

O Problema da Orientação Pfaffiana de Grafos

Fábio Andreatta Santos

Dissertação de Mestrado

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Henriques de Carvalho

Área de Concentração: Teoria dos Grafos

Dissertação apresentada como
requisito para a obtenção do
título de Mestre em Ciência da
Computação.

Departamento de Computação e Estatística
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
21 de outubro de 2008

*Aos meus avós,
Francisco e Maria.*

Agradecimentos

Viver é como subir uma colina rochosa: existem as pedras firmes, nas quais podemos nos apoiar para ajudar a alcançar o nosso objetivo; e existem as pedras soltas, que dificultam o nosso caminho. Devemos ser gratos por existirem todos os tipos de rochas, pois ambas nos ensinam a viver: essas com os erros que cometemos e aquelas com os exemplos a serem seguidos. Felizmente, durante o desenvolvimento deste trabalho só encontrei rochas firmes e que me ajudaram a subir com segurança.

O professor Marcelo Henriques de Carvalho que, com sua paciência e sabedoria, guiou-me não só nos ensinamentos sobre teoria dos grafos, mas também nos conselhos sobre perseverança e nas boas palavras com que sempre me recebia em sua sala. E, além disso, agradeço-o pela dedicação que teve com o nosso trabalho.

Os familiares, principalmente minha mãe e meu pai, que nunca mediram esforços para me ensinar todos os nobres valores que afloram deles com uma naturalidade esplêndida: honestidade, sinceridade e fidelidade.

Os professores do departamento de computação, que contribuíram de maneira excepcional na minha formação acadêmica.

“ E assim sou, fútil e sensível, capaz de impulsos violentos e absorventes, maus e bons, nobres e vis, mas nunca de um sentimento que subsista, nunca de uma emoção que continue, e que entre para a substância da alma. Tudo em mim é a tendência para ser a seguir outra coisa; uma impaciência da alma consigo mesma, como com uma criança inoportuna; um desassossego sempre crescente e sempre igual. Tudo me interessa e nada me prende. Atendo a tudo sonhando sempre; fixo os mínimos gestos faciais de com quem falo, recolho as entoações milimétricas dos seus dizeres expressos; mas ao ouvi-lo, não o escuto, estou pensando noutra coisa, e o que menos colhi da conversa foi a noção do que nela se disse, da minha parte ou da parte de com quem falei. Assim, muitas vezes, repito a alguém o que já lhe repeti, pergunto-lhe de novo aquilo a que ele já me respondeu; mas posso descrever, em quatro palavras fotográficas, o semblante muscular com que ele disse o que não me lembra, ou a inclinação de ouvir com os olhos com que recebeu a narrativa que me não recordava ter-lhe feito. Sou dois, e ambos têm a distância - irmãos siameses que não estão pegados. ” (Fernando Pessoa, em “O Livro do Desassossego”, trecho 10)

Resumo

Um circuito C em um grafo G é *alternado* se existe um emparelhamento perfeito M de G tal que C é M -alternado. Uma orientação das arestas de um grafo G é uma *orientação pfaffiana* se, ao percorrermos qualquer circuito alternado em algum sentido, encontramos um número ímpar de arestas orientadas neste mesmo sentido, ou seja, todos os circuitos alternados do grafo possuem *paridade ímpar*. Se um grafo possui uma orientação pfaffiana, então dizemos que ele é *pfaffiano*.

Nem todo grafo é pfaffiano, como por exemplo o grafo de Petersen e o $K_{3,3}$. Por isso, decidir se um dado grafo possui, ou não, uma orientação pfaffiana é um problema de grande importância, pois, além de estar relacionado com alguns problemas fundamentais na teoria dos grafos, como determinar o número de emparelhamentos perfeitos em um grafo¹, só foi resolvido para algumas classes de grafos: grafos planares, grafos bipartidos, grafos quase-bipartidos e grafos sólidos.

Neste trabalho, estudaremos a caracterização do problema da orientação pfaffiana de grafos para as classes de grafos bipartidos e planares. Além disso, estudaremos parte da teoria de grafos cobertos por emparelhamentos para apresentar uma nova demonstração de uma caracterização de grafos pfaffianos dada por Lovász e Plummer em [9].

Palavras chave: grafos, grafos pfaffianos, orientações pfaffianas, emparelhamentos e grafos cobertos por emparelhamentos.

¹O problema de determinar o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo é, em geral, $\mathcal{NP}$ -difícil. Mas, este problema, para grafos que admitem ao menos uma orientação pfaffiana, é polinomial.

Abstract

A circuit C in a graph G is alternating if there is a perfect matching M of G such that C is M -alternating. An orientation of the edges of a graph G is Pfaffian if, regardless of the sense of transversal of any alternating circuit, the number of forward edges is odd. In other words, every alternating circuit of G is oddly oriented. If a graph G admits a Pfaffian orientation, then we say that G is Pfaffian.

But not every graph is Pfaffian, as well as Petersen graph and $K_{3,3}$. That's why deciding if a given graph has, or not, a Pfaffian orientation is a relevant problem related to some fundamental problems in graphs theory, like to determine the number of perfect matching in a graph², and it was solved for only four classes of graphs: planar graphs, bipartite graphs, near-bipartite graphs and solid graphs.

In this work, we study characterizations to the pfaffian orientation problem for bipartite and planar graphs, as well as part of matching covered graphs theory, which one we use to present a new proof of a characterization of Pfaffian graphs due to Lovász and Plummer in [9].

Keywords: graphs, Pfaffian graphs, Pfaffian orientations, matching e matching covered graphs.

²The problem of determining the number of perfect matchings in a graph is, in general, $\mathcal{NP}$ -hard. But, for graphs which admit a Pfaffian orientation, this problem is polynomial.

Sumário

1	Conceitos Básicos	1
1.1	Grafos	2
1.2	Orientações Pfaffianas	2
1.3	Grafos Não Pfaffianos	3
1.4	Definições Equivalentes	6
1.4.1	Orientações Pfaffianas e Emparelhamentos	6
1.4.2	Inverter Orientações ao Longo de Cortes	9
1.5	Determinar o Número de Emparelhamentos Perfeitos em um Grafo Pfaffiano	10
2	Caracterização de Grafos Planares Pfaffianos	12
2.1	Teorema Principal	12
2.2	Obter Uma Orientação Pfaffiana em um Grafo Planar	14
3	Grafos Cobertos por Emparelhamentos	16
3.1	Cortes Justos	16
3.2	Decomposição por Cortes Justos	17
3.3	Cortes Justos e Orientações Pfaffianas	19
3.4	Conformais Menores	21
3.5	Decomposição em Orelhas	22
3.6	Função $(b + p)$	23
4	Caracterização de Grafos	

Bipartidos Pfaffianos	26
4.1 Arestas Não Removíveis em Grafos Bipartidos Cobertos por Emparelhamentos	26
4.2 Braces	28
4.3 Cortes Justos e Conformais Menores	28
4.4 Teorema Principal	29
5 Caracterização de Grafos Pfaffianos	33
5.1 Teorema Principal	33
6 Considerações Finais	36
Referências Bibliográficas	37

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Faz algum tempo que o problema de determinar o número de emparelhamentos perfeitos em um grafo tem motivado vários pesquisadores, pois não se conhece solução eficiente para este problema (veja mais em [23]). Já a idéia de utilizar orientações pfaffianas para determinar o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo foi inicialmente proposta e descrita por Tutte em seu livro “Graph Theory As I Have Known It” [22], quando ele tentou encontrar uma fórmula que resolvesse este problema. Infelizmente, Tutte não obteve sucesso, mas conseguiu utilizar orientações pfaffianas para demonstrar o seu famoso teorema que caracteriza grafos que admitem emparelhamentos perfeitos.

Assim como em [22], este trabalho também tem como objetivo o estudo das orientações pfaffianas de grafos, enfatizando a teoria de grafos cobertos por emparelhamentos, que nos fornece um importante ferramental para alcançarmos nosso objetivo.

Neste primeiro capítulo, introduzimos o conceito de orientações pfaffianas e os principais problemas originados a partir daí. Também mostramos, de uma maneira simples e direta, por que o grafo de Petersen e o $K_{3,3}$ não são pfaffianos. Logo em seguida, temos duas definições equivalentes para orientações pfaffianas. E, por fim, apresentamos como determinar o número de emparelhamentos perfeitos em um grafo pfaffiano.

No segundo e quarto capítulos, abordamos as mais famosas caracterizações envolvendo orientações pfaffianas e grafos: grafos planares pfaffianos e grafos bipartidos pfaffianos, respectivamente. No terceiro capítulo, introduzimos uma boa parte da teoria de grafos cobertos por emparelhamentos para que possamos utilizá-la durante a demonstração dos teoremas principais do quarto e do quinto capítulos. Neste último, propomos uma prova alternativa para uma caracterização de grafos pfaffianos para que possamos compreender e utilizar todo o ferramental estudado na teoria de grafos cobertos por emparelhamentos.

1.1 Grafos

Um *grafo* G é uma tripla ordenada $(V(G), E(G), \Psi(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto não vazio de *vértices*, $E(G)$, disjunto de $V(G)$, é um conjunto de *arestas* e $\Psi(G)$ é uma *função de incidência* que associa cada aresta a um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos). Se e é uma aresta e u e v são vértices tal que $\Psi_G(e)=uv$, então e conecta u a v ; os vértices u e v são chamados de *extremos* (ou *pontas*) de e .

Como a definição acima, grande parte das notações e dos conceitos sobre grafos usados ao longo do trabalho, como caminhos, conexidade, etc., são essencialmente os mesmos que os definidos no livro de J. Bondy e U. S. R. Murty [1]. Contudo, em alguns casos, adotaremos outras notações e conceitos, definindo, assim, a terminologia utilizada.

1.2 Orientações Pfaffianas

Um circuito C em um grafo G é *alternado* se existe um emparelhamento perfeito M de G tal que C é M -alternado, ou seja, as arestas de C estão alternadamente em M e fora de M . Uma orientação das arestas de um grafo G é uma *orientação pfaffiana* se, ao percorrermos qualquer circuito alternado em algum sentido, encontramos um número ímpar de arestas orientadas neste mesmo sentido, ou seja, todos os circuitos alternados do grafo possuem *paridade ímpar* (Observe que como um circuito alternado possui um número par de arestas, a sua paridade será ou ímpar ou par independentemente do sentido que o percorrermos.). Caso um grafo G admita uma orientação pfaffiana, dizemos que G é *pfaffiano*. A figura 1.1 mostra uma orientação pfaffiana do K_4 .

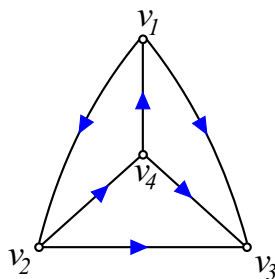


Figura 1.1: K_4 e uma de suas orientações pfaffianas.

Mas nem todos os grafos são pfaffianos, o que nos leva a pensar em dois importantes problemas de decisão:

PROBLEMA 1 (Problema do Reconhecimento Pfaffiano) *Dado um grafo G e uma orientação D das arestas de G , decidir se D é, ou não, uma orientação pfaffiana.*

PROBLEMA 2 (Problema da Orientação Pfaffiana) *Dado um grafo G , decidir se G admite, ou não, uma orientação pfaffiana.*

Surpreendentemente, Vazirani e Yannakakis mostraram, em [24], que os problemas 1 e 2 são polinomialmente equivalentes, ou seja, resolver o problema 1 é tão difícil quanto resolver o problema 2. Por esse motivo, referenciamos somente o problema da orientação pfaffiana ao longo do texto.

1.3 Grafos Não Pfaffianos

Motivados pelo resultado de Vazirani e Yannakakis, devemos procurar saber quando um grafo admite, ou não, uma orientação pfaffiana. O lema abaixo, inspirado em um argumento de Little, em [6], mostra-nos uma condição necessária para que um grafo seja não pfaffiano.

Lema 1.1 *Sejam G um grafo e $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ uma coleção de circuitos alternados de G , para $k \geq 1$. Se existe uma orientação D das arestas de G tal que:*

- (i) *toda aresta de G pertence a um número par de elementos de $\mathcal{C}$; e,*
- (ii) *um número ímpar de elementos de $\mathcal{C}$ têm paridade par, segundo a orientação D ,*

então, G é não pfaffiano.

Prova. Pela hipótese (ii), D é não pfaffiana. Para fins de contradição, suponha que G possua uma orientação pfaffiana D' . Seja S o conjunto das arestas de G cujas orientações em D e D' são diferentes. Então, D' pode ser obtida a partir de D invertendo as orientações de cada aresta de S .

Sejam $\mathcal{C}_{\text{ímpar}}$ e $\mathcal{C}_{\text{par}}$ os subconjuntos dos elementos de $\mathcal{C}$ que possuem paridade ímpar e par, respectivamente, segundo a orientação D . Então, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{ímpar}} \cup \mathcal{C}_{\text{par}}$. Agora, sejam $e \in S$ e $\mathcal{C}^e$ o subconjunto dos elementos de $\mathcal{C}$ que contêm e . Então, $\mathcal{C}^e = \mathcal{C}_{\text{ímpar}}^e \cup \mathcal{C}_{\text{par}}^e$, onde $\mathcal{C}_{\text{ímpar}}^e \subseteq \mathcal{C}_{\text{ímpar}}$ e $\mathcal{C}_{\text{par}}^e \subseteq \mathcal{C}_{\text{par}}$.

Ainda mais, sejam D_1 a orientação de G obtida a partir de D invertendo a orientação da aresta e , e $\mathcal{C}_{\text{par}}^1$ o conjunto dos elementos de $\mathcal{C}$ que possuem paridade par segundo a orientação D_1 . Então,

$$|\mathcal{C}_{\text{par}}^1| = |\mathcal{C}_{\text{par}}| + |\mathcal{C}_{\text{ímpar}}^e| - |\mathcal{C}_{\text{par}}^e|. \quad (1.1)$$

Pela hipótese (i), $|\mathcal{C}^e|$ é par. Isto implica que $|\mathcal{C}_{\text{ímpar}}^e|$ e $|\mathcal{C}_{\text{par}}^e|$ têm a mesma paridade, ou seja, a diferença entre estes dois valores é par. Como, pela hipótese (ii), $|\mathcal{C}_{\text{par}}|$ é ímpar, concluímos então, pela equação 1.1, que $|\mathcal{C}_{\text{par}}^1|$ também é ímpar.

Portanto, a nova orientação D_1 obtida possui um número ímpar de elementos de $\mathcal{C}$ com paridade par. Consequentemente, esta paridade se mantém ao trocarmos as orientações das demais arestas de S . Concluimos, então, que D' também é não pfaffiana. Logo, G é não pfaffiano. ■

Aplicando diretamente o lema 1.1, encontramos dois importantes exemplos de grafos não pfaffianos: o $K_{3,3}$ e o grafo de Petersen. Os seguintes teoremas mostram essa aplicação.

Teorema 1.1 *O $K_{3,3}$ é não pfaffiano.*

Prova. Observe o grafo $K_{3,3}$ da figura 1.2. Segundo a orientação D e o emparelhamento M destacados, temos que a coleção de circuitos M -alternados $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ satisfaz as hipóteses do lema 1.1, já que somente o circuito C_3 possui paridade par. Portanto, o grafo $K_{3,3}$ é não pfaffiano. ■

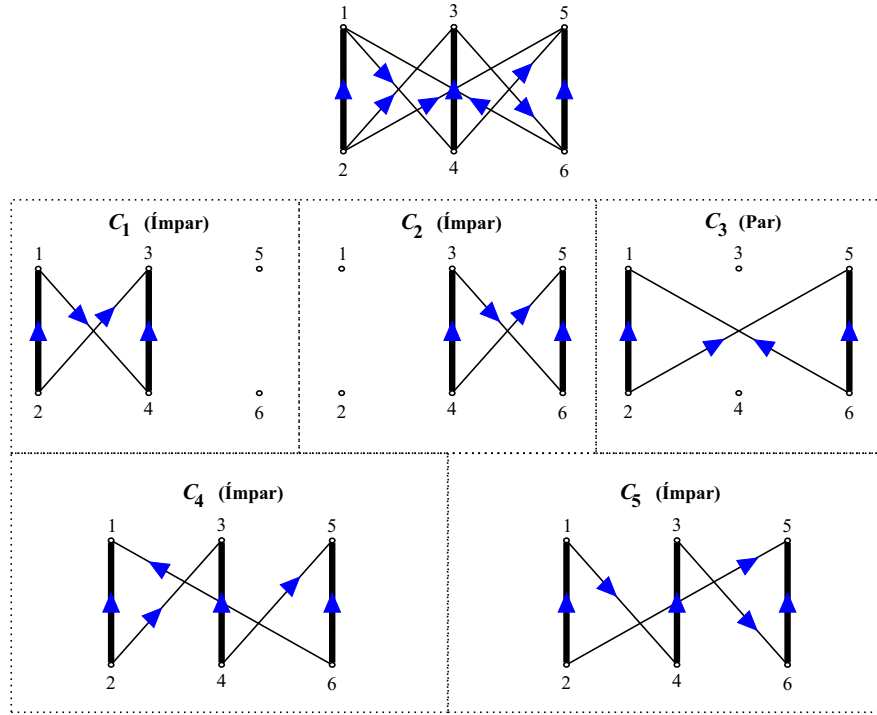


Figura 1.2: $K_{3,3}$ com uma orientação D , um emparelhamento M e uma coleção de circuitos M -alternados $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$.

Teorema 1.2 *O grafo de Petersen é não pfaffiano.*

Prova. Observe o grafo de Petersen da figura 1.3. Segundo a orientação D e o emparelhamento M destacados, temos que a coleção de circuitos M -alternados $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4,$

C_5 satisfaz as hipóteses do lema 1.1, já que somente o circuito C_5 possui paridade par. Portanto, o grafo de Petersen é não pfaffiano. ■

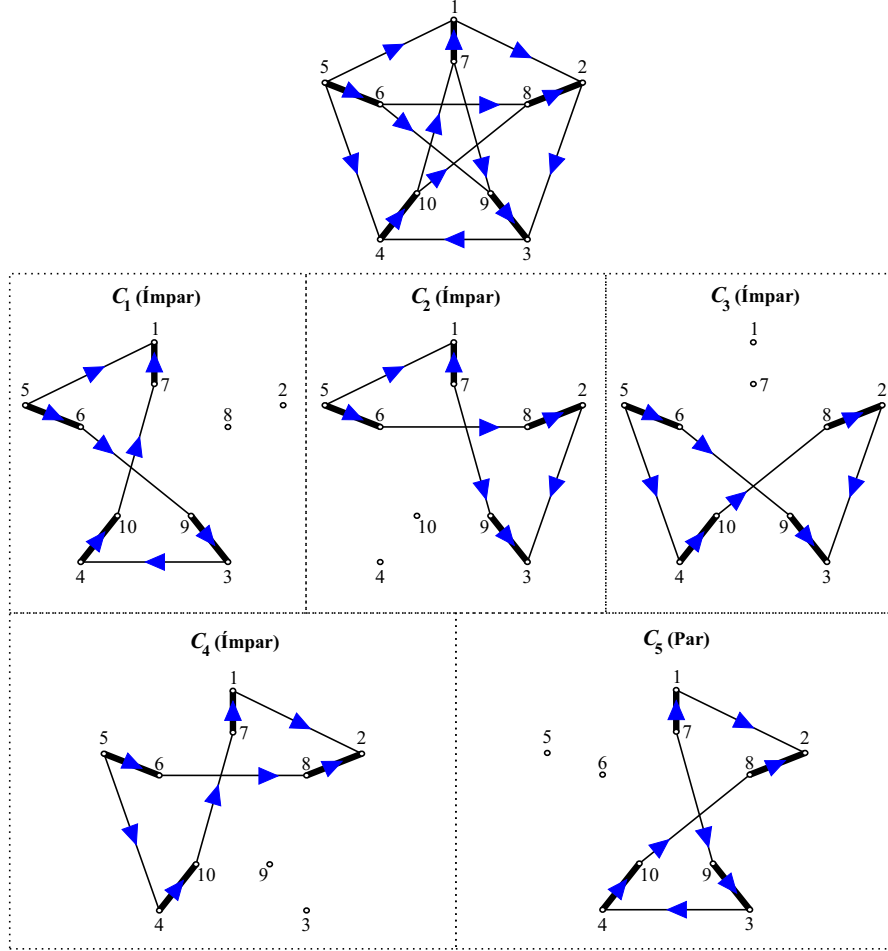


Figura 1.3: O grafo de Petersen com uma orientação de suas arestas D , um emparelhamento M e uma coleção de circuitos M -alternados $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$.

Buscando solucionar os problemas 1 e 2, vários pesquisadores obtiveram importantes resultados para algumas classes de grafos. Kasteleyn, em [5], mostrou que todo grafo planar é pfaffiano (veja mais no capítulo 2). Little, em [6], resolveu o problema da orientação pfaffiana para grafos bipartidos. Alguns anos depois, McCuaig, em [16], e, independentemente, Robertson, Seymour e Thomas, em [19], mostraram que, para os grafos bipartidos, o problema da orientação pfaffiana está em $\mathcal{P}$. Little e Fisher, em [4], descreveram uma caracterização para a classe de grafos quase-bipartidos. Marcelo H. de Carvalho, U. S. R. Murty e Cláudio L. Lucchesi resolveram o problema para uma classe de grafos não bipartidos conhecida como grafos sólidos em [15]. Alberto A. A. Miranda e Cláudio L. Lucchesi apresentaram um algoritmo de tempo polinomial para reconhecer

grafos quase-bipartidos pfaffianos em [18]. Porém, a não ser por estes resultados, pouco se sabe sobre este problema.

1.4 Definições Equivalentes

Orientações pfaffianas de grafos podem ser tratadas de algumas maneiras diferentes. Nesta seção, veremos duas definições equivalentes à vista anteriormente. Estas definições são fundamentais para a maioria das demonstrações apresentadas neste trabalho.

1.4.1 Orientações Pfaffianas e Emparelhamentos

Definir orientações pfaffianas em função de todo circuito alternado de um grafo parece não ser muito complicado à primeira vista. Mas, na prática, procurar por todo circuito alternado é um trabalho cansativo, principalmente se o grafo for denso e com muitos vértices. Para tentar simplificar um pouco, o teorema 1.3 nos mostra que não é necessário verificar a paridade de todo circuito alternado de um grafo G , mas só a paridade dos circuitos M -alternados, para algum emparelhamento perfeito M de G .

Lema 1.2 *Sejam G um grafo simples, M um emparelhamento perfeito, D uma orientação das arestas de G , C um circuito M -alternado de paridade par e (A, B) uma bipartição de C , então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- *Se C possui uma corda $e = (a, b)$, onde $a \in A$ e $b \in B$, então G possui um circuito alternado de paridade par de tamanho menor do que C .*
- *Se C possui duas cordas $e = (a, b)$ e $f = (c, d)$ que se cruzam, onde $\{a, b\} \in A$ e $\{c, d\} \in B$, então G possui um circuito alternado de paridade par contendo e e f .*

Prova. Observe que os vértices a e b dividem C em dois caminhos, digamos C_1 e C_2 , ligando a a b . Então, $C' = C_1 \cup \{e\}$ e $C'' = C_2 \cup \{e\}$ são circuitos em G . Um deles é M -alternado e o outro é M' -alternado, onde $M' = M \oplus C$. Como G é simples, temos que tanto C' quanto C'' são menores do que C . Como C tem paridade par, segue que C' ou C'' tem paridade par, independentemente da orientação de e . Portanto o primeiro item é verdadeiro. A figura 1.4 exemplifica essas afirmações.

Para o segundo item, temos por hipótese que as arestas e e f se cruzam em C . Vamos supor, sem perda de generalidade, que a, c, b e d ocorrem em C nesta ordem cíclica. Seja

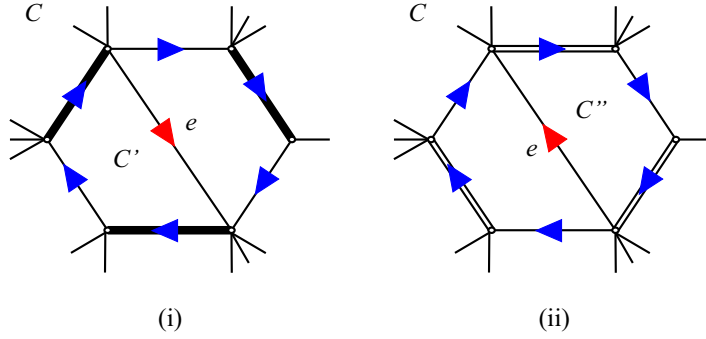


Figura 1.4: (i) Seguindo a orientação da aresta e , o circuito M -alternado C' é o circuito de paridade par menor que C ; (ii) seguindo a orientação da aresta e , o circuito $(M \oplus C)$ -alternado C'' é o circuito de paridade par menor que C .

$S = \{a, b, c, d\}$. Para cada par de vértices x e y de S , vamos denotar por $C_{x,y}$ o caminho em C ligando x a y internamente disjunto de S . Desta maneira, considere os circuitos:

$$Q_1 = C_{a,c} + (c, f, d) + C_{d,b} + (b, e, a)$$

$$Q_2 = C_{a,d} + (d, f, c) + C_{c,b} + (b, e, a).$$

Um dos circuitos Q_1 ou Q_2 é M -alternado e o outro é M' -alternado, onde $M' = M \oplus C$.

Agora, para um caminho ou circuito P de G , vamos denotar por $\varphi(P)$ o número de arestas de P orientadas no sentido em que estamos atravessando P . Observe que se P tem comprimento ímpar e R denota o reverso de P , então $\varphi(P) + \varphi(R)$ é ímpar. Sendo assim, precisamos determinar a paridade de $\varphi(Q_1) + \varphi(Q_2)$. Seja $P_1 = C_{a,c} + C_{c,b}$ e $P_2 = C_{a,d} + C_{d,b}$. Como Q_1 e Q_2 contêm e e f , a paridade de $\varphi(Q_1) + \varphi(Q_2)$ é a mesma de $\varphi(P_1) + \varphi(P_2)$. Mas, como C tem paridade par, a paridade de $\varphi(P_1)$ é distinta de $\varphi(P_2)$, ou seja, $\varphi(P_1) + \varphi(P_2)$ é ímpar. Observe a figura 1.5. Logo, $\varphi(Q_1) + \varphi(Q_2)$ também é ímpar. Consequentemente, exatamente um de Q_1 ou Q_2 é ímpar e o outro é par. Portanto, G possui um circuito alternado de paridade par contendo e e f . ■

Teorema 1.3 *Sejam G um grafo, M um emparelhamento perfeito e D uma orientação das arestas de G tal que todo circuito M -alternado possui paridade ímpar. Então, para qualquer outro emparelhamento perfeito M_p de G , todo circuito M_p -alternado possui paridade ímpar. Logo, G é pfaffiano.*

Prova. Suponha que o teorema é falso e considere um contra-exemplo mínimo, ou seja, um grafo G com número mínimo de vértices e arestas que, sob as hipóteses do teorema, possui um emparelhamento perfeito M_p e um circuito M_p -alternado C de paridade par. O sucesso da nossa demonstração depende de duas escolhas: primeiro escolha M e M_p em

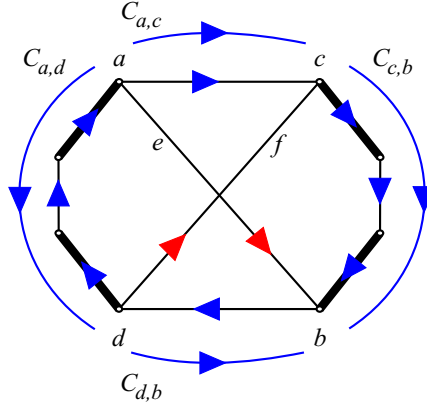


Figura 1.5: Os caminhos $P_1 = C_{a,c} + C_{c,b}$ e $P_2 = C_{a,d} + C_{d,b}$. Observe que a orientação das arestas e e f não contribui para a paridade de $\varphi(Q_1) + \varphi(Q_2)$.

G tal que $|M \cap M_p|$ seja máximo, ou seja, M e M_p tenham o máximo possível de arestas em comum. Uma vez escolhido M e M_p , escolha o circuito M_p -alternado C de paridade par contendo um número mínimo de arestas.

Seja $H = M_p \oplus M$. Note que H é uma coleção disjunta de circuitos alternados com M_p e M . Note que a minimalidade de G implica que H contém um único circuito. Para verificar isto, suponha que H contenha dois ou mais circuitos e seja C' um circuito de H . Seja $M' = M \oplus C'$. Se todo circuito M' -alternado possui paridade ímpar, então M' e M_p contradizem a escolha de M e M_p , pois $|M' \setminus M_p| < |M \setminus M_p|$. Caso contrário, M e M' contradizem a escolha de M e M_p . Podemos assumir então que $M_p = M'$. Seja C' o único circuito de H . Claramente, C possui aresta em comum com C' , caso contrário C seria um circuito M -alternado e, neste caso, teria paridade ímpar. Observe que o subgrafo $H = C \cup C'$ de G , com M e D restritos às arestas de H , é um contra-exemplo ao teorema, pois M e M_p são emparelhamentos perfeitos de H . Pela minimalidade de G , concluímos que $G = H$.

Suponha agora que G possui dois vértices adjacentes u e v de grau dois e seja $P = (x, u, v, y)$ um caminho de comprimento três em G contendo u e v como vértices internos. Sejam o grafo G' , o emparelhamento M' e a orientação D' obtidos da seguinte forma: G' é obtido a partir de G trocando P por uma aresta e ligando x a y . O emparelhamento M' é obtido de $M \setminus E(P)$ adicionando e se, e somente se, xu e vy pertencem a M . A orientação D' é obtida de D orientando e com a mesma paridade de P , ou seja, e é orientada de x para y se, e somente se, P possui um número ímpar de arestas orientadas de x para y . Sendo assim, G' com M' e D' é um contra-exemplo menor do que G , o que é uma contradição. Portanto, podemos assumir que G não possui dois vértices adjacentes de grau dois. Ainda mais, como tanto C quanto C' são M_p -alternados, concluímos que G , na verdade, não possui vértice de grau dois. Logo, G é um grafo 3-regular e, claramente, simples.

Desta maneira, podemos particionar $E(G)$ em três emparelhamentos perfeitos de G : $C' \setminus C$, $C \setminus C'$ e $C \cap C'$. Note que $C' \setminus C = M$ e $C \cap C' = M_p$, ou seja, M e M_p não possuem aresta em comum. Isto implica que qualquer outro emparelhamento perfeito de G que contenha um circuito alternado de paridade par é tão bom quanto M_p .

Considere, agora, uma bipartição (A, B) de C . Note que as arestas de M são exatamente as cordas de C . Se C possui uma corda ligando vértices em partes distintas de C então, pelo lema 1.2, G possui um circuito alternado de paridade par de tamanho menor do que C , o que contradiz a escolha de C . Portanto, toda corda de C liga vértices com os dois extremos em A ou os dois extremos em B .

Seja $e = ab$ uma corda de C tal que um dos caminhos, digamos C_1 , de C que liga a a b é minimal. Assuma, sem perda de generalidade, que $\{a, b\} \subseteq A$. Como G é simples e 3-regular, a escolha implica que C possui uma corda f ligando dois vértices com extremos em B e que cruza e . Pelo lema 1.2, G possui um circuito alternado C_2 de paridade par contendo e e f . Seja M_2 um emparelhamento perfeito de G tal que C_2 é M_2 -alternado. Podemos supor que M_2 contém e e f pois, caso contrário, tomamos $M_2 \oplus C_2$. Então M_2 é uma contradição à escolha de M_p , já que M_2 possui e e f em comum com M .

Concluimos que não existe contra-exemplo mínimo (e, portanto, não existe contra-exemplo) para o teorema. Logo, o teorema é verdadeiro. ■

1.4.2 Inverter Orientações ao Longo de Cortes

Para qualquer grafo G e qualquer conjunto X de vértices de G , o conjunto de arestas de G que possuem precisamente uma de suas pontas em X é chamado de *corte* de G e denotado por $\nabla(X)$. Além disso, os conjuntos X e $V(G) \setminus X$ são chamados de *margens do corte* $\nabla(X)$.

Duas orientações quaisquer de G não necessariamente pfaffianas são *similares* se uma pode ser obtida a partir da outra invertendo o sentido de todas as arestas de algum corte do grafo.

Observe que inverter a orientação de alguma aresta corresponde a inverter a paridade de cada circuito de comprimento par que contém esta aresta. Como cada circuito e cada corte têm um número par de arestas em comum, segue que, invertendo orientações ao longo de cortes, preservamos a paridade de circuitos de comprimento par. A propriedade abaixo é uma consequência direta desta observação.

Proposição 1.1 *Seja D uma orientação pfaffiana de um grafo G . Então, qualquer orientação de G similar a D também é pfaffiana.*

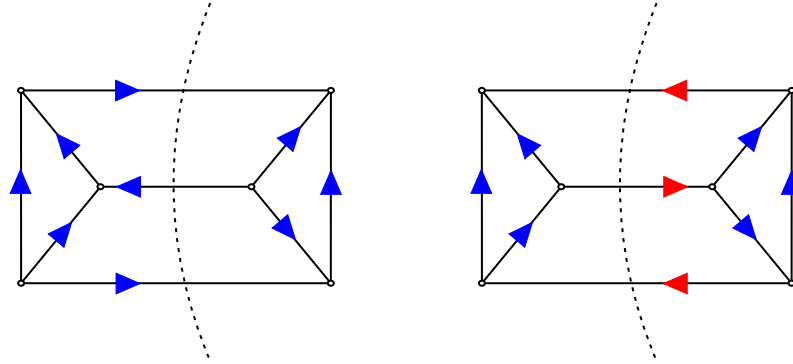


Figura 1.6: Duas orientações similares do $\overline{C_6}$.

1.5 Determinar o Número de Emparelhamentos Perfeitos em um Grafo Pfaffiano

Como já citamos no início do capítulo, o problema de contar o número de emparelhamentos perfeitos em um grafo dado é $\mathcal{NP}$ -difícil. Mas quando sabemos que o grafo em questão é pfaffiano, podemos contar o número de emparelhamentos perfeitos do mesmo em tempo polinomial.

Em [17], Miranda e Lucchesi fizeram uma revisão sobre grafos pfaffianos, que inclui os pré-requisitos de álgebra linear necessários para efetuar este cálculo. Neste trabalho, podemos ver detalhes sobre o lema 1.3. Os valores $\det A$ e $pf A$ são o determinante e o número pfaffiano, ou seja, o número de emparelhamentos perfeitos distintos em um grafo no nosso contexto, de uma matriz A , respectivamente.

Lema 1.3 (Veja mais em [17]) *Se A é uma matriz anti-simétrica, então $\det A = (pf A)^2$.*

Agora, sejam G um grafo pfaffiano e D uma orientação pfaffiana de G . Então, para cada par de vértices u e v de G , preenchemos uma matriz de adjacências $A_{n \times n}$, onde $n = |V(G)|$, da seguinte maneira:

- se não existe uma aresta de u a v ou $u = v$, então $a_{uv} = 0$;
- se a aresta que liga u a v está orientada de u para v segundo a orientação D , então $a_{uv} = 1$ e $a_{vu} = -1$.

Note que esta matriz que construímos é anti-simétrica e que cada termo em $pf A$ pode assumir os valores 1, -1 e 0. Ainda mais, existe uma correspondência de um para um

entre os emparelhamentos perfeitos de G e os termos não nulos de $pf A$, ou seja, $pf A$ é o número de emparelhamentos perfeitos de G .

Observe como ficaria a matriz de adjacências para o grafo K_4 da figura 1.1:

$$A_{4 \times 4} = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ v_2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ v_4 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Portanto, como $\det A = 9 = 3^2$, temos que, pelo lema 1.3, $pf A = 3$, ou seja, o K_4 tem 3 emparelhamentos perfeitos distintos.

Capítulo 2

Caracterização de Grafos Planares Pfaffianos

Este capítulo traz a demonstração do teorema de Kasteleyn em [5] e mostra como podemos utilizar a indução feita durante a prova para construirmos um algoritmo de tempo polinomial que encontre uma orientação pfaffiana em um grafo planar.

2.1 Teorema Principal

Para demonstrarmos o resultado clássico de Kasteleyn em [5], que diz que todo grafo planar é pfaffiano, observe que se um grafo G é planar, então faz sentido falarmos sobre a orientação das faces de G , se considerarmos uma imersão de G no plano. Isto é, percorrendo as faces de G em algum sentido, podemos contar a sua paridade.

Seja F uma face de um grafo G imerso no plano. Note que, se F é uma face finita, os seus limites formam um circuito de G e dizemos que uma aresta e deste circuito está orientada no sentido horário se, quando seguirmos a orientação de e , andarmos em sentido horário em F .

Lema 2.1 *Se G é um grafo orientado conexo e planar tal que toda face – exceto, possivelmente, a face infinita – possui um número ímpar de arestas orientadas no sentido horário, então, em todo circuito de G , o número de arestas orientadas em sentido horário é de paridade oposta ao número de vértices de G dentro do circuito. Conseqüentemente, G é pfaffiano.*

Prova. Sejam G um grafo planar e D uma orientação de G tal que toda face de G tenha paridade ímpar quando a percorrermos em sentido horário. Agora, seja C um circuito

qualquer em G . Suponha que existam f faces internas a C . Denote por c_i o número de arestas orientadas em sentido horário da face i , para $i = 1, \dots, f$. Pela orientação D , cada c_i é um número ímpar, logo

$$f \equiv \sum_{i=1}^f c_i \pmod{2},$$

isto é, a soma do número de arestas orientadas no sentido horário das faces internas do circuito C possui a mesma paridade do número de faces.

Agora, sejam v o número de vértices internos a C , e o número de arestas internas a C e k o número de arestas de C . Observe que o subgrafo de G formado pelos vértices e arestas em C e internos a C também é planar com $v + k$ vértices, $e + k$ arestas e $f + 1$ faces. Logo, a partir da fórmula de Euler,

$$V + F - A = 2$$

temos,

$$(v + k) + (f + 1) - (e + k) = 2,$$

daí

$$e = v + f - 1.$$

Seja c o número de arestas de C orientadas no sentido horário, então $\sum_{i=1}^f c_i = c + e$. Desta maneira, temos

$$f \equiv \sum_{i=1}^f c_i = c + e = c + (v + f - 1) \pmod{2},$$

logo, $c + v - 1 \equiv 0 \pmod{2}$, ou seja, $c \equiv (v - 1) \pmod{2}$. Esse resultado nos diz que, para a orientação D , a paridade de um circuito C percorrido em sentido horário é o oposto da paridade do número de vértices dentro de C .

Seja M um emparelhamento perfeito qualquer de G . Observe que o número de vértices no interior de um circuito M -alternado C qualquer de G é par, já que esses vértices devem estar saturados aos pares. Desta maneira, C possui paridade ímpar. Logo a orientação D é pfaffiana. ■

O próximo passo é mostrar como podemos construir uma orientação que satisfaça o lema 2.1 para todo grafo planar G . Para tanto, usaremos indução no número de arestas de G . Se G é uma árvore, então qualquer orientação satisfaz o lema. Suponha que G não seja uma árvore e escolha uma aresta e qualquer da face infinita, que pertence à face finita F_0 .

Pela hipótese de indução, o grafo $G - e$ tem uma orientação tal que todo circuito tem um número ímpar de arestas orientadas em sentido horário. Reinserimos e e a orientamos

tal que F_0 possua um número ímpar de arestas orientadas em sentido horário. Desde que todas as outras faces finitas diferentes de F_0 mantenham-se inalteradas, essa orientação de G tem as propriedades desejadas.

Em resumo, podemos assumir o seguinte teorema.

Teorema 2.1 (Kasteleyn em [5]) *Todo grafo planar possui uma orientação pfaffiana. Tal orientação pode ser obtida em tempo polinomial.* ■

2.2 Obter Uma Orientação Pfaffiana em um Grafo Planar

Observe que a indução sobre o número de arestas de um grafo planar G que fizemos para explicar a validade do teorema de Kasteleyn é um algoritmo de tempo polinomial $O(E(G))$ que computa uma orientação pfaffiana para G . No primeiro passo do algoritmo, encontramos uma árvore geradora T de G e orientamos as arestas desta árvore aleatoriamente. A figura 2.1 exemplifica esse passo.

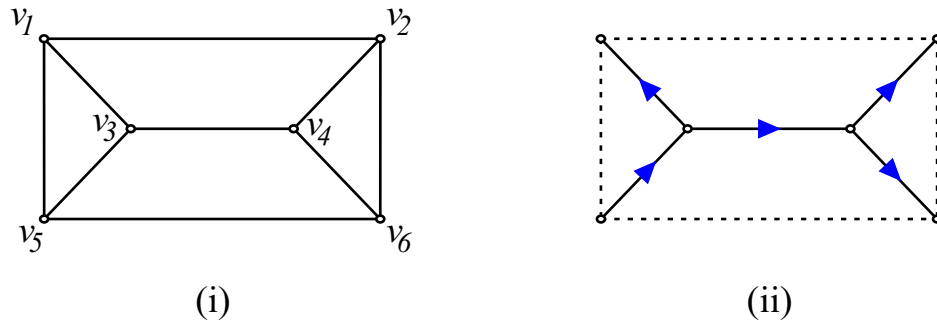


Figura 2.1: (i) o grafo $\overline{C_6}$; (ii) uma orientação das arestas de uma árvore geradora do $\overline{C_6}$.

A seguir, para cada aresta $e \in E(G) \setminus E(T)$ que incluirmos em T , orientamos e de tal maneira que a face a que ela pertence tenha paridade ímpar quando a percorrermos em sentido horário. A figura 2.2 exemplifica esse passo.

Por fim, teremos uma orientação pfaffiana das arestas de G . Para o nosso exemplo, a

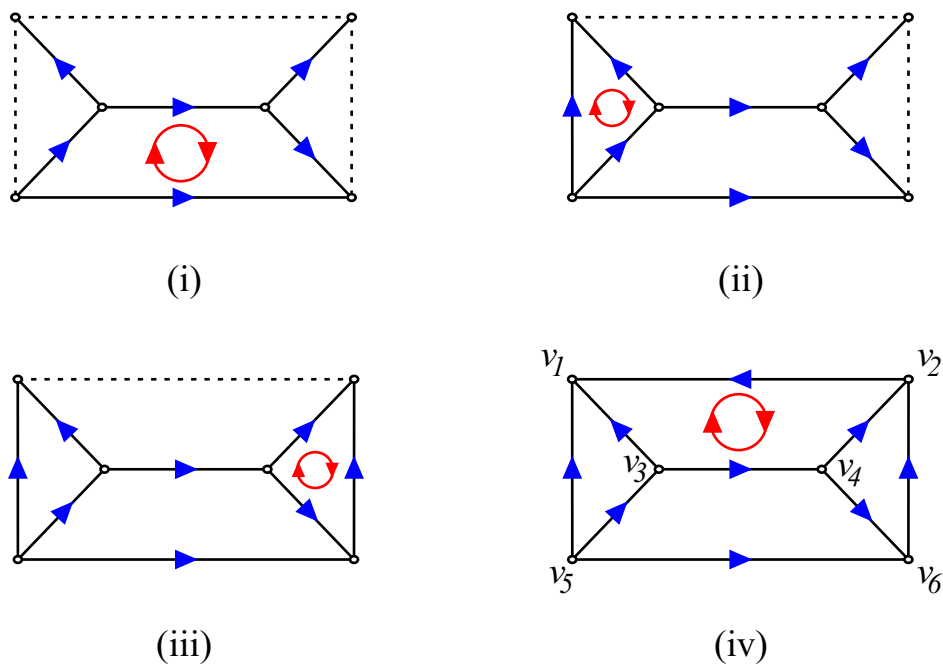


Figura 2.2: Construir uma orientação pfaffiana.

matriz de adjacências seria:

$$A_{6 \times 6} = \begin{array}{c|cccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \hline v_1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ v_4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ v_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_6 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

Logo, $\det A = 16$ e $pf A = 4$. Portanto, podemos concluir que o $\overline{C_6}$ tem quatro emparelhamentos perfeitos.

Capítulo 3

Grafos Cobertos por Emparelhamentos

Um grafo é *coberto por emparelhamentos* se possui pelo menos dois vértices, é conexo e cada uma de suas arestas pertence a um emparelhamento perfeito. Por exemplo, o $K_{3,3}$, o K_4 , o $\overline{C_6}$ e o grafo de Petersen são grafos cobertos por emparelhamentos.

A fim de determinar quando um grafo G é ou não pfaffiano, podemos restringir a nossa busca ao subgrafo de G dado pelo conjunto de arestas que pertencem a algum emparelhamento perfeito, ou seja, podemos concentrar nossa atenção na classe dos grafos cobertos por emparelhamentos. Para tanto, é importante que estejamos familiarizados com os conceitos básicos e os resultados que envolvem emparelhamentos e grafos cobertos por emparelhamentos.

3.1 Cortes Justos

Seja G um grafo coberto por emparelhamentos. Um corte C é *trivial* se uma de suas margens contém apenas um vértice. Um corte C é *ímpar* (ou *par*) se ambas as suas margens possuem um número ímpar (ou par) de vértices. Observe que, se $|V_G|$ é par, então todo corte C ou é ímpar ou é par; e, se C é ímpar, então $|C \cap M|$ é ímpar, para todo emparelhamento perfeito M de G . Um corte C é um *corte justo* se $|C \cap M| = 1$, para todo emparelhamento perfeito M de G . Cortes triviais são exemplos simples de cortes justos. A figura 3.1 mostra exemplos de cortes justos não triviais.

Quando um grafo coberto por emparelhamentos G não possuir um corte justo não trivial, dizemos que ele é um *brace*, caso G seja bipartido, ou um *brick*, caso contrário.

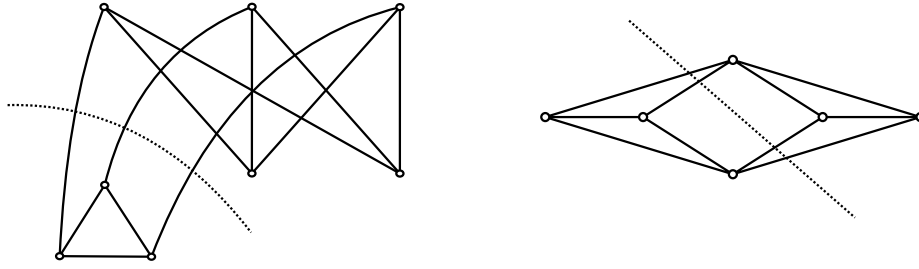
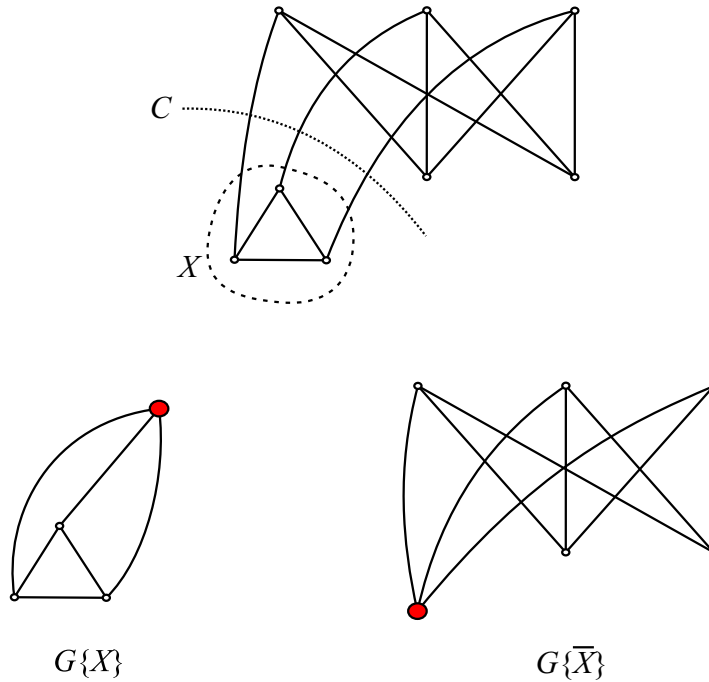


Figura 3.1: Cortes justos não triviais.

3.2 Decomposição por Cortes Justos

Seja G um grafo e seja $C = \nabla(X)$ um corte de G , onde $\emptyset \subset X \subset V(G)$. Os dois grafos obtidos a partir das contrações de X a um único vértice x e de $\bar{X}$ a um único vértice $\bar{x}$ são chamados de C -contrações de G e são denotados por $G\{\bar{X}; x\}$ e $G\{X; \bar{x}\}$, respectivamente. Se os nomes dos novos vértices nas C -contrações são irrelevantes, então podemos simplificar a notação e passar a chamá-las somente por $G\{\bar{X}\}$ e $G\{X\}$. A figura 3.2 mostra um exemplo de C -contrações.

Figura 3.2: Duas C -contrações $G\{X\}$ e $G\{\bar{X}\}$ de um corte C justo.

A partir daí, podemos fazer a seguinte afirmação, cuja demonstração é imediata a partir da definição de corte justo.

Proposição 3.1 *Se G é um grafo coberto por emparelhamentos e C é um corte justo de G , então ambas as C -contrações são cobertas por emparelhamentos.*

Se G contém um corte justo não trivial C , então decompomos G em suas duas C -contrações. Se, em seguida, alguma das C -contrações de G tiver um corte justo não trivial C' , ela poderá ser decomposta novamente em suas duas C' -contrações. Aplicando repetidamente este processo, obteremos uma família de bricks e braces. Este procedimento é chamado de *decomposição por cortes justos*. A figura 3.3 apresenta um exemplo de decomposição em cortes justos de um grafo coberto por emparelhamentos. Lovász, em [8], provou o seguinte teorema:

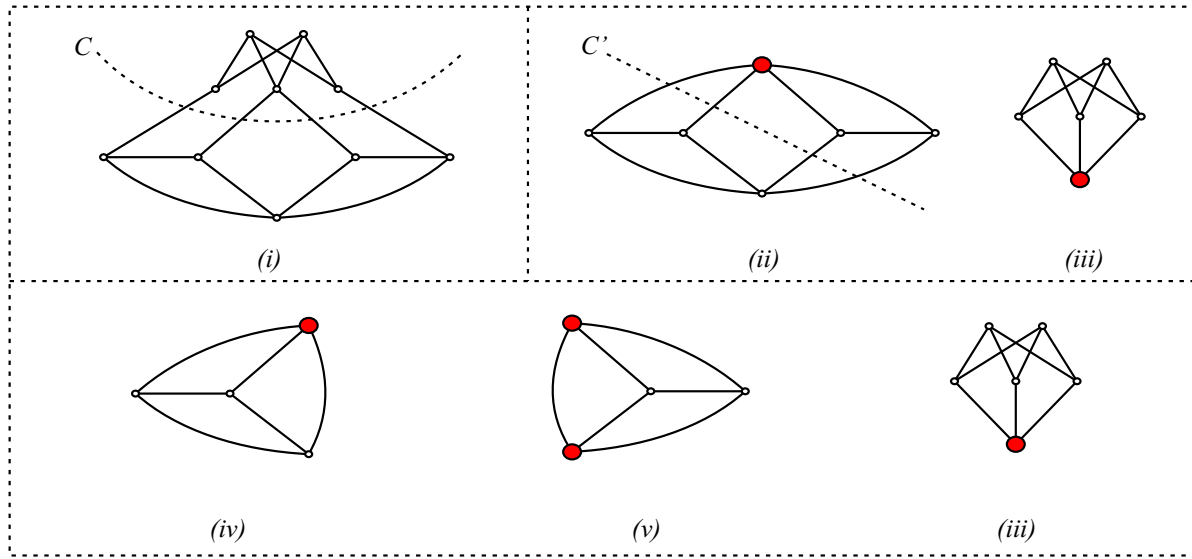


Figura 3.3: Os grafos (ii) e (iii) são as duas C -contrações de (i); os grafos (iv) e (v) são as duas C' -contrações de (ii); e os grafos (iii), (iv) e (v) são os bricks e braces obtidos da decomposição por corte justos de (i).

Teorema 3.1 *Quaisquer duas aplicações da decomposição por cortes justos em um mesmo grafo coberto por emparelhamentos produzirão a mesma família de bricks e braces, exceto pela multiplicidade de arestas.*

Em particular, os números de bricks e braces resultantes de uma aplicação da decomposição por cortes justos em um grafo coberto por emparelhamentos G é independente da maneira como se aplica a decomposição por cortes justos, ou seja, os números de bricks e braces de G são constantes. Sendo assim, denotaremos o número de bricks de G por $b(G)$ e, por $p(G)$, o número de bricks de G cujas representações como grafos simples são isomorfas ao grafo de Petersen. Usaremos também a função $(b + p)(G) = b(G) + p(G)$.

3.3 Cortes Justos e Orientações Pfaffianas

Existe uma relação próxima entre cortes justos e orientações pfaffianas. O teorema 3.2, demonstrado por Little e Rendl, em [7], mostra essa relação. O lema seguinte será útil para compreendermos a prova do teorema 3.2.

Lema 3.1 *Sejam G um grafo coberto por emparelhamentos pfaffiano e v um vértice de G . Então, existe uma orientação pfaffiana de G tal que v é uma fonte (ou um sumidouro).*

Prova. Seja D uma orientação pfaffiana de G . Sejam $v_1, v_2, \dots, v_i$ os vizinhos de v em G . Seja D' a orientação de G obtida a partir de D invertendo, se necessário, as orientações das arestas em $\nabla(v_1), \nabla(v_2), \dots, \nabla(v_i)$ tal que $\overrightarrow{vv_1}, \overrightarrow{vv_2}, \dots, \overrightarrow{vv_i}$ são arestas de D' . Observe que, se existem arestas paralelas ligando um v_k a v , então elas devem ser todas orientadas em D na direção de v_k ou na direção de v . Caso contrário, um emparelhamento perfeito M que contenha uma dessas arestas terá um circuito M -alternado com paridade par, o que é impossível, já que D é pfaffiana. Sendo assim, a orientação D' sempre pode ser obtida e, neste caso, v é uma fonte em D' . Como podemos inverter a orientação das arestas de $\nabla(v)$, v também pode ser um sorvedouro. Como, pela proposição 1.1, D' também é uma orientação pfaffiana de G , o lema é verdadeiro. ■

Teorema 3.2 (Veja mais em [7]) *Sejam G um grafo coberto por emparelhamentos e $C := \nabla(X)$ um corte justo de G . Então G é pfaffiano se, e somente se, as duas C -contrações de G são pfaffianas.*

Prova. Suponha que G é pfaffiano e seja D uma orientação pfaffiana de G . Seja M um emparelhamento perfeito de G . Pelo teorema 1.3, todo circuito M -alternado de G tem paridade ímpar. Seja $e = uv$ a aresta de $M \cap C$, onde $u \in X$ e $v \in \overline{X}$. Seja $G_1 = G\{X; \overline{x}\}$ e $G_2 = \{\overline{X}; x\}$ as duas C -contrações de G . Nós devemos provar que G_1 é pfaffiano e, analogamente, concluirmos que G_2 também é pfaffiano.

Considere a seguinte orientação D_1 de G_1 :

- se $g = e$ ou g tem ambas as pontas em X , então $D_1(g) := D(g)$;
- para cada aresta $f = wz$ de C distinta de e , onde $w \in X$ e $z \in \overline{X}$, e seja M_f um emparelhamento perfeito de G contendo f . Seja L_f o circuito M -alternando de $M \oplus M_f$ contendo f . Claramente, L_f contém e e f . Como C é um corte justo, $L_f \cap C = \{e, f\}$. Seja P_f o segmento de L_f ligando w a v , que está em G_2 . Então, $D_1(f) := \overrightarrow{w\overline{x}}$ se o número de arestas orientadas no mesmo sentido em que percorremos P_f de w a v é ímpar, caso contrário $D_1(f) := \overrightarrow{\overline{x}w}$. A figura 3.4 exemplifica essa construção.

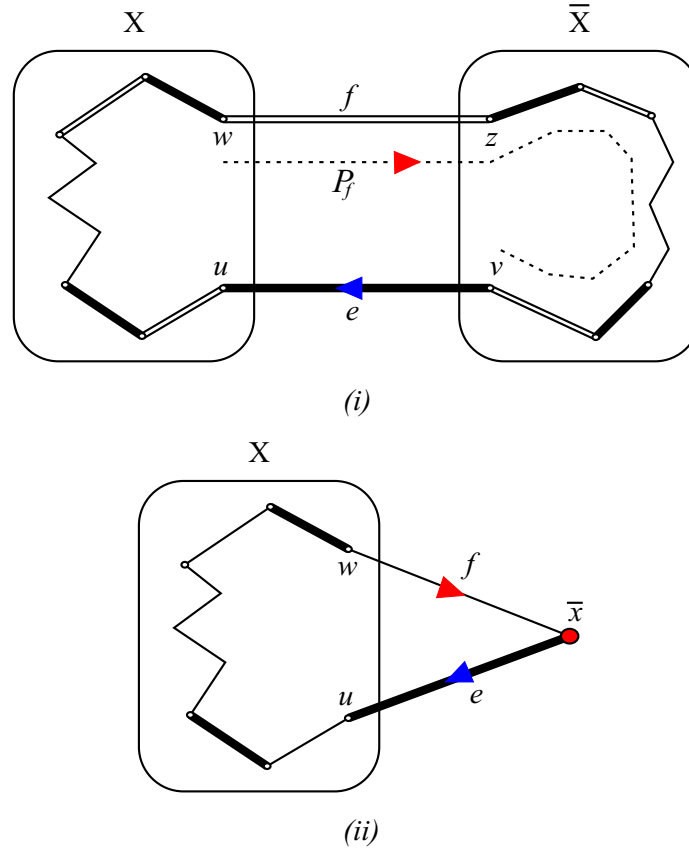


Figura 3.4: (i) O emparelhamento M está em negrito, o emparelhamento M_f , em linhas duplas e a linha tracejada é o caminho P_f ; (ii) a orientação da aresta f segue a paridade do número de arestas orientadas em P_f .

Podemos afirmar que D_1 é uma orientação pfaffiana de G_1 . Para isso, seja M_1 a restrição de M a $E(G_1)$. Agora, devemos provar que todo circuito M_1 -alternado de G_1 tem paridade ímpar. Seja L_1 um circuito M_1 alternado de G_1 . Se L_1 não contém $\bar{x}$, então L_1 é um circuito M -alternado de G e, claramente, possui paridade ímpar. Por outro lado, se L_1 contém $\bar{x}$, L_1 tem exatamente duas arestas incidentes em $\bar{x}$, uma delas é e . Denote a outra por f . Se L_1 tem paridade par, então, pela definição do caminho P_f acima, $L_1 \cup P_f$ é um circuito M -alternado de G de paridade par, uma contradição. Então, L_1 tem paridade ímpar. Isso é verdade para todos os circuitos M_1 -alternados de G_1 . Conseqüentemente, D_1 é uma orientação pfaffiana de G_1 .

Inversamente, suponha que tanto G_1 quanto G_2 são pfaffianos. Pelo lema 3.1, existem orientação pfaffianas D_1 e D_2 de G_1 e G_2 tal que $\bar{x}$ é uma fonte em G_1 e x é um sumidouro em G_2 , respectivamente. Então, a orientação das arestas de D_1 e D_2 ao longo do corte C é a mesma e uma orientação D de G pode ser induzida naturalmente a partir de $D_1 \cup D_2$.

Podemos afirmar que D é uma orientação pfaffiana de G . Para isso, seja M_i uma restrição de M em $E(G_i)$. Então, todo circuito M_i -alternado de G_i tem paridade ímpar segundo a orientação D_i . Seja L um circuito M -alternado de G . Se $E(L)$ é um subconjunto de $E(G_i)$, para algum $i \in \{1, 2\}$, então L é um circuito M_i -alternado de G_i e, logo, L tem paridade ímpar. Caso contrário, como C é um corte justo, L tem precisamente duas arestas em C , uma das quais é e , a aresta em $M \cap C$. Para $i = 1, 2$, seja $L_i := L \cap E(G_i)$. Então, L_i é um circuito M_i -alternado de G_i . Como D_i é pfaffiana, L_i tem paridade ímpar. Observe que desta maneira L também tem paridade ímpar. Assim, D é uma orientação pfaffiana de G e, logo, G é pfaffiano. ■

3.4 Conformais Menores

Dizemos que um subgrafo H de um grafo G é um subgrafo *conformal* de G se $G - V(H)$ contém um emparelhamento perfeito. Segue diretamente desta definição que a propriedade de um grafo ser conformal é transitiva, isto é, se G'' é um subgrafo conformal de G' e G' é um subgrafo conformal de G , então G'' é um subgrafo conformal de G . A proposição a seguir é uma consequência da definição de subgrafo conformal.

Proposição 3.2 *Seja G um grafo coberto por emparelhamentos. Então, G é pfaffiano se, e somente se, todo subgrafo conformal de G é pfaffiano.*

Uma *subdivisão* de um grafo G é um grafo obtido a partir de G substituindo cada aresta $e = uv$ por um caminho contendo pelo menos uma aresta ligando u a v . Uma subdivisão de um grafo G é *ímpar* se cada aresta uv é substituída por um caminho de tamanho ímpar ligando u a v . Sendo assim, um grafo G é uma subdivisão ímpar dele mesmo. A proposição 3.3 segue do fato de que uma subdivisão ímpar de uma aresta e pode ser orientada com a mesma paridade de e e vice-versa.

Proposição 3.3 *Seja G um grafo coberto por emparelhamentos. Então, G é pfaffiano se, e somente se, toda subdivisão ímpar de G é pfaffiana.*

O conceito de grafos conformais menores é uma união entre os conceitos de subgrafos conformais e subdivisões ímpares de grafos. Sejam G e H dois grafos, o grafo H é *conformal menor* (ou simplesmente *menor*) de G se existir uma subdivisão ímpar de H que é um subgrafo conformal de G . A partir daí, temos:

Proposição 3.4 *Um grafo G é pfaffiano se, e somente se, todo conformal menor de G é pfaffiano.*

3.5 Decomposição em Orelhas

Seja G um grafo conexo coberto por emparelhamentos. Uma *orelha simples* de G é um caminho P de comprimento ímpar cujos vértices internos, se existirem, têm grau dois em G . Se P é uma orelha simples de G , então denotamos por $G - P$ o grafo obtido a partir de G removendo todas as arestas e os vértices internos de P . O seguinte teorema nos fornece uma decomposição de grafos bipartidos cobertos por emparelhamentos.

Teorema 3.3 (Veja mais em [9]) *Seja G um grafo bipartido coberto por emparelhamentos. Então existe uma seqüência*

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_r = G$$

de subgrafos cobertos por emparelhamentos de G onde (i) $G_1 = K_2$, e (ii) para $2 \leq i \leq r$, $G_{i-1} = G_i - P_i$, onde P_i é uma orelha simples de G_i .

A seqüência $G_1, G_2, \dots, G_r$ de subgrafos de G com as propriedades acima é uma decomposição em orelhas de G , na qual cada membro é um subgrafo coberto por emparelhamentos de G . A figura 3.5 ilustra uma decomposição em orelhas do $K_{3,3}$.

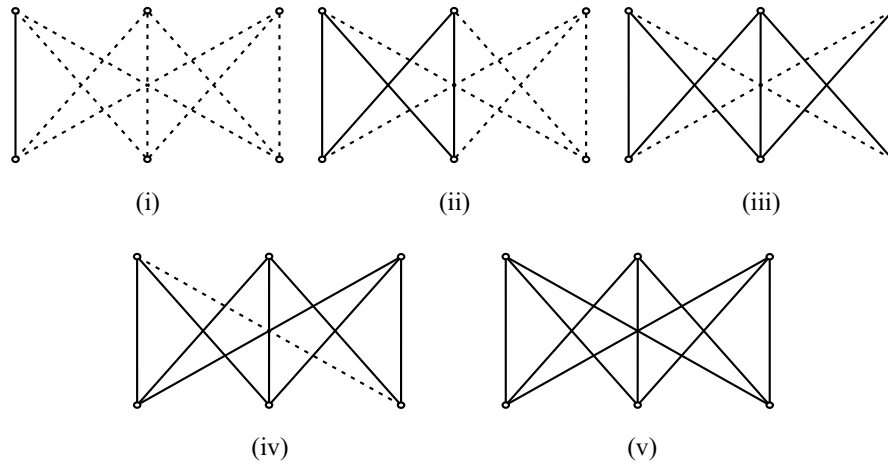


Figura 3.5: Uma decomposição em orelhas do $K_{3,3}$.

As decomposições mencionadas no teorema 3.3 não podem ser aplicadas em grafos não bipartidos, como no K_4 e no $\overline{C_6}$. Contudo, todo grafo coberto por emparelhamentos tem uma decomposição em orelhas com um leve relaxamento da definição acima. Para descrever tal decomposição, precisamos da noção de orelhas duplas.

Uma *orelha dupla* de G é um conjunto $R = \{P_1, P_2\}$, onde P_1 e P_2 são duas orelhas simples de G , disjuntas em seus vértices. Uma *orelha* de G é ou uma orelha simples ou

uma orelha dupla de G . Para uma orelha R de G , o grafo $G - R$ é o grafo obtido a partir de G removendo todas as arestas e os vértices internos de R .

Uma *decomposição em orelhas* de um grafo G é uma seqüência

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_r = G$$

de subgrafos cobertos por emparelhamentos de G onde (i) $G_1 = K_2$, e (ii) para $2 \leq i \leq r$, $G_{i-1} = G_i - R_i$, onde R_i é uma orelha (simples ou dupla) de G_i . A figura 3.6 ilustra uma decomposição em orelhas do $\overline{C_6}$, onde a última orelha inserida é dupla.

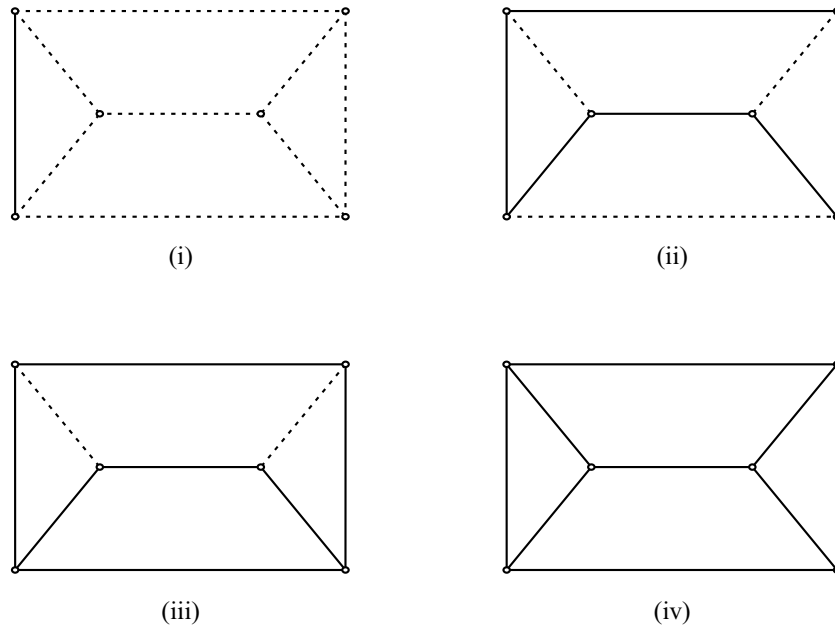


Figura 3.6: Uma decomposição em orelhas do $\overline{C_6}$.

O teorema abaixo foi estabelecido por Lovász e Plummer em [9] e é fundamental na teoria de grafos cobertos por emparelhamentos. Veja mais também em [20].

Teorema 3.4 (Teorema das Duas Orelhas) *Todo grafo coberto por emparelhamentos possui uma decomposição em orelhas.*

3.6 Função $(b + p)$

Seja G um grafo coberto por emparelhamentos. Uma orelha simples P de G é *removível* se o grafo $G - P$ é coberto por emparelhamentos. A noção de uma *orelha dupla removível* $R = (P_1, P_2)$ em G é definida de maneira similar. Neste caso, nenhuma das orelhas simples

P_1 e P_2 é uma orelha simples removível. Uma *orelha removível* de G é ou uma orelha simples removível ou uma orelha dupla removível. Observe que a última orelha de uma decomposição em orelhas é sempre uma orelha removível.

As decomposições em orelhas em grafos cobertos por emparelhamentos não necessariamente usam o mesmo número de orelhas duplas. Por exemplo, no grafo da figura 3.7, toda decomposição em orelhas, em que a aresta e é a última orelha, usa duas orelhas duplas. No entanto, não é difícil obter uma decomposição em orelhas deste mesmo grafo usando uma única orelha dupla.

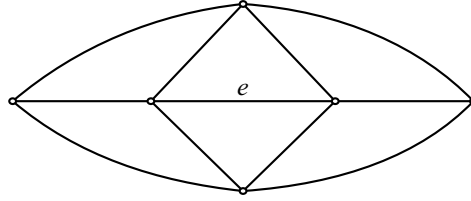


Figura 3.7: Qualquer decomposição em orelhas deste grafo em que a aresta e seja a última orelha usa duas orelhas duplas.

Uma decomposição em orelhas de um grafo coberto por emparelhamentos é *ótima* se usa o menor número possível de orelhas duplas. O seguinte teorema, demonstrado por Carvalho, Lucchesi e Murty em [12], determina o número de orelhas duplas em uma decomposição ótima em orelhas.

Teorema 3.5 *O número de orelhas duplas em uma decomposição em orelhas ótima de um grafo coberto por emparelhamentos G é $b(G) + p(G)$.*

O número de orelhas duplas em uma decomposição ótima em orelhas (ou função $(b + p)$) desempenha um importante papel na prova da caracterização de grafos pfaffianos apresentada no capítulo 5. Por isso, devemos ter em mente os resultados abaixo.

Teorema 3.6 (Veja mais em [3]) *Seja G um grafo coberto por emparelhamentos. Então, todo circuito de comprimento par é a diferença simétrica entre circuitos alternados de G se, e somente se, $(b + p)(G) \leq 1$.*

Uma orelha removível R de G é *b -removível* se $b(G - R) \leq b(G)$. Analogamente, uma orelha removível R de G é *$(b + p)$ -removível* se $(b + p)(G - R) \leq (b + p)(G)$. Carvalho, Lucchesi e Murty mostraram, em [13], que:

Teorema 3.7 *Todo grafo coberto por emparelhamentos distinto do K_2 e dos C_{2n} ($n \geq 2$) tem uma orelha $(b + p)$ -removível.*

A importância da decomposição em orelhas e orelhas b -removíveis para o problema da orientação pfaffiana reside no seguinte resultado, que fornece um algoritmo para determinar uma orientação pfaffiana em um grafo pfaffiano.

Teorema 3.8 (Veja mais em [10]) *Seja G um grafo coberto por emparelhamentos e R uma orelha b -removível de G . Se G é pfaffiano, então qualquer orientação pfaffiana de $G - R$ pode ser estendida a uma orientação pfaffiana de G .*

Capítulo 4

Caracterização de Grafos Bipartidos Pfaffianos

Neste capítulo, demonstraremos a caracterização de grafos bipartidos pfaffianos proposta por Little, em [6]. Mas, como o intuito deste texto é familiarizar o leitor com as ferramentas que a classe dos grafos cobertos por emparelhamentos nos proporciona, optamos por utilizar grande parte dos conceitos abordados no capítulo 3 para fazer tal demonstração, apesar de o próprio Little *et al* propor uma abordagem diferente para a demonstração deste teorema em [2].

4.1 Arestas Não Removíveis em Grafos Bipartidos Cobertos por Emparelhamentos

Uma aresta e de um grafo coberto por emparelhamentos G é *removível* se o grafo $G - e$ também for coberto por emparelhamentos. O conceito de aresta removível é motivado pela decomposição em orelhas, por observar que em uma decomposição em orelhas de um grafo coberto por emparelhamentos 3-conexo, a primeira orelha é sempre removível. O lema a seguir oferece uma caracterização de arestas não removíveis em grafos bipartidos cobertos por emparelhamentos.

Proposição 4.1 (Veja mais em [9]) *Seja G um grafo bipartido coberto por emparelhamentos com bipartição (U, W) , e seja $e = uw$ uma aresta de G com $u \in U$ e $w \in W$. Então, e é não removível em G se, e somente se, existe uma partição $\{U', U''\}$ de U e uma partição $\{W', W''\}$ de W com $|U'| = |W'|$ tal que e é a única aresta ligando um vértice de U' a um vértice em W'' .*

O lema abaixo é uma extensão da proposição 4.1.

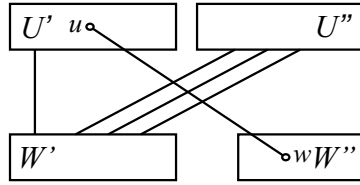


Figura 4.1: Ilustração do lema 4.1.

Lema 4.1 *Seja G um grafo bipartido coberto por emparelhamentos com bipartição (U, W) e $u \in U$ um vértice com grau $d \geq 3$. Sejam $w_1, \dots, w_d$ os vértices adjacentes a u . Assuma que as arestas $uw_1, \dots, uw_r$ ($r \leq d$) são não removíveis. Então, existem partições $U = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_r$ e $W = W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_r$ tais que $|U_i| = |W_i|$, $u \in U_0$, $w_i \in W_i$ para $1 \leq i \leq r$, $w_{r+1}, \dots, w_d \in W_0$, e $N(W_i) = U_i \cup \{u\}$ para $i = 1, \dots, r$.*

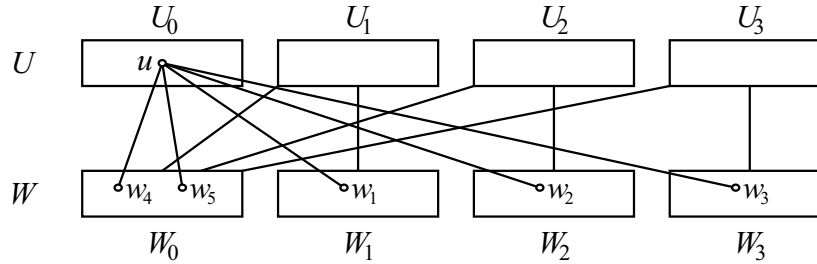


Figura 4.2: Ilustração do lema 4.1 onde $d = 5$ e $r = 3$.

Prova. Considere qualquer $1 \leq i \leq r$. Como uw_i é não removível, então, pela proposição 4.1, existem conjuntos não vazios $U_i \subset U$ e $W_i \subset W$ tais que $|U_i| = |W_i|$ e uw_i é a única aresta com uma ponta em $U \setminus U_i$ e a outra ponta em W_i . Assim, $w_i \in W_i$, $u \notin U_i$ e $w_j \notin W_i$, para $1 \leq j \leq d$ e $j \neq i$.

Para concluir, é suficiente mostrar que os W_i , bem como os U_i , são conjuntos disjuntos. Considere W_1 e W_2 . Seja $S := W_1 \cap W_2$ e suponha que $S \neq \emptyset$. O vértice w_1 não está em W_2 e o vértice w_2 não está em W_1 . Assim, nenhum dos dois vértices está em S , e, logo, $u \notin N(S)$. Então, $N(S) \subseteq U_1 \cup U_2$. Como $d \geq 3$, existe um emparelhamento perfeito M de G que não contém nenhuma das arestas uw_1 e uw_2 . Então, os vértices de U_1 estão todos emparelhados com os vértices de W_1 em M . Similarmente, os vértices de U_2 estão todos emparelhados com os vértices de W_2 em M . Como G é coberto por emparelhamentos, $|N(S)| \geq |S| + 1$. Então, um vértice de $N(S)$ precisa estar emparelhado com um vértice $v \notin S$. Logo, $v \in W_1 \setminus S$. Assim, $v \in W_1 \cap W_2$, uma contradição. Concluimos, então, que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

Agora, vamos mostrar que os U_i são conjuntos disjuntos. Note que $N(W_1 \cup W_2) = U_1 \cup U_2 \cup \{u\}$, and $|U_i| = |W_i|$. Assim, $|N(W_1 \cup W_2)| \leq |W_1| + |W_2| + 1 = |W_1 \cup W_2| + 1$, com igualdade se, e somente se, U_1 e U_2 são disjuntos. Por outro lado, como $d \geq 3$, o vértice

$w_3 \notin (W_1 \cup W_2)$ e, assim, $W_1 \cup W_2$ é um subconjunto próprio de W . Como G é coberto por emparelhamentos, $|N(W_1 \cup W_2)| \geq |W_1 \cup W_2| + 1$. Assim, $|N(W_1 \cup W_2)| = |W_1 \cup W_2| + 1$. Logo, concluímos que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. ■

4.2 Braces

Relembrando, braces são grafos bipartidos cobertos por emparelhamentos sem cortes justos não triviais. O seguinte resultado nos fornece uma importante propriedade envolvendo arestas removíveis em um brace.

Lema 4.2 *Seja $G = (U, W)$ um brace com no mínimo seis vértices, $e = uw$ uma aresta de G , onde $u \in U$ e $w \in W$. Seja z um vértice qualquer de G . Então,*

- (i) *se $z = u$ (ou w) e o grau de z é pelo menos quatro em G , então toda aresta incidente a z é removível em $G - e$;*
- (ii) *se $z \notin \{u, w\}$, então no máximo uma aresta incidente a z é não removível em $G - e$.*

Prova. Assuma que $z \in U$ e z tem r arestas não removíveis em $G - e$. Então, pelo lema 4.1, temos partições $U = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_r$ e $W = W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_r$ tais que $z \in U_0$, z possui exatamente um vértice adjacente em cada W_i e $N_{G-e}(W_i) = U_i \cup \{z\}$.

Se $z = u$ e $r \geq 1$, então, como e incide em u , $\nabla(U_1 \cup \{u\} \cup W_1)$ é um corte justo não trivial em G , o que é impossível, já que G é um brace. Então, neste caso, $r = 0$. Se $z \notin \{u, w\}$ e $r \geq 2$, então podemos assumir que $w \notin W_1$. Novamente, $\nabla(U_1 \cup \{u\} \cup W_1)$ é um corte justo não trivial de G . Logo, neste caso, $r \leq 1$. ■

4.3 Cortes Justos e Conformais Menores

Durante a prova do teorema de grafos pfaffianos bipartidos precisaremos do teorema 4.3, que correlaciona cortes justos e conformais menores.

Lema 4.3 *Seja G um grafo coberto por emparelhamentos e $C := \nabla(X)$ um corte justo de G . Sejam $G_1 := G\{X; \bar{x}\}$ e $G_2 := G\{\bar{X}; x\}$ as duas C -contrações de G . Suponha que H é um grafo com grau máximo igual a três, G_1 contém H como um conformal menor e G_2 é bipartido. Então, G também contém H como um conformal menor.*

Prova. Por indução em $|E(G_2)|$. Primeiro suponha que G_2 possua um corte justo não trivial $D := \nabla(Y)$. Sem perda de generalidade, suponha que $x \in Y$. Seja G' o grafo

obtido de G contraindo $\bar{Y}$ a um único vértice. Então, C é um corte justo de G' , uma das C -contrações de G' é G_1 e a outra é um grafo bipartido com um número menor de arestas que G_2 . Pela hipótese de indução, G' contém H como um conformal menor. Aplicando a hipótese de indução novamente, concluímos que G contém H como um conformal menor.

Desta maneira, devemos assumir que G_2 não contém corte justo não trivial, ou seja, G_2 é um brace. Sendo assim, primeiro suponha que G_2 tem ao menos seis vértices. Pelo lema 4.2, toda aresta de G_2 é removível em G_2 . Ainda mais, toda aresta de G_2 que não incide em x é removível em G . Claramente, G_2 contém uma aresta e que não incide em x . Então, e é removível em G_2 e em G . Pela hipótese de indução, $G - e$ contém H como um conformal menor e, logo, G também contém H como um conformal menor.

Agora, suponha que G_2 possua exatamente quatro vértices. Por hipótese, G_1 contém H como um conformal menor, isto é, G_1 contém um subgrafo conformal H_1 que é uma subdivisão ímpar de H . Se $\bar{x} \notin H_1$, então não é difícil notar que H_1 é um subgrafo conformal de G . Desta maneira, devemos assumir que $\bar{x} \in H_1$. Como H possui grau máximo igual a três, H_1 também possui grau máximo igual a três e, logo, $\bar{x}$ possui grau dois ou três em H_1 . Sejam u, v e w os outros três vértices de G_2 distintos de x tais que u é a mesma parte de x . A figura 4.3 mostra todos estes elementos.

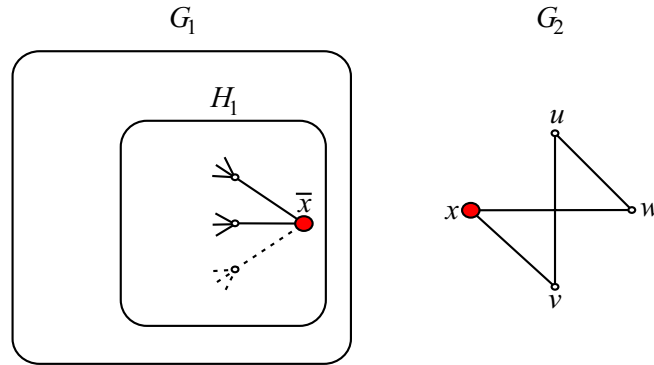


Figura 4.3: Os grafos G_1 e G_2 e o subgrafo conformal H_1 de G_1 .

Considere $G'' := G[E(H_1)]$ o subgrafo de G induzido pelas arestas de H_1 . Se no máximo um dos vértices v e w é um vértice de G'' , então G'' é um subgrafo conformal de G isomorfo a H_1 . Sendo assim, devemos assumir que ambos vértices v e w pertencem a G'' . Então, ou v ou w possui grau um em G'' . Neste caso, $G'' \cup \{uv, uw\}$ é um subgrafo conformal de G que é uma subdivisão ímpar de H_1 . ■

4.4 Teorema Principal

Teorema 4.1 (Little) *Um grafo bipartido coberto por emparelhamentos é pfaffiano se, e somente se, ele não contém o $K_{3,3}$ como um conformal menor.*

Prova. Seja G um grafo bipartido coberto por emparelhamentos. Se G contém o $K_{3,3}$ como um conformal menor, então, pela proposição 3.4, G é não pfaffiano, já que o $K_{3,3}$ é não pfaffiano. Agora, suponha que G seja não pfaffiano. Vamos mostrar, por indução, que G contém um $K_{3,3}$ como um conformal menor. Para isso, vamos assumir que G seja simples.

Caso 1 G contém um subgrafo conformal próprio bipartido coberto por emparelhamentos H não pfaffiano.

Por hipótese de indução, H contém um $K_{3,3}$ como conformal menor. Mas H é um subgrafo conformal de G . Logo, G também contém um $K_{3,3}$ como um conformal menor.

Caso 2 G não é um brace.

Então, G possui um corte justo não trivial C . Sejam G_1 e G_2 as duas C -contrações de G . Pelo teorema 3.2, G_1 ou G_2 , digamos G_1 , é não pfaffiana. Pela hipótese de indução, G_1 contém o $K_{3,3}$ como um conformal menor e, pelo lema 4.3, G também contém o $K_{3,3}$ como um conformal menor.

Caso 3 Os casos anteriores não podem ser aplicados.

Então, G é um brace. Seja e uma aresta de G . Então, $G - e$ é coberto por emparelhamentos e, como o Caso 1 não se aplica, $G - e$ é pfaffiano. Considere uma orientação pfaffiana D de $G - e$. Desta maneira, todo circuito alternado de $G - e$ tem paridade ímpar segundo a orientação dada. Assim, seja M um emparelhamento perfeito de $G - e$. Oriente a aresta e arbitrariamente e considere a coleção de circuitos M -alternados $\mathcal{C}_e$ que contém e . Note que os circuitos em $\mathcal{C}_e$ não podem ter a mesma paridade, caso contrário, podemos obter uma orientação pfaffiana em G , uma contradição. Logo, existem dois circuitos M -alternados C_1 e C_2 em $\mathcal{C}_e$ com paridades distintas.

Agora, seja $H = C_1 \cup C_2$. Note que a restrição da orientação D às arestas de H também é uma orientação não pfaffiana de H . Pelo teorema 1.3, para todo emparelhamento F de H , existe um circuito F -alternado de paridade par, segundo a mesma restrição de D em H .

Sendo assim, podemos mostrar, por indução em $|E(H)|$, que H contém um circuito conformal de paridade par que não contém e . Para tanto, suponha que exista um vértice $v \in V(H)$ tal que $d(v) = 2$. Desta maneira, como C_1 e C_2 são M -alternados, existe um vértice w adjacente a v também de grau 2. Logo, v e w são vértices internos de um caminho $P = (u_1, w, v, u_2)$. Sendo assim, sejam o grafo H' , o emparelhamento M' e a orientação D' obtidos da seguinte forma: H' é obtido a partir de H substituindo P por uma aresta f ligando u_1 a u_2 ; o emparelhamento M' é obtido de $M \setminus E(P)$ adicionando f se, e somente se, u_1w e vu_2 pertencem a M ; e a orientação D' é obtida de D orientando f com a mesma paridade de P , ou seja, f é orientada de u_1 para u_2 se, e somente se, P possui um número ímpar de arestas orientadas de u_1 para u_2 . Logo, como $|E(H')| < |E(H)|$, aplicando hipótese de indução, concluímos que H' contém um circuito conformal de paridade par

que não contém e . Portanto, podemos supor que H não possui vértice de grau 2 e, como C_1 e C_2 são M -alternados, H é cúbico.

Agora, sem perda de generalidade, podemos supor que C_1 é o circuito de paridade ímpar em H . Observe que, como H é cúbico, as arestas de $C_2 \setminus C_1$ são cordas de C_1 . Logo, sejam $f = uw$ uma corda de C_1 em H e P'_{C_1} e P''_{C_1} os caminhos de C_1 que ligam u a w , tal que $e \in P''_{C_1}$. Desta maneira, como H é bipartido, P'_{C_1} e P''_{C_1} têm comprimento ímpar, como mostra o item (i) da figura 4.4.

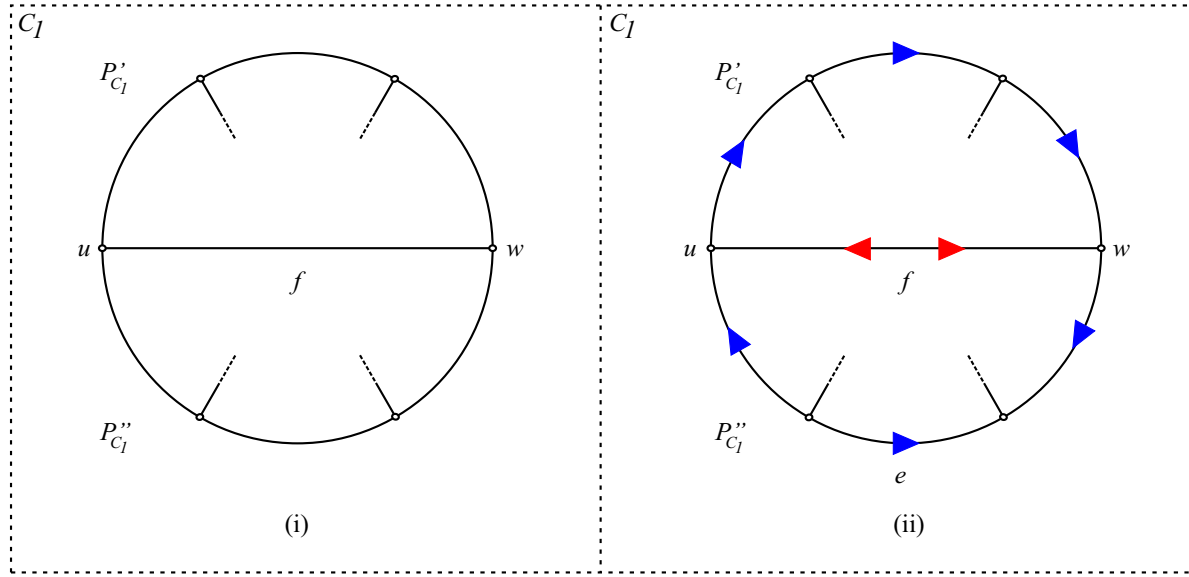


Figura 4.4: (i) O circuito C_1 , uma corda $f = uw$ e os caminhos P'_{C_1} e P''_{C_1} . (ii) A orientação do circuito C_1 e as possíveis orientações da corda f .

Sendo assim, e continuando sem perda de generalidade, podemos supor que a paridade do caminho P'_{C_1} de u até w é ímpar. Conseqüentemente, a paridade de P'_{C_1} de w até u é par; a de P''_{C_1} de u até w é ímpar; e, a de P''_{C_1} de w até u é par. Observe o item (ii) da figura 4.4.

A partir daí, se f está orientada de w para u , então o circuito $C'_1 = P'_{C_1} \cup f$ é um circuito conformal de H com paridade par que não contém e . Caso contrário, se f está orientada de u para w , então assumimos $C'_1 = P''_{C_1} \cup f$. Neste caso, se C'_1 é M -alternado, fazemos $M' = M$, caso contrário, $M' = M \oplus C_1$. Logo, C'_1 é M' -alternado. Além disso, observe que C'_1 tem paridade ímpar. Portanto, pelo teorema 1.3, existe um circuito C'_2 M' -alternado de paridade par. Logo, se $e \notin C'_2$, então C_2 é um circuito conformal de H com paridade par que não contém e . Por outro lado, se $e \in C'_2$, então $H' = C'_1 \cup C'_2$ é um subgrafo próprio de H , já que $E(C'_1) < E(C_1)$ e H é cúbico. Sendo assim, por hipótese de indução, H' contém um circuito C' de paridade par que não contém e . Ainda mais, como a conformalidade de um grafo é transitiva, C' é um circuito conformal de G .

Desta maneira, escolha o circuito conformal C de G de paridade par e que não contém e com comprimento mínimo. Seja M um emparelhamento perfeito de G tal que $M \cap C$ é um emparelhamento perfeito de C .

Lema 4.4 *Toda aresta removível de $G - e$ está em $C \cup M$.*

Prova. Suponha que $G - e$ contenha uma aresta removível $f \notin C \cup M$. Então, $G - e - f$ é um grafo bipartido coberto por emparelhamentos. Ainda mais, a orientação pfaffiana D fixada para $G - e$ também é pfaffiana em $G - e - f$. Como e tem suas pontas em partes distintas de $G - e - f$, a adição de e em $G - e - f$ produz um grafo coberto por emparelhamentos. Assim, $G - f$ é coberto por emparelhamentos. Como $f \notin C \cup M$, C também é um subgrafo conformal de $G - f$.

Como o Caso 1 não se aplica, $G - f$ é pfaffiano. Por outro lado, uma orientação pfaffiana de $G - e - f$ não pode ser estendida para $G - f$ porque C é um subgrafo conformal de $G - f$ com paridade par, e concluimos, pelo teorema 3.8, que $G - f$ é não pfaffiano. Assim, toda aresta removível de $G - e$ está em $C \cup M$. ■

Pelo lema 4.4 e o primeiro item do lema 4.2, as pontas de e têm grau 3 em G . Se G contém um vértice $z \notin V(C) \cup \{u, v\}$, então concluimos, pelo lema 4.2, que existe uma aresta $f \in (\nabla(z) \setminus M)$ removível em $G - e$. Assim, $V(G) = V(C) \cup \{u, v\}$.

Agora, suponha que C contenha uma corda f . Então, $C + f$ é a união de dois circuitos conformais C' e C'' de G que não contém e . Como G é simples, C' e C'' tem tamanho menor que C . Como C possui paridade par, um de C' e C'' , suponha C' , tem paridade par. Então, C' é um circuito conformal de G com paridade par que não contém e de tamanho menor que C , o que contradiz a escolha de C . Assim, C não contém uma corda.

Como G é um brace, todo vértice de G tem grau pelo menos três. Assim, todo vértice de C tem que ser adjacente ou a u ou a v . Como u e v têm grau três em G , concluimos que $|C| = 4$ e $G = K_{3,3}$. ■

Capítulo 5

Caracterização de Grafos Pfaffianos

Em 1986, Lovász e Plummer apresentaram em seu livro [9] uma caracterização de grafos pfaffianos que, à primeira vista, parece ser não muito complicada, mas que pode ser utilizada para um bom entendimento do complexo ferramental da teoria sobre grafos cobertos por emparelhamentos, mais especificamente sobre decomposição em orelhas e a função $(b + p)$. Nosso objetivo neste capítulo é utilizar todo este arcabouço para demonstrar o teorema 5.1 e, assim, compreender os detalhes acerca desta teoria.

5.1 Teorema Principal

Teorema 5.1 *Seja G um grafo coberto por emparelhamentos tal que $(b + p)(G) \leq 1$. Então, G é não pfaffiano se, e somente se, existirem uma coleção $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de circuitos alternados de G e uma orientação D das arestas de G tais que:*

- (i) toda aresta de G pertence a um número par de elementos de $\mathcal{C}$; e,*
- (ii) um número ímpar de elementos de $\mathcal{C}$ tem paridade par, segundo a orientação D .*

Prova. Suponha primeiro que existam uma coleção $\mathcal{C}$ e uma orientação D que satisfaçam as duas condições acima. Então, pelo lema 1.1, temos que G é não pfaffiano.

Por outro lado, assuma agora que G é não pfaffiano. Mostraremos, por indução em $|E(G)|$, que existem uma coleção $\mathcal{C}$ e uma orientação D que satisfazem as condições (i) e (ii).

Por hipótese, $(b + p)(G) \leq 1$. Além disso, sabemos que os grafos K_2 e C_{2n} , para $n \geq 2$, são planares e, logo, pfaffianos. Assim, G é distinto destes grafos. Pelo teorema 3.7, G tem uma orelha $(b + p)$ -removível R . Então, $(b + p)(G - R) \leq (b + p)(G) \leq 1$.

Suponha primeiro que $G - R$ é não pfaffiano. Pela hipótese de indução, existem uma coleção $\mathcal{C}$ de circuitos alternados de $G - R$ e uma orientação D das arestas de $G - R$ que satisfazem as condições (i) e (ii). Então, a coleção $\mathcal{C}$ e a orientação das arestas de G , obtida a partir de D orientando as arestas de R como desejarmos, satisfazem as condições do teorema para o grafo G , já que todos os circuitos de $\mathcal{C}$ também são circuitos de G . Logo, neste caso, G também é não pfaffiano, como mostra a figura 5.1.

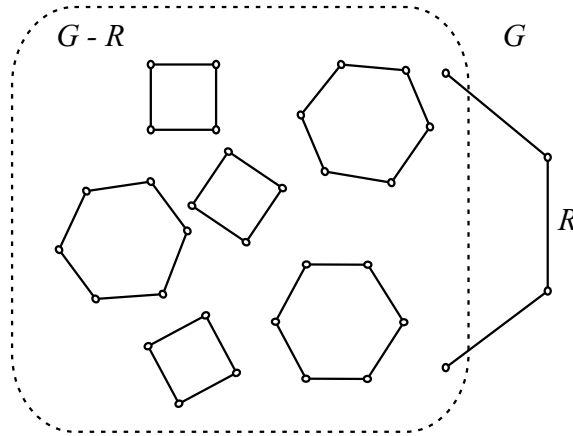


Figura 5.1: Uma coleção de circuitos $\mathcal{C}$ de $G - R$.

Agora, assumamos que $G - R$ é pfaffiano. Sendo assim, seja D uma orientação pfaffiana de $G - R$. Então, todo circuito alternado de $G - R$ possui paridade ímpar. Seja M um emparelhamento perfeito de G tal que $M - E(R)$ é um emparelhamento perfeito em $G - R$. Seja C um circuito M -alternado de G que contenha R . Como R possui um número ímpar de arestas, podemos orientar suas arestas de tal maneira que C possua paridade ímpar. Como G é não pfaffiano, então, pelo teorema 1.3, existe um circuito M -alternado C' de G que possui paridade par. Observe que, como todos os circuitos alternados de $G - R$ têm paridade ímpar, logo C' contém R , como mostra a figura 5.2.

Sendo assim, $C \oplus C'$ é uma coleção de circuitos pares em $G - R$. Como $(b+p)(G - R) \leq 1$, podemos aplicar o teorema 3.6 para deduzir que $C \oplus C'$ é a diferença simétrica entre uma coleção $\mathcal{L}$ de circuitos alternados de $G - R$. Mais ainda, todo circuito de $\mathcal{L}$ possui paridade ímpar. Agora, seja $\mathcal{C} = \mathcal{L} \cup \{C, C'\}$. Segue que cada aresta de G pertence a um número par de circuitos de $\mathcal{C}$ e C' é o único circuito de $\mathcal{C}$ com paridade par. Portanto, as condições (i) e (ii) são satisfeitas para o grafo G . Logo, concluímos que o teorema é verdadeiro. ■

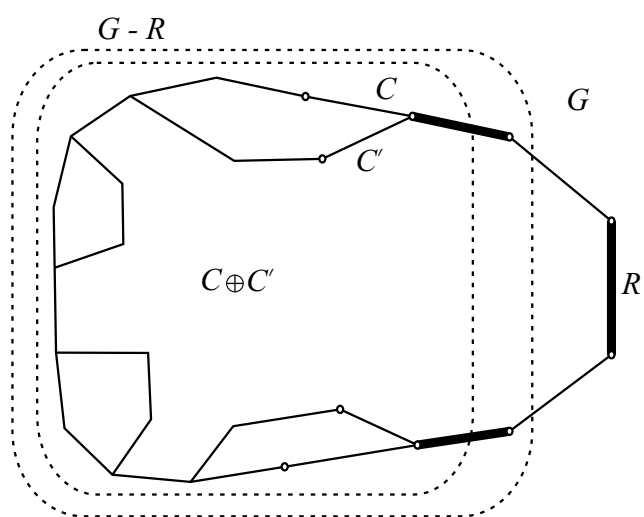


Figura 5.2: Dois circuitos C e C' com paridades distintas em G e $C \oplus C'$.

Capítulo 6

Considerações Finais

Estudar o problema da orientação pfaffiana de grafos definido a partir de circuitos alternados nos permitiu uma abordagem diferente das outras até então elaboradas, o que nos abriu caminho para o desenvolvimento de alguns resultados relevantes, como o lema que nos diz quando um grafo é não pfaffiano e a prova do teorema que garante que uma orientação pfaffiana independe de um emparelhamento, no capítulo 1, parte do caso 3 da demonstração do teorema que caracteriza grafos bipartidos pfaffianos, no capítulo 4, e o teorema que caracteriza grafos pfaffianos, no capítulo 5.

Já no capítulo 3, onde tratamos de grafos cobertos por emparelhamentos, priorizamos os principais tópicos sobre esta teoria que são úteis para o estudo de orientações pfaffianas de grafos. Porém, mesmo assim, optamos por não descrever algumas demonstrações, principalmente as relacionadas à decomposição em orelhas e à função $(b + p)$, pois, para tanto, teríamos conteúdo suficiente para um novo trabalho e precisaríamos nos afastar do contexto de orientações pfaffianas.

Infelizmente, apesar de a prova da caracterização de grafos planares pfaffianos ser um algoritmo, não nos preocupamos com sua implementação, assim como não nos preocupamos em mostrar um algoritmo eficiente para indicar quando um grafo bipartido é pfaffiano ou não. Além disso, não apresentamos uma caracterização de grafos quase bipartidos pfaffianos utilizando a abordagem de circuitos alternados. Tais assuntos podem ser vistos como contribuições futuras para o nosso trabalho.

Portanto, podemos concluir que o trabalho descrito nesta dissertação procura tratar boa parte dos resultados conhecidos sobre orientações pfaffianas sob um ponto de vista diferente dos mais comumente abordados e esperamos ter expressado de forma clara e objetiva o que nos propusemos a fazer.

Referências Bibliográficas

- [1] J. A. Bondy e U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1976.
- [2] S. Norine C. H. C. Little e L. Teo. A new proof of a characterization of pfaffian bipartite graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 91:123–126, 2004.
- [3] M. H. de Carvalho e C. H. C. Little. Vector spaces and the petersen graph. *Submitted*.
- [4] I. Fischer e C. H. C. Little. A characterization of pfaffian near bipartite graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 82:175–222, 2001.
- [5] P. W. Kasteleyn. Dimer statistics and phase transitions. *J. Math. Phys.*, 4:287–293, 1963.
- [6] C. H. C. Little. A characterization of convertible (0,1)-matrices. *J. Combin. Theory Ser. B*, 18:187–208, 1975.
- [7] C. H. C. Little e F. Rendl. Operations preserving the pfaffian property of a graph. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 50:248–257, 1991.
- [8] L. Lovász. Matching structure and the matching lattice. *J. Combin. Theory Ser. B*, 43:187–222, 1987.
- [9] L. Lovász e D. M. Plummer. *Matching Theory*. Elsevier Science, 1986.
- [10] C. L. Lucchesi M. H. de Carvalho e U. S. R. Murty. On the number of dissimilar pfaffian orientations of graphs. 1999.
- [11] C. L. Lucchesi M. H. de Carvalho e U. S. R. Murty. On a conjecture of lovász concerning bricks: I. the characteristic of a matching covered graph. *J. Combin. Theory Ser. B*, 85:94–136, 2002.
- [12] C. L. Lucchesi M. H. de Carvalho e U. S. R. Murty. On a conjecture of lovász concerning bricks: Ii. bricks of finite characteristic. *J. Combin. Theory Ser. B*, 85:137–180, 2002.

-
- [13] C. L. Lucchesi M. H. de Carvalho e U. S. R. Murty. Optimal ear decompositions of matching covered graphs and bases for the matching lattice. *J. Combin. Theory Ser. B*, 85:59–93, 2002.
 - [14] C. L. Lucchesi M. H. de Carvalho e U. S. R. Murty. Notes on pfaffian orientation of graphs. 2003.
 - [15] C. L. Lucchesi M. H. de Carvalho e U. S. R. Murty. On minimal non-pfaffian graphs. *Notes*, 2005.
 - [16] W. McCuaig. Brace generation. *Journal of Graph Theory*, 38:124–169, 2001.
 - [17] A. A. A. Miranda e C. L. Lucchesi. Pfaffian graphs. Relatório técnico, 2008.
 - [18] A. A. A. Miranda e C. L. Lucchesi. A polynomial time algorithm for recognizing near-bipartite graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30:171–176, 2008.
 - [19] P. D. Seymour N. Robertson e R. Thomas. Permanents, pfaffian orientations and even directed circuits. *To appear in Ann. Math.*
 - [20] Z. Szigeti. The two ear theorem on matching-covered graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 74:104–109, 1998.
 - [21] R. Thomas. A survey of pfaffian orientations of graphs. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Madrid, Spain*.
 - [22] W. T. Tutte. *Graph Theory As I Known It*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Clarendon Press, Oxford, 1998.
 - [23] L. Valiant. The complexity of computing the permanent. *Theoretical Computer Science*, 8:189–201, 1979.
 - [24] V. V. Vazirani e M. Yannakakis. Pfaffian orientations, 0-1 permanents and even cycles in directed graphs. *Discrete Appl. Math.*, 25:179–190, 1989.