O Problema das Quatro Cores

Liana Dessandre Duenha

Dissertação de Mestrado

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Henriques de Carvalho

Área de Concentração: Teoria da Computação

Departamento de Computação e Estatística
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
20 de setembro de 2002

Às minhas filhas,
Iara e Anna.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Marcelo Henriques de Carvalho, meu orientador, pela admirável orientação e tão respeitosa amizade. Agradeço por toda a atenção recebida e todas as palavras de ânimo e confiança dirigidas a mim nos momentos de dificuldades. Não poderia deixar de agradecer pela compreensão, preocupação e principalmente pela ajuda que este professor dedicou a mim nas duas fases em que estive afastada devido à licença maternidade. Espero ter sido merecedora de toda esta ajuda.

Ao Prof. Dr. Nalvo Franco de Almeida Júnior, chefe do Departamento de Computação e Estatística da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul pelo apoio constante, pelos computadores deste departamento que utilizei para a realização de pesquisa e desenvolvimento dos programas envolvidos neste trabalho. Pela oportunidade de ter continuado trabalhando neste departamento durante quase todo o período do curso de mestrado, o que tornou possível estar perto de professores tão qualificados e dos demais colegas deste curso. E finalmente, pelo exemplo profissional e incentivo pessoal em todas as conversas amigas.

Aos colegas Cláudia Nasu e Amaury Antônio de Castro Junior, por todas as vezes em que estudamos juntos, por todas as dúvidas que me ajudaram a esclarecer. Sempre foram as primeiras pessoas a quem eu procurava quando precisava de ajuda. Em todas estas vezes, me ajudaram com toda a boa vontade.

Aos alunos Nestor, Guilherme e Alberto pelo tempo e dedicação gastos realizando grande parte dos testes dos programas envolvidos neste trabalho.

E finalmente, ao meu esposo, meus pais e irmãos, a quem posso chamar merecidamente de autores "coadjuvantes" deste trabalho. A estas pessoas que me orientam para a vida, que me ampararam nas fases mais difícieis onde a conclusão deste trabalho parecia impossível. Muito obrigado.

Conteúdo

Resumo

"É possível colorir qualquer mapa com não mais do que 4 cores, de forma que regiões vizinhas recebam cores diferentes?". Essa pergunta foi feita pela primeira vez em 1852 por Francis Guthrie, enquanto coloria um mapa da Inglaterra. Esse problema é conhecido como Problema das 4 Cores. Em 1878, foi publicada a primeira referência impressa da conjetura, no periódico *Proceedings of the London Mathematical Society.* Essa publicação disparou a febre do problema, com um grande número de variações equivalentes, conjeturas e falsas demonstrações.

O Problema das 4 Cores é responsável por muito do que se conhece hoje em teoria dos grafos. A tentativa de resolvê-lo possibilitou o desenvolvimento de vários ramos da teoria dos grafos, através da sua equivalência com outros problemas. Portanto, existem outros enfoques que podem ser dados em um estudo deste problema. No estudo que desenvolvemos, nosso principal objetivo foi estudar a última demonstração do Teorema das 4 Cores publicada em 1997. O teorema afirma que os vértices de um grafo planar sem laços podem ser coloridos com 4 cores distintas. Este teorema é equivalente ao problema das 4 cores. A demonstração do teorema é feita por contradição. Supõe-se a existência de um contra-exemplo para o teorema e estudando as propriedades deste contra-exemplo chega-se a uma contradição. Em várias partes da demonstração faz-se necessário o uso de programas de computador.

O nosso trabalho resume-se no detalhamento da demonstração deste teorema. Para isto foi necessário o estudo detalhado de vários outros livros e artigos, alguns destes publicados no início do século passado e outros publicados depois de 1997 pelos mesmos autores, com o objetivo de esclarecer dúvidas e explicar com maior clareza os programas de computador indispensáveis para esta demonstração.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Um grafo é planar se puder ser desenhado no plano de tal forma que suas arestas se interceptem somente em suas extremidades. O Teorema das 4 Cores (T4C) afirma que todo grafo planar sem laços admite uma atribuição de 4 cores aos seus vértices de forma que vértices vizinhos recebam cores distintas. Isto foi conjeturado em 1852 e permaneceu sem solução até a prova encontrada por Appel e Haken em 1976 ([AH76]).

Infelizmente, a demonstração feita por Appel e Haken (A&H) não foi completamente aceita. Permaneceram algumas dúvidas sobre sua validade visto que parte da demonstração usa um computador e não pode ser verificada manualmente e a parte que supostamente pode ser verificada manualmente é extremamente complicada e tediosa.

Em 1997, Neil Robertson[1], Daniel Sanders[2], Paul Seymour[3] e Robin Thomas[4], apresentaram uma nova demonstração ([RSST97]), usando os mesmos métodos de A&H. Esta demonstração acabou por ser bem mais simples que a demonstração feita por A&H em vários aspectos.

Talvez por ser um estudo bastante complexo e extenso, o artigo desta última demonstração não apresenta demonstrações de alguns teoremas, alguns comentários e nenhuma especificação ou detalhamento dos programas de com-

[1]Department of Mathematics, Ohio State University, 231 West 18th Avenue, Columbus, Ohio 43210

[2]School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332

[3]Bellcore, 445 South Street, Morristown, New Jersey 07960

[4]School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332

putador utilizados. Sendo assim, procuramos desenvolver um trabalho onde apresentássemos ao leitor tudo o que há de mais relevante na demonstração, com todos os detalhes necessários e ilustrações que pudessem contribuir para o seu entendimento. Porém, como não poderia deixar de ser feito, nosso estudo utilizou este artigo da demonstração como base para todas as demais pesquisas.

1.2 Um breve histórico sobre o problema

O Problema das 4 Cores foi proposto por Francis Guthrie em 1852, mas teve sua primeira publicação apenas em 1878, depois de ter sido estudado por vários matemáticos da época, incluindo De Morgan e seus alunos. Nesta primeira referência foi perguntado se a conjetura havia sido provada. Esta pergunta foi finalmente respondida mais de um século depois.

Um dos mais surpreendentes aspectos do problema é a quantidade de importantes resultados obtidos a partir da tentativa de demonstração. Em 1879 houve a primeira publicação de uma “prova” da conjetura. Onze anos depois foram encontrados erros nos argumentos desta “demonstração” e esta foi invalidada, porém os mesmos métodos foram utilizados para a demonstração do teorema das 5 cores.

Em 1880, apareceu mais uma demonstração incorreta da conjetura. Esta demonstração baseava-se na falsa hipótese que todo grafo planar 3-conexo é Hamiltoniano. Embora incorreta, esta “prova” introduziu uma importante noção de 3-coloração de arestas de grafos cúbicos. Em 1891 foi apresentada uma importante relação entre o Problema das 4 Cores e grafos Hamiltonianos.

Em 1922, foi provado que todo mapa com 25 regiões ou menos pode ser colorido com 4 cores. Em 1928, esse limite passou para 28 regiões. Em 1938, esse limite foi modificado para 32 regiões e dois anos depois, para 36 regiões. Apenas em 1970 este limite foi novamente alterado para 40, depois para 52 e finalmente para 96 regiões. [SK86]

A primeira solução para o problema foi publicada em 1976 por Appel e Haken [AH76]. Um aspecto importante desta demosntração é que utilizava um computador em vários de seus passos, o que na época foi uma inovação. A partir daí muitos matemáticos passaram a utilizar computadores durante a construção de demonstrações, porém ainda existiam dúvidas com relação à corretude de demonstrações baseadas em programas de computadores. E além disto, esta primeira demonstração mostrou-se de difícil compreensão, o que fez com que não fosse completamente aceita. Até onde se sabe, ninguém garante a corretude desta demonstração, o que fez com que novas tentativas de demosntrações fossem buscadas. A mais recente e correta, publicada em 1997, segue os mesmos métodos da anterior, e ainda utiliza um computador em algumas partes. Embora não contenha as especificações dos programas no próprio artigo, os autores disponibilizaram em um site da internet [Tho97] os programas e também documentos contendo alguns detalhes dos algoritmos e estruturas de dados utilizadas. Isto possibilita que qualquer programador interessado possa construir seus próprios algoritmos e em computadores pessoais possa fazer toda a verificação [RSST97].

Capítulo 2

O Teorema das 4 Cores

Neste capítulo introduziremos os conceitos necessários para enunciar o Teorema das 4 Cores. Após isso, mostraremos a lógica utilizada e como será organizada esta demonstração.

2.1 Terminologia básica

Um *grafo* é um par (V_G, E_G) de conjuntos finitos, onde E_G é um conjunto de pares não ordenados de elementos de V_G. Quando G estiver subentendido escreveremos simplesmente V e E em vez de V_G e E_G. Os elementos de V_G são chamados *vértices*, e os elementos de E_G de *arestas*. Se $\alpha = \{u, v\}$ (ou simplesmente uv) é uma aresta, dizemos que α *incide* em u e em v e que u e v são os *extremos* de α. Também dizemos que u e v são *vizinhos* ou *adjacentes*. Duas arestas distintas são *adjacentes* se elas têm um extremo em comum. Para um conjunto S qualquer, o número de elementos de S será denotado por $|S|$.

Uma aresta com os dois extremos em um mesmo vértice é chamada de *laço*. Duas arestas são *paralelas* se elas não são laços e têm extremos no mesmo par de vértices. Um grafo é *simples* se não possui laços nem arestas paralelas. Os grafos considerados neste trabalho serão em geral grafos sem laços. Arestas paralelas serão permitidas.

O *grau* de um vértice v de um grafo G é o número de arestas incidentes em v, e é denotado por $d_G(v)$. Quando G estiver subentendido usaremos apenas $d(v)$ para denotar o grau do vértice v. O *grau mínimo* de um grafo G é o número $\delta(G) := min\{d_G(v) : v \in V(G)\}$. Da mesma forma, quando G

estiver subentendido usaremos apenas δ ao invés de δ_G.

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$. Dizemos que um subgrafo H é *gerador* de G se $V_H = V_G$. Se $U \subseteq V_G$ então um subgrafo H é *induzido* por U, denotado por $G[U]$, se $V_H = U$ e E_H é composto pelas arestas de G que têm ambos os extremos em U. Denotamos por $G - U$ o grafo $G[V_G - U]$; no caso em que $U = \{u\}$, abreviamos $G - \{u\}$ por $G - u$.

Um *caminho* é um grafo P onde $V_P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é não vazio e com os v_i todos distintos, e $E_P = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k\}$. Também representamos um tal caminho por $v_1v_2 \cdots v_k$. Os vértices v_1 e v_k são os *extremos* do caminho. Se $P = v_1v_2 \cdots v_k$ é um caminho com $k \geq 3$ então $(V_P, E_P \cup \{v_kv_1\})$ é chamado de *circuito*. Um tal circuito pode ser representado por $v_1v_2 \cdots v_kv_1$. O *comprimento* de um caminho ou um circuito é o número de arestas que ele possui.

Um grafo G é *conexo* se para todo par de vértices u e v existe um caminho no grafo ligando u a v em G. Os subgrafos conexos maximais de um grafo são chamados *componentes*. Um grafo que não contém circuitos é chamado de *acíclico*. Um grafo acíclico e conexo é chamado de *árvore*.

Um *corte de vértices* de um grafo conexo G é um subconjunto minimal X de V_G tal que $G - X$ é desconexo. Em outras palavras, para todo subconjunto próprio Y de X, $G - Y$ é conexo. Se v é um vértice de G e $G - v$ é desconexo então dizemos que v é um *vértice de corte*.

Uma descrição mais completa dos principais conceitos e terminologia utilizada em teoria dos grafos pode ser encontrada em qualquer texto sobre o assunto, como por exemplo [BM76].

2.2 Grafos planares

Dizemos que um grafo é *imersível no plano* ou *planar* se ele pode ser desenhado no plano de modo que suas arestas não se interceptem, exceto no extremo comum entre elas. Um desenho de um grafo planar G no plano sem cruzamento de arestas é chamado de *imersão planar* de G. Nos referiremos a uma imersão planar de um grafo como um *grafo plano*.

Uma *região* do plano é um conjunto de pontos do plano. Uma *face* de um grafo planar é uma região conexa minimal do plano limitada pelas arestas de um grafo plano. Denotaremos por F_G, ou simplesmente F quando G estiver subentendido, o conjunto das faces de um grafo plano G. O lema a seguir, conhecido como fórmula de Euler, relaciona o número de vértices, arestas e faces de um grafo plano conexo.

Teorema 2.2.1 (Euler) *Se G é um grafo plano conexo então $|V| - |E| + |F| = 2$.*

Prova: Por indução em $|F|$. Se $|F| = 1$ então G não possui circuito. Como G é conexo, concluímos que G é uma árvore. Nesse caso, $|E| = |V| - 1$ e o teorema claramente se verifica.

Suponha então que $|F| > 1$. Logo, G possui um circuito. Seja e uma aresta de um circuito de G. Então $G-e$ é um grafo plano conexo com $|F|-1$ faces. Por hipótese de indução, $|V_{G-e}| - |E_{G-e}| + |F_{G-e}| = 2$. Como $|V_{G-e}| = |V|$, $|E_{G-e}| = |E| - 1$ e $|F_{G-e}| = |F| - 1$, concluímos que $|V| - |E| + |F| = 2$. ■

Baseados no teorema de Euler, provaremos algumas propriedades simples sobre grafos planares, mas importantes para a demonstração dos teoremas que serão vistos a seguir.

Lema 2.2.2 *Seja G um grafo planar conexo tal que toda face de G é incidente em no mínimo três arestas. Para cada inteiro i, denote por v_i o número de vértices de G de grau i. Então*

$$\sum_i (6-i)v_i \geq 12$$

com igualdade se e somente se G é uma triangulação.

Prova: Pela Fórmula de Euler, temos que

$$6|V| + 6|F| - 6|E| = 12.$$

Por hipótese, cada face de G é incidente em no mínimo três arestas. Ademais, cada aresta incide em duas faces ou duas vezes em uma mesma face. Portanto, $2|E| \geq 3|F|$. Assim,

$$6|V| - 2|E| \geq 12,$$

com igualdade se e somente se G é uma triangulação. Mas $6|V| = \sum_i 6$, e $2|E| = \sum_i iv_i$. Daí a desigualdade enunciada, com igualdade se e somente se G é uma triangulação. ■

Corolário 2.2.3 *Se G é um grafo planar conexo então $\delta \leq 5$.*

2.3 Os teoremas das 5 e 6 cores

Uma *k-coloração de vértices* de um grafo G é uma atribuição de k cores aos vértices de G de tal forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Dizemos que um grafo é *k-colorível* se ele admite uma k-coloração de vértices. Utilizando o Corolário 2.2.3, podemos provar facilmente por indução os teoremas a seguir.

Teorema 2.3.1 (Teorema das 6 Cores) *Todo grafo planar sem laços é 6-colorível.*

Prova: Provaremos o teorema por indução no número de vértices do grafo. O teorema é claramente verdadeiro para grafos com até seis vértices. Seja G um grafo planar simples com mais do que seis vértices. Seja v um vértice de grau mínimo de G. Pelo Corolário 2.2.3, $d(v) \leq 5$. Claramente, o grafo $G - v$ é planar e sem laços. Por hipótese de indução, $G - v$ é 6-colorível.

Como v possui no máximo 5 vizinhos, existe uma cor ainda não utilizada para os vizinhos de v, que podemos atribuir a v e obter uma 6-coloração dos vértices de G. ■

Utilizando a mesma idéia do teorema acima e com um pouco mais de cuidado, podemos provar um resultado um pouco mais forte.

Teorema 2.3.2 (Teorema das 5 Cores) *Todo grafo planar sem laços é 5-colorível.*

Prova: Provaremos o teorema por indução no número de vértices do grafo. O teorema é claramente verdadeiro para grafos com até cinco vértices. Seja G um grafo planar simples com mais do que cinco vértices. Seja v um vértice de grau mínimo de G. Pelo Corolário 2.2.3, $d(v) \leq 5$. Claramente, o grafo $G - v$ é planar e sem laços. Por hipótese de indução, $G - v$ é 5-colorível. Vamos mostrar agora que podemos estender uma 5-coloração dos vértices de $G - v$ a uma 5-coloração dos vértices de G.

Se v possui menos do que 5 vizinhos então existe uma cor ainda não utilizada pelos vizinhos de v que podemos atribuir a v e obter uma 5-coloração dos vértices de G. Portanto, suponha que v possua cinco vizinhos. O subgrafo J de G induzido pelos vizinhos de v deve conter dois vértices não adjacentes, caso contrário J teria 10 arestas, mas pelo Lema 2.2.2, $|E(J)| \leq 3|V(J)| - 6 = 9$. Portanto, existem dois vértices v_1 e v_2 não adjacentes em J, e portanto em G. O grafo G' obtido de $G - v$ identificando os vértices v_1 e v_2 é planar e sem laços. Por hipótese de indução, G' é 5-colorível. Uma 5-coloração de G' produz uma 5-coloração de $G - v$ em que a cor de v_1 é igual a cor de v_2, ou seja, os vizinhos de G são coloridos utilizando no máximo 4 cores. Portanto, podemos estender esta coloração a uma 5-coloração de G. ■

Finalmente, enunciamos o Teorema das 4 Cores e na seção seguinte apresentaremos um esboço da demonstração deste teorema.

Teorema 2.3.3 (Teorema das 4 Cores - T4C) *Todo grafo planar sem laços é* 4*-colorível.*

2.4 O conjunto de configurações

Uma face de um grafo plano é um *triângulo* se ela é incidente em precisamente três arestas. Um grafo plano é uma *triangulação* se todas as suas faces são triângulos. Uma *quase-triangulação* é um grafo plano e conexo tal que cada região finita é um triângulo.

Um grafo G é *internamente k-conexo* se todo corte de vértices X de G tem pelo menos $k - 1$ elementos, e se $|X| = k - 1$ então $G - X$ tem exatamente dois componentes e um deles é trivial.

Uma *configuração* K consiste de uma quase-triangulação, que denotaremos por $G(K)$, e uma função $\gamma_K : V(G(K)) \longrightarrow Z_+$ com as seguintes propriedades:

- Para todo vértice de corte v, $G(K) - v$ tem exatamente dois componentes e $\gamma_K(v) = d(v) + 2$.
- Para todo vértice v, se v não é incidente na região infinita então $\gamma_K(v) = d(v)$, e caso contrário $\gamma_K(v) > d(v)$. Em qualquer dos casos, $\gamma_K(v) \geq 5$.
- $\sum_v (\gamma_K(v) - d(v) - 1) \geq 2$, onde a soma é executada sobre todos os vértices v incidentes na região infinita tais que $G(K) - v$ é conexo.

A necessidade da última condição acima ficará clara na seção 4.4, onde introduziremos o conceito de completamento de uma configuração.

Vamos descrever uma configuração K por uma figura. Uma maneira é desenhar o grafo e escrever o número $\gamma_K(v)$ próximo do ponto que representa o vértice v, mas isso é inconveniente. Uma maneira melhor é usar diferentes formatos para os vértices para representar os valores de $\gamma_K(v)$. O formatos dos vértices são mostrados na Figura 2.1.

●	$\gamma_K(v) = 5$
·	$\gamma_K(v) = 6$
○	$\gamma_K(v) = 7$
□	$\gamma_K(v) = 8$
△	$\gamma_K(v) = 9$
⬠	$\gamma_K(v) = 10$

Figura 2.1: Formato dos vértices de uma configuração.

No Apêndice C são mostradas 633 configurações, usando a notação indicada na Figura 2.1. Para referenciar alguma configuração deste conjunto é utilizada a notação (x, y, z) significando a configuração na linha y e coluna z da página x do Apêndice C.

O conceito de isomorfismo aplica-se naturalmente a duas configurações, ou seja, duas configurações K e L são *isomorfas* se existir um isomorfismo $\phi : V(G(K)) \longrightarrow V(G(L))$ mapeando $G(K)$ para $G(L)$ tal que $\gamma_K(v) = \gamma_L(\phi(v))$. Qualquer configuração isomorfa a alguma configuração do Apêndice C é chamada uma *boa configuração*.

Seja T uma triangulação. Uma configuração K *aparece* em T se $G(K)$ é um subgrafo induzido de T, toda região finita de $G(K)$ é uma região de T, e para cada vértice $v \in V(G(K))$, $\gamma_K(v) = d_T(v)$. A Figura 2.2 mostra uma configuração aparecendo em uma triangulação.

2.5 A Idéia da Demonstração do T4C

Um *contra-exemplo mínimo* é um grafo planar G que não é 4-colorível, tal que todo grafo planar G' com $|V(G')| + |E(G')| < |V(G)| + |E(G)|$ é 4-colorível. Em outras palavras, um contra-exemplo mínimo é um grafo com o menor número possível de vértices e arestas que não admite uma 4-coloração de vértices. Se existe um grafo planar que não é 4-colorível então certamente

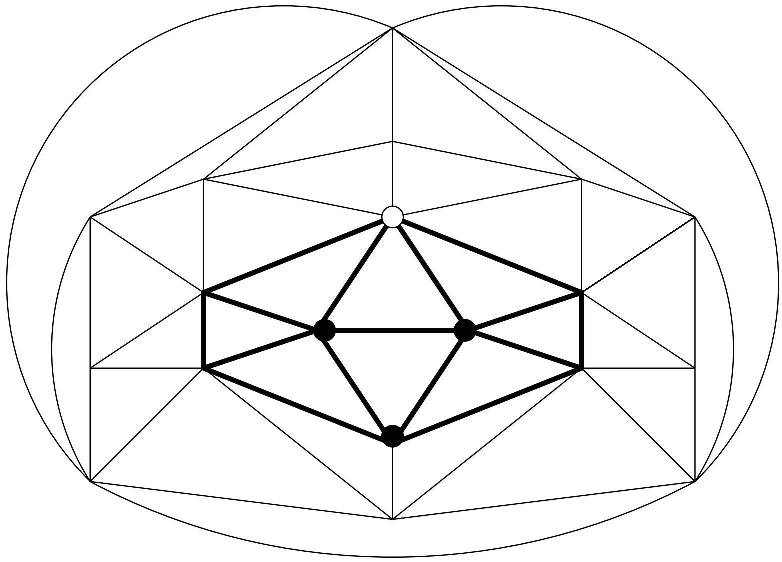


Figura 2.2: Exemplo de uma configuração aparecendo em uma triangulação.

existe um contra-exemplo mínimo. Portanto, para provar o T4C é suficiente mostrar que não existe um contra-exemplo mínimo. Isso será feito através dos seguintes resultados:

Teorema 2.5.1 *Todo contra-exemplo mínimo é uma triangulação internamente 6-conexa.*

Teorema 2.5.2 *Se T é um contra-exemplo mínimo então nenhuma boa configuração aparece em T.*

Teorema 2.5.3 *Para toda triangulação internamente 6-conexa T, alguma boa configuração aparece em T.*

A partir dos teoremas 2.5.1, 2.5.2 e 2.5.3 segue que não existe um contra-exemplo mínimo, e logo o T4C é verdadeiro. Estes teoremas serão demonstrados nos capítulos 3, 4 e 5, respectivamente.

Capítulo 3

Contra-exemplo Mínimo

Nosso objetivo neste capítulo é provar o teorema 2.5.1, ou seja, mostrar que um contra-exemplo mínimo é uma triangulação internamente 6-conexa. Durante todo este capítulo, G será um contra-exemplo mínimo. Então G é um grafo planar que não admite uma 4-coloração de vértices. Considere uma imersão de G no plano.

3.1 Resultados básicos

Faremos inicialmente algumas restrições quanto ao grafo G. Claramente, G é conexo. Queremos mostrar que G é simples, ou seja, não contém laços nem arestas paralelas. Por hipótese, G não possui laços. Se G contém duas arestas paralelas, digamos e e f, então, como G é um contra-exemplo mínimo, $G - e$ admite uma 4-coloração de vértices. Mas uma 4-coloração de vértices de $G-e$ é claramente uma 4-coloração de vértices de G. Isto é uma contradição, pois G não admite uma 4-coloração de vértices.

Proposição 3.1.1 *Todo vértice de G tem grau ≥ 5, ou seja, $\delta \geq 5$.*

Prova: Primeiramente, analisamos o caso em que $\delta < 4$. Seja v um vértice do grafo G tal que $d(v) < 4$. Claramente, o grafo $G - v$ é planar. Pela minimalidade de G, podemos colorir os vértices de $G - v$ com 4 cores. Como $d(v) < 4$, podemos atribuir a v uma cor ainda não utilizada pelos seus vizinhos e obter uma 4-coloração dos vértices de G.

Analisamos agora o caso em que $d(v) = 4$. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4, tomados em ordem cíclica, os vértices adjacentes a v em G. Se v_1 é adjacente a v_3 então

v_2 não é adjacente a v_4, pois o grafo é planar. Portando, v_1 não é adjacente a v_3 ou v_2 não é adjacente a v_4. Sem perda de generalidade, suponha que v_1 não é adjacente a v_3.

Considere o grafo G' obtido a partir de G pela contração das arestas vv_1 e vv_3 a um único vértice v'. O grafo G' é planar e sem laços. Se colorirmos os vértices de G' com 4 cores, podemos atribuir a cor de v' aos vértices v_1 e v_3 de G, e como temos quatro cores, dispomos ainda de uma cor para atribuirmos ao vértice v e obter uma 4-coloração de G. ■

Proposição 3.1.2 *Se X é um corte de vértices de G então o grafo $G[X]$, induzido pelos vértices de X, é um circuito.*

Prova: Seja S um componente de $G - X$, e vamos denotar por $N(S)$ o conjunto dos vértices vizinhos de S que não pertencem a S. Claramente, S é um componente de $G - N(S)$. Logo, $N(S) \subseteq X$. Por definição, X é um conjunto minimal de vértices tal que $G - X$ é desconexo, e portanto $X = N(S)$.

Como G é uma triangulação, $G[X]$ é formado por um circuito C possivelmente acrescido de arestas ligando vértices não adjacentes de C, já que G não possui arestas paralelas. Suponha que exista uma tal aresta e ligando vértices não adjacentes u e v de C. Então C pode ser decomposto em dois caminhos internamente disjuntos P_1 e P_2 ligando u a v. Note que $P_1 + e$ e $P_2 + e$ formam circuitos em G.

Como X é um corte de vértices, $G-X$ possui componente nas regiões interna e externa de C. Então existe um componente, digamos S, imersa na mesma região que e. Então V_{P_1} ou V_{P_2} é corte de vértices de G, contradizendo a minimalidade de X. ■

3.2 G é uma triangulação

O resultado a seguir prova a primeira parte do teorema 2.5.1, ou seja, que G é uma triangulação.

Proposição 3.2.1 *Todas as regiões de G são triângulos, ou seja, limitadas por três arestas.*

Prova: Suponha que exista uma região α de G limitada por pelo menos 4 arestas. Sejam v_1, v_2, v_3 e v_4 quatro vértices quaisquer tomados em ordem cíclica e incidentes com a região α. Se v_1 é adjacente a v_3 então v_2 não pode ser adjacente a v_4, pois o grafo é planar. Portanto, v_1 não é adjacente a v_3 ou v_2 não é adjacente a v_4. Sem perda de generalidade, suponha que v_1 não é adjacente a v_3. Se contrairmos os vértices v_1 e v_3 a um único vértice v_{13}, formaremos um grafo G' planar e com menos vértices do que G.

Pela minimalidade de G, podemos colorir os vértices de G' com 4 cores. Mas, se atribuirmos a cor de v_{13} em G' para os vértices v_1 e v_3, obteremos uma 4-coloração de G, o que é uma contradição. ∎

3.3 G é internamente 6-conexo

Nos resultados a seguir, usaremos a seguinte notação: Suponha que G possui um corte de vértices X. Pela Proposição 3.1.2, $G[X]$ é um circuito C. Então C particiona o conjunto de vértices de G em três subconjuntos: vértices do circuito C, vértices internos ao circuito C e vértices externos ao circuito C, que chamaremos respectivamente $V(C)$, V_1 e V_2. Então, $V_G = V_1 \cup V(C) \cup V_2$.

Consideremos os grafos $G_1 = G[V_1 \cup V(C)]$ e $G_2 = G[V_2 \cup V(C)]$. Estes são subgrafos planares e próprios de G. Pela minimalidade de G, G_1 e G_2 são 4-coloríveis. Usaremos esse raciocínio nos resultados que seguem para mostrar que G não possui cortes "pequenos" de vértices, ou seja, sempre que existir um corte pequeno de vértices, conseguiremos combinar as colorações de G_1 e G_2 para obter uma 4-coloração de G.

Proposição 3.3.1 *O grafo G não possui um corte de vértices X tal que $|X| \leq 3$.*

Prova: Suponha, por contradição, que existe um corte de vértices X tal que $|X| \leq 3$. Então $G[X]$ é um circuito C e considere os grafos G_1 e G_2 definidos acima. Se colorirmos os vértices de G_1 e G_2 com 4 cores, necessariamente os vértices de C serão coloridos com cores distintas, tanto na coloração em G_1 quanto na coloração em G_2. Desta forma, podemos encontrar a mesma coloração de C nas colorações de G_1 e G_2, possivelmente utilizando uma permutação de cores, e assim encontramos uma 4-coloração de G. Portanto, G não possui um corte de vértices de tamanho 3. ∎

Proposição 3.3.2 *O grafo G não possui um corte de vértices de tamanho* 4.

Prova: Suponha, por contradição, que G possui um corte X de vértices de tamanho 4. Então $G[X]$ é um circuito C e considere os grafos G_1 e

G_2 definidos acima. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 os vértices de C tomados em ordem cíclica. Pela Proposição 3.1.2, não existe aresta em G ligando v_1 a v_3, nem v_2 a v_4.

Seja G_1' o grafo obtido a partir de G_1, contraindo os vértices v_1 e v_3 a um único vértice v_{13}. Similarmente, seja G_2' o grafo obtido a partir de G_2, contraindo os vértices v_1 e v_3 a um único vértice v_{13}. Os grafos G_1' e G_2' são planares e com menos vértices do que G. Portanto, podemos colorir os vértices de G_1' e G_2' com 4 cores.

Consideremos as colorações de G_1 e G_2 obtidas a partir das colorações de G_1' e G_2', respectivamente, atribuindo a cor de v_{13} para os vértices v_1 e v_3. As possibilidades para as cores dos vértices v_1, v_2, v_3, v_4 em G_1 e G_2 são essencialmente a, b, a, b ou a, b, a, c. Se as cores para v_1, v_2, v_3, v_4 em G_1 e G_2 são as mesmas, podemos obter uma 4-coloração para o grafo G.

Suponha então que temos as cores a, b, a, c para G_1 e a, b, a, b para G_2. Agora formamos uma segunda escolha de G_1' contraindo v_2 e v_4 a um vértice v_{24}. Como fizemos anteriormente, considere uma 4-coloração de G_1' e a 4-coloração correspondente em G_1. Agora as possibilidades para as cores de v_1, v_2, v_3, v_4 em G_1 são a, b, a, b ou a, b, c, b. O único caso necessário para considerarmos é o segundo visto que o primeiro é listado por G_2. Portanto temos o conjunto de cores a, b, a, b para G_2, e o conjunto a, b, a, c e a, b, c, b para G_1.

Denotaremos por $G_{2_{xy}}$ o subgrafo $G_2[V_x \cup V_y]$ de G_2 induzido por $V_x \cup V_y$, onde V_x e V_y são os conjuntos dos vértices de G_2 coloridos com as cores x e y, respectivamente. Considerando a coloração a, b, a, b para G_2, se os vértices v_2 e v_4 não estão em um mesmo componente no grafo $G_{2_{bc}}$, podemos então obter, por uma permutação de cores, a coloração a, b, a, c para G_2.

Se os vértices v_2 e v_4 estão em um mesmo componente no grafo $G_{2_{bc}}$ então, devido à planaridade de G, os vértices v_1 e v_3 não estão no mesmo componente do grafo $G_{2_{ad}}$. Logo, por uma permutação de cores sobre o componente de $G_{2_{ad}}$ que contém o vértice v_3 podemos obter a coloração a, b, d, b, que é essencialmente a coloração a, b, c, b de G_1. Em ambos os casos obtemos um arranjo de cores já essencialmente encontrado em G_1, e consequentemente uma 4-coloração de G, o que é uma contradição. Portanto, G não possui um corte de vértices de tamanho 4. ■

Dizemos que um corte de vértices X é *periférico* se $G - X$ contém um componente com um único vértice. Então, mostrar que G é internamente 6-conexo é equivalente a mostrar que:

Proposição 3.3.3 *O grafo G é livre de corte de vértices não periférico de tamanho* 5.

Prova: Suponha, por contradição, que G possui um corte não periférico X de tamanho 5. Pela Proposição 3.1.2, $G[X]$ é um circuito C e considere os grafos G_1 e G_2 definidos acima. Novamente, mostraremos que existem 4-colorações para G_1 e G_2 com pelo menos uma coloração em comum para C, ou seja, que podem ser estendidas para uma 4-coloração de G. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 os vértices de C tomados em ordem cíclica. Vamos inicialmente mostrar que

(1) *Existe uma* 4*-coloração dos vértices de G_1 e G_2 em que os vértices de C são coloridos com apenas três cores.*

Considere agora o grafo G'_1 obtido a partir de G pela contração de $G[V_1]$ (ou seja, do componente de $G - X$ formada pelos vértices de V_1) a um único vértice v. Analogamente, o grafo G'_2 é obtido a partir de G pela contração de $G[V_2]$ a um único vértice w. Note que $G_1 = G'_1 - v$ e $G_2 = G'_2 - w$.

Como X é não periférico, V_1 e V_2 possuem mais de um vértice e, consequentemente, G'_1 e G'_2 são planares e menores do que G. Pela minimalidade de G, G'_1 e G'_2 4-coloríveis. Note que em G'_1, todo vértice de C é vizinho de v. Analogamente, todo vértice de C é vizinho de w em G'_2. Logo, em qualquer 4-coloração de G'_1 e G'_2, os vértices de C são coloridos com no máximo 3 cores. Mas, como C é um circuito ímpar, qualquer coloração de C usa pelo menos três cores. Portanto, em qualquer 4-coloração de G'_1 ou G'_2, os vértices de C são coloridos com exatamente 3 cores. Claramente, uma 4-coloração de G'_1 e G'_2 correspondem a uma 4-coloração de G_1 e G_2 em que os vértices de C são coloridos com apenas três cores. Isto prova **(1)**.

Considere uma 4-coloração de G_1 e G_2 em que os vértices de C são coloridos com apenas três cores. Como C tem tamanho 5, no máximo dois vértices são coloridos com a mesma cor. Logo, em qualquer coloração de C com três cores, existe uma cor que é atribuída a um único vértice de C. Chamaremos este vértice de *especial*. Se o vértice especial é o mesmo em G_1 e G_2, então por uma permutação de cores podemos encontrar a mesma coloração de C nos dois grafos, e isto nos fornece uma 4-coloração de G. Podemos assumir então que os vértices especiais em G_1 e G_2 são diferentes.

Vamos introduzir a seguinte notação: sejam V_a, V_b, V_c e V_d os conjuntos de vértices de G_1 e G_2 tais que $u \in V_i$, se u recebeu a cor i. Para $x = 1, 2$, denotaremos por $G_{x_{ij}}$ o subgrafo $G_x[V_i \bigcup V_j]$ induzido por pelos vértices de $V_i \bigcup V_j$.

(2) *Existe uma 4-coloração de G_1 e G_2 em que os vértices especiais são adjacentes em C.*

Considere uma 4-coloração de G_1 e G_2 em que os vértices de C são coloridos com apenas três cores, e assuma que o vértice especial de G_1 é v_1 e o de G_2 é v_3. Temos então as colorações *cabab* e *abcab* de C em G_1 e G_2, respectivamente. Os vértices v_2, v_3 e v_5 devem estar mesma compontente em $G_{2_{bc}}$, caso contrário podemos trocar as cores b e c no componente de $G_{2_{bc}}$ que contém v_2 e v_3 e obter a coloração *acbab* para G_2 em que o vértice especial é v_2 adjacente a v_1, como queremos mostrar. Então, devido à planaridade de G, v_4 e v_1 não pertencem ao mesmo componente em $G_{2_{ad}}$. Podemos então obter uma nova 4-coloração de G_2 contendo a coloração *abcdb* para C.

Agora, definimos um novo grafo G_1' a partir de G_1 contraindo v_2 e v_5 a um único vértice. Obtemos então as colorações $*a**a$ para G_1 onde a cor $*$ é diferente de a. As possíveis colorações obtidas para G_1 são essencialmente: *babca*, *cabca*, *dabca*.

As duas primeiras colorações têm vértice especial v_4 e v_3, que é adjacente ou igual a v_3 em G_2. O último caso *dabca* é essencialmente a mesma coloração que *abcdb* em G_2 obtida anteriormente. Isso prova **(2)**.

Portanto, podemos supor que os vértices especiais são adjacentes. Mostraremos agora que se os vértices especiais em G_1 e G_2 são adjacentes, também podemos encontrar uma coloração para C em comum. Tomemos v_1 e v_2 como vértices especiais, respectivamente, em G_1 e G_2. Temos então as colorações *cabab* e *bcaba* para C em G_1 e G_2, respectivamente. Os vértices v_1, v_2 e v_4 devem estar no mesmo componente de $G_{2_{bc}}$, caso contrário, podemos obter a coloração *cbaba* em G_2 com o vértice especial v_1, que é o mesmo de G_1. Logo, v_3 e v_5 não estão no mesmo componente de $G_{2_{ad}}$. Podemos então obter a coloração *bcdba*, trocando a cor de v_3 para d em G_2.

Agora, formemos um novo grafo a partir de G_1 contraindo v_1 e v_4 a um único vértice. Isso nos leva às três seguintes possíveis colorações para C em G_1: *bcdba*, *bcdbc*, *bcdbd*. A primeira coloração destas já foi listada em G_2, e a terceira tem vértice especial v_2 que é o mesmo de G_2. Portanto podemos considerar apenas a coloração *bcdbc* com vértice especial v_3.

Resumindo, se v_1 e v_2 são vértices especiais de G_1 e G_2, respectivamente, e se esses dois grafos não têm coloração em comum para C, então v_3 também é vértice especial de G_1. Pela repetição desse argumento, começando com o vértice especial v_2 em G_2 e v_3 em G_1, provamos que v_4 é vértice especial em G_2. Por outra repetição provamos que v_5 é vértice especial em G_1, e ainda por outra repetição provamos que v_1 é vértice especial em G_2, bem como para G_1. Portanto, existe uma 4-coloração de G_1 e G_2 com coloração em comum para C, o que nos fornece uma 4-coloração de G. ■

Capítulo 4

Redutibilidade

O nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o teorema 2.5.2, ou seja, se T é um contra-exemplo mínimo, então nenhuma boa configuração aparece em T. Começamos introduzindo o conceito de tri-colorações de uma quase-triangulação para posteriormente definirmos o que é um conjunto consistente de 3-colorações de arestas de um circuito, que é de fundamental importância para completar a demonstração.

4.1 Redução a tri-colorações

Seja G uma quase-triangulação, e seja $\kappa : E(G) \to \{-1, 0, 1\}$ uma função. Um triângulo r de G é *tri-colorível* por κ se $\{\kappa(e), \kappa(f), \kappa(g)\} = \{-1, 0, 1\}$, onde e, f, g são as três arestas de r. Dizemos que κ é uma *tri-coloração* de G (ou que G admite uma tri-coloração) se todo triângulo de G é tri-colorível por κ. Mostraremos nesta seção que o problema da 4-coloração de vértices é equivalente a mostrar que toda triangulação possui uma tri-coloração.

Dado um grafo plano G, o grafo *dual* G^* de G é definido da seguinte forma: cada vértice f^* de G^* corresponde a uma face f de G, e cada aresta e^* de G^* corresponde a uma aresta e de G; dois vértices f^* e g^* estão ligados por uma aresta e^* em G^* se as faces correspondentes f e g estão separadas pela aresta e em G.

Se G é planar então G^* é também planar; dada uma imersão de G no plano, existe uma forma natural de também imergir G^* no plano: coloque cada vértice f^* na face correspondente f de G, e trace cada aresta e^* de forma que ela cruze somente a sua aresta correspondente e. É intuitivamente claro que G^* pode ser desenhado dessa forma no plano sem cruzamento de arestas, mas não provaremos formalmante este resultado.

Um conjunto M de arestas de um grafo G é um *emparelhamento* se nenhum par de arestas de M possui o mesmo extremo, ou seja, nenhuma aresta de M é adjacente a qualquer outra aresta de M. Um emparelhamento M é *perfeito* se todo vértice de G é extremo de alguma aresta de M.

Teorema 4.1.1 *Seja G uma triangulação. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- *Os vértices de G admitem uma 4-coloração.*
- *G admite uma tri-coloração.*

Prova: Considere uma 4-coloração dos vértices de G. Digamos que as cores utilizadas sejam $F := \{0, 1, 2, 3\}$. Considere o conjunto $P := \{(0, 1), (2, 3), (0, 2), (1, 3), (0, 3), (1, 2)\}$ de todos os pares de cores de F, e considere a seguinte partição de P em três subconjuntos com dois pares cada um:

$$p_1 := \{(0, 1), (2, 3)\}, \quad p_2 := \{(0, 2), (1, 3)\}, \quad p_3 := \{(0, 3), (1, 2)\}.$$

Vamos utilizar as cores $\{1, 2, 3\}$ para tri-colorir os triângulos de G, da seguinte forma: para cada aresta e, sejam c_0 e c_1 as cores dos vértices que são extremos de e; seja i o índice da única partição p_i que contém o par (c_0, c_1); atribua à aresta e a cor i. Observe que em cada triângulo f, as cores dos três vértices de f formam 3 pares em partições distintas. Portanto, as três arestas de f terão cores distintas. Logo, uma 4-coloração dos vértices de G implica numa tri-coloração de G.

Reciprocamente, suponhamos que G admite uma tri-coloração com as cores $\{1, 2, 3\}$. Considere o grafo G^* dual de G. O grafo G^* é planar e cúbico (3-regular). Considere a 3-coloração de arestas de G^* obtida naturalmente a partir da tri-coloração de G, ou seja, atribuindo a cada aresta $e^* \in E(G^*)$ a cor da sua aresta correspondente $e \in E(G)$. Seja M_i^* o conjunto das arestas de G^* com a cor i. Então cada M_i^* é um emparelhamento perfeito de G^*.

Considere o grafo $G_1^* := G^* - M_1^*$. Então, cada componente de G_1^* é um circuito, e portanto, as faces de G_1^* admitem uma 2-coloração. Digamos que as cores utilizadas sejam 0 e 1. Cada face de G_1^* é a união de faces de G^* separadas por arestas de M_1^*. Vamos atribuir a cada vértice de G que está em uma face f de G_1^* a mesma cor de f. Repita o processo para $G_2^* := G^* - M_2^*$. Assim, cada vértice de G recebeu duas cores, cada uma das quais em $\{0, 1\}$.

Finalmente, vértices de G que são separados por arestas fora de M_1^* recebem cores distintas na primeira 2-coloração. Vértices que são separados por uma aresta de M_1^* recebem cores distintas na segunda 2-coloração. Se multiplicarmos a primeira cor da face por dois e somarmos com a segunda cor, obtemos uma cor em $\{0, 1, 2, 3\}$. Portanto, as cores atribuídas a cada vértice constituem uma 4-coloração dos vértices de G. ■

A versão de tri-coloração é mais conveniente do que 4-coloração de vértices devido à manipulação de programas de computadores. Portanto, de agora em diante, nossa atenção estará voltada para mostrar que toda triangulação admite uma tri-coloração.

Seja G uma quase-triangulação. Um subconjunto $X \subseteq E(G)$ é *esparso* se toda região triangular é incidente em no máximo uma aresta de X e se G não é triangulação, a região infinita não é incidente nas arestas de X. Se $X \subseteq E(G)$ é esparso, uma *tri-coloração de G módulo X* é um mapeamento $\kappa : E(G) - X \to \{-1, 0, 1\}$ tal que toda região triangular incidente nas arestas e, f, g satisfaz as seguintes condições:

1. se $\{e, f, g\} \cap X = \emptyset$ então $\{\kappa(e), \kappa(f), \kappa(g)\} = \{-1, 0, 1\}$
2. se $g \in X$, então $\kappa(e) = \kappa(f)$.

Assim, uma tri-coloração é uma tri-coloração módulo $\emptyset$.

Teorema 4.1.2 *Seja T um contra-exemplo mínimo, e seja $X \subseteq E(T)$ um conjunto esparso. Suponha que $X \neq \emptyset$, e que não existe circuito C de T tal que $|E(C) - X| = 1$. Então T admite uma tri-coloração módulo X.*

Prova: Seja S o grafo obtido a partir de T mediante a contração das arestas em X. Dado que T é planar, S também é. Como não existe circuito C de T com precisamente uma aresta fora de X, o grafo S não possui laços. O número de vértices e arestas de S é menor do que o de T, pois X não é vazio. Por hipótese, T é um contra-exemplo mínimo. Portanto, S admite uma 4-coloração dos vértices.

Conseqüentemente, existe um mapeamento ϕ que associa a cada vértice de T uma de 4 cores, de forma que dois vértices adjacentes têm a mesma cor se e somente se a aresta que os une pertence a X.

Para cada aresta $e \in E(T) - X$ com extremidades u, v, definimos

$$\kappa(e) = \begin{cases} -1 & \text{se } \{\phi(u), \phi(v)\} = \{1,2\} \text{ ou } \{3,4\} \\ 0 & \text{se } \{\phi(u), \phi(v)\} = \{1,3\} \text{ ou } \{2,4\} \\ 1 & \text{se } \{\phi(u), \phi(v)\} = \{1,4\} \text{ ou } \{2,3\}. \end{cases}$$

Então κ é uma tri-coloração de T módulo X, como veremos a seguir. Seja r uma região triangular de T, incidente nas arestas e, f, g e vértices u, v, w, onde e, f, g têm extremidades uv, vw, uw, respectivamente. Se $\{e, f, g\} \cap X = \emptyset$ então $\phi(u), \phi(v), \phi(w)$ são todos distintos, e então $\{\kappa(e), \kappa(f), \kappa(g)\} = \{-1, 0, 1\}$. Por outro lado, se uma das arestas, digamos g, pertence a X temos que $\phi(u) = \phi(w)$ e então $\kappa(e) = \kappa(f)$. ∎

4.2 Estrias

Seja R um circuito. Uma 3-coloração de R é uma função $\kappa : E(G) \to \{-1, 0, 1\}$. Queremos definir na próxima seção o que chamaremos de conjunto consistente de 3-colorações de R, e para isso apresentaremos inicialmente uma técnica de obtenção de 3-colorações de R que será importante para o entendimento desse conceito.

Seja H uma quase-triangulação 2-conexa. Então existe um circuito

$$R := (v_0, e_1, v_1, ..., e_k, v_k = v_0)$$

sobre a fronteira da região infinita de H. Dizemos que R é o circuito que *contorna* H. Seja κ uma tri-coloração de H. Então a restrição de κ às arestas de R é uma 3-coloração de R. Seja $\theta \in \{-1, 0, 1\}$. Uma *estria* é uma seqüência

$$g_0, r_1, g_1, r_2, ..., r_t, g_t$$

tal que:

- $g_0, g_1, ..., g_t$ são arestas distintas de H,
- $r_1, r_2, ..., r_t$ são regiões distintas e finitas de H,
- g_0 e g_t são ambas incidentes na região infinita de H,

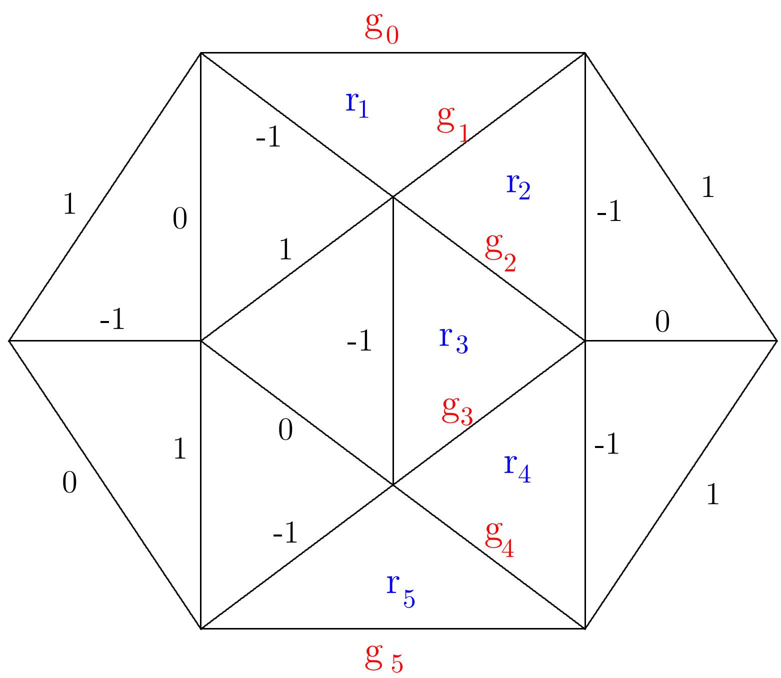


Figura 4.1: A seqüência $g_0, r_1, g_1, r_2, g_2, r_3, g_3, r_4, g_4, r_5, g_5$ é uma estria onde $\theta = -1$.

- para $1 \leq i \leq t$, r_i é incidente em g_{i-1} e com g_i, e
- para $0 \leq i \leq t$, $\kappa(g_i) \neq \theta$.

A Figura 4.1 ilustra o conceito de estria. Em uma estria t em que $\theta = -1$, os valores de $\kappa(g_0), \kappa(g_1), \ldots$ são alternadamente 0 e 1, e $\kappa(e) = -1$ para toda aresta e fora de t que é incidente em uma região de t. Portanto, se trocamos os valores de $\kappa(g_0), \kappa(g_1), \ldots$ obtemos uma nova tri-coloração de H. Esta técnica de obtenção de 3-coloração será útil para o entendimento do conceito de consistência de um conjunto de 3-colorações de um circuito.

Para um θ fixo, quaisquer duas estrias são disjuntas, isto é, não compartilham arestas ou regiões, e para $1 \leq i \leq k$, e_i pertence a uma única estria se $\kappa(e_i) \neq \theta$, e a nenhuma estria se $\kappa(e_i) = \theta$.

4.3 Conjuntos consistentes

Seja R um circuito. Um *par sinalizado* em R é um par (m, μ) onde m é um par de arestas distintas de R e $\mu = 1$ ou $\mu = -1$. Um *emparelhamento sinalizado válido* em R é um conjunto M de pares sinalizados, tal que para quaisquer dois elementos $(\{e, f\}, \mu), (\{e', f'\}, \mu')$ de M, valem as seguintes propriedades:

- $\{e, f\} \cap \{e', f'\} = \emptyset$, e
- e, f pertencem à mesma componente de $R - \{e', f'\}$.

Se M é um emparelhamento sinalizado válido, então $E(M)$ denota

$$\{e \in E(R) : e \in m \text{ para algum } (m, \mu) \in M\}.$$

Para $\theta \in \{-1, 0, 1\}$ e uma 3-coloração κ de R, dizemos que um emparelhamento sinalizado válido M *é compatível* com o par (κ,θ) se

- $E(M) = \{e \in E(R) : \kappa(e) \neq \theta\}$, e
- para cada $(\{e, f\}, \mu) \in M$, $\kappa(e) = \kappa(f)$ se e somente se $\mu = 1$.

Um conjunto $\mathcal{C}$ de 3-colorações de R é *consistente* se para todo $\kappa \in \mathcal{C}$ e todo $\theta \in \{-1, 0, 1\}$ existe um emparelhamento sinalizado válido M que é compatível com (κ, θ), e se κ' é uma 3-coloração de R tal que M é compatível com (κ', θ), então $\kappa' \in \mathcal{C}$.

Como exemplo, suponha que $\mathcal{C}$ é um conjunto consistente de 3-colorações de um circuito $R := (e_1, e_2, \ldots, e_6)$, e suponha que a 3-coloração κ definida por $(\kappa(e_1), \kappa(e_2), \kappa(e_3), \kappa(e_4), \kappa(e_5), \kappa(e_6)) = (1, 0, 1, 1, 1, 0)$ pertence a $\mathcal{C}$. Para simplificar a notação escreveremos $\kappa = 101110$. Para esta 3-coloração, suponha que o emparelhamento sinalizado válido compatível com cada valor de θ é:

- $\theta = -1$: $M = \{(\{e_1, e_6\}, -1), (\{e_2, e_5\}, -1), (\{e_3, e_4\}, 1)\}$
- $\theta = 0$: $M = \{(\{e_1, e_5\}, 1), (\{e_3, e_4\}, 1)\}$
- $\theta = 1$: $M = \{(\{e_2, e_6\}, 1)\}$.

Para cada θ, se trocarmos as cores de um ou mais pares de arestas de M entre si obteremos uma nova 3-coloração κ' tal que M é compatível com (κ',θ). Por exemplo, apenas considerando $\theta = -1$, M é também compatível com (κ',θ), onde κ' é uma das seguintes 3-colorações de R: 001111, 111100, 100010, 011101, 000011, 110000 e 010001. Portanto, $\mathcal{C}$ deve conter também esse conjunto de 3-colorações de R.

O conjunto vazio é consistente, e a união de dois conjuntos consistentes é consistente. Portanto, qualquer conjunto de 3-colorações de um circuito está contido em um único conjunto consistente maximal.

Quase-triangulações 2-conexas possuem a seguinte propriedade referente a conjuntos consistentes.

Teorema 4.3.1 *Seja H uma quase-triangulação 2-conexa, e seja R o circuito que contorna H. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as 3-colorações de R que são restrições de tri-colorações de H. Então $\mathcal{C}$ é consistente.*

Prova: Sejam $e_1, ..., e_k$ as arestas de R. Seja $\kappa \in \mathcal{C}$, e seja $\theta \in \{-1, 0, 1\}$. Visto que $\kappa \in \mathcal{C}$, κ é uma restrição para R de alguma tri-coloração κ de H.

Associamos a cada estria $g_0, r_1, g_1, r_2, ..., r_t, g_t$ de H um par sinalizado $(\{g_0, g_t\}, \mu)$, onde $\mu = +1$ ou $\mu = -1$, dependendo da paridade de t (ou equivalentemente, dependendo da igualdade ou não das cores $\kappa(g_0)$ e $\kappa(g_t)$). O conjunto de todos os pares sinalizados é um emparelhamento sinalizado válido M que é compatível com (κ,θ).

Seja κ' uma 3-coloração de R tal que M é compatível com (κ',θ). Possivelmente, trocando as cores de κ' em algumas estrias de H podemos construir uma tri-coloração κ'' de H cuja restrição para $\{e_1, ..., e_k\}$ é κ'. Então κ' é a restrição de κ'' às arestas de R, e então $\kappa' \in \mathcal{C}$. Portanto, $\mathcal{C}$ é consistente. ∎

4.4 Completamento

Seja K uma configuração. Uma quase-triangulação S é um *completamento* de K com anel R se

1. R é um circuito induzido de S e limita a região infinita de S,
2. $G(K)$ é um subgrafo induzido de S, ou seja, $G(K) = S \backslash V(R)$.
3. todo vértice v de $S \backslash V(R)$ tem grau $\gamma_K(v)$ em S.

A Figura 4.2 mostra o completamento S da configuração (1,1,1) do Apêndice C. A partir da definição de configuração, não é difícil mostrar que toda configuração possui um completamento (é aqui que é necessário o uso da terceira condição da definição de configuração). Na verdade, é possível mostrar que o completamento de uma configuração é único. Portanto, podemos dizer "o" completamento sem ambigüidades.

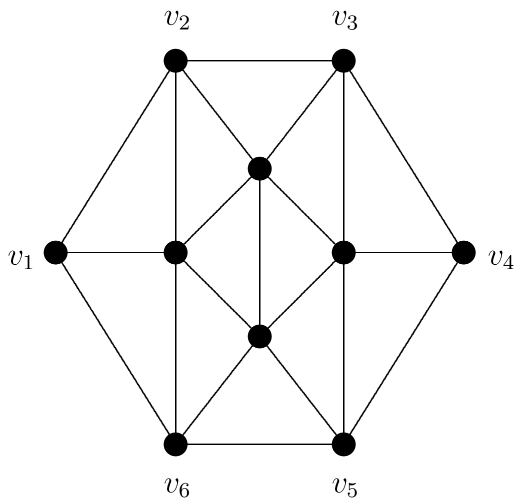


Figura 4.2: O completamento da configuração (1,1,1).

4.5 Redutibilidade

Seja S o completamento de uma configuração K com anel R. Seja $\mathcal{C}^*$ o conjunto de todas as 3-colorações de R, e seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$ o conjunto de todas as restrições para $E(R)$ de tri-colorações de S. Seja $\mathcal{C}'$ o subconjunto maximal consistente de $\mathcal{C}^* - \mathcal{C}$. A configuração K é *D-redutível* se $\mathcal{C}' = \emptyset$. Se $\mathcal{C}' \neq \emptyset$, necessitamos analisar um outro tipo de redução.

Seja K uma triangulação e seja S o completamento de K com anel R. Seja $X \subseteq E(S) - E(R)$. Dizemos que X é um *contrato* para K se $X \neq \emptyset$, X é esparso em S e nenhuma 3-coloração de $\mathcal{C}'$ é restrição para $E(R)$ de uma tri-coloração de S módulo X.

Teorema 4.5.1 *Para cada uma das 633 configurações K do Apêndice C, seja X o conjunto de arestas do completamento de K desenhadas mais espes-*

sas na figura. Se $X = \emptyset$, então K é D-redutível. Caso contrário, $1 \leq |X| \leq 4$, e X é um contrato para K.

Este teorema foi demonstrado utilizando um computador, utilizando um programa que computa o conjunto $\mathcal{C}'$ para cada uma das 633 configurações. Dada uma configuração K, mostramos que se $X = \emptyset$, então $\mathcal{C}' = \emptyset$. Caso contrário, computamos o conjunto $\mathcal{C}_X$ de todas as 3-colorações de R que são restrições de tri-colorações de S módulo X, e mostramos que $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}_X = \emptyset$. Todos os passos seguidos pelo programa estão no Apêndice A.

Seja G um grafo plano, $v \in V(G)$ e $e \in E(G)$. Dizemos que e é *frontal* a v se e não é incidente em v e existe uma região triangular finita de G incidente em e e v. Se S é o completamento de uma configuração K, e $X \subseteq E(S)$ é esparso em S com $|X| = 4$, um vértice v de S é uma *tríade* para X se

- $v \in V(G(K))$,
- existem pelo menos três vértices de S que são adjacentes a v e incidentes em um membro de X, e
- se $\gamma_K(v) = 5$, então nem todo membro de X é frontal a v.

Seja T uma triangulação. Dizemos que um circuito C de T é *curto* se $V(C)$ é um corte de vértices de tamanho máximo 4 ou $V(C)$ é um corte de vértices não periférico de tamanho 5. Note que uma triangulação internamente 6-conexa não contém um circuito curto.

Teorema 4.5.2 *Seja K uma configuração aparecendo em uma triangulação T, seja S o completamento de K. Seja $X \subseteq E(S)$ esparso em S com $|X| \leq 4$, tal que se $|X| = 4$ existe uma tríade para X. Se existe um circuito C de T com $|E(C) - X| \leq 1$, então existe um circuito curto em T.*

Prova: Seja $X' = X \cap E(C)$. Visto que X é esparso em S, nenhuma aresta de X é incidente na região infinita de S, e consequentemente toda aresta em X é incidente nas duas regiões distintas e finitas de S. Por hipótese, $|E(C)| \leq |X| + 1 \leq 5$. Então, se denotarmos por Δ a região interna de C, teremos $|\Delta \cap V(T)| \leq 1$, e com $\Delta \cap V(T) = \emptyset$ se $|E(C)| \leq 4$. Mas toda aresta de X' é incidente num triângulo de T incluído em Δ, e todos estes triângulos são distintos visto que X' é esparso em T. Consequentemente, Δ inclui pelo menos $|X'| \geq |E(C)| - 1$ triângulos de T. Se $|E(C)| \leq 4$, então isto é impossível visto que $\Delta \cap V(T) = \emptyset$; e então $|E(C)| = 5$, $|X| = 4$, existe um único vértice t de T em Δ, $d_T(t) = 5$, e toda aresta de C é frontal a t em T.

Visto que $|X| = 4$, existe uma tríade $v \in V(S)$ para X, por hipótese. E assim, $d_K(v) \geq 6$ ou alguma aresta de X não é frontal a v em S. Em ambos os casos, $v \neq t$. Visto que v tem pelo menos três vizinhos distintos em C, e todo vértice de C é adjacente a t, segue que T tem um circuito curto, como desejado. ∎

Teorema 4.5.3 *Seja K uma configuração do Apêndice C, seja S o seu completamento, e seja X o conjunto de arestas de S mostradas mais espessas na figura. Se $|X| = 4$, existe uma tríade para X.*

Para provar este teorema, podemos examinar individualmene todas as configurações no Apêndice C. Para a maioria delas, $|X| \leq 3$, e assim, esta tarefa não é tão difícil quanto parece. Provamos a seguir o principal teorema deste capítulo.

Teorema 4.5.4 *Se T é um contra-exemplo mínimo, então nenhuma boa configuração aparece em T.*

Prova: Suponha que K é uma boa configuração que aparece em T. Seja S o completamento de K, com anel R. Seja X o conjunto de arestas de S correspondente àquelas desenhadas mais espessas. Seja H o desenho planar obtido de T pela remoção de $V(G(K))$ e designando como infinita a região de H incluindo $V(G(K))$. Então, H é uma quase-triangulação e R é o circuito que contorna H.

Seja $\mathcal{C}^*$ o conjunto de todas as 3-colorações de R, e seja $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}^*$ o conjunto de todas as 3-colorações R que são restrições de tri-colorações de H. Pelo teorema 4.3.1, $\mathcal{C}_1$ é consistente. Seja $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}^*$ o conjunto de todas as restrições para $E(R)$ de tri-colorações de S. Visto que T não admite tri-colorações, pelo teorema 4.1.1 segue que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$. Seja $\mathcal{C}_3$ o subconjunto maximal consistente de $\mathcal{C}^* - \mathcal{C}_2$. Visto que $\mathcal{C}_1$ é consistente e $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$, segue que $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_3$.

É possível adicionar arestas a H, ligando vértices não adjacentes da região infinita, e criar uma triangulação T'. Como T é um contra-exemplo mínimo, segue que T', e portanto H, admitem uma tri-coloração. Consequentemente, $\mathcal{C}_1 \neq \emptyset$ e então $\mathcal{C}_3 \neq \emptyset$, e então K não é D-redutível. Pelo teorema 4.5.1, $1 \leq |X| \leq 4$ e X é um contrato para K. Então X é esparso em S, e pelo teorema 2.5.1, T não possui um circuito curto.

Pelos teoremas 4.5.2 e 4.5.3, não existe circuito C de T com $|E(C) - X| = 1$. Portanto, pelo teorema 4.1.2, T admite uma tri-coloração módulo X, digamos κ. A restrição de κ para $E(H)$ é uma tri-coloração de H, visto que $X \cap E(H) = \emptyset$; e então sua restrição para $E(R)$ pertence a $\mathcal{C}_1$ e portanto a $\mathcal{C}_3$. Mas a restrição de κ às arestas de S é uma tri-coloração de S módulo X. Isto contradiz o fato de que X é um contrato para S, e isto termina a demonstração. ■

Capítulo 5

Inevitabilidade

O objetivo deste capítulo é demonstrar o teorema 2.5.3, ou seja, que para toda triangulação internamente 6-conexa T, alguma boa configuração aparece em T. A idéia geral que será utilizada é a seguinte.

Seja T uma triangulação internamente 6-conexa. Inicialmente, a cada vértice de T será atribuída uma carga de $10 - (6 - d(v))$, onde $d(v)$ representa o grau de v. Segue da fórmula de Euler que a soma das cargas de todos os vértices é 120 (seção 5.1). Em particular, é positiva. A seguir, haverá uma redistribuição das cargas entre os vértices de acordo com as regras que serão definidas na seção 5.2. Este procedimento define um novo conjunto de carga nos vértices, mas com a mesma soma total. Como a soma total é positiva, existe um vértice v cuja nova carga é positiva. A idéia agora é mostrar que uma boa configuração aparece no subgrafo induzido pelos vértices cuja distância a v é no máximo dois.

Uma prova completa será apresentada para os casos em que v tem grau no máximo seis (seção 5.3) ou pelo menos doze (seção 5.4). Para os demais casos, a prova torna-se muito complicada devido ao número de casos a serem examinados, e essa parte pode ser feita utilizando um computador, o que não foi feito neste trabalho. No apêndice B, apresentamos mais detalhes sobre os demais casos.

5.1 Passagens

Na seção 2.4, introduzimos o conceito de configuração aparecendo em uma triangulação. Introduziremos agora um conceito bem parecido com este.

Uma configuração K *aparece em uma configuração* L, se $G(K)$ é um subgrafo induzido de $G(L)$ e $\gamma_K(v) = \gamma_L(v)$ para todo $v \in V(G(K))$. Um exemplo de uma configuração K aparecendo em uma configuração L pode ser visto na Figura 5.1.

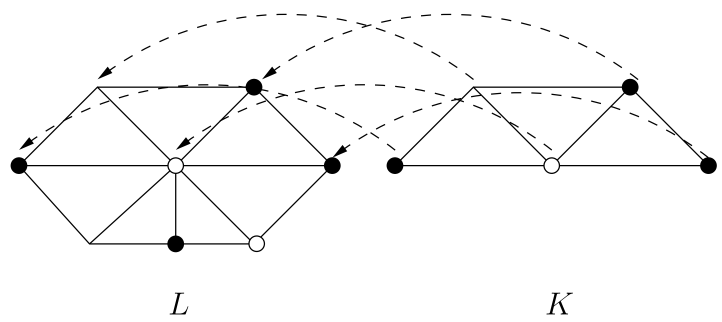


Figura 5.1: Configuração K aparece na configuração L.

Seja T uma triangulação internamente 6-conexa, e seja v um vértice de T. Seja S o conjunto dos vértices de T cuja distância a v é no máximo 2. Seja W a configuração tal que $G(W)$ é o subgrafo de T induzido pelos vértices de S tal que $\gamma_W(v) = d_T(v)$, para $v \in V(G(W))$. Chamamos a configuração W de *vizinhança* de v em T. Dizemos que v é o *centro* de W. A Figura 5.2 mostra a vizinhança de um vértice v.

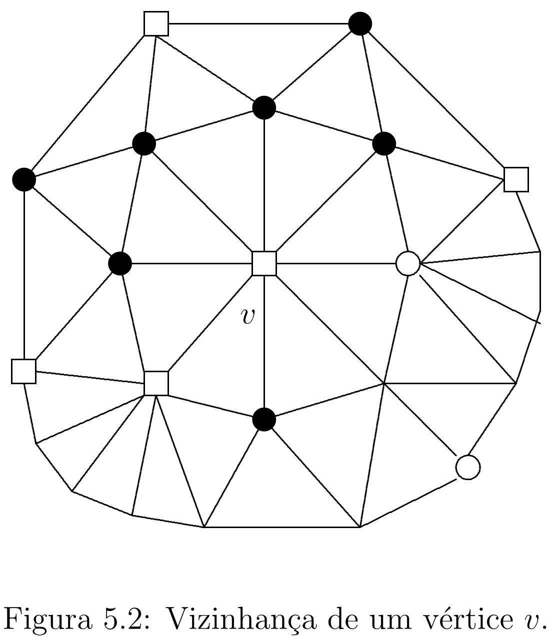


Figura 5.2: Vizinhança de um vértice v.

Uma *passagem* P é uma quádrupla (K, r, s, t), onde

(i) K é uma configuração,

(ii) r é um inteiro positivo,

(iii) s e t são vértices adjacentes distintos de $G(K)$, e

(iv) para cada $v \in V(G(K))$ existe um caminho ligando s a v, e um caminho ligando t a v em $G(K)$, ambos de comprimento no máximo 2.

Escrevemos $r(P)$, $s(P)$, $t(P)$ e $K(P)$ para representar os parâmetros de uma passagem P. Quando P estiver subentendido usaremos apenas r, s, t e K para simplificar $r(P)$, $s(P)$, $t(P)$ e $K(P)$, respectivamente. Chamamos r de *valor* da passagem, s de *fonte* e t de *sorvedouro.*

Uma passagem $P = (K, r, s, t)$ *aparece em uma triangulação* T se K aparece em T. Uma passagem $P = (K, r, s, t)$ *aparece em uma configuração* L se K aparece em L.

Seja T uma triangulação, e seja $P = (K, r, s, t)$ uma passagem. Para cada vértice v de T definimos uma função $\theta_T(v)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\theta_T(v) = 10(6 - d_T(v)) \;&+\; \sum(r(P) : P \text{ aparece em } T, t(P) = v)\\ &-\; \sum(r(P) : P \text{ aparece em } T, s(P) = v).\end{aligned}$$

Observe que $\theta_T(v)$ depende apenas da vizinhança de v em T.

Teorema 5.1.1 *Para toda triangulação* T, $\displaystyle\sum_{v \in V(T)} \theta_T(v) = 120.$

Prova: Seja P uma passagem aparecendo em T. Logicamente, $s(P) = v$ para algum $v \in V(T)$, ou seja, toda passagem P que aparece em T tem que ter fonte s em algum vértice v de T. Segue daí que

$$\sum(r(P) : P \text{ aparece em } T) = \sum_{v \in V(T)} \sum(r(P) : P \text{ aparece em } T, s(P) = v).$$

A mesma observação vale para o sorvedouro $t(P)$. Logo, a equação acima ainda é verdadeira com $s(P)$ trocado por $t(P)$, e consequentemente,

$$\sum_{v \in V(T)} (r(P) : P \text{ aparece em } T, s(P) = v) = \sum_{v \in V(T)} (r(P) : P \text{ aparece em } T, t(P) = v).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V(T)} \theta_T(v) &= \sum_{v \in V(T)} 10(6 - d_T(v)) \\ &= 60|V(T)| - 10 \sum_{v \in V(T)} d_T(v).\end{aligned}$$

Segue da fórmula de Euler que $\sum_{v \in V(T)} d_T(v) = 2|E(T)| = 6|V(T)| - 12$, e assim

$$\sum_{v \in V(T)} \theta_T(v) = 60|V(T)| - 10(6|V(T)| - 12) = 120,$$

como queríamos demonstrar. ■

Segue do Teorema 5.1.1 que existe um vértice v de T com $\theta_T(v) > 0$, e o teorema que queremos demonstrar é:

Teorema 5.1.2 *Se v é um vértice de uma triangulação internamente 6-conexa T com $\theta_T(v) > 0$, então uma boa configuração aparece na vizinhança de v em T.*

5.2 O conjunto de regras

Uma *regra* é uma sêxtupla $(G, \beta, \delta, r, s, t)$, onde

(i) G é uma quase-triangulação 2-conexa.

(ii) $\beta : V(G) \longrightarrow Z_+$ e $\delta : V(G) \longrightarrow Z_+ \cup \{\infty\}$ são funções satisfazendo $\beta(v) \leq \delta(v)$ para todo vértice v.

(iii) r é um inteiro positivo, e

(iv) s e t são vértices adjacentes distintos de G, e para todo $v \in V(G)$ existe um caminho de v a s e um caminho de v a t de comprimento ≤ 2.

Vamos estender as convenções da Figura 2.1 para descrever regras. As possibilidades que serão necessárias para os nossos propósitos, para cada par $(\beta(v), \delta(v))$, são as seguintes:

(a) $5 \leq \beta(v) = \delta(v) \leq 8$, ou

(b) $\beta(v) = 5$ e $6 \leq \delta(v) \leq 8$, ou

(c) $5 \leq \beta(v) \leq 8$ e $\delta(v) = \infty$.

Descrevemos o caso (a) utilizando as mesmas convenções da Figura 2.1. Para o caso (b), utilizamos as mesmas convenções para indicar um vértice v com $\gamma(v) = \delta(v)$ e adicionamos a figura um sinal "-" perto do vértice v. Similarmente, para o caso (c) utilizamos as convenções da Figura 2.1 para indicar o vértice v com $\gamma(v) = \beta(v)$ e adicionamos um sinal "+" perto do vértice v.

Para cada regra, indica-se r, s e t marcando-se a aresta incidente em s e t com uma seta simples (se $r = 1$) ou seta dupla (se $r = 2$), direcionada de s para t. A Figura 5.3 descreve um conjunto $\mathcal{R}$ de 32 regras. Estas serão referenciadas por números de 1 a 32 por ordem de linhas e da esquerda para a direita. Por exemplo, a regra 1 é a que está no canto superior esquerdo da figura. Esta é a única regra em que $r = 2$.

A maioria das regras foram obtidas por tentativa e erro. Existe muita flexibilidade na escolha, e apenas as sete primeiras foram construídas com base em interpretação geométrica.

Uma passagem $P = (K, r, s, t)$ *obedece* uma regra $R = (G, \beta, \delta, r, s, t)$ se $G(K)$ é isomorfo a G, e $\beta(v) \leq \gamma_k(v) \leq \delta(v)$ para todo vértice $v \in V(G)$.

A demonstração do Teorema 5.1.2 é dividida em três partes, mostradas nas 3 seções seguintes. Os casos são baseados no grau de um vértice v tal que $\theta_T(v) > 0$: grau no máximo 6, grau no mínimo 12, e grau de 7 a 11. Os 3 casos serão detalhados nos teoremas 5.3.2, 5.4.2 e 5.5.1, respectivamente.

5.3 Parte 1 - Grau no máximo 6

Para este caso é preciso o seguinte lema.

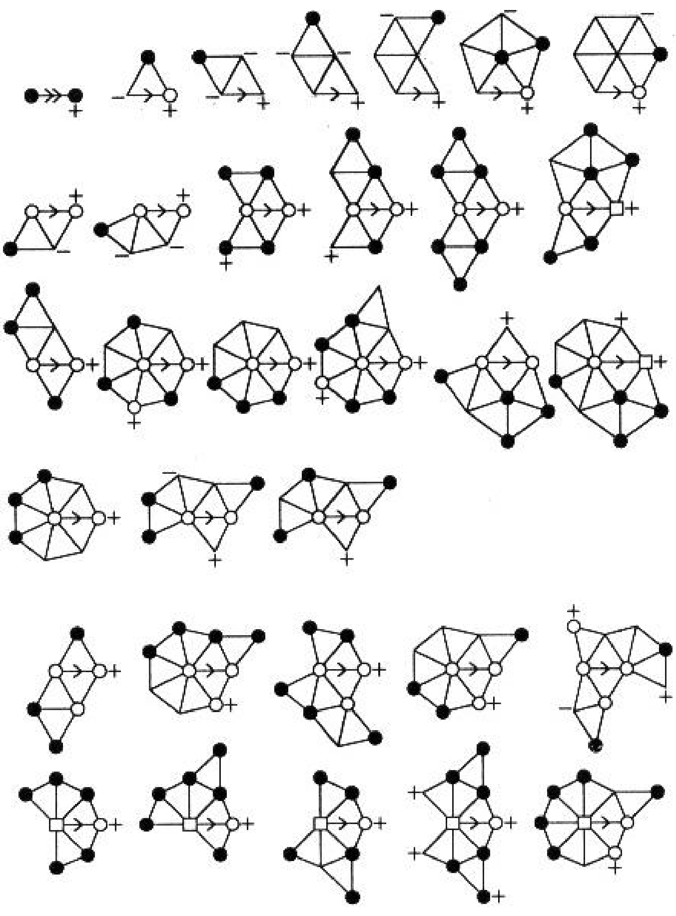


Figura 5.3: O conjunto de regras.

Lema 5.3.1 *Seja v um vértice de grau 5 ou 6 e W sua vizinhança. Para $k = 1, \ldots, 32$ seja p_k (respectivamente, q_k) a soma de $r(P)$ sobre todas as passagens P obedecendo a regra k e aparecendo em W com sorvedouro (respectivamente, fonte) v. Suponha que nenhuma boa configuração aparece em W. Então:*

(*i*) $p_1 = q_2 + q_3$

(*ii*) $p_3 = q_4$

(*iii*) $p_4 = q_5 + q_6$, e

(*iv*) $p_5 = q_7$.

Prova: Seja X o conjunto de todas as triplas (x, y, z) de vizinhos de v em W tal que x, y, z são todos distintos, y é adjacente a ambos x e z, e $\gamma_W(x) = 5$. A Figura 5.4 ilustra graficamente os elementos de X.

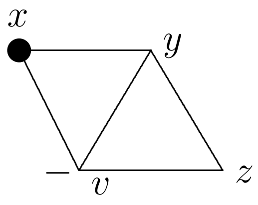


Figura 5.4: Elementos do conjunto X ($\gamma_W(y)$ e $\gamma_W(z)$ são irrelevantes).

Então $p_1 = |X|$, pois cada vez que uma passagem P obedecendo a regra 1 aparece em W com sorvedouro v ele contribui com duas unidades para a computação de p_1; por outro lado, P sempre aparece em exatamente dois elementos distintos de X. A Figura 5.5 mostra essa igualdade.

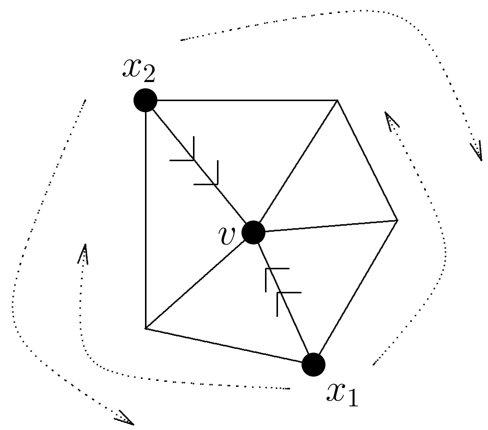


Figura 5.5: $p_1 = 4$ e $|X| = 4$ (observe a orientação das setas).

Sejam X_1 o conjunto de triplas $(x, y, z) \in X$ com $\gamma_W(y) \geq 7$, X_2 o conjunto de triplas $(x, y, z) \in X$ com $\gamma_W(y) \leq 6$ e $\gamma_W(z) \geq 6$, e X_3 o conjunto de triplas $(x, y, z) \in X$ com $\gamma_W(y) \leq 6$ e $\gamma_W(z) = 5$. A Figura 5.6 ilustra os subconjuntos X_1, X_2 e X_3 de X. Então $q_2 = |X_1|$ e $q_3 = |X_2|$.

Observe que $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ e $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Além disso, $X_3 = \emptyset$, pois as configurações $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$ e $(1, 1, 4)$ não aparecem em W por hipótese. Logo, $|X| = |X_1| + |X_2| = q_2 + q_3$, ou seja, $p_1 = q_2 + q_3$, o que prova (i).

Se $\gamma_W(v) = 5$ temos que:

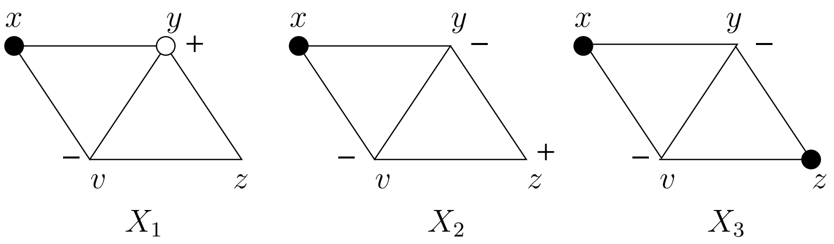


Figura 5.6: Subconjuntos X_1, X_2 e X_3 de X.

$p_3 = p_4 = p_5 = 0$, pois as passagens que obedecem as regras 3, 4 e 5 têm sorvedouro t com $\gamma(t) \geq 6$, logo nenhuma passagem, obedecendo uma dessas regras, aparece em W com sorvedouro v.

$q_4 = q_5 = q_6 = q_7 = 0$, pois as passagens que obedecem as regras 4, 5, 6 e 7 têm fonte t com $\gamma(s) = 6$, logo nenhuma passagem, obedecendo uma dessas regras, aparece em W com fonte v.

Portanto (ii), (iii), (iv) são verdadeiras.

Agora assuma que $\gamma_W(v) = 6$.

Seja agora X o conjunto de todas as triplas (x, y, z) de vizinhos de v em W tal que x, y, z são todos distintos, y é adjacente a ambos x e z, $\gamma_W(x) \leq 6$, $\gamma_W(y) \leq 6$, e $\gamma_W(u) = 5$, onde u é o vértice diferente de v adjacente a ambos x e y. A Figura 5.7 ilustra os elementos de X.

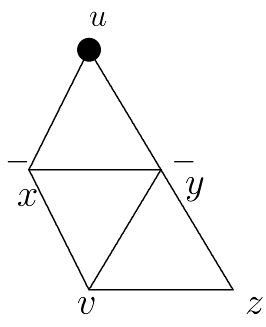


Figura 5.7: Elementos do conjunto X ($\gamma_W(z)$ é irrelevante).

Então $p_3 = |X|$, pois todo elemento de X contém uma passagem obedecendo a regra 3 com sorvedouro em v, e vice-versa.

Para cada tripla de X temos que ter $\gamma_W(z) \geq 6$, uma vez que as configurações $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 4)$, $(1, 1, 5)$ e $(1, 1, 7)$ não aparecem em W por hipótese. Segue daí que $q_4 = |X|$, o que prova (ii).

Agora defina X como sendo o conjunto de todas as triplas (x, y, z) de vizinhos de v tal que x, y, z são todos distintos, y é adjacente a ambos x e z, $\gamma_W(x) = 6$, $\gamma_W(y) \leq 6$, $\gamma_W(z) = 7$, $\gamma_W(u) \leq 6$, onde u é o vértice diferente de v adjacente a ambos x e y, e $\gamma_W(w) = 5$, onde w é um vértice diferente de x e adjacente a u e y. A Figura 5.8 ilustra os elementos de X.

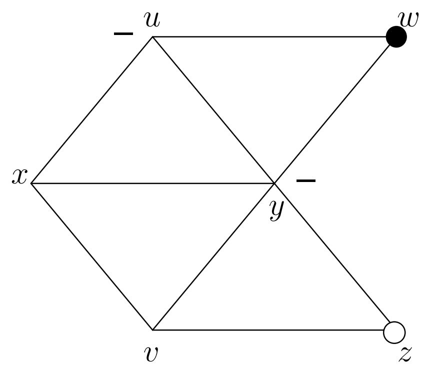


Figura 5.8: Exemplo de um elemento do conjunto X.

Como cada tripla de X tem uma passagem obedecendo a regra 4 com sorvedouro em v, temos que $p_4 = |X|$.

Sejam X_1 o conjunto das triplas X com $\gamma_W(y) = 5$ e $\gamma_W(z) \geq 7$, e X_2 o conjunto das triplas de X com $\gamma_W(y) = 6$ e $\gamma_W(z) = 6$. A Figura 5.9 ilustra os subconjuntos X_1 e X_2 de X.

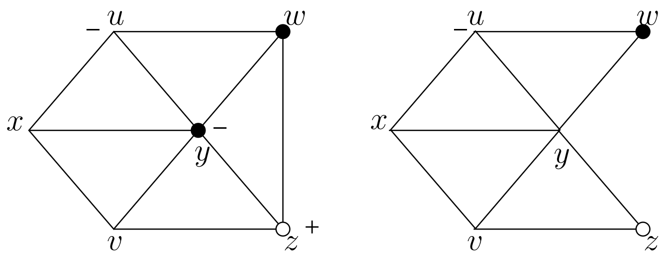


Figura 5.9: Subconjuntos X_1 e X_2 de X.

Então $q_6 = |X_1|$ e $q_5 = |X_2|$. Como $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, temos que $|X| = q_5 + q_6 = p_4$. O que prova (iii).

Seja P uma passagem obedecendo a regra 5 com sorvedouro v. Não é difícil ver que P obedece a regra 7 com fonte v. Por outro lado, uma passagem obedecendo a regra 7 com fonte v também obedece a regra 5 com sorvedouro v. Portanto $p_5 = q_7$. ■

Teorema 5.3.2 *Seja v um vértice de uma triangulação internamente 6-conexa T com $\theta_T(v) > 0$, e $d(v) = 5$ ou $d(v) = 6$. Então uma boa configuração aparece na vizinhança W de v em T.*

Prova: Defina p_k e q_k para $k = 1, \ldots, 32$ como no Lema 5.3.1. Suponha que nenhuma boa configuração aparece em W.

Suponha inicialmente que $\gamma_W(v) = 5$. Então $p_k = 0$ para $k = 2, \ldots, 32$, pois nenhuma passagem obedecendo quaisquer dessas regras tem $\gamma(t) = 5$; e $q_k = 0$ para $k = 4, \ldots, 32$, pois nenhuma passagem obedecendo quaisquer dessas regras tem $\gamma(s) = 5$. Segue então que

$$\begin{aligned}
\theta_T(v) &= 10(6 - d_T(v)) + \sum (r(P) : P \text{ aparece em } T, t(P) = v) \\
&\qquad - \sum (r(P) : P \text{ aparece em } T, s(P) = v) \\
&= 10(6-5) + \sum_1^{32} p_k - \sum_1^{32} q_k \\
&= 10 + p_1 + \underbrace{p_2 + \cdots + p_{32}}_{0} - q_1 - q_2 - q_3 - \underbrace{q_4 - \cdots - q_{32}}_{0}
\end{aligned}$$

Por (i) temos
$$\theta_T(v) = 10 - q_1.$$

Como $\gamma_W(v) = 5$, temos $q_1 = 2 \times 5 = 10$. Logo $\theta_T(v) = 0$, o que é uma contradição.

Suponha agora que $\gamma_W(v) = 6$. Então $p_2 = 0$ e $p_k = 0$ para $k = 6, \ldots, 32$, pois nenhuma passagem obedecendo quaisquer dessas regras tem $\gamma(t) = 6$; e $q_1 = 0$ e $q_k = 0$ para $k = 8, \ldots, 32$, pois nenhuma passagem obedecendo quaisquer dessas regras tem $\gamma(s) = 6$. Segue então que

$$\theta_T(v) = p_1 + p_3 + p_4 + p_5 - q_2 - q_3 - q_4 - q_5 - q_6 - q_7.$$

Pelo Lema 5.3.1, temos que $\theta_T(v) = 0$, o que é uma contradição. ■

5.4 Parte 2 - Grau no mínimo 12

Para provar o Teorema 5.1.2 no caso em que $d_T(v) \geq 12$, é preciso o seguinte lema.

Lema 5.4.1 *Seja W a vizinhança de um vértice v de grau no mínimo 12, e seja w um vizinho de v. Se nenhuma boa configuração aparece em W, então a soma dos $r(P)$ de todas as passagens P, que obedecem alguma regra da Figura 5.3, aparecendo em W com fonte w e sorvedouro v é no máximo 5.*

Prova: Para $k = 1, \dots, 32$, seja R_k a soma dos $r(P)$ de todas as passagens P obedecendo a regra k, aparecendo em W com fonte w e sorvedouro v. Seja $R = R_1 + \cdots + R_{32}$. Devemos mostrar que $R \leq 5$. Observamos que para cada k, $R_k \leq 2$, visto que $r(P) \leq 2$ e no máximo uma passagem, obedecendo a regra 1, pode aparecer em W com fonte w e sorvedouro v.

Primeiramente, suponha que $\gamma_W(w) = 5$. Então $R_1 = 2$, e $R = 2 + R_2 + R_3$, visto que as outras regras têm $\gamma(s) \geq 6$. Se $R_2 = 2 = R_3$, então a configuração $(1, 1, 1)$ aparece em W, como mostra a Figura 5.10, logo $R_2 + R_3 \leq 3$. Daí

$$R = 2 + R_2 + R_3 \leq 5.$$

Suponha agora seja $\gamma_W(w) = 6$. Então

$$R = R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7,$$

visto que a regra 1 tem $\gamma(s) = 5$ e as regras $8, \dots, 32$ têm $\gamma(s) \geq 7$.

Se $R_4 = 2$, uma das configurações $(1, 1, 3)$, $(1, 1, 6)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 4)$, $(1, 3, 1)$ aparece em W, como mostra a Figura 5.11. Além disso, as passagens que obedecem as regras 3, 5 e 6 não podem aparecer ao mesmo tempo em W com fonte w e sorvedouro v, bem como as passagens que obedecem as regras 2 e 7. Logo,

$$R_3 + R_5 + R_6 \leq 2 \quad \text{e} \quad R_2 + R_7 \leq 2.$$

Portanto $R \leq 2 + 2 + 1 = 5$.

Se $\gamma_W(w) \geq 9$ então $R = 0$, pois todas as regras de 1 a 32 têm $\gamma(s) \leq 8$.

Seja $\gamma_W(w) = 8$. Então

$$R = R_{28} + R_{29} + R_{30} + R_{31} + R_{32},$$

visto que as regras de 1 a 27 têm $\gamma(s) \leq 7$.

Se $R_{29} = 2$, a configuração $(5, 7, 2)$ aparece em W, e se $R_{28} = 2$ então $R_{29} = 0$, senão a configuração $(5, 7, 2)$ novamente aparece em W. Além disso, as passagens que obedecem as regras 30, 31 e 32 não podem aparecer ao mesmo tempo em W com fonte w e sorvedouro v. Temos então que

$$R_{30} + R_{31} + R_{32} \leq 1 \quad \text{e} \quad R_{28} + R_{29} \leq 2.$$

Portanto, $R \leq 1 + 2 = 3$.

Finalmente, seja $\gamma_W(w) = 7$. Este caso é dividido em vários subcasos. Sejam u_1 e u_2 os dois vértices adjacentes a ambos w e v, e seja $\gamma_W(u_1) = c_1$ e $\gamma_W(u_2) = c_2$. Por simetria, podemos assumir que $c_1 \leq c_2$.

Primeiro, suponha que $c_1 = c_2 = 5$. Então

$$R = R_8 + R_9 + R_{10} + R_{11} + R_{12} + R_{13},$$

visto que as outras regras ou têm $\gamma(s) \neq 7$, ou têm $\gamma(s) = 7$, mas c_1 ou c_2 diferente de 5.

Observe inicialmente que $R_{12} + R_{13} \leq 1$. Se $R_{10} \geq 1$, então $R_{10} = 1$, $R_8 \leq 2$, $R_9 \leq 1$ (pois a configuração $(1, 4, 3)$ não aparece em W) e $R_{11} = 0$. Logo $R \leq 2 + 1 + 1 + 1 = 5$.

Senão, se $R_{10} = 0$, então $R_{12} = R_{13} = 0$ (pois se uma passagem, obedecendo as regras 12 ou 13, aparece em T, com fonte w e sorvedouro v, inevitavelmente uma passagem obedecendo a regra 10 também irá aparecer) e $R_8 \leq 1$ (pois se $R_8 = 2$ certamente $R_{10} \neq 0$). Como $R_9 \leq 2$ e $R_{11} \leq 1$, temos que $R \leq 1 + 2 + 1 = 4$.

Agora, suponha que $c_1 = 5$ e $c_2 = 6$. Então

$$R = R_8 + R_9 + R_{14} + R_{15} + R_{16} + R_{17} + R_{18} + R_{19}.$$

Observe que $R_{16} + R_{18} \leq 1$, e se $R_8 = 2$ então $R_{16} + R_{18} = 0$. Logo, $R_8 + R_{16} + R_{18} \leq 2$. Além disso, $R_9 \leq 1$ (pois as configurações $(1, 4, 3)$ e $(1, 4, 5)$ não aparecem em W), $R_{14} + R_{19} \leq 1$, $R_{15} + R_{17} \leq 1$. Logo $R \leq 2 + 1 + 1 + 1 = 5$.

Agora, suponha que $c_1 = c_2 = 6$. Então

$$R = R_8 + R_9 + R_{20} + R_{21} + R_{22}.$$

Como $R_9 \leq 2$, $R_8 + R_{21} \leq 2$ (pois a configuração $(1, 4, 3)$ não aparece em W) e $R_{20} + R_{22} \leq 1$, temos que $R \leq 2 + 2 + 1 = 5$.

Agora, suponha que $c_1 = 5$ e $c_2 \geq 7$. Então

$$R = R_8 + R_9 + R_{18} + R_{19} + R_{23} + R_{24} + R_{25}.$$

Como $R_8 \leq 1$, $R_9 \leq 1$, $R_{18} + R_{19} \leq 1$ e $R_{23} + R_{24} + R_{25} \leq 1$, temos que $R \leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

Finalmente, suponha que $c_1 \geq 6$ e $c_2 \geq 7$. Então

$$R = R_8 + R_9 R_{21} + R_{22} + R_{26} + R_{27}.$$

Como $R_8 \leq 1$ e $R_9 \leq 1$, $R_{21} + R_{22} \leq 1$ e $R_{26} + R_{27} \leq 1$, temos que $R \leq= 4$.

Isso prova o caso em que $\gamma_W(w) = 7$, e assim completamos a prova. ∎

Teorema 5.4.2 *Seja v um vértice de uma triangulação internamente 6-conexa T com $\theta_T(v) > 0$, e $d(v) \geq 12$. Então uma boa configuração aparece na vizinhança W de v em T.*

Prova: Suponha, por absurdo, que nenhuma boa configuração aparece em W. Seja $\gamma_T(v) = d$ e seja D o conjunto dos vizinhos de v. Para cada $w \in D$, seja $R(w)$ a soma dos $r(P)$ de todas as passagens P, que obedecem alguma regra da Figura 5.3, aparecendo em W com fonte w e sorvedouro v. Pelo Lema 5.4.1, $\sum\limits_{w \in D} R(w) \leq 5d$. Logo,

$$\begin{aligned}
\theta_T(v) = 10(6-d) \;&+\; \sum (r(P) : P \text{ aparece em } T, t(P) = v) \\
&-\; \sum (r(P) : P \text{ aparece em } T, s(P) = v) \\
\leq 10(6-d) \;&+\; \sum (r(P) : P \text{ aparece em } T, t(P) = v) \\
= 10(6-d) \;&+\; \sum_{w \in D} R(w) \\
\leq 10(6-d) \;&+\; 5d \;=\; 60 - 5d \;\leq\; 0,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. ∎

5.5 Parte 3 - Grau entre 7 e 11

Teorema 5.5.1 *Seja v um vértice de uma triangulação internamente 6-conexa T com $\theta_T(v) > 0$, e $d(v) = 7, 8, 9, 10$ ou 11. Então uma boa configuração aparece na vizinhança de v em T.*

Para cada um dos cinco casos, existe uma prova. Infelizmente, elas são muito longas para serem verificadas à mão. Entretanto um computador pode verificá-las em poucos minutos. Todos os programas e suas especificações estão disponíveis no endereço http://www.math.gatech.edu/FC/ftpinfo.html. No apêndice B, apresentamos alguns detalhes a mais sobre a demonstração deste teorema.

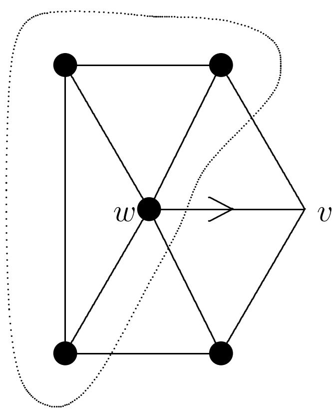


Figura 5.10: $R_2 = R_3 = 2$.

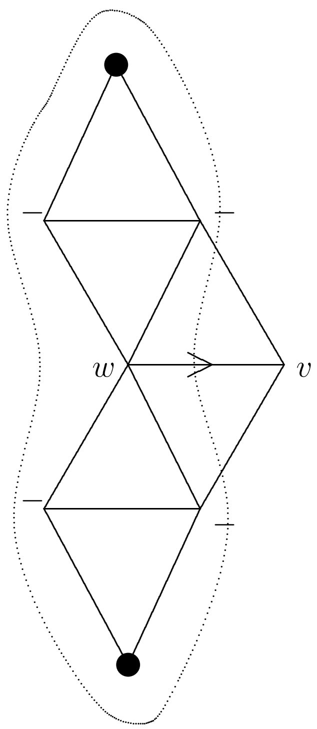


Figura 5.11: $R_4 = 2$.

Capítulo 6

Um Algoritmo

Nosso objetivo neste capítulo é converter a demonstração do Teorema das Quatro Cores em um algoritmo que encontra uma 4-coloração dos vértices de um grafo qualquer G com complexidade $O(|V(G)|^2)$. Para facilitar esta tarefa, consideramos neste capítulo algoritmos que operam sobre triangulações. Isto é suficiente pois é simples converter um grafo planar G em uma triangulação T pela simples adição de arestas, e uma 4-coloração dos vértices de T é uma 4-coloração dos vértices de G.

Uma tri-coloração das arestas de T pode ser convertida em uma 4-coloração dos vértices de T, como está descrito na demonstração do Teorema 4.1.1. Portanto, para cumprir com o nosso objetivo é suficiente mostrar um algoritmo que encontra uma tri-coloração de uma triangulação T.

6.1 Visão geral do algoritmo

Mostramos nesta seção uma visão geral de um algoritmo que tem como entrada uma triangulação T e como saída uma tri-coloração de T. O algoritmo pode ser resumido nos seguintes passos:

Passo 1: Encontramos um circuito curto em T se existir, ou concluimos que T é internamente 6-conexo.

Passo 2: Se existe um circuito curto C, adaptamos a prova do teorema 2.5.1 para construir uma tri-coloração de T a partir das tri-colorações das restrições de T sobre as duas regiões limitadas por C.

Passo 3: Se não existe um circuito curto, localizamos uma boa configuração que aparece em T e o apropriado contrato X. Encontramos uma tri-coloração módulo X, e a convertemos em uma tri-coloração de T através de uma adaptação da prova do teorema 4.5.4.

Os passos 2 e 3 podem ser escritos de forma algorítmica. O problema maior encontramos no passo 1, pois como não sabendo resolvê-lo em tempo linear, somos forçados a proceder de outra forma. Ao invés de iniciarmos pelo passo 1, vamos direto ao passo 3, assumindo que não existe um circuito curto, e se em algum momento ocorrer erro é porque existe um circuito curto, e nesse caso, nós o encontramos e seguimos para o passo 2.

Sobre a estrutura de dados utilizada, assumimos que a entrada é uma triangulação representada por um inteiro $n \geq 0$, um vetor $(d_1, \ldots, d_n)$ de inteiros não-negativos, e para cada vértice v com $1 \leq v \leq n$, um vetor $(u_v(1), \ldots, u_v(d_v))$ de inteiros entre 1 e n. O inteiro n representa o número de vértices da triangulação e para $1 \leq v \leq n$, d_v representa o número de arestas incidentes ao vértice v e $u_v(1), \ldots, u_v(d_v)$ representam os vizinhos de v, numerados em ordem cíclica em torno de v. A entrada tem tamanho $O(|V(T)|)$, pois $|E(T)| \leq 3n - 6$.

Observamos que dada uma quase-triangulação, existe essencialmente um único modo de adicionar um vértice v_0 na região infinita e arestas incidentes a v_0 de maneira a tranformar esta quase-triangulação com n vértices em uma triangulação com $n + 1$ vértices.

Nas seções 6.2 e 6.3 enunciamos e apresentamos dois algoritmos que serão utilizados para a construção de um terceiro, descrito na seção 6.4.

6.2 Algoritmo 1

Entrada: Uma triangulação T, e um vértice w de T.

Saída: A vizinhança de w em T, ou um circuito curto em T.

Complexidade: $O(|V(T)|)$

Por ser bastante simples, omitimos os detalhes.

6.3 Algoritmo 2

Segue a versão algorítmica do teorema 4.3.1.

Entrada: Uma quase-triangulação H, o circuito R que contorna H e uma tri-coloração κ de H .

Saída: Um conjunto de tri-colorações de H incluindo κ, tais que as restrições para R de todos os membros deste conjunto são distintas e formam um conjunto consistente.

Complexidade: $O(|V(H)|)$, se $|E(R)|$ é constante.

Descrição: Iniciamos com $\mathcal{C}_1 = \{\kappa\}$ e começamos a primeira iteração. Em geral, no início da i-ésima iteração temos um conjunto $\mathcal{C}_i$ de tri-colorações de H incluindo κ, tais que suas restrições para R são todas distintas.

Testamos se as restrições para R de todos os membros de $\mathcal{C}_i$ formam um conjunto consistente. Isso pode ser feito da seguinte forma: para cada tri-coloração κ de H e para cada $\theta \in \{-1, 0, 1\}$, determinamos o emparelhamento sinalizado válido M que é compatível com (κ, θ) através das estrias determinadas por θ, como feito na prova do teorema 4.3.1. Isto pode ser feito em tempo $O(|V(H)|)$.

Para cada estria, se alternarmos as cores de suas arestas obteremos uma nova tri-coloração de H cuja restrição para R é uma 3-coloração κ' tal que M é compatível com (κ', θ). O mesmo procedimento é feito para cada subconjunto do conjunto de estrias para obter todas as 3-colorações κ'' de R tal que M é compatível com (κ'', θ). Isto pode ser feito em tempo $O(|V(H)|)$, considerando que $|E(R)|$ é uma constante.

O procedimento de determinar se uma 3-coloração de R já foi gerada anteriormente pode ser executado em tempo constante se as colorações forem codificadas e armazenadas em um vetor, como descrito no Apêndice A.

6.4 Algoritmo 3

Para obter o algoritmo de tri-coloração de uma triangulação necessitamos dois lemas, que serão mostrados a seguir.

Sejam κ e κ' duas 3-colorações de um circuito R. Dizemos que κ e κ' são *equivalentes* ou *similares* se existe uma permutação λ de $\{-1, 0, 1\}$ tal que para toda aresta $e \in E(R)$, $\kappa'(e) = \lambda(\kappa(e))$. Em outras palavras, a partição das arestas de R em três subconjuntos segundo as cores atribuídas por κ e κ' é a mesma. Não é difícil de ver que esta é uma relação de equivalência.

Lema 6.4.1 *Seja R um circuito de tamanho 4, com arestas e_1, e_2, e_3 e e_4 aparecendo em R nesta ordem. Seja $\mathcal{C}_0$ o conjunto de todas as 3-colorações de R equivalentes a $(0, 0, 0, 0)$ (isto é, a 3-coloração κ com $\kappa(e_i) = 0$, para $i = 1, \ldots, 4$). Similarmente, sejam $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ conjuntos de 3-colorações de*

R equivalentes a $(0,1,1,0)$, $(0,1,0,1)$ e $(0,0,1,1)$, respectivamente. Todo conjunto consistente não vazio de 3-colorações de R inclui um dos seguintes conjuntos: $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ ou $\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_0$.

Prova: Seja $\mathcal{C}$ um conjunto consistente de 3-colorações de R e seja $\kappa \in \mathcal{C}$. Então para cada $\theta \in \{-1,0,1\}$ existe um emparelhamento sinalizado válido M que é compatível com (κ,θ). Como R tem um número par de arestas, cada cor deve ser atribuída um número par de vezes as arestas de R. Portanto, κ deve ser equivalente a uma das quatro colorações acima.

A prova do lema resume-se agora em analisar as possibilidades para κ e M. Suponha, por exemplo, que $\kappa = (0,0,0,0)$. Então $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$. Considere $\theta = -1$. Os possíveis valores de M são: $\{(\{e_1,e_2\},1)\},(\{e_3,e_4\},1)\}$ ou $\{(\{e_1,e_4\},1)\},(\{e_2,e_3\},1)\}$. No primeiro caso, concluímos que $\mathcal{C}_3 \subseteq \mathcal{C}$, e no segundo que $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$, e portanto, $\mathcal{C}$ inclui $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_3$. Os demais casos são analisados de forma semelhante. ■

Lema 6.4.2 *Seja R um circuito de tamanho 5, com arestas e_1, e_2, e_3, e_4 e e_5 aparecendo em R nesta ordem. Para $1 \leq i \neq j \leq 5$, seja $\mathcal{A}_{ij}$ a classe de equivalência de 3-colorações de R equivalentes a κ, onde $\kappa(e_i) = 1$, $\kappa(e_j) = -1$ e $\kappa(e_k) = 0$ para $k \neq i,j$. Para $1 \leq i \leq 5$, seja $\mathcal{C}_i = \mathcal{A}_{ij} \cup \mathcal{A}_{ik} \cup \mathcal{A}_{jk}$, onde $e_j, e_k \neq e_i$ são as duas arestas de R com um extremo comum com e_i. Para $1 \leq i \leq 5$, sejam e_a, e_b, e_c e e_d as arestas diferentes de e_i em ordem, e seja $\mathcal{D}_i = \mathcal{A}_{ac} \cup \mathcal{A}_{ad} \cup \mathcal{A}_{bc} \cup \mathcal{A}_{bd}$. Finalmente, seja $\mathcal{E} = \mathcal{A}_{12} \cup \mathcal{A}_{23} \cup \mathcal{A}_{34} \cup \mathcal{A}_{45} \cup \mathcal{A}_{15}$. Todo conjunto consistente não vazio de 3-colorações de R que tem intersecção não vazia com $\mathcal{E}$ inclui um dos seguintes conjuntos: $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_5,\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_5,\mathcal{E}$.*

Prova: Seja $\mathcal{C}$ um conjunto consistente. Provaremos inicialmente a seguinte afirmação.

(1) *Se $\mathcal{A}_{12} \subseteq \mathcal{C}$, então $\mathcal{C}$ inclui um dos conjuntos $\mathcal{A}_{13}$, $\mathcal{A}_{15}$ e um dos conjuntos $\mathcal{A}_{23}$, $\mathcal{A}_{25}$.*

Seja $\kappa = (-1,1,0,0,0) \in \mathcal{C}$. Visto que $\mathcal{C}$ é consistente, existe um emparelhamento sinalizado M tal que M é compatível com o par $(\kappa,-1)$, e e se κ' é uma 3-coloração de R tal que M é compatível com $(\kappa',-1)$, então $\kappa' \in \mathcal{C}$. Visto que M é compatível com $(\kappa,-1)$, segue que M é um dos seguintes conjuntos:

$$\{(\{e_2,e_3\},-1),(\{e_4,e_5\},1)\}$$
$$\{(\{e_2,e_5\},-1),(\{e_3,e_4\},1)\}.$$

Se M é o primeiro dos conjuntos, então M é compatível com o par $\{(-1,0,1,0,0),-1\}$ e esta 3-coloração pertence a $\mathcal{C}$, e portanto $\mathcal{A}_{13} \subseteq \mathcal{C}$. Caso contrário, a 3-coloração $(-1,0,1,0,0)$ pertence a $\mathcal{C}$, e portanto $\mathcal{A}_{15} \subseteq \mathcal{C}$. Sendo assim, existem apenas dois emparelhamentos sinalizados compatíveis com $(\kappa,1)$, e a segunda conclusão segue similarmente.

(2) *Se $\mathcal{A}_{13} \subseteq \mathcal{C}$, então $\mathcal{C}$ inclui um dos conjuntos $\mathcal{A}_{23}$, $\mathcal{A}_{35}$.*

Esta prova é similar à de **(1)**.

Agora, seja $\mathcal{C}$ um conjunto consistente que tem intersecção não vazia com $\mathcal{E}$. Portanto, um dos conjuntos $\mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{23}$, $\mathcal{A}_{34}$, $\mathcal{A}_{45}$, $\mathcal{A}_{15}$ está incluído em $\mathcal{C}$, mas podemos assumir que nem todos deles estão, pois nesse caso $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$, como desejado. Por simetria, podemos assumir que $\mathcal{A}_{12} \subseteq \mathcal{C}$ e $\mathcal{A}_{23} \nsubseteq \mathcal{C}$. Por **(1)**, $\mathcal{A}_{25} \subseteq \mathcal{C}$. Se $\mathcal{A}_{15} \subseteq \mathcal{C}$, então $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$, como desejado, e assim podemos então assumir que $\mathcal{A}_{15} \nsubseteq \mathcal{C}$. Por (1), $\mathcal{A}_{13} \subseteq \mathcal{C}$. Por **(2)**, $\mathcal{A}_{35} \subseteq \mathcal{C}$, e então $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, como desejado. ■

Finalmente, unindo todas as partes temos o seguinte algoritmo:

Entrada: Uma triangulação T.

Saída: Uma tri-coloração de T.

Complexidade: $O(|V(T)|^2)$

Descrição: Primeiramente, testamos se T possui 2 arestas paralelas (isto gasta tempo $O(|V(T)|)$). Em caso afirmativo, passamos para a subrotina 1, relacionada ao circuito curto que será apresentada na subseção seguinte. Caso contrário, T é simples e portanto é 3-conexo (exceto quando $|V(T)| \leq 3$, que é um caso trivial).

Testamos se todo vértice tem grau ≥ 5 (isto gasta tempo $O(|V(T)|)$). Em caso negativo, os vizinhos do vértice com grau < 5 formam um circuito curto (exceto quando $|V(T)| \leq 5$, que é um caso trivial) e passamos novamente para a subrotina 1.

Para cada vértice v, computamos $\theta_T(v)$, definido como $10(d(v)-6)+a-b$, onde a é a soma de $r(P)$ sobre todos os passes P aparecendo em T com sorvedouro v, e b é a soma de $r(P)$ sobre todos os passes P aparecendo em T com fonte v. Para cada v e cada regra da figura 5.3, isto gasta tempo $O(|d(v)|)$, e portanto toda esta computação gasta tempo $O(|V(T)|)$.

Agora, como na demonstração do teorema 5.1.1, temos

$$\sum_{v \in V(T)} \theta_T(v) = 120$$

Consequentemente, podemos escolher um vértice w com $\theta_T(w) > 0$ em tempo $O(|V(T)|)$. Agora, executamos o algoritmo 1 apresentado na seção 6.2 com entradas T e w. Se encontramos um circuito curto, passamos para a subrotina 1. Caso contrário, temos uma vizinhança W aparecendo em T com $\theta_T(w) > 0$.

Pelo teorema 5.1.2, uma boa configuração aparece em W. Encontramos tal configuração, digamos K, em tempo $O(|V(T)|)$. Construímos o completamento livre S de K com anel R (temos $|E(R)| \leq 14$). Se K é D-redutível, seja X o conjunto formado por uma aresta qualquer de $E(S) - E(R)$. Caso contrário, seja $X \subseteq E(S) - E(R)$ o conjunto de arestas mais espessas mostradas para esta configuração no apêndice C.

Testamos se existe um circuito curto C de T com $|E(C) - X| \leq 1$. Se existe utilizamos uma versão algorítmica bastante simples do teorema 4.5.2 para encontrar um circuito curto de T e passamos para a subrotina 1 (isto gasta tempo $O(|V(T)|)$).

Construímos a triangulação T' obtida de T pela contração de todas as arestas de X e deletando uma aresta de cada par de arestas paralelas obtida dessa operação. Utilizamos o algoritmo 3 para encontrar uma tri-coloração de T'. Convertemos esta em uma tri-coloração κ_1 de T módulo X.

Seja H o grafo planar obtido de T pela deleção de $V(G(K))$ e designando como infinita a região incluindo $V(G(K))$. Seja κ_2 a restrição de κ_1 para $E(H)$. Então κ_2 é uma tri-coloração de H. Aplicamos o algoritmo 2 sobre H, R e κ_2, para obter um conjunto $\mathcal{C}$ de tri-colorações de H tais que todas as restrições para R são distintas e formam um conjunto consistente $\mathcal{D}$, com $\kappa_2 \in \mathcal{C}$.

Temos que a restrição de κ_2 para R é a restrição de uma tri-coloração de S módulo X, devido a κ_1. Visto que X é um contrato para K pelo teorema 4.5.1, $\mathcal{D}$ contém a restrição para R de alguma tri-coloração de S. Encontramos tal tri-coloração κ_3, combinamos κ_2 e κ_3 para obter uma tri-coloração κ de T, e retornamos κ.

6.4.1 Subrotina 1

Para finalizar o algoritmo 3, basta descrevermos a subrotina 1, que tem como entrada a triangulação T e um circuito curto C de T.

Primeiramente, se $|E(C)| \geq 3$ testamos se C é um circuito induzido de T, e se não o é, encontramos outro circuito curto de comprimento menor e colocamos no lugar de C. Repetimos isto até que C seja um circuito induzido ou até que $|E(C)| = 2$ (isto gasta tempo $O(|V(T)|)$).

Encontramos todas as componentes conexas $X_1, \ldots, X_k$ de $T - V(C)$. Necessariamente temos $k \geq 2$, visto que T é uma triangulação. E ainda, podemos verificar que se $|E(C)| \geq 3$, então $k = 2$. Para $1 \leq i \leq k$, contruímos o grafo H_i consistindo de X_i, C, e todas as arestas com uma extremidade em $V(C)$ e outra em $V(X_i)$.

Suponhamos, primeiramente, que $|E(C)| = 2$. Seja $E(C) = \{f, g\}$, e para cada i, utilizamos o algoritmo 3 para encontrar uma tri-coloração κ_i da triangulação $H_i - g$, tal que $\kappa_i(f) = 0$. Definimos κ por: $\kappa(e) = \kappa_i(e)$ se $e \in E(H_i) - E(C)$, e $\kappa(e) = 0$ caso contrário. Então κ é uma tri-coloração de T.

Podemos assumir então que $|E(C)| \geq 3$, e portanto, $k = 2$ e C é um circuito induzido. Se $|E(C)| = 3$ utilizamos o algoritmo 3 para encontrar uma tri-coloração de H_1 e H_2 que sejam equivalentes com relação às arestas do circuito C. Desta forma, podemos unir as duas tri-colorações para formar uma tri-coloração de T.

Os casos onde $|E(C)| = 4$ e $|E(C)| = 5$ são um pouco mais complicados. Sejam $e_1, \ldots, e_d$ as arestas de C em ordem, onde $d = |E(C)|$, e sejam $v_1, \ldots, v_d$ vértices tais que a aresta e_i tem extremos v_i e v_{i+1} $(1 \leq i \leq d)$ e $v_{d+1} = v_1$.

Primeiramente, suponha que $|E(C)| = 4$. Adicionamos uma aresta a H_1 com extremos v_1 e v_3, formando uma triangulação T_1. Aplicamos o algoritmo 3 para obter uma tri-coloração de T_1, e portanto, uma tri-coloração κ de H_1 tal que $\kappa(e_1) \neq \kappa(e_2)$. Aplicamos o algoritmo 2 sobre H_1, C e κ, para obter um conjunto de tri-colorações $\mathcal{B}$ de H_1, tal que $\kappa \in \mathcal{B}$, e as restrições dos membros de $\mathcal{B}$ para C são distintas e formam um conjunto consistente $\mathcal{C}$. Aplicando o lema 6.4.1 e simetria, podemos assumir que $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}$ (utilizando a notação do lema).

Se $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$, construímos a triangulação T_2 a partir de H_2 deletando as arestas e_3 e e_4 e "identificando" v_2 com v_4. Aplicamos o algoritmo 3 a T_2 para obter uma tri-coloração κ_2 de H_2 com $\kappa_2(e_1) = \kappa_2(e_4)$. Consequentemente, a restrição de κ_2 para C está em $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$, e assim, existe $\kappa_1 \in \mathcal{B}$ tal que $\kappa_1(e) = \kappa_2(e)$ $(e \in E(C))$. Podemos então unir κ_1 e κ_2 para obter uma tri-coloração de T. Por outro lado, se $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}$, adicionamos uma aresta a H_2 com extremos v_1 e v_3 e procedemos similarmente.

Suponhamos agora que $|E(C)| = 5$. Seja T_1 obtido de H_1 pela adição de um novo vértice adjacente aos vértices $v_1, \ldots, v_5$. Aplicando os algoritmos 3 e 2 construímos um conjunto $\mathcal{B}$ de tri-colorações de H_1, tais que suas restrições para o circuito C formam um conjunto consistente $\mathcal{C}$ que tem intersecção não vazia com $\mathcal{E}$, utilizando a mesma notação do lema 6.4.2. Pelo lema 6.4.2, temos que um dos conjuntos $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_5, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_5, \mathcal{E}$ está contido em $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{C}$, então T_2 é obtido de H_2 pela remoção de e_4 e identificando v_3 com v_5. Se $\mathcal{D}_1 \in \mathcal{C}$, seja T_2 obtido de H_2 pela adição de duas arestas, uma com extremos v_2 e v_4 e outra com extremos v_2 e v_5.

Se $\mathcal{E} \in \mathcal{C}$, seja T_2 obtido de H_2 pela adição de um novo vértice adjacente a v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Em cada caso aplicamos o algoritmo 3 para T_2, e obtemos uma tri-coloração κ_2 de H_2, cuja restrição para C está no conjunto $\mathcal{C}$ e consequentemente se iguala a restrição para C de algum membro κ_1 de $\mathcal{B}$. Unindo κ_1 e κ_2 obtemos uma tri-coloração de T.

Isto conclui a subrotina 1. Podemos verificar que o algoritmo 3 possui tempo de execução $O(|V(T)|^2)$.

Capítulo 7

Conclusão

Concluímos este trabalho fazendo um breve resumo sobre o que consideramos relevantes durante o seu desenvolvimento. Começamos estudando os fundamentos e a história do problema das 4 cores, antes do aprofundamento na sua demonstração. Este passo foi de fundamental importância porque nos possibilitou conhecer a dimensão do problema e algumas das mais importantes contribuições que as tentativas de resolvê-lo proporcionaram à teoria dos grafos.

Nos estudos relacionados ao capítulo 3, tínhamos como principal documento um artigo bastante antigo, não propriamente relacionado com o problema das 4 cores. Como este estudo foi apenas comentado pelos autores do documento o qual nos baseamos, nos propusemos a estudar e escrever aquilo que fosse relevante para o nosso trabalho.

Sem dúvida alguma, o nosso principal objetivo e talvez a maior dificuldade se encontrava na demonstração da *Redutibilidade*. Dizemos isto porque esta parte da demonstração estava muito pouco comentada e seu entendimento exigia muita maturidade e conhecimento. Durante este estudo, vimos a necessidade de não apenas testar os programas que estavam prontos e disponíveis, e sim implementar o nosso programa, seguindo apenas as idéias que realmente havíamos compreendido. Este programa nos custou grande parte do tempo do curso, mas procedendo desta forma adquirimos a maturidade mencionada e o entendimento real do que os autores da demonstração haviam feito.

Seguindo o estudo, nos deparamos com a parte mais extensa da demonstração, a *Inevitabilidade*. Primeiramente, nos dedicamos a entender uma parte do muito que foi escrito sobre o assunto. Mesmo sendo o assunto complicado, também nos pareceu muito interessante a idéia de construir os programas necessários para a conclusão deste capítulo. Porém, revendo o que já havia sido feito, tornou-se impossível concluir este passo. Verificamos que o programa disponível tem aproximadamente 13.000 linhas de código e sua descrição é bastante extensa e complicada. Não havia mais tempo para a implementação e testes que possibilitariam a conclusão desta etapa como gostaríamos. Concluímos, assim, o estudo da inevitabilidade apenas com a parte teórica.

Para completar a demonstração, utilizamos os resultados obtidos para a construção de um algoritmo de tri-coloração de um grafo planar. Isso foi bastante significativo no sentido em que podemos entender como os teoremas envolvidos na desmonstração são utilizados como ferramentas para a construção deste algoritmo.

Se analisarmos o que poderia ser feito para completar e melhorar nosso trabalho não nos restam dúvidas que o programa que demonstra o teorema 5.5.1 do estudo da *Inevitabilidade* deveria ser implementado e devidamente testado.

Podemos concluir que o trabalho descrito nesta dissertação procura reunir grande parte das informações relevantes sobre a demosntração do T4C, escritas da maneira mais simples e intuitiva possível. Procuramos também incluir o material relacionado com os programas de computadores implementados em nosso trabalho e em trabalhos anteriores de outros pesquisadores, visando facilitar o entendimento e a confiança dos leitores de que a parte não teórica da demonstração está correta e que pode ser verificada por qualquer programador interessado. Esperamos ter expressado de forma clara e objetiva o que nos propusemos e que tenhamos de alguma forma contribuído com este trabalho.

Apêndice A

Introdução

Esta seção provê detalhes sobre a demonstração do teorema 4.5.1 que utiliza um computador. Primeiramente, introduziremos alguns conceitos necessários.

Seja R um circuito com vértices $1, 2, \ldots, r$ em ordem, e sejam $e_1, e_2, \ldots, e_r$ arestas de R em ordem tais que para $i = 2, 3, \ldots, r$, as extremidades da aresta e_i são $i - 1$ e i. Seja κ uma 3-coloração de R. Dizemos que κ é *canônica* se $\kappa(e) = 0$ para toda aresta e de R, ou se existe um inteiro k tal que para $1 \leq k < r$, $\kappa(e_r) = \kappa(e_{r-1}) = \ldots = \kappa(e_{k+1}) = 0$ e $\kappa(e_k) = 1$. Observe que toda coloração de R é similar a uma única coloração canônica, onde o conceito de similaridade está definido na seção 6.4.

Seja G o completamento de uma configuração K com anel R, e seja X um contrato para K ou um conjunto vazio. Seja $\mathcal{C}^*$ o conjunto de todas as 3-colorações de R, e seja $\mathcal{C} \in \mathcal{C}^*$ o conjunto de todas as restrições para $E(R)$ de tri-colorações de G. Seja $\mathcal{C}'$ o subconjunto consistente maximal de $\mathcal{C}^* - \mathcal{C}$. Denotaremos por $1, 2, 3, \ldots, n$ os vértices de G, onde $1, 2, \ldots, r$ são os vértices de R, em ordem, limitando a região infinita de G.

Cada uma das 633 configurações é representada por uma matriz, chamada matriz de configuração.

Colorações

O objetivo desta seção é explicar como computar o conjunto $\mathcal{C}$. Isso é feito exatamente como na definição, ou seja, computamos todas as tri-colorações de G e, para cada uma, selecionamos a sua restrição para $E(R)$.

Primeiramente, numeramos as arestas de G como $e_1, e_2, \ldots, e_m$, onde $m =$

$3(n-1)-r$, começando a numeração pelas arestas de R, ou seja, as arestas de R são $e_1, e_2, \ldots, e_r$. O que importa para a corretude do algoritmo é que e_m e e_{m-1} sejam incidentes com a mesma face triangular.

Utilizando o algoritmo abaixo computamos todos os mapeamentos $c : E(G) - E(R) \rightarrow \{1, 2, 4\}$ tal que $c(e_m) = 1$, $c(e_{m-1}) = 2$ e $c(e) \neq c(f)$ se e e f são incidentes a uma mesma face triangular, ou seja, computamos todas as tri-colorações de G e também o conjunto $\mathcal{C}$.

Durante o curso do algoritmo mantemos uma variável F_i definida para $i < m-1$ e que armazena o conjunto de todos os $c(e_j)$ tais que $j > i$ e e_i e e_j são incidentes a uma mesma face. Inicialmente atribuímos:

- $c(e_m) = 1$
- $c(e_{m-1}) = 2$
- $F_{m-1} = \{1\}$
- $j = m-1$

Algoritmo 1: Computa todas as possíveis tri-colorações de G

```
repita
    se c(e_j) = 8
    então
        j ← j + 1
        c(e_j) ← c(e_j) * 2
    senão
        se c(e_j) ∈ F_j
        então c(e_j) ← c(e_j) * 2
        senão
            se j = r + 1
            então
                Obtemos uma tri-coloração de G a partir de c
                Armazenamos a sua restrição para E(R)
                c(e_j) ← c(e_j) * 2
            senão
                j ← j − 1
                c(e_j) ← 1
                Computa F_j
até que j = m − 1
fim-algoritmo
```

Armazenamos as restrições de tri-colorações de G para $E(R)$ em um vetor chamado *live*, tal que para $i = 0, 1, \ldots, (3^{r-1} - 1)/2$, $live[i] = 0$ se alguma coloração de $E(R)$ é a restrição para $E(R)$ de uma tri-coloração de G, e $live[i] = 1$ caso contrário.

Conjuntos consistentes

Mostramos agora como computar $\mathcal{C}'$. Dizemos que uma coloração κ de R é *balanceada* se $|\kappa^{-1}(-1)|$, $|\kappa^{-1}(0)|$, $|\kappa^{-1}(1)|$ e r têm a mesma paridade. Note que todo membro de $\mathcal{C}'$ é balanceado. Seja $M = \{(m_1, \mu_1), (m_2, \mu_2), \ldots, (m_k, \mu_k)\}$ um emparelhamento sinalizado em R. Dizemos que M é *balanceado* se $r - \sum_{i=1}^{k}(\mu_i - 1)/2$ é par.

O conjunto $\mathcal{C}'$ será computado iterativamente. Seja $\mathcal{C}'_0 = \mathcal{C}^* - \mathcal{C}$, e seja $\mathcal{M}_0$ o conjunto de todos os emparelhamentos sinalizados balanceados em R. Seja $i \geq 0$ um inteiro, e assuma que $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_i$ e $\mathcal{C}'_0, \mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_i$ já foram calculados. Calculamos $\mathcal{M}_{i+1}$ como o conjunto de todos os emparelhamentos sinalizados $M \in \mathcal{M}_i$ para os quais $\mathcal{C}'_i$ contém toda coloração κ de R tal que M é compatível com (κ, θ), para algum $\theta \in \{-1, 0, 1\}$, e seja $\mathcal{C}'_{i+1}$ o conjunto de todas as colorações $\kappa \in \mathcal{C}'_i$ tais que para todo $\theta \in \{-1, 0, 1\}$ existe um emparelhamento sinalizado $M \in \mathcal{M}_{i+1}$ que é compatível com (κ, θ).

Proposição 8.0.3 *Se $\mathcal{C}'_i = \mathcal{C}'_{i+1}$, então $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_i$.*

Prova: Primeiramente mostramos que $\mathcal{C}'_i$ é consistente. Por hipótese, $\mathcal{M}_{i+1} = \mathcal{M}_{i+2}$. Seja $\kappa \in \mathcal{C}'_i$, e $\theta \in \{-1, 0, 1\}$. Visto que $\kappa \in \mathcal{C}'_i$ deduzimos que existe um emparelhamento sinalizado $M \in \mathcal{M}_{i+1}$ que é compatível com (κ, θ). Como $M \in \mathcal{M}_{i+2}$, se M é compatível com (κ', θ) então $\kappa' \in \mathcal{C}'_{i+1} = \mathcal{C}'_i$, como desejado.

Para completar a demonstração, devemos mostrar que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}'_j$ para todo $j = 0, 1, \ldots$. Claramente, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}'_0$. Assuma que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}'_j$ para algum inteiro $j \geq 0$; mostraremos que se $\kappa \in \mathcal{C}'_j - \mathcal{C}'_{j+1}$, então $\kappa \notin \mathcal{C}'$. Considere um tal κ. Então existe $\theta \in \{-1, 0, 1\}$ tal que nenhum $M \in \mathcal{M}_{j+1}$ é compatível com (κ, θ). Se nenhum emparelhamento sinalizado de R é compatível com (κ, θ) então $\kappa \notin \mathcal{C}'$. Assuma então que existe um emparelhamento sinalizado M de R que é compatível com (κ, θ).

Se $M \notin \mathcal{M}_0$, então k não é balanceada, e portanto $k \notin \mathcal{C}'$. Assuma então que $M \in \mathcal{M}_0$. Então $M \in \mathcal{M}_k - \mathcal{M}_{k+1}$ para algum inteiro k, tal que $0 \leq k \leq j$. Logo, existe $\theta' \in \{-1, 0, 1\}$ e uma coloração $\kappa' \notin \mathcal{C}_k$ tal que M é compatível

com (κ', θ'). Visto que $\kappa' \notin \mathcal{C}'(K)$, deduzimos que $\kappa \notin \mathcal{C}'(K)$, como desejado.
■

Para computar $\mathcal{C}'(K)$ computamos iterativamente $\mathcal{M}_i$ e $\mathcal{C}_i$ até que $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_{i+1}$.

Contratos

Sejam K, G e R como definidos, e seja X um contrato para K. Várias condições da definição de um contrato são fáceis de verificar, e então explicaremos somente como verificar que nenhuma coloração em $\mathcal{C}'(K)$ é a restrição para $E(R)$ de uma tri-coloração de G módulo X.

Para isto computamos todas as tri-colorações de G módulo X utilizando um algoritmo similar ao Algoritmo 1, descrito anteriormente. O algoritmo funciona como segue.

Seja $e_1, e_2, \ldots, e_m$ as arestas de $E(G)$ numeradas da mesma forma que descrito nas especificações do Algoritmo 1. Computamos $c : E(G) - X \to \{1, 2, 4\}$ tal que c' definido por $c'(e) = \lfloor c(e)/2 \rfloor - 1$ é uma tri-coloração de G módulo X.

Para um inteiro $1 \leq i \leq m$ e $e_i \notin X$, seja D_i o conjunto de todas as arestas e_j, onde $i < j \leq m$, $e_j \notin X$, e e_i, e_j limitam uma mesma região na qual nenhuma aresta pertence a X. Seja S_i o conjunto de todas as arestas e_j, onde $i < j \leq m$, $e_j \notin X$, e e_i, e_j limitam uma mesma região onde a terceira aresta que limita esta região pertence a X.

Seja s o maior inteiro tal que $s \leq m$ e $e_s \notin X$, e seja s' o maior inteiro tal que $s' < s$ e $e_{s'} \notin X$.

Durante a execução do algoritmo mantemos uma variável F_i definida para $i < s'$ como

$$\{c(f) | f \in D_i\} \cup \bigcup \{\{1, 2, 4\} - \{c(f)\} | f \in S_i\}.$$

Inicialmente atribuímos:

- $c(e_s) = 1$
- $c(e_{s'}) = 1$
- $F_{s'} = \{4\} \cup \{c(f) | f \in D_{s'}\} \cup \bigcup \{\{1, 2, 4\} - \{c(f)\} | f \in S_{s'}\}$
- $j = s - 1$

Algoritmo 2: Computa todas as possíveis tri-colorações de G módulo X

    <u>repita</u>
        <u>se</u> $c(e_j) = 8$
        <u>então</u>
            atribua a j o menor j' tal que $j < j' \leq s$ e $e'_j \ni X$
            (ou $s + 1$ se não existe j')
            $c(e_j) \leftarrow c(e_j) * 2$
        <u>senão</u>
            <u>se</u> $c(e_j) \in F_j$
            <u>então</u> $c(e_j) \leftarrow c(e_j) * 2$
            <u>senão</u>
                <u>se</u> $j = 1$
                <u>então</u>
                    Obtemos uma tri-coloração módulo X de G a partir de c
                    Verificamos que sua restrição para $E(R)$ não pertence a $C'(K)$
                    $c(e_j) \leftarrow c(e_j) * 2$
                <u>senão</u>
                    $j \leftarrow j - 1$
                    $c(e_j) \leftarrow 1$
                    Computamos F_j
    <u>até que</u> $j \geq s$
<u>fim-algoritmo</u>

Apêndice B

Introdução

Neste apêndice, descrevemos com um pouco mais de detalhes a estrutura da demonstração do teorema 5.5.1. A demonstração é uma aplicação da técnica "branch and bound". Começamos com uma vizinhança de um vértice, e repetidamente quebramos o problema em casos até atingirmos uma situação em que a vizinhança é suficientemente restrita para podermos concluir que ela satisfaz o teorema. A cada instante, temos um conhecimento parcial da vizinhança, e esse conhecimento vai crescendo à medida que vamos nos aprofundando nos subcasos. Antes de explicar a técnica propriamente dita, explicaremos inicialmente como esse conhecimento parcial é representado.

Seja W a vizinhança de um vértice w de uma triangulação internamente 6-conexa T, e seja $\gamma = \gamma_W$. Os vértices de $G(W)$ podem ser divididos em três subclasses: o vértice w, que chamaremos de vértice *central* ou *centro*, os vizinhos de w, que chamaremos de *vértices médios*, e os demais vértices, que chamaremos de *vértices externos*. Os vértices externos podem ainda ser divididos em duas classes: vértices adjacentes a dois vértices centrais distintos, que chamaremos de *chapéus*, e os demais vértices chamados *leques*. Cada vértice leque é adjacente a um único vértice central. Para cada vértice central v, o *leque sobre* v é o conjunto de vértices leques adjacentes a v se $\gamma(v) \geq 6$, ou a aresta que une os dois vértices chapéus adjacentes a v, se $\gamma(v) = 5$.

Partes

Seja X um conjunto de vértices médios, e considere o grafo obtido de $G(W)$ removendo o leque sobre v, para cada $v \in X$. Seja K a quase triangulação resultante. Para cada vértice v de K, seja $a(v) \in Z_+ \cup \{\infty\}$ e $b(v) \in Z_+$, tais que

$$5 \leq b(v) \leq a(v).$$

Chamamos a tripla (K, a, b) de uma *parte*. Dizemos que uma parte (K, a, b) se *ajusta* a W se

- $5 \leq b(v) \leq \gamma(v) \leq a(v)$,
- $b(v) = \gamma(v) = a(v)$ se $v = w$ ou v é um vértice médio que não está em X,
- $b(v) \neq a(v)$ para cada $v \in X$.

Observe que uma parte pode se ajustar à vizinhança de vários vértices. Uma parte é *bem sucedida* se toda vizinhança W a qual ela se ajusta e na qual nenhuma boa configuração aparece satisfaz $\theta_W(v) \leq 0$.

Uma parte é *trivial* se $a(v) = \infty$ e $b(v) = 5$ para todo vértice v exceto o vértice central. Uma parte trivial com centro de grau K se ajusta a toda vizinhança de um vértice de grau k, e consequentemente, para provar o teorema 5.5.1 é suficiente mostrar o seguinte.

Teorema 9.0.4 *Para $k =$ 7,8,9,10 e 11, a parte trivial com centro de grau k é bem sucedida.*

Refinamento de partes

Dizemos que uma parte (K', a', b') é um um *refinamento* de uma parte (K, a, b) se K é um subgrafo de K' com o mesmo centro, e

$$b(v) \leq b'(v) \leq a'(v) \leq a(v),$$

para cada vértice v de K. Dois refinamentos particulares são de especial importância. Seja (K, a, b) uma parte, e seja v um vértice de K com $a(v) \neq b(v)$. Seja c um inteiro com $b(v) \leq c < a(v)$.

Seja (K_1, a_1, b_1) uma parte definida como segue. Se v é um vértice médio e $b(v) = c$, seja K_1 a quase triangulação obtida a partir de K adicionando um caminho com $(c-4)$ arestas entre os dois vértices chapéus adjacentes a v, e fazendo todo vértice interno deste caminho adjacente a v; e caso contrário seja $K_1 = K$. Para $v' \in V(K_1)$, seja $a_1(v') = \infty$ e $b_1(v') = 5$ se $v' \in V(K_1) - V(K)$, e seja $a_1(v') = a(v')$ e $b_1(v') = b(v')$ para $v' \in V(K) - \{v\}$, e seja $a_1(v) = c$ e $b_1(v) = b(v)$.

Seja (K_2, a_2, b_2) uma parte definida como segue. Se v é um vértice médio e $a(v) = c+1$, seja K_2 uma quase triangulação obtida obtida a partir de K adicionando um caminho com $(c-3)$ arestas entre os dois vértices chapéus adjacentes a v, e fazendo todo vértice interno deste caminho adjacente a v; e caso contrário seja $K_2 = K$. Para $v' \in V(K_2)$, seja $a_2(v') = \infty$ e $b_2(v') = 5$ se $v' \in V(K_2) - V(K)$, seja $a_2(v') = a(v')$ e $b_2(v') = b(v')$ para $v' \in V(K) - \{v\}$, e seja $a_2(v) = a(v)$ e $b_2(v) = c+1$.

Segue que (K_1, a_1, b_1) e (K_2, a_2, b_2) são ambos refinamentos de (K, a, b), e os chamamos de *pares complementares* de refinamentos de (K, a, b). Para qualquer vizinhança W tal que (K, a, b) se ajusta a W, se $\gamma_W(v) \leq c$ então (K_1, a_1, b_1) se ajusta a W, e se $\gamma_W(v) \geq c+1$ então (K_2, a_2, b_2) se ajusta a W, e então segue que:

Teorema 9.0.5 *Seja (K, a, b) uma parte, e seja (K_1, a_1, b_1), (K_2, a_2, b_2) pares complementares de refinamentos de (K, a, b). Se ambos são bem sucedidos então (K, a, b) é bem sucedido.*

Este é o mecanismo utilizado para a demonstração do teorema 9.0.4. Se não for possível demonstrar que uma determinada parte é bem sucedida então escolhemos um par complementar de refinamentos, provamos individualmente que ambos são bem sucedidos, e aplicamos o teorema 9.0.5 para mostrar que a parte original também é bem sucedida.

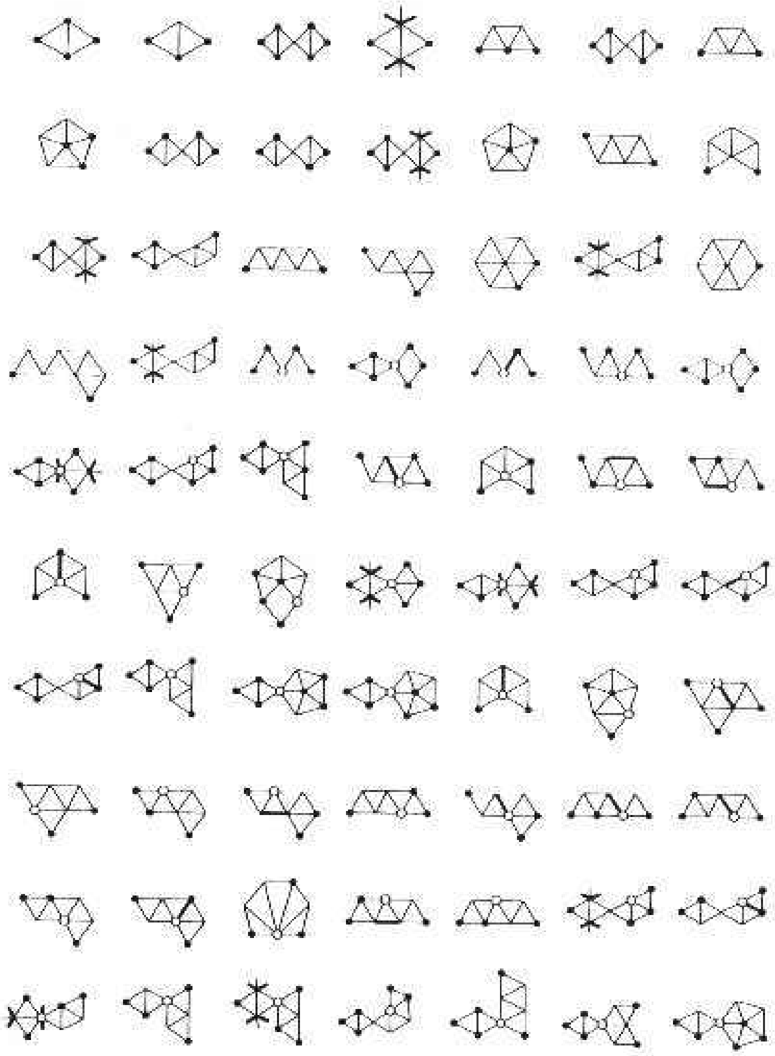
Vamos tentar explicar um pouco melhor como podemos ver diretamente que uma parte é bem sucedida. Mostramos aqui três tipos de argumentos que são utilizados, por ordem de complexidade.

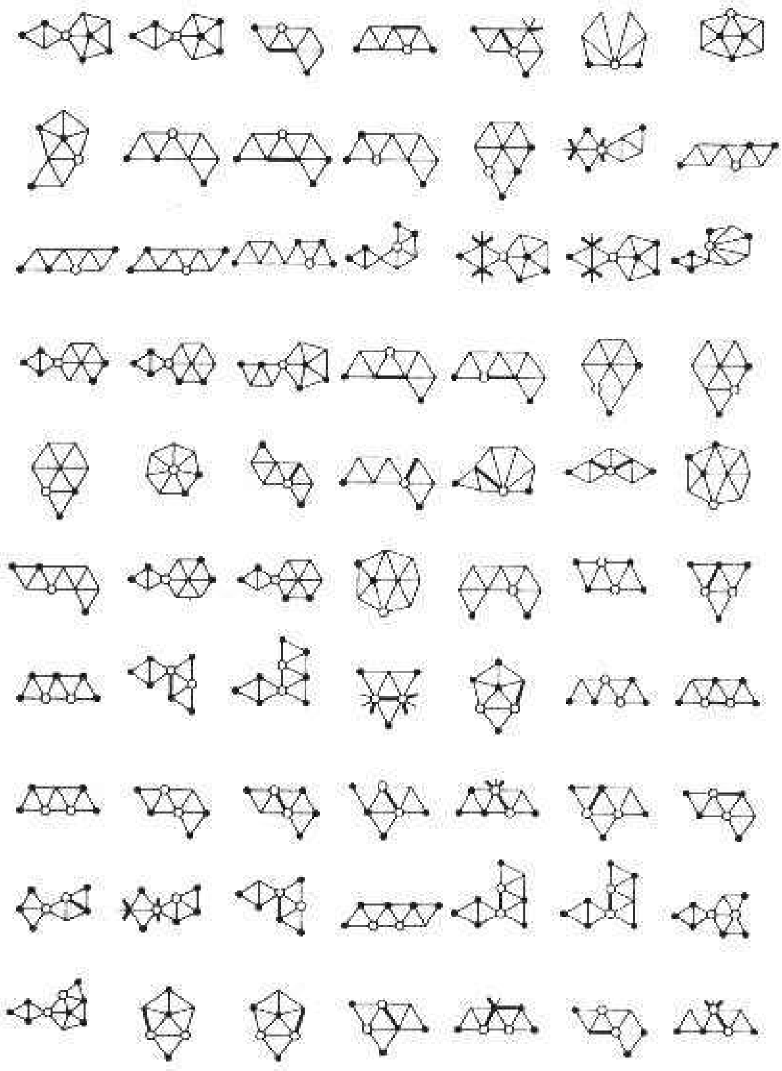
Argumento 1: (Simetria) A parte em questão é um refinamento de uma parte que já foi mostrada ser bem sucedida.

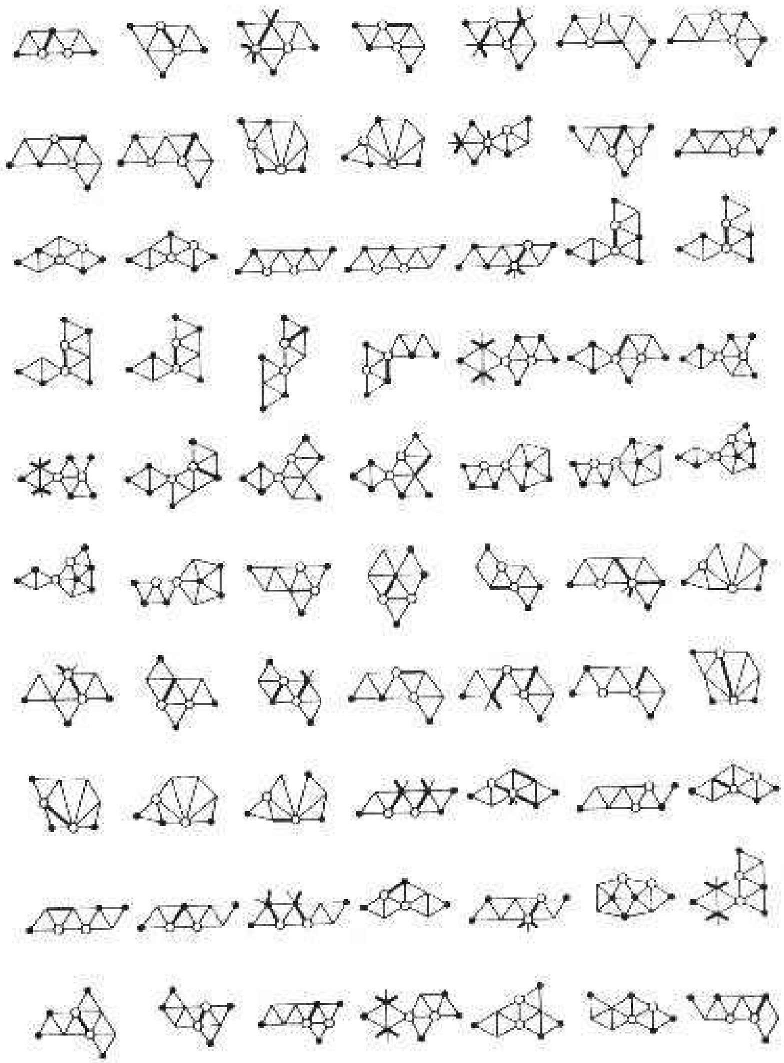
Argumento 2: (Redutibilidade) Para alguma vizinhança W que se ajusta a parte em questão, alguma boa configuração aparece em W. Tomamos por exemplo o seguinte caso: suponha $\gamma(w) = 7$, e $v_1, v_2, ..., v_7$ vizinhos de w em ordem, $a(v_1) = a(v_5) = 5$, e $a(v_2) = a(v_3) = a(v_4) = 6$ (os outros valores de a e b são irrelevantes), podemos concluir que uma das configurações $(1,4,3)$, $(1,4,5)$, $(1,6,1)$, $(1,5,5)$, $(1,7,5)$, aparece em W.

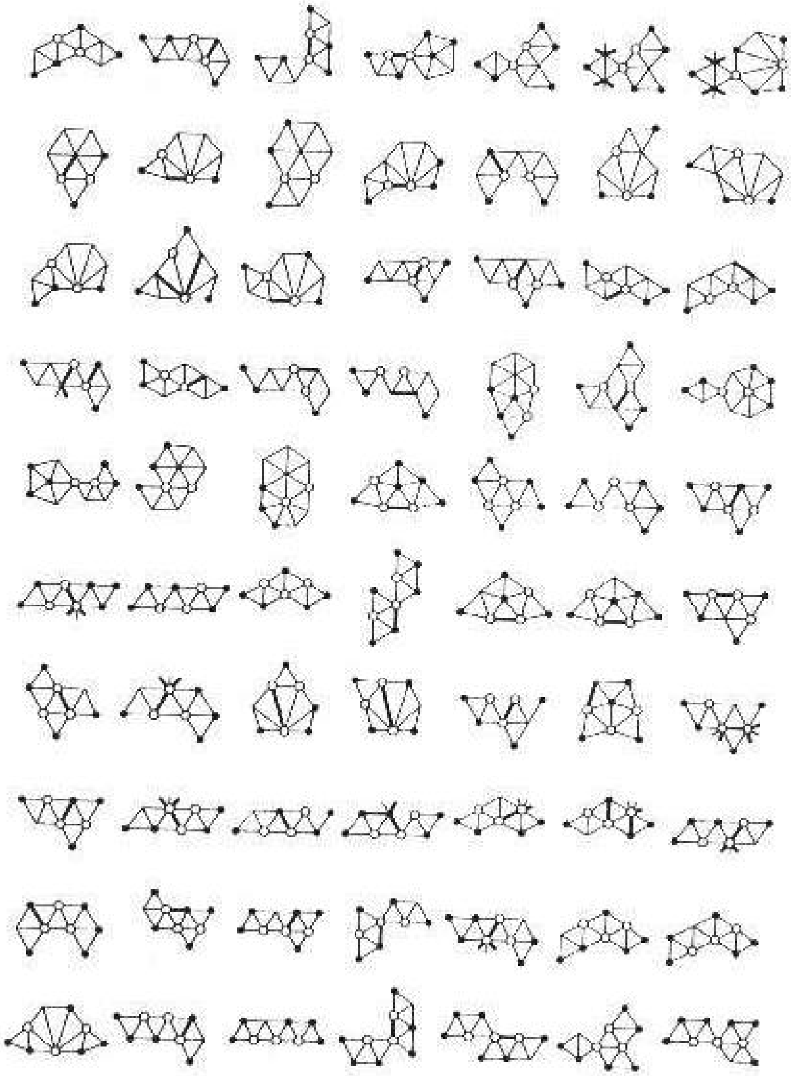
Argumento 3: (Limites superiores) Seja W uma vizinhança com centro de grau k, tal que a parte em questão se ajusta, e tal que nenhuma boa configuração aparece. A idéia aqui é tentar mostrar diretamente que $\theta_W \leq 0$. Em muitos casos, ao invés de calcular o valor exato de θ_W, é possível calcular um limite superior. Se esse limite for negativo, podemos deduzir que $\theta_W \leq 0$.

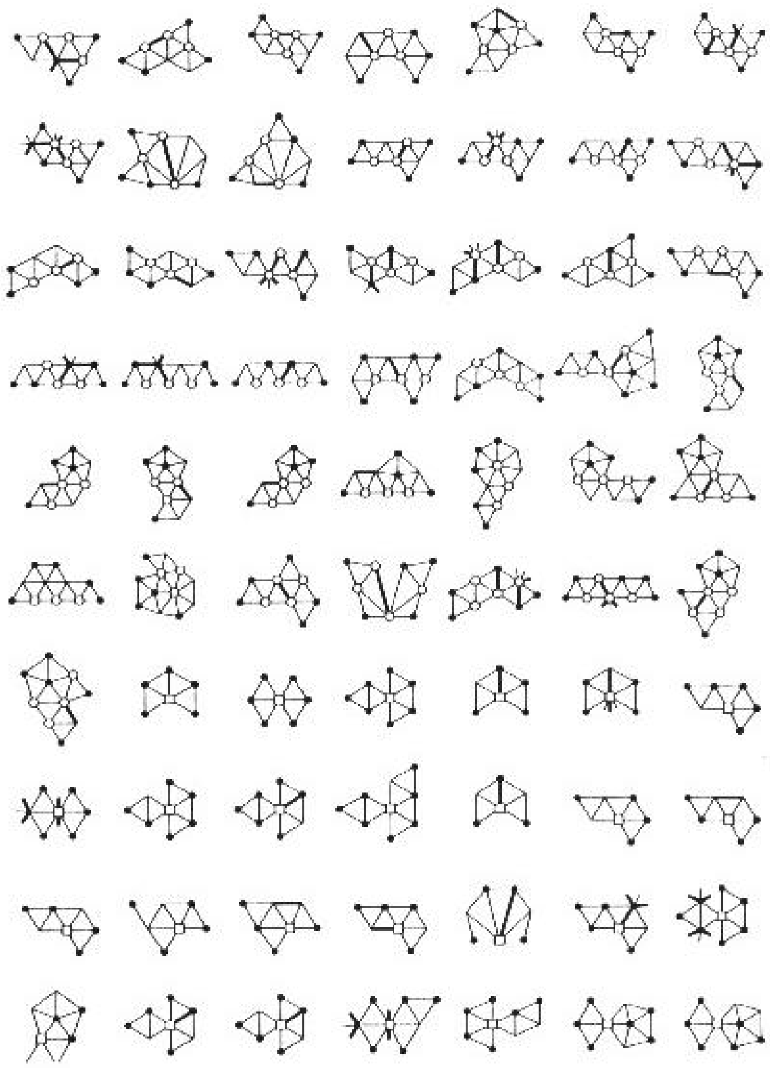
Apêndice C

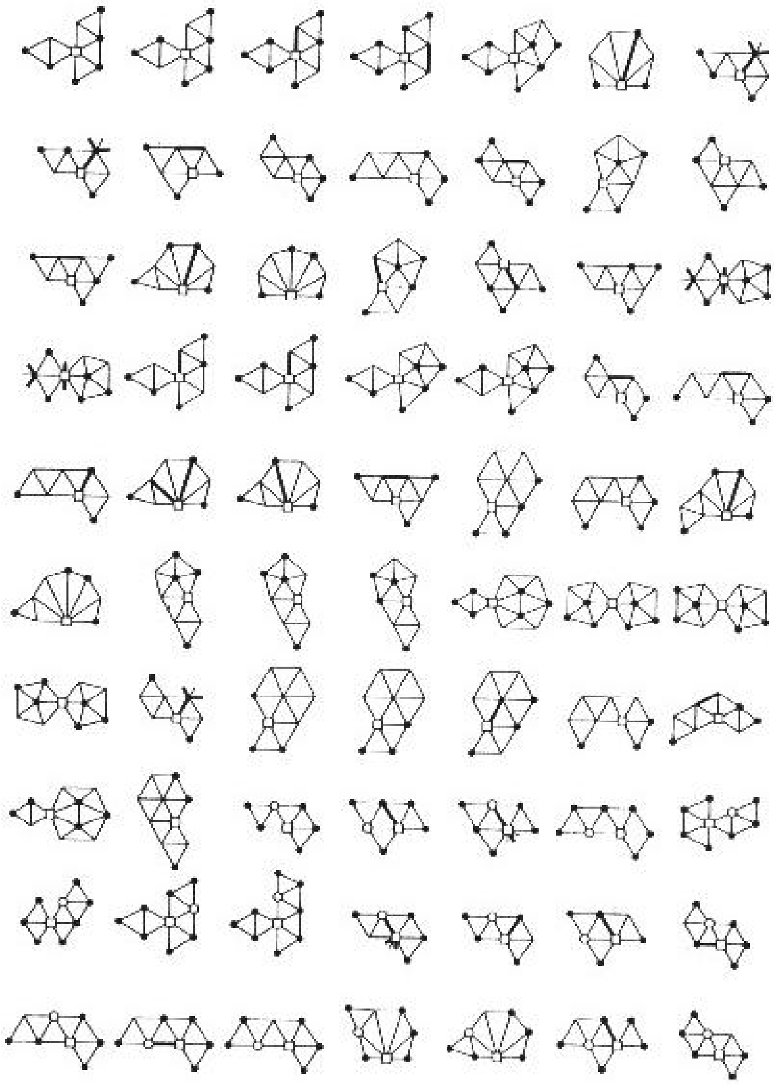


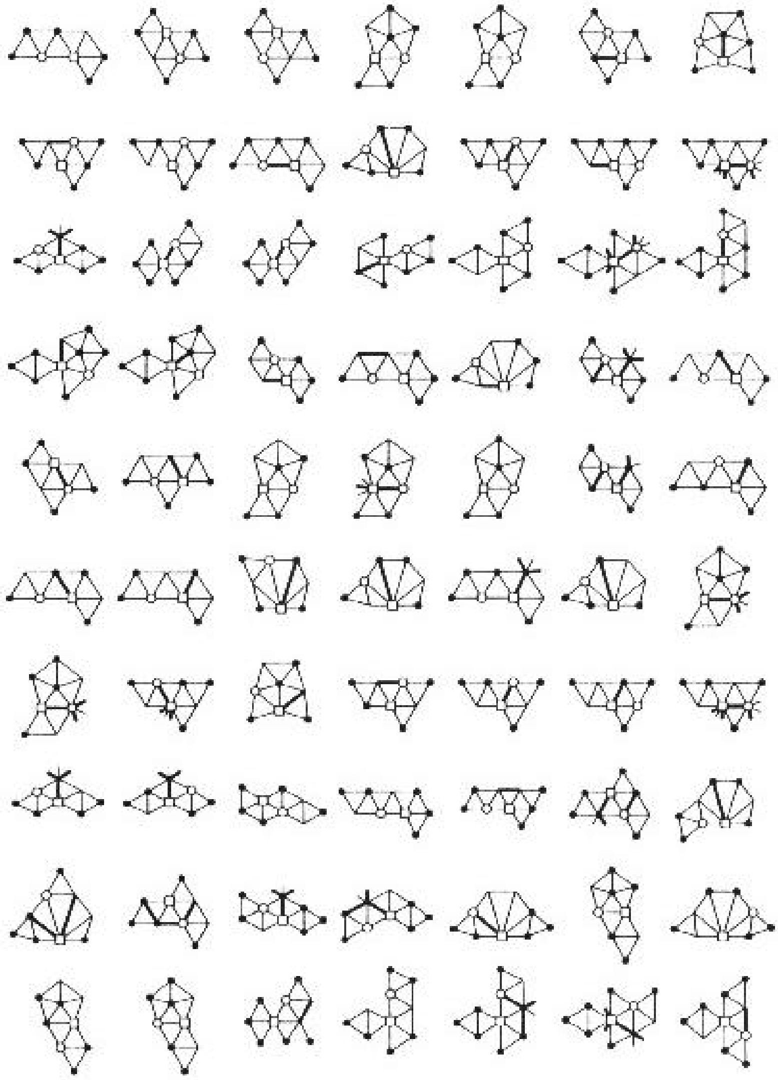


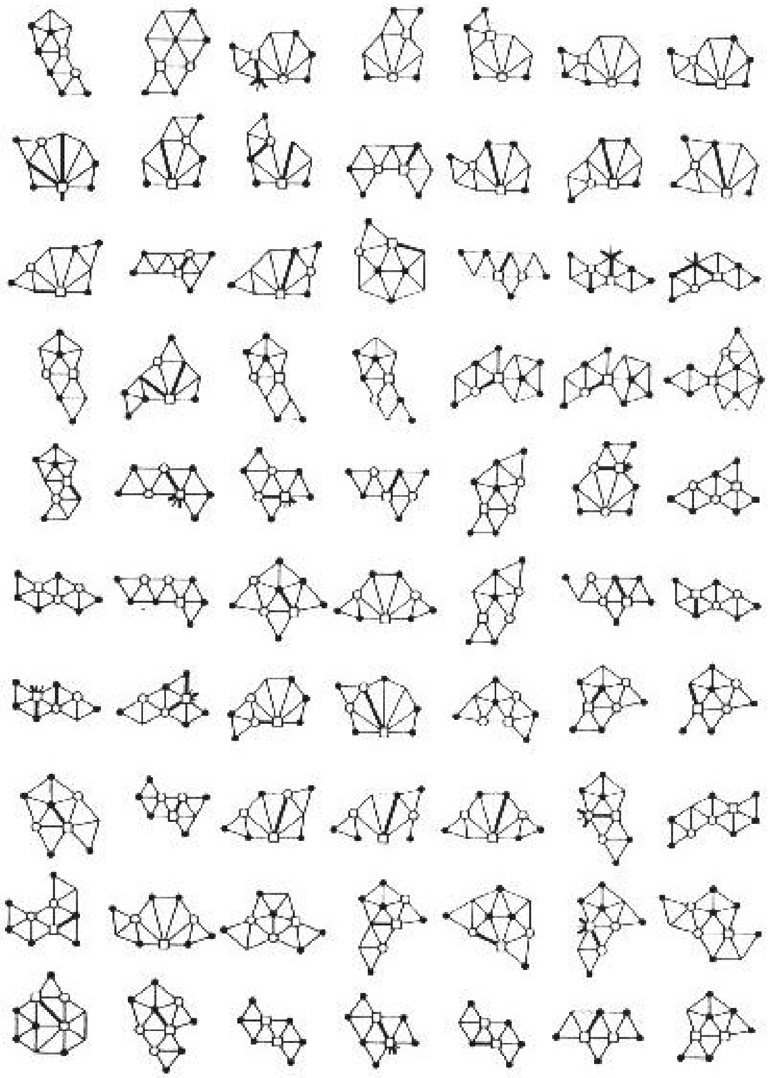


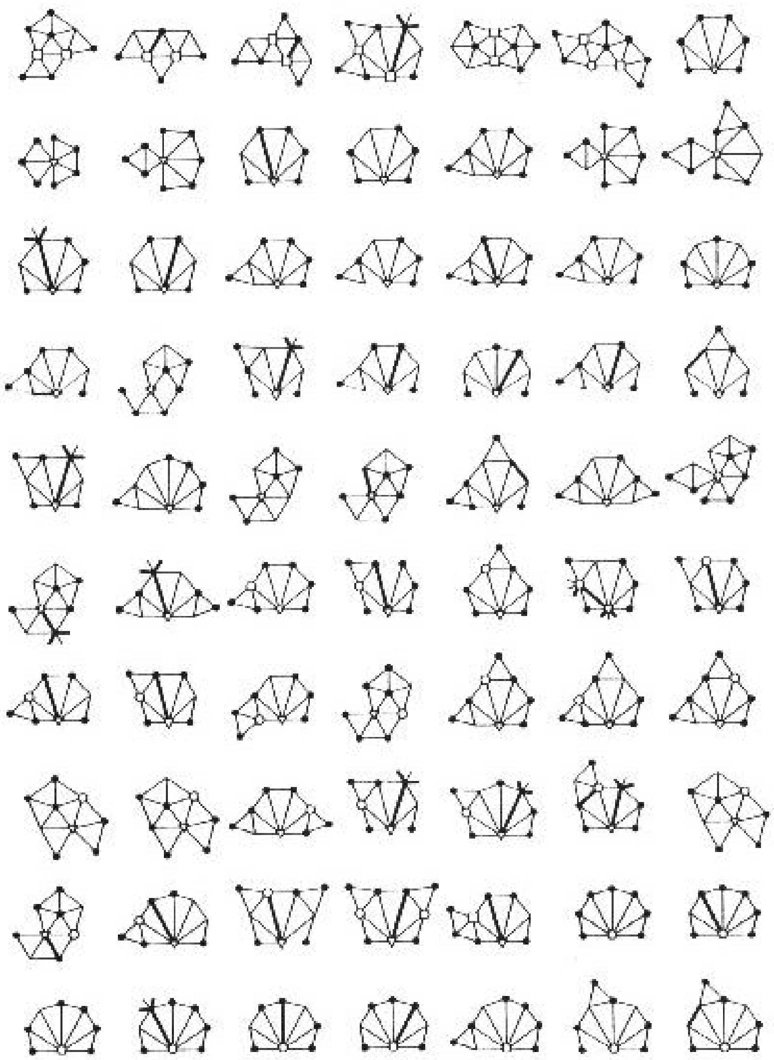


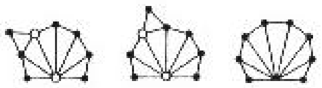












Referências Bibliográficas

[AH76] K. Appel e W. Haken. Every planar map is four colorable. *Illinois Journal of Mathematics*, 1976.

[AH89] K. Appel e W. Haken. Every planar map is four colorable. *American Mathematical Society*, 1989.

[Bir13] J. D. Birkhoff. The reducibility of maps. *American Journal of Mathematics, 35*, 1913.

[BM76] J. A. Bondy e U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. North-Holland, 1976.

[Die97] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 1997.

[Kem79] A. B. Kempe. On the geographical problem of the four colors. *American Journal of Mathematics, 2*, 1879.

[Luc] C. L. Lucchesi. *Notas de Aula*.

[RSST96] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, e R. Thomas. A new proof of the four-colour theorem. *American Mathematical Society, Volume 2, Number 1*, 1996.

[RSST97] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, e R. Thomas. The four-colour theorem. *Journal of Combinational Theory, Series B 70, 2 44*, 1997.

[Saa72] T. L. Saaty. Thirteen colorful variations on guthrie's four color conjecture. *American Mathematical Monthly, 79:2-43*, 1972.

[SK86] T. L. Saaty e P. C. Kainen. *The Four-Color Problem - Assaults and Conquest*. Dover Publications, 1986.

[Tho97] R. Thomas. http://www.math.gatech.edu/fc/ftpinfo.html. 1997.

[Tho98] R. Thomas. Un update on the four-color theorem. *Notices American Mathematical Society, 45, 848-859*, 1998.

[Tut48] W. T. Tutte. On the four colour conjecture. *Proceedings of the London Mathematical Society, 50, 137-149*, 1948.

[WT72] H. Whitney e W. T. Tutte. *Utilitas Mathematica*. Volume 2, 1972.