0.$$

Proposição 7.8 *Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. Se $\Delta = b2 - 4ac < 0$, o sinal da função quadrática f(x) é dado por:*

1. *Se a > 0, então temos*
   $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{2a} = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] > 0.$

2. *Se a < 0, então temos*
   $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{2a} = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] < 0.$

Com o exemplo a seguir veremos como funciona o estudo do sinal de uma função quadrática *f* no caso *a* > 0, e Δ < 0.

Exemplo 7.7 Seja a função quadrática f(x) = 2x2 – 3x + 2. Temos que:

- *O coeficiente a é dado por: a = 2 > 0,*
- *O valor e sinal de Δ: Δ = b^2 – 4ac = 9 – 16 = –7 < 0,*

Logo, o sinal da função quadrática f(x) = 2x2 – 3x + 2 é dado por:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2 = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0,$$

para todo número real x.

Conforme ilustrado pelos exemplos, podemos dizer que, na prática para determinar o sinal de uma função de segundo grau, existem 4 etapas a seguir:

1. Etapa 1: Observar a função do 2º grau e extrair dela o valor numérico dos coeficientes *a*, *b*, e *c*. O sinal do valor numérico do coeficiente *a*, é importante para a etapa 4.

2. Etapa 2: Calcular o valor do delta (Δ), ou do discriminante da função do 2º grau, para determinar as raízes da função (se existem).

3. Etapa 3: Se a função do 2º grau possuir raízes reais (Δ = 0 ou Δ > 0), calcular o valor numérico dessas raízes.

4. Etapa 4: Concluir o estudo do sinal, usando a propriedade apropriada conforme o caso:

   (a) ($\Delta = 0$ e $a > 0$) ou ($\Delta = 0$ e $a < 0$),

   (b) ($\Delta > 0$ e $a > 0$) ou ($\Delta > 0$ e $a < 0$),

   (c) ($\Delta < 0$ e $a > 0$) ou ($\Delta < 0$ e $a < 0$).

7.6 Exercícios

Exercício 7.1 *Considere a $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais.*

Responda os itens em seguida, justificando suas respostas.

a) Dê valores para os números a, b e c para que a função f seja uma função afim (1º grau).

b) Dê valores para os números a, b e c para que a função f seja uma função quadrática (2º grau).

c) Dê valores para os números a, b e c para que a função f seja uma função constante.

d) Dê um exemplo para os valores a, b e c tais que a função f seja a função identidade.

Solução. Considere a $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais.

a) Para que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja uma função afim, os valores dos números reais a, b e c devem ser $a = 0$ e b, c são reais quaisquer com $b \neq 0$.

b) Para que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja uma função quadrática, os valores dos números reais a, b e c devem ser reais quaisquer com $a \neq 0$.

c) Para que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja uma função constante, os valores dos números reais a, b e c devem ser $a = b = 0$ e c um real qualquer.

d) Se a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é a função identidade, então os valores dos números reais a, b e c são dados por: $a = 0$, $b = 1$ e $c = 0$

Exercício 7.2 *Determine os pontos de intersecção da parábola da função $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, com o eixo das abscissas.*

Solução. No instante em que a parábola cruza o eixo das abscissas o valor de $f(x)$ é igual a zero. Portanto:

$$f(x) = 0 \text{ ou seja } 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Temos $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$, logo temos: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2}$. Assim, os pontos de interseção da parábola da função $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, com o eixo das abscissas são: $A(1, 0)$ e $B(\frac{1}{2}, 0)$.

Exercício 7.3 *Determine os valores de m, para que a parábola da função $f(x) = (m-2)x^2 - 2x + 6$ admita dois pontos de intersecção com o eixo das abscissas.*

Solução. No instante em que a parábola cruza o eixo das abscissas o valor de $f(x)$ é igual a zero, ou seja:

$$f(x) = 0 \text{ ou seja } (m - 2)x^2 - 2x + 6 = 0,$$

e para isso $\Delta = b^2 - 4ac$ tem que ser > 0, logo,

$$\Delta = (-2)^2 - 4(m - 2) \times 6 = 52 - 24m > 0.$$

Então, a parábola da função $f(x) = (m - 2)x^2 - 2x + 6$ admite dois pontos de intersecção com o eixo das abscissas para todo m verificando: $m < \frac{13}{6}$.

Exercício 7.4 *Considere a $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$, com $a \neq 0$, x_V e y_V números reais. Responda os itens em seguida, justificando suas respostas.*

a) *Dê valores para os números reais $a \neq 0$, x_V e y_V, para que a função do 2º grau dada tenha como valor máximo 4.*

b) *Dê valores para os números reais $a \neq 0$, x_V e y_V para que a função f seja decrescente em $]-\infty;-1]$ e crescente em $[-1;+\infty[$.*

Solução. Considere a $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$, com $a \neq 0$, x_V e y_V números reais.

a) Para que a função dada tenha um ponto de máximo devemos ter $a < 0$. Como o valor máximo é dado pela ordenada do vértice, temos que $y_V = 4$. Como o número real $a < 0$ é qualquer, temos infinitas possibilidades, como, por exemplo a função quadrática : $f(x) = -2(x - 1)^2 + 4$.

b) Para que a função dada seja decrescente, até atingir um ponto de mínimo, e depois crescente, é preciso que a concavidade da parábola seja voltada para cima, ou seja devemos ter $a > 0$. Como o valor mínimo será -1, que é dado pela ordenada do vértice, no caso o $y_V = -1$. Como o número real a > 0 é qualquer, temos infinitas possibilidades. Por exemplo: Para $y_V = -1$, $x_V = -2$ e a = 1, temos a função quadrática $f(x) = (x + 2)^2 - 1$

Exercício 7.5 *Determine o vértice e os pontos de interseção dos eixos com a parábola definida pela função quadrática*:

$$f(x) = x^2 + 2$$

Solução. Lembre-se de que as coordenadas do vértice $V(x_V, y_V)$ da parábola são dadas por: $x_V = \frac{-b}{2a}$ e $y_V = f(x_V)$.

1. Como $a = 1$, $b = 0$ e $c = 2$, as coordenadas do vértice $V\,(x_V\,,\, y_V)$ da função quadrática $f(x)$ são dadas por:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \times 1} = 0 \text{ e } y_V = f(0) = 2.$$

Assim, o vértice é dado por : $V\,(0, 2)$.

2. Para os pontos de interseção com o eixo x da parábola da função quadrática $f(x)$, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0,$$

isto é, o discriminante é um número negativo, desse modo, não existe solução real para a equação $f(x) = x^2 + 2$. Isso significa que a parábola da função não intersepta o eixo x.

Uma outra forma de verificar isso é esboçando o gráfico da função, que será uma parábola côncava para cima com vértice no ponto $V\,(0, 1)$, ou seja, não intercepta o eixo x.

3. Como $f(0) = 1$, então o ponto de intercepto da parábola da função quadrática $f(x)$ com o eixo y é o ponto $V\,(0, 1)$.

Exercício 7.6 *Determine o vértice e o eixo de simetria de cada uma das seguintes funções quadráticas:*

1. $f(x) = (x - 2)^2 + 5.$
2. $f(x) = 2(x + 2)^2 - 7.$
3. $f(x) = -3(x - 2)^2 - 4.$

Solução. Sabemos que uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, pode ser escrita sobre a forma canônica:

$$f(x) = a(\mathrm{x} - x_V)^2 + y_V,$$

onde x_V e y_V são as coordenadas do vértice V da parábola. Assim, temos:

1. Para a função quadrática $f(x) = (x - 2)^2 + 5$, o vértice V é dado por: $V(2, 5)$.

2. Para a função quadrática $f(x) = 2(x+2)^2 -7$, o vértice V é dado por: $V(-2, -7)$.

3. Para a função quadrática $f(x) = -3(x - 2)^2 - 4$, o vértice V é dado por: $V(2, -4)$.

Para o eixo de simetria de cada uma das parábolas anteriores das funções quadráticas temos:

1. Para a função quadrática $f(x) = (x - 2)^2 + 5$, o eixo de simetria é a reta de equação $x = 2$.

2. Para a função quadrática $f(x) = 2(x + 2)^2 - 7$, o eixo de simetria é a reta de equação $x = -2$.

3. Para a função quadrática $f(x) = -3(x - 2)^2 - 4$, o eixo de simetria é a reta equação $x = 2$.

Exercício 7.7 *Seja a função quadrática:*

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 5.$$

1. *Escreva a função dada na forma canônica.*

2. *Determine o vértice da função quadrática $f(x)$.*

3. *Deduzir que o eixo de simetria é a reta de equação $x = 2$.*

Solução. Seja a função quadrática $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$.

1. A forma canônica da função quadrática $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = -3(x-1)^2 + 8.$$

2. As coordenadas do vértice V da parábola da função quadrática $f(x)$ é dada $V(1, 8)$.

3. O eixo de simetria da parábola da função quadrática $f(x)$ é a reta de equação $\quad = 1$.

Exercício 7.8 Máximo de uma função quadrática.

> *Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = -3x^2 - 6x + 1$*
>
> 1. *Exibir a forma canônica da função quadrática f, sobre a forma: $f(x) = a(x - x_0)^2 + M$.*
> 2. *Calcule $f(x) - M$, e verifique se para todo real x, $f(x)$ é menor que M.*
> 3. *Deduzir a existência de um máximo de f que será especificado, e estudar as variações da função quadrática $f(x)$.*

Solução.

1. Podemos aplicar a fórmula:

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Assim, obtemos:

$$f(x) = -3(x+1)^2 + 4.$$

Esta expressão pode ser obtida por uma manipulação direta.

2. Podemos observar que: $M = 4$ e $x_0 = -1$, assim temos: $f(x) - M = -3(x+1)^2$, logo,

$$f(x) - 4 = -3(x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq M = 4, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

3. Usando a resposta do item 2), deduzimos que $M = 4$ é o máximo de f, que é atingido em $x_0 = -1$.

As variações da função quadrática $f(x) = -3x^2 - 6x + 1$ são dadas no quadro de variações:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Exercício 7.9 Mínimo de uma função quadrática.

Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

1. *Exibir a forma canônica da função quadrática f, sobre a forma: $f(x) = a(x - x_0)^2 + m$.*

2. *Calcule $f(x) - m$, e verifique se para todo real x, $f(x)$ é maior que m.*

3. *Deduzir a existência de um mínimo de f que será especificado, e estudar as variações da função quadrática $f(x)$.*

Solução.

1. Aplicando a fórmula $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos:

$$f(x) = 3(x-1)^2 - 2.$$

Esta expressão pode ser obtida por uma manipulação direta.

2. Podemos observar que: $m = -2$ e $x_0 = 1$, assim temos: $f(x) - m = 3(x - 1)^2$, logo,

$$f(x) + 2 = 3(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq m = -2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

3. Usando a resposta do item 2) , deduzimos que $m = -2$ é o valor mínimo de f, que é atingido em $x_0 = 1$.

As variações da função quadrática $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ são dadas no quadro de variações:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Exercício 7.10 *Seja as funções quadráticas:*

1. $f(x) = (x - 2)^2 + 5.$
2. $f(x) = 2(x + 2)^2 - 7.$
3. $f(x) = -3(x - 5)^2 - 4.$

Para cada uma dessa funções quadráticas:

1. *Determinar seu mínimo ou seu máximo,*
2. *Estudar as variações.*

Solução.

1. Como $(x - 2)^2 \geq 0$ temos:

$$f(x) - 5 = (x - 2)^2 \geq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $f(x) \geq 5$, para todo $x \in \mathbb{R}$, assim, $m = 5$ é o valor mínimo da função $f(x) = (x - 2)^2 + 5$, que é atingido em $x_0 = 2$.

As variações da função quadrática $f(x) = (x-2)^2+5$ são dadas no quadro de variações:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

2. Como $2(x + 2)^2 \geq 0$ temos:

$$f(x) + 7 = 2(x + 2)^2 \geq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $f(x) \geq -7$, para todo $x \in \mathbb{R}$, assim, $m = -7$ é o valor mínimo da função $f(x) = 2(x + 2)^2 - 7$, que é atingido em $x_0 = -2$.

As variações da função quadrática $f(x) = 2(x + 2)^2 - 7$ são dadas no quadro de variações:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

3. Como $-3(x - 5)^2 \leq 0$ temos:

$$f(x) + 4 = -3(x - 5)^2 \leq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $f(x) \leq -4$, para todo $x \in \mathbb{R}$, assim, $M = -4$ é o valor máximo da função $f(x) = -3(x - 5)^2 - 4$, que é atingido em $x_0 = 5$.

As variações da função quadrática $f(x) = -3(x - 5)^2 - 4$ são dadas no quadro de variações:

x	$-\infty$	5	$+\infty$
		-4	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
	$-\infty$		$-\infty$

Exercício 7.11 *(UfSCar-SP) Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação* $h(t) = -2t^2 + 8t\,(t \geq 0)$ *, onde t é o tempo medido em segundo e h(t) é a altura em metros da bola no instante t. Determine, após o chute:*

1. *O instante em que a bola retornará ao solo.*
2. *A altura máxima atingida pela bola.*

Solução.

1. Houve dois momentos em que a bola tocou o chão: o primeiro foi antes de ela ser chutada e o segundo foi quando ela terminou sua trajetória e retornou para o chão. Em ambos os momentos a altura *h(t)* era igual a zero, sendo assim:

$$h(t) = -2t^2 + 8t = 0, \qquad \text{isto é,} \qquad -2t.(t-4) = 0.$$

Logo, temos $t = 4$, ou seja, Portanto, o segundo momento em que a bola tocou no chão foi no instante de quatro segundos.

2. A altura máxima atingida pela bola é dada pelo vértice da parábola. As coordenadas do seu vértice podem ser encontradas através da seguinte fórmula: $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$, e no caso apresentado, temos que encontrar apenas y_v:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8^2 - 4 \times (-2) \times 0}{4 \times (-2)} = 8.$$

Portanto, a altura máxima atingida pela bola foi de 8 metros.

Exercício 7.12 *Estudar o sinal das seguintes funções:*

1. $f(x) = x^2 - 3x - 4.$

2. $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

Solução. Para estudar o sinal das funções de segundo grau vamos aplicar as 4 etapas.

1. Para a função quadrática $f(x) = x^2 - 3x - 4$, temos:

$$a = 1, \quad b = -3 \quad \text{e} \quad c = -4.$$

Observamos que o valor numérico de a é positivo, isto é, a = 1 > 0. Temos que :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0.$$

Como $\Delta > 0$, a função quadrática f(x) possui duas raízes reais e distintas:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -1, \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 4.$$

Assim, como $a > 0$ e $\Delta > 0$, o sinal da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x - 4$ é dado por:

- $f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 4$,
- $f(x) > 0$ para $x < -1$ ou $x > 4$,
- $f(x) < 0$ para $-1 < x < 4$.

2. Para a função quadrática $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$, temos:

$$a = -3, \quad b = 2 \quad \text{e} \quad c = 1.$$

Observamos que o valor numérico de a é negativo, isto é, $a = -3 < 0$. Temos que:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 22 - 4 \times (-3) \times 1 = 16 > 0.$$

Como $\Delta > 0$, a função quadrática $f(x)$ possui duas raízes reais e distintas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1}{3}, \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 1.$$

Assim, como $a < 0$ e $\Delta > 0$, o sinal da função quadrática $f(x) = -3x^2+2x+1$ é dado por:

- $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 1$,
- $f(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{3}$ ou $x > 1$,
- $f(x) > 0$ para $-\frac{1}{3} < x < 1$.

Exercício 7.13 *Estudar o sinal das seguintes funções:*

1. $f(x) = x^2 + 4x + 4.$
2. $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$

Solução.

1. Para a função quadrática $f(x) = x^2 + 4x + 4$, temos:

$$a = 1, \quad b = 4 \quad \text{e} \quad c = 4.$$

Observamos que o valor numérico de a é positivo, isto é, $a = 1 > 0$. Temos que :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 42 - 4 \times 1 \times 4 = 0.$$

Como $\Delta = 0$, a função quadrática $f(x)$ possui uma raíz real (dupla):

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 1} = -2.$$

Assim, como $a > 0$ e $\Delta = 0$, o sinal da função quadrática $f(x) = x^2 + 4x + 4$ é dado por:

- $f(x) = 0$ para $x = -2$,
- $f(x) > 0$ para $x > -2$ ou $x < -2$,

2. Para a função quadrática $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$, temos:

$$a = -2, \quad b = 4 \quad \text{e} \quad c = -2.$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = - \ = -2.$$

Observamos que o valor numérico de a é negativo, isto é, $a = -2 < 0$. Temos que:

$$\Delta = b^2 - 4^{ac} = 42 - 4 \times (-2) \times (-2) = 0.$$

Como $\Delta = 0$, a função quadrática $f(x)$ possui uma raíz real (dupla):

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-2)} = 1.$$

Assim, como $a < 0$ e $\Delta = 0$, o sinal da função quadrática $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$ é dado por:

- $f(x) = 0$ para $x = 1$,
- $f(x) < 0$ para $x > 1$ ou $x < 1$,

Exercício 7.14 *Estudar o sinal das seguintes funções:*

1. $f(x) = x^2 + 2x + 8$.

2. $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

Solução.

1. Para a função quadrática $f(x) = x^2 + 2x + 8$, temos:

$$a = 1, \quad b = 2 \quad \text{e} \quad c = 8.$$

Observamos que o valor numérico de a é positivo, isto é, $a = 1 > 0$. Temos que :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 22 - 4 \times 1 \times 8 = -28 < 0.$$

Como $\Delta < 0$, a função quadrática $f(x)$ não possui raízes reais:

Assim, como $a > 0$ e $\Delta < 0$, o sinal da função quadrática $f(x) = x^2+2x+8$ é dado por:

$$f(x) > 0 \text{ para todo número real } x.$$

2. Para a função quadrática $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$, temos:

$$a = -2, \quad b = 4 \quad \text{e} \quad c = -3.$$

Observamos que o valor numérico de a é negativo, isto é, $a = -2 < 0$. Temos que :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 42 - 4 \times (-2) \times (-3) = -8 < 0.$$

Como $\Delta < 0$, a função quadrática $f(x)$ não possui raízes reais. Assim, como $a < 0$ e $\Delta < 0$, o sinal da função quadrática $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$ é dado por:

$$f(x) < 0 \text{ para todo número real } x.$$

CAPÍTULO 8

Funções Polinomiais e Funções Racionais

Objetivos

Neste capítulo vamos apresentar as funções polinomiais e as funções racionais. Vamos revisar alguns tópicos que serão importantes para o estudo com as funções polinomiais associadas que são uma generalização das funções do segundo grau

8.1 Funções Polinomiais

8.1.1 Funções Polinomiais: Definição

Chamamos de função polinomial qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

onde:

- a_0, a_1, ..., a_n com $a_n \neq 0$, são números reais chamados de **coeficientes** de f,
- n é um número inteiro não negativo chamado de **grau da função**.

O domínio é sempre o conjunto dos números reais.

O gráfico de uma função polinomial é uma curva que pode apresentar pontos de máximos e mínimos.

Uma função polinomial é a soma algébrica de funções de **monômios**, que são definidas por

$$u_j(x) = aj^{x^j} \text{ onde } 0 \leq j \leq n.$$

Como $a_n \neq 0$, temos que o número n irá desempenhar um papel importante nas propriedades dos polinômios, como adição e multiplicaçã de polinômio, bem como, no número de soluções das equações polinomiais $P(x) = 0$. Portanto, adotamos a seguinte terminologia:

Definição 8.1 *Seja a função polinomial* $f(x) = a_n x^n + a_{n-!} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *não nula tal que* $a_n \neq 0$. *Dizemos que a função polinomial f é de grau n ou simplesmente que o polinômio f é de grau n, e escrevemos n = deg(f). Isto é, se f é uma função polinomial não nula, seu grau é o maior inteiro n tal que* $a_n = 0$. *Temos por convenção que o grau da função polinomial nula é* $-\infty$.

Às vezes, também dizemos que n é o grau da função polinomial f ou simplesmente que o polinômio f tem grau n. Por exemplo,

O polinômio $f(x) = 7$ é de grau 0.

O polinômio $g(x) = -3x + 1$ é de grau 1.

O polinômio $h(x) = 5x^2 - 3x + 1$ é de grau 2.

O polinômio $s(x) = 7x^3 - 3x + 1$ é de grau 3.

O polinômio $t(x) = 3 + 5x - 4x^2 + 3x^5$ é de grau 5.

O grau de um polinômio é expresso através do maior expoente natural entre os monômios que o formam. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 8.1 *Temos vários tipos de funções polinômios:*

1. *A função polynomial* $f(x) = k$, *onde* $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$, *é uma função polinomial constante de grau* 0.

2. *A função polynomial* $f(x) = ax+b$, *com* $a \neq 0$, *é uma função polinomial de grau* 1.

3. *A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma função polinomial de grau 2.*

4. *A função $f(x) = x^3$ é uma função polinomial de grau 3, chamada de função cúbica.*

5. *A função $f(x) = 3x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, onde a, b, c, d e e são números reais, é uma função polinomial de grau 5.*

Polinômio nulo. Dizemos que um polinômio é nulo quando todos os seus coeficientes forem iguais a zero, isto é, $P(x) = 0$.

Identidade entre polinômios. Dois polinômios são idênticos quando todos os seus coeficientes são números iguais.

Exemplo 8.2 *Determine os valores de a, b e c para que:*

$$ax^2 + (b + 3)x + (c - 7) = -2x^2 + 6x - 9$$

Para que esses polinômios sejam idênticos os coeficientes de mesmo grau precisam ser iguais, então:

$$a = -2,$$

Como $b + 3 = 6$ ou seja, $b = 6 - 3$, logo $b = 3$. Também, como $c - 7 = -9$, ou seja, $c = -9 + 7$, isto é, $c = -2$.

8.1.2 Operações com Funções Polinomiais

Adição. A soma de duas funções polinomiais é feita, adicionando os termos semelhantes de mesmo grau dos polinômios.

Exemplo 8.3 *Sejam as duas funções polinomiais:*

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 7x + 9 \text{ e } g(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$$

Temos $f(x)+g(x) = (4x^3 +3x^2 +7x+9)+(x^3 +2x^2 -5x+3)$. *Eliminando os parênteses, temos:*

$$f(x) + g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 7x + 9 + x^3 + 2x^2 - 5x + 3.$$

Adicionamos os termos de mesmo grau, obtemos:

$$f(x) + g(x) = 5x^3 + 5x^2 + 2x + 12.$$

Subtração. A diferença de dois polinômios é feita adicionando o primeiro polinômio com o oposto de cada termo do segundo polinômio.

Exemplo 8.4 *Sejam as duas funções polinomiais:*

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 7x + 9 \text{ e } g(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$$

Temos $f(x)-g(x) = (4x^3 +3x^2 +7x+9)-(x^3 +2x^2 -5x+3)$. *Eliminando os parênteses e trocando os sinais dos termos do segundo polinômio, temos:*

$$f(x) - g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 7x + 9 - x^3 - 2x^2 + 5x - 3.$$

Adicionamos os termos de mesmo grau, obtemos:

$$f(x) + g(x) = 3x^3 + x^2 + 12x + 6.$$

Multiplicação. No produto de dois polinômios:

1. Aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição ou subtração,
2. Adicionamos os termos de mesmo grau.

Exemplo 8.5 *Sejam as duas funções polinomiais:*

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 7x + 9 \text{ e } g(x) = x + 1,$$

temos que $f(x).g(x) = (4x^3 + 3x^2 + 7x + 9)(x + 1)$.

Etapa 1 : Aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição ou subtração: $f(x).g(x) = (4x^3+3x^2+7x+9)x+(4x^3+3x^2+7x+9).1$, *logo* $f(x).g(x) = (4x^4 + 3x^3 + 7x2 + 9x) + (4x^3 + 3x^2 + 7x + 9)$.

Etapa 2: Eliminamos os parênteses e adicionamos os termos de mesmo grau, obtemos:

$$f(x).g(x) = 4x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 16x + 9.$$

8.1.3 Divisão das funções polinomiais

A divisão pode ser feita por meio de um algoritmo simples que simula a divisão de números inteiros.

Exemplo 8.6 *Sejam as duas funções polinomiais:*

$$f(x) = x^3 + x^2 \text{ e } g(x) = x - 1$$

Escrevemos a divisão da função polinomial $f(x)$ *por* $g(x)$, *sobre a forma:*

$$f(x) : g(x) \text{ ou } (x^3 + x^2) : (x - 1)$$

Assim, temos :

Dividendo: $x^3 + x^2$ (*grau* 3)

Divisor: $x - 1$

Para efetuar a divisão de uma função polinomial por outra, vamos adotar o seguinte algoritmo:

1. Divide-se o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor:

$$\begin{array}{ll|l} x^3 & +x^2 & x \\ \cline{3-3} & & x^2 \end{array}$$

2. Multiplica-se o quociente pelo divisor:

$$x^2(x-1) = x^3 - x^2$$

3. Subtrai-se o resultado da multiplicação do dividendo (esta subtração é feita adicionando o oposto do produto ao dividendo).

$$\begin{array}{rr|lll} x^3 & +x^2 & x & & \\ \cline{3-5} -x^3 & +x^2 & x^2 & +2x & +2 \\ \cline{1-2} & 2x^2 & & & \end{array}$$

4. Repetem-se os passos anteriores, considerando como dividendo o resultado da subtração:

$$\begin{array}{rrrr|lll} x^3 & +x^2 & & & x & & \\ \cline{5-7} -x^3 & +x^2 & & & x^2 & +2x & +2 \\ \cline{1-2} & 2x^2 & & & & & \\ & -2x^2 & +2x & & & & \\ \cline{2-3} & & 2x & & & & \\ & & -2x & +2 & & & \\ \cline{3-4} & & & +2 & & & \end{array}$$

Assim, deduzimos que na divisão da função polinomial $f(x) = x^3 + x^2$ por $g(x) = x - 1$, temos:

Quociente: $q(x) = x^2 + 2x + 2$,

Resto: $r(x) = +2$.

Como no caso dos números inteiros, escrevemos:

$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ *ou seja* $x^3 + x^2 = (x^2 + 2x + 2)(x - 1) + 2$

A divisão chega ao fim quando tem-se como resto um polinômio de grau menor que o grau do divisor.

A seguir temos um teorema que é muito importante:

Teorema 8.1 *(Teorema do Resto):*

A divisão do polinômio $P(x)$ pelo fator linear $(x - r)$ é igual o número real $P(r)$, isto é,

$$P(x) = q(x)(x - r) + P(r).$$

Exemplo 8.7 *Determine o valor de m de modo que a divisão do polinômio $f(x) = (m - 4)x^3 - mx^2 - 3$ por $g(x) = x - 2$ dê resto* 5.

Usando o Teorema de resto, temos que $f(x) = q(x)(x - 2) + f(2) = (m - 4)x^3 - mx^2 - 3$, deduzimos que: $f(2) = (m - 4) \times 2^3 - m \times 2^2 - 3 = 4m - 35 = 5$. Logo, temos $m = 10$.

Pelo Teorema do Resto observamos que se r é uma raiz do polinômio

$P(x)$, isto é, se $P(r) = 0$, então P é divisível por $(x - r)$, isto é

$$P(x) = Q(x)(x - r).$$

Este resultado é conhecido como Teorema de D'Alembert. Generalizando este resultado, se $P(x)$ é divisível pelos fatores lineares $(x-r_1)$, $(x-r_2)$, ..., $(x-r_k)$, então P também é divisível pelo produto: $(x-r_1).(x-r_2)...(x-r_k)$; isto é,

$$P(x) = (x - r_1).(x - r2)...(x - r_k)$$

onde os números r_1; r_2; ..., r_k são todos raízes de $P(x)$.

A divisão de funções polinomiais (ou simplesmente polinômio) é importante para a decomposição em elementos simples das funções definidas por frações racionais.

8.2 Funções racionais

8.2.1 Definição de uma função racional

Lembra-se que uma função polinomial é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ com $a_0 \neq 0$, são números reais chamados **coeficientes** de f, e n é um número inteiro não negativo, chamado de **grau da função**. E denotamos: $n = grau(f)$.

Definição 8.2 *Sejam* $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$, $(a_0 \neq 0)$ *e* $Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_{m-1} x + b_m$, $(b_0 \neq 0)$ *duas funções polinomiais. Uma Função Racional é a função definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é:*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } Q(x) \neq 0.$$

Por exemplo, a função definida:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 3,}$$

é uma função racional, porque ela é o quociente das seguintes funções polinomiais:

$$P(x) = 2x - 3 \text{ e } Q(x) = x^2 + 3.$$

De maneira semelhante, a função $g(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 3x + 1}$, é uma função racional, onde o numerador é a função polinomial $P(x) = x^3 + 2x - 1$ e o denominador é a função polinomial $Q(x) = x^2 + 3x + 1$.

8.2.2 Domínio de uma função racional

O domínio da função racional é o conjunto dos números reais excluindo aqueles tais que $Q(x) \neq 0$, isto é:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } Q(x) \neq 0\}.$$

Por exemplo, Seja a função inversa: $f(x) = \dfrac{1}{x}$. A função inversa é uma função racional, que é o quociente dos polinômios:

1. $P(x) = 1$, o numerador,

2. $Q(x) = x$, o denominador.

Como $Q(x) = x \neq 0$ para x $\neq$ 0, deduzimos que o domínio da função inversa é:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= R^*.$$

Outro exemplo, seja a função racional: $f(x) = \dfrac{5}{x - 2}$. A função f é uma função racional, onde o quociente é dado pelos polinômios:

1. $P(x) = 5$,

2. $Q(x) = x - 2$.

Como $Q(x) = x - 2 \neq 0$ para $x \neq 2$, deduzimos que o domínio da função f é:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[.$$

8.3 Formas de funções racionais e estudo do seus sinais

8.3.1 Tipos de funções racionais

Sejam $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $(a_0 \neq 0)$ e $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m$, $(b_0 \neq 0)$ duas funções polinomiais. Seja a função racional:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } Q(x) \neq 0.$$

Na prática, temos os graus n e m das funções polinomiais $P(x)$ e $Q(x)$, respectivamente, assim a função racional $f(x)$ toma a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m}.$$

A função racional $f(x)$ pode assumir um dos três tipos de formas, dependendo do grau da função polinomial do numerador e do grau da função polinomial do denominador.

Tipo I: **Se** *grau(P) > grau(Q).*

Por exemplo, para *grau*(*P*) = 3 e *grau*(*Q*) = 2, temos a forma:

$$f(x) = \frac{7x^3 - 3x + 1}{x^2 + 1},$$

Tipo II: Se *grau(P) < grau(Q).*

Por exemplo, para *grau*(*P*) = 2 e *grau*(*Q*) = 5, temos a forma:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{7x^5 - 3x^2 + 1},$$

Tipo III: Se *grau*(*P*) = *grau*(*Q*).

Por exemplo, para *grau*(*P*) = *grau*(*Q*) = 3, temos a forma:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{7x^3 - 3x^2 + 1}.$$

8.4 Estudo do sinal de uma função racional

No estudo do cálculo muitas vezes precisamos fazer o estudo do sinal de uma função racional, bem como investigar intervalos de crescimento e decrescimento da função e fazer a representação gráfica dessas funções. Como a função racional pode variar muito, pois ela é uma função dada pelo quociente de dois polinômios, neste material vamos discutir alguns casos que são comuns em alguns livros didáticos de Cálculo I.

Fazer o estudo do sinal de uma função racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ é investigar:

1. Se ela admite raízes reais, isto é, determinar os números reais x que são soluções da equação $f(x) = 0$,

2. Estudar os intervalos em que a função é positiva, isto é determinar o conjunto $\{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$, e onde ela é negativa, isto é, determinar o conjunto $\{x \in \mathbb{R}, f(x) < 0\}$.

Para isso precisamos analisar, ao mesmo tempo, os polinômios que compõem essa função racional. Assim, dada a função racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $Q(x) \neq 0$, iremos:

Etapa 1: Investigar se a função f admite raízes reais estudando se o polinômio do numerador admite raiz, lembrando de excluímos os pontos em que $Q(x) \neq 0$, que são os pontos que não fazem parte do domínio da função racional. Depois, determinar os números reais x que são soluções da equação $P(x) = 0$, para $x \in \mathbb{R}$ tal que $Q(x) \neq 0$.

Etapa 2: Investigar os intervalos em que a função f é positiva e negativa estudando o sinal dos dois polinômios que compõem a função f, para isso precisamos determinar os seguintes conjuntos:

$\{x \in \mathbb{R}, P(x) > 0\}$, $\{x \in \mathbb{R}, P(x) < 0\}$, $\{x \in \mathbb{R}, Q(x) > 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}, Q(x) < 0\}$,

Etapa 3: Agora, como o sinal de um quociente $\frac{a}{b}$ (com $b \neq 0$) é o quociente dos sinais de a e b, podemos então deduzir os intervalos de $\mathbb{R}$ onde o sinal da função racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ é positivo ou negativo.

As vezes, o sinal de f é apresentado em forma de tabela, pois define a caracterização dos intervalos em que f é positiva ou negativa.

Vejamos alguns exemplos para compreender melhor.

Exemplo 8.8 *Vamos observar o estudo do sinal da função a seguir:*

$$f(x) = \frac{4x + 5}{x^2 - 1}.$$

Temos que $x^2 - 1 = 0$ *quando*: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = 0$, *logo* $x = 1$ *ou* $x = -1$. *Assim, o domínio da função racional f é todo* $D_f = \{x \in \mathbb{R}, x \neq -1 \text{ ou } x \neq 1\}$.

Etapa 1: *Vamos investigar se a função admite raízes reais. Neste caso:* $P(x) = 4x + 5 = 0$ *implica que* $x = -\frac{5}{4}$. *Assim, como* $x = -\frac{5}{4} \in D_f$, *temos que* $f(x) = 0$ *para* $x = -\frac{5}{4}$.

Etapa 2: *Agora vamos determinar os intervalos em que cada função polinomial* $P(x) = 4x + 5$ *e* $Q(x) = x^2 - 1$ *é positiva ou negativa.*

a. Temos $P(x) = 4x + 5 > 0$ *para* $4x > -5$, *logo* $x > -\frac{5}{4}$. *Também, temos* $P(x) = 4x + 5 < 0$ *para* $4x < -5$, *logo* $x < -\frac{5}{4}$. *Assim, o sinal da função polinomial* $P(x)$ *é dado por :*

1. $P(x) > 0$, *para* $x \in]-\frac{5}{4}, +\infty[$,
2. $P(x) < 0$, *para* $x \in]-\infty, -\frac{5}{4}[$.

b. A função polinomial $Q(x) = x^2 - 1$ *é uma função de segundo grau, cujos raizes são -1 e 1. Assim, o sinal da função polinomial* $Q(x)$ *:*

1. $Q(x) > 0$, *para* $x \in]-\infty, -1[$ *ou* $x \in]1, +\infty[$,
2. $Q(x) < 0$, *para* $x \in]-1, 1[$.

Etapa 3: Sinal da função *$f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-1}$. Temos que:*

1. $f(x) = 0$, *para* $x = -\dfrac{5}{4}$.
2. $f(x) > 0$, *para* $x \in \left]-\dfrac{5}{4}, -1\right[$ *ou* $x \in]1, +\infty[$.
3. $f(x) < 0$, *para* $x \in \left]-\infty, -\dfrac{5}{4}\right[$ *ou* $x \in]-1, 1[$.

A discussão anterior pode ser resumida na forma de uma tabela, da seguinte forma:

x	$-\infty$		$-5/4$		-1		1		$+\infty$
sinal de $4x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
sinal de x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
sinal de $f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	

8.5 Decomposição em elementos simples das funções racionais

A decomposição em elementos simples das frações racionais é uma ferramenta importante para o estudo dessas funções, em particular para o cálculo de integrais e a busca de funções primitivas. Vamos propor aqui exemplos simples de decomposições em elementos de frações racionais.

Exemplo 8.9 *Seja a função racional $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$. Podemos escrever $q(x) \neq 0$, isto é, $Q(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \neq 0$* para *$x \neq -1$ e $x \neq 2$, deduzimos que o domínio da função f é:*

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq -1 \text{ e } x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}.$$

A função racional pode tomar a forma:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}.$$

isto é:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1.(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{1.(x+1)}{(x+1).(x-2)} = \frac{(x-2)+(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

Assim, deduzimos que

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-1}{x^2-x-1} = f(x).$$

Assim, temos a seguinte forma da função racional f:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2},$$

que é chamada **decomposição em elementos simples** *da função racional.*

Exemplo 8.10 *Seja a função racional* $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+4}{x^3-3x^2+4}$. *Podemos verificar que* $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2 \neq 0$ *para* $x \neq -1$ *e* $x \neq 2$, *deduzimos que o domínio da função f é:*

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq -1 \text{ e } x \neq 2\} = \mathrm{R} \setminus \{-1, 2\}.$$

A função racional pode tomar a forma:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}.$$

isto é:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} &= \frac{1.(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{1.(x+1)}{(x+1).(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2}.\end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2} &= \frac{(2x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} + \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(x-2)+2(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}..\end{aligned}$$

Como $(2x-1)(x-2)+2(x+1) = 2x^2-3x+3$ *e* $(x+1)(x-2)^2 = x^3-3x^2+4$, *deduzimos que:*

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{(2x-1)(x-2)+2(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{2x^2-3x+3}{x^3-3x^2+4}=f(x).$$

Assim, temos a decomposição em elementos simples da função racional f:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}.$$

8.6 Exercícios

Exercício 8.1 *Sejam as funções polinomiais* $f(x) = (m-4)x^3+(m^2-16)x^2+(m+4)x+4$ e $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 7$.

1. *Determine* $f(x) + g(x)$,

2. *Determine* $f(x) - g(x)$,

Solução. Regra: A soma de duas funções polinomiais é feita, adicionando os termos semelhantes de mesmo grau dos polinômios.

1. Temos:

$$f(x)+g(x) = (m-4)x^3 + (m^2-16)x^2 + (m+4)x + 4 + x^3 - 2x^2 + x - 7.$$

Aplicando a regra vista anteriormente, obtemos:

$$f(x) + g(x) = (\mathrm{m} - 3)x^3 + (m^2 - 18)x^2 + (m+5)x - 3.$$

2. Também, aplicando a **Regra**: A diferença de duas funções polinomiais é feita subtraindo os termos semelhantes de mesmo grau dos polinômios, obtemos:

$$f(x) - g(x) = (m-5)x^3 + (m^2-14)x^2 + (m+3)x + 11.$$

Exercício 8.2 *(Mack-SP) Para quais valores de m a função polinomial* $f(x) = (m-4)x^3 + (m^2-16)x^2 + (m+4)x + 4$ *é de grau 2?*

Solução. O polinômio $f(x) = (m-4)x^3 + (m^2-16)x^2 + (m+4)x + 4$ é de grau 2 se, e somente se, o coeficiente do termo de grau 3 é zero, isto é, $m-4 = 0$. Logo, o polinômio $f(x) = (m-4)x^3+(m^2-16)x^2+(m+4)x+4$ é de grau 2 se, e somente se, $m = 4$. Assim, para $m = 4$, temos:

$$f(x) = 8x + 4.$$

Vemos que, neste caso, o polinômio é de grau 1.

Conclusão: não existe m tal que o polinômio $f(x) = (m-4)x^3 + (m^2-16)x^2 + (m+4)x + 4$ seja exatamente de grau 2.

Exercício 8.3 *Sabe-se que a função polinomial* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem *as seguintes propriedades:* $f(1) = 0$ e $f(-x) + f(x) = 0$, *para todo número real* x. *Determine* $f(2)$.

Solução. Como $f(1) = 0$ temos:

$$f(1) = 1 + a - b + c = 0 \Leftrightarrow a + b + c = -1.$$

Como $f(-x) = -x^3 + ax^2 - bx + c$ e $f(-x) + f(x) = 0$, deduzimos:

$$f(-x) + f(x) = 2ax + 2c = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando a **Regra: Identidade entre polinômios**. *Dois polinômios são idênticos quando todos os seus coeficientes são números iguais, deduzimos que:*

$$2a = 0 \text{ e } 2c = 0 \text{ ou seja } a = c = 0.$$

Logo, deduzimos $b = -1$, assim o polinômio $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ é dado por:

$$f(x) = x^3 + 0.x^2 + (-1)x + 0 = x^3 - x.$$

Assim, obtemos: $f(2) = 6$.

Exercício 8.4 *Determine as constantes a e b para que o polinômio* $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x$ seja divisível pelo polinômio $g(x) = x^2 + 1$.

Solução. Sabemos que a divisão pode ser feita por meio de algoritmo simples que simula a divisão de números inteiros, assim vamos aplicar este algoritmo nesta situação. Como $f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$, então o dividendo $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x$ é divisível pelo polinômio $g(x) = x^2 + 1$ se, e somente se, $R(x) = 0$. Temos:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +ax^3 & +bx^2 & +2x & & x^2 \quad +1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -x^2 & & & x^2 \quad +ax \quad +b-1 \\ \cline{1-4}
& ax^3 & +(b-1)x^2 & +2x & & \\
& -ax^3 & & -ax & & \\ \cline{2-4}
& & (b-1)x^2 & +(2-a)x & & \\
& & -(b-1)x^2 & & -(b-1) & \\ \cline{3-5}
& & & (2-a)x & -(b-1) &
\end{array}
$$

Então, com este algoritmo, obtemos que o resto da divisão de $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x$ pelo polinômio $g(x) = x^2 + 1$ é dado por: $R(x) = (2-a)x - (b-1)$. Logo, o polinômio $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x$ é divisível pelo polinômio $g(x) = x^2 + 1$ se, e somente se, $R(x) = (2 - a)x - (b - 1) = 0$, ou seja,

$$2 - a = 0 \text{ e } b - 1 = 0.$$

Conclusão: o polinômio $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x$ é divisível pelo polinômio $g(x) = x^2 + 1$ se, e somente se, $a = 2$ e $b = 1$.

Exercício 8.5 *Em uma divisão de polinômio, o divisor é* $D(x) = x^3 - x^2 + 3$, *o quociente é* $q(x) = x + 2$ *e o resto é* $R(x) = x^2 - 9$. *Determine o dividendo*

Solução. O dividendo é dado por $P(x) = D(x)q(x) + R(x)$, logo, temos:

$$P(x) = (x^3 - x^2 + 3)(x + 2) + x^2 - 9 = x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 3.$$

Exercício 8.6 *Seja a função* $f(x) = \frac{5x-3}{x-2}$.

1) Justifique que f é uma função racional.

2) Determine o domínio da função f.

Solução. A função f é uma função racional, pois é o quociente dos polinômios:

- $P(x) = 5x - 3$
- $Q(x) = x - 2$

Como $Q(x) = x - 2 \neq 0$ para $x \neq 2$, deduzimos que o domínio da função f:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[.$$

Exercício 8.7 *Seja a função* $f(x) = \frac{7x^3 - 3x + 1}{x^2 + 1}$.

1) Justifique que f é uma função racional.

2) Determine o domínio da função f.

Solução. A função f é uma função racional, pois é o quociente dos polinômios:

- $P(x) = 7x^3 - 3x + 1$
- $Q(x) = x^2 + 1$

Como $Q(x) = x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, deduzimos que o domínio da função f é:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } Q(x) = x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}.$$

Exercício 8.8 *Seja a função* $f(x) = \dfrac{7x^3 - 3x + 1}{x^4 + 5x^2 + 10}$.

1) Justifique que f é uma função racional.

2) Determine o domínio da função f.

Solução. A função f é uma função racional, pois é o quociente dos polinômios:

- $P(x) = 7x^3 - 3x + 1$
- $Q(x) = x^4 + 5x^2 + 10$

Como $Q(x) = x^4 + 5x^2 + 10 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, deduzimos que o domínio da função f é:

- $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } Q(x) = x^4 + 5x^2 + 10 \neq 0\} = \mathbb{R}.$

Exercício 8.9 *Seja a função* $f(x) = \dfrac{7x^3 - 3x + 1}{x^2 - 9}$.

1) Justifique que f é uma função racional.

2) Determine o domínio da função f.

Solução. A função f é uma função racional, pois é o quociente dos polinômios:

- $P(x) = 7x^2 - 3x + 1$
- $Q(x) = x^2 - 9$

Como $Q(x) = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \neq 0$ para $x \neq 3$ e $x \neq -3$, deduzimos que o domínio da função f é:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq -3 \text{ e } x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

Exercício 8.10 *Seja a função racional* $f(\mathrm{x}) = \dfrac{4}{(x-1)(x+1)}$.

1) *Verificar que:* $\dfrac{1}{(x-1)} - 1\ \dfrac{1}{(x+1)} = 2.\ \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$.

2) Deduzir que a decomposição em elementos simples da função racional f é dada por:

$$\mathrm{f(x)} = \frac{2}{(x-1)} - \frac{2}{(x+1)}.$$

3) Determine o domínio da função f.

Solução. Aqui, a computação é baseada na propriedade elementar da soma das frações.

1) Usando a identidade usual $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} + \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad+bc}{bd}$, temos:

$$\frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)},$$

Logo, obtemos $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = 2.\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$.

2) Usando a Questão 1, obtemos que:

$$2 \times \frac{2}{(x-1)(x+1)} = 2 \times \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

deduzimos que a decomposição em elementos simples da função racional f é dada por:

$$f(x) = 2 \times \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}.$$

3) Como $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)} - \dfrac{2}{(x+1)}$, a função f é definida para $x - 1 \neq 0$ e $x + 1 \neq 0$, assim $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Logo, deduzimos que o domínio da funçãof é:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Exercício 8.11 *Seja a função racional* $f(x) = \dfrac{2}{(x^3 - x)}$.

1) Verificar que:

$$f(x) = \frac{2}{x^3 - x} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)}$$

2) Mostrar que:

$$\frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)}.$$

3) Deduzir a decomposição em elementos simples da função racional f.

4) Determine o domínio da função f.

Solução. Aqui usaremos duas propriedades elementares, a saber, a propriedade da fatoração e a da soma de frações.

1) Como $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$, deduzimos que:

$$f(x) = \frac{2}{x^3 - x} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)}$$

2) Usando a identidade usual $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$, duas vezes seguidas, temos:

$$\frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2-x}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1},$$

assim, temos

$$\frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x - x^2 + 2 - x + x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)}.$$

3) Usando a Questão 2, deduzimos que a decomposição em elementos simples da função racional f, é dada por

$$f(x) = \frac{2}{x^3 - x} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

3) Como $f(x) = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$, a função f é definida para $x \neq 0$, $x - 1 \neq 0$ e $x + 1 \neq 0$, assim $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Logo, deduzimos que o domínio da função f é:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq 0,\ x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Exercício 8.12 *Seja a função racional* $f(x) = \frac{3x^2 - 10x + 6}{x(x-2)(x-3)}$.

1) Verificar que: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{3x^2 - 10x + 6}{x(x-2)(x-3)}$.

2) Deduzir que a decomposição em elementos simples da função racional f é dada por:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 10x + 6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

3) Determine o domínio da função f.

Solução. Aqui usaremos duas propriedades elementares, a saber, a propriedade da soma de frações e a da distributividade de um produto.

1) Usando a identidade usual $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$, duas vezesseguidas, temos:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-2}{x(x-2)} + \frac{1}{x-3},$$

assim, temos

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2(x-1)(x-3) + x(x-2)}{x(x-2)(x-3)} = \frac{3x^2 - 10x + 6}{x(x-2)(x-3)}.$$

2) Usando a Questão 1, deduzimos que a decomposição em elementos simples da função racional f, é dada por

$$f(x) = \frac{3x^2 - 10x + 6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

3) Como $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$, a função f é definida para $x \neq 0$, $x - 2 \neq 0$ e $x - 3 \neq 0$, assim $x \neq 0$, $x \neq 2$ e $x \neq 3$. Logo, deduzimos que o domínio da função f é:

$$D = \{x \in R \text{ tal que } x \neq 0,\ x \neq 2 \text{ e } x \neq 3\} = R \setminus \{0, 2, 3\}.$$

CAPÍTULO 9
Operações sobre as Funções - Função Inversa

Objetivos

Tratamos aqui das propriedades das operações usuais de adição e de multiplicação das funções reais. Estudamos também as propriedades da operação de composição das funções, bem como as funções inversas e seus papéis importantes.

9.1 Operações usuais sobre as funções

Sejam D_1 e D_2 dois subconjuntos do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, tal que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Sejam f, g duas funções reais, isto é:

$$f : D_1 \to \mathbb{R} \text{ e } g : D_2 \to \mathbb{R}.$$

Assim como podemos adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números reais, também podemos produzir novas funções através de operações dos números reais. Essas são produzidas como segue:

Definição 9.1 *Sejam D_1 e D_2 dois subconjuntos do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ tal que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. As operações de adicionar, de subtrair, de multiplicar e de dividir das funções, são definidas como o seguinte:*

1. Adicionar: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, *se* $x \in D_1 \cap D_2$,

2. Multiplicar: $(f^{\circ}\varnothing\, g)(x) = f(x) \times g(x)$, *se* $x \in D_1 \cap D_2$,

3. subtrair: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, *se* $x \in D_1 \cap D_2$,

4. dividir: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, *se* $x \in D_1 \cap D_2$ *com* $g(x) \neq 0$.

O domínio das funções $f+g$, $f-g$ e $f.g$ é a intersecção dos domínios de f e g. O domínio de $f\,g$ é a intersecção dos domínios de f e g, excluindo-se os pontos onde $g(x) \neq 0$.

Exemplo 9.1 *Sejam* $f(x) = \sqrt{7-x}$ *e* $g(x) = \sqrt{1-x}$ *Então, temos*:

1. *Adicionar*: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{7-x} + \sqrt{1-x}$,

2. *Multiplicar*: $(f.g)(x) = f(x).g(x) = \sqrt{7-x}.\sqrt{1-x}$,

3. *subtrair*: $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{7-x} - \sqrt{1-x}$,

4. *dividir*: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{1-x}}$.

Como $D(f) =]-\infty, 7]$ e $D(f) =]-\infty, 1]$, *então temos*:

- *o domínio* $f+g$, $f-g$ *e* $f.g$ *é*:

$$D(f) \cap D(g) =]-\infty, 7] \cap]-\infty, 1] = [1, 7].$$

- *o domínio* $\dfrac{f}{g}$ *é*:

$$D(f) \cap D(g) \backslash \{1\} =]-\infty, 7] \cap]-\infty, 1] \backslash \{1\} =]1, 7],$$

O número x = 1 foi excluído porque g(1) = 0.

9.2 Operação de composição de funções

A operação de composição é uma operação diferente das operações de adição, de multiplicação, de substração e de divisão das funções.

Definição 9.2 *Sejam duas funções* $f: D_1 \to \mathbb{R}$ *e* $g: D_2 \to \mathbb{R}$, *tais que*

$$f(D_1) = \{f(x),\ x \in D_1\} \subset D_2.$$

A função composta de g com f, denotada por gof, é definida por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os números x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio da função g. Simbolicamente:

$$D(g \circ f) = \{x \in D_1 \text{ tais que } f(x) \in D_2 = D(g)\}.$$

Exemplo 9.2 *Sejam* $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = x - 1$. *Encontre gof. Temos*

$$((g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1.$$

Como $D(f) = [0, +\infty[$ *e* $Im(f) = [0, +\infty[\subset D(g) = \mathbb{R}$, e*ntão deduzimos que:*

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \text{ tais que } f(x) \in D(g)\} = [0,+\infty[$$

9.3 Função inversa

O conceito de função inversa é importante para definir e estudar ligações entre muitas funções usuais, que são importantes para o Cálculo Diferencial e Integral. Nessa se.c ão introduzimos o conceito de função inversa. Para isso precisamos definir os conceitos de função injetora (ou injetiva), sobrejetora (sobrejetiva) e bijetora (bijetiva).

Definição 9.3 *Uma função*

$$f : D_1 \to D_2,$$

chama-se injetora quando elementos diferentes em D1 são levados, por f, em elementos diferentes, em D_2*, isto é, f é injetora quando:*

$$x \neq x' \text{ em } D_1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x').$$

Essa condição que pode ser escrita de forma equivalente do seguinte modo:

$$f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'.$$

Por exemplo, seja f: $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 2$. Mostre que f é injetora. Se $x \neq x'$ temos $3x \neq 3x'$, então

$$f(x) = 3x - 2 \neq 3x' - 2 = f(x').$$

Então, a função f é injetora.

Outro exemplo, seja g : $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$. Mostre que g é injetora. Se $g(x) = g(x')$ então $\sqrt{x} = \sqrt{x'}$. Assim, $\sqrt{x}^2 = \sqrt{x'}^2$ o que implica que $x = x'$. Então, a função g é injetora.

Definição 9.4 *Uma função*

$$f: D_1 \to D_2,$$

chama-se sobrejetora quando para qualquer elemento y em D_2 pode-se encontrar (pelo menos) um elemento x em D_1 tal que $f(x) = y$, isto é, f é sobrejetora quando:

Para todo $y \in D_2$ existe $x \in D_1$ tal que $y = f(x)$.

Por exemplo, seja f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x-3$. Mostre que f é sobrejetora. Seja $y \in \mathbb{R}$ então a equação $2x-3 = y$ implica que $x = \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R}$. Assim, podemos verificar que o número $x = \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R}$ satisfaz:

$$f\left(\frac{y+3}{2}\right) = y.$$

Então, a função f é sobrejetora.

Definição 9.5 *Uma função*

$$f : D_1 \to D_2,$$

uma bijeção (ou uma correspondência biunívoca) entre D_1 *e* D_2 *quando ao mesmo tempo é injetora e sobrejetora.*

Por exemplo, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x-3$. Mostre que f é sobrejetora. Seja $y \in \mathbb{R}$ então a equação $2x-3 = y$ implica que $x = \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R}$. Assim, podemos verificar que o número $x = \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R}$ satisfaz:

$$f\left(\frac{y+3}{2}\right) = y.$$

Então, a função f é sobrejetora. Se $x \neq x'$ temos $2x \neq 2x'$, então

$$f(x) = 2x - 3 \neq 2x' - 3 = f(x').$$

Então, a função f é injetora. Em conclusão, como a função f é injetora e sobrejetora, então f é uma bijeção.

Definição 9.6 *Seja f uma função bijetora cujo domínio é* D_1 *e cujo conjunto imagem é* D_2*. E seja g uma função real com valores reais, cujo domínio é* D_2*, isto é,*

$$f : D_1 \to D_2 \subset \mathbb{R} \text{ e } g : D_2 \to \mathbb{R},$$

A função inversa g de f, cujo domínio é D_2 *e cujo conjunto imagem é* D_1*, é definida por:*

$$g \circ f(x) = x \Rightarrow g[f(x)] = g(y) = x, \text{ onde } y = f(x) \in D_2.$$

Ou equivalentemente, a função inversa g da função f, denotada por $g = f^{-1}$*, tem domínio* D_2 *e seu conjunto imagem é* D_1*, é definida por:*

$$f^{-1}(y) = x \Rightarrow y = f(x), \text{ para todo } y \in D_2.$$

Por exemplo, sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$. Mostre que a função $g(x) = \frac{x+3}{2}$ é a função inversa da função f.

A função f é uma bijeção (veja o exemplo dado anteriormente). E temos:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+3}{2} = \frac{2x-3+3}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

Assim, a função g é a função inversa da função f.

9.4 Exercícios

Exercício 9.1 Sejam $f(x) = \sqrt{7-x}$ *e* $g(x) = x^2 + 3x + 7$. *Encontrar e estudar os domínios das seguintes funções:*

$$f + g, f - g \text{ e } f.g \text{ e } \frac{f}{g}$$

Solução. A função f é definida para $7 - x \geq 0$, isto é, $x \leq 7$, ou seja o domínio de f é $]-\infty, 7]$, isto é, $D(f) =]-\infty, 7]$. Como a função g é quadrática, então seu domínio é dado por $D(g) = \mathbb{R}$. Logo, as funções $f + g$, $f - g$ e $f.g$ são definidas no $]-\infty, 7]$. Para a função $g(x) = x^2 + 3x + 7$, temos $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 7 = -19 < 0$, assim $g(x) = x^2 + 3x + 7 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, porque $a = 1 > 0$. Então, a função $\frac{f}{g}$ é definida para todo $x \in]-\infty, 7]$. Assim, para todo $x \in]-\infty, 7]$, as expressões das funções $f + g$, $f - g$ e $f.g$ e $\frac{f}{g}$ são dadas por:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{7-x} + x^2 + 3x + 7;$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{7-x} - (x^2 + 3x + 7);$
3. $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2 + 3x + 7)\sqrt{7-x};$
4. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. = \frac{\sqrt{7-x}}{x^2 + 3x + 7}$

Exercício 9.2 *Sejam $g(x) = \sqrt{2x-2}$, para $x \geq 1$ e $f(x) = 3x - 7$, para $x \in \mathbb{R}$. Mostre que as funções f e g são injetoras.*

Solução. Lembre-se que uma função é injetora se:

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y),$$

ou equivalentemente,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

1. O domínio da função $g(x) = \sqrt{2x-2}$ é $[1, +\infty[$. A função é injetora. Portanto, sejam $x \in [1, +\infty[$ e $y \in [1, +\infty[$, se $g(x) = g(y)$ assim $\sqrt{2x-2}^2 = \sqrt{2y-2}^2$, logo temos $2x-2 = 2y-2$. Então, temos $x = y$. Assim, a função g é injetora.

2. O domínio da função $f(x) = 3x - 7$ é $\mathbb{R}$. A função é injetora. Portanto, sejam x e y em $\mathbb{R}$, se $f(x) = f(y)$ temos $3x - 7 = 3y - 7$. Então, temos $x = y$. Assim, a função g é injetora.

Exercício 9.3 *1) Seja g: $[0,+\infty[\to [0,+\infty[$ definida por $g(x) = \sqrt{2x}$. Mostre que g é sobrejetora.*

2) Seja $f(x) = 3x - 7$, para $x \in \mathbb{R}$. Mostre que a função f é sobrejetora.

Solução. Lembre-se que uma função $f: D \subset \mathbb{R} \to E \subset \mathbb{R}$ é sobrejetora se:

Para todo $y \in E$ existe $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

1. A função $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ definida por $g(x) = \sqrt{2x}$ é sobrejetora.

Portanto, seja $y \in [0,+\infty[$ e $x = \frac{y^2}{2}$, então temos:

$$g(x) = g(\frac{y^2}{2}) = \sqrt{2 \times \frac{y^2}{2}} = \sqrt{y^2} = y.$$

Assim, a função $g(x) = \sqrt{2x}$ é sobrejetora.

2. A função $f(x) = 3x - 7$, para $x \in \mathbb{R}$, é sobrejetora. Portanto, seja $y \in \mathbb{R}$, se $3x - 7 = y$ então $x = \frac{y+7}{3}$. Logo, temos:

$$f(x) = f(\frac{y+7}{3}) = 3 \times \frac{y+7}{3} - 7 = y + 7 - 7 = y.$$

Assim, a função $f(x) = 3x - 7$ é sobrejetora.

Exercício 9.4 1) *Seja* $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *definida por* $g(x) = \sqrt{2x}$. *Mostre que g é uma bijeção.*

2) Seja $f(x) = 3x - 7$, *para* $x \in \mathbb{R}$. *Mostrar que a função f é uma bijeção.*

Solução. Lembre-se que uma função é uma bijeção se ela é injetora e sobrejetora.

1. A função $g(x) = \sqrt{2x}$ de $[0,+\infty[$ em $[0,+\infty[$ é sobrejetora. Portanto, seja $y \in [0,+\infty[$ e $x = \frac{y^2}{2}$, então temos $g(x) = g(\frac{y^2}{2}) = \sqrt{2 \times \frac{y^2}{2}} = \sqrt{y^2} = y.$ Assim, a função $g(x) = \sqrt{2x}$ é sobrejetora.

A função $g(x) = \sqrt{2x}$ de $[0,+\infty[$ em $[0,+\infty[$ é injetora. Portanto, seja x, $y \in [0,+\infty[$ tais que $g(x) = g(y)$. Então, temos:

$$\sqrt{2x} = \sqrt{2y} \Rightarrow \sqrt{2x}^2 = \sqrt{2y}^2 \text{ ou seja } 2x = 2y,$$

logo, temos $x = y$. Assim a função g é injetora.

Conclusão, a função $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ definida por $g(x) = \sqrt{2x}$ é uma bijeção.

2. A função $f(x) = 3x - 7$, para $x \in \mathbb{R}$ é uma bijeção.

A função $f(x) = 3x-7$, para $x \in \mathbb{R}$, é sobrejetora. Portanto, seja $y \in \mathbb{R}$, se $3x - 7 = y$ então $x = \frac{y+7}{3}$. Logo, temos f(x) = f($\frac{y+7}{3}$) = 3 × $\frac{y+7}{3}$ – 7 = y + 7 – 7 = y. Assim, a função $f(x) = 3x - 7$ é sobrejetora.

A função é injetora. Portanto, sejam x e y em $\mathbb{R}$, se $f(x) = f(y)$ temos $3x - 7 = 3y - 7$. Então, temos $x = y$. Assim, a função g é injetora.

Conclusão, a função $f(x) = 3x - 7$, para $x \in \mathbb{R}$, é uma bijeção.

Exercício 9.5 *Sejam $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = 3x - 7$. Encontrar e estudar os domínios das seguintes funções: $g \circ f$; $f \circ g$; $f \circ f$; $g \circ g$.*

Solução. O domínio da função $g(x) = \sqrt{x}$ é $D_g = [0, +\infty[$ e o domínio da função $f(x) = 3x - 7$ é $D_f = \mathbb{R}$.

As expressões das funções compostas $g \circ f$; $f \circ g$; $f \circ f$; $g \circ g$ são dadas por:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{3x-7}$, para $3x - 7 \geq 0$, ou seja $x \geq \frac{7}{5}$.
2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 7 = 3\sqrt{x} - 7$, para $x \geq 0$.
3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = 3f(x) - 7 = 3(3x - 7) - 7 = 9x - 28$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\overline{4}}$, para todo $x \in [0, +\infty[$.

Exercício 9.6 *Sejam $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ e $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$. Mostre que g é a função inversa da função f.*

Solução. A função $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é uma bijeção. Portanto, a função f é injetora, porque se $f(x) = f(y)$, isto é, $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, temos $\sqrt{x}^2 = \sqrt{y}^2$ ou seja, $x = y$. Assim, a função f é injetora. Por outro lado, seja $y \in [0,+\infty[$, para $x = y^2$ temos $f(x) = f(y^2) = \sqrt{y^2} = y$. Então, a função f é sobrejetora. Logo, a função $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é uma bijeção.

A função $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ definida por $g(x) = x^2$ é uma bijeção. Portanto, se se $g(x) = g(y)$, isto é, $x^2 = y^2$, temos $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, como $x \geq 0$ e $y \geq 0$ temos $x = y$. Assim, a função g é injetora. Por outro, seja $y \geq 0$, para $x = \sqrt{y}$ temos $g(x) = g(\sqrt{y}) = \sqrt{y^2} = y$. Assim, a função g é sobrejetora. Logo, a função $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ definida por $g(x) = x^2$ é uma bijeção.

Com a composição das funções, temos:

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 = [\sqrt{x}]^2 = x,$$

e

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2} = x.$$

Em conclusão, a função g é a função inversa da função f.

Exercício 9.7 *Sejam* $f(x) = 3x - 7$ e $g(x) = \frac{x+7}{3}$, *para* $x \in \mathbb{R}$. *Mostre que a função g é a função inversa da função f.*

Solução. A função $f(x) = 3x - 7$, para $x \in \mathbb{R}$ é uma bijeção.

A função $f(x) = 3x{-}7$, para $x \in \mathbb{R}$, é sobrejetora. Portanto, seja $y \in \mathbb{R}$, se $3x - 7 = y$ então $x = \frac{y+7}{3}$. Logo, temos $f(x) = f(\frac{y+7}{3}) = 3 \times \frac{y+7}{3} - 7 = y + 7 - 7 = y$. Assim, a função $f(x) = 3x - 7$ é sobrejetora.

A função é injetora. Portanto, sejam x e y em $\mathbb{R}$, se $f(x) = f(y)$ temos $3x - 7 = 3y - 7$. Então, temos $x = y$. Assim, a função g é injetora.

Conclusão, a função $f(x) = 3x - 7$, para $x \in \mathbb{R}$, é uma bijeção.

Da mesma maneira, podemos estabelecer que a função $g(x) = \frac{x+7}{3}$, para $x \in \mathbb{R}$, é uma bijeção.

Com a composição das funções, temos:

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = \frac{f(x)+7}{3} = \frac{3x-7+7}{3} = \frac{3x}{3} = x,$$

e

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = 3g(x) - 7 = 3 \times \frac{x+7}{3} - 7 = x - 7 + 7 = x.$$

Em conclusão, a função g é a função inversa da função f.

CAPÍTULO 10
Funções Exponenciais

Objetivos

Neste capítulo, estudamos todas as funções exponenciais de base a, por meio da introdução do vocabulário relacionado às funções, e a ilustra.c ão de suas propriedades apresentando alguns exemplos. Também iremos trabalhar com a função exponencial de base e.

10.1 Funções exponenciais

10.1.1 Motivações e equação exponencial

As exponenciais são muito importantes, pois desempenham papel fundamental em várias aplicações, como por exemplo:

- Crescimentos ou decrescimentos populacionais.
- Decaimento radioativo associado a substâncias que decaem com o passar do tempo.
- Cálculo de juros, isto é, taxa fixa num tempo fixo, por exemplo, ano, mês e dia.

Definição 10.1 *Sejam* $x \in \mathbb{R}$, $a > 1$ *e* $b \geq 0$. *Chama-se equação exponencial a equação que tem a incógnita no expoente, isto é,*

$$ax = b.$$

Na Definição 10.1, observamos que a potência é definida para $a > 0$ e representa a generalização da potência de a com os inteiros naturais. Essa generalização é em detrimento da potência de um número negativo. Essa restrição se deve ao logaritmo de um número, que se tornou impossível para um valor real.

A expressão $f(x) = a^x$ aparece em várias aplicações concretas. Por exemplo, considere uma substância radioativa tal que sua massa inicial é m_0, medida em gramas. A variação da massa, isto é, a massa varia com o tempo, em termos do tempo em horas, segundo a seguinte fórmula,

$$m(t) = m_0 a^{bt},$$

onde a > 1 e b são constantes associadas à substância que decai.

Outra situação prática, para estudar o crescimento e decrescimento exponencial, são as funções exponenciais. Elas servem para modelar crescimento ou decrescimento populacionais. O modelo matemático que deu origem a função exponencial é conhecido como modelo de crescimento exponencial. De modo geral, se tivermos uma grandeza com valor inicial, C_0 que cresça (por exemplo, crescimento de uma população, juros compostos, dentre outros) a uma taxa igual a k por unidade de tempo, então, após um tempo t, medido na mesma unidade de k, o valor dessa grandeza, C, será dado por:

$$C(t) = C_0 a^t \text{ onde } a = 1 + k.$$

A fim de estudar esses modelos vamos introduzir o conceito de função exponencial. Observamos que vários autores preferem introduzir o conceito de logaritmo antes de exponencial. Todavia, neste texto escolhemos fazer primeiramente a apresenta.c ão do conceito de função exponencial para, em seguida, introduzirmos o conceito de função logarítmica.

10.2 Definição de exponencial

Como dito antes, na definição 10.1, observou-se que a potência é definida para $a > 0$ e que se trata da generalização das potências de a com os inteiros naturais. A função exponencial é definida usando a definição 10.1 da seguinte maneira.

Definição 10.2 *Chamamos de função exponencial de base a, a função de R em R que associa a cada x real o número real ax, sendo a um número real, $a \neq 1$ $a > 0$, ou:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ onde } x \, 7\!\to f(x) = a^x.$$

Exemplo 10.1 *As seguintes funções, são funções exponenciais:*

1. $f(x) = 4x$, *onde* $a = 4$.
2. $f(x) = (\frac{5}{3})^x$, *onde* $a = \frac{5}{3}$.
3. $f(x) = 10^x$, *onde* $a = 10$.

Observação 10.1 *Sobre a exigência da base $a > 0$ e $a \neq 1$. Se $a \leq 0$ pode existir número real x para a qual a potência a^x não é definida. Por exemplo, $(-5)^{\frac{1}{2}}$ não existe em $\mathbb{R}$, pois $(-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5}$, que não pertence a $\mathbb{R}$. Para $a = 1$ teríamos uma função constante, isto é, $f(x) = 1^x = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Comparar as potências de mesma base a^x e a^y significa estabelecer qual das três sentenças seguintes é verdadeira:

$$a^x > a^y; \; a^x = a^y; \; a^x < a^y.$$

Para examinar isto, temos que usar as propriedades da função exponencial e seu comportamento. Assim, as propriedades preliminares das funções exponenciais, são as seguintes:

Proposição 10.1 *Seja a um número real positivo com $a \neq 1$. A função exponencial de base a definida por $f(x) = a^x$, satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer x, y em $\mathbb{R}$:*

1. $f(1) = a^1 = a$; $(P1)$

2. $a^x.a^y = a^{x+y}$; $(P2)$

3. *Se* $x < y$ *temos* $a^x < a^y$ *quando* $a > 1$, $(P3)$

4. *Se* $x < y$ *temos* $a^x > a^y$ *quando* $0 < a < 1$. $(P4)$

A Propriedade (P1) é uma consequência imediata das propriedades de números reais. As propriedades (P2), (P3) e (P4) serão admitidas. Voltaremos a essas três propriedades no próximo capítulo, que trata das funções do logaritmo. A liga.c ão entre as funções exponenciais e as funções logarítmicas permitirá esclarecer melhor as propriedades anteriores, a saber, (P2), (P3) e (P4).

A segunda propriedade mostra que a função exponencial de base a verifica a relação:

$$f(x + y) = f(x).f(y).$$

Observe que a função exponencial transforma a soma de x e y no produto das imagens $f(x)$ e $f(y)$. Ou seja, a imagem da soma $x + y$ é o produto das imagens $f(x).f(y)$.

Proposição 10.2 *Sejam a um número real positivo com $a \neq 1$ e a função exponencial $f(x) = a^x$ de base a. Então, temos:*

1. $f(x) = ax \neq 0$, para todo x em $\mathbb{R}$. Isto é, não existe um número real x tal que $f(x) = 0$;

2. $f(x) = a^x > 0$, para todo x em $\mathbb{R}$;

3. $f(0) = 1$.

Prova. De fato, se existe x_0 tal que $f(x_0) = 0$, a propriedade $f(x + y) = f(x).f(y)$ implica que:

$$f(x_0 + y) = f(x_0).f(y) = 0 \times \mathrm{f(y)} = 0, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Agora, seja $x \in \mathbb{R}$, como $x = x_0 + x - x_0 = x_0 + y$, onde $y = x - x_0$, temos:

$$f(x) = f(x_0 + y) = f(x_0).f(y) = 0 \times f(y) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, a função f é identicamente nula, o que é impossível, pois $f(1) = a > 0$.

Assim, temos que $f(x) = a^x \neq 0$, para todo x em $\mathbb{R}$.

2. Seja x ∈ R, como $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ e $f(\frac{x}{2}) > 0$, a identidade $f(x + y) = f(x).f(y)$ implica que:

$$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}) \times f(\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 > 0.$$

3. Seja $x \in \mathbb{R}$, a identidade $f(x + y) = f(x).f(y)$ implica que:

$$f(x+0) = f(x) \times f(0), \Leftrightarrow \mathrm{f(x)}^\circ \varnothing f(0) = f(x) \times f(x)(f(0)-1) = 0 \; x \in \mathbb{R}.$$

Como $f(x) \neq 0$ deduzimos que $f(0)-1 = 0$, isto é, $f(0) = 1$. **C.Q.D.**

Assim, como $f(x) = a^x > 0$, para todo x em $\mathbb{R}$, podemos afirmar que o contradomínio de f é $]0,+\infty[$.

Proposição 10.3 *Seja $a \neq 1$ com $a \geq 0$. Para a função exponencial de base a definida por $f(x) = a^x$, temos:*

1. *O domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.*
2. *A imagem de f é o conjunto $Im(f) =]0, +\infty[$, ou seja, $Im(f) = f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.*

As propriedades (P3)-(P4) afirmam que a função exponencial deve ser monótona injetiva (crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$). Isto é, quando $a > 1$ a propriedade (P3) implica que se $x < y$ temos $a^x < a^y$. Então, a função $f(x) = a^x$ é crescente em $\mathbb{R}$. Quando $0 < a < 1$ a propriedade (P4) implica que se $x < y$ temos $a^x > a^y$. Então, a função $f(x) = a^x$ é decrescente em $\mathbb{R}$. Assim, apresentamos a seguinte proposição:

Proposição 10.4 Monotonia das funções exponenciais. *Seja $a \neq 1$ com $a > 0$. A função $f(x) = a^x$ verifica:*

1. *a função $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$;*

2. *a função $f(x) = a^x$ é decrescente se $0 < a < 1$.*

Exemplo 10.2 *A função $f(x) = 3^x$ é crescente, porque a base $a = 3$ é maior do que 1. Temos então:*

1. *$3^2 < 4^\pi$, porque $2 < \pi$.*

2. *$3^{-2} > 3^{-4}$, porque $-2 > -4$.*

Exemplo 10.3 *A função $f(x) = 5^x$ é crescente, porque a base 5 é maior do que 1. Temos então:*

1. *$5^x = 5^4$ equivale a $x = 4$.*

2. *$5^x > 5^4$ equivale a $x > 4$.*

3. *$5^x < 5^4$ equivale a $x < 4$.*

Exemplo 10.4 *A função $f(x) = 0{,}3^x$ é decrescente, porque a base $a = 0{,}3$ é menor do que 1. Temos então:*

1. *$0{,}3^2 > 0{,}3^\pi$, porque $2 < \pi$.*

2. *$0{,}3^{-2} < 0{,}3^{-4}$, porque $-2 > -4$.*

Exemplo 10.5 *A função $f(x) = 0{,}3^x$ é decrescente, porque a base $a = 0{,}3$ é menor do que 1. Temos então:*

1. $0{,}3^x = 0{,}3^4$ *equivale a* $x = 4$.

2. $0{,}3^x < 0{,}3^4$ *equivale a* $x > 4$.

3. $0{,}3^x > 0{,}3^4$ *equivale a* $x < 4$.

As propriedades (P3) e (P4) com a monotonia das funções exponenciais implicam a seguinte proposição:

Proposição 10.5 *A função $f(x) = a^x$, onde $a \neq 1$ com $a > 0$, é injetora, isto é,*

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y. \text{ (P5)}$$

A função exponencial goza de outras propriedades que, a seguir, serão admitidas:

Proposição 10.6 *Seja a função $f(x) = a^x$, onde $a \neq 1$ com $a > 0$. Então, temos:*

1. *a função $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente; (P6)*

2. *a função $f(x) = a^x$ é sobrejetiva. (P7)*

A propriedade (P7) implica que todo número real $y > 0$, possui um antecedente. Assim, temos a seguinte propriedade:

Proposição 10.7 *Seja $a \neq 1$ com $a > 0$. Para todo número real $b > 0$ existe um real $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$, isto é, para todo $b > 0$ a equação exponencial:*

$$a^x = b,$$

tem uma solução $x \in \mathbb{R}$.

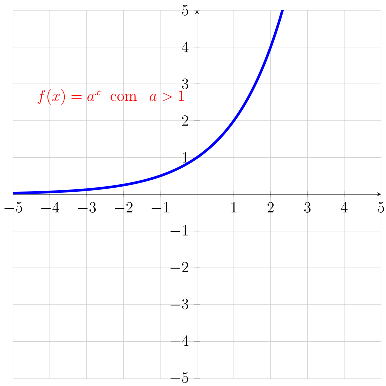
Proposição 10.8 Gráficos das funções exponenciais. *Seja* $a \neq 1$ *com* $a > 0$. *Com relação ao gráfico da função* $f(x) = ax$ *podemos afirmar:*

1. *A curva* $y = a^x$ *da função* $f(x) = a^x$ *está toda acima do eixo das abcissas, pois* $ax > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

2. *A curva* $y = a^x$ *corta o eixo das ordenadas no ponto (0,1).*

Temos dois casos:

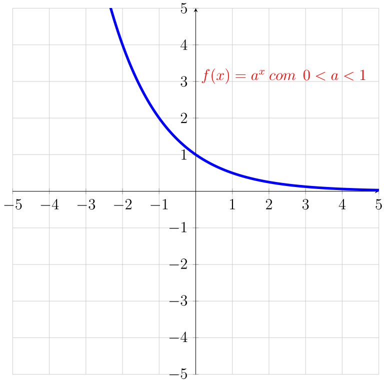
a) Para $a > 1$ o **gráfico da função** $f(x) = a^x$ **é dado por**:



A partir da curva deduzimos o quadro de variações da função exponencial $f(x) = a^x$, para $a > 1$, é da seguinte forma:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x) = a^x (a > 1)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Para $0 < a < 1$ o gráfico da função $f(x) = a^x$ é dado por:



A partir da curva deduzimos o quadro de variações da função exponencial $f(x) = a^x$, para $0 < a < 1$, é da seguinte forma:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x) = a^x (0 < a < 1)$	$+\infty$	$\searrow$	0

10.3 Função exponencial na base e

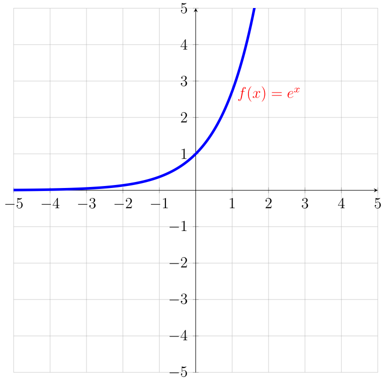
O número e é dado por:

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \cong 2,718281.$$

Ele é um número irracional muito utilizado no cálculo. Desse modo, iremos fazer também o estudo das funções exponenciais, e depois das logarítmicas, utilizando esse número e como base dessas funções.

Definição 10.3 *Chamamos de função exponencial de base e ou, somente, de função exponencial, a função definida de R em R que associa a cada x real o número real ex, ou:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ onde } x \longmapsto f(x) = e^x.$$



A função exponencial na base e também é notada por:

$$x \longmapsto \exp(x) = e^x.$$

Como $e > 1$, a partir da curva deduzimos que o quadro de variações da função exponencial $f(x) = e^x$ é da seguinte forma:

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp(x) = e^x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

10.4 Exercícios

Exercício 10.1 *Identifique quais funções a seguir são exemplos de função exponencial*:

f1(x) = 5x, f2(x) = (3x)x, f3(x) = (x + 3)2 − 3x2

$$f_1(x) = 5^x, \quad f_2(x) = (3x)^x, \quad f_3(x) = (x+3)^2 - 3x^2$$

$$f_4(x) = \frac{3^{x+2} - 3^x}{3^x} \ e \ f_4(x) = \frac{3^{x+1} - 3^x}{2}.$$

Solução. Lembre-se a definição de uma função exponencial: "Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada função exponencial de base a se sua expressão, puder ser escrita como $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$."

1. A expressão da função f_1 é $f_1(x) = a^x$, onde $a = 5 > 1$, portanto a função f_1 é de fato uma função exponencial.

2. Para a função f_2 temos:

$$f_2(x) = (3x)^x = a(x)^x, \text{ onde } a = 3x,$$

assim, $a = a(x)$ não é um número real constante. Então a função f_2 não é de fato uma função exponencial.

3. A expressão da função f_3 pode ser escrita da seguinte forma:

$$f_3(x) = (x + 3)^2 - 3x^2 = x^2 + 6x + 9 - 3x^2 = -2x^2 + 6x + 9.$$

Assim, a função f_3 é uma função quadratica. Portanto a função f_3 não é de fato uma função exponencial.

4. A expressão da função f_4 pode ser escrita da seguinte forma

$$f_4(x) = \frac{3^{x+2} - 3^x}{3^x} = \frac{3^x \times 3^2 - 3^x}{3^x} = \frac{3^x(3^2 - 1)}{3^x} = 8.$$

Logo, a função f_4 é uma função constante. Então, a função f_4 não é de fato uma função exponencial.

5. Para a função f_5 temos:

$$f_5(x) = \frac{3^{x+1} - 3^x}{2} = \frac{3^x \times 3 - 3^x}{2} = \frac{3^x(3-1)}{2} = 3^x.$$

Portanto, a expressão da função f_5 é de forma $f_5(x) = a^x$, onde $a = 3 > 1$.

Assim, a função f_5 é uma função exponencial.

Exercício 10.2 *Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$.*

1. Determine:

$$f(3), f(-2), f(0,5), f(-0,5)$$

2. Determine os números reais x tais que $f(x) = 8$.

3. Determine os números reais x (se existir) tais que $f(x) = -1$.

Solução. Para resolver as três questões, vamos nos referir às propriedades das potenciais de base $a = 2$.

1. Ao usar um cálculo elementar que se baseia nas propriedades das potências, temos:

$$f(3) = 2^3 = 8, \quad \text{e } f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},$$

Como $0,5 = \frac{1}{2}$ e $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ $(a \geq 0)$, temos:

$$f(0,5) = f(\frac{1}{2}) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad \text{e } f(-0,5) = f(-\frac{1}{2}) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Determinar os números reais x de modo que $f(x) = 8$ equivale a resolver a seguinte equação:

$$2x = 8.$$

Para resolver essa equação usamos o seguinte artifício: quando a equação dada apresentar todas as incógnitas como expoentes de números que podem ser reduzidos a uma mesma base. Em geral, há somas e subtrações nos expoentes. Assim, como $8 = 2^3$ obtemos a equação: $2^x = 2^3$. Com a propriedade da função exponencial $a^x = a^y$ equivale a $x = y$, isto é, a função $f(x) = a^x$ ($a > 0$ e $a \neq 1$), deduzimos que:

$$2^x = 2^3 \text{ você é equivalente } a\ x = 3.$$

Logo, temos $f(x) = 8$ se, e somente se, $x = 3$.

3. Para $f(x) = -1$ temos a equação $2^x = -1$. Como $f(x) = 2^x > 0$, para todo número real x, então a equação $2^x = -1 < 0$, é impossível. Portanto, não existe um número real x tal que $f(x) = -1$.

Exercício 10.3 *Para cada uma das equações abaixo, determine o número real x, que é a solução desta equação:*

$$1.\ 2^x = 256; \quad 2.\ (3^x)^2 = 27; \quad 3.\ 2^x = 2^{2x-4} \quad \text{e} \quad 4.\ 3^{2x-4} = 9^{2x}.$$

Solução. Para resolver as quatro questões, vamos nos referir às propriedades das exponenciais de base $a = 2$ ou 3 e aos métodos para resolver as equações de primeiro grau.

1) Como $256 = 2^8$ a equação $2^x = 2^8$ é equivalente a:

$$2^x = 2^8 \Leftrightarrow f(x) = f(8), \text{ onde } f(x) = 2^x.$$

Como a função $f(x) = 2^x$ é injetora deduzimos que a solução da equação $2^x = 256$ é $x = 8$.

2) Como $27 = 3^3$ e $(3^x)^2 = 3^{2x}$, a equação $(3^x)^2 = 27$ é equivalente a:

$$(3^x)2 = 3^{2x} = 3^3 \Leftrightarrow f(2x) = f(3), \text{ onde } f(x) = 3^x.$$

Como a função $f(x) = 3^x$ é injetora deduzimos que $2x = 3$. Assim, a solução da equação $(3^x)^2 = 27$ é $x = 1,5$.

3) Seja a função $f(x) = 2^x$, a equação $2^x = 2^{2x-4}$ é equivalente a:

$$f(x) = 2^x = f(2x-4) = 2^{2x-4}$$

Como a função $f(x) = 2^x$ é injetora deduzimos que $x = 2x - 4$. Então, a solução da equação $2^x = 2^{2x-4}$ é $x = 4$.

4) Seja a função $f(x) = 3^x$. Como $9 = 3^2$ a equação $3^{2x-4} = 9^{2x}$ é equivalente

$$3^{2x-4} = 9^{2x} = (3^2)^{2x} = 3^{4x}.$$

Assim, a equação $3^{2x-4} = 9^{2x}$ é equivalente a:

$$f(x) = 3^{2x-4} = f(4x) = 9^{2x}.$$

Como a função $f(x) = 3^x$ é injetora deduzimos que $2x - 4 = 4x$. Então, a solução da equação $3^{2x-4} = 9^{2x}$ é o $x = -2$.

Exercício 10.4 *Determine o(s) número(s) real(is), que satisfaz cada uma das seguintes equações*:

1. $3^{2x} = \dfrac{1}{729}$.
2. $5^{2x} = 125$.

Solução. Lembre-se da seguinte propriedade: "A função $f(\mathrm{x}) = a^x$, onde $a \neq 1$ com $a > 0$, é injetora, isto é, $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$. (P5)".

1. Como $\dfrac{1}{729} = 3^{-6}$, temos:

$$3^{2x} = \frac{1}{729} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-6}.$$

Ao aplicar esta última propriedade com $a = 3$, deduzimos que a solução x verifica a equação $2x = -6$. Logo, a solução da equação $3^{2x} = \frac{1}{729}$ é dada por $x = -3$.

2. Sabemos que $125 = 5^3$, logo obtemos:

$$5^{2x} = 125 \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^3.$$

Também, ao aplicar esta última propriedade com $a = 5$, deduzimos que a solução x verifica a equação $2x = 3$. Logo, a solução da equação $5^{2x} = 125$ é dada por $x = \frac{3}{2}$.

Exercício 10.5 *Resolva a equação:*

$$3^x + 3^{2x} = 12.$$

Solução. Sabemos que para a equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, possui uma solução ou duas, se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Nesse caso, temos $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. A resolução da equação $3x + 32x = 12$, equivale a resolver a equação $(3^x)^2 + 3^x - 12 = 0$. Resolver a última equação é equivalente a resolver a equação de segundo grau $x^2 + x - 12 = 0$. Assim, temos $\Delta = b^2 - 4ac = 49 \geq 0$, logo as soluções são:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 3 \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -4.$$

Então, temos $3^x = 3 = 3^1 > 0$ ou $3^x = -4 < 0$. Assim, a equação $3^x = 3 = 3^1 > 0$, implica que $x = 1$, quanto à segunda equação $3^x = -4 < 0$ é impossível. Logo, a solução da equação $3^x + 3^{2x} = 12$ é dada $x = 1$.

Exercício 10.6 *Resolver as inequações exponenciais:*

1. $2^{2x} > 1$;

2. *$2^{-x} < 4$;*

3. *$3^{(2-x)(2+x)} \geq 27$.*

Solução. Para resolver as três questões, vamos nos referir às propriedades das exponenciais de base $a = 2$ ou 3 e aos métodos para resolver as inequações usuais.

1) Como $2^0 = 1$, a inequação $2^{2x} > 1$ é equivalente a:

$$2^{2x} > 2^0.$$

Como $a = 2 > 1$ então a função $f(x) = 2^x$ é crescente. Assim, temos:

$$f(x) = 2^{2x} > f(0) = 2^0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Então, o conjunto das soluções da equação $2^{2x} > 1$ é o intervalo $]0,+\infty[$.

2) Como $4 = 2^2$, a inequação $2^{-x} < 4$ é equivalente a:

$$2^{-x} < 2^2.$$

Como $a = 2 > 1$ então a função $f(x) = 2^x$ é crescente. Assim, temos:

$$f(x) = 2^{-x} < f(2) = 2^2 \Leftrightarrow -x < 2 \Leftrightarrow x > -2.$$

Então, o conjunto das soluções da equação $2^{-x} < 4$ é o intervalo $]-2,+\infty[$.

3) Como $27 = 3^3$, a inequação $3^{(2-x)(2+x)} \geq 27$ é equivalente a:

$$3^{(2-x)(2+x)} \geq 3^3.$$

Como $a = 3 > 1$ então a função $f(x) = 3^x$ é crescente. Assim, temos:

$$\begin{aligned} f(x) = 3^{(2-x)(2+x)} \geq f(3) = 27 = 3^3 \quad &\Leftrightarrow \quad (2-x)(2+x) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 - x^2 \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - x^2 = (1-x)(1+x) \geq 0. \end{aligned}$$

Então, o conjunto das soluções da equação $3^{(2-x)(2+x)} \geq 27$ é o intervalo $]-1, 1[$.

Exercício 10.7 *Resolver as inequações exponenciais:*

$$1.\ 2^{x-1} > 1; \quad 2.\ 2^{-x-1} < 4 \quad \text{e} \quad 3.\ 3^{(1-x)(1+x)} \geq 27.$$

Solução. Sabemos que para $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é crescente sobre $]0, +\infty[$, assim $a^x > a^y$ equivale a $x > y$.

1. A inequação $2^{x-1} > 1$ equivale a inequação $2^{x-1} > 2^0$. Como a função $f(x) = 2^x$ é crescente sobre $]0, +\infty[$, assim $2^{x-1} > 2^0$ equivale a $x - 1 > 0$, ou seja, $x > 1$. Então, o conjunto solução da inequação $2^{x-1} > 1$ é dado por $]1, +\infty[$.

2. Da mesma maneira, a inequação $2^{-x-1} < 4$ equivale a inequação $2^{-x-1} < 2^2$. Como a função $f(x) = 2^x$ é crescente sobre $]0, +\infty[$, assim temos $2^{-x-1} < 2^2$ equivale a $-x - 1 < 2$, ou seja, $x > -3$. Então, o conjunto solução da inequação $2^{-x-1} < 4$ é dado por $]-3, +\infty[$.

3. Usando o mesmo método, inequação $3^{(1-x)(1+x)} \geq 27$ equivale a inequação $3^{(1-x)(1+x)} \geq 3^3$. Como a função $f(x) = 3^x$ é crescente sobre $]0, +\infty[$, assim temos $3^{(1-x)(1+x)} \geq 3^3$ equivale a $(1 - x)(1 + x) \geq 3$, ou seja, $1 - x^2 \geq 3$.

Então, a última equação implica que $-x^2 \geq 3 - 1 = 2$, ou seja, $x^2 \leq -2$, o que não é possível.

Então, a inequação $3^{(1-x)(1+x)} \geq 27$ não admite solução .

Exercício 10.8 *Esboçar o gráfico para*:

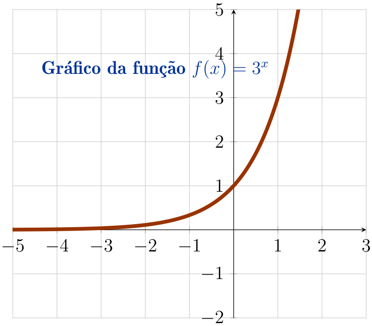
1. $f_1(x) = 3^x$.

2. $f_2(x) = 2^x$.

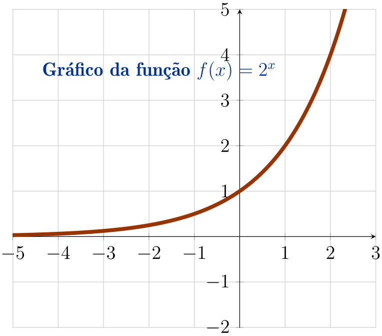
3. $f_3(x) = 2^{-x}$.

Solução. Usando o software podemos conseguir a construção dos esboços gráficos das funções: $f_1(x) = 3^x$, $f_2(x) = 2x$ e $f_3(x) = 2^{-x}$.

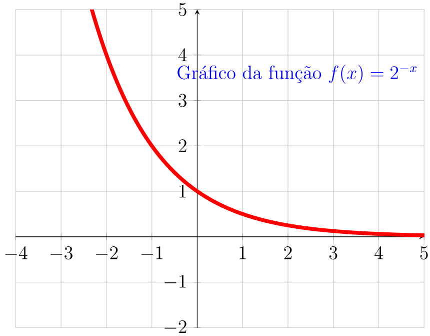
1. Com o Software Geogebra, o esboço do gráfico da função $f_1(x) = 3^x$ é dado por:



2. Com o Software Geogebra, o esboço do gráfico da função $f_2(x) = 2^x$ é dado por:



3. Com o Software Geogebra, o esboço do gráfico da função $f_3(x) = 2^{-x}$ é dado por:



Para f_3 podemos notar que $f(i) = 2^{-x} = a^x$, onde $0 < a = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} < 1$.

Assim, o esboço de seu gráfico é consistente com as propriedades do curso.

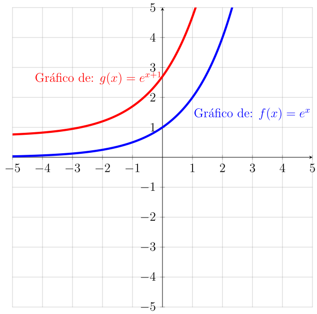
Exercício 10.9 *Usando software, responda às seguintes questões.*

1. Descreva como transformar o gráfico da função $f(x) = e^x$ em um gráfico da função dada: $g(x) = e^{x+1}$.

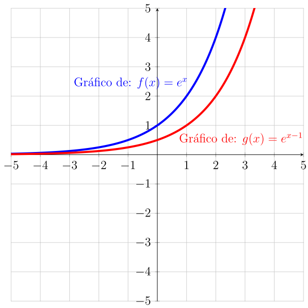
2. Descreva como transformar o gráfico da função $f(x) = e^x$ em um gráfico da função dada: $g(x) = e^{x-1}$.

Solução. Como antes, usamos as curvas obtidas via Geogebra.

1. Usando o software Geogebra, os gráficos das funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{x+1}$, são dadas em frente. Podemos observar que o gráfico da função $g(x) = e^{x+1}$ é obtido transladando o gráfico de $f(x) = e^x$ uma unidade para a esquerda.



2. Usando o software Geogebra, os gráficos das funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{x-1}$, são dadas em frente. Podemos observar que o gráfico da função $g(x) = e^{x-1}$ é obtido transladando o gráfico de $f(x) = e^x$ uma unidade para a direita.



Observação 10.2 *Em geral, dada uma função real* $f : D_f \to \mathbb{R}$, *denotamos por* C_f *seu gráfico. Então: o gráfico* C_g *da função* $g(x) = f(x+a)$, *com* $a > 0$ *é obtido transladando o gráfico de* C_f *de* $f(x)$, *à esquerda de a unidades.*

Em geral, o gráfico C_g *da função* $g(x) = f(x - a)$, *com* $a > 0$ *é obtido transladando o gráfico de* C_f *de* $f(x)$, *à direita de a unidades.*

Exercício 10.10 *Uma peça particular de um equipamento sofre com o uso, uma depreciação que pode ser caracterizada como exponencial de tal forma que seu valor, daqui a t anos, seja dado por:*

$$D(t) = 200.2^{-2t}.$$

1. *Qual seu valor hoje?*

2. *Qual será a depreciação após 2 anos?*

Solução.

1. Como $D(t)$ é uma função de tempo t, seu valor para hoje corresponde a $t = 0$, que é dado por:

$$D(0) = 200.2^{-2\times 0} = 200.2^0 = 200.$$

2. O valor de D(t) para 2 anos corresponde a t = 2, que é dado por:

$$D(2) = 200.2^{-2\times 2} = 200.2^{-4} = 12,5.$$

CAPÍTULO 11
Logaritmo e Funções Logarítmicas

Objetivos

Neste capítulo, estudaremos as funções logarítmicas de base a, introduzindo o vocabulário relacionado a essas funções e a ilustra.c ão de suas propriedades através de exemplos. As funções logaritmo decimal e logaritmo natural (ou neperiano) também são considerados. As fórmulas básicas de mudança de logaritmos serão fornecidas.

11.1 Logaritmo

11.1.1 Preliminares: Como nasceu o logaritmo?

Em 1614, um matemático escocês, John Napier (1550; 1617), mais conhecido pelo nome francês de Neper, publicou ”Mirifici logarithmorum canonis descriptio”. Neste livro, que é a finalidade de uma obra de 20 anos, Neper apresenta uma ferramenta para simplificar os cálculos operacionais: o logaritmo. Neper constrói a palavra a partir das palavras gregas ”logos”(lógica) e arithmos (número).

No entanto, essa ferramenta não floresceu até depois da morte de Neper. Os matemáticos ingleses Henri Briggs (1561; 1630) e William Oughtred (1574; 1660) retomam e estendem a obra de Neper. Os matemáticos da época, então, estabeleceram tabelas de logaritmos cada vez mais precisas.

A vantagem de estabelecer essas tabelas logarítmicas é permitir a substituição de uma multiplicação por um adição (parágrafo II). Isso pode parecer ridículo hoje, mas deve ser entendido que naquela época, calculadoras obviamente não existiam, decimais não eram de uso comum e as operações apresentadas como nós as usamos não existiam, ainda não eram conhecidas. No entanto, a astronomia, a navegação ou o comércio exigiam operações cada vez mais complexas.

1.1.2 Utilidade dos logaritmos

Os logaritmos são muito importantes, pois desempenham papéis centrais em várias aplicações como, por exemplo:

- Na escala Richter, utilizada para monitorar e quantificar a magnitude de um terremoto;
- No potencial hidrogênio, no estudo do pH de uma solução, associado a acidez, à alcalinidade ou a neutralidade;
- No estudo de aplicações envolvendo juros compostos, dentre outras;
- No estudo da economia, na computação dos juros bancários, etc.

Hoje nas escolas de ensino médio sequer menciona-se as palavras cologarítmo e mantissa, muito menos as tábuas de logaritmos.

11.2 Logaritmo de base a

Para todo número real positivo a $\neq 1$, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$, é uma bijeção (ou correspondência biunívoca) entre $\mathbb{R}$ e $]0,+\infty[$, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Admitindo-se a propriedade adicional:

$$f(x + y) = f(x).f(y),$$

segue-se que f possui uma função inversa.

Definição 11.1 *Seja* $a \neq 1$ *um número real positivo, e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função exponencial definida por* $f(x) = a^x$. *A função inversa da função exponencial de base a é a função denotada por:*

$$\log_a :]0,+\infty[\to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, *chama-se o logaritmo do número x (logarítmando) em base a. Por definição de função inversa tem-se:*

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o exponente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Em outras palavras, temos a seguinte propriedade:

Proposição 11.1 *Sejam* $b \in]0,+\infty[$ *e* $a \neq 1$ *com* $a \geq 0$. *Seja* $\log_a b$ *o logaritmo do número b na base a, então temos:*

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x.$$

Segue-se imediatamente da relação $a^{u+v} = a^u.a^v$ que $a^{\log_a(x)+\log_a(y)} = a^{\log_a(x)}.a^{\log_a(y)} = x.y$, tomando $u = \log_a(x)$ e $\log_a(y)$. Assim, usando a relação $b = a^z \Leftrightarrow \log_a b = z$, com $b = x.y$ e $z = \log_a(x) + \log_a(y)$, temos:

$$\log_a(x.y) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

para x e y positivos quaisquer.

Esta propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século XVII, e de suas propriedades. Sendo que, até recentemente, era um instrumento muito eficiente de cálculo.

Proposição 11.2 *Seja a um número real positivo* $a \neq 1$ *e a função logarítmica* $\log_a :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. *Então, temos:*

1. Logaritmo de 1 na base a é zero, isto é, $\log_a 1 = 0$.

2. Logaritmo de a na base a é 1, isto é, $\log_a a = 1$.

Prova.

1- Em qualquer sistema de logaritmos, o logaritmo da unidade é zero, isto é, $\log_a 1 = 0$. Sabemos que $1 = a^0$ em, pois todo número diferente de zero elevado a zero é igual a unidade, então pela definição de logaritmo deduzimos que $1 = a^0 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$.

2- Sabemos que $a = a^1$, pois todo número real a elevado a 1 é igual a a, então pela definição de logaritmo deduzimos que $a = a^1 \Leftrightarrow \log_a a = 1$.

Segue-se imediatamente da relação $a^u.a^{-v} = a^u.(a^v)^{-1} = a^{u-v}$ que $a^{\log_a(x) - \log_a(y)} = a^{\log_a(x)}.(a^{\log_a(y)})^{-1} = \frac{x}{y}$, tomando $u = \log_a(x)$ e $v = \log_a(y)$. Assim, usando a relação $b = a^z \Leftrightarrow \log_a b = z$ com $b = \frac{x}{y}$ e $z = \log_a(x) - \log_a(y)$, temos:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

para x e y positivos quaisquer. **C.Q.D.**

Proposição 11.3 *Seja* $a \neq 1$ *com* $a \geq 0$. *Para a função logarítmica em base a definida por* $f(x) = \log_a(x)$, *temos:*

1. O domínio é $D(f) =]0, +\infty[$;

2. A imagem de f é $Im(f) = \mathbb{R}$, *isto é,* $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

Proposição 11.4 Monotonia das funções logarítmicas. *Seja $a \neq 1$ com $a > 0$. A função $f(x) = \log_a(x)$ verifica:*

1. a função $f(x) = \log_a(x)$ é crescente se $a > 1$;

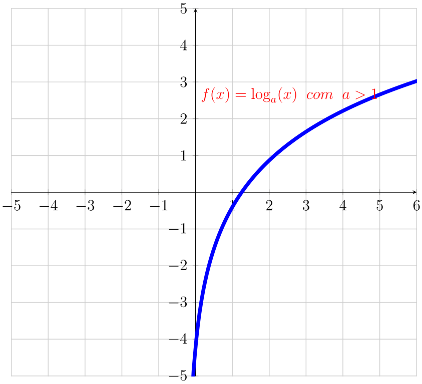
2. a função $f(x) = \log_a(x)$ é decrescente se $0 < a < 1$.

Com relação ao gráfico da função $f(x) = \log_a(x)$ podemos afirmar que:

1. Ele é todo à direita do eixo y, para todo $a \neq 1$ com $a > 0$;

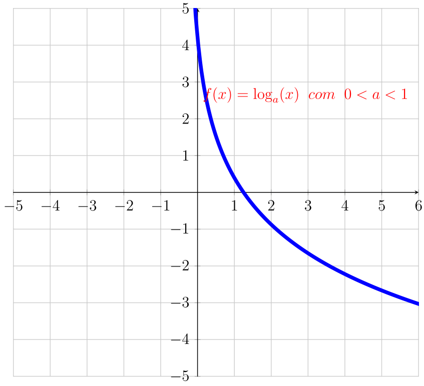
2. Corta o eixo das abcissas no ponto $(1, 0)$; para todo $a \neq 1$ com $a > 0$.

Vejamos a seguir as representações gráficas da função logarítmica para os dois casos, primeiramente para $a > 1$ e, em seguida, para $0 < a < 1$.



A partir da curva deduzimos o quadro de variações da função logaritmo $f(x) = \log_a(x)$ em base $a > 1$ é da seguinte forma:

x	0	$+\infty$
$\log_a(x)(a > 1)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$



A partir da curva deduzimos o quadro de variações da função logaritmo $f(x) = \log_a(x)$ em base $0 < a < 1$ é da seguinte forma:

11.3 Logaritmos usuais

Vimos na seção anterior que, de maneira geral, uma função real $L :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ cujo domínio é o conjunto dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica ou um sistema de logaritmos quando apresenta as seguintes propriedades:

1. L é uma função crescente, isto é, se $x < y$ então $L(x) < L(y)$.

2. $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer x, y em $]0,+\infty[$.

Para todo x em $]0,+\infty[$, o número $L(x)$ chama-se logaritmo de x.

Sabendo que a função logarítmica L é sobrejetiva, isto é, que dado qualquer número real b, existe sempre um (único) número real positivo x tal que $L(x) = b$, podemos afirmar que existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. Tal número é representado pela letra e. Demonstra-se que este número "e" é irracional, ou seja, seu desenvolvimento decimal não termina e nem é periódico. Um valor aproximado do número e, com 6 algarismos é: $e \simeq 2,718281$.

Se a base é $a = e$ temos que o sistema de logaritmos é conhecido pelo nome de sistema de logaritmos naturais ou logaritmo neperiano, com notação $L = \log_e = \ln$. Assim, podemos afirmar que:

$$\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Definição 11.2 *Chamamos uma função de logaritmo neperiano e denotamos por ln a função que a qualquer número real x estritamente positivo associa o único número real y tal que* $e^y = x$*. Portanto, temos para todo* $x > 0$ *e todo número real y,* $ln(x) = y$ *se e somente se* $ey = x$*.*

Isto é, a função:

$$\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \text{ tal que } x \mapsto \ln(x),$$

é chamada de função logaritmo neperiano.

Proposição 11.5 *Temos as seguintes propriedades:*

1. *Para todo número real* $x > 0$*, temos* $e^{ln(x)} = x$*;*

2. *Para todo número real x, temos* $ln(e^x) = x$*;*

3. $ln(1) = 0$ *e* $ln(e) = 1$*.*

Também, temos as seguintes propriedades do logaritmo neperiano:

Proposição 11.6 *Para todos números reais* $x > 0$ *e* $y > 0$*, temos:*

1. $ln(x.y) = ln(x) + ln(y)$*;*

2. $ln(\frac{1}{y}) = -ln(y)$*;*

3. $ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$*;*

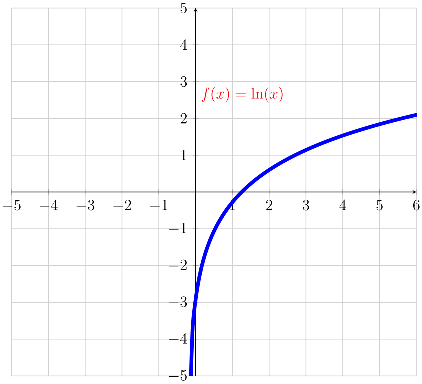
4. Para todo número real $a > 0$ *temos* $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\, ln(a)$*.*

Prova.

1. A relação $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$, já foi provada no caso geral.
2. A relação $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$, já foi provada no caso geral.
3. Para $x = 1$, a relação $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$, implica que $\ln(\frac{1}{y}) = \ln(1) - \ln(y) = -\ln(y)$, porque $\ln(1) = 0$.

4) Para $x = y = \sqrt{a}$, a relação $\ln(x.y) = \ln(x)+\ln(y)$, implica que $\ln(\sqrt{a}.\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$. Como $\sqrt{a}.\sqrt{a} = a$, deduzimos que $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$, ou seja, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$. **C.Q.D.**

O gráfico da função logaritmo neperiano é dado por:



Usando este gráfico, podemos formular as seguintes propriedades.

Proposição 11.7 *Com relação ao gráfico da função* $f(x) = ln(x)$ *podemos afirmar:*

1. O gráfico é à direita do eixo y;

2. O gráfico corta o eixo das abcissas no ponto (1,0);

3. a função f(x) = ln(x) é crescente.

A partir da curva deduzimos o quadro de variações da função logaritmo neperiano $f(x) = \ln(x)$ é da seguinte forma:

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Quando a base do logaritmo é $a = 10$, o logaritmo é chamado de decimal e é denotado por $L = \log_{10} = \log$, neste caso omitimos a base. O logaritmo em base 10 é mais comumente usado na prática das ciências exatas tais como: química e física.

Dado um número positivo $x = b.10^n$ com $1 \leq b < 10$, podemos escrever, tomando o logaritmo de ambos os lados, a expressão: $\log(x) = \log(b) + \log(10^n)$. Como estamos usando o logaritmo na base 10, podemos escrever

$$\log(x) = \log(b) + n.$$

Como $1 \leq b < 10$ temos que $\log(b)$ é um número real tal que $0 \leq \log(b) < 1$. Assim, se $x = b10^n$, com $1 \leq b < 10$ e n inteiro, então:

$$\log(x) = \log(b) + n \text{ onde } 0 \leq \log(b) < 1.$$

Nestas condições, introduzimos os seguintes conceitos:

- O número $\log(b)$ é a mantissa do logaritmo de x;
- O inteiro n é a característica de $\log(x)$.

Observação 11.1 *Os computadores, assim como as calculadoras científicas têm, em geral, duas teclas para o cálculo de logaritmo que são "LOG"e "LN", as quais correspondem as bases a = 10 e a = e, respectivamente.*

Desenvolvimento do logaritmo por meio de mudança de base. Seja a > 0, com a $\neq$ 1. Para todo $x > 0$, temos:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Então, para calcular o logaritmo de um número real positivo, usamos a fórmula anterior para a mudança na base do logaritmo. Por exemplo, para calcular $log5(12)$ temos:

$$\log_5(12) = \frac{\ln(12)}{\ln(5)} = \frac{2,4849}{1,6094} \cong 1,544.$$

11.4 Exercícios

Exercício 11.1 *Calcule, aplicando a definição de logaritmos:*

1. $\log_9 \frac{1}{9}$; *2.* $\log_{10} 1000$; *3.* $\log_3 3$; e *4.* $\ln e^5$.

Solução.

1. Temos $\log_9 \frac{1}{9} = -1$, pois: $\log_9 \frac{1}{9} = x$ equivale a $9^x = \frac{1}{9} = 9^{-1}$, assim deduzimos que $x = -1$

2. Temos $\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$, pois: $\log_{10} 1000 = x$ equivale a $10^x = 1000 = 10^3$, assim deduzimos que = 3.

3. Temos $\log_3 3 = 1$, pois: $\log_3 3 = x$ equivale a $3^x = 3^1$, assim deduzimos que $x = 1$.

4. Temos $\ln e^5 = 5$, pois: $\ln 5 = x$ equivale a $e^x = 5$, isto é, $\ln e^5 = 5$.

Exercício 11.2 *Calcule, aplicando a definição de logaritmos:*

$$1.\ \log_3{}^{27}, \quad e \quad 2.\ 10^{\log_{10} 5}.$$

Solução.

1. Como $27 = 3^3$, temos $\log_3 27 = \log3\ 33 = 3$.

2. Temos $10^{\log_{10} 5} = 5$, pois sendo $\log_{10} 5 = x$ equivale $10^x = 5$, ou seja, $10^{\log_{10} 5} = 5$.

Exercício 11.3 *Calcule os valores de x para que existam os logaritmos:*

$$1.\ \log(x - 3) \quad \text{e} \quad 2.\ \ln(-x^2 + 9)$$

Solução.

1. Como no logaritmo não está especificado a base, por convenção, a base é 10 e pela definição de logaritmos, o logaritmando deve ser maior do que 0, assim: $x - 3 > 0$ implica que $x > 3$.

2. Nesse caso a base do logaritmo é o número e (constante de Euler) e o logaritmando deve ser maior do que 0, assim, chamando o logaritmando de $g(x)$, temos $g(x) = -x^2+9$ e fazendo o estudo do sinal da função $g(x)$ temos :

$$-x^2 + 9 = 0 \text{ equivale } - x^2 = -9 \text{ ou seja } x^2 = 9,$$

Logo $x = +3$ ou $x = -3$. Como $g(x) > 0$; os valores de x que satisfaz a inequação $-x^2+9 > 0$ pertencem ao intervalo $]-3; 3[$, ou seja, $\{x \in \mathbb{R}; -3 < x < 3\}$.

Exercício 11.4 *Sabendo que log* $2 = 0, 3$, *log* $3 = 0, 47$ *e log* $5 = 0, 7$, *utilize as propriedade operatórias do logaritmo decimal para calcular:*

$$\log(80), \quad \log(75), \quad \log(2,5) \quad \text{e} \quad \log(7,5)$$

Solução. Como $80 = 16 \times 5 = 2^4 \times 5$, então, aplicando sucessivamente as duas propriedades: $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$ e $\log(a^n) = n \log(a)$ (aqui a e b são números reais positivos), obtemos:

$$\log(80) = \log(2^4 \times 5) = \log(2^4) + \log(5) = 4 \log(2) + \log(5).$$

Agora, sabendo que $\log 2 = 0,3$ e $\log 5 = 0,7$, deduzimos que:

$$\log(80) = 4 \log(2) + \log(5) = 4 \times 0,3 + 0,7 = 1,9.$$

Sabendo que $75 = 3 \times 25 = 3 \times 5^2$, então usando o mesmo raciocínio, obtemos:

$$\log(75) = \log(3 \times 25) = \log(3 \times 5^2) = \log(3) + 2 \log(5) = 0,47 + 2 \times 0,7 = 1,87,$$

porque sabemos que $\log 5 = 0,7$ e $\log 3 = 0,47$.

Para o número real $2,5$ podemos observar que $2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5^2}{10}$. Então, aplicando sucessivamente as duas propriedades: $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$ e $\log(a^n) = n \log(a)$ (aqui a e b são números reais positivos), obtemos:

$$\log(2,5) = \log\left(\frac{5^2}{10}\right) = \log(5^2) - \log(10) = 2 \log(5) - 1 = 2 \times 0,7 - 1 = 0,4,$$

porque sabemos que $\log 5 = 0,7$ e $\log 10 = 1$.

Para o número real $7,5$ podemos observar que $7,5 = \frac{75}{10} = \frac{3 \times 5^2}{10}$. Então, aplicando as 3 propriedades: $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$, $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$ e $\log(a^n) = n \log(a)$ (aqui a e b são números reais positivos), obtemos:

$$\log(7,5) = \log\left(\frac{3 \times 5^2}{10}\right) = \log(3 \times 5^2) - \log(10) = \log(3) + 2 \log(5) - 1 = 0,87,$$

porque sabemos que $\log 3 = 0,47$, $\log 5 = 0,7$ e $\log 10 = 1$.

Exercício 11.5 *Supondo que a e b são números reais positivos, use as propriedades de logaritmos para escrever as expressões*

$$\log(25a^5b^4) \text{ e } \log\left(\frac{25a^3}{b^5}\right),$$

como uma soma de logaritmos ou múltiplo de logaritmos.

Solução. Aplicando as duas propriedades: $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$ e $\log(a^n) = n\log(a)$ (aqui a e b são números reais positivos), temos:

$$\begin{aligned}\log(25a^5b^4) &= \log(25) + \log(a^5b^4)\\ &= \log(5^2) + \log(a^5) + \log(b^4).\end{aligned}$$

Logo, temos: $\log(25a^5b^4) = 2\log(5) + 5\log(a) + 4\log(b)$.

Usando o mesmo raciocínio e as propriedades: $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$ e $\log(a^n) = n\log(a)$ (aqui a e b são números reais positivos), temos:

$$\log\left(\frac{25a^3}{b^5}\right) = \log(5^2a^3) - \log(b^5) = 2\log(5) + 3\log(a) - 5\log(b).$$

Exercício 11.6 *Sabendo que x é positivo, use as propriedades de logaritmos para expandir a expressão:*

$$y = \ln\left(\frac{\sqrt{2x^2+3}}{(x^2+1)^3}\right).$$

Solução. Usando as propriedades: $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$, $\log(a^n) = n\log(a)$ e $\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log(a)$ (aqui a e b são números reais positivos), temos:

$$y = \ln\left(\frac{\sqrt{2x^2+3}}{(x^2+1)^3}\right) = \ln(\sqrt{2x^2+3}) - \ln(x^2+1)^3.$$

Exercício 11.7 *Usando o logaritmo neperiano, resolver as equações exponenciais:*

1. $5^{x-1} = 7^{x-1}$;
2. $5.2^{2x} - 3.2^{x} = 0$;
3. $9^{2x} - 6.3^{x} = 0$.

Solução. Vamos usar a propriedade $\ln(a^b) = b\ln(a)$, para $a > 0$ com $a \neq 1$ e $a \in \mathbb{R}$.

1. Usando a propriedade anterior, temos:

$$5^{x-1} = 7^{x-1} \Leftrightarrow \ln(5^{x-1}) = \ln(7^{x-1}) \Leftrightarrow (x-1)\ln(5) = (x-1)\ln(7).$$

Logo, deduzimos que $(\ln(5) - \ln(7))x = \ln(5) - \ln(7)$, ou seja, $x = 1$.

2. Da mesma maneira, temos:

$$5.2^{2x} - 3.2^{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(5.2^{2x}) = \ln(3.2^{x}) \Leftrightarrow \mathrm{x}\ln(2) = \ln(3) - \ln(5).$$

Logo, deduzimos que $\mathrm{x} = \frac{\ln(3)-\ln(5)}{\ln(2)}$.

3. Da mesma maneira, temos:

$$9^{2x}-6.3^{x} = 0 \Leftrightarrow 3^{4x} = 6.3^{x} \Leftrightarrow \ln(3^{4x}) = \ln(6.3^{x}) \Leftrightarrow 4x\ln(3) = \ln(6)+x\ln(3).$$

Logo, deduzimos que $3x\ln(3) = \ln(6)$, assim temos $x = \dfrac{\ln(6)}{3\ln(3)}$.

Exercício 11.8 *Resolva a equação:*

$$2^{2x} - 2^{x} = 6.$$

Solução. Sabemos que para a equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, possui uma solução ou duas, se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Nesse caso, temos $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. A resolução da equação $2^{2x} - 2^{x} = 6$ equivale a resolver a equação $(2^{x})^2 - 2^{x} - 6 = 0$. Resolver a última equação é equivalente a resolver a equação de segundo grau $x^2 - x - 6 = 0$. Assim, temos $\Delta = b^2 - 4ac = 25 \geq 0$, logo as soluções são:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 3 \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -2.$$

Então, temos $2^x = 3 > 0$, logo $x = \log_2 3$ ou $2^x = -2 < 0$ equação impossível. Logo, a solução da equação $3^x + 3^{2x} = 12$ é dada por $x = \log_2 3$, ou seja, $x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$.

Exercício 11.9 Sejam *$A = 2^x$ e $B = 3^x$. Determine, se existir, x tais que:*

1. Determine, se existir, x tal que: $2.B = 3A$,

2. Determine, se existir, x tal que: $3.A + 2.B = 5$.

Solução.

1. A equação $2.B = 3A$ equivale à equação $2.3^x = 3.2^x$, logo temos: $3^{x-1}=2^{x-1}$. Assim, deduzimos que:

$$(x-1)\ln(3) = (x-1)\ln(2) \Leftrightarrow x(\ln(3) - \ln(2)) = \ln(3) - \ln(2).$$

Logo, temos $x = 1$. Então, a única solução da equação $2.B = 3A$ é $x = 1$.

2. A equação $3.A + 2.B = 5$ equivale à equação $3.A + 2.B = 5 = 3 + 2$, logo temos:

$$3(2^x - 1) = 2(1 - 3^x).$$

Se $x > 0$ temos $2^x - 1 > 0$ e $1 - 3^x < 0$, assim a equação $3.A + 2.B = 5$ não possui solução positiva.

Se $x < 0$ temos $2^x - 1 < 0$ e $1 - 3^x > 0$, assim a equação $3.A + 2.B = 5$ não possui solução negativa.

Se $x = 0$ temos $2^x - 1 = 0$ e $1 - 3^x = 0$, assim $x = 0$ é uma solução da equação $3.A + 2.B = 5$. Em conclusão, a única solução da equação $3.A + 2.B = 5$ é $x = 0$.

Exercício 11.10 *Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. Resolver a equação exponencial:*

$$a^x - a^{2x} + 1 = 0.$$

Solução.

Resolver a equação $a^x - a^{2x} + 1 = 0$ equivale a resolver a equação $-(a^x)^2 + a^x + 1 = 0$, ou seja, $(a^x)^2 - a^x - 1 = 0$. Resolver a última equação é equivalente a resolver a equação de segundo grau $x^2 - x - 1 = 0$. Assim, temos $\Delta = b^2 - 4ac = 5 \geq 0$, logo as soluções são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

Como $a^x > 0$ deduzimos que as soluções da equação $a^x - a^{2x} + 1 = 0$ são tais que $a^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Logo, obtemos:)

$$x = log_a(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \frac{\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}{\ln(a)}.$$

Exercício 11.11 *Resolver as inequações exponenciais:*

$$1.\ 2^{2x} > 1; \quad 2.\ 2^{-x} > 1 \quad \text{e} \quad 3.\ 3^{(2-x)(2+x)} > \frac{1}{27}.$$

Solução. Sabemos que a função $x \longmapsto \ln(x)$ é crescente sobre o intervalo $]0, +\infty[$, isto é, se $x > y > 0$, então temos $\ln(x) > \ln(y)$.

1. A desigualdade $2^{2x} > 1$ implica que $\ln(2^{2x}) > \ln(1) = 0$. Logo, temos

$$\ln(2^{2x}) = 2^x \ln(2) > 0,$$

Assim, como $\ln(2) > 0$, temos $x > 0$. Então, o conjunto solução da inequação $2^{2x} > 1$ é dado por $]0, +\infty[$.

2. A desigualdade $2^{-x} > 1$ implica que $\ln(2^{-x}) > \ln(1) = 0$. Logo, temos

$$\ln(2^{-x}) = -x \ln(2) > 0,$$

Assim, como $\ln(2) > 0$, temos $-x > 0$. Então, o conjunto solução da inequação $2^{-x} > 1$ é dado por $]-\infty, 0[$.

3. A inequação $3^{(2-x)(2+x)} > 27$ é equivalente a:

$$3^{(2-x)(2+x)} > \frac{1}{27} = 3^{-3}.$$

Como $a = 3 > 1$, a função $x \longmapsto \log_3(x)$ é crescente sobre o intervalo $]0, +\infty[$, e usando $\log_3(3^a) = a$, deduzimos:

$$\log_3 3^{(2-x)(2+x)} > \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} \Leftrightarrow, \text{ ou seja, } (2-x)(2+x) > -3.$$

Logo, temos $(2-x)(2+x) = 4 - x^2 > -3$, ou seja, $7 > x^2$. Logo, temos $7 - x^2 = (\sqrt{7} - x)(\sqrt{7} + x) > 0$. Então, o conjunto solução da inequação $3^{(2-x)(2+x)} > 27$ é dado por $]-\sqrt{7}, \sqrt{7}[$.

Exercício 11.12 *Determinar o conjunto solução para as seguintes desigualdades:*

$$1.\ \ln(x) > 2 - \ln(4x) \quad \text{e} \quad 2.\ \log_2(2x-1) > 1, \textit{ para } x > \frac{1}{2}.$$

Solução.

1. A inequação $\ln(x) > 2 - \ln(4x)$ é equivalente a inequação:

$$\ln(x) > \ln(e^2) - \ln(4x) = \ln\left(\frac{e^2}{4x}\right).$$

Como a função $x \longmapsto \ln(x)$ é crescente sobre o intervalo $]0, +\infty[$, deduzimos:

$$x > \frac{e^2}{4x} \Leftrightarrow 4x^2 > e^2, \text{ ou seja, } x^2 > \frac{e^2}{4}.$$

Logo, temos $x^2 - \frac{e^2}{4} = (x - \frac{e}{2})(x + \frac{e}{2}) > 0$. Usando as propriedades dos sinais das funções de segundo grau, deduzimos que o conjunto solução da inequação $\ln(x) > 2 - \ln(4x)$ é dado por $]-\infty, -\frac{e}{2}[\cup]\frac{e}{2}, +\infty[$.

2. Como $a = 2 > 1$, então a função $x \longmapsto \log_2(x)$ é crescente sobre o intervalo $]0, +\infty[$. A inequação $\log_2(2x-1) > 1$ é equivalente a inequação:

$$\log_2(2x - 1) > \log_2(2) \Leftrightarrow 2x - 1 > 2.$$

Assim, temos $2x > 3$, ou seja, $x > \frac{3}{2}$. Então, deduzimos que o conjunto solução da inequação $\log_2(2x - 1) > 1$ é dado por $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

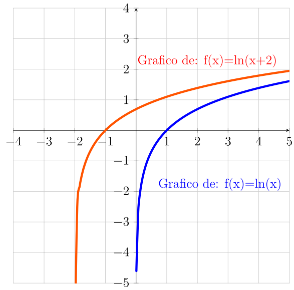
Exercício 11.13 *Usando software, responda as seguintes questões.*

1. Descreva como transformar o gráfico da função $f(x) = \ln x$ em um gráfico da função dada: $g(x) = \ln(x + 2)$.

2. Descreva como transformar o gráfico da função $f(x) = \ln x$ em um gráfico da função dada: $g(x) = \ln(x - 2)$.

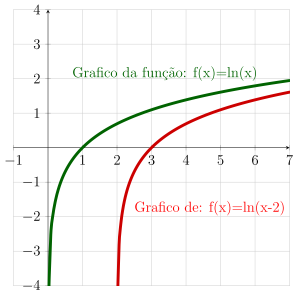
Solução.

1. Fazendo a construção com o software geogebra dos gráficos das funções $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \ln(x + 2)$, obtemos essas representações, ao lado.



Podemos observar que o gráfico da função $g(x) = \ln(x + 2)$ é obtido transladando o gráfico de $f(x) = \ln x$ duas unidades para a esquerda.

2. Fazendo a construção com o software geogebra dos gráficos das funções $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \ln(x - 2)$, obtemos essas representações, ao lado.



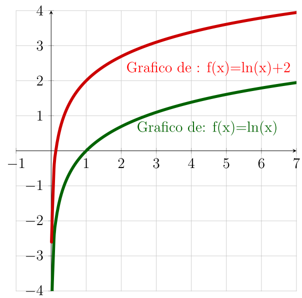
Podemos observar que o gráfico da função $g(x) = \ln(x - 2)$ é obtido transladando o gráfico de $f(x) = \ln x$ duas unidades para a direita.

Observação 11.2 *Em geral, dada uma função real* $f : D_f \to \mathbf{R}$ *e denotam por* C_f *seu gráfico. Então, o gráfico* C_g *da função* $g(x) = f(x + a)$, *com* $a > 0$ *é obtido transladando o gráfico de* C_f *de* $f(x)$, *à esquerda de a unidades. Também, o gráfico* C_g *da função* $g(x) = f(x - a)$, *com* $a > 0$ *é obtido transladando o gráfico de* C_f *de* $f(x)$, *à direita de a unidades.*

Exercício 11.14 *Usando software descreva como transformar o gráfico da função* $f(x) = \ln x$ *em um gráfico da função dada:* $g(x) = \ln(x) + 2$.

Solução.

Fazendo a construção com o software Geogebra dos gráficos das funções $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \ln(x) + 2$, obtemos essas representações ao lado.



Podemos observar que o gráfico da função $g(x) = \ln(x) + 2$ é obtido transladando o gráfico de $f(x) = \ln x$ duas unidades para cima.

Observação 11.3 *Em geral, dada uma função real* $f : D_f \to \mathbf{R}$ *e denotam por* C_f *seu gráfico. Então, o gráfico* C_g *da função* $g(x) = f(x) + a$, *com* $a > 0$ *é obtido transladando o gráfico de* C_f *de* $f(x)$, *acima de a unidades.*

Observação 11.4 *Em geral, dada uma função real* $f : D_f \to \mathbf{R}$ *e denotam por* C_f *seu gráfico. Então, o gráfico* C_g *da função* $g(x) = f(x) - a$, *com* $a > 0$ *é obtido transladando o gráfico de* C_f *de* $f(x)$, *abaixo de a unidades.*

Exercício 11.15 *Seja a função* $L :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *tal que*:

1. *L é uma função crescente, isto é, se* $x < y$ *então* $L(x) < L(y)$.
2. $L(x.y) = L(x) + L(y)$, *para quaisquer x e y em* $]0, +\infty[$.

Mostre que:

1. *A função L é sempre injetora.*

2. *L(1) = 0.*

3. *Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.*

4. *Para todo $x > 0$ tem-se $L(1/x) = -L(x)$.*

5. *Para quaisquer x, y em $]0,+\infty[$ vale:*

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y).$$

Solução.

1. Sejam $x > 0$ e $y > 0$ com $x \neq y$. Se $x < y$, então $L(x) < L(y)$, logo temos $L(x) \neq L(y)$. Se $y < x$, então $L(y) < L(x)$, logo temos $L(x) \neq L(y)$. Assim, pela definição de uma função injetora, deduzimos que a função L é injetiva.

2. Como $L(x.y) = L(x) + L(y)$, para quaisquer x e y em $]0,+\infty[$, então se $x = y = 1$, temos $L(1.1) = L(1) + L(1)$, ou seja, $L(1) = 2L(1)$. Logo, temos $L(1) = 0$.

3. Seja $x \in]1,+\infty[$, assim $x > 1$, logo $L(x) > L(1) = 0$.

Seja $x \in]0, 1[$, assim $x < 1$, logo $L(1) = 0 > L(x)$.

4. Seja $x \in]0,+\infty[$, temos $x \times \frac{1}{x} = 1$, logo $L(x \times \frac{1}{x}) = L(1) = 0$, ou seja, $L(x) + L(\frac{1}{x}) = 0$. Então, obtemos que $L(\frac{1}{x}) = -L(x)$.

5. Sejam $x > 0$ e $y > 0$, temos:

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x.\frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) - L(y),$$

porque $L(\frac{1}{y}) = -L(y)$.

CAPÍTULO 12
Elementos Básicos da Trigonometria

Objetivos

Neste capítulo vamos introduzir as linhas trigonométricas a partir do círculo trigonométrico. Começamos com o conceito de arco de circunferência o qual será estendido de modo a comportar uma orienta.c ão e admitir medidas maiores que o comprimento da circunferência, a fim de caracterizarmos o círculo trigonométrico.

12.1 Preliminar - Um pouco de história da trigonometria

O termo **TRIGONOMETRIA** é uma palavra grega composta de trigone (triângulo) e de **metron** (medida), o que significa: Relações entre distâncias e ângulos em um triângulo.

Devemos voltar aos babilônios, 2000 anos antes de nossa era, para encontrar os primeiros vestígios de tabelas de dados astronômicos. A base da trigonometria está na geometria aplicada ao estudo do mundo, do universo, e foi inseparável da astronomia. Hiparco de Nicéia (-190; -120) criou as primeiras tabelas trigonométricas utilizando o círculo, combinando o **ângulo no centro** e o **comprimento da corda**.

O grego Claude Ptolomeu (90 ?; 160?) continuou os trabalhos de Hiparco com uma precisão melhor e introduziu as primeiras fórmulas de trigonometria. Mais tarde, o astrônomo e matemático Regiomontanus (1436-1476), de nome verdadeiro Johann Múller desenvolveu a trigonometria como um ramo independente da matemática. Seria a origem do uso sistemático do termo seno. No século XVI, o francês

François Viète (1540; 1607), conselheiro de Henri IV, fez evoluir a trigonometria para dar-lhe o estatuto que conhecemos atualmente.

Hoje, a trigonometria tem aplicações muito diversas, particularmente nas ciências físicas. A propaga.c ão de ondas, por exemplo, é transcrita por funções trigonométricas.

Os gráficos e desenhos deste capítulo, foram elaborados pelos autores, contando com os diversos arquivos dos sites oficiais do Latex e Geogebra.

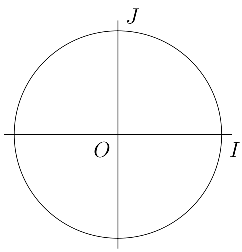
12.2 Círculo trigonométrico - Radiano

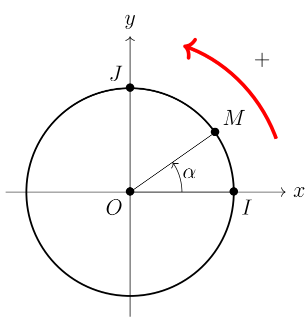
12.2.1 Círculo trigonométrico

O círculo trigonométrico é a base da trigonometria. Para iniciantes, é importante ter uma definição desse círculo.

Definição 12.1 Definição geral *O círculo trigonométrico é um círculo C de raio 1 que é orientado, o que significa que escolhemos uma* **direção positiva** *(das voltas no círculo) e uma* **direção negativa** *(Ponteiro de um relógio).*

Em geral, tem-se a seguinte representação geométrica do círculo trigonométrico:





A representação geométrica anterior do círculo trigonométrico é dada no plano cartesiano. Assim, a definição do círculo trigonométrico pode ser formulada da seguinte forma:

Definição 12.2 Definição com as coordenadas ortonormais. O círculo trigonométrico *é um círculo cujo*:

1. **Raio** *é uma unidade;*

2. **Centro** *coincide com a origem do sistema de coordenadas ortonormais* $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$;

3. **Orientação**: *orientado em uma direção chamada "direção trigonométrica" correspondente à direção anti horária.*

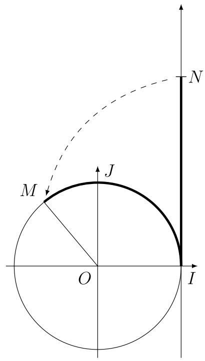
Em relação à orienta.c ão, convencionamos como sentido positivo aquele contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio, enquanto o sentido negativo é o considerado como no sentido de se deslocar os ponteiros do relógio.

Chama-se arco de círculo trigonométrico, denotado por $\widehat{AB}$, a porção compreendida por dois pontos A e B da circunferência. Na figura anterior o arco $\widehat{IM}$ é a porção compreendida pelos dois pontos *I* e *M*.

12.2.2 Enrolando uma linha ao redor do círculo trigonométrico

No plano cartesiano, consideramos o círculo trigonométrico *C* e a reta *D* de equação $x = 1$, essa reta é tangente ao círculo C, no ponto I e orientada tal que (I; $\rightarrow \overrightarrow{OJ}$) seja um quadro da reta *D*. Se nós enrolarmos a reta *D* ao redor do círculo, e associarmos em cada ponto *N* de abscissa *x* da reta orientada um único ponto *M* do círculo. O comprimento do arco $\widehat{IM}$ é igual ao comprimento $\overline{IN}$.

O enrolamento da reta dos números reais no círculo trigonométrico permite: associar a cada real *x* um ponto *M* no círculo trigonométrico C. Por outro lado, isso torna possível localizar qualquer ponto M do círculo trigonométrico C por meio de um real x medindo o arco orientado $\overset{\frown}{IM}$.



A medida x do arco $\overset{\frown}{IM}$ em radiano é considerada também como a medida do ângulo $\alpha = \widehat{(\vec{OI}, \vec{OM})} = \widehat{IOM}$.

Como estamos considerando a possibilidade de arcos com medida algébrica (medida do arco precedida do sinal + ou -) maior que 2π radianos, o enrolamento da reta mostra que temos um número infinito de arcos com mesma origem e mesma extremidade, porém com medidas algébricas distintas. Assim, dizemos que um arco orientado admite infinitas determinações e que as várias determinações de um mesmo arco orientado são arcos côngruos. Isso nos leva a definir a medida algébrica (ou principal) de um ângulo orientado.

Definição 12.3 (Medida algébrica de um ângulo) *A medida algébrica de um ângulo orientado é a medida, que entre todos as outras medidas desse ângulo, está no intervalo* $[0, 2\pi[$. *Assim, seja x a medida algébrica de um ângulo* α*, tal que* $0 \leq \alpha < 2\pi$*, a menor determina.c ˜ao de x, então vale a seguinte relação:*

$$x = \alpha + 2k\pi \text{ onde } k \text{ é um número inteiro.}$$

Por exemplo, uma medida de um ângulo orientado é 5π. Outras medidas deste ângulo são: $5\pi - 2\pi$, $5\pi - 4\pi$, $5\pi - 6\pi$; ... ou seja: 3π, π, $-\pi$, ..., assim $\pi \in]0, 2\pi]$ é, portanto, a medida principal deste ângulo orientado, isto é, a medida principal de 5π é π.

Por exemplo, a medida principal do ângulo $\frac{7\pi}{3}$ é $\frac{\pi}{3}$. Isto é, como $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$, deduzimos que $\frac{7\pi}{3} - 2\pi = \frac{\pi}{3} \in [0, 2\pi[$, assim a medida principal de $\frac{7\pi}{3}$ é $\frac{\pi}{3} \in]0, 2\pi[$.

A medida principal do ângulo $-\frac{7\pi}{3}$ é $\frac{5\pi}{3}$. Isto é, como $-\frac{7\pi}{3} = -2\pi - \frac{\pi}{3}$ deduzimos que $-\frac{7\pi}{3} + 4\pi = \frac{5\pi}{3}$ é a medida principal de $-\frac{7\pi}{3}$, porque $\frac{5\pi}{3} \in [0, 2\pi[$.

Na prática, o cosseno de um ângulo orientado é igual ao cosseno do ângulo principal associado a este ângulo. De maneira semelhante, o seno de um ângulo orientado é igual ao seno do ângulo principal associado a este ângulo. Assim, a tangente de um ângulo orientado é igual à tangente do ângulo principal associado a este ângulo.

12.2.3 Medida dos ângulos: Grau e Radiano

A medida conhecida dos ângulos é o grau. No entanto, definiremos outra medida que é muito importante em matemática, bem como em todas as áreas das ciências exatas ou aplicadas.

Definição 12.4 Radiano. *Seja um círculo C de centro O e de raio 1. Um Radiano, denotado rad, é a medida do ângulo no centro que intercepta um arco de comprimento 1 do círculo C.*

A primeira rala.c ão entre as medidas dos ângulos, isto é, o grau e o radiano, é dada pela seguinte proposição:

Proposição 12.1 *Um ângulo completo (giro completo) é de 2π radianos.*

Demonstração. O comprimento do círculo trigonométrico é igual a 2π. De fato, seu raio é 1 então $P = 2\pi \times R = 2\pi \times 1 = 2\pi$. Agora o comprimento de um arco e a medida do ângulo que o intercepta são proporcionais. Como 1 radiano é a medida do ângulo que intercepta um arco de comprimento 1 no círculo trigonométrico, deduzimos que a medida do ângulo total é igual a 2π radianos. **C.Q.D.**

Usando a Proposição 12.1, podemos estabelecer uma regra para a conversão das duas medidas dos ângulos, isto é, a conversão da medida de um ângulo em graus para sua medida em radianos e vice-versa.

Proposição 12.2 Correspondência entre Graus e radianos. *A medida de um ângulo em radiano é proporcional à medida do mesmo ângulo em graus, isto é, como 2π radianos (giro completo), corresponde a um ângulo de 360^o e π radianos (giro completo) corresponde a um ângulo de 360^o, deduzimos a seguinte relação de proporcionalidade*:

$$\frac{\alpha_{radiano}}{2\pi} = \frac{\alpha_{grau}}{360} \Leftrightarrow \frac{\alpha_{radiano}}{\alpha_{grau}} = \frac{2\pi}{360} \Leftrightarrow 2\pi \times \alpha_{grau} = 360 \times \alpha_{grau}$$

É fácil observar que a regra anterior se baseia na propriedade da proporcionalidade. Assim, por proporcionalidade, obtemos as seguintes correspondências:

Ângulos em radianos	0	30	45	60	90	180
Ângulos em graus	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Prática de conversão de grau-radiano. Duas perguntas:

1) Como converter a medida de ângulo em grau para a medida de ângulo em radiano?

2) Como converter uma medida de ângulo em radiano para uma medida de ângulo em grau?

Por exemplo:

1) Dê a medida em radianos do ângulo α de medição 33º.

2) Dê a medida em graus do ângulo β da medida $\frac{3\pi}{8}$ radiano.

ângulos em radianos	2π	α ?	$\frac{3\pi}{8}$
Ângulos em graus	360	33	β ?

Com a regra de proporcionalidade temos:

$$\alpha = 33 \times \frac{2\pi}{360} = \frac{11}{60}\pi\, rad \text{ e } \beta = \frac{3\pi}{8} \times \frac{360}{2\pi} = \frac{135}{2} = 67,5^o$$

De maneira geral, as duas regras práticas de conversão são dadas como a seguir:

1. Seja αgrau um ângulo cujo medida em grau é conhecida e αradiano sua medida em radiano. Então, a medida em radiano αradiano é:

$$\alpha_{radiano} = 2\pi \times \frac{\alpha_{grau}}{360} = \pi \times \frac{\alpha_{grau}}{180}.$$

2. Seja α radiono um ângulo cujo medida em grau é conhecida e αgrau sua medida em radiano. Então, a medida em radiano αgrau é:

$$\alpha_{grau} = \frac{\alpha_{radiano}}{2\pi} \times 360 = \frac{\alpha_{radiano}}{\pi} \times 180$$

12.3 Cosseno, Seno e Tangente

No plano cartesiano com um quadro ortonormal $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, consideramos o círculo trigonométrico C de centro O. Para todo x, seja o ponto N da reta (T) tangente para circular em I e orientada tal que $(I; \overrightarrow{OJ})$ seja um quadro da reta (T), cujo abscissa é x, isto é, $\overrightarrow{IN} = x\overrightarrow{OJ}$.

Para o ponto N associamos um ponto M no círculo trigonométrico. Sejam H e K os respectivos pés das perpendiculares ao eixo (Ox) e ao eixo (Oy), passando por M, isto é, $\overrightarrow{OH} = a\overrightarrow{OI}$ e $\overrightarrow{OK} = b\overrightarrow{OJ}$, onde a e b são respectivamente, as abscissa e ordenada do ponto M.

Definição 12.5 *Seja x un número real.*

1) O **cosseno** *do número real x é a abscissa a de M e denotamos* $a = \cos x$ *ou* $a = \cos(x)$.

2) O **seno** *do número real x é a ordenada b de M e denotamos* $b = \text{sen } x$ *ou* $b = \text{sen}(x)$.

3) A **tangente** *do número real x, denotado por tan x ou tan(x), é o quociente do seno pelo cosseno, isto é,*

$$\tan(x) = \frac{b}{a} = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} .$$

Isto é:

1) A abcissa a corresponde ao cosseno do ângulo x associado ao ponto M.

2) A ordenada b corresponde ao seno do ângulo x associado ao ponto M.

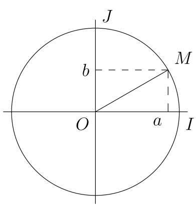
Localizando um ponto do círculo trigonométrico C por suas coordenadas.

Assim, seja $M(a, b)$ um ponto de C então, temos:

Sua abscissa a é:

1. A projeção ortogonal de M no eixo das abscissas;

2. Entre -1 e 1, onde $a \geq 0$ se M pertence à metade direita de C e $a \leq 0$ se pertence M à metade esquerda de C.



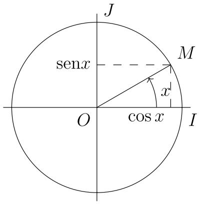
Sua ordenada *b* é:

1. A projeção ortogonalde *M* no eixo das ordenas *y*,

2. Entre -1 e 1, onde $b \geq 0$ se *M* pertence à metade superior de *C* e $b \leq 0$ se *M* pertence à metade inferior de *C*.

Localizando um ponto do círculo trigonométrico por um ângulo. Isto é, um ponto M do círculo pode ser identificado pelo ângulo $\alpha = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. Inversamente, em cada ângulo α, é possível associar um ponto *M*. Como o círculo é orientado, o ângulo é positivo se for expresso na direção trigonométrica e negativo na direção oposta. Segundo a discussão feita anteriormente, temos a seguinte proposição:

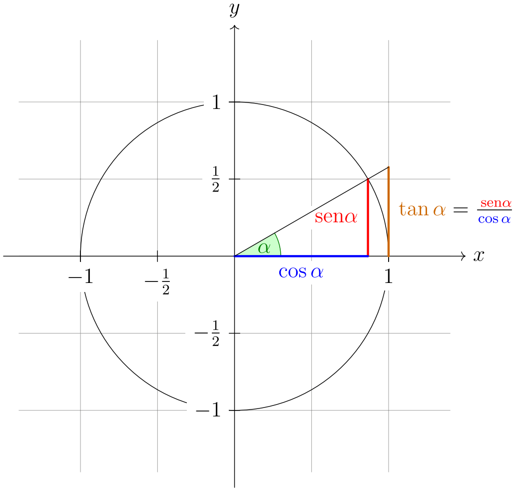
Proposição 12.3 *Seja M um ponto do círculo trigonométrico, a medida do ângulo* $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ *é denotada por x. Então as coordenadas do ponto M são (cos(x), sen(x)) tal que*:



$-1 \leq \cos(x) \leq 1$ *e* $-1 \leq sen(x) \leq 1$.

A partir da figura acima, podemos observar que o seno de ângulos nos dois primeiros quadrantes é positivo, enquanto nos dois últimos é negativo. Também, podemos observar que o cosseno de ângulos no primeiro e no quarto quadrantes é positivo, enquanto no segundo e terceiro quadrantes é negativo.

Por exemplo, para $\alpha = 30°$ ou seja $\alpha = \frac{\pi}{6}$, temos:



O ângulo α é de 30° no exemplo ($\pi/6$ em radiano). O seno de α, que é a altura da linha vermelha, é

$$\text{sen}\alpha = 1/2.$$

Pelo Teorema de Pitágoras nós temos $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$. Assim, o comprimento da linha azul, que é o cosseno de α, deve ser

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - 1/4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

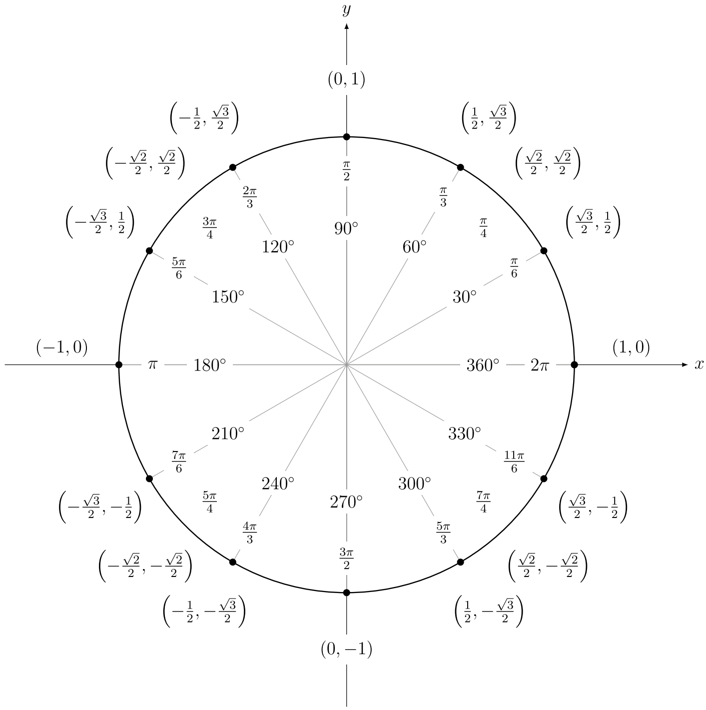
Isso mostra que $\tan\alpha$, que é o altura da linha laranja, é

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 1/\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Valores notáveis do seno, do cosseno e da tangente.

x em radiano	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
x em grau	0	30	45	60	90	180
$\text{sen}(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND	0

Na figura a seguir, temos todos os valores notáveis de cosseno e seno. De acordo com a Proposição 12.3 anterior, os valores do cosseno e do seno são as coordenadas dos pontos do círculo trigonométrico associados aos ângulos correspondentes.



12.4 Propriedades do cosseno e do seno

A partir do conteúdo do parágrafo anterior deduzimos as seguintes propriedades:

Proposição 12.4 *Para todo número real x, temos as seguintes propriedades:*

1. $-1 \leq \cos(x) \leq 1$;

2. $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$;

3. $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$;

4. $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$, *para todo número inteiro k*;

5. $sen(x) = sen(x + 2k\pi)$, *para todo número inteiro k*.

As propriedades 1) e 2) são conhecidas e foram estabelecidas graficamente na Proposição 12.4. A terceira relação é deduzida do Teorema de Pitágoras. Para as propriedades 4) e 5), os pontos da reta orientada têm como ângulos x e $x + 2k\pi$ que correspondem ao mesmo ponto do círculo trigonométrico. Assim, os pontos $M(\cos(x), \text{sen}(x))$ e $M(\cos(x + 2k\pi), \text{sen}(x + 2k\pi)$ são idênticos.

Definição 12.6 (Ângulos associados) *Dois ângulos são considerados associados se admitem cossenos e senos iguais ou opostos.*

Proposição 12.5 (Ângulos associados) *Para todo real x temos as seguintes propriedades dos ângulos associados:*

$$1.\begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos(x) \\ \\ sen(x+2\pi) = \ sen(x) \end{cases} \qquad 2.\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \\ sen(-x) = -\ sen(x) \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \\ sen(\pi - x) = -\ sen(x) \end{cases} \qquad 4.\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \\ sen(\pi + x) = -\ sen(x) \end{cases}$$

$$5.\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \ sen(x) \\ \\ sen(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) \end{cases} \qquad 6.\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\ sen(x) \\ \\ sen(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x) \end{cases}$$

Definição 12.7 Linhas Trigonométricas *Seja α um ângulo, os valores de cos(α), sen(α) e tan(α) são chamados de* **linhas trigonométricas** *do ângulo α.*

Por exemplo, as linhas trigonométricas de $\frac{\pi}{6}$ são: $\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Outro exemplo, as linhas trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$ são: $\text{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$.

12.5 Exercícios

Exercício 12.1 *Medidas em radianos e Medidas em graus.*

1. *Seja* $\alpha = 12°$ e $\beta = 160°$. *Quais são as medidas de* α *e* β *em radianos?*

1. *Seja* $\alpha = \frac{7\pi}{12}$ e $\beta = \frac{13\pi}{9}$. *Quais são as medidas de* α *e* β *em graus?*

Solução. Aqui vamos aplicar a seguinte regra:

$$\frac{\alpha\ grau}{360} = \frac{\alpha\ radiano}{2\pi} \text{ ou equivalentemente} \frac{\alpha\ grau}{180} = \frac{\alpha\ radiano}{2\pi}.$$

1. A fórmula acima implica que αradiano $= \frac{\alpha\ grau}{180} \times \pi$. Logo, temos: $\alpha_{radiano} = \frac{12}{180} \times \pi = \frac{\pi}{15}$. Da mesma maneira, temos: $\beta_{radiano} = \frac{160}{180} \times \pi = \frac{8\pi}{9}$.

2. A fórmula acima implica que $\alpha_{grau} = \frac{\alpha\ radiano}{\pi} \times 180$. Logo, temos: $\alpha_{grau} = \frac{\frac{7\pi}{12}}{\pi} \times 180 = 105$ graus. Da mesma maneira, temos: $\beta_{grau} = \frac{\frac{13\pi}{9}}{\pi} \times 180 = 260$ graus.

Exercício 12.2 *Encontrar o seno e o cosseno dos ângulos:*

$$120° \text{ e } 240°;$$

Solução. Vamos usar as propriedades dos ângulos associados e os dados do círculo trigonométrico anterior.

1. Como 120° é um arco no 2° quadrante e reduzindo ao 1° quadrante, temos: $120 = 180 - 60$. Então, temos:

$$\text{sen}(120°) = \text{sen}(180° - 60°) = \text{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos(120°) = \cos(180° - 60°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}.$$

2. Como 240° é um arco no 3° quadrante e reduzindo ao 1° quadrante, a equação $240 = 180 + x$ implica que $x = 60°$. Então, temos:

$$\text{sen}(240°) = \text{sen}(180° + 60°) = -\text{sen}(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos(240°) = \cos(180° + 60°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}.$$

Exercício 12.3 *Encontrar o seno e o cosseno dos ângulos:*

$$\frac{7\pi}{6} \text{ e } \frac{8\pi}{3}.$$

Solução.

1. Como $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$, assim esse arco está no 3° quadrante e reduzindo ao 1° quadrante. Logo, temos:

$$\text{sen}(\frac{7\pi}{6}) = \text{sen}(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\text{sen}(\frac{\pi}{6}) \text{ e } \cos(\frac{7\pi}{6}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}).$$

Assim, usando a tabela dos valores notáveis, obtemos: $\text{sen}(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ e $\cos(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Como $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$. Por outro lado, esse arco está no 2° quadrante e reduzindo ao 1° quadrante, temos: $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$. Logo, temos:

$$\text{sen}(\frac{8\pi}{3}) = \text{sen}(\frac{2\pi}{3}) = \text{sen}(\pi - \frac{\pi}{3}) \text{ e } \cos(\frac{8\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}).$$

Assim, usando a tabela dos valores notáveis, obtemos: $\text{sen}(\frac{8\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(\frac{8\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.

Exercício 12.4 *Sabendo que* $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, *com* $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, *calcular:*

$$sen(x), \tan(x) \text{ e } cotan(x).$$

O conceito de cotangente de um ângulo x, denotado cotan(x), é definido simplesmente por $cotan(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$.

Solução. Utilizando a Relação Trigonométrica Fundamental $\text{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$, temos:

$$\text{sen}^2(x) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1, \text{ ou seja, } \text{sen}^2(x) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9}.$$

Logo, obtemos $\text{sen}(x) = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$, e como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ deduzimos que seno é positivo, logo temos $\text{sen}(x) = +\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Agora que já sabemos o valor do seno de x e o valor do cosseno de x, então a tangente de x é dada:

$$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

ou seja, $\tan(x) = -\sqrt{2}$.

Para a cotangente de um ângulo x temos:

$$\text{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{6}}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}},$$

logo, obtemos:

$$\text{cotan}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercício 12.5 *Provar a identidade trigonométrica:*

$$\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Solução. Vamos considerar a Relação Trigonométrica Fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Dividindo cada membro desta identidade por $\cos^2(x)$, dá:

$$\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Como $\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$ e $\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$ $\tan^2(x)$, deduzimos que,

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2 x},$$

ou seja, temos a Identidade Trigonométrica $\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Observação 12.1 *Quando temos uma igualdade de expressões trigonométricas, dizemos que é uma Identidade Trigonométrica se essa igualdade for válida para qualquer valor real de x. Em geral, para estabelecer que uma identidade trigonométrica é verdadeira, pode-se considerar qualquer uma das relações trigonométricas já estudadas em trigonometria e usar um dos métodos de prova:*

1. *Desenvolver um dos membros da igualdade até chegarmos ao outro;*

2. *Transforme o 1º e o 2º membro da igualdade considerada na mesma expressão.*

Exercício 12.6 *Para cada caso determine o valor de* $\cos(x)$:

1. $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ *e* $sen(x) = \frac{\sqrt{7}}{4}$;

2. $x \in [\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ *e* $sen(x) = -0.5$;

3. $x \in [\frac{-\pi}{2}, 0]$ *e* $sen(x) = -\frac{2}{3}$.

Solução. Aqui vamos usar a relação trigonométrica: $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$.

1) Temos $\cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$, assim temos $\cos(x) = \frac{3}{4}$ ou $\cos(x) = -\frac{3}{4}$. Como $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, temos que $\cos(x) < 0$. Logo, temos: $\cos(x) = -\frac{3}{4}$.

2) Temos $\cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, assim temos $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, temos que $\cos(x) > 0$. Logo, temos: $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Temos $\cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, assim temos $\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\cos(x) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. Como $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, temos que $\cos(x) > 0$. Logo, temos: $\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Exercício 12.7 *Sabemos que* $\cos(\frac{9\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. *Calcular o valor de* $sen(\frac{9\pi}{5})$. *Deduzir os valores de* $\cos(\frac{\pi}{5})$ *e* $sen(\frac{\pi}{5})$.

Solução. Temos:

$$\text{sen}^2(\frac{9\pi}{5}) = 1 - \cos^2(\frac{9\pi}{5}) = 1 - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4^2} = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}.$$

Logo, temos:

$$\text{sen}(\frac{9\pi}{5}) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \text{ ou } \text{sen}(\frac{9\pi}{5}) = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Como $\frac{9\pi}{5} = 2\pi - \frac{\pi}{5} = \pi + \frac{4\pi}{5}$, deduzimos que $\text{sen}(\frac{9\pi}{5}) = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Sabemos que $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ e $\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}(x)$. Como $\frac{9\pi}{5} = 2\pi - \frac{\pi}{5}$, logo temos: $\cos(\frac{9\pi}{5}) = \cos(2\pi - \frac{\pi}{5}) = \cos(-\frac{\pi}{5}) = \cos(\frac{\pi}{5})$ e $\text{sen}(\frac{9\pi}{5}) = \text{sen}(2\pi - \frac{\pi}{5}) = \text{sen}(-\frac{\pi}{5}) = -\text{sen}(\frac{\pi}{5})$. Assim, deduzimos que:

$$\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ e } \text{sen}(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Exercício 12.8 ***Valor algébrico dos ângulos.***

1. *Qual é o valor algébrico de ângulo α para* $x = \frac{89\pi}{12}$ *?*
2. *Qual é o valor algébrico do ângulo α para* $x = \frac{273\pi}{12}$*?*
3. *Quais são os valores algébricos dos ângulos:*

$$x_1 = -\frac{7\pi}{3}, \ x_2 = -\pi, \ x_3 = \frac{104\pi}{3} \text{ e } x_4 = -\frac{49\pi}{6}.$$

Solução. 1. Sabemos que o valor algébrico do ângulo α é a medida desse ângulo no intervalo $[0, 2\pi[$. Para o ângulo $x = \frac{273\pi}{12}$ temos:

$$x = \frac{89\pi}{12} = 6\pi + \frac{17\pi}{12},$$

e como $0 < \frac{17\pi}{12} < 2\pi$, deduzimos que o valor algébrico α do ângulo $x = \frac{89\pi}{12}$ é $\alpha = \frac{17\pi}{12}$.

2. Da mesma forma, temos:

$$x = \frac{273\pi}{12} = 22\pi + \frac{9\pi}{12},$$

e como $0 < \frac{9\pi}{12} < 2\pi$, deduzimos que o valor algébrico α do ângulo $x = \frac{273\pi}{12}$ é $\alpha = \frac{9\pi}{12}$.

3. Com o mesmo raciocínio, os valores algébricos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 (respectivamente) dos ângulos:

$$x_1 = -\frac{7\pi}{3}, \ x_2 = -\pi, \ x_3 = \frac{11\pi}{3}, \text{ e } x_4 = -\frac{49\pi}{6}.$$

são dados por:

$$\alpha_1 = 4\pi - \frac{7\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}, \ \alpha_2 = 2\pi - \pi = \pi, \ \alpha_3 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{e} \quad \alpha_4 = 10\pi - \frac{49\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

Exercício 12.9 *Usando o círculo trigonométrico, encontrar todos os valores possíveis de x verificando as seguintes condições:*

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$ *e* $sen(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *com* $x \in [-\pi, \pi]$;
2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $sen(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *com* $x \in [-\pi, \pi]$;
3. $\cos(x) = 0$ *e* $sen(x) = 1$ *com* $x \in]-2\pi, 3\pi[$.

Solução. Usando o círculo trigonométrico, temos:

1. Se $\cos(x) = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, com $x \in [-\pi, \pi]$, então temos: $x = -\frac{\pi}{3}$.

2. Se $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, com $\in [-\pi, \pi]$, então $x = \frac{\pi}{4}$.

3. Se $\cos(x) = 0$ e $\text{sen}(x) = 1$, com $x \in [-2\pi, 3\pi[$, então $x = 0$ ou $x = 2\pi$.

Exercício 12.10 *Expressar em termos de* $\cos(x)$ *e* $sen(x)$ *as seguintes expressões:*

1. $A(x) = \cos(\frac{5\pi}{2} - x)$;
2. $B(x) = sen(x + 100\pi)$;
3. $C(x) = \cos(\frac{2012\pi}{12} + x)$;
4. $D(x) = \cos(x - 78\pi)$;
5. $E(x) = 4\cos(\frac{5\pi}{2} - x) - 5\,\text{sen}(\pi + x)$.

Solução. Usando o círculo trigonométrico e as relações $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ e $\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}(x)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos:

1. $A(x) = \cos(\frac{5\pi}{2} - x) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen}(x)$.
2. $B(x) = \text{sen}(x + 100\pi) = \text{sen}(x + 2 \times 50\pi) = \text{sen}(x)$.
3. $C(x) = \cos(\frac{2012\pi}{12} + x)$.
4. $D(x) = \cos(x - 78\pi) = \cos(x - 2 \times 39\pi) = \cos(x)$.
5. $E(x) = 4\cos(\frac{5\pi}{2} - x) - 5\,\text{sen}(\pi + x) = 4\,\text{sen}(x) + 5\,\text{sen}(x) = 9\,\text{sen}(x)$.

Exercício 12.11 *Sabemos que* $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$. *Lembre-se que* $\tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ *tal que* $x \in \mathbb{R}$ *com* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *onde* k *é um número inteiro.*

1. *Mostrar que para todo* $x \in \mathbb{R}$ *com* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$*, onde k é um número inteiro, temos:*

$$\tan(x + \pi) = \tan(x).$$

Deduzir o valor exato de $\tan(\frac{9\pi}{8})$.

2. *Mostrar (novamente!) que para todo* $x \in \mathbb{R}$ *com* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$*, onde k é um número inteiro, temos:*

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Deduzir o valor exato de $\cos(\frac{\pi}{8})$ e de $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{8})$.

Solução.

1. Sabemos que $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen}(x)$. Logo temos:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

Temos:

$$\tan(\frac{9\pi}{8}) = \tan(\pi + \frac{\pi}{8}) = \tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$$

2. Para todo $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é um número inteiro, temos:

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Como $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ deduzimos que $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$. Logo, temos:

$$\cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{1 + \tan^2(\frac{\pi}{8})} = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Logo, temos:

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Por outro lado, a relação $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ implica que:

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{8})} = \sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Exercício 12.12 *Demonstre que para qualquer número real x diferente de $k\pi$, vale*:

$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = cotang(x).$$

Solução. Sabemos que $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, assim:

$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}.$$

Por outro lado, sabemos que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ e $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{sen}(x)$, logo temos:

$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \text{ ou seja, } \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{cotang}(x).$$

CAPÍTULO 13

Trigonometria: Fórmulas de Adição e Equações

Objetivos

Neste capítulo vamos trabalhar sobre as propriedades das fórmulas trigonométricas, das propriedades trigonométricas de adição e sobre as equações trigonométricas.

13.1 Fórmulas da adição e subtração

Sejam dois ângulos a e b cujas propriedades trigonométricas são conhecidas, vamos determinar as propriedades trigonométricas envolvendo uma soma $a + b$ ou uma subtração $a - b$. Como já ressaltamos, basta conhecer uma linha trigonométrica que as demais estão determinadas. Aqui, vamos admitir, apenas uma expressão envolvendo os senos, em particular, o seno da soma ou da diferença de dois ângulos, enquanto as outras serão provadas usando as propriedades dos ângulos associados.

Vamos admitir a seguinte propriedade:

Proposição 13.1 *Sejam a e b dois números reais. Suponha conhecidas as propriedades trigonométricas de a e b, então o seno de a + b é dado por:*

$$sen(a + b) = sen(a)\ cos(b) + cos(a)\ sen(b).$$

Agora, da fórmula admitida da Proposição 13.1 vamos provar as outras fórmulas de adição, dados pela seguinte proposição:

Proposição 13.2 (Fórmulas de adição para seno e cosseno). *Sejam a e b dois números reais. Suponha conhecidas as propriedades trigonométricas de a e b, então o seno de a + b é dado por:*

1. $sen(a - b) = sen(a)\ cos(b) - cos(a)\ sen(b)$;

2. $cos(a + b) = cos(a)\ cos(b) - sen(a)\ sen(b)$;

3. $cos(a - b) = cos(a)\ cos(b) + sen(a)\ sen(b)$.

Prova. Sejam a e b dois números reais. Como $\text{sen}(-b) = -\text{sen}(b)$ e $\cos(-a) = \cos(a)$, deduzimos de $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \cos(b) + \cos(a) \text{sen}(b)$ e $\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a + (-\text{b}))$. Logo, temos:

$$\begin{aligned}\text{sen}(a - b) &= \text{sen}(a) \cos(-b) + \cos(a) \text{sen}(-b)\\ &= \text{sen}(a) \cos(b) + \cos(a)(-\text{sen}(b))\\ &= \text{sen}(a) \cos(b) - \cos(a) \text{sen}(b).\end{aligned}$$

Isto é, temos que:

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a) \cos(b) - \cos(a) \text{sen}(b).$$

Agora, como $\cos(x) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ e $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\text{sen}(x)$, temos:

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \text{sen}(a + b + \tfrac{\pi}{2}) = \text{sen}(a + \tfrac{\pi}{2}) \cos(b) + \cos(a + \tfrac{\pi}{2}) \text{sen}(b)\\ &= \cos(a) \cos(b) + (-\text{sen}(a)) \text{sen}(b)\\ &= \cos(a) \cos(b) - \text{sen}(a) \text{sen}(b).\end{aligned}$$

Isto é, temos que:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \text{sen}(a) \text{sen}(b).$$

Para a última relação de adição, temos que:

$$\cos(a - b) = \cos(a + (-b)) = \cos(a) \cos(-b) - \text{sen}(a) \text{sen}(-b).$$

Como $\text{sen}(-b) = -\text{sen}(b)$ e $\cos(-b) = \cos(b)$, deduzimos que:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(-b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(-b)$$

$$= \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)(-\operatorname{sen}(b))$$

$$= \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

Como queríamos mostrar. **C.Q.D.**

Exemplo, usando a tabela dos valores notáveis e as fórmulas das propriedades trigonométricas de adição, calcular:

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{12}); \cos(\frac{\pi}{12}) \text{ e deduzir } \tan(\frac{\pi}{12}).$$

Sabemos que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ então, com propriedades trigonométricas da adição, temos:

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{6}) - \cos(\frac{\pi}{4})\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}).$$

Usando a tabela dos valores notáveis $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, deduzimos que:

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{2},$$

de onde segue o resultado:

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Usando a mesma abordagem obtemos que:

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Assim, o cálculo da tangente pode ser deduzido dos valores anteriores como:

$$\tan(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}.$$

Como consequência temos as seguintes fórmulas de adição para a tangente:

Corolário 13.1 *Sejam a e b dois números reais. Então, temos:*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \ \ e\ \ \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.$$

Exemplo, qual é a tangente de $\frac{\pi}{12}$?

Sabemos que $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ e $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então temos:

$$\tan(\frac{\pi}{12}) = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\tan(\frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\pi}{6})}{1+\tan(\frac{\pi}{4})\tan(\frac{\pi}{6})},$$

de onde segue o resultado:

$$\tan(\frac{\pi}{12}) = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

13.1.1 Arcos dobro e metade

Conhecendo as propriedades trigonométricas de um ângulo alfa, estamos interessados em obter as propriedades trigonométricas dos ângulos 2α e $\frac{\alpha}{2}$, mas vamos discutir apenas esses casos envolvendo o seno e o cosseno.

Lembre-se que $\cos^2(a) + \text{sen}2(a) = 1$, assim temos que $\text{sen}^2(a) = 1 - \cos^2(a)$ e $\cos^2(a) = 1 - \text{sen}^2(a)$. Sabemos também que $\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\,\text{sen}(b)$ e que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$, então tomando $a = b$ deduzimos as seguintes propriedades:

Proposição 13.3 Fórmulas de dobro. *Para todo $a \in \mathbb{R}$, temos*:

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - sen^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\,sen^2(a)$.

2. $sen(2a) = 2\,sen(a)\cos(a)$.

3. $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$.

A partir da precedente Proposição 13.3 deduzimos, as seguintes fórmulas:

Proposição 13.4 Fórmulas de linearização *Para todo $a \in \mathbb{R}$, temos*:

1. $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$;
2. $sen^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$;
3. $sen(a)\cos(a) = \dfrac{1}{2}\, sen(2a)$.

A Proposição 13.4 é importante para o estudo dos limites, das derivadas e das integrais das funções trigonométricas em geral, ou seja, para os conceitos do cálculo.

Proposição 13.5 Fórmulas de linearização *Para todo $a \in \mathbb{R}$, temos*:

1. $1 + \cos(a) = 2\cos2(\frac{\alpha}{2})$ *o que equivale a* $\cos2(\frac{\alpha}{2}) = \dfrac{1+\cos(a)}{2}$.

2. $1 - \cos(a) = 2\,\text{sen}2(\frac{\alpha}{2})$ *o que equivale a sen*$2(\frac{\alpha}{2}) = \dfrac{1-\cos(a)}{2}$

Exemplo, calcular o seno, cosseno e a tangente de $\frac{\pi}{8}$.

Como $\frac{\pi}{4} = 2\frac{\pi}{8}$ e $\cos(\frac{\pi}{4}) = \text{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos:

$$\cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \text{ e } \text{sen}^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1-\cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Como $\frac{\pi}{8} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ temos que $\cos(\frac{\pi}{8}) > 0$ e $\text{sen}(\frac{\pi}{8}) > 0$, assim deduzimos que:

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ e } \text{sen}(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

E a tangente de $\frac{\pi}{8}$ é dada por:

$$\tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1.$$

13.2 Equações trigonométricas

Nesta seção estamos interessados em resolver equações que envolvem relações trigonométricas.

13.2.1 Equação $\cos(x) = \cos(a)$

Proposição 13.6 *Seja a um número real. A equação*

$$\cos(x) = \cos(a),$$

tem por soluções os números reais:

$x = a + 2k\pi$ *e* $x = -a + 2k\pi$*, onde k é um número inteiro*

Prova. Por simetria, provamos que existem dois pontos M e M' do círculo cujas abscissas são iguais a $\cos(a)$. Usando o enrolamento da reta orientada (T) tangente ao círculo trigonométrico, temos que:

1. Os pontos $P(a + 2k\pi)$ de (T) são associados ao mesmo ponto M do círculo trigonométrico;

2. Os pontos $Q(-a + 2k\pi)$ de (T) são associados ao mesmo ponto M' do círculo trigonométrico.

Então as soluções da equação $\cos(x) = \cos(a)$ são $x = a+2k\pi$ e $x = -a+2k\pi$, onde k é um número inteiro. **C.Q.D.**

Vejamos de outro modo, como os números reais x_1 = a ou x_2 = −a verificam a equação $\cos(x) = \cos(a) = \cos(-a)$, então usando as propriedades dos ângulos associados ($\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$), podemos notar também que os reais $x = a+2k\pi$ e $x = -a+2k\pi$ (onde k é um número inteiro), também verificam essa equação.

Por exemplo, resolva em $\mathbb{R}$ a seguinte equação: $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{6})$.

Solução. Segundo a Proposição 13.6, as soluções da equação $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{6})$ são $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, onde k é um número inteiro.

13.2.2 Equação sen(x) = sen(a)

Proposição 13.7 *Seja a um número real. A equação*

$$sen(x) = sen(a),$$

tem por soluções os números reais:

$$x = a + 2k\pi \text{ e } x = \pi - a + 2k\pi, \textit{ onde } k \textit{ é um número inteiro.}$$

Prova. Por simetria, provamos que existem dois pontos M e M' do círculo trigonométrico cujas ordenadas são iguais a sen(a). Usando o enrolamento da reta orientada (T) tangente ao círculo trigonométrico, temos que:

1. Os pontos $P(a + 2k\pi)$ de (T) são associados ao mesmo ponto M do círculo trigonométrico,

1. Os pontos $Q(\pi - a + 2k\pi)$ de (T) são associados ao mesmo ponto M' do círculo trigonométrico.

Então as soluções da equação sen(x) = sen(a) são $x = a + 2k\pi$ e $x = \pi - a + 2k\pi$, onde k é um número inteiro. **C.Q.D.**

De outra maneira, como os números reais $x_1 = a$ ou $x_2 = \pi - a$ verificam a equação sen(x) = sen(a) = sen$(\pi - a)$, então usando as propriedades dos ângulos associados (sen(x) = sen$(x + 2k\pi)$ = sen$(\pi - x + 2k\pi)$), podemos notar também que os reais $x = a + 2k\pi$ e $x = \pi - a + 2k\pi$ (onde k é um número inteiro), também verificam essa equação. Isto é, temos que $x = a + 2k\pi$ e $x = \pi - a + 2k\pi$, onde k é um número inteiro, são soluções da equação sen(x) = sen(a).

Por exemplo, resolva em $\mathbb{R}$ a seguinte equação: $\text{sen}(x) = -0,5$.

Solução. Como $\text{sen}(-\frac{\pi}{4}) = -0.5$, então a equação $\text{sen}(x) = -0,5$ é equivalente a equação $\text{sen}(x) = \text{sen}(-\frac{\pi}{4})$. Assim, segundo Proposição 13.7, as soluções da equação $\text{sen}(x) = \text{sen}(-\frac{\pi}{4})$ são $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ e $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, onde k é um número inteiro.

13.3 Exercícios

Exercício 13.1 *Usando as fórmulas das propriedades trigonométricas de adição, expressar em termos de cos(x) e sen(x) as seguintes expressões:*

1. $A(x) = \cos(\frac{5\pi}{2} - x)$;
2. $B(x) = sen(x + 100\pi)$;
3. $C(x) = \cos(\frac{2012\pi}{2} + x)$;
4. $D(x) = \cos(x - 78\pi)$;
5. $E(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) + 4\, sen(x - \frac{\pi}{2}) - 5\, sen(\pi + x)$.

Solução.

1. Vamos usar a relação de adição $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$ e as relações $\cos(-x) = \cos(x)$ e $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$, assim como os valores notáveis $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$, com a decomposição $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$. Assim, obtemos:

$$A(x) = \cos(\frac{5\pi}{2} - x) = \cos(\frac{5\pi}{2})\cos(-x) - \text{sen}(\frac{5\pi}{2})\,\text{sen}(-x).$$

Logo, temos $A(x) = \cos(\frac{5\pi}{2} - x) = \cos(\frac{5\pi}{2})\cos(-x) + \text{sen}(\frac{5\pi}{2})\,\text{sen}(x) = \text{sen}(x)$.

2. Usando a relação $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\,\text{sen}(b)$ e os valores notáveis $\cos(2n\pi) = 1$ e $\text{sen}(2n\pi) = 0$, temos:

$$B(x) = \text{sen}(x + 100\pi) = \text{sen}(x)\cos(100\pi) + \cos(x)\,\text{sen}(100\pi).$$

Logo, temos $B(x) = \text{sen}(x + 100\pi) = \text{sen}(x)\cos(50 \times 2\pi) + \cos(x)\,\text{sen}(50 \times 2\pi) = \text{sen}(x)$.

3. A relação que vamos usar e a de adição $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$ e os valores notáveis $\cos(2n\pi) = 1$ e $\text{sen}(2n\pi) = 0$, para todo número inteiro n. Assim, temos:

$$C(x) = \cos\left(\frac{2012\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{2012\pi}{2}\right)\cos(x) - \text{sen}\left(\frac{2012\pi}{2}\right)\text{sen}(x).$$

Logo, temos $C(x) = \cos\left(\frac{2012\pi}{2} + x\right) = \cos(1006\pi)\cos(x) - \text{sen}(1006\pi)\,\text{sen}(x) = \cos(x)$.

4. Vamos usar a relação de adição $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$ e os valores notáveis $\cos(2n\pi) = 1$ e $\text{sen}(2n\pi) = 0$, para todo número inteiro n. Assim, temos:

$$D(x) = \cos(x - 78\pi) = \cos(x + (-78\pi)) = \cos(x)\cos(-78\pi) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(-78\pi).$$

Logo, obtemos que $D(x) = \cos(x)$.

5. Vamos usar as relações de adição $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$ e $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\,\text{sen}(b)$, e também os valores notáveis $\cos(\pi\ 2\ ) = 0$, $\text{sen}(\pi\ 2\ ) = 1$ $\cos(\pi) = -1$ e $\text{sen}(\pi) = 0$. Assim, temos:

$$E(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\,\text{sen}(\pi + x) = 6\,\text{sen}(x) - 4\cos(x).$$

Exercício 13.2 *Seja* $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ *tal que* $\cos(x) = \frac{1}{2}$, *calcule*:

$$sen(2x) \text{ e } \cos(2x).$$

Solução. Vamos usar as seguintes relações de arco duplo:

Seno: $\text{sen}(2x) = \text{sen}(x + x) = \text{sen}x.\cos x + \text{sen}x.\cos x = 2\text{sen}x\cos x.$

Cosseno: $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x.\cos x - \text{sen}x\,\text{sen}x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x.$

Vamos considerar a Relação Trigonométrica Fundamental $sen^2x + cos^2 x = 1$.

Assim, temos: $sen^2x = 1 - cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, logo, $senx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, então, $senx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, deduzimos:

$$sen(2x) = 2sen(x)\cos(x) = 2 \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \times \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $\cos(2x) = cos^2 x - sen^2x$, temos:

$$\cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Exercício 13.3 *Sendo* $sen^2x + cos^2 x = 1$ *calcule*: *sen*$(2x)$.

Solução. Como $(senx + \cos x)^2 = sen^2x + 2\, sen\, x.\cos(x) + cos^2 x$ e $sen^2x + cos^2 x = 1$, temos:

$$(senx + \cos x)^2 = sen^2x + 2\, sen\, x.\cos(x) + cos^2 x = 1 + 2\, sen\, x.\cos(x) = 1.$$

Logo, obtemos:

$$2\, sen\, x.\cos(x) = sen(2x) = 1 - 1 = 0,$$

ou seja, $sen(2x) = 0$.

Exercício 13.4 *Sabendo que* $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ *e usando as fórmulas das propriedades trigonométricas de adição, calcule*:

1. $\cos(\frac{\pi}{12})$;
2. *sen*$(\frac{\pi}{12})$;
3. *Deduzir* $\tan(\frac{\pi}{12})$.

Solução. Vamos usar as relações de adição do $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)\, sen(b)$ e do $sen(a + b) = sen(a)\cos(b) + \cos(a)\, sen(b)$ e também os valores notáveis $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $sen(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = sen(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Usando as relações anteriores, obtemos:

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}+1}{4}.$$

2. De maneira semelhante, temos:

$$\text{sen}(\frac{\pi}{12}) = \text{sen}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

3. A tangente é dada por:

$$\tan(\frac{\pi}{12}) = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{12})}{\cos(\frac{\pi}{12})} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$$

Podemos também usar as relações $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ e $\text{sen}^2(2a) = 1 - \cos^2(a)$, e também os valores notáveis $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

Exercício 13.5 *Sabemos que* $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, e *usando as fórmulas das propriedades trigonométricas calcular:*

1. $\cos(\frac{\pi}{8})$;
2. *sen*$(\frac{\pi}{8})$;
3. *Deduzir* $\tan(\frac{\pi}{8})$.

Solução. Vamos usar as relações $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ e $\text{sen}^2(a) = 1 - \cos^2(a)$, e também os valores notáveis $\cos(\frac{\pi}{4}) = \text{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Usando as relações anteriores, obtemos:

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \cos(2.\frac{\pi}{8}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{8}) - 1.$$

Logo, temos: $\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{(\cos(\frac{\pi}{4})+1)/2} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$.

2. Como $\text{sen}^2(\frac{\pi}{8}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{8})$, então temos:

$$\text{sen}^2(\frac{\pi}{8}) = 1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Logo, obtemos $\text{sen}(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

3. A tangente é dada por:

$$\tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{8})}{\cos(\frac{\pi}{8})} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}+2}} = \frac{(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2}{(2+\sqrt{\sqrt{2}})(\sqrt{2-\sqrt{2}})} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Logo, obtemos: $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$.

Exercício 13.6 *Usando as fórmulas das propriedades trigonométricas de adição, encontre as fórmulas dos ângulos associados:*

1. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ e $sen(x + 2\pi) = sen(x)$;
2. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $sen(\pi - x) = -sen(x)$;
3. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ e $sen(\pi + x) = -sen(x)$;
4. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = sen(x)$ e $sen(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$;
5. $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sen(x)$ e $sen(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$.

Solução. Vamos utilizar as relações de adição $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$ e $\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b)+\cos(a)\,\text{sen}(b)$, bem como os valores notáveis $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(2n\pi) = 1$, $\text{sen}(\pi) = 0$ e $\cos(\pi) = -1$.

Assim, obtemos:

1. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \text{sen(x)}\,\text{sen}(2\pi) = \cos(x)$ e
$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\,\text{sen}(2\pi) = \text{sen}(x)$.

2. $\cos(\pi - x) = \cos(\pi)\cos(-x) - \text{sen}(\pi)\,\text{sen}(-x) = -\cos(x)$ e
$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}(\pi)\cos(-x) + \cos(\pi)\,\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$.

3. $\cos(\pi + x) = \cos(\pi)\cos(x) - \text{sen}(\pi)\,\text{sen}(x) = -\cos(x)$ e
$\text{sen}(x + \pi) = \text{sen}(x)\cos(\pi) + \cos(x)\,\text{sen}(\pi) = -\text{sen}(x)$.

4. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(-x) - \text{sen}(\frac{\pi}{2})\,\text{sen}(-x) = \text{sen}(x)$ e
$\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen}(\frac{\pi}{2})\cos(-x) + \cos(\frac{\pi}{2})\,\text{sen}(-x) = \cos(x)$.

5. $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(x) - \text{sen}(\frac{\pi}{2})\,\text{sen}(x) = -\text{sen}(x)$ e
$\text{sen}(\frac{\pi}{2} + x) = \text{sen}(\frac{\pi}{2})\cos(x) + \cos(\frac{\pi}{2})\,\text{sen}(x) = \cos(x)$.

Exercício 13.7 *Calcular as linhas trigonométricas dos ângulos*: $-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$.

Solução. Vamos usar as relações de adição $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$, $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\,\text{sen}(b)$, $\cos(-x) = \cos(x)$ e $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$. Também, os valores notáveis $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\text{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \text{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos(\pi) = -1$, $\text{sen}(\pi) = 0$.

Assim, obtemos:

1. $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}(-\frac{\pi}{3}) = -\text{sen}(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}$.
2. $\cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\text{sen}(\frac{5\pi}{6}) = \text{sen}(\pi - \frac{\pi}{6}) = \text{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ e $\tan(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Como $\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, temos:
$\cos(\frac{7\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{7\pi}{4}) = \text{sen}(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, e $\tan(\frac{7\pi}{4}) = -1$.

Exercício 13.8 *Determine sen*$(a + b)$ *sabendo que sen*$(a) = \frac{4}{5}$, *sen*$(\text{b}) = \frac{3}{5}$ *e* que $a, b \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$.

Solução. Conhecidos os valores dos senos $\text{sen}(a) = \frac{4}{5}$, $\text{sen}(b) = \frac{3}{5}$, e a fórmula do seno da soma $\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a).\cos(b)+\text{sen}(b).\cos(a)$, precisamos primeiramente conhecer os valores de $\cos(a)$ e $\cos(b)$. Como $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, temos:

$$\text{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1 \Rightarrow \cos^2(a) = 1 - \text{sen}^2(a) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25},$$

$$\text{sen}^2(b) + \cos^2(b) = 1 \Rightarrow \cos^2(b) = 1 - \text{sen}^2(b) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Assim, temos $\cos(a) = \pm\frac{3}{5}$ e $\cos(b) = \pm\frac{4}{5}$. Como $a, b \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ deduzimos: $\cos(a) = -\frac{3}{5}$ e $\cos(b) = -\frac{4}{5}$.

Agora, conhecidos os valores do seno e do cosseno e utilizando a fórmula do seno da soma, obtemos:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a).\cos(b) + \cos(a).\text{sen}(b) = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{5} = -1.$$

Exercício 13.9 *Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações:*

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$;
2. $sen(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4. $sen(x) = -\frac{1}{2}$.

Use a tabela dos valores notáveis.

Solução.

1. Usando a tabela dos valores notáveis temos $\cos(\frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Como $\cos(a + 2n\pi) = \cos(a)$, para todo número inteiro n então, a soluções da equação $\cos(x) = \frac{1}{2}$ são $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi$.

2. Usando a tabela dos valores notáveis temos $\text{sen}(\frac{\pi}{4}) = \text{sen}(\pi - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $\text{sen}(a + 2n\pi) = \text{sen}(a)$, para todo número inteiro n então, a soluções da equação $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ são $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2n\pi = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$.

3. Usando a tabela dos valores notáveis temos $\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e $\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $\cos(a+2n\pi) = \cos(a)$, para todo número inteiro n então, a soluções da equação $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ são $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2n\pi = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$.

4. Usando a tabela dos valores notáveis temos $\text{sen}(\pi + \frac{\pi}{6}) = \text{sen}(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ e $\text{sen}(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$. Como $\text{sen}(a+2n\pi) = \text{sen}(a)$, para todo número inteiro n então, a soluções da equação $\text{sen}(x) = -\frac{1}{2}$ são $x = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$.

Exercício 13.10 *Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações:*

1. $\cos(2x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$;
2. $\cos(5x + \pi\ 3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3. $sen(3x) = sen(2x - \frac{\pi}{4})$;
4. $sen(-x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$.

Solução. Vamos usar os seguintes resultados:

$\cos(b) = \cos(a)$ se, e somente se, $b = a + 2n\pi$ ou $b = -a + 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

$\text{sen}(b) = \text{sen}(a)$ se, e somente se, $b = a + 2n\pi$ ou $b = \pi - a + 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

1. Temos $\cos(2x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ se, e somente se, $2x = x - \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ ou $2x = -x + \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Logo, temos $x = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ ou $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

2. Temos $\cos(5x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4})$ se, e somente se, $5x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ou $5x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Logo, temos $x = -\frac{\pi}{60} + \frac{2n\pi}{5}$ ou $x = -\frac{7\pi}{60} + \frac{2n\pi}{5}$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

3. Temos $\text{sen}(3x) = \text{sen}(2x - \frac{\pi}{4})$ se, e somente se, $3x = 2x - \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ou $3x$

$= \pi - (2x - \frac{\pi}{4}) + 2n\pi$, onde $n \in Z$. Logo, temos: $x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ou $5x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, ou seja, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{5}$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Então, a solução da equação $\text{sen}(3x) = \text{sen}(2x - \frac{\pi}{4})$ é dada por: $x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ou $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{5}$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

4. Temos $\text{sen}(-x+\frac{\pi}{4}) = -1\ 2 = \text{sen}(-\frac{\pi}{6})$. Logo, temos: $-x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ou $-x+\frac{\pi}{4} = \pi-(-\frac{\pi}{6})+2n\pi$. Assim, obtemos: $x = \frac{5\pi}{12}+2n\pi$ ou $x = \frac{-11\pi}{12}+2n\pi$, onde $n \in Z$.

Exercício 13.11 *Resolva em* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *as seguintes equações*:

1. $\cos(4x + \pi) = \cos(x + \frac{3\pi}{4})$,

2. $sen(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$.

Solução. Aqui também vamos usar os seguintes resultados:

$\cos(b) = \cos(a)$ se, e somente se, $b = a + 2n\pi$ ou $b = -a + 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

$\text{sen}(b) = \text{sen}(a)$ se, e somente se, $b = a + 2n\pi$ ou $b = \pi - a + 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

1. Como cos(4x + π) = cos(x + 3π 4) temos:

$$4x + \pi = x + \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \text{ ou } 4x + \pi = -x - \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \text{ com } n \in \mathbb{Z}.$$

Logo, temos:

$$3x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \text{ ou } 5x = -\frac{7\pi}{4} + 2n\pi, \text{ com } n \in \mathbb{Z},$$

isto é,

$$x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3} \text{ ou } x_2 = -\frac{7\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}, \text{ com } n \in \mathbb{Z}.$$

Como as duas soluções x_1 e x_2 pertencem ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, temos:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq x_2 = -\frac{7\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Logo, temos $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ somente para $n = 0$, e $-\frac{\pi}{2} \leq x_2 = -\frac{7\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ somente para $n = 0$ ou $n = 1$ ou $n = 2$. Logo, as soluções da equação trigonométrica $\cos(4x+\pi) = \cos(x+\frac{3\pi}{4})$ que pertencem ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ são:

$$x_1 = -\frac{\pi}{12}, \; x_2 = -\frac{7}{20}\pi, \; x_3 = \frac{\pi}{20}, \; x_4 = \frac{9}{20}\pi.$$

2. Como $\text{sen}(2x + \frac{\pi}{3}) = 0 = \text{sen}(0)$, temos:

$$2x + \frac{\pi}{3} = 2n\pi \text{ com } n \in \mathbb{Z}.$$

Assim, temos: $x = -\frac{\pi}{6} + n\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$. Logo, temos $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 = -\frac{\pi}{6} + n\pi \leq \frac{\pi}{2}$ somente para $n = 0$. Então, a equação trigonométrica $\text{sen}(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$ tem uma única solução que pertence ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, isto é, $x = -\frac{\pi}{6}$.

Exercício 13.12 *Resolva em* $\mathbb{R}$ *e depois em* $[-\pi, \pi]$ *as seguintes equações*:

1. $\cos(\frac{x}{2}) = 0$,
2. $\cos(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$,
3. $sen(2x - \frac{\pi}{3}) = -sen(x)$.

Solução. Aqui também, vamos usar os seguintes resultados:

$\cos(b) = \cos(a)$ se, e somente se, $b = a + 2n\pi$ ou $b = -a + 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

$\text{sen}(b) = \text{sen}(a)$ se, e somente se, $b = a + 2n\pi$ ou $b = \pi - a + 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

1. Temos $\cos(\frac{x}{2}) = 0 = \cos(\frac{\pi}{2})$, logo:

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, ou seja, $x = \pi + 4n\pi$, ou $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, ou seja, $x = -\pi + 4n\pi$. Como as soluções da equação trigonométrica $\cos(\frac{x}{2}) = 0$ pertencem ao intervalo $[-\pi, \pi]$, deduzimos que $x = \pi$ ou $x = -\pi$.

2. Para a equação $\cos(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ temos:

$$x = 2x - \frac{\pi}{3} + 2\text{n}\pi \text{ ou } x = -2x + \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \text{ onde } n \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}, \text{ onde } n \in \mathbb{Z},$$

Como as soluções pertencem ao intervalo $[-\pi, \pi]$, deduzimos que as soluções da equação trigonométrica $\cos(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ são: $\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{9}$ e $-\frac{5\pi}{9}$.

3. Como $\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) = -\text{sen}(x) = \text{sen}(-x)$, logo, temos:

$$2x - \frac{\pi}{3} = -x + 2n\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{3} = x + 2n\pi, \text{ onde } n \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, \text{ onde } n \in \text{Z}.$$

Como as soluções pertencem ao intervalo $[-\pi, \pi]$, deduzimos que as soluções da equação trigonométrica $\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) = -\text{sen}(x)$ são: $\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{9}$ e $\frac{7\pi}{9}$.

Exercício 13.13 *Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações:*

1. $\cos(x) = sen(x)$;

2. $\cos(x) = -sen(\frac{x}{2})$;

3. $sen(2x) = \cos(-x + \frac{\pi}{3})$.

Solução. Aqui vamos usar os seguintes resultados:

$$\text{sen}(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a) \text{ e } \text{sen}(\frac{\pi}{2} + a) = \cos(a), \text{ onde } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \text{sen}(a) \text{ e } \cos(\frac{\pi}{2} + a) = -\text{sen}(a), \text{ onde } n \in \mathbb{Z}.$$

Bem como, os resultados:

$\cos(b) = \cos(a)$ se, e somente se, $b = a + 2n\pi$ ou $b = -a + 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

$\text{sen}(b) = \text{sen}(a)$ se, e somente se, $b = a + 2n\pi$ ou $b = \pi - a + 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

1. A equação $\cos(x) = \text{sen}(x)$ equivale a $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, assim deduzimos que: $x = \frac{\pi}{2} - x + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, ou seja, $2x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Logo, as soluções da equação trigonométrica $\cos(x) = \text{sen}(x)$ são: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

2. A equação $\cos(x) = -\text{sen}(\frac{x}{2})$ equivale a $\cos(x) = \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2})$, assim deduzimos que: $x = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, ou seja, $x - \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ ou $x + \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in Z)$. Logo, as soluções da equação trigonométrica $\cos(x) = \text{sen}(x)$ são:

$$x = \pi + 4n\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4n\pi}{3}, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}.$$

3. A equação $\text{sen}(2x) = \cos(-x + \frac{\pi}{3})$ equivale a $\text{sen}(2x) = \text{sen}(-x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})$, assim deduzimos que: $2x = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ou $2x = \pi + x - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Logo, as soluções da equação trigonométrica $\cos(x) = \text{sen}(x)$ são: $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Exercício 13.14 *Resolva em* $\mathbb{R}$ *as seguintes equações:*

1. $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$;

2. $sen^2(x) = \frac{3}{4}$;

3. $sen^2(x) = \cos^2(x)$.

Solução.

1. A equação $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$ equivale a $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4})$ ou $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4} + \pi)$. Assim,deduzimos que as soluções da equação trigonométrica $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$ são: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

2. A equação $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{3}{4}$ equivale a $\operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})$ ou $\operatorname{sen}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})$. Logo, deduzimos que as soluções da equação trigonométrica $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{3}{4}$ são: $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

3. A equação $\operatorname{sen}^2(x) = \cos^2(x)$ equivale a $\cos(x) = \operatorname{sen}(x)$ ou $\cos(x) = -\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(-x)$. Logo, com o mesmo método do Exercício 13.13 obtemos as soluções das equações $\cos(x) = \operatorname{sen}(x)$ ou $\cos(x) = -\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(-x)$.

CAPÍTULO 14

Funções Trigonométricas Básicas

Objetivos

Neste capítulo vamos apresentar as propriedades das funções trigonométricas básicas: seno, cosseno e tangente.

14.1 Preliminares

As funções trigonométricas constituem um tópico fundamental da matem ática nas ciências exatas e aplicadas, tanto por suas aplicações, como pelo papel fundamental que desempenham na análise real. Inicialmente, a trigonometria trabalhava com problemas envolvendo a resolução de triângulos, que consistia em determinar os seis elementos dessa figura, isto é, os seus três lados e três ângulos, conhecendo três desses elementos, sendo pelo menos um deles um lado. Mas, com o Cálculo Differencial e Integral, surge então a necessidade de considerar os conceito de seno, cosseno e tangente, como funções reais de uma variável real.

A propriedade fundamental das funções trigonométricas que é a periodicidade, é bem adequada para estudar vários fenômenos naturais do tipo periódico, oscilatória ou vibratória, tais que: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

Quando se opera com números $\text{sen}(x)$, $\cos(x)$ e $\tan(x)$ no triângulo retângulo, x representa a medida de um ângulo agudo. Vamos estender as noções de seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante de x para o caso em que x representa a medida de um ângulo qualquer. Nesta situação usaremos como medida o radiano.

14.2 Duas definições importantes

Visto que as funções trigonométricas seno e cosseno são periódicas, vamos recuperar os conceitos de periodicidade e paridade. Vejamos a seguir a definição geral de uma função periódica.

Definição 14.1 O que é uma função periódica? *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é periódica quando existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

O menor número $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(t)$ para todo real x chama-se período da função f.

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é periódica, então $f(x + kT) = f(x)$ para todo real T e todo inteiro k.

As propriedade $\cos(-x) = \cos(x)$ e $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$, levaram a considerar a seguinte definição:

Definição 14.2 Função par e Função ímpar *Seja uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

1. *Dizemos que f é par quando $f(-x) = f(x)$, para todo real x.*

2. *Se $f(-x) = -f(x)$, para todo real x a função é chamada ímpar.*

14.3 Propriedades de Função seno

Função seno. A função seno é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \text{sen}(x).$$

Segundo as propriedades trigonométricas do seno, podemos deduzir várias propriedades da função seno. As primeiras propriedades elementares da função seno são apresentados a seguir.

Como para qualquer x podemos calcular seu seno, o domínio é caracterizado da seguinte forma:

Domínio. O domínio da função seno é igual a $\mathbb{R}$, ou seja, a função seno está definida para todos os valores reais:

$$Dom(\text{ sen}) = \mathbb{R}.$$

De acordo com o círculo trigonométrico para todos os números reais x, temos $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$; portanto, o conjunto imagem da função seno é caracterizado da seguinte forma:

Conjunto imagem. O conjunto imagem da função seno corresponde ao intervalo real $[-1, 1]$, porque $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Periodicidade. A função seno é periódica e seu período é 2π, isto é, $f(x + 2\pi) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

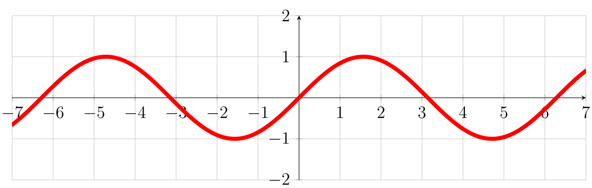
Sinal. A partir do círculo trigonométrico podemos deduzir que o sinal da função seno é positivo quando x pertence ao intervalo $[0, \pi]$. No intervalo $[\pi; 2\pi]$, o sinal é negativo.

O quadro dos sinais da função $f(x) = \text{sen}(x)$ é dado por:

x	0		π		2π
sinal de $f(x) = \text{sen}(x)$		$+$	0	$-$	

Imparidade. Em relação a simetria, a função seno é uma função ímpar: $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$.

Definição 14.3 *A curva da função seno $f(x) = \text{sen}(x)$ é chamada de senóide.*



Curva da função $f(x) = \text{sen}(x)$

Segundo o gráfico o quadro de variações de $f(x) = \text{sen}(x)$ sobre o intervalo $[0, \pi]$ é da seguinte forma:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
			1		
$f(x) = \text{sen}(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

14.4 Propriedades da Função cosseno

Função cosseno. A função cosseno é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \cos(x).$$

Segundo as propriedades trigonométricas de cosseno, podemos deduzir várias propriedades da função cosseno. As primeiras propriedades elementares da função cosseno são apresentados a seguir.

Como para qualquer x podemos calcular seu cosseno, o domínio é caracterizado da seguinte forma:

Domínio. O domínio da função cosseno é igual a $\mathbb{R}$, ou seja, a função cosseno está definida para todos os valores reais:

$$Dom(\cos) = \mathbb{R}.$$

De acordo com o círculo trigonométrico para todos os números reais x, temos $-1 \leq \cos(x) \leq 1$; portanto, o conjunto imagem da função cosseno é caracterizado da seguinte forma:

Conjunto imagem. O conjunto imagem da função cosseno corresponde ao intervalo real $[-1, 1]$, porque $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

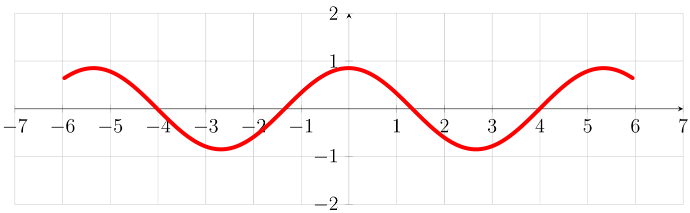
Periodicidade.A função cosseno é periódica e seu período é 2π, isto é, $f(x + 2\pi) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sinal. A partir do círculo trigonométrico podemos deduzir que o sinal da função cosseno é positivo quando x pertence ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. No intervalo $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, o sinal é negativo. O quadro dos sinais da função $f(x) = \cos(x)$ é dado por:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sinal de $f(x) = \cos(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Paridade. Em relação à simetria, a função cosseno é uma função ímpar: $\cos(-x) = \cos(x)$.

Definição 14.4 . *O gráfico da função* $f(x) = \cos(x)$ *é uma curva chamada de cossenóide.*



Curva da função $f(x) = \cos(x)$

Segundo o gráfico o quadro de variações de $f(x) = \cos(x)$ é da seguinte forma:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

14.5 Propriedades da Função tangente

Definição 14.5 *A função tangente é a função definida por:*

$$f(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}.$$

Segundo as propriedades trigonométricas de seno e cosseno, podemos deduzir várias propriedades da função tangente. As primeiras propriedades elementares da função tangente são as seguintes:

Domínio. A função $\tan(x)$ é, portanto, um quociente. E como tal, $\tan(x)$ existe somente quando o denominador é diferente de zero. Em resumo: $\tan(x)$ existe quando e somente quando $\cos(x) \neq 0$. Mas quando temos $\cos(x) = 0$? De acordo com o círculo trigonométrico, para a função cosseno, temos $\cos(x) = 0$ se e somente se $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Em ambos os casos, k é um inteiro relativo, assim $\tan(x)$ existe quando e somente quando $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Em conclusão, o domínio da função tangente é dado por:

Domínio. O domínio da função tangente é:

$$Dom(\tan) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } x \neq \pi\ 2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$Dom(\tan) = ...] -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[\cup] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\cup...$$

Conjunto imagem. O conjunto imagem da função tangente corresponde ao conjunto $\mathbb{R}$. A periodicidade das funções seno e cosseno permite deduzir que a tangente também é periódica.

Periodicidade. A função tangente é periódica e seu período é π, isto é, para cada x real cuja tangente existe, temos que:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-\cos(x+\pi)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

Assim, temos que:

Periodicidade da função tangente. Para todo $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ onde $k \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\tan(x + \pi) = \tan(x).$$

Isto é, a função tangente é periódica de período π.

Seu estudo pode, portanto, ser restrito a um intervalo de comprimento π.

Nós vamos utilizar o intervalo $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$.

A partir do círculo trigonométrico e dos sinais do seno e do cosseno no intervalo $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, podemos deduzir o sinal da função tangente.

Sinal. A função tangente é positiva quando x pertence ao intervalo $[0,\frac{\pi}{2}[$, e no intervalo $[-\frac{\pi}{2}\,;0]$, o sinal é negativo.

O quadro dos sinais da função $f(x) = \tan(x)$ é dado por:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
sinal de $f(x)=\tan(x)$		$-$	0	$+$	

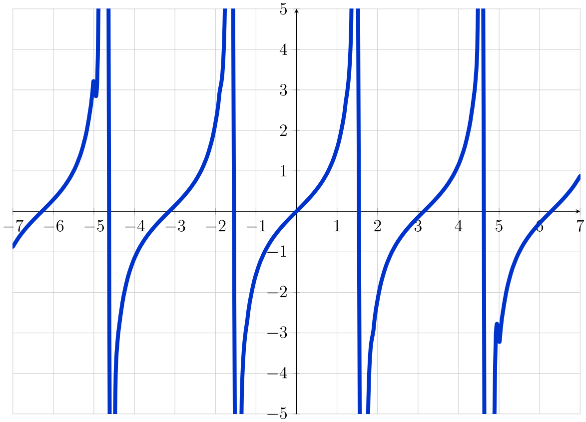
Ímparidade. Em relação a ímparidade do seno, $\mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}(x)$, e a paridade do cosseno $\cos(-x) = \cos(x)$, deduzimos:

$$\tan(-x) = \frac{\mathrm{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\mathrm{sen}(x)}{\cos(x+\pi)} = -\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

para todo $x \in]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$.

Ímparidade. A função tangente é ímpar em $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$.

O gráfico da função cosseno $f(x) = \tan(x)$ é uma curva dada por:



Curva da função $f(x) = \tan(x)$

Segundo o gráfico o quadro de variações de $f(x) = \tan(x)$ no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é da seguinte forma:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$
			$+\infty$
$f(x) = \tan(x)$		$\nearrow$	
	$-\infty$		

Assim, a função tangente é crescente em $[0; \frac{\pi}{2}[$, e também em $]-\frac{\pi}{2}; 0]$.

Em suma, a função tangente está sempre crescendo em cada intervalo $]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Observação 14.1 *Os zeros da função tangente são os zeros da função seno, isto é,* $\tan(x) = 0$ *quando* $x = k\pi$*, para todo* k *em* $\mathbb{Z}$*.*

Observação 14.2 *A imagem da função tangente é o conjunto dos números reais. E a função tangente não está definida para os valores* $x = k\pi + \pi/2$*, para todo* k *em* $\mathbb{Z}$*, ou seja, estes pontos não têm imagem pela função tangente. Observe* *o que acontece na vizinhança destes pontos, lembrando das considerações que fizemos para os valores notáveis da tangente. Nos intervalos abertos:*

$$...;]-3\pi/2, -\pi/2[;]-\pi/2, \pi/2[;]\pi/2, 3\pi/2[, ...$$

a função tangente é injetora. Assim, a função tangente é inversível em cada um destes intervalos.

14.6 Algumas considerações úteis.

As funções seno, cosseno e tangente têm características especiais. Vamos utilizar todas as informações que já temos sobre o comportamento destas funções, elas serão muito importantes para as disciplinas de Cálculo. Para entender melhor os exercícios resolvidos desta lista, faremos as seguintes considerações importantes:

Gráficos das funções seno e cosseno. Já vimos que o domínio das funções seno e cosseno é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o conjunto das imagens é o intervalo $[-1, 1]$ e os gráficos destas funções estão contidos na faixa horizontal $[-1, 1] \times \mathbb{R}$. Para a função tangente, o domínio é $\{x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, e o conjunto das imagens é $\mathbb{R}$. Estude os gráficos com atenção, pois eles lhe darão informações importantes sobre o comportamento das funções seno, cosseno e tangente.

Zeros das funções seno, cosseno e tangente. Os zeros do seno e do cosseno são importantes para estudar a função tangente, bem como as funções, cotangente, secante e cossecante. Os zeros das funções seno e cosseno são os valores de x para os quais se tem $sen(x) = 0$ e $cos(x) = 0$, respectivamente.

Ao analisarmos os gráficos de seno e cosseno, vemos que:

- Os zeros de $\text{sen}(x)$ são: ... , -3π, -2π, $-\pi$, 0, π, 2π, 3π, ..., ou seja, os valores de x dados por $x = 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- Os zeros de $\cos(x)$ são: ... , $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$,..., ou seja, os valores de x dados por $x = \frac{(2k+1)\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- Os zeros de $\tan(x)$ são: ... , $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$, ..., ou seja, os valores de x dados por $x = 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Funções compostas envolvendo as funções seno, cosseno e tangente. Sejam as funções trigonométricas usuais $u(x) = \text{sen}(x)$, $v(x) = \cos(x)$ e $w(x) = \tan(x)$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real, e com as funções compostas podemos conseguir novas funções, tais como:

$$u \circ f(\text{x}) = u(f(x)) = \text{sen}(f(x)); f \circ u(x) = f(u(x)) = f(\text{ sen}(x));$$

$$v \circ f(\text{x}) = v(f(x)) = \cos(f(x)); f \circ v(x) = f(v(x)) = f(\cos(x));$$

$$w \circ f(\text{x}) = w(f(x)) = \tan(f(x)); f \circ w(x) = f(w(x)) = f(\tan(x)).$$

Deste modo, para alguns casos especiais da função f podemos conseguir novas funções trigonométricas. De maneira geral, lembre-se que usando a composição de funções elementares, podemos construir novas funções. Assim, a composição das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente com outras funções, também possibilita construir novas funções numéricas interessantes.

14.7 Exercícios

Exercício 14.1 *Seja a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:* $f(x) = x + \pi$.

1. Determine a função $u \circ f(x)$, *onde* $u(x) = sen(x)$.

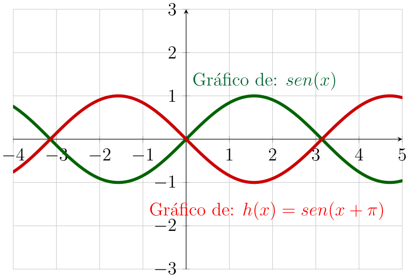
2. Estude o gráfico da função $h(x) = u \circ f(x)$, *onde* $u(x) = sen(x)$, *comparando-o com o gráfico de* $u(x) = sen(x)$.

Solução.

1. Para todo $x \in R$, temos:

$$h(x) = u \circ f(x) = \text{sen}(f(x)) = \text{sen}(x + \pi).$$

2. Os gráficos das funções $u(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = u \circ f(x)$, são dados por:



Analisando os gráficos das funções $u(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = u \circ f(x)$, podemos deduzir:

a. Formato dos gráficos. Os gráficos das funções $u(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = u \circ f(x)$ possuem o mesmo "formato". A diferença é $u(x) = \text{sen}(x)$. Note que os gráficos das duas funções cortam o eixo dos x nos mesmos pontos;

b. Domínio e o Conjunto Imagem. O domínio e o conjunto imagem da função $h(x) = u \circ f(x)$ são os mesmos da função $u(x) = \text{sen}(x)$;

c. Período. As funções $u(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = u \circ f(x)$ são periódicas e têm o mesmo período $T = 2\pi$.

Exercício 14.2 *Seja a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:* $f(x) = x + 1$.

1. Determine a função $g(x) = f \circ u(x)$*, onde* $u(x) = sen(x)$.

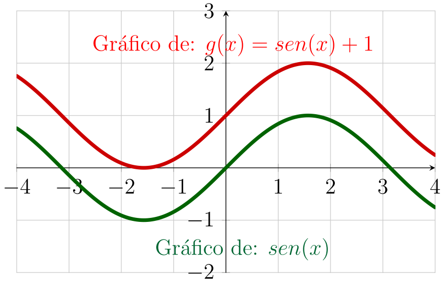
2. Estude o gráfico da função $g(x) = f \circ u(x)$*, comparando-o com o gráfico de* $u(x) = sen(x)$.

Solução.

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$g(x) = f \circ u(x) = f(\operatorname{sen}(x)) = \operatorname{sen}(x) + 1.$$

2. Os gráficos das funções $u(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = f \circ u(x)$, são dados por:



Analisando os gráficos das funções $u(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = f \circ u(x)$, podemos deduzir:

a. Formato dos gráficos. Os gráficos das funções $u(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = f \circ u(x)$ possuem o mesmo "formato". A diferença é que o gráfico de $g(x) = f \circ u(x)$ está "deslocado" de 1 unidade para cima (ou na vertical) no plano cartesiano em relação ao de abcissa x que são zeros de $u(x) = \operatorname{sen}(x)$, isto é, aqueles que verificam $\operatorname{sen}(x) = 0$.

b. Domínio e o conjunto Imagem. O domínio e o conjunto imagem da função $g(x) = f \circ u(x)$ são os mesmos da função $u(x) = \operatorname{sen}(x)$.

c. Período. As funções $u(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = f \circ u(x)$ são periódicas e têm o mesmo período $T = 2\pi$.

Exercício 14.3 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período T. Mostre que a função definida por $g(x) = cf(ax+b)$, com $a > 0$ e $b, c \in \mathbb{R}$, é periódica de período $\frac{T}{a}$.*

Solução. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$g(x + \frac{T}{a}) = cf(a(x + \frac{T}{a}) + b) = cf(ax + m + T) = cf(ax + b) = g(x).$$

Logo, a função $g(x) = cf(ax + b)$, com $a > 0$ e $b, c \in \mathbb{R}$, é periódica de período $\frac{T}{a}$.

Observação. Este exercício tem muitas aplicações em matemática e em outros campos das ciências exatas e aplicadas, como física, química, etc. Pode ser aplicado nas funções trigonométricas, como veremos no exercício a seguir.

Exercício 14.4 *Determine o período de cada uma das seguinte funções:*

1. $g(x) = sen(3x + \frac{\pi}{3})$;

2. $h(x) = \cos(\frac{1}{3}x + \frac{2\pi}{3})$.

Solução. Vamos aplicar o resultado geral do Exercício 14.3.

1. A função $g(x) = \text{sen}(3x + \pi\ 3)$ é de forma: $g(x) = c.\ \text{sen}(ax + b)$ com $a = 3 > 0$, $b = \pi\ 3$ e $c = 1$. Como a função $\text{sen}(x)$ é periódica de período 2π, então a função $g(x) = \text{sen}(3x + \frac{\pi}{3})$ é periódica de período $T = \frac{2\pi}{3}$.

2. A função $h(x) = \cos(\frac{1}{3}x + \frac{2\pi}{3})$ é de forma: $h(x) = c.\ \cos(ax + b)$ com $a = \frac{1}{3} > 0$, $b = \frac{2\pi}{3}$ e $c = 1$. Como a função $\cos(x)$ é periódica de período 2π, então a função $h(x) = \cos(\frac{1}{3}x + \frac{2\pi}{3})$ é periódica de período $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

Exercício 14.5 *Seja a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:* $f(x) = 2x$.

1. Determine a expressão da função $h(x) = \cos \circ f(x)$.

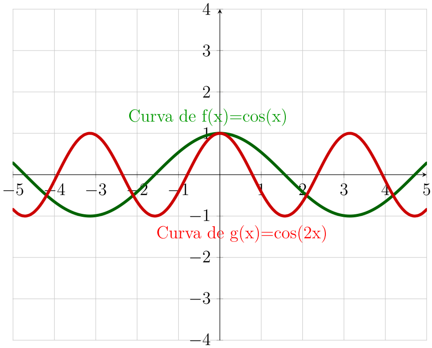
2. Estude o gráfico da função $h(x) = \cos \circ f(x)$*, comparando-o com o gráfico de* $\cos(x)$.

Solução.

1. Para todo $x \in R$, a expressão da função $h(x) = \cos \circ f(x)$ é dada por:

$$h(x) = \cos \circ f(x) = \cos(f(x)) = \cos(2x).$$

2. Os gráficos das funções $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = \cos \circ f(x)$, são dados por:



Analisando os gráficos das funções $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = \cos \circ f(x) = \cos(2x)$, podemos deduzir:

a. Formato dos gráficos. Os gráficos das funções $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = \cos \circ f(x) = \cos(2x)$ possuem o mesmo "formato". Contudo, o gráfico de $h(x) = \cos \circ f(x) = \cos(2x)$ corta o eixo dos x nos valores dados por $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, enquanto o gráfico de $g(x) = \cos(x)$ corta o eixo n x os valores dedados por $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, as funções $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = \cos \circ f(x) = \cos(2x)$ não têm os mesmos zeros. Isto significa que $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = \cos \circ f(x) = \cos(2x)$ não têm o mesmo período.

b. Domínio. O domínio da função $h(x) = \cos \circ f(x) = \cos(2x)$ é o mesmo da função $g(x) = \cos(x)$.

c. O Conjunto Imagem. O conjunto imagem da função $h(x) = \cos \circ f(x) = \cos(2x)$ é dado por $[-1; 1]$.

d. Período. A função $h(x) = \cos \circ f(x) = \cos(2x)$ é periódica de período $T = \pi$, de fato, temos, $h(x+\pi) = \cos(2(x+\pi)) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x) = \mathrm{h1}(x)$.

Exercício 14.6 *1.Estude a função $f(x) = |\,sen(x)|$.*

2. Esboce o gráfico de $f(x) = |\,sen(x)|$.

Solução.

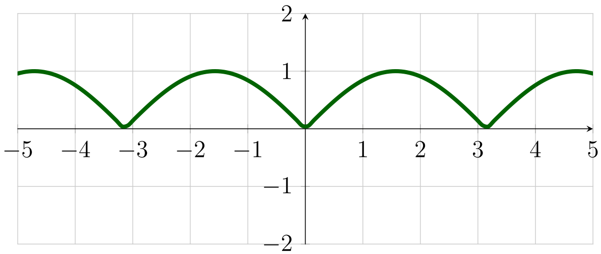
1. Temos as seguintes propriedades:

a. Domínio. O domínio da função $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$ é o mesmo da função $\operatorname{sen}(x)$: $D(f) = \mathbb{R}$.

b. O Conjunto Imagem. O conjunto imagem da função $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$ é dado por $[0, 1]$, não é o mesmo da função $\operatorname{sen}(x)$.

c. Paridade e Período. Como $f(-x) = |\operatorname{sen}(-x)| = |-\operatorname{sen}(x)| = |\operatorname{sen}(x)| = \mathrm{f}(x)$, temos $f(x + 2\pi) = |\operatorname{sen}(x + 2\pi)| = |\operatorname{sen}(x)|$, assim a função f é uma função par e periódica de período $T = 2\pi$.

2. Esbocemos o gráfico da função de $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$:



Exercício 14.7 *Determine o domínio e o período da função:*

$$f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4}).$$

Solução.

1. Domínio. Seja $\alpha = x - \frac{\pi}{4}$, então existe $\tan(\alpha)$ se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, temos:

$$\alpha = x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Então, o domínio da função f é dado por:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Período. Vamos aplicar o resultado geral do Exercício 14.3 acima. A função $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$ é da forma: $f(x) = c\tan(ax + b)$ com $a = 1 > 0$, $b = -\frac{\pi}{4}$ e $c = 1$. Como a função $\tan(x)$ é periódica de período π, então a função $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$ é periódica de período $T = \frac{\pi}{1} = \pi$.

Exercício 14.8 *Estudar a função*:

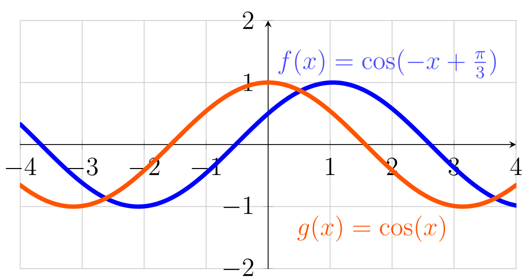
$$f(x) = \cos(-x + \frac{\pi}{3}).$$

Solução.

1. Domínio. Como o domínio da função cos é dado por $D(\cos) = \mathbb{R}$, então o domínio da função $f(x) = \cos(-x + \frac{\pi}{3})$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Paridade. Para $x \in \mathbb{R}$ temos $f(-x) = \cos(x + \frac{\pi}{3}) \neq \cos(-x + \frac{\pi}{3})$ e $f(-x) = \cos(x + \frac{\pi}{3}) \neq -\cos(x + \frac{\pi}{3})$. Portanto, a função $f(x) = \cos(-x + \frac{\pi}{3})$ não é par, nem ímpar uma vez que $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$.

3. Gráfico. Tem-se, em seguida o gráfico da função $f(x) = \cos(-x + \frac{\pi}{3})$ no intervalo $[0, \pi]$, a partir do qual, têm-se as conclusões para a função:



Aqui a discussão sobre o período e imagem fazem parte do item 3.

a. Período. Observando o gráfico da função $f(x) = \cos(-x + \frac{\pi}{3})$, nota-se que o período não se alterou, em relação ao período da função $\cos(x)$, porque houve apenas uma translação do gráfico da função $g(x) = \cos(x)$ de $\frac{\pi}{3}$ unidades, no sentido negativo do eixo Ox. Logo, o período da função $f(x) = \cos(-x + \frac{\pi}{3})$ continua sendo igual a 2π.

b. Conjunto Imagem. Pelo gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função dada é $Im(f) = [-1, 1]$, ou seja, não sofreu altera.c ão em relação ao conjunto imagem da função $\cos(x)$.

Exercício 14.9 *Estudar a função:*

$$f(x) = 1 - 2\cos(-\frac{x}{3}).$$

Solução. Uma vez que a função cosseno é par, tem-se que $\cos(-\frac{x}{3}) = \cos(\frac{x}{3})$, temos $f(x) = 1 - 2\cos(-\frac{x}{3}) = f(x) = 1 - 2\cos(\frac{x}{3})$.

1. Domínio. Como o domínio da função cos é $D(\cos) = \mathbb{R}$, então o domínio da função $f(x) = 1 - 2\cos(-\frac{x}{3})$ é dado por $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Paridade. Para $x \in \mathbb{R}$ temos $f(-x) = 1-2\cos(\frac{x}{3}) = 1-2\cos(-\frac{x}{3}) = f(x)$, porque $\cos(-x) = \cos(x)$. Portanto, a função $f(x) = 1 - 2\cos(-\frac{x}{3})$ é par.

3. Período. A função $f(x) = 1-2\cos(-\frac{x}{3}) = 1-2\cos(\frac{x}{3})$ é de forma: $h(x) = d+c\cos(ax+b)$ com $a = \frac{1}{3} > 0$, $b = 0$, $c = -2$ e $d = 1$. Como a função $\cos(x)$ é periódica de período 2π, então a função $f(x) = 1-2\cos(-\frac{x}{3}) = 1-2\cos(\frac{x}{3})$ é periódica de período $T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

Exercício 14.10 *Determine o domínio e o período da função*:

$$f(x) = \tan(3x).$$

Solução.

1. Domínio. Seja $\alpha = 3x$, então existe $\tan(\alpha)$ se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, temos:

$$\alpha = 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}.$$

Então, o domínio da função f é dado por:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Período. Vamos aplicar o resultado geral do Exercício 14.3 acima. A função $f(x) = \tan(3x)$ é da forma: $f(x) = c\tan(ax + b)$ com $a = 3 > 0$, $b = 0$ e $c = 1$. Como a função $\tan(x)$ é periódica de período π, então a função $f(x) = \tan(3x)$ é periódica de período $T = \frac{\pi}{3}$.

Observação. A função do tipo $f(x) = d + c\tan(ax + b)$, onde a, b, c e d são número reais, com $a > 0$, é periódica cujo período T é dado por $T = \frac{\pi}{a}$.

Exercício 14.11 *Estudar a função:*

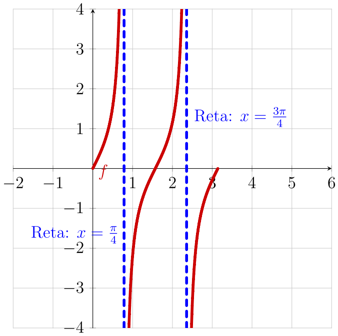
$$f(x) = \tan(2x).$$

Solução. O procedimento é análogo ao já adotado para as funções seno, cosseno e tangente.

1. Domínio. Para que seja possível calcular a tangente de $2x$, é necessário que $2x$ seja diferente de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, logo teme-se $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Então, o domínio da função f é dado por:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Gráfico. Tem-se, assim o gráfico da função $f(x) = \tan(2x)$ no intervalo $[0, \pi]$, a partir do qual, têm-se as conclusões para a função:



Aqui são análises referentes ao item 2.

a. Paridade. Temos $f(-x) = \tan(-2x) = -\tan(2x) = -f(x)$, ou seja, a função $f(x) = \tan(2x)$ é ímpar.

b. O Conjunto Imagem. É o mesmo da função $\tan(x)$, assim tem-se $Im(f) = \mathbb{R}$

c. Período. Comparando com a função, o gráfico da função $f(x) = \tan(2x)$ mostra que o período se alterou, porque o x foi multiplicado por 2. Por outro lado, tem-se que o período da função $f(x) = \tan(ax)$, com $a > 0$, é dado por $T = \frac{\pi}{a}$ (aplicando o Exercício 14.3), no caso da função f(x) = $\tan(2x)$, tem-se $T = \frac{\pi}{2}$.

Exercício 14.12 ***Função cotangente.*** Chama-se cotangente de α, com $\alpha \neq k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, o inverso da tangente de α, isto é, $\frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$. Ela é denotada por $\cot(\alpha)$. A função cotangente é definida por:

$$f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)} \; .$$

Estudar a função cotangente.

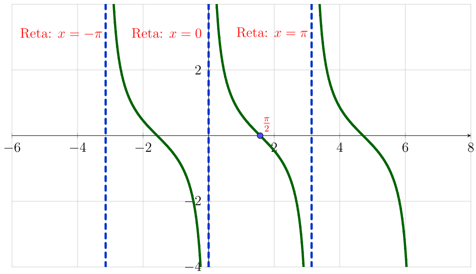
Solução. O procedimento é análogo ao já adotado para a função tangente.

1. Domínio. Para que seja possível calcular a cotangente de x, é necessário que $\text{sen}(x) \neq 0$, então $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Então, o domínio da função cotangente é dado por: $D(f) = \{x \in \mathbb{R};\, x \neq k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Período. Tem-se que o período da função tan(x) é dado por $T = \pi$, e como o caso da função $f(x) = \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$, então tem-se $f(x + \pi) = \cot(x+\pi) = \frac{1}{\tan(x+\pi)} = \frac{1}{\tan(x)}$, ou seja, $f(x+\pi) = \cot(x+\pi) = \cot(x) = f(x)$.

Logo, a função cotangente é periódica de período $T = \pi$.

3. Gráfico. Tem-se, assim o gráfico da função $f(x) = \cot(x)$ no intervalo $[0, \pi]$, a partir do qual, têm-se as conclusões para a função:



Aqui são análises referentes ao item 2.

a. Paridade. Temos $f(-x) = \cot(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{sen(-x)} = \dfrac{\cos(x)}{-\,sen(x)} = -\cot(x) = -f(x)$, ou seja, a função $f(x) = \cot(x)$ é ímpar.

b. O conjunto Imagem. É o mesmo da função $\tan(x)$, assim tem-se $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Exercício 14.13 *Função secante. Chama-se secante de* α, *com* $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, *o inverso do cosseno de* α, *isto é,* $\dfrac{1}{\cos(\alpha)}$. *Ela é denotada por* $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$. *A função secante é definida por:* $f(x) = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

Estudar a função secante.

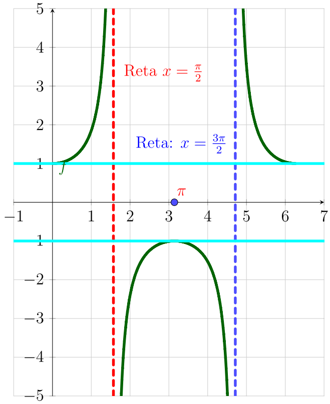
Solução.

1. Domínio. Para que seja possível calcular a secante de x, é necessário que $\cos(x) \neq 0$, então $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Então, o domínio da função secante é dado por:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Período. Tem-se que o período da função $\cos(x)$ é dado por $T = 2\pi$, e como o caso da função $f(x) = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, então tem-se $f(x + 2\pi) = \dfrac{1}{\cos(x+2\pi)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$, ou seja, $f(x + 2\pi) = \sec(x + 2\pi) = \sec(x)$. Logo, a função secante é periódica de período $T = 2\pi$.

3. Gráfico. Tem-se, assim o gráfico da função $f(x) = \sec(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$, a partir do qual, têm-se as conclusões para a função:



4. Paridade. Temos $f(-x) = \sec(-x) = \dfrac{1}{\cos(-x)} = \dfrac{1}{\cos(x)} = \sec(x) = f(x)$, ou seja, a função $f(x) = \sec(x)$ é par. Portanto, seu gráfico apresenta simetria em relação ao eixo Oy.

5. O conjunto imagem. Analisando-se o gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função secante é dado por

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R};\ y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\} =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[.$$

Exercício 14.14 ***Função cossecante***. *Chama-se cossecante de α, com $\alpha \neq k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, o inverso do seno de α, isto é,* 1 sen(α) . *Ela é denotada por cossec(α)* $= \dfrac{1}{sen(\alpha)}$. *A função cosssecante é definda por: $f(x) = cossec(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$).*

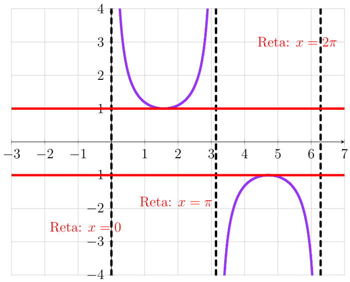
Estudar a função cossecante.

Solução.

1. Domínio. Para que seja possível calcular a cossecante de x, é necessário que $\text{sen}(x) \neq 0$, então $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Então, o domínio da função cossecante é dado por: $D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Período. Tem-se que o período da função sen(x) é dado por $T = 2\pi$, e como o caso da função $f(x) = cossec(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$, então tem-se $f(x + 2\pi) = \dfrac{1}{\text{sen}(x+2\pi)} = \dfrac{1}{sen(x)}$, ou seja, $f(x + 2\pi) = cossec(x + 2\pi) = cossec(x)$. Logo, a função cossecante é periódica de período $T = 2\pi$.

3. Gráfico. Tem-se, assim o gráfico da função $f(x) = cossec(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$, a partir do qual, têm-se as conclusões para a função:



Aqui são análises referentes ao item 3.

a. Paridade. Temos $f(-x) = cossec(-x) = \dfrac{1}{sen(-x)} = \dfrac{1}{-sen(x)} = -f(x)$, ou seja, a função f(x) = cossec(x) é ímpar. Portanto, seu gráfico apresenta simetria em relação ao origem.

b. O conjunto imagem. Analisando-se o gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função secante é dado por

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R};\ y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\} =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[.$$

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, Ministério da Educação Conselho Nacional de Educação / Câmara de Educação Superior. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.* Formiga-MG, 2001.

[2] BURIGATO, S. M. M. S.; RACHIDI, M. Uma Proposta Para Introdução do Conceito de Limite de Funções Reais. *Educação Matemática em Revista*, Brasília, v. 26, n. 70, p. 89-107, jan./mar. 2021.

[3] BURIGATO, S. M. M. S.; OUVRIER-BUFFET, C. ; FREITAS, J.L. Le Concept de Limite de Fonction – Une Analyse des Sch`emes d'Étudiants à la Transition Secondaire-Supérieur en France et au Brésil. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* : Revue Internationale de Didactique des Mathématiques, Strasbourg, v. 26, p. 9-38. 2021.

[4] CARA.CA, B. J., *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa-Portugal: Livraria SÅLa da Costa Editora, 1984.

[5] GUIDOROZZI, H. L., *Cálculo*, Volume 1, 5a Ed., Rio de Janeiro-RJ, LTC, 2013.

[6] LIMA, E. L., *Análise Real*, Volume 1, Rio de Janeiro-RJ: SBM –IMPA, 1989.

[7] PANTALONI, V., *Examples - Brochure. Mini-livre: Trigonométrie.* https://fr.overleaf.com/latex/examples/tagged/brochure (data do Ålultimo acesso: 15 de dezembro 2022).

[8] RACHIDI, M., FREITAS, J. L. MAGALH ̃AES de, MONGELLI, M. C. Junqueira Godinho, *Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações*, Editora UFMS, Ago. 2020. https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/3548. (Data de acesso: 01/06/2021)

[9] RIBEIRO, J., *Matemática*, S ão Paulo-SP: Editora Scipione, 2008.

[10] STEWART, J., *Single Variable Calculus Concepts and Contexts*, Fourth Edition, Brooks/Cole, 2010.

[11] STEWART, J., *Cálculo* Vol. 1. S ão Paulo-SP: Editora Pioneira Thompson
Learning, 2003.

[12] UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS). Projeto PedagÅLogico do Curso (PPC) de Matemática – Licenciatura. Instituto de Matemática (INMA), Campo Grande, 2018

APÊNDICE A

Algumas Aplicações de Ordem em $\mathbb{R}$: Limitações, Maior Inteiro e Aproximação Decimal

Resumo

O objetivo deste capítulo é fornecer alguns suplementos sobre as aplicações da ordem em R. Mais precisamente, vamos utilizar a aplicação do maior inteiro para as aproximações decimais dos números reais, e assim deduzir uma propriedade do conjunto dos números R: Propriedades de densidade de números racionais em R.

A.1 Preliminares: motivações para a aproximação dos números reais

Já estudamos os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, as operações definidas neles e suas propriedades. Chegamos ao conjuntos dos números reais $\mathbb{R}$, que é o conjunto dos números racionais e irracionais, usando uma construção axiomática. Também introduzimos o axioma de ordem que nos permite comparar os números reais.

Vimos também que a representação decimal de um número racional será finita ou infinita periódica. E reciprocamente, um número na forma decimal finita ou infinita periódica pode ser representado também na forma fracionária, por exemplo:

$$\frac{5}{2} = 2,5 \quad \frac{137}{100} = 1,37 \quad \frac{1}{3} = 0,3333\ldots \text{ ou } \frac{232}{99} = 2,343434\ldots$$

Com alguns exemplos, vimos também alguns números irracionais conhecidos em sua representação infinita não-periódica:

$$\pi = 3,14159265\ldots \text{ ou } \sqrt{2} = 1,4142135623\ldots$$

Assim, os números racionais que têm uma forma decimal infinita periódica de casas decimais e os números irracionais possuem uma infinidade não periódica de casas decimais e não podemos saber todas essas casas decimais.

Assim:

Como esses números são utilizados na prática?

O que acontece nestes casos é que são usadas aproximações, isto é, uma aproximação racional para um número que possui uma infinidade não-periódica de casas decimais. Por exemplo, na prática muitas vezes o número 3,14 é usado como aproximação de ϖ.

Mas cada aproximação apresentará um erro. No entanto, este erro pode não ser significativo e a aproximação do resultado servirá também aos nossos propósitos. Quanto mais casas decimais considerarmos, menor será o erro decorrente da substituição. Agora:

1. Como encontrar as casas decimais para poder usar aproximações racionais?

2. Como estas casas decimais foram determinadas?

Responder estas últimas perguntas é objetivo dos parágrafos seguintes.

A.2 Limitação e aproximação dos números reais

Para alguns números reais a e b, a comparação não é muito fácil de conseguir diretamente. Por exemplo, como comparar $a = 3\sqrt{2}$ e $b = \pi$? Ou de comparar $a = 2\sqrt{3}$ e $b = \pi$? Em tais situações, um método natural é expressar $a = 3\sqrt{2}$ e $b = \pi$ em formas decimais e comparar os valores aproximados desses números.

Limitação e aproximação. Sejam a, b e x três números reais. Diz-se que a e b limitam x quando temos $a \leq x \leq b$. E temos as seguintes aproximações do número x:

1. O número real a é chamado valor aproximado por falta do real x.

2. O número real b é chamado valor aproximado por excesso do real x.

A comparação contribui para a construção das limitações dos números reais cujo valor exato não é conhecido.

Exemplo A.1 Sabendo que $\sqrt{2}$ é um número irracional cujo escrita decimal ilimitada é dada por $\sqrt{2} = 1{,}414213562....$ Podemos obter a parte decimal a partir de alguns processos de limitação e de aproximação de $\sqrt{2}$. Assim, desse valor decimal, temos a seguinte limitação de $\sqrt{2}$ com três casas decimais: $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$. Assim, temos que:

1. O número real $a = 1, 414$ é o valor aproximado por falta do real $\sqrt{2}$.

2. O número real $b = 1, 415$ é o valor aproximado por excesso do real $\sqrt{2}$.

Outro exemplo importante é aproximação do número real π.

Exemplo A.2 *Sabendo que π é um número irracional cujo escrita decimal ilimitada é dada por 3, 1415926.... Podemos obter a parte decimal a partir de alguns processos de limitação e de aproximação de ϖ. Assim, desse valor decimal, temos a seguinte limitação de π com quatro casas decimais:* $3,1415 < \pi < 3,1416$. *Desse modo, temos que:*

1. O número real $a = 3, 1415$ é o valor aproximado por falta do real π;

2. O número real $b = 3, 1416$ é o valor aproximado por excesso do real π.

Intervalos, limitação e aproximação dos números reais. Às vezes queremos ter uma ideia mais precisa sobre a aproximação de um número ou de um resultado, sem conhecer exatamente o valor desse número.

Definição A.1 *Seja x e $\epsilon > 0$ dois números reais tais que*:

$$a \leq x < a + \epsilon.$$

Então, dizemos que:

1. $a + \epsilon$ é o valor aproximado de x para o número ϵ por excesso;

2. a é o valor aproximado de x para o número ϵ por falta.

A.3 Maior inteiro e processo de aproximações decimais

Vamos apresentar nessa subseção um método prático para conseguir as aproximações decimais a $\epsilon = 10^{-n} (n \geq 1)$ por excesso ou por falta.

Definição A.2 Definição - Proposição. *Seja x um número real, existe n em $\mathbb{Z}$ e b em $\mathbb{R}$ tal que:*

$$x = n + b \text{ com } 0 \leq b < 1.$$

O número real n é chamado de **Parte Inteira** *de x e denotamos $n = \lfloor x \rfloor$.*

O número real $n - \lfloor x \rfloor$ é chamado de **Parte Decimal** *de x.*

Proposição A.1 *Seja x um real.*

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$

2. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x + 1 \rfloor.$

3. $\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$.

4. $\lfloor x \rfloor = x$ se, e somente se, $x \in \mathbb{Z}$.

Aplicação 1: Aproximação decimal dos números reais.

Na prática o valor aproximado por excesso ou por falta de um x número real, usamos $\epsilon = 1/10^n$ onde n é um número natural. Para todo $x \in \mathbb{R}$, as propriedades anteriores da Proposição A.1 garantem que:

$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$, para qualquer número natural n.

Então, dividindo os membros dessa desigualdade por 10^n, obtemos:

$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{1}{10^n}$, para qualquer número natural n.

Assim, podemos deduzir uma maneira prática de determinar as aproximações por falta e por excesso de um número real.

Aplicação 2: Aproximações por falta e por excesso.

Seja $x \in \mathbb{R}$ e n um número natural.

1. Valor aproximado por falta de um $\epsilon = 1/10^n$: O número real $\lfloor 10^n x \rfloor . 10^{-n}$ é chamado de valor decimal aproximado de x a 10^{-n} por falta.

2. Valor aproximado por excesso de um $\epsilon = 1/10^n$: O número real $\lfloor 10^n x \rfloor . 10^{-n} + 10^{-n}$ é chamado de valor decimal aproximado de x a 10^{-n} por excesso.

A.4 Propriedade de densidade dos números racionais em $\mathbb{R}$

Para todo $x \in R$, a Proposição A.1 garante que:

$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$, para qualquer número natural n.

Então, dividindo os membros dessa desigualdade por 10^n, obtemos:

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{1}{10^n}, \text{ para qualquer número natural n.}$$

Assim, quanto maior o número natural n, mais precisa é a aproximação de x pelos números $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ e $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{1}{10^n}$, ou seja, quanto maior o número natural n mais os números racionais $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ e $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{1}{10^n}$ aproximam de x.

Dizemos que os números decimais $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ tendem para o número n, quando n tende para $+\infty$. Este processo é denominado: **Propriedade de densidade** dos números decimais em $\mathbb{R}$.

Proposição A.2 *(Propriedade de Densidade) O conjunto* $\mathbb{D} = \{ \frac{m}{10^n}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ *dos números decimais é denso em* $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, *então* $\mathbb{Q}$ *é também denso em* $\mathbb{R}$.

A propriedade de densidade tem outras formulações. Por exemplo, temos a seguinte formulação em termos de intervalos.

Proposição A.3 *Qualquer intervalo* $]a, b[$ *com* $(a < b)$ *contém um número infinito de números irracionais e também de números racionais.*

A propriedade densidade desempenha um papel fundamental na análise, em particular no Cálculo 1. Isto é, todos os números irracionais podem ser aproximados por racionais; este é um resultado que você estudará com mais detalhes na disciplina de Análise.

APÊNDICE B
Raciocínio e demonstração

Resumo

Neste anexo vamos apresentar algumas observações sobre os vários tipos de raciocínios e de demonstrações, usadas nesta disciplina. De maneira mais precisa, nos interessa chamar a atenção dos alunos sobre as várias maneiras de abordagem para a resolução dos exercícios e problemas.

B.1 Raciocínio

Resolução de problemas em matemática, abrange várias abordagens que dependem de raciocínio. Essas etapas são: às vezes sucessivas ou muitas vezes realizadas conjuntamente. Essas etapas podem ser divididas em habilidades:

1. Ler, interpretar e organizar informações;
2. Envolver-se em um processo de pesquisa e investigação;
3. Relacionar os conhecimentos, técnicas e ferramentas necessárias para produzir uma demonstração;
4. Comunicar-se por vários meios e de se adaptar conforme - capacidade de convencimento a solução do problema.

Nesse processo, o lugar da lógica e do raciocínio é muito importante nos programas de matemática. De fato, a matemática tornará possível distinguir os verdadeiros e falsos argumentos de um passo lógico que leva à conclusão. O raciocínio, é a abordagem convincente para todos e também o meio de validar ou invalidar uma hipótese e explicá-la a outras pessoas.

B.2 Implicação, Equivalência e Recíproca

Implicação. Quando temos duas proposições P e Q, escrevemos $P \Rightarrow Q$ para dizer que a expressão P implica a expressão Q. Neste caso, P é a hipótese e Q é a conclusão. Existem diferentes maneiras de ler $P \Rightarrow Q$:

1. se a proposição P for verdadeira, então a proposição Q é verdadeira (se P, então Q);

1. a proposição Q é verdadeira se a proposição P for verdadeira (Q se P);

1. a proposição P é verdadeira somente se a proposição Q for verdadeira (P somente se Q).

Exemplo B.1 *O quadrilatere ABCD é um quadrado* $\Rightarrow$ *ABCD é um paralelogramo.*

Equivalência. Quando temos duas proposições P e Q tais que $P \Rightarrow Q$ e $P \Rightarrow Q$, escrevemos $P \Leftrightarrow Q$ e dizemos que a proposição P é equivalente à proposição Q. Em vez de dizer que P é equivalente a Q, também podemos dizer P se, e somente se, Q.

Exemplo B.2 *ABC é um triângulo retângulo em A* $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Recíproca. O recíproco de uma implicação de $P \Rightarrow Q$ é a implicação de $Q \Rightarrow P$.

Exemplo B.3 *O recíproco da implicação ABC é um triângulo retângulo em A* $\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$ *é* $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow$ *ABC é um triângulo retângulo em A.*

Proposição oposta. Se P é uma proposição, então sua proposição oposta (ou negação) é denominada Não P ou $\sim P$ ou $\overline{P}$.

Exemplo B.4 *A proposição oposta de: "O número n é um inteiro natural par", é a proposição: "O número n é um inteiro natural ímpar".*

B.3 Alguns tipos de demonstração ou Prova

Na matemática, uma prova é baseada em um raciocínio que torna possível, a partir de certos axiomas, estabelecer que um resultado é necessariamente verdadeiro.

Um resultado que é demonstrado é chamado de teorema ou proposição. Uma vez que o teorema tenha sido demonstrado, ele pode ser usado como base para demonstrar outras afirmações.

Uma afirmação que é supostamente verdadeira, mas que ainda não foi provada, é chamada de conjectura.

Na matemática existem diferentes tipos de demonstrações. Para a disciplina de Introdução ao Cálculo, as mais comuns são:

1. **Demonstração direta.** A demonstração direta consiste em demonstrar a proposição declarada (por exemplo, um teorema) partindo diretamente de hipóteses dadas e chegando à conclusão com uma série de implicações lógicas;

2. **Demonstração pelo contraposto.** Em vez de demonstrar a implicação de que $P \Rightarrow Q$ demonstramos sua contraposição, que é a implicação $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Isto é, mostrar que a implicação $P \Rightarrow Q$ é verdadeira é equivalente a mostrar que a implicação $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ é verdadeira. Em outras palavras, uma propriedade e sua contraposição são sempre equivalentes;

3. **Demonstração pelo absurdo.** Consiste em supor o oposto da proposição enunciada e mostrar que chegamos então a uma contradição (impossibilidade);

4. **Demonstração através do uso de um contra-exemplo**. Se quisermos mostrar uma afirmação do tipo: "**para todos os** x de E, **a proposição** $P(x)$ **é verdadeira**", então para cada x

de E, devemos mostrar que $P(x)$ é verdadeiro. Por outro lado, para mostrar que esta afirmação é falsa, é suficiente encontrar um x pertencente a E tal que $P(x)$ seja falso. Ou seja, basta encontrar um contra-exemplo para a asserção "**para todos os** x **de** E**, a proposição** $P(x)$ **é verdadeira**".

5. **Demonstração por Disjunção de Casos.** Se quisermos verificar uma asserção $P(x)$ para todos os x em um conjunto E, mostramos a declaração de x em uma parte F de E, depois para todos os x não pertencentes a F, ou seja, para todos os x no complementar de F em E;

6. Prova por indução. Seja $P(n)$ uma propriedade do inteiro $n \in \mathbb{N}$. Suponha que temos as duas afirmações a seguir:

    1. Ancoragem: $P(0)$ é verdadeira;

    2. Hipótese de indução: Suponha que a propriedade $P(n)$ seja verdadeira;

    3. Herança: Provar que a propriedade $P(n)$ implica a propriedade $P(n+1)$. Conclusão: a propriedade $\mathrm{P}(n)$ é verdadeira para todos os $n \in \mathbb{N}$.

Este livro foi editorado com as fontes Crimson Text e Montserrat.
Publicado on-line em: https://repositorio.ufms.br

ISBN 978-85-7613-624-8
9 788576 136248

editora UFMS