

Elementos de Contorno para Análise Isogeométrica  
de Sólidos Elásticos com Vincos

# Elementos de Contorno para Análise Isogeométrica de Sólidos Elásticos com Vincos

Márcio Artacho Peres

Tese apresentada à Faculdade de Computação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Paulo Aristarco Pagliosa

Campo Grande - MS  
2021

# Agradecimentos

Dedico esta tese a meus pais Narciso (in memoriam) e Maria Inês, com toda minha gratidão, por tudo que fizeram por mim, sempre me incentivando a buscar novos conhecimentos.

Agradeço minha esposa Magda e meu filho Mateus pelo companheirismo, apoio e paciência, principalmente nos momentos em que não pude lhes dar atenção.

Registro também meu agradecimento ao Prof. Dr. Paulo A. Pagliosa, grande parceiro de projeto, pela colaboração, paciência e seus conhecimentos repassados durante o curso.

Muito obrigado ao IFMS, por permitir meu afastamento das atividades laborais a fim do estudo e desenvolvimento deste trabalho, estimulando a pesquisa científica.

# Resumo

Peres, M. A. *Elementos de Contorno para Análise Isogeométrica de Sólidos Elásticos com Vincos*. Tese (Doutorado em Ciência da Computação), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2021.

O método dos elementos de contorno (MEC) é uma importante alternativa para solução numérica de diversos problemas derivados da mecânica do contínuo. Em mecânica dos sólidos, mais especificamente, o método é atrativo pois pode requerer somente uma discretização das superfícies dos corpos em análise, com consequente diminuição da dimensionalidade do sistema discreto. No contexto de *análise isogeométrica* (IGA), o MEC é ainda mais naturalmente atrativo, uma vez que a ideia da IGA é utilizar o modelo geométrico de um objeto — geralmente definido por retalhos de superfícies NURBS produzidos por uma ferramenta CAD — como o próprio modelo de análise, sem emprego de um processo particular de geração de malhas. Recentemente, vários trabalhos que comprovam a viabilidade da IGA podem ser encontrados na literatura. Contudo, ainda há uma série de limitações que impedem a utilização prática da IGA, decorrentes principalmente da dificuldade de imposição de condições de contorno não homogêneas. Nesta tese, efetua-se um estudo dessas limitações e propõe-se uma solução baseada no MEC para análise isogeométrica de sólidos elásticos. O arcabouço resultante permite a modelagem de descontinuidades de forças de superfície através de *elementos descontínuos e/ou nós múltiplos*, sendo a multiplicidade de um nó dada por regiões da superfície delimitadas por curvas de *vincos*. Os elementos de contorno são definidos como retalhos de Bézier associados às faces da *malha elementar* de uma superfície *T-spline*. T-splines foram empregadas no lugar de NURBS por permitirem malhas de pontos de controle não estruturadas com junções em T e pontos extraordinários, sem necessidade de curvas de recorte, mas qualquer representação da qual se possa extrair retalhos de Bézier pode ser adotada. Um procedimento de extração de Bézier para superfícies T-splines genéricas com vincos e um esquema robusto de integração numérica dos termos da equação integral de contorno são introduzidos. O arcabouço é implementado em C++. Um protótipo em MATLAB permite a seleção interativa de grupos de elementos para especificação de condições de contorno representando vínculos genéricos e carregamentos uniformemente distribuídos, pressões e torques, bem como a análise numérica e visualização dos resultados.

Palavras-chave: *método dos elementos de contorno, análise isogeométrica, T-splines.*

# Abstract

Peres, M. A. *Boundary Elements for Isogeometric Analysis of Elastic Solids with Creases*. Thesis (Doctorate in Computer Science), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2021.

The boundary element method (BEM) is an important alternative applied to the numerical solution of various problems derived from continuum mechanics. In solids mechanics, more specifically, the method is attractive as it may require only a discretization of the surfaces of the bodies under analysis, with a consequent decrease in the dimensionality of the discrete system. In the context of *isogeometric analysis* (IGA), the BEM is even more naturally attractive, since the idea behind IGA is to use the geometric model of an object — generally defined by NURBS surface patches generated from a CAD tool — as the analysis model, without the employment of a particular process of mesh generation. Recently, several papers demonstrating the feasibility of IGA can be found in the literature. However, there are still several limitations that prevent the practical use of IGA, mainly due to the difficulty of imposing non-homogeneous boundary conditions. In this thesis, a study of those limitations is carried out, and a solution based on the MEC for isogeometric analysis of elastic solids is proposed. The resulting framework allows the modeling of traction discontinuities by using *discontinuous elements* and/or *multiple nodes*, where the multiplicity of a node is given by surface regions delimited by *crease* curves. The boundary elements are defined as Bézier patches associated with the faces of the *elemental mesh* of a *T-spline* surface. T-splines are employed instead of NURBS since they allow non-structured control point meshes, with T-joints and extraordinary points, without the need for trimming curves. Nevertheless, any geometric representation that can be transformed into Bézier patches is supported. A Bézier extraction procedure for generic T-splines with creases and a robust numerical integration scheme for the boundary integral equation are introduced. The framework is implemented in C++. A prototype in MATLAB allows the interactive selection of groups of elements for specifying boundary conditions that represent generic constraints and uniformly distributed tractions, pressures, and torques, as well as the numerical analysis and visualization of results.

**keywords:** *boundary element method, isogeometric analysis, T-splines.*

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e justificativa . . . . .	1
1.2 Objetivos e visão geral da tese . . . . .	5
1.3 Organização do texto . . . . .	9
<b>2 Método dos Elementos de Contorno</b>	<b>10</b>
2.1 Considerações iniciais . . . . .	10
2.2 Modelo matemático do problema . . . . .	10
2.3 Formulação do MEC . . . . .	15
2.3.1 Discretização da equação integral de contorno . . . . .	19
2.3.2 Descontinuidade de forças de superfície . . . . .	22
2.3.3 Montagem do sistema linear . . . . .	23
2.3.4 Cálculo de deslocamento em pontos internos . . . . .	24
2.4 Considerações finais . . . . .	25
<b>3 NURBS e T-splines</b>	<b>26</b>
3.1 Considerações iniciais . . . . .	26
3.2 NURBS . . . . .	26
3.3 T-splines . . . . .	38
3.3.1 Extração de Bézier para faces regulares . . . . .	43
3.3.2 Extração de Bézier para faces irregulares . . . . .	51
3.3.3 Pontos de colocação . . . . .	56
3.4 Considerações finais . . . . .	58
<b>4 Arcabouço proposto</b>	<b>59</b>
4.1 Considerações iniciais . . . . .	59
4.2 Descrição geral do arcabouço proposto . . . . .	59

4.3	Modelo de análise . . . . .	65
4.4	Integração numérica . . . . .	74
4.4.1	Integral quase singular . . . . .	75
4.4.2	Integral singular . . . . .	77
4.4.3	Integral singular fraca . . . . .	78
4.4.4	Comparação e proposta de subdivisão em triângulos . . . . .	80
4.5	Considerações finais . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>84</b>
5.1	Considerações iniciais . . . . .	84
5.2	Cilindro vazado . . . . .	85
5.3	Cubos . . . . .	86
5.4	Viga biengastada . . . . .	89
5.5	Mola . . . . .	90
5.6	Tube . . . . .	91
5.7	Chapa com furos . . . . .	93
5.8	Bloco com pressão interna . . . . .	95
5.9	Considerações finais . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>97</b>
6.1	Discussão dos resultados . . . . .	97
6.2	Trabalhos futuros . . . . .	98
<b>A</b>	<b>Formato .be</b>	<b>101</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>104</b>

# Lista de Figuras

2.1	Tensão em um ponto $q$ na direção $\mathbf{n}$ . . . . .	11
2.2	Componentes do tensor de tensões de Cauchy. . . . .	12
2.3	Deformação de um elemento de linha infinitesimal. . . . .	13
2.4	Domínio infinito $\Omega^*$ conteúdo $\Omega + \Gamma$ . (Fonte: Pagliosa [30].) . . . . .	18
2.5	Ponto singular sobre o contorno acrescido de $\Omega_\epsilon$ . (Fonte: Pagliosa [30].) . . . . .	19
2.6	Uma malha de elemento de contorno para um cilindro vazado. . . . .	20
2.7	Descontinuidade de forças de superfície. . . . .	22
2.8	Emprego de nós múltiplos e elementos descontínuos. . . . .	24
3.1	Curva de Bezier de grau $p = 3$ . . . . .	28
3.2	B-spline quadrática com $ \mathcal{C}  = 8$ e polígono de controle. . . . .	28
3.3	NURBS quadrática com $ \mathcal{C}  = 8$ . . . . .	31
3.4	Funções base de grau $p = 4$ para um vetor de nós aberto e não uniforme. . . . .	32
3.5	Inserção de nós em uma Curva NURBS. . . . .	34
3.6	Funções de base da curva após a inserção de nós. . . . .	34
3.7	Elevação de ordem e inserção de nós. . . . .	35
3.8	NURBS: espaço global e espaço paramétrico. . . . .	37
3.9	T-malha e superfície. . . . .	39
3.10	T-malha com descontinuidade geométrica. . . . .	40
3.11	Malha elementar. . . . .	41
3.12	Extração de elemento de Bézier. . . . .	42
3.13	Bases de Bernstein para elemento de Bézier bidimensional. . . . .	43
3.14	T-malha estendida: valores de intervalos de nós. . . . .	44
3.15	Cálculo dos vetores de nós locais. . . . .	45
3.16	Funções definidas a partir de um vetor de nós. . . . .	46
3.17	Funções de forma associadas à âncora. . . . .	47
3.18	Função bidimensional associada à âncora. . . . .	48
3.19	Relação do elemento (em azul) com os domínios $\Omega_\alpha$ , $\Omega_\beta$ , $\Omega_\gamma$ e $\Omega_\delta$ . . . . .	49

3.20	Funções de base dos elementos de Bézier após a inserção de nós. . . . .	49
3.21	Exemplos a extração de Bézier com aresta de vinco. . . . .	51
3.22	Extração de Bézier bidimensional. . . . .	52
3.23	Sistemas de coordenadas local do vértice ( $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ e $\delta$ ) e do elemento $e$ . . . . .	53
3.24	Pontos de controle: Bézier e T-Spline. . . . .	54
3.25	Associação dos pontos de controle: Bézier e T-Spline. . . . .	55
3.26	Pontos de controle com arestas de vinco: Bézier e T-Spline. . . . .	56
3.27	Cálculo do ponto de colocação de uma âncora . . . . .	57
4.1	Modelo geométrico da T-malha. . . . .	60
4.2	Diagrama de classes C++. . . . .	61
4.3	Protótipo: componentes visuais. . . . .	62
4.4	Protótipo: Vetores. . . . .	63
4.5	Mapa de cores da malha deformada. . . . .	64
4.6	Diagrama de classes MATLAB. . . . .	65
4.7	Combinação entre malhas. . . . .	66
4.8	Pontos de colocação na combinação de malhas. . . . .	68
4.9	Valores nodais de deslocamento e força de superfície. . . . .	68
4.10	Exemplo de prescrição de condição de contorno. . . . .	71
4.11	Exemplo hipotético de uma malha e montagem do sistema. . . . .	72
4.12	Integração regular/quase singular. . . . .	77
4.13	Sistema de coordenadas de um elemento e da região triangular. . . . .	79
4.14	Simulação ponto fonte $s$ próximo à borda. . . . .	80
4.15	Comparação da precisão numérica da integração singular. . . . .	81
4.16	Proposta de subdivisão em triângulos e regiões. . . . .	83
5.1	Cilindro vazado com condições de contorno prescritas. . . . .	85
5.2	Cilindro vazado com componentes e mapa de cores. . . . .	86
5.3	Cubo com especificações e mapas de cores. . . . .	87
5.4	Cubo deformado. . . . .	87
5.5	Cubo modelado com combinação de malhas. . . . .	88
5.6	Cubo deformado com mapa de cores. . . . .	89
5.7	Viga com condições de contorno prescritas. . . . .	89
5.8	Viga deformada com mapa de cores. . . . .	90
5.9	Mola espiral com condições de contorno prescritas. . . . .	90
5.10	Mola espiral deformada. . . . .	91
5.11	Tubo com condições de contorno prescritas. . . . .	92

5.12	Tubo deformado. . . . .	92
5.13	Chapa com Furos com condições de contorno prescritas. . . . .	94
5.14	Bloco com condições de contorno prescritas. . . . .	95
5.15	Bloco deformado com mapa de cores. . . . .	96

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e justificativa

A simulação de fenômenos físicos em computador é fundamental em diversas áreas, tais como engenharia de estruturas, engenharia automobilística, engenharia aeroespacial, robótica, e previsão de fenômenos naturais, entre outras. No campo da computação gráfica, a simulação baseada em física tem evoluído motivada pela necessidade de aplicações gráficas fornecerem cada vez mais realismo, como pode ser comprovado na indústria de entretenimento, tanto em animações e efeitos especiais em filmes, bem como jogos digitais. Essas aplicações se diferenciam na precisão de seus cálculos, precisão visual e eficiência computacional, uma vez que cada tipo de aplicação exige mais um aspecto diferente.

A simulação computacional de problemas físicos para aplicações em ciências e engenharia geralmente emprega modelos de objetos cuja análise requer métodos precisos de solução, com o objetivo de testar produtos, teorias e assim prever com a maior acurácia possível o comportamento desses objetos antes de sua construção e experimentação física. Portanto, nesse caso, a precisão dos resultados é mais importante que o tempo de processamento para obtê-los.

Por outro lado, em aplicações de computação gráfica, tais como animações e efeitos especiais, há mais ênfase na precisão visual, tolerando-se resultados numericamente menos acurados quando comparados a aplicações destinadas à ciências e engenharia. Em aplicações interativas e em tempo real, especialmente jogos digitais, o tempo de processamento é essencial, principalmente para permitir a interação do animador, e a utilização de modelos mais simplificados é usual, o que requer a solução no menor tempo possível, tolerando-se resultados numericamente menos precisos, porém com qualidade visual plausível do ponto de vista do observador. Já em animações e efeitos especiais em aplicações não interativas, como por exemplo em filmes, o tempo de processamento e a precisão nos resultados não são primordiais, permitindo a utilização de modelos com mais detalhes com o objetivo de se alcançar um maior grau de realismo na simulação.

A simulação de corpos deformáveis elasticamente, foco deste trabalho, envolve a resolução de equações diferenciais da mecânica de meios contínuos para as quais, nos casos gerais de geometria e condições de contorno, não há soluções analíticas. Apenas soluções aproximadas podem ser obtidas, através do emprego de métodos numéricos,

baseados na discretização do volume e/ou da superfície de um sólido. As equações diferenciais que modelam o comportamento do corpo são transformadas em um sistema de equações algébricas cuja solução fornece, em pontos do sistema discreto, os valores de variáveis tais como deslocamentos, deformações, tensões e forças de superfície e de volume. Valores em outros pontos podem ser obtidos por interpolação a partir dos valores nodais e de funções interpoladoras, ou funções de forma, definidas para cada elemento da discretização.

Os métodos numéricos mais amplamente utilizados para simulação de corpos deformáveis são o *método dos elementos finitos* (MEF) e o *método dos elementos de contorno* (MEC). No MEF, a discretização é realizada em todo o volume do corpo através de uma malha composta por elementos de volume (elementos finitos), por exemplo, tetraedros ou hexaedros, no caso tridimensional. Como resultado de tal discretização, as equações diferenciais do modelo matemático são transformadas em um sistema de equações algébricas cuja solução fornece os deslocamentos (e as deformações) em cada ponto nodal. Os deslocamentos nos pontos interiores de um elemento finito podem ser obtidos por interpolação a partir dos valores dos nós nos quais o elemento incide. O MEF, mais utilizado na engenharia, tem como objetivo encontrar uma aproximação para uma função contínua que satisfaça alguma expressão de equilíbrio para cada um dos elementos.

No MEC, explorado nesta tese, a discretização é realizada na superfície do corpo através de uma malha composta por elementos de superfície, por exemplo triângulos. Alguns problemas requerem a discretização também no volume, porém mesmo nesses casos, as incógnitas do sistema de equações algébricas referem-se a valores nodais sobre o contorno; valores em pontos internos são calculados a partir destes. A principal vantagem do MEC é a redução de dimensionalidade do problema, reduzindo o número de incógnitas, e, conseqüentemente tornando-se mais eficiente quanto ao consumo de memória e tempo de processamento, quando comparado ao MEF. Apesar dessas vantagens, o MEC é considerado um método com um custo computacional elevado para aplicações interativas.

Tanto no MEC quanto no MEF, o domínio espacial no qual as equações diferenciais parciais governantes são definidas é discretizado em malhas de superfície ou de volume, as quais representam o modelo geométrico. A malha deve ser predefinida através dos elementos, nós e relacionamentos entre eles, e é a base da formulação dos métodos numéricos baseados em malha. A geração de malhas, sob certas circunstâncias, é ainda um processo árduo e demorado, e é considerado um problema para ambos os métodos.

A precisão dos resultados de um método numérico baseado em malha está relacionada com a qualidade da malha. Existem diversos critérios referente as formas dos elementos que podem ser utilizados para definir a qualidade da malha e sua influência na precisão dos métodos numéricos. Por exemplo, no caso de triângulos, resultados mais precisos são alcançados com aqueles mais próximos de equiláteros possíveis. Esse é um desafio enfrentado por esta classe de métodos, a geração de uma malha com qualidade suficiente tal que não afete a precisão dos resultados.

A aproximação do modelo geométrico à forma do objeto é controlada pela quantidade e ordem dos elementos utilizados, com maior evidência nas regiões curvas. Uma aproximação mais grosseira implica em resultados com menor precisão e uma malha

mais refinada pode gerar resultados mais acurados, contudo, o aumento da ordem e do número de elementos influenciam no processamento e consumo de memória, tanto na geração quanto na manipulação da malha. Uma maneira de limitar essa quantidade é detalhar a geometria apenas em regiões específicas as quais requerem resultados mais precisos.

Em 2005, Hughes [18] propôs o conceito de *análise isogeométrica* (IGA, do inglês *isogeometric analysis*), que ofereceu uma abordagem alternativa para problemas em métodos de elementos finitos e de contorno (MEF e MEC). No IGA, os valores desconhecidos do problema físico são aproximados através das mesmas funções de forma utilizadas na representação do modelo geométrico do objeto. Hughes obteve excelentes resultados em problemas da mecânica dos fluídos e análise estrutural com objetos representados por NURBS. As NURBS (em inglês, *Non-Uniform Rational B-splines*), ou B-splines racionais não uniformes [32], tem sido a tecnologia predominante da indústria de software CAD (em inglês, *Computer Aided Design*) há vários anos, permitindo que geometrias antes aproximadas por funções polinomiais tenham representação exata. Outra vantagem do método é, uma vez criado o modelo inicial, a possibilidade de refinamento da malha sem a necessidade do CAD. Cottrell, Hughes e Bazilevs [13] comentam que a IGA busca por integrar as áreas de CAD e análise de elementos finitos, e apresentam aplicações em IGA voltadas para elasticidade linear, análise estrutural, fluídos e outros.

O IGA foi originalmente apresentado em trabalhos com foco no MEF, tais como [13] [8] [11] [19]. Entretanto, conforme comentado, a principal característica do MEC, a qual requer apenas a discretização no contorno (redução de dimensionalidade do problema), facilita a integração com o CAD.

O conceito isogeométrico baseado no MEC teve seus primeiros trabalhos publicados por Simpson [40] [39], os quais adotaram NURBS como representação do contorno para simulação de elasticidade 2D, dando origem ao termo, denominado pelos autores, em inglês *IGABEM*. Beer et al. [7] [5] [4] aplicaram os mesmos conceitos para análise geotécnica em problemas de escavações subterrâneas também em 2D, e recentemente Beer [6] publicou um trabalho semelhante para simulações tridimensionais, considerando condições heterogêneas de terrenos e materiais não lineares. O IGA baseado no MEC foi empregado em problemas potenciais 3D [17], problemas de propagação de fraturas [31] [44], no cálculo da distribuição de pressão em superfícies de sustentação [12], otimização da superfície baseada em materiais heterogêneos [43], otimização da topologia [49] e simulação de fenômenos acústicos [41].

A principal limitação quanto à utilização das NURBS como modelo geométrico é a não possibilidade de refinamento local da malha. A aplicação de condições de contorno específicas pode requerer uma modelagem mais detalhada da malha, obtida através de refinamento local, conseqüentemente, proporcionando um controle de continuidade das funções de forma da superfície. Uma das formas de contornar a limitação é a utilização de superfícies de recorte. Hughes [26] apresenta uma revisão sobre superfícies de recorte aplicadas à IGA, e admite que o problema do agrupamento topológico correto entre tais superfícies é ainda um desafio. As técnicas utilizadas para representação de superfícies de recorte apresentam uma insuficiência de correspondência entre a parametrização e pontos de controle da superfície original e a superfície recortada. Além disso, quando são agrupadas, pequenas frestas são inevitáveis entre elas.

Outras alternativas encontradas pelos softwares CAD foram a utilização de superfícies de subdivisão (SubD) [48] e T-splines [38]. As superfícies de subdivisão tem sido amplamente utilizadas na indústria da animação, para efeitos especiais e para entretenimento. A Pixar lançou um padrão denominado OpenSubdiv [33], o qual foi adotado por outras empresas de animação, tal como a DreamWorks [1]. SubD estão disponíveis no software Rhinoceros 3D [27], enquanto as T-splines são usadas no Autodesk Fusion 360 [2].

T-splines foram definidas por Sederberg [38], e constituem uma extensão de NURBS com maior flexibilidade. Uma T-spline permite, em sua malha de controle, T-junções e vértices extraordinários, resultando em uma T-malha não estruturada capaz de oferecer vantagens consideráveis tanto para geometria quanto para a análise, como por exemplo, refinamento local, e utilização de uma malha única para modelagem de geometrias mais complexas. Em outro trabalho Sederberg et al. [37] apresentam, além de um algoritmo para transformação de uma NURBS em T-spline que objetiva a eliminação de pontos de controle supérfluos, um algoritmo de refinamento local em T-malhas. Dörfel, Jüttler e Simeon [16], analisaram resultados da IGA aplicado em elementos finitos 2D para elasticidade linear utilizando refinamento local adaptativo sobre T-splines e obtiveram melhores resultados comparados ao uso de NURBS. Algumas variantes das T-splines também são encontradas na literatura aplicadas à problemas da IGA, voltadas para aprimorar o refinamento, como PHT-splines [29], e LR-Splines [10]. Um dos pontos negativos da utilização da T-splines em IGA é que nem todas são apropriadas, ou conformes para a análise (em inglês, *analysis suitable*). Xin [20] apresenta um estudo sobre a classe de T-splines consideradas conformes para análise, as quais precisam satisfazer alguns requisitos, como independência linear das funções de base.

Bazilevs [3] foi um dos precursores a explorar as T-splines na IGA, incentivado pelas características do modelo geométrico que havia sido empregado em alguns softwares CAD. No estudo sobre fluídos e análise de problemas estruturais baseados no métodos dos elementos finitos 2D e 3D, obteve bons resultados utilizando T-splines estruturadas, aquelas sem a presença de vértices extraordinários. Logo depois, Scott [36], apresentou uma generalização de um trabalho prévio que foi baseado em NURBS [8], utilizando os elementos de Bézier extraídos de uma T-spline os quais puderam ser processados como no MEF tradicional. Borst [15] utilizou dos elementos de Bézier com MEF aplicando técnicas de refinamento da T-malha. Scott [35] desenvolveu o conceito isogeométrico baseado no MEC para problemas tridimensionais elastostáticos lineares em superfícies T-spline não estruturadas, com uma extensão do processo de extração de Bézier para tratar os vértices extraordinários por meio de interpolação linear. Liu [22] apresentou uma alternativa para tal extensão, a partir do conceito de T-splines ponderadas [23].

Os resultados apresentados por estes trabalhos comprovam a eficiência da abordagem do IGA em conjunto com o MEC, porém os exemplos apresentados são baseados em formas geométricas comuns e além disso, com condições de contorno particulares, uniformes, e muitas vezes definidas diretamente no ponto de controle, apenas para demonstração da eficiência do método, não evidenciando a maneira correta de imposição na superfície.

Malardo e Ruocco [24] [25] tiveram a mesma impressão sobre tais trabalhos e comentaram que condições de contorno não uniformes podem ser aplicadas diretamente no ponto de controle apenas em regiões em que a NURBS é interpolante à superfície.

Tais trabalhos abordaram IGA baseada no MEC para problemas elastostáticos em NURBS, com foco na proposta de um método para imposição de condição de contorno correta. Lian [21] emprega IGA no MEC com T-splines para análise e otimização em elasticidade linear e propõe métodos para aplicação correta das condições de contorno com valores definidos na superfície. Contudo, os modelos apresentados ainda não são suficientes para utilização em problemas práticos reais.

Recentemente, Taus et al. [45] abordaram o IGA no MEC para problemas de elasticidade linear, baseado em elementos de Bézier, com propósito de novas abordagens de esquemas de integração numérica. Taus comenta da prescrição das condições de contorno por superfície de elemento e utiliza modelos com maior complexidade, porém não detalha as arestas de vinco, não apresenta nenhum esquema de tratamento de descontinuidades, nem como os valores nodais de restrição ou carregamento são atribuídos a partir de valores na superfície.

Na literatura pesquisada, observou-se que existe uma lacuna entre a descrição das equações, modelos e teoria, e o resultado apresentado nos experimentos. Mais especificamente, para reproduzir os experimentos citados são necessários complementos do modelo matemático ou geométrico que não são mencionados nos textos. Como exemplo, Scott [35] não aborda elementos descontínuos, vincos, combinações de T-malhas no modelo por ele proposto, contudo, apresenta nos resultados um cubo, cujo modelo contém descontinuidades, ocasionando dificuldades na compreensão e reprodução do trabalho conforme a formulação desenvolvida. Além do mais, a maioria das condições de contorno aplicadas são homogêneas, enquanto as outras, presume-se que foram definidas manualmente, visto que, pela descrição do esquema proposto, não é possível concluir que tais definições tenham sido determinadas como resultado da própria formulação. Um outro exemplo, Beer [5] utiliza, nas aproximações dos valores físicos por interpolação, outras funções de forma, diferentes daquelas utilizadas para representar o modelo geométrico da NURBS, para as condições de contorno, sem detalhes de como podem ser definidas. A distinção conflita com o conceito isogeométrico.

Na revisão bibliográfica também foi constatado deficiência de ferramentas disponíveis que facilitam a manipulação da geometria, tanto como material de estudos para pesquisadores que queiram iniciar suas pesquisas nessa área, quanto como aplicação com funcionalidades que possibilitam a simulação de problemas práticos. Nguyen et al. [28] apresenta uma revisão de uma implementação da IGA baseada nos MEF sobre os aspectos computacionais, além de aplicações e implementações da IGA baseadas em NURBS já disponíveis, dentre elas ISOGAT [46] e GeoPDEs [14]. Outras implementações da IGA com o MEC para NURBS foram disponibilizadas por Simpson [39] com uma abordagem bidimensional, e Beer [4] em 3D, porém esta última implementação fornecida trata-se de domínios semi-infinitos. Na pesquisa realizada não foi encontrada nenhuma aplicação de IGA no MEC para modelos genéricos disponível para utilização.

## 1.2 Objetivos e visão geral da tese

O objetivo geral desta tese é um estudo sobre a aplicação prática do método dos elementos de contorno à análise isogeométrica elastostática de sólidos. Por aplicação prática entende-se uma que não somente ateste a viabilidade da análise isogeométrica

com o MEC, como visto em outros trabalhos na literatura, mas que seja efetivamente útil à solução de problemas reais envolvendo modelos submetidos a restrições de movimento e carregamentos genéricos. A justificativa para análise elastostática é que, além de ser um caso importante em diversas aplicações de engenharia, o modelo matemático é um dos mais simples da mecânica dos sólidos. Assim, não é preciso considerar, no estudo corrente, efeitos decorrentes de ações dinâmicas e/ou de não linearidade do material. O escopo do estudo, contudo, não se limita a aplicações de engenharia. De fato, nesta tese, considera-se a hipótese que as simulações de fenômenos físicos em computador serão baseadas em modelos matemáticos cada vez mais precisos, não apenas em ciências e engenharia, mas também em animações e aplicações gráficas em geral, conforme se dá a evolução do hardware, notadamente as unidades de processamento gráfico, ou GPUs. (É o que se observa, por exemplo, com o traçado de raios em tempo real em GPU e sua recente aplicação em jogos digitais.)

Complementa o objetivo geral da tese, o desenvolvimento orientado a objetos de um arcabouço computacional para IGA com o MEC. O módulo responsável pela análise numérica, em particular, deve ser tanto quanto possível independente da representação geométrica do sólido. Para tal, o modelo de análise é definido, como usual, por uma malha contendo nós — pontos discretos aos quais são associados as grandezas do problema físico, isto é, deslocamentos e forças de superfície — e elementos de contorno. Quaisquer dois elementos se intersectam somente em segmento de curva comum, e a união de todos os elementos resulta na superfície do sólido. Os nós podem não estar sobre a superfície e, portanto, não têm elementos incidentes, como em um malha poligonal. A forma de um elemento é definida por uma *função de forma*, usada para interpolar, sobre pontos da superfície do elemento, grandezas associadas aos nós que nele exercem influência. Além disso, como qualquer implementação do MEC, o módulo de análise deve permitir a modelagem de descontinuidades de forças de superfície. Dois esquemas são considerados: *elementos descontínuos* e *nós múltiplos*. Elementos adjacentes que são descontínuos são influenciados por subconjuntos disjuntos de nós e, conseqüentemente, têm deslocamentos e forças de superfície independentes um do outro. Um nó múltiplo, por sua vez, tem mais de um valor de força de superfície associado. A *multiplicidade* de um nó múltiplo é definida pelo número de *regiões*<sup>1</sup> distintas contendo elementos influenciados pelo nó. No modelo proposto, tais regiões são separadas por curvas de *vinco*, isto é, curvas cujos pontos têm continuidade geométrica  $G^0$ . Portanto, vincos são essenciais para modelagem de descontinuidades de forças de superfície. Em adição, o modelo de análise é dotado de um conjunto de *pontos de colocação*: pontos distintos sobre a superfície usados para computação da *equação integral de contorno*, um ponto para cada nó do modelo, como detalhado no Capítulo 2.

Saliente-se que o modelo de análise, tal como descrito, pode ser usado, por exemplo, para elementos triangulares. Nesse caso, os nós são os vértices dos triângulos e as funções de forma de um elemento dadas pelas coordenadas baricêntricas do triângulo, com os pontos de colocação nas posições dos vértices. No caso de IGA, os elementos de contorno do modelo proposto são derivados de um processo denominado *extração de elementos de Bézier*, ou simplesmente extração de Bézier, como em outras abordagens da literatura. Note-se que um elemento de Bézier não é necessariamente um retalho de Bézier, mas sua forma depende dos *polinômios de Bernstein*, que são as funções de base

<sup>1</sup>Região, admite-se, é uma denominação algo genérica, mas o significado específico que aqui se atribui é apreendido ao longo do texto conforme o contexto em que é utilizado.

(polinomiais) de Bézier. A extração de Bézier consiste justamente em determinar, para um dado trecho da superfície correspondente a um elemento de contorno, um mapa que leva os polinômios de Bernstein às funções de forma do elemento. O mapa depende dos nós que influenciam o elemento e do grau desejado para superfície. A princípio, qualquer representação geométrica da superfície de um sólido com vincos, desde que dotada de um procedimento de extração de Bézier com *classificação de elementos por região* e determinação de pontos de colocação distintos, pode ser utilizada para geração do modelo de análise.

Um dos objetivos específicos da tese consiste em um módulo do arcabouço dedicado à extração de Bézier para superfícies *T-splines* com vincos. Uma *T-spline* tem sua forma definida por uma malha de pontos de controle chamada *T-malha*, a qual pode conter *T-junções* e *pontos extraordinários*, como detalhado no Capítulo 3. *T-splines* foram adotadas primeiramente porque são mais flexíveis e simples que superfícies NURBS; por exemplo, *T-splines* admitem refinamento local e não empregam curvas de recorte. Para tal, o algoritmo de extração de Bézier para *T-malhas* não estruturadas sugerido por Scott et al. [35] é estendido para *T-malhas* com regiões delimitadas por *arestas de vinco*, resultando em um procedimento de extração de Bézier unificado para *T-splines* genéricas *conformes para análise* (apesar de mais flexíveis que NURBS, a extração de elementos de Bézier é restrita a *T-malhas* cuja topologia satisfaz certas condições, como estabelecido no Capítulo 3). No mesmo diapasão, propõe-se uma abordagem unificada de geração de pontos de colocação para o caso de *T-malhas* com vincos.

O arcabouço conta ainda com um módulo específico dedicado à integração numérica da equação integral de contorno, passo fundamental em qualquer implementação do MEC. A integração é efetuada para cada ponto de colocação e cada elemento de contorno, e pode ser singular — o ponto de colocação está no interior do elemento sendo integrado —, quase singular — o ponto de colocação está fora mas “perto” do elemento — ou regular — o ponto de colocação está fora e “longe” do elemento. A integração regular e quase singular conta com um esquema de subdivisão adaptativa do elemento em regiões de integração, cada região com um número de pontos de Gauss estabelecido conforme um conjunto de *regras de integração*. O refinamento do esquema de subdivisão e as regras de integração são definidas em função de relação entre um tamanho da região de integração e uma distância entre o ponto de colocação e a região de integração. Para a integração singular, propõe-se um novo esquema de subdivisão do elemento que é eficiente e mais preciso que a subdivisão em triângulos sugerida por Beer et al. [5], como demonstrado no Capítulo 4.

Os módulos de extração de Bézier de *T-splines* e de análise, incluindo a integração numérica, são escritos em C++. Em adição, tem-se um protótipo em MATLAB que, além de implementar completamente a análise com o MEC, funciona como interface com o usuário. O protótipo permite a visualização da geometria do modelo de análise — fornecida pelo módulo de extração de Bézier —, bem como a seleção interativa de elementos para especificação de condições de contorno e visualização dos resultados da análise. O protótipo será publicado na Internet e, até onde se pôde avaliar, é a primeira aplicação em MATLAB com as referidas funcionalidades disponível publicamente. Todas as imagens de superfícies (derivadas de *T-splines*) exibidas nas figuras da tese foram geradas pela aplicação.

No arcabouço proposto, as condições de contorno são prescritas diretamente sobre

os elementos de contorno do modelo de análise, usualmente através da interface gráfica provida pela aplicação em MATLAB, como introduzido acima. Uma vez selecionado um grupo de elementos, pode-se restringir seus deslocamentos ao longo de uma direção, ou então aplicar carregamentos uniformemente distribuídos ao longo de uma direção, pressões na direção da normal à superfície e torques. Muito embora as condições de contorno sejam impostas a pontos da superfície, estas devem ser transportadas para os nós do modelo de análise, pois são nesses que as variáveis do problema físico são discretamente amostradas (vale lembrar que os nós podem ser múltiplos e, em geral, são correspondentes a pontos de controle que não estão na superfície). A interpolação dos deslocamentos e forças de superfície nodais deve reproduzir, tanto quanto possível, os valores prescritos na superfície.

Agora, suponha dois elementos de uma mesma região, isto é, não separados por vincos, cada qual submetido a carregamentos distintos, por exemplo, mas influenciados por um ou mais nós em comum. Pode ser impossível atribuir um *único* valor de força de superfície aos nós em comum tal que a interpolação dos valores nodais resulte nos carregamentos distintos aplicados. Essa é uma dificuldade em IGA porque um nó pode exercer influência em vários elementos nos quais sequer incide. A abordagem proposta na tese para essa questão, quando comparada a um número de trabalhos publicados na literatura, certamente representa um avanço no sentido da aplicação prática da IGA, como pretendido no estudo realizado. Contudo, a possibilidade de aplicação de condições de contorno arbitrárias em regiões quaisquer do contorno, e não apenas sobre elementos, fundamental em problemas de contato, por exemplo, ainda é um problema em aberto.

Em suma, os objetivos específicos e contribuições da tese são:

- Estudo e desenvolvimento de um arcabouço computacional modular orientado a objetos para análise isogeométrica de sólidos elásticos com vincos pelo MEC.
- Proposição de um modelo de análise pelo MEC com suporte a descontinuidades de forças de superfície através de elementos descontínuos e nós múltiplos. Nós múltiplos são definidos a partir de regiões de elementos limitadas por curvas de vinco.
- Desenvolvimento de um algoritmo unificado para extração de Bézier e determinação de pontos de colocação de T-splines conformes para análise, com T-malhas contendo T-junções, pontos extraordinários e arestas de vinco.

As contribuições da tese são:

- O arcabouço pode ser empregado para obtenção de soluções de referência de problemas elastostáticos em aplicações de simulação em geral.
- O modelo de análise pode ser utilizado tanto para análise baseada em malha com elementos planares bem como na análise isogeométrica de elementos curvos de ordem superior, foco deste trabalho.
- Utilização de T-malhas mais genéricas, contendo T-junções, pontos extraordinários e arestas de vinco.

- Um esquema robusto para integração numérica de termos singulares da equação integral de contorno.
- Uma aplicação em MATLAB que implementa o módulo de análise e funciona como interface gráfica com o usuário, para visualização da geometria e dos resultados da análise, bem como especificação de condições de contorno.
- Um esquema de aplicação de restrições de deslocamentos e carregamentos distribuídos, pressões e torques diretamente em grupos de elementos de contorno.

### 1.3 Organização do texto

O restante do texto está organizado em 5 capítulos.

No Capítulo 2 será apresentado o modelo matemático, um resumo dos conceitos referentes ao método dos elementos de contorno (MEC) para aplicação em um problema de análise elastostática 3D, com definições da mecânica do contínuo, tais como, forças, tensões, deformações, equilíbrio estático e elasticidade, além da discretização das equações de contorno e montagem do sistema linear. O Capítulo 3 é responsável por introduzir o modelo geométrico, a partir das curvas e superfícies B-splines, NURBS e T-splines, esta última utilizada como representação das superfícies dos sólidos modelados neste trabalho. Neste capítulo é apresentado o método de extração de elementos de Bézier para T-splines, o qual representa a discretização do modelo para aplicação do MEC. No Capítulo 4 é descrito o modelo de análise, por meio dos aspectos de implementação da IGA baseada no MEC. São apresentadas funcionalidades de um protótipo, em MATLAB, que possibilita a visualização e interação com o objeto da simulação. O capítulo também aborda o sistema que transposta os valores prescritos de condições de contorno na superfície para os nós através de um exemplo prático e a montagem do sistema linear para um exemplo hipotético. O Capítulo 5 ilustra os resultados da simulação numérica em diversos sólidos, com diferentes graus de complexidade, contendo arestas de vinco, descontinuidades, combinação entre malhas, com prescrição de condições de contorno variadas, a fim de comprovar a utilização dos conceitos tratados no trabalho e apresentar as funcionalidades da aplicação. As conclusões do trabalho são discutidos na Capítulo 6, no qual também são listados alguns trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Método dos Elementos de Contorno

### 2.1 Considerações iniciais

Neste capítulo, é apresentado um resumo do método de elementos de contorno (MEC) para aplicação em um problema de análise elastostática 3D. Na Seção 2.2, o problema é posto matematicamente à luz da mecânica do contínuo, através de definições de forças, tensões, deformações, equilíbrio estático e elasticidade, assim como condições de contorno essenciais e naturais de um corpo. Na Seção 2.3, é apresentada uma solução derivada do método dos *resíduos ponderados*, na qual as equações diferenciais que modelam o problema físico são transformadas na chamada *sentença inversa* de resíduos ponderados, cujas funções ponderadoras são as *soluções fundamentais de Kelvin* para deslocamento e força de superfície. Em seguida, as integrais de volume são transformadas em integrais de superfície resultando na equação de contorno, a qual é solucionada a partir da discretização do contorno em um conjunto de *elementos* relacionados através de um conjunto de *nós*. Como visto na Seção 2.3.1, tal discretização permite que a equação de contorno possa ser escrita como a soma de integrais do contorno de cada elemento, resultando em um sistema de equações algébricas, cuja solução são valores nodais referentes às variáveis do problema físico. Na Seção 2.3.2, esquemas para tratar descontinuidade de forças de superfície são apresentados, sendo eles: *nós múltiplos* e/ou *elementos descontínuos*. Por fim, a Seção 2.3.3 comenta sobre a montagem do sistema linear de equações. Os conceitos sobre elasticidade e método dos elementos de contorno compilados nesse capítulo foram baseados nos trabalhos de Brebbia et al. [9], Pagliosa [30] e Siqueira et al. [42].

### 2.2 Modelo matemático do problema

Considere um corpo *contínuo* (aquele cuja material é distribuído continuamente em seu volume, preenchendo completamente o espaço que ocupa), que em um dado instante  $t_0 = 0$ , ocupa um volume  $V_0$  no espaço  $\mathbb{E}^3$ , delimitado por uma superfície  $S_0$ , e sobre o qual atuam forças externas. É admitido que o corpo tenha *vínculos* suficientes para restringir os movimentos de corpo rígido de parte de suas partículas, isto é, translações e rotações que não causam deformações. Como consequência da aplicação das forças, as partículas do corpo que não estão sujeitas a algum vínculo sofrem um

*deslocamento* de suas posições atuais e passam a ocupar, em um instante  $t > t_0$ , novas posições que definem a *configuração deformada* do corpo. Nessa configuração, o corpo ocupa um volume  $V$ , delimitado por uma superfície  $S$ . Assume-se que a aplicação das forças externas seja feita estaticamente, isto é, que o tempo  $t$  seja longo o suficiente tal que impactos e outros efeitos dinâmicos decorrentes da aplicação possam ser negligenciados.

### Tensões e deformações

As forças externas podem ser de dois tipos: *forças de volume* e *forças de superfície*. As primeiras atuam sobre elementos de volume ou de massa do interior do corpo, como, por exemplo, a força da gravidade. O vetor  $\mathbf{b}$  denota a força externa por unidade de volume que atua sobre um elemento infinitesimal  $dV$  do volume do corpo, no instante  $t$ . Nesta tese, consideram-se somente sistemas de coordenadas cartesianas. A fim de simplificar a notação, símbolo  $\mathbf{b}$  é utilizado para denotar tanto o vetor — que em  $\mathbb{R}^3$  representa uma grandeza cuja magnitude e direção independem do sistema de coordenadas adotado — quanto a matriz coluna  $[b_1 \ b_2 \ b_3]^T$  ou  $[b_x \ b_y \ b_z]^T$  contendo os componentes cartesianos do vetor. Além disso,  $b_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , representa qualquer componente cartesiano de  $\mathbf{b}$ , como por exemplo  $b_1$  ou ainda  $b_x$ .

Forças de superfície são forças de contato que atuam sobre elementos de superfície do contorno do corpo. O vetor  $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$  é utilizado para denotar a força externa por unidade de área, ou *tensão*, que atua sobre um elemento infinitesimal  $dS$  em um plano com normal  $\mathbf{n}$  e que passa por um ponto qualquer,  $q$ , da superfície do corpo, no instante  $t$ . É possível determinar a tensão no ponto  $q$ , na direção de um versor  $\mathbf{n}$ , se o corpo for seccionado por um plano imaginário que passa por  $q$  e tem normal  $\mathbf{n}$ , como ilustrado na Figura 2.1. Nesse caso, a tensão  $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$  representa a *ação interna* que uma das porções do corpo exerce sobre a outra.

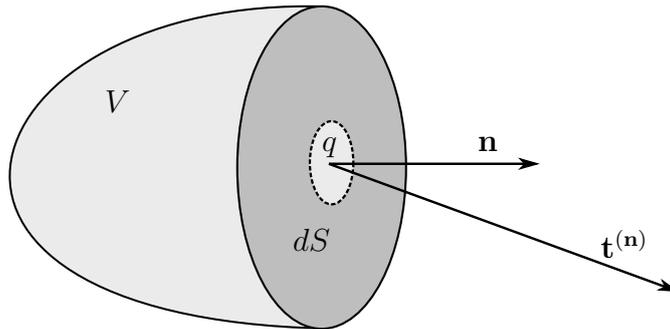


Figura 2.1: Tensão em um ponto  $q$  na direção  $\mathbf{n}$ . (Fonte: Siqueira et al. [42].)

A expressão geral para o vetor de tensão pode ser obtida a partir dos vetores de tensão, no ponto  $q$ , em planos perpendiculares a cada um dos eixos coordenados  $x_i$ . Os componentes cartesianos desses vetores de tensão definem os componentes cartesianos do *tensor de tensões de Cauchy*,  $\boldsymbol{\sigma}$ , no ponto  $q$ , os quais podem ser organizados matricialmente como

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{t}^{(\mathbf{i}_1)} \quad \mathbf{t}^{(\mathbf{i}_2)} \quad \mathbf{t}^{(\mathbf{i}_3)}]^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix},$$

em que  $\sigma_{ij} = t_j^{(i)}$ , para  $1 \leq i, j \leq 3$ , denota um componente qualquer do tensor — o primeiro índice indicando o plano de atuação e o segundo a direção de atuação, considerada positiva no sentido positivo do eixo cartesiano correspondente —, e  $\mathbf{t}^{(i)}$  é o vetor de tensão do plano perpendicular ao eixo  $x_i$ , conforme ilustrado na Figura 2.2. O tensor de tensões de Cauchy no ponto  $q$  representa uma transformação linear, chamada *transformação de tensão de Cauchy*, que leva o vetor normal  $\mathbf{n}$  no vetor de tensão  $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$ . Em coordenadas cartesianas, tal transformação pode ser expressa pelo produto matricial  $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , ou, em *notação indicial*, por  $t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ji}n_j$ , em que o índice  $j$ , repetido uma vez no mesmo termo, é chamado *índice mudo* e indica somatório, ou seja, para  $i = 1, 2, 3$ ,

$$t_i^{(\mathbf{n})} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji}n_j = \sigma_{1i}n_1 + \sigma_{2i}n_2 + \sigma_{3i}n_3.$$

Na ausência de momentos de volume, como admitido aqui, o tensor de tensões de Cauchy é simétrico, isto é,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

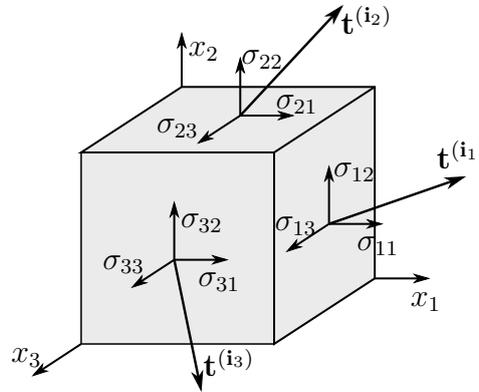


Figura 2.2: Componentes do tensor de tensões de Cauchy. (Fonte: Siqueira et al. [42].)

Se um corpo está em *equilíbrio estático* na configuração deformada, então

$$\int_V \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS = 0. \quad (2.1)$$

A integral de superfície da Equação (2.1) pode ser transformada em uma integral de volume, primeiro aplicando a transformação de tensão de Cauchy e, depois, utilizando o teorema da divergência,

$$\int_S t_i dS = \int_S \sigma_{ji}n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV. \quad (2.2)$$

Combinando as Equações (2.1) e (2.2), é obtida a *equação de equilíbrio*

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV + \int_V b_i dV = 0,$$

ou

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0. \quad (2.3)$$

Em notação indicial, a equação de equilíbrio pode ser escrita como  $\sigma_{j,i,j} + b_i$ , em que a vírgula indica derivada parcial de  $\sigma_{ji}$  em relação a  $x_j$ . Note que  $j$  é índice mudo; logo, para cada direção  $i = 1, 2, 3$ , tem-se  $\sigma_{1i,1} + \sigma_{2i,2} + \sigma_{3i,3} + b_i = 0$ .

Além da continuidade, assume-se que, sob ação de forças externas, um corpo apresentará *pequenos deslocamentos* e *pequenas deformações*, quando comparados com a unidade. Em mecânica do contínuo, as descrições de deformação são baseadas em medidas quantitativas de certos tipos de deslocamentos relativos entre partículas vizinhas do corpo. (Um sólido, em geral, resiste a tais deslocamentos relativos de suas partes, o que resulta nas tensões internas discutidas anteriormente; contudo, nem todos os tipos de deslocamentos relativos causam deformações e tensões em um sólido, como é o caso da parte rotacional de um movimento de corpo rígido.) Sejam, então, duas partículas vizinhas  $p$  e  $q$  de um corpo que, na configuração não deformada, ocupam as posições  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ , respectivamente, em que o vetor  $d\mathbf{X}$  representa o elemento de linha infinitesimal, de comprimento  $dL$ , formado por  $p$  e  $q$ , como mostrado na Figura 2.3.

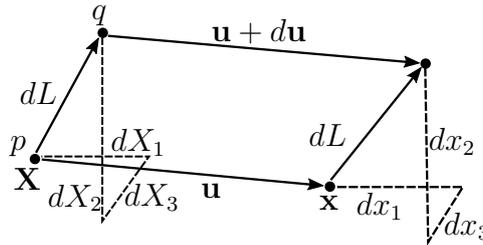


Figura 2.3: Deformação de um elemento de linha infinitesimal. (Fonte: Siqueira et al. [42].)

Observe que a representação da posição do ponto, no espaço  $\mathbb{E}^3$ , onde a partícula  $p$  está, é dada por um *vetor*  $\mathbf{X}$ , uma vez que, fixado um sistema de coordenadas cartesianas, podemos definir  $\mathbf{p} = O + \mathbf{X}$ , em que  $O$  é a origem do sistema.

Após a aplicação das forças externas, as partículas passam a ocupar, no instante  $t$ , as posições  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$  e  $\mathbf{x} + d\mathbf{u}$ , respectivamente, em que  $d\mathbf{u}$  é o deslocamento relativo de  $q$  em relação a  $p$ . O vetor de *deslocamento relativo unitário* é definido como

$$\frac{du_i}{dL} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{dX_j}{dL},$$

a qual pode ser escrita abreviadamente como

$$\frac{d\mathbf{u}}{dL} = \mathbf{J}_u \mathbf{n},$$

em que  $\mathbf{n}$  é o versor na direção de  $d\mathbf{X}$ . A matriz quadrada  $\mathbf{J}_u$ , chamada *matriz de deslocamentos relativos unitários*, pode ser composta a partir da soma de duas matrizes, uma antissimétrica  $\boldsymbol{\Omega}$  e outra simétrica  $\boldsymbol{\epsilon}$ . Esta última leva  $\mathbf{n}$  à parcela do deslocamento relativo unitário devido às deformações do material na vizinhança de  $p$ . Como os deslocamentos são pequenos, pode-se escrever, em notação indicial,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.4)$$

O tensor  $\boldsymbol{\epsilon}$ , simétrico, tem seis componentes distintos definidos em função de somente três componentes de deslocamentos. Daí, resulta que as deformações não são todas independentes, mas devem satisfazer certas *condições de compatibilidade*, a fim de que o campo de deslocamentos associado seja um campo contínuo e possível de ser obtido a partir das ações externas aplicadas ao corpo. As condições de compatibilidade de deformações são

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} = \epsilon_{ik,jl} + \epsilon_{jl,ik}. \quad (2.5)$$

## Relações constitutivas elásticas

Tensões e deformações podem ser associadas através das chamadas *equações constitutivas*. Neste trabalho é considerado somente materiais contínuos que são *homogêneos*, *isótropos* e idealmente *elásticos*. Um material é homogêneo se tem propriedades idênticas em todos os pontos; isótropo em relação a determinadas propriedades se estas forem as mesmas em todas as direções; e elástico se um corpo formado pelo material recupera completamente sua forma original, cessadas as forças externas causadoras da deformação, e quando há uma relação unívoca entre o estado de tensão e deformação, para uma dada temperatura.

As relações constitutivas elásticas, chamadas *lei de Hooke generalizada*, são nove equações que expressam os componentes de tensão como funções lineares homogêneas dos nove componentes de deformação, descritas como

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs} \epsilon_{rs}. \quad (2.6)$$

O tensor de quarta ordem  $\mathbf{C}$ , chamado *tensor de módulos elásticos*, possui 81 componentes, mas devido a simetria de  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\epsilon}$ , é possível considerar, sem perda de generalidade, que  $C_{ijrs} = C_{jirs}$  e  $C_{ijrs} = C_{ijsr}$ . Nesse caso, somente 36 componentes do tensor são independentes. Para materiais isótropos,  $\mathbf{C}$  é um tensor *isótropo*<sup>1</sup> de quarta ordem definido como

$$C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}), \quad (2.7)$$

em que  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé, e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

é o *delta de Kronecker*. A versão isótropa da lei de Hooke generalizada, Equação (2.6), fica

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}. \quad (2.8)$$

As constantes de Lamé são relacionadas com o módulo de cisalhamento  $G$ , o módulo de elasticidade  $E$  (ou módulo de Young) e o coeficiente de Poisson  $\nu$  como segue:

$$G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

## Modelo matemático geral

Em resumo, o modelo matemático que descreve o comportamento de um corpo de material contínuo, homogêneo, isótropo e elástico, submetido a forças estáticas causadoras de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, é composto de: equações de equilíbrio (2.3), equações deformação-deslocamento (2.4) e equações constitutivas (2.8), em um total de quinze equações distintas para três deslocamentos e (devido à simetria dos tensores de deformações e tensões) seis deformações e seis tensões.

As seguintes *condições de contorno* podem existir para as equações de campo do modelo:

---

<sup>1</sup>Um tensor isótropo é aquele cujos componentes são invariantes ao sistema de coordenadas cartesianas adotado.

1. *Deslocamentos prescritos*, com os três deslocamentos  $u_i$  conhecidos no contorno do corpo.
2. *Forças de superfície prescritas*, com os três componentes de tensão  $t_i = \sigma_{ji}n_j$  conhecidos no ponto onde o contorno do corpo possui normal  $\mathbf{n}$ .
3. *Condições de contorno mistas*, com (a) deslocamentos prescritos sobre uma parte do contorno e forças de superfície prescritas no restante do contorno, ou (b)  $u_i$  ou  $t_i$  prescrito em cada ponto do contorno, mas não ambos.

A solução de um problema envolvendo quinze equações para quinze incógnitas não é uma tarefa fácil. Há várias maneiras de reformular o modelo matemático com o propósito de se obter um número menor de incógnitas e um número menor de equações. O método mais direto consiste em substituir a Equação (2.4) em (2.8) para obter as tensões em termos dos gradientes de deslocamentos, e, então, substituir o resultado na Equação (2.3) alcançando três equações diferenciais parciais de segunda ordem para os três componentes de deslocamento:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,jk} + b_j = 0. \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) é conhecida como *equação de Navier da elasticidade*. (Uma vez que os deslocamentos são as incógnitas e que estes são relacionados às forças causadoras da deformação, as condições de compatibilidade (2.5) não necessitam ser adicionadas ao modelo.)

## 2.3 Formulação do MEC

Seja um corpo elástico de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  para o qual deseja-se resolver a equação de Navier (2.9). Tal solução fornece os deslocamentos das partículas do corpo na configuração deformada, a partir dos quais é possível se determinar as deformações e tensões, de acordo com as relações descritas na Seção 2.2. Para a solução, deve-se impor, em partes  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$  (não necessariamente contíguas) do contorno, condições de contorno essenciais  $u_k = \bar{u}_k$  e naturais  $t_k = \bar{t}_k$ , respectivamente.

### Resíduos ponderados

Para a obtenção de uma solução para os deslocamentos, é utilizada, ao invés da equação de Navier, a equação de equilíbrio estático em sua forma indicial,

$$\sigma_{jk,j} + b_k = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.10)$$

Seja o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}_0$ , desconhecido, a solução exata do problema, a qual será aproximada no domínio  $\Omega$  por

$$\mathbf{u}_0 \approx \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i, \quad (2.11)$$

em que  $\alpha_i$  são parâmetros, quase todos incógnitos, e  $\phi_i$  são funções linearmente independentes tomadas de um conjunto completo de funções. Admitindo-se que a função

aproximadora do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  (ou  $u_k$ , em notação indicial) seja  $C^2$  e satisfaça exatamente as condições de contorno essenciais e naturais do problema, mas não a equação de equilíbrio (2.10), então resta um *resíduo*  $\sigma_{jk,j} + b_k \neq 0$  em  $\Omega$ . O propósito é tornar tal resíduo tão “pequeno” quanto possível, o que pode ser feito através de uma distribuição ponderada sobre o domínio,

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0, \quad (2.12)$$

em que  $\mathbf{u}^*$  é uma *função ponderadora* que representa um campo de deslocamentos qualquer sobre um domínio  $\Omega^*$  qualquer.<sup>2</sup> Assume-se que os gradientes do campo de deslocamentos ponderador  $\mathbf{u}^*$  sejam pequenos em relação à unidade (ou seja, as relações deslocamento-deformação (2.4) são válidas para  $\mathbf{u}^*$ ) e que as equações constitutivas elásticas (2.6) sejam satisfeitas em  $\Omega^*$ .

A Equação (2.12) pode ser generalizada para o caso da função aproximadora  $u_k$  não satisfazer as condições de contorno do problema. Nesse caso,

$$\begin{aligned} u_k - \bar{u}_k &\neq 0 && \text{em } \Gamma_u, \text{ e} \\ t_k - \bar{t}_k &\neq 0 && \text{em } \Gamma_t \end{aligned} \quad (2.13)$$

são os erros, ou resíduos, cometidos ao se aproximar as condições de contorno essenciais e naturais, respectivamente. Para se obter uma expressão que relacione os erros de domínio e de contorno, integra-se por partes — utilizando, por exemplo, o teorema da divergência na Equação (2.12),

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk} \epsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma, \quad (2.14)$$

em que  $\epsilon_{jk}^*$  é o campo de deformações associado à função ponderadora  $u_k^*$ . Devido à simetria do tensor de módulos elásticos  $C_{jkl i}$ , o primeiro termo da Equação (2.14) pode ser escrito como

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \epsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \epsilon_{jk} d\Omega. \quad (2.15)$$

Integrando-se por partes o primeiro termo de (2.14) e levando em consideração a reciprocidade (2.15), obtém-se a *forma transposta* da Equação (2.12),

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u_k t_k^* d\Gamma. \quad (2.16)$$

Integrando-se por partes duas vezes o primeiro termo e depois substituindo as condições de contorno na Equação (2.16), tem-se a *sentença original* de resíduos ponderados para o problema elastostático,

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma} (t_k - \bar{t}_k) u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_k - \bar{u}_k) t_k^* d\Gamma, \quad (2.17)$$

---

<sup>2</sup>Como tensões dependem das deformações e estas são derivadas de deslocamentos, o integrando da Equação (2.12) envolve derivadas segundas dos deslocamentos, por isso a ordem de continuidade  $C^2$  requerida para a função aproximadora  $\mathbf{u}$ .

supondo uma função  $\mathbf{u}$  que aproxima a equação diferencial em  $\Omega$  e as condições de contorno em  $\Gamma$ .

Admitiu-se até agora que a função aproximadora  $\mathbf{u}$  possui ordem de continuidade tal que  $\sigma_{jk,j} \neq 0$  em  $\Omega$  (desde que  $b_k \neq 0$ ). Em muitos casos é possível, e vantajoso, reduzir a ordem de continuidade requerida para a função  $\mathbf{u}$  através de uma integração por partes da sentença original (2.17). Além disso, suponha que a função aproximadora satisfaça as condições de contorno essenciais, isto é,  $u_k \equiv \bar{u}_k$  em  $\Gamma_u$ . Assim, a Equação (2.17) fica

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \epsilon_{jk}^* d\Omega - \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{t}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma. \quad (2.18)$$

Na Equação (2.18), uma ordem menor de continuidade para  $\mathbf{u}$  é requerida, ao custo de uma ordem maior para a função ponderadora  $\mathbf{u}^*$ . Esta equação é uma *forma fraca* de resíduos ponderados para o problema elastostático, supondo que a função  $\mathbf{u}$  aproxima a equação diferencial em  $\Omega$  e as condições de contorno naturais em  $\Gamma_t$ .

Integrando-se por partes o termo de domínio da Equação (2.18), obtém-se a *sentença inversa* de resíduos ponderados para o problema elastostático,

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \bar{t}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u_k t_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{u}_k t_k^* d\Gamma. \quad (2.19)$$

A derivação da formulação do método dos elementos de contorno parte dessa equação, adotando-se uma função ponderadora que satisfaz as equações diferenciais do modelo matemático em  $\Omega^*$ . Para o problema elastostático, usualmente emprega-se a *solução fundamental de Kelvin* para um sólido infinito sujeito a uma força unitária concentrada aplicada em um ponto qualquer do sólido.

Uma força concentrada em um ponto,  $s \in \Omega$ , pode ser considerada como o caso limite de uma força de volume atuando em uma esfera com centro em  $s$  quando o raio da esfera tende a zero e a intensidade da força de volume aumenta de tal forma que sua resultante permaneça constante. Essa abstração é descrita através da *função delta de Dirac*, definida como

$$\delta(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{s} \neq \mathbf{q}, \\ \infty & \text{se } \mathbf{s} = \mathbf{q}, \end{cases}$$

em que  $\mathbf{s}$  é ponto de aplicação da carga unitária concentrada, chamado de *ponto fonte*, e  $\mathbf{q}$  é um ponto qualquer do domínio.<sup>3</sup> Para uma função qualquer,  $g(\mathbf{q})$ , a função delta de Dirac satisfaz a *propriedade de seleção*

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{q}) \delta(\mathbf{s}, \mathbf{q}) d\Omega = \begin{cases} g(\mathbf{q}) & \text{se } \mathbf{q} \in \Omega, \\ 0 & \text{se } \mathbf{q} \notin \Omega \cup \Gamma. \end{cases} \quad (2.20)$$

Seja, então, um sólido elástico definido por um volume  $\Omega^*$  e uma superfície  $\Gamma^*$  no infinito. Suponha que, após a aplicação de uma força unitária,

$$b_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \delta(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \delta_{ik},$$

<sup>3</sup>Para simplificar a notação, por vezes refere-se a um ponto,  $p$ , pelo seu vetor posição,  $\mathbf{p}$ . Assim, o “ponto  $\mathbf{p}$ ” deve ser lido como o “ponto dado pelo vetor posição  $\mathbf{p}$ ”.

em um ponto fonte  $\mathbf{s} \in \Omega^*$ , o sólido hipotético assume um estado de equilíbrio estático com deslocamentos  $U_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q})$  e, para um ponto  $\mathbf{q} \in \Gamma^*$ , forças de superfície  $T_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ , isto é

$$\sigma_{ij k, j}^* + \delta(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \delta_{ik} = 0, \quad (2.21)$$

em que o índice  $i$  indica a direção da força concentrada unitária aplicada no ponto fonte  $\mathbf{s}$  e o índice  $k$  indica a direção da resposta em  $\mathbf{q}$ . As funções  $\mathbf{U}^*$  e  $\mathbf{T}^*$  são as soluções fundamentais de Kelvin para deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, deduzidas como:

$$U_{ij}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right\}, \quad \text{e} \quad (2.22)$$

$$T_{ij}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}]r_{,k}n_k - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\}, \quad (2.23)$$

em que  $\mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathbf{s}$  e  $r = \|\mathbf{r}\|$  é a distância entre  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{q}$ .

Considere, agora, que  $\Omega \cup \Gamma$  seja uma sub-região finita de um meio infinito  $\Omega^*$ , tal como ilustrado na Figura 2.4, e que  $\mathbf{s} \in \Omega$ . Escrevendo a forma inversa, Equação (2.19), para cada direção  $i$  (com  $u_k^* = U_{ik}^*$  e  $t_k^* = T_{ik}^*$ ), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij k, j}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) u_k(\mathbf{q}) d\Omega + \int_{\Omega} U_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) b_k(\mathbf{q}) d\Omega = \\ - \int_{\Gamma} U_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) t_k(\mathbf{q}) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) u_k(\mathbf{q}) d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.24)$$

em que a notação foi abreviada sem distinguir  $u_k$  e  $\bar{u}_k$  e  $t_k$  e  $\bar{t}_k$ .

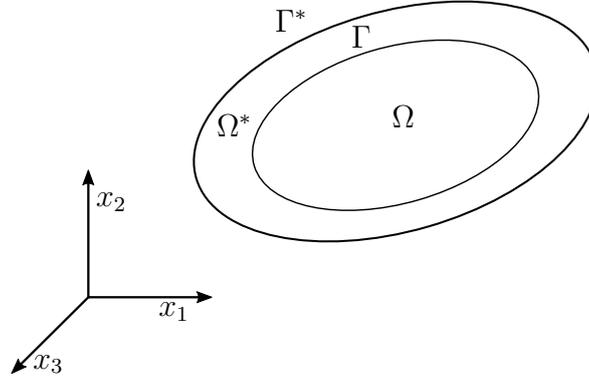


Figura 2.4: Domínio infinito  $\Omega^*$  contendo  $\Omega + \Gamma$ . (Fonte: Pagliosa [30].)

Usando-se a Equação (2.21) e aplicando-se a propriedade de seleção do delta de Dirac, Equação (2.20), o primeiro termo do lado esquerdo da Equação (2.24) pode ser escrito como

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \delta_{ij} u_k(\mathbf{q}) d\Omega = u_k(\mathbf{s}).$$

Logo, a Equação (2.24) fica

$$u_i(\mathbf{s}) = - \int_{\Gamma} T_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) u_k(\mathbf{q}) d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) t_k(\mathbf{q}) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) b_k(\mathbf{q}) d\Omega. \quad (2.25)$$

Essa equação, conhecida como *identidade Somigliana*, permite a determinação dos deslocamentos em um ponto  $\mathbf{s} \in \Omega$  a partir dos valores dos deslocamentos e forças de superfície no contorno  $\Gamma$  e das forças de volume em  $\Omega$  (sempre prescritas).

Se o ponto fonte  $\mathbf{s}$  é externo ao contorno do sólido ( $\mathbf{s} \notin \Omega \cup \Gamma$ ), pela aplicação da propriedade de seleção (2.20) a identidade Somigliana resulta em

$$0 = - \int_{\Gamma} T_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) u_k(\mathbf{q}) d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) t_k(\mathbf{q}) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) b_k(\mathbf{q}) d\Omega. \quad (2.26)$$

Caso o ponto fonte  $\mathbf{s}$  esteja sobre o contorno do sólido, ou seja,  $\mathbf{s} \in \Gamma$ , as integrais de contorno da identidade Somigliana apresentam singularidades  $O(1/r)$  e  $O(1/r^2)$  em  $\mathbf{s}$ . Para tratar essas singularidades, adiciona-se ao domínio parte de uma esfera infinitesimal  $\Omega_\varepsilon$  de raio  $\varepsilon$ , centrada em  $\mathbf{s}$ , conforme ilustrado na Figura 2.5. Assim, substituindo-se, na Equação (2.25),  $\Gamma$  por  $\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon$  e  $\Omega$  por  $\Omega \cup \Omega_\varepsilon$ , e tomando o limite para  $\varepsilon$  tendendo a zero, obtém-se

$$C_{ik}(\mathbf{s}) u_i(\mathbf{s}) + \int_{\Gamma} T_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) u_k(\mathbf{q}) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) t_k(\mathbf{q}) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) b_k(\mathbf{q}) d\Omega, \quad (2.27)$$

em que o *termo livre* é um tensor definido como

$$C_{ik}(\mathbf{s}) = \delta_{ik} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) d\Gamma. \quad (2.28)$$

Quando o ponto fonte  $\mathbf{s}$  encontra-se em uma parte suave do contorno, isto é, não estiver sobre uma curva de vinco, tem-se  $C_{ik}(\mathbf{s}) = \delta_{ik}/2$ . O símbolo  $\int$  significa que a integral deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy.

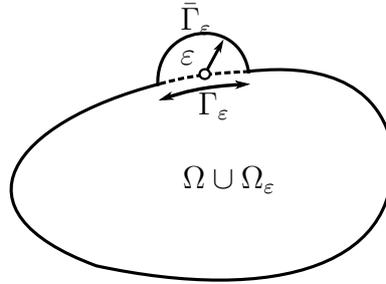


Figura 2.5: Ponto singular sobre o contorno acrescido de  $\Omega_\varepsilon$ . (Fonte: Pagliosa [30].)

A formulação do método dos elementos de contorno é derivada da Equação (2.27), conhecida como *equação integral de contorno* para o problema elastostático. Desconsiderando-se, por ora, as forças de volume, a equação pode ser expressa matricialmente como

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}) \mathbf{u}(\mathbf{s}) + \int_{\Gamma} \mathbf{T}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \mathbf{u}(\mathbf{q}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \mathbf{t}(\mathbf{q}) d\Gamma. \quad (2.29)$$

### 2.3.1 Discretização da equação integral de contorno

Para solucionar a Equação (2.29), propõe-se um modelo no qual o contorno  $\Gamma$  é discretizado em um conjunto de nós,  $\mathcal{N}$ , e um conjunto de elementos,  $\mathcal{B} = \{\Gamma^e\}$ ,

tal que  $\Gamma \cong \bigcup \Gamma^e$  e quaisquer dois elementos se intersectam apenas em um segmento de curva comum a suas fronteiras. A superfície do  $e$ -ésimo elemento é definida por um subconjunto de nós  $\{\mathcal{N}_i^e\} \subset \mathcal{N}$  (leia-se o  $i$ -ésimo nó do  $e$ -ésimo elemento), e um conjunto de *funções de forma*,  $\{S_i^e\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n^e$ . Um nó,  $\mathcal{N}_i \in \mathcal{N}$ , pode influenciar a forma de um subconjunto de elementos,  $\{\mathcal{Y}_i^e\} \subset \mathcal{B}$  (leia-se  $e$ -ésimo elemento do  $i$ -ésimo nó), conforme ilustrado na Figura 2.6.

Neste modelo, a posição de um ponto,  $X$ , em um elemento  $\Gamma^e$ , é dada por

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n^e} S_i^e(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{P}_i^e, \quad (2.30)$$

em que  $\mathbf{P}_i^e$  é a posição de  $\mathcal{N}_i^e$  (não necessariamente em  $\Gamma^e$ ), e  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$  são coordenadas tomadas em relação a um sistema local de coordenadas associado a um domínio paramétrico intrínseco do elemento. O gradiente em  $X$  é dado por

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} = \sum_{i=1}^{n^e} \frac{\partial S_i^e(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} \mathbf{P}_i^e. \quad (2.31)$$

O vetor normal à superfície em  $X$  é  $\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) = \|\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})\|$ . Para qualquer  $\boldsymbol{\xi}$  no domínio paramétrico do elemento, as funções de forma do elemento satisfazem as seguintes propriedades:  $S_i^e(\boldsymbol{\xi}) \geq 0$  (não negatividade), e  $\sum_{i=1}^{n^e} S_i^e(\boldsymbol{\xi}) = 1$  (partição de unidade).

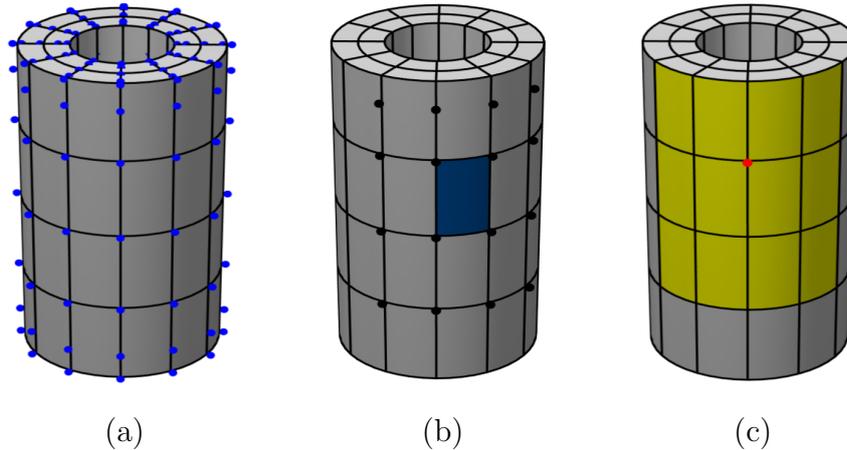


Figura 2.6: Uma malha de elemento de contorno para um cilindro vazado. (a) Nós (em azul) e elementos ( $|\mathcal{N}| = 240$ ,  $|\mathcal{B}| = 144$ ). Os segmentos de curva (em preto) são as arestas dos elementos. (b) Um elemento (em azul) e o subconjunto de nós ( $n^e = |\mathcal{N}_i^e| = 16$ ). (c) Um nó (em vermelho) e um subconjunto de elementos por ele influenciados ( $|\mathcal{Y}_i^e| = 12$ ).

Assim como ocorre com a geometria, as grandezas físicas também podem ser interpoladas a partir de valores associados aos nós de um elemento. Neste trabalho, consideram-se somente elementos *isoparamétricos*, isto é, as mesmas funções de forma são utilizadas tanto para geometria quanto para a física. Assim, o deslocamento de um ponto,  $X$ , em um elemento  $\Gamma^e$  é

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^{n^e} S_i^e(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_i^e,$$

em que  $\mathbf{u}_i^e$  é o deslocamento de  $\mathcal{N}_i^e$ . Na forma matricial, essa equação pode ser escrita como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) = [\mathbf{S}_1^e(\boldsymbol{\xi}) \quad \mathbf{S}_2^e(\boldsymbol{\xi}) \quad \dots \quad \mathbf{S}_{n^e}^e(\boldsymbol{\xi})] [\mathbf{u}_1^e \quad \mathbf{u}_2^e \quad \dots \quad \mathbf{u}_{n^e}^e]^T = \mathbf{S}^e(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}^e, \quad (2.32)$$

em que  $\mathbf{S}_i^e(\boldsymbol{\xi}) = S_i^e(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I} = [\delta_{ij}]$ . De forma similar, a força de superfície em um ponto,  $X$ , em  $\Gamma^e$  é

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) = \mathbf{S}^e(\boldsymbol{\xi}) [\mathbf{t}_1^e \quad \mathbf{t}_2^e \quad \dots \quad \mathbf{t}_{n^e}^e]^T = \mathbf{S}^e(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}^e, \quad (2.33)$$

em que  $\mathbf{t}_i^e$  é a força de superfície, no  $e$ -ésimo elemento, associada ao nó  $\mathcal{N}_i^e$ .

Com a subdivisão do contorno em elementos de contorno, a Equação (2.29) pode ser escrita, matricialmente, como

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}) \mathbf{u}(\mathbf{s}) + \sum_{e=1}^{|\mathcal{B}|} \int_{\Gamma^e} \mathbf{T}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{|\mathcal{B}|} \int_{\Gamma^e} \mathbf{U}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (2.34)$$

Seja  $\Gamma^s$  um elemento contendo o ponto fonte  $\mathbf{s}$ , e  $\boldsymbol{\xi}^s$  as coordenadas paramétricas de  $\mathbf{s}$  em relação ao sistema de coordenadas intrínseco de  $\Gamma^s$ . (O ponto fonte pode estar contido em mais de um elemento caso  $\boldsymbol{\xi}^s$  seja um canto ou um ponto sobre uma aresta do domínio paramétrico.) Então, usando as Equações (2.32) e (2.33), a Equação (2.34) pode ser expressa como

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}) \mathbf{S}^s(\boldsymbol{\xi}^s) \mathbf{u}^s + \sum_{e=1}^{|\mathcal{B}|} \mathbf{H}^e(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \mathbf{u}^e = \sum_{e=1}^{|\mathcal{B}|} \mathbf{G}^e(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \mathbf{t}^e, \quad (2.35)$$

em que

$$\mathbf{H}^e(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \int_{\Gamma^e} \mathbf{T}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \mathbf{S}^e(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad e \quad (2.36)$$

$$\mathbf{G}^e(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \int_{\Gamma^e} \mathbf{U}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \mathbf{S}^e(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (2.37)$$

são as *matrizes de influência* do  $e$ -ésimo elemento.

Como pode ser notado nas Equações (2.36) e (2.37), as soluções fundamentais tendem ao infinito quando o ponto  $\mathbf{x}$  se aproxima do ponto fonte  $\mathbf{s}$ . Mais especificamente,  $\mathbf{U}^*$  (com singularidade  $1/r$ ) e  $\mathbf{T}^*$  (com singularidade  $1/r^2$ ) possuem *singularidade fraca* e *singularidade forte*, respectivamente. Portanto, técnicas de integração apropriadas devem ser empregadas para a determinação da matriz  $\mathbf{G}^e$ , conforme descrita na Seção 4.4. No entanto, a integral da Equação (2.36) não existe, motivo pelo qual é interpretada no sentido do valor principal de Cauchy. Para evitar a computação do valor principal de Cauchy, pode-se empregar uma abordagem conhecida como *truque do movimento do corpo rígido*, resumida a seguir.

Se uma condição de contorno essencial for aplicada em todos os pontos do contorno  $\Gamma_u \equiv \Gamma$  de um domínio finito  $\Omega$ , então todos os componentes das forças de superfícies devem ser zero ( $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ ). Assim, a forma matricial da Equação (2.34) torna-se

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}) = - \int_{\Gamma} \mathbf{T}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}).$$

Substituindo a equação acima na Equação (2.29), obtém-se

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}) [\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{s})] d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \mathbf{t}(\mathbf{s}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (2.38)$$

Pode-se notar, agora, que quando  $\mathbf{x}$  se aproxima de  $\mathbf{s}$ , o termo  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{s})$  tende a zero e, conseqüentemente, a integral do lado esquerdo da Equação (2.38) torna-se fracamente singular. Além disso, na teoria não é mais necessário computar o termo livre  $\mathbf{C}(\mathbf{s})$ . Mesmo assim, no arcabouço proposto o termo livre é computado como

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}) = - \sum_{e=1}^{|\mathcal{B}|} \int_{\Gamma^e} \mathbf{T}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (2.39)$$

utilizando-se, para as integrais fortemente singulares das Equações (2.36) e (2.39), as mesmas técnicas numéricas empregadas para as integrais fracamente singulares, descritas na Seção 4.4.

### 2.3.2 Descontinuidade de forças de superfície

Sejam  $[\mathbf{P}_i]$  e  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_u = |\mathcal{N}|$ , as posições e deslocamentos dos nós  $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_i\}$ , respectivamente. Todo elemento possui um mapa,  $\Lambda_u^e : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ , que define o índice global para todos os nós em  $\{\mathcal{N}_i^e\}$ , isto é, se  $k = \Lambda_u^e(i)$ , então  $\mathcal{N}_i^e = \mathcal{N}_k$ . Portanto,  $\mathbf{t}_i^e \equiv \mathbf{t}_k$  e  $\mathbf{u}_i^e \equiv \mathbf{u}_k$ . Este mapa é implementado de forma trivial por um vetor de índices,  $[\ell_1^e, \ell_2^e, \dots, \ell_{n^e}^e]$ , associado ao elemento  $\Gamma^e$ , em que  $\ell_i^e$  é o índice global do nó  $\mathcal{N}_i^e$ . Nesse caso,  $\Lambda_u^e(i) = \ell_i^e$ .

Agora, sejam  $\mathbf{T} = [\mathbf{t}_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_t$ , as forças de superfície de todos os nós. É bem possível que  $n_t > n_u$ , uma vez que as forças de superfície podem ser *descontínuas*, isto é, um ponto no contorno pode conter múltiplos valores para força de superfície. A descontinuidade da força de superfície pode ocorrer em pontos sobre vincos, como ilustrado na Figura 2.7(a). Em tais pontos, a normal à superfície não é contínua e, em consequência, a força de superfície também é descontínua. Descontinuidades de forças de superfície podem ainda ser devidas a condições de contorno naturais distintas aplicadas em elementos adjacentes, como mostra a Figura 2.7(b). Neste trabalho, são considerados dois esquemas para tratar as descontinuidades de força de superfície: *nós múltiplos e/ou elementos descontínuos*.

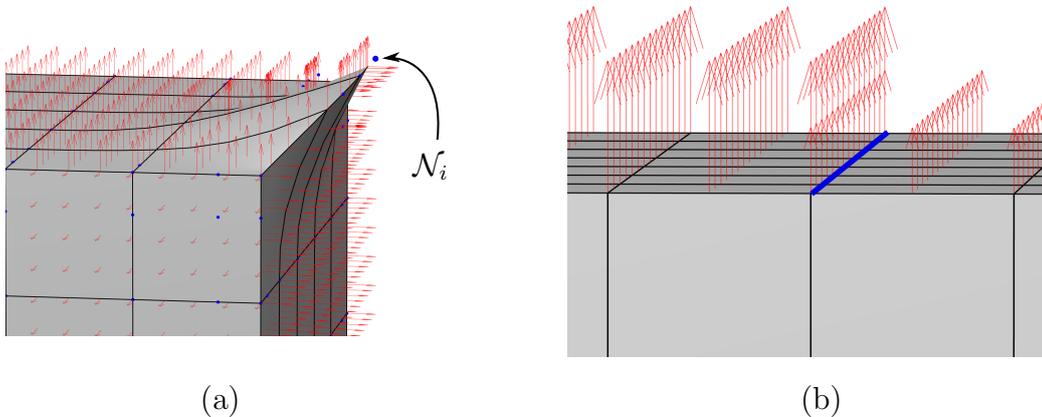


Figura 2.7: Descontinuidade de forças de superfície (vetores em vermelho). (a) Descontinuidade devida à geometria. (b) Descontinuidade devida às condições de contorno naturais. Nesse caso, mesmo em regiões suaves, o modelo proposto considera que os elementos adjacentes devem ser separados por curvas de vinco (em azul).

Um nó múltiplo,  $\mathcal{N}_i$ , possui  $m_i > 1$  forças de superfícies. Para definir a multiplicidade de um nó, é utilizado o termo *região de elementos* para denominar uma parte de  $\Gamma$  delimitada por uma ou mais sequências fechadas de curvas de vinco. Se dois elementos se intersectam em uma curva de vinco, então a superfície sobre a curva tem continuidade geométrica  $G^0$ , isto é, o vetor normal pode ser diferente considerando um ou outro elemento. Por exemplo, todas as curvas entre os elementos da superfície lateral externa e interna e das bases do cilindro vazado da Figura 2.6 são de vinco, e, portanto, o modelo possui quatro regiões de elementos: a superfície lateral externa, a superfície lateral interna e as bases de cima e de baixo. Isso posto, a multiplicidade,  $m_i$ , é o número de regiões distintas contendo os elementos em  $\{\mathcal{Y}_i^e\}$ . Por exemplo, na Figura 2.7(a), o nó  $\mathcal{N}_i$  possui  $m_i = 2$ , pois este influencia elementos em duas regiões diferentes (note que o nó não está no contorno), com uma força de superfície para cada região. É importante mencionar que, no modelo proposto, é necessário curvas de vinco para impor descontinuidades de força de superfície mesmo quando a superfície possui continuidade  $G^1$ , conforme ilustrado na Figura 2.7(b).

Com nós múltiplos, o número valores de forças de superfície de todos os nós é  $n_t = \sum_{i=1}^{n_u} m_i$ . Além do vetor de posições, todo elemento possui também um mapa,  $\Lambda_i^e : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ , que identifica os índices globais dos valores nodais das forças de superfícies, isto é, se  $k = \Lambda_i^e(i)$ , então  $\mathbf{t}_i^e \equiv \mathbf{t}_k$ . Este mapa pode ser facilmente implementado armazenando-se os índices em um vetor  $[r_1^e, r_2^e, \dots, r_{n^e}^e]$ .

Os nós múltiplos podem ser utilizados somente quando há no máximo um valor incógnito de força de superfície. Na Figura 2.8(a), o nó em destaque tem multiplicidade igual a 3, com valores de forças de superfície para as regiões de elementos da face superior, face frontal e face lateral. Os elementos da face superior do cubo têm forças de superfície prescritas, enquanto que os elementos das faces frontal e lateral têm os deslocamentos todos restritos. Dessa forma, são incógnitos os valores de força de superfície para as regiões das faces frontal e lateral, o que resultaria em sistema indeterminado: pelo fato do deslocamento nodal ser prescrito — e um nó não pode ter mais que um deslocamento —, somente uma força de superfície poderia ser incógnita. A única alternativa, nesse caso, é usar elementos descontínuos. Neste esquema, elementos adjacentes que pertencem a regiões de elementos distintas possuem subconjuntos de nós disjuntos, como mostra a Figura 2.8(b) para os nós em destaque, em que dois deles possuem forças de superfície incógnitas. Na Seção 4.3, comenta-se em mais detalhes sobre a utilização de nós múltiplos e elementos descontínuos.

### 2.3.3 Montagem do sistema linear

Seguindo uma abordagem tradicional na análise com elementos de contorno, a Equação (2.35) é escrita para um conjunto discreto de pontos fonte, ou *pontos de colocação*,  $\{\mathbf{s}_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_u$ , resultando no sistema linear

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{T}, \quad (2.40)$$

em que  $\mathbf{H}$  é uma matriz quadrada de ordem  $3n_u$  e  $\mathbf{G}$  é uma matriz de ordem  $3n_u \times 3n_t$ , com os valores nodais incógnitos tanto em  $\mathbf{U}$  quanto em  $\mathbf{T}$ . Após a aplicação das condições de contorno, o sistema é reordenado de forma que as incógnitas fiquem todas no lado esquerdo, como descrito a seguir.

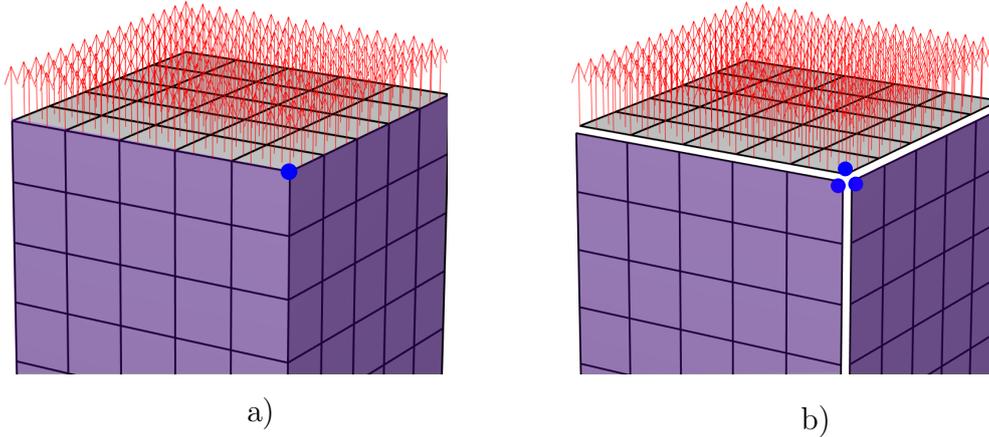


Figura 2.8: Emprego de nós múltiplos e elementos descontínuos. (a) Nó em destaque (em azul) tem 3 valores distintos de força de superfície, sendo um prescrito (derivado do carregamento uniformemente distribuído aplicado aos elementos da região da face superior, representados pelos vetores em vermelho) e dois incógnitos (correspondentes aos deslocamentos restritos nos elementos das regiões das faces frontal e lateral, em roxo). (b) Nesse caso, somente elementos descontínuos podem ser empregados. Os três nós em destaque tem a mesma localização espacial, com multiplicidade igual a 1.

Sejam  $\mathcal{I}_u$  e  $\mathcal{I}_t$  os conjuntos de índices de  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{T}$  referentes aos componentes incógnitos de deslocamento e força de superfície, respectivamente. Da mesma forma, sejam  $\bar{\mathcal{I}}_u$  e  $\bar{\mathcal{I}}_t$  os conjuntos de índices referentes aos respectivos componentes de deslocamento e força de superfícies prescritos. As colunas  $\bar{\mathcal{I}}_u$  de  $\mathbf{H}$  devem ser trocadas com as colunas  $\mathcal{I}_t$  de  $\mathbf{G}$ , resultando nas matrizes  $\tilde{\mathbf{H}}$  e  $\tilde{\mathbf{G}}$ , assim como as linhas  $\bar{\mathcal{I}}_u$  de  $\mathbf{U}$  devem ser trocadas com as linhas  $\mathcal{I}_t$  de  $\mathbf{T}$ , resultando nos vetores  $\tilde{\mathbf{U}}$  e  $\tilde{\mathbf{T}}$ . Então, a Equação (2.40) é reescrita como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{U}} &= \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{T}}, \quad \text{ou} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

em que  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{H}}$ ,  $\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{T}}$  e  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{U}}$  é o vetor contendo os valores nodais incógnitos. O sistema resultante é denso e não simétrico, podendo ser resolvido, por exemplo, pelo método do gradiente biconjugado estabilizado (BiCGSTAB).

Após a solução do sistema, os componentes incógnitos dos vetores  $\tilde{\mathbf{U}}$  e  $\tilde{\mathbf{T}}$  são ajustados a partir de  $\mathbf{x}$ . A Seção 4.3 apresenta um exemplo ilustrativo da aplicação das condições de contorno e montagem do sistema linear.

### 2.3.4 Cálculo de deslocamento em pontos internos

A partir dos deslocamentos e forças de superfície determinados na superfície do modelo, é possível computar os deslocamentos em pontos internos. O cálculo é realizado utilizando-se a Equação (2.25), que nada mais é que a equação integral de contorno (2.34), mas com o termo livre  $\mathbf{C}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}$  e integrais finitas, uma vez que o ponto fonte está no interior do sólido. Para este procedimento,  $\{\mathbf{s}_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_s$  é o conjunto de pontos internos nos quais se deseja obter os valores de deslocamento, isto é

$$\mathbf{u}(\mathbf{s}_i) = - \sum_{e=1}^{|\mathcal{B}|} \int_{\Gamma^e} \mathbf{T}^*(\mathbf{s}_i, \mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \sum_{e=1}^{|\mathcal{B}|} \int_{\Gamma^e} \mathbf{U}^*(\mathbf{s}_i, \mathbf{x}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (2.42)$$

## 2.4 Considerações finais

Neste capítulo, apresentou-se uma resenha dos conceitos do método de elementos de contorno (MEC) para aplicação em um problema de análise elastostática tridimensional. A equação integral de contorno foi derivada do método dos resíduos ponderados a partir da equação de equilíbrio estático e emprego das soluções fundamentais de Kelvin. A solução de tal equação foi resumida à resolução de um sistema de equações algébricas obtido pela discretização do contorno em um conjunto de elementos associados a um conjunto de nós, sobre os quais as variáveis do problema físico são associados. Comentou-se sobre a utilização de nós múltiplos e elementos descontínuos como técnicas para tratar as descontinuidades de forças de superfície. Por fim, abordou-se a montagem do sistema linear de equações e a computação de deslocamentos em pontos internos do domínio.

# Capítulo 3

## NURBS e T-splines

### 3.1 Considerações iniciais

Os sólidos utilizados neste trabalho foram modelados a partir superfícies representadas por T-splines. Para compreender os conceitos de T-splines uma introdução abrangendo curvas de Bézier, B-splines e NURBS é apresentada na Seção 3.2. As definições de pontos de controle, nós e funções de forma racionais são essenciais para a compreensão das T-splines, além disso, o conteúdo apresentado sobre cálculo das derivadas, vetores tangentes e normais à superfície, e inserção de nós, podem ser utilizados em ambas as representações. A Seção 3.3 introduz as T-splines para representação de superfícies a partir de uma malha de controle, contendo arestas, vértices e faces, além de junções em T, e vértices extraordinários. Os elementos de Bézier, os quais representam superfície discretizada permitindo a utilização do MEC na análise do modelo, são extraídos dos sólidos representados por superfícies T-spline através dos procedimentos apresentados na Seção 3.3.1 e na Seção 3.3.2. O termo elemento de Bézier é também encontrado na literatura como retalho de Bézier, portanto as duas formas são utilizadas no texto com o mesmo significado. Por fim, a Seção 3.3.3 apresenta o cálculo dos pontos de colocação para T-splines.

### 3.2 NURBS

As NURBS (*Non-Uniform Rational Basis-Splines*), modelo de representação predominante presentes em softwares CAD, são funções que, com menos informações e maior exatidão comparadas aos modelos facetados ou malhas poligonais, proveem flexibilidade na representação de geometrias complexas, tais como seções cônicas, incluindo, círculos, hipérbolas, elipses e parábolas. Além da questão geométrica, as propriedades matemáticas das NURBS permitem que o modelo seja adequado para integrações e aproximações de variáveis de campo.

Há uma literatura extensa sobre NURBS com descrições detalhadas em [32], [18] e [13], as quais foram tomadas como base para descrever, nesta seção, um resumo dos componentes essenciais das NURBS. O acrônimo NURBS é composto por três partes, sendo elas NU (em inglês *Non-Uniform*), R (em inglês *Rational*), e BS (em inglês *Basis-Splines*), o que significa que as NURBS são curvas B-splines racionais não uniformes.

A apresentação de tais conceitos seguirá a ordem inversa iniciando por B-splines.

### *Basis-Splines* (BS)

As *Basis-Splines* ou B-splines são uma forma generalizada das curvas de Bézier. As curvas (e superfícies) de Bézier, por sua vez, desenvolvidas por Pierre Bézier, são representadas através de um conjunto de pontos de controle  $\mathcal{C}$ , cada um deles associado a uma função de base específica. Uma curva de Bézier  $\mathbf{C}$  de grau  $p$  é definida por<sup>1</sup>

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^p \bar{B}_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$  é o  $i$ -ésimo ponto de controle de  $\mathcal{C}$ , e  $\bar{B}_{i,p}(\xi)$  são os polinômios de Bernstein, os quais, considerando  $\xi \in [0, 1]$ , são definidos como

$$\bar{B}_{i,p}(\xi) = \frac{p!}{i!(p-i)!} \xi^i (1-\xi)^{p-i}. \quad (3.2)$$

Neste trabalho, os polinômios de Bernstein são definidos considerando  $\xi \in [-1, 1]$ , com o objetivo de facilitar a integração numérica pela *quadratura Gaussiana* (veja, por exemplo, [5]), apresentada com mais detalhes no Capítulo 4.4. Tal consideração resulta nos seguintes polinômios de Bernstein, definidos a partir da relação de recorrência e da bijeção  $[-1, 1]$  em  $[0, 1]$ :

$$\bar{B}_{i,p}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)\bar{B}_{i,p-1}(\xi) + \frac{1}{2}(1+\xi)\bar{B}_{i-1,p-1}(\xi), \quad (3.3)$$

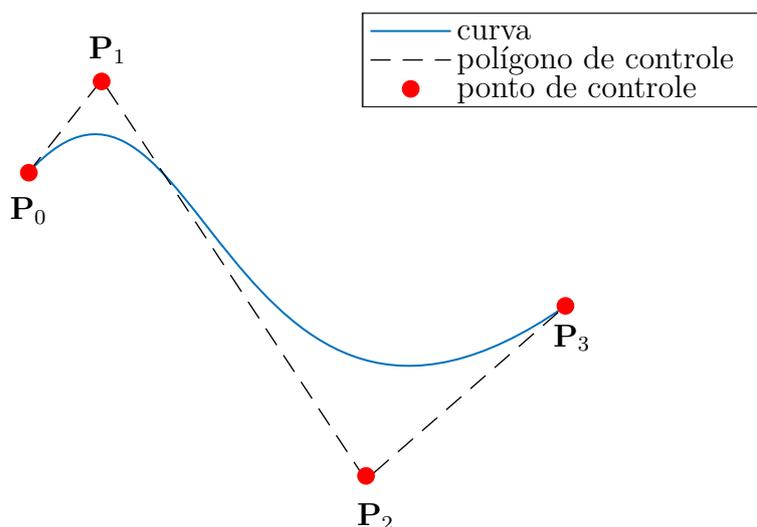
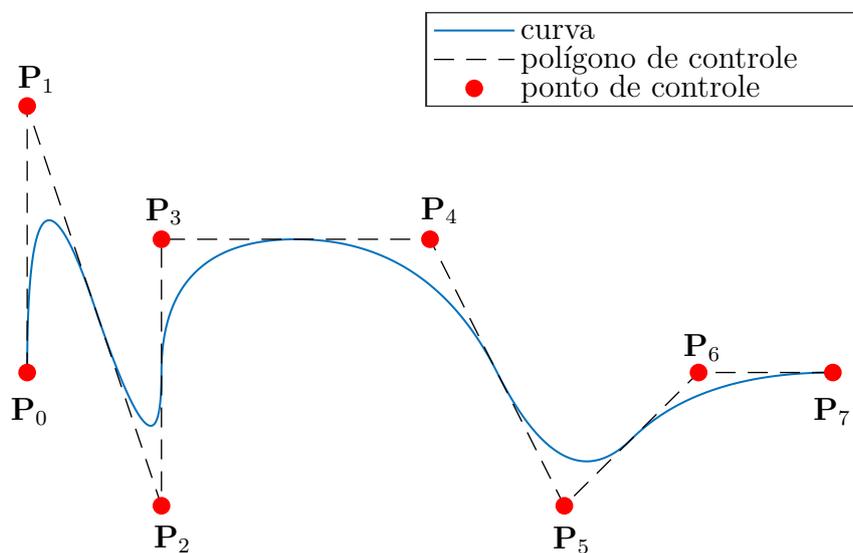
em que  $\bar{B}_{0,0}(\xi) = 1$  e  $\bar{B}_{i,p}(\xi) = 0$  se  $i < 0$  ou  $i > p$ .

O número de pontos de controle  $|\mathcal{C}|$  em uma curva de Bezier é igual ao grau do polinômio mais um, ou  $(p+1)$ , sendo que o primeiro e o último ponto de controle são interpolantes e coincidem com o início e o fim da curva, respectivamente. Como a equação da curva é uma soma ponderada de todos os pontos de controle, então, uma alteração em qualquer ponto de controle ocasiona uma alteração global na curva. A Figura 3.1 apresenta uma curva de Bezier de grau  $p=3$ .

As curvas B-splines, são consideradas uma generalização pois são compostas por uma ou mais curvas de Bézier, com controle de continuidade entre os segmentos. Para a definição formal de uma B-splines, considerando  $\mathbb{R}^d$ ,  $d=2, 3$ , a dimensão do problema, são necessários três principais elementos:

- o *grau* da curva,  $p$  (linear = 1, quadrática = 2, cúbica = 3, ...);
- um conjunto de *pontos de controle*  $\mathcal{C}$ ,  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ ;
- um *vetor de nós*  $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p}\}$ .

Note, no último item, que o número total de nós é igual ao número de pontos de controle  $n = |\mathcal{C}|$  somado à ordem da curva  $p+1$ . Os pontos de controle formam, através de

Figura 3.1: Curva de Bezier de grau  $p = 3$ .Figura 3.2: B-spline quadrática com  $|\mathcal{C}| = 8$  e polígono de controle.

uma interpolação linear, o polígono de controle que contorna a curva, e portanto há pontos de controle que não estão sobre a curva, conforme ilustrado na Figura 3.2.

Uma curva B-spline é definida por

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i, \quad (3.4)$$

em que  $\xi$  é a coordenada paramétrica da curva e  $N_{i,p}$  é a  $i$ -ésima função de base B-spline de grau  $p$ , associada ao ponto de controle  $\mathbf{P}_i$ .

As funções de base B-spline são definidas recursivamente, considerando a função

---

<sup>1</sup>O símbolo  $\mathbf{C}$  também é usado, no Capítulo 2, para denotar o termo livre. A distinção entre um e outro depende do contexto.

de base constante ( $p = 0$ ), através da fórmula de *Cox-de-Boor* (veja [32]), como

$$\begin{aligned}
 N_{i,0}(\xi) &= \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{restante do intervalo} \end{cases} \\
 N_{i,p}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi),
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

em que  $\xi_i$  são elementos do vetor de nós  $\Xi$ , denominados nós, os quais são uma sequência não decrescente de valores reais,  $\xi_i \leq \xi_{i+1}$ , representando coordenadas no espaço paramétrico. Dois nós consecutivos  $\xi_i$  e  $\xi_{i+1}$  definem um intervalo e um intervalo não nulo ocorre quando  $\xi_i < \xi_{i+1}$ . O número de intervalos não nulos no vetor  $\Xi$  define o número de segmentos na curva, cada um influenciado por  $p + 1$  pontos de controle.

A partir dos conceitos iniciais de B-splines, pode-se apresentar três propriedades relevantes das funções de base B-spline:

- partição de unidade, isto é,  $\sum_{i=0}^{n-1} N_{i,p}(\xi) = 1, \forall \xi$ ;
- o suporte compacto de  $N_{i,p}(\xi)$  está contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ ; e
- são não negativas, ou seja,  $N_{i,p}(\xi) \geq 0, \forall \xi$ .

Na Equação (3.5), note que para  $p > 0$ ,  $N_{i,p}(\xi)$  é uma combinação linear de duas funções de base de  $(p - 1)$  graus. Isso permite uma otimização no cálculo das funções de base sem a utilização da recursão, descrito em detalhes em [32]. O cálculo das funções de base de grau  $p$  pode ser representado pela estrutura a seguir, na qual  $N_{i,p}(\xi)$  foi abreviado para  $N_{i,p}$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & N_{0,0} & & & & \\
 & & & N_{0,1} & & & \\
 & N_{1,0} & & & N_{0,2} & & \\
 & & N_{1,1} & & & N_{0,3} & \\
 N_{2,0} & & & N_{1,2} & & & \\
 & & N_{2,1} & & N_{1,3} & \cdots & . \\
 N_{3,0} & & & N_{2,2} & & \vdots & \\
 & & N_{3,1} & & & \vdots & \\
 N_{4,0} & & \vdots & & & & \\
 & & \vdots & & & & 
 \end{array} \tag{3.6}$$

### Rational B-splines (RBS)

As B-splines, conforme definidas na Equação (3.4), possuem uma limitação na representação de seções cônicas, tais como, círculos e elipses, devido sua forma polinomial. Para a representação de seções cônicas a forma paramétrica deve ser *racional*, ou seja, o quociente entre dois polinômios. Uma curva B-splines racional  $\mathbf{C}$  é definida com a inclusão de um peso  $w_i \in \mathbb{R}^+$  associado a um ponto de controle  $\mathbf{P}_i$ , o que permite

um grau de liberdade adicional na manipulação da geometria, como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\xi) &= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} N_{i,p}(\xi) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{j=0}^{n-1} N_{j,p}(\xi) w_j} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} R_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

em que

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=0}^{n-1} N_{j,p}(\xi) w_j}, 0 \leq i \leq n-1 \quad (3.8)$$

são as funções de base racionais. Quando  $w_i = 1$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , a Equação (3.7) reduz-se à Equação (3.4).

Os pesos possuem uma função importante na geometria da curva. O peso  $w_k$  influencia na efetiva contribuição do ponto de controle  $\mathbf{P}_k$  na forma geral da curva  $\mathbf{C}$ . Um peso  $w_k$  menor corresponde em levar a curva para longe do ponto de controle  $\mathbf{P}_k$ , como exemplo extremo, quando  $w_k = 0$ , o termo  $w_k \mathbf{P}_k$  torna-se zero na equação da curva, e a contribuição do ponto de controle é anulada. Por outro lado, atribuir a  $w_k$  um valor muito maior comparado aos demais pesos, aumenta a influência do ponto  $\mathbf{P}_k$  na curva. Para exemplificar, dividindo a Equação (3.7) por  $w_k$ , e separando o termo referente a  $k$  do somatório obtém-se a seguinte equação:

$$\mathcal{X}(\xi) = \frac{\sum_{i \neq k}^{n-1} N_{i,p}(\xi) \frac{w_i}{w_k} \mathbf{P}_i + N_{k,p}(\xi) \mathbf{P}_k}{\sum_{j \neq k}^{n-1} N_{j,p}(\xi) \frac{w_j}{w_k} + N_{k,p}(\xi)}, \quad (3.9)$$

na qual fica evidente que, com o aumento no valor de  $w_k$ , a curva  $\mathcal{X}$  é deslocada em direção ao ponto de controle  $\mathbf{P}_k$ .

### *Non-Uniform (NU) Rational B-splines (RBS)*

O termo *Non-Uniform* refere-se à falta de uniformidade dos intervalos dos valores no vetor de nós  $\Xi$ . Intervalos com dimensões diferentes trazem uma maior flexibilidade na representação de uma curva. Um intervalo semi-aberto de nós  $[\xi_i, \xi_{i+1})$ , é denominado o  $i$ -ésimo *span*, ou segmento. O conjunto de nós do vetor  $\Xi$  com coordenadas distintas formam os *spans* com comprimento diferente de zero os quais definem os segmentos polinomiais individuais da curva.

A Figura 3.3 apresenta, na parte de cima, uma curva NURBS quadrática com  $n = 8$  pontos de controle, e, na parte baixo, as funções de base computadas a partir do vetor de nós  $\Xi$ ,  $|\Xi| = 11$ . O vetor de nós possui seis segmentos não nulos de comprimentos não uniforme. Em uma curva de grau  $p$ , o segmento  $i$  é influenciado por  $p+1$  pontos de controle,  $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1}, \dots, \mathbf{P}_{i+p}$ . Como a curva é de grau 2 cada segmento é influenciado por 3 funções de base, e pelos respectivos 3 pontos de controle. Uma associação semelhante é que cada função de base possui valores não nulos sobre  $p+1$  segmentos, nulos ou não nulos. A função de base  $N_0$  é não nula no intervalo  $[0, 0.5]$ , referente aos segmentos  $[0, 0)$ ,  $[0, 0)$  e  $[0, 0.5)$ , enquanto a função de base  $N_3$  tem valor diferente de zero no intervalo  $[0.5, 0.8)$ , referente aos segmentos  $[0.5, 0.6)$ ,  $[0.6, 0.7)$  e  $[0.7, 0.8)$ .

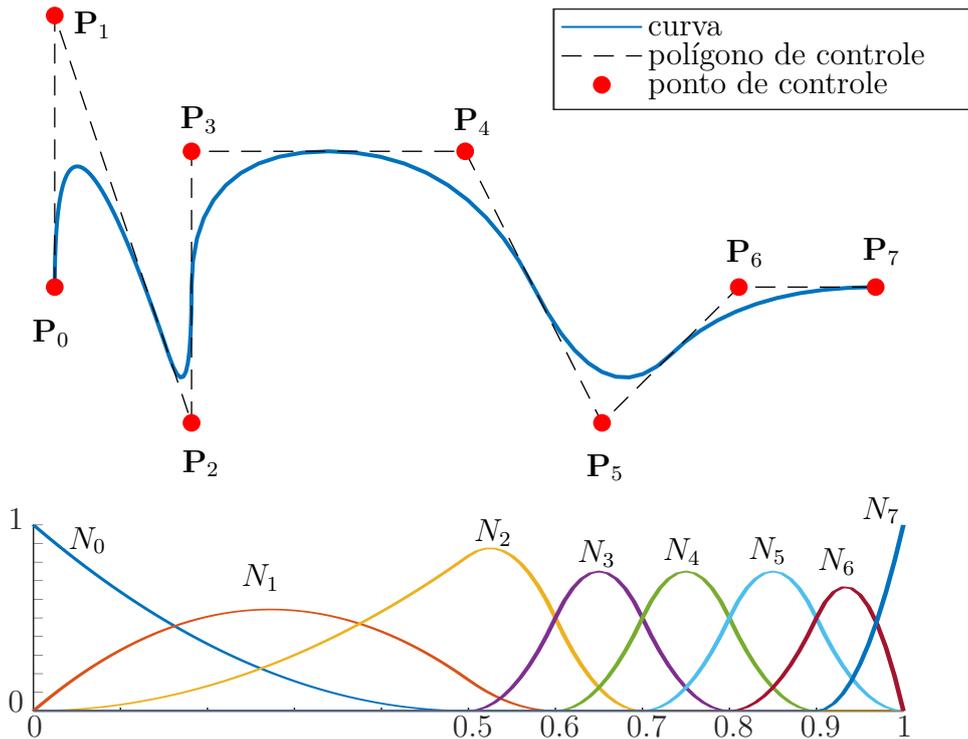


Figura 3.3: NURBS quadrática com  $|\mathcal{C}| = 8$  e funções de base. Acima: Curva, polígono de controle e pontos de controle. Abaixo: Funções de base de grau 2 computadas a partir do vetor de nós  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1, 1\}$ .

Ainda sobre o vetor de nós, suponha o parâmetro  $\xi$  variando de  $\xi_0$  a  $\xi_{n+p}$ , cada vez que um parâmetro  $\xi$  entra em um novo segmento, um novo ponto de controle se torna ativo, enquanto um ponto mais antigo é descartado. Mais de um nó pode estar localizado na mesma coordenada paramétrica, e essa quantidade de nós com valores coincidentes é denominada multiplicidade. Quando um nó tem multiplicidade dois, o comprimento do segmento relativo àqueles nós é zero. Conseqüentemente, dois pontos de controle são ativados ao mesmo tempo, e dois desativados, alterando a continuidade da curva.

Se um nó possui multiplicidade  $k$ , então o número de derivadas contínuas naquela coordenada paramétrica é  $p - k$ , e a continuidade da curva é  $C^{p-k}$ . Quando a multiplicidade é exatamente  $p$ , ou seja,  $\xi_i = \xi_{i+1} = \dots = \xi_{i+p-1}$ , a única função de base não nula no ponto  $\xi_i$  é a  $N_{i-1}$ , e ainda,  $N_{i-1}(\xi_i) = 1$ , portanto, considerando a Equação (3.7),  $\mathcal{X}(\xi_i) = \mathbf{P}_{i-1}$ , o que implica que o ponto de controle  $\mathbf{P}_{i-1}$  está contido na curva. Quando a multiplicidade é  $p + 1$  as funções de base são descontínuas, e um limite da curva é formado. Geralmente, isto é utilizado nos nós extremos da curva, resultando em um vetor de nós denominado aberto, e em uma curva contendo, em seus extremos, os pontos de controle  $\mathbf{P}_0$  e  $\mathbf{P}_{n-1}$ , respectivamente, interpolados. A curva da Figura 3.3 é um exemplo de utilização de vetor de nós aberto, os pontos  $\mathbf{P}_0$  e  $\mathbf{P}_7$  pertencem à curva. Uma multiplicidade maior que a ordem  $p + 1$  da curva, acarreta, além de uma curva descontínua, em pontos de controle sobrepostos em uma mesma posição.

O relacionamento entre continuidade da curva e multiplicidade dos nós é demonstrado na Figura 3.4, através de uma curva de grau  $p = 4$  com diferentes níveis de continuidade em cada nó distinto do vetor. O primeiro nó interno,  $\xi = \frac{1}{5}$  tem

multiplicidade 1, então possui o nível máximo de continuidade  $C^{p-1} = C^3$ . Nos nós internos subsequentes, a multiplicidade é incrementada em 1, portanto o número de derivadas contínuas decreta em 1, de tal forma que  $\xi = \frac{4}{5}$  possui multiplicidade  $p$ , tornando a função de base interpolante. Note que os pontos da curva referentes aos nós mais a direita e mais a esquerda, nos quais a multiplicidade  $p + 1$ , são totalmente descontínuos.

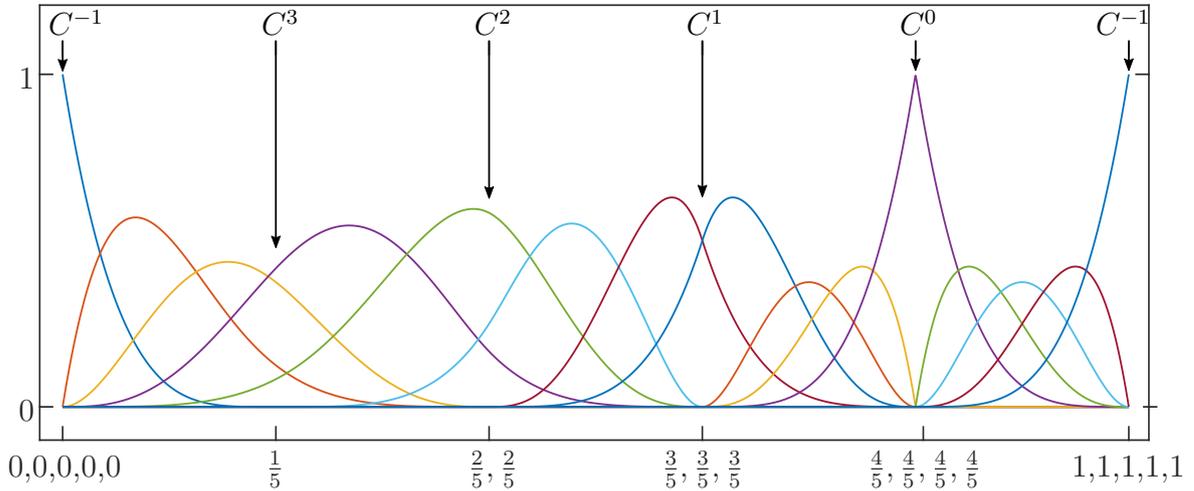


Figura 3.4: Funções base B-spline de grau  $p = 4$  (ordem 5) para um vetor de nós aberto e não uniforme  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1, 1\}$ . A continuidade na curva está diretamente relacionada com o grau da curva e a multiplicidade do valor do nó correspondente.

### Derivadas NURBS

O cálculo da derivada de uma curva NURBS é essencial para o método dos elementos de contorno, principalmente para o cálculo do vetor normal e Jacobiano. As funções de base racionais, Equação (3.8), são construídas a partir das funções de base B-spline, então suas derivadas também dependem das derivadas da parte não racional, e podem ser computadas como

$$\frac{d}{d\xi} R_{i,p}(\xi) = \frac{W(\xi)N'_{i,p}(\xi) - W'(\xi)N_{i,p}(\xi)}{W^2(\xi)}, \tag{3.10}$$

em que

$$\begin{aligned} N'_{i,p}(\xi) &= \frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), \\ W(\xi) &= \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,p}(\xi) w_i, \\ W'(\xi) &= \sum_{i=0}^{n-1} N'_{i,p}(\xi) w_i. \end{aligned} \tag{3.11}$$

A Equação (3.11) apresenta a derivada da  $i$ -ésima função de base, a qual é obtida por funções de base de ordem inferior.  $W(\xi)$  é denominada função de ponderação e definida como o somatório do produto entre as funções de base  $N_{i,p}(\xi)$  e seus respectivos

pesos  $w_i$ , e  $W'(\xi)$  é sua derivada. Com essas definições, o vetor tangente à uma curva NURBS na coordenada paramétrica  $\xi$  é

$$\mathbf{V}(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{d}{d\xi} R_{i,p}(\xi) \right) \mathbf{P}_i. \quad (3.12)$$

O vetor normal à curva é computado como

$$\mathbf{N}_x(\xi) = \mathbf{V}_y(\xi), \quad \mathbf{N}_y(\xi) = -\mathbf{V}_x(\xi), \quad (3.13)$$

e o Jacobiano por

$$J(\xi) = \sqrt{\mathbf{N}_x^2(\xi) + \mathbf{N}_y^2(\xi)}. \quad (3.14)$$

O vetor unitário na direção da normal é

$$\mathbf{n}(\xi) = \mathbf{N}(\xi) J^{-1}(\xi). \quad (3.15)$$

## Inserção de nós

Nós podem ser inseridos em um vetor de nós sem que a geometria ou as propriedades geométricas da curva sejam alteradas. Esse procedimento é também conhecido no termo em inglês *h-refinement*. Para cada nó inserido, um novo ponto de controle, e conseqüentemente um peso, deve ser adicionado. Dado um vetor de nós  $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p}\}$ , seja  $\xi \in [\xi_k, \xi_{k+1})$  o novo nó a ser inserido. As novas  $n+1$  funções de base são computadas recursivamente, através da Equação (3.5), utilizando o novo vetor de nós  $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k, \xi, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p}\}$ . Os novos  $n+1$  pontos de controle,  $\bar{\mathcal{C}} = \{\bar{\mathbf{P}}_0, \bar{\mathbf{P}}_1, \dots, \bar{\mathbf{P}}_n\}$ , são calculados a partir dos pontos de controle originais,  $\mathcal{C} = \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{n-1}\}$ , da seguinte maneira:

$$\bar{\mathbf{P}}_i = \alpha_i \mathbf{P}_i + (1 - \alpha_i) \mathbf{P}_{i-1}, \quad (3.16)$$

em que

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq i \leq k-p, \\ \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & \text{se } k-p+1 \leq i \leq k, \\ 0, & \text{se } i \geq k+1. \end{cases} \quad (3.17)$$

A inserção de nós com valores repetidos aumenta a multiplicidade do nó, e reduz o número de derivadas contínuas na coordenada paramétrica daquele nó. Uma operação interessante que pode ser realizada com a inserção de nós é a subdivisão da curva em duas curvas. Quando um nó  $\xi$  é inserido no vetor de nós tornando sua multiplicidade igual a  $p$ , uma descontinuidade aparece na coordenada paramétrica  $\xi$ , e a curva pode ser subdividida nesta posição utilizando os mesmo pontos de controle da curva original após as inserções. Considerando a curva da Figura 3.5(a), que ilustra um quarto de círculo com grau  $p=2$ , conjunto de pontos de controle  $\mathcal{C} = \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\}$  e  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ , um nó  $\xi = 0.6$  é inserido 2 vezes, resultando em  $\bar{\Xi} = \{0, 0, 0, 0.6, 0.6, 1, 1, 1\}$  com um novo conjunto de pontos de controle  $\bar{\mathcal{C}} = \{\bar{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}_0, \bar{\mathbf{P}}_1, \bar{\mathbf{P}}_2, \bar{\mathbf{P}}_3, \bar{\mathbf{P}}_4 = \mathbf{P}_2\}$ , Figura 3.5 (b). Os conjuntos de pontos de controle  $\{\bar{\mathbf{P}}_0, \bar{\mathbf{P}}_1, \bar{\mathbf{P}}_2\}$  e  $\{\bar{\mathbf{P}}_2, \bar{\mathbf{P}}_3, \bar{\mathbf{P}}_4\}$  definem as duas novas curvas quadráticas, ambos com os vetores de nós  $\bar{\Xi} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$  (após ajuste e normalização), conforme apresentado na Figura 3.5 (c). A Figura 3.6 exhibe as funções de base da curva após duas inserções de nós com coordenada paramétrica  $\xi = 0.6$ , posição na qual nota-se uma descontinuidade.

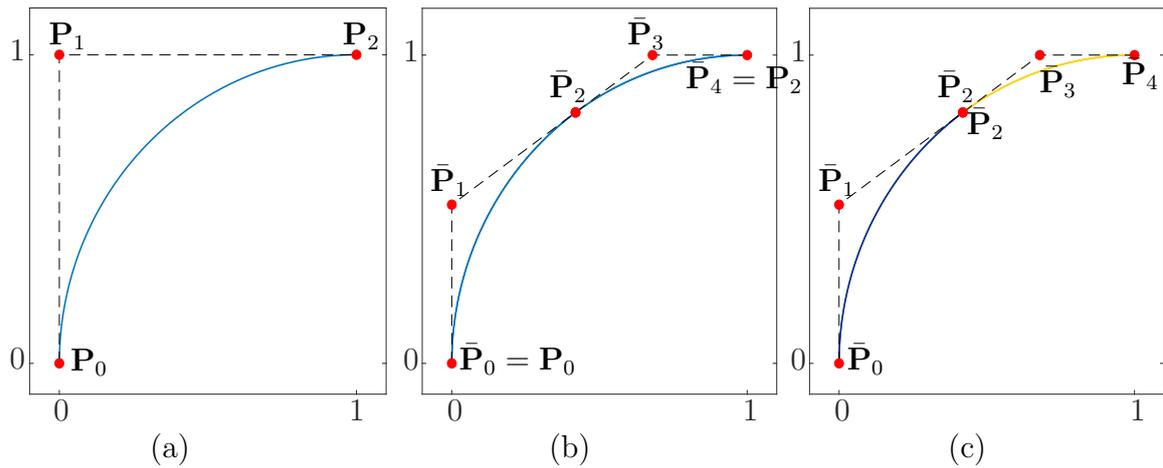


Figura 3.5: Inserção de nós em uma Curva NURBS quadrática representando um quarto de círculo. (a) Curva original com  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ . (b) Curva com conjunto de pontos de controle modificados após a inserção de nós,  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.6, 0.6, 1, 1, 1\}$ . (c) Divisão das curvas (em cores distintas).

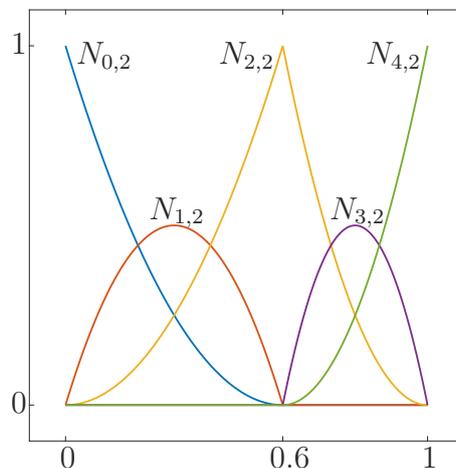


Figura 3.6: Funções de base da curva após a inserção de nós  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.6, 0.6, 1, 1, 1\}$ .

### Elevação de ordem

Assim como ocorre na inserção de nós, a elevação de ordem das funções de base B-splines não causa alteração na geometria ou na parametrização da curva. Esse procedimento é também conhecido com o termo em inglês *p-refinement*. O processo de elevação de ordem é realizado replicando cada valor distinto dos nós a fim de preservar a descontinuidade da  $p$ -ésima derivada da curva. Os passos para elevar a ordem da curva são: subdividir a curva em segmentos Bézier a partir dos nós inseridos, elevar a ordem de cada segmento individualmente, então remover os nós desnecessários para combinar os segmentos em uma curva de ordem elevada. A elevação de ordem altera o número de pontos de controle e de funções de base de acordo com o número de nós repetidos no vetor de nós original. Algoritmos de determinação dos novos pontos de controle, assim como algoritmos que tratam a combinação dos passos supracitados de forma eficiente com o objetivo de minimizar o custo computacional, serão omitidos neste texto, e podem ser encontrados com detalhes em [32].

Uma estratégia alternativa de refinamento de curva considera o fato dos procedimentos de inserção de nós e elevação de ordem não serem comutativos, conforme aponta Hughes [18]. Se um nó de valor único  $\xi$  é inserido em um vetor de nós de uma

curva de ordem  $p + 1$ , o número de derivadas contínuas das funções de base em  $\xi$  é  $p - 1$ . Se, na sequência, for realizada uma elevação de ordem para  $q$ , a multiplicidade dos nós distintos (incluindo o nó inserido) é incrementada, e as funções de base ainda continuam com  $p - 1$  derivadas contínuas em  $\xi$ . Ao invés disso, se na curva original, for realizada uma elevação de ordem para  $q$  e só então inserido o nó de valor único, as funções de base tem  $q - 1$  derivadas contínuas em  $\xi$ , ou seja, obtém-se o mesmo número de segmentos não nulos, porém com uma continuidade mais elevada entre eles. Este procedimento é denominado com o termo em inglês *k-refinement* e é demonstrado na Figura 3.7. Hughes relata ainda a importância deste conceito e a abordagem superior na análise de alta precisão comparada ao procedimento único de elevação de ordem.

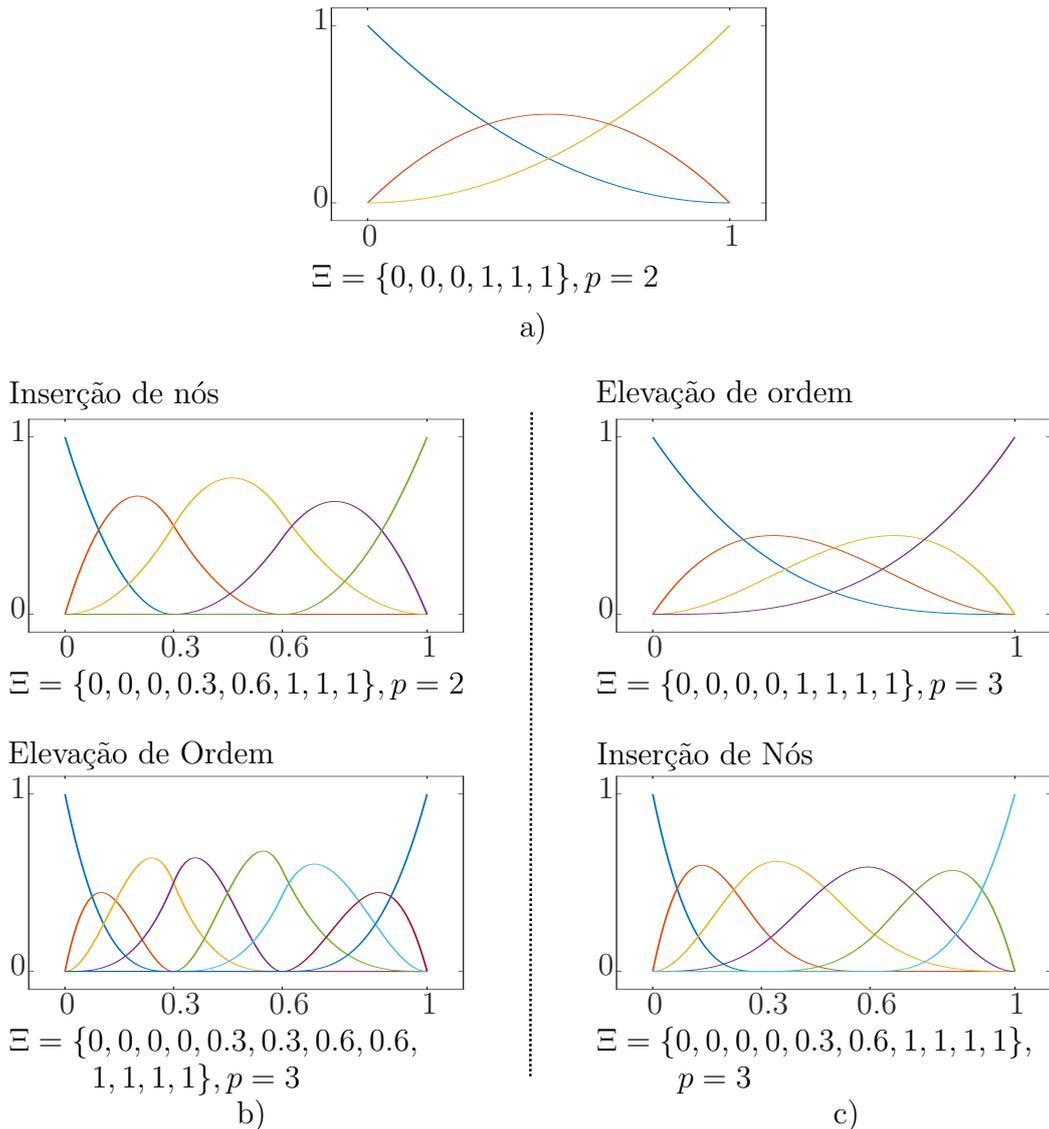


Figura 3.7: Elevação de ordem e inserção de nós. (a) funções de base quadrática representando um quarto de círculo. (b) inserção de nós seguido de elevação de ordem, resultando em oito funções de base e com continuidade  $C^1$  nos nós internos. (c) *k-refinement*: elevação de ordem seguido de inserção de nós, resultando em seis funções de base e com continuidade  $C^2$  nos nós internos.

## Superfícies NURBS

Uma superfície NURBS pode ser escrita pelo produto tensorial entre duas curvas NURBS, utilizando dois parâmetros independentes  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$ , como

$$\mathcal{X}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j}^{n,m} R_{i,j}^{p,q}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{P}_{i,j}, \quad (3.18)$$

em que  $p$  e  $q$  são os graus da superfície em cada eixo paramétrico referente as coordenadas paramétricas  $\xi^1$  e  $\xi^2$ ,  $n$  e  $m$  são os números de pontos de controle em cada coordenada paramétrica, e  $R_{i,j}^{p,q}(\boldsymbol{\xi})$  são as funções de base racionais para superfícies dada por (para simplificar a notação, o somatório  $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1}$  são indicados por  $\sum_{i,j}^{n,m}$ )

$$R_{i,j}^{p,q}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{N_{i,p}(\xi^1) M_{j,q}(\xi^2) w_{i,j}}{\sum_{k,l}^{n,m} N_{k,p}(\xi^1) M_{l,q}(\xi^2) w_{k,l}}. \quad (3.19)$$

As funções de base  $N_{i,p}$  refere-se aos nós do eixo paramétrico  $\xi^1$  definidos no vetor de nós  $\Xi^1$  e as funções de base  $M_{j,q}$  refere-se aos nós do eixo paramétrico  $\xi^2$  definidos no vetor de nós  $\Xi^2$ . Portanto dois vetores de nós são necessários para a definição de uma superfície, um para cada eixo paramétrico, sendo eles,  $\Xi^1 = \{\xi_0^1, \xi_1^1, \dots, \xi_{n+p}^1\}$  e  $\Xi^2 = \{\xi_0^2, \xi_1^2, \dots, \xi_{m+q}^2\}$ .

Um segmento de superfície é definido como o produto cartesiano entre dois segmentos unidimensionais, cada um representando um eixo, tal como,  $[\xi_i^1, \xi_{i+1}^1) \times [\xi_j^2, \xi_{j+1}^2)$ . Os pontos de controle  $\mathbf{P}_{i,j}$  são definidos através de uma malha de  $n \times m$  pontos, formando a malha de controle da superfície.

A Figura 3.8(a) ilustra uma superfície NURBS no espaço global cuja malha de controle é formada por  $6 \times 3$  pontos de controle, com vetores de nós  $\Xi^1 = \{0, 0, 0, 0.3, 0.5, 0.7, 1, 1, 1\}$  e  $\Xi^2 = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ , com quatro segmentos. Note que na direção paramétrica  $\xi^1$ , sejam  $|\Xi^1| = 9$  o número de nós e  $n = 6$  o número de pontos de controle, para que a relação  $|\Xi^1| = n + p + 1$  seja válida o grau  $p$  da superfície (nesta direção) deve ser 2, pois  $9 = 6 + 2 + 1$ . Na direção  $\xi^2$ , a relação  $6 = 3 + 2 + 1$  é válida também para  $p = 2$ . Portanto, tal superfície é quadrática em ambas as direções ou bi-quadrática.  $\Xi^1$  e  $\Xi^2$  são vetores de nós abertos, ou seja, há  $p + 1$  nós repetidos nas extremidades do vetor, o que ocasiona a interpolação nos cantos da superfície. Na Figura 3.8(b), o vetor de nós  $\Xi^1$  possui 4 intervalos não nulos, sendo eles  $[0, 0.3)$ ,  $[0.3, 0.5)$ ,  $[0.5, 0.7)$ ,  $[0.7, 1)$ , resultando em quatro segmentos na superfície na direção  $\xi^1$ , já no vetor  $\Xi^2$  há um intervalo não nulo  $[0, 1)$ , portanto apenas um segmento. A segmentação da superfície no espaço paramétrico é mostrada na Figura 3.8, juntamente com as funções de base em cada direção.

Para a computação do vetor normal e do Jacobiano de superfícies NURBS em uma coordenada paramétrica ( $\boldsymbol{\xi}$ ), são necessárias as derivadas em relação a  $\xi^1$  e a  $\xi^2$ , as quais são computadas de forma análoga. A derivada em  $\xi^1$ , por exemplo, é

$$\frac{d}{d\xi^1} R_{i,j}^{p,q}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{N_{i,j}^{\prime p,q}(\boldsymbol{\xi}) w_{i,j} - W'(\boldsymbol{\xi}) R_{i,j}^{p,q}(\boldsymbol{\xi})}{W(\boldsymbol{\xi})}, \quad (3.20)$$

	limites da superfície		ponto de controle
	polígono de controle		divisão de segmento na superfície

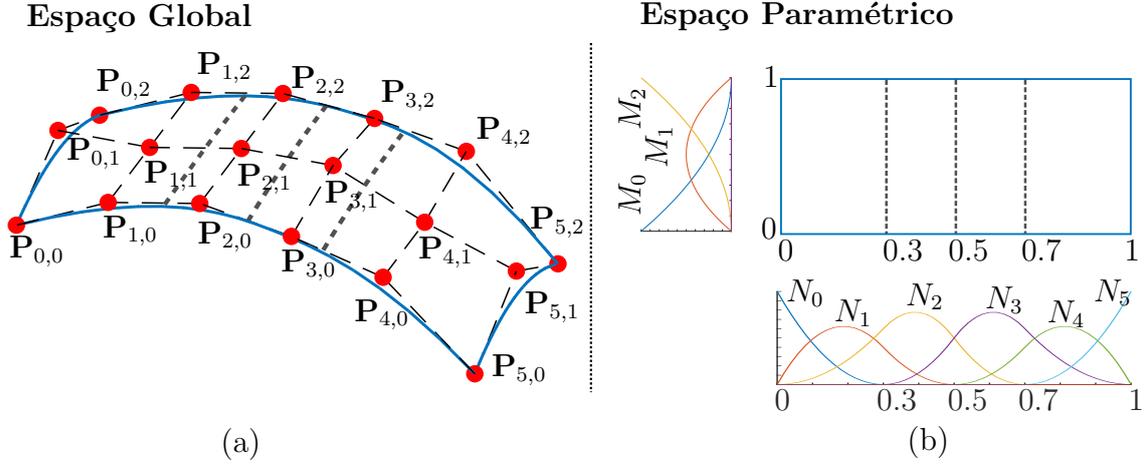


Figura 3.8: NURBS: espaço global e espaço paramétrico. (a) superfície no espaço global. (b) Segmentação no espaço paramétrico, juntamente com as funções de base em cada direção.

em que

$$\begin{aligned}
 N_{i,j}^{p,q}(\boldsymbol{\xi}) &= N_{i,p}'(\xi^1) M_{j,q}(\xi^2), \\
 W(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i,j}^{n,m} N_{i,p}(\xi^1) M_{j,q}(\xi^2) w_{i,j}, \\
 W'(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i,j}^{n,m} N_{i,p}'(\xi^1) M_{j,q}(\xi^2) w_{i,j}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

O vetor normal à superfície é calculado através do produto vetorial de dois vetores tangentes à superfície, nas direções dos eixos paramétricos referentes às coordenadas  $\xi^1$  e  $\xi^2$ , computados por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{\xi^1}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i,j}^{n,m} \left( \frac{d}{d\xi^1} R_{i,j}^{p,q}(\boldsymbol{\xi}) \right) \mathbf{P}_{i,j}, \\
 \mathbf{V}_{\xi^2}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i,j}^{n,m} \left( \frac{d}{d\xi^2} R_{i,j}^{p,q}(\boldsymbol{\xi}) \right) \mathbf{P}_{i,j}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

O vetor normal à superfície é

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{V}_{\xi^1}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{V}_{\xi^2}(\boldsymbol{\xi}), \tag{3.23}$$

e o Jacobiano é

$$J(\boldsymbol{\xi}) = |\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})| = \sqrt{\mathbf{N}_x^2(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{N}_y^2(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{N}_z^2(\boldsymbol{\xi})}. \tag{3.24}$$

O vetor unitário na direção da normal é

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) J^{-1}(\boldsymbol{\xi}). \tag{3.25}$$

## Limitações das NURBS

NURBS têm sido empregadas com sucesso na análise isogeométrica e é um conceito predominante utilizado em softwares CAD. No entanto, superfícies NURBS possuem algumas limitações, justificadas pela abrangência global em sua formulação. Modelos mais detalhados representados por NURBS requerem múltiplos retalhos (superfícies NURBS) cujo acoplamento pode trazer problemas de descontinuidade nos contornos, e a necessidade de inserção de nós de um retalho em outro. Outra limitação, bastante relevante para a IGA por questão numérica, é o refinamento por inserção de nós em uma superfície, o qual na NURBS é possível apenas de forma global, em que um conjunto de nós inseridos são estendidos por todo o domínio da superfície. Uma alternativa para contornar esse problema é a utilização de superfícies de recorte, no entanto tal abordagem pode trazer problemas na junção de retalhos de recorte, deixando frestas no modelo. A alternativa mais comum são as T-splines, as quais são utilizadas atualmente no software Autodesk Fusion 360.

## 3.3 T-splines

T-splines foram definidas por Sederberg [38] em 2003, e quatro anos depois uma patente foi registrada para as tecnologias relacionadas às T-splines. Em 2004, foi fundada a empresa denominada também T-splines para comercializar tal tecnologia, a qual foi adquirida pela AutoDesk em 2011.

Uma T-spline é uma representação de superfície semelhante à NURBS porém a partir de um número menor de pontos de controle, capaz de representar um modelo geométrico utilizando uma única parametrização (superfície única), além de permitir refinamento local na superfície. Neste trabalho as superfícies, consideradas variedades de dimensão dois, com ou sem contornos, são definidas a partir de uma malha de controle,  $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, \mathcal{F})$ , denominada *T-malha*, em que  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}$  são conjuntos de vértices, arestas e faces, respectivamente. A valência de um vértice indica o número de arestas incidentes no vértice. Cada face de uma T-malha é um polígono cujas arestas podem conter *T-junções*. Uma T-junção é um vértice com 3 arestas incidentes, assimilando-se ao formato da letra “T”. O  $i$ -ésimo vértice,  $\mathcal{V}_i$ , de uma T-malha é um ponto de controle com posição  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$  e um peso  $w_i \in \mathbb{R}^+$ .

Um vértice ou ponto *extraordinário* é um vértice interno (não incidente em arestas de borda) que não é T-junção e possui valência diferente de 4, ou um vértice de borda com valência maior que 4. As arestas incidentes em um vértice extraordinário são denominadas *spoke*. O conjunto de faces,  $\mathcal{R}_i^1$ , incidente no  $i$ -ésimo vértice formam a vizinhança 1-anel de face de  $\mathcal{V}_i$ . O conjunto de faces,  $\mathcal{R}_i^2$ , incidente nos vértices em  $\mathcal{R}_i^1$  formam a vizinhança 2-anel de face de  $\mathcal{V}_i$ . Toda face da vizinhança 2-anel de face de um vértice extraordinário é uma face *irregular*, e as demais são *regulares*. Os vértices incidentes nas faces da vizinhança 1-anel de face de um vértice extraordinário são denotados por *irregulares*, e os demais são *regulares*.

A  $i$ -ésima aresta,  $\mathcal{A}_i$ , possui um valor  $a_i \geq 0$  que representa um intervalo de nós entre dois vértices, o qual possui função similar aos vetores de nós nas NURBS. A Figura 3.9 ilustra a superfície suave e a T-malha que a define com seus respectivos atributos.

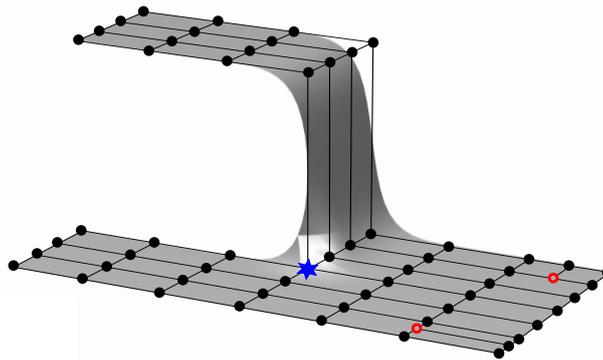


Figura 3.9: T-malha e superfície: vértice (ponto preto), T-junção (círculo vermelho), vértice extraordinário (estrela azul).

Na definição de objetos com T-splines é comum a utilização de superfícies contendo regiões com descontinuidade do vetor normal à superfície, assim como ocorre nas bordas das superfícies abertas. A parte da superfície referente à uma face da T-malha possui continuidade  $C^\infty$ , e uma descontinuidade só acontece na junção entre partes da superfície, representadas por faces, as quais incidem em uma aresta em comum, denominada *aresta de vinco*. O conceito de aresta de vinco está associado ao conceito de *ponto de tangência*. Um ponto de tangência, assim como um vértice, é um ponto de controle com uma posição  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$  e um peso  $w \in \mathbb{R}^+$ , e está vinculado a um vértice da T-malha. Cada vértice regular possui um conjunto de pontos de tangência vinculados, cuja cardinalidade depende do número de arestas de vinco nele incidentes.

A Figura 3.10 apresenta em (a) uma superfície com descontinuidade geométrica, e em (b) a topologia da T-malha referente a superfície, com uma aresta de vinco, diversas arestas de borda e seus pontos de tangência. O vínculo do conjunto dos pontos de tangência com os vértices é ilustrado através de segmentos pontilhados, formando os grupos. Os segmentos pontilhados não são considerados arestas da T-malha, e tem o objetivo de exemplificar o conceito, pois o intervalo de nós de um ponto de tangência ao seu vértice principal é nulo. Vale ressaltar que a T-malha apresentada não é a malha de controle, é uma malha contendo as mesmas informações topológicas da T-malha e com os vértices posicionados em forma de grade. A Figura 3.10 mostra em (c) um grupo contendo um vértice regular com 4 arestas de vinco, e 8 pontos de tangência, que é o número máximo para funções cúbicas. Vértices irregulares, mesmo contendo arestas de vinco não possuem pontos de tangência. Os pontos de tangência (referentes às bordas) da T-malha apresentada na Figura 3.9 foram omitidos, por questão de simplificação para introdução dos demais conceitos.

Neste trabalho, as T-splines utilizadas foram restringidas às funções de forma de grau 3 ou funções bicúbicas. Tal decisão permite uma modelagem satisfatória das superfícies dos objetos com flexibilidade superior às T-splines bi-quadráticas, sem tornar o sistema ineficiente. Aliado a isto, funções de grau 3 são empregadas na maioria dos CAD capazes de modelar superfícies T-splines, como é o caso da ferramenta CAD Autodesk Fusion 360 [2].

Quanto à utilização do método de análise isogeométrica, nem todas as T-malhas representam T-splines apropriadas. O termo *conforme para análise* (em inglês, *analysis-suitable*), representa uma classe de T-splines que satisfaz uma topologia requerida tal que mantêm as propriedades matemáticas básicas de NURBS, como por exemplo, inde-

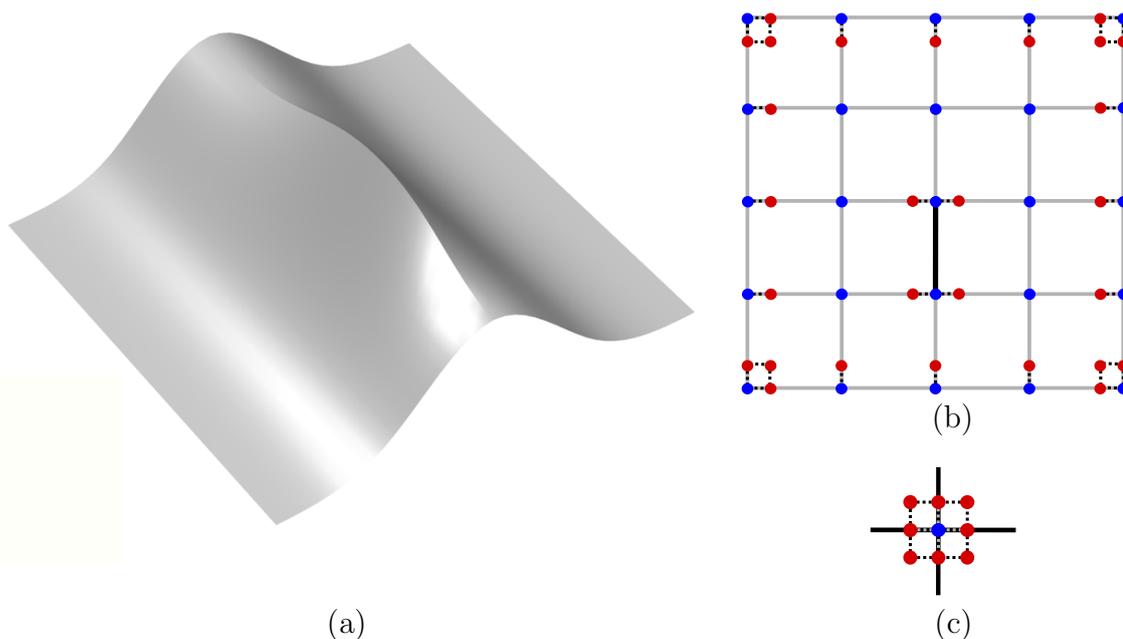


Figura 3.10: T-malha com descontinuidade geométrica. (a) Superfície com descontinuidade geométrica. (b) Topologia da T-malha referente à superfície, com aresta de vinco (borda e aresta na cor preta), vértices (azul) e pontos de tangência (vermelho). (c) Vértice regular com 4 arestas de vinco incidentes, grupo com 8 pontos de tangência, número máximo para funções T-spline de grau 3.

pendência linear e partição de unidade. A definição de tal topologia requer o conceito de *extensão de T-junção*, que é um segmento de reta associado a uma T-junção. Em uma extensão de T-junção cria-se até duas arestas (Figura 3.11 (a), linhas tracejadas azuis), denominadas primeira e segunda *extensão de face*, a partir do vértice da T-junção na direção da aresta ausente até que duas arestas perpendiculares sejam intersectadas. A aresta oposta, já existente na T-malha, é chamada de *extensão de vértice*. Os vértices adicionados devido às novas arestas, denominados *vértices de extensão* são apenas topológicos e não possuem pontos de controle associados. A T-malha acrescida de vértices e arestas de extensão é denominada *T-malha estendida*.

Scott [35] dedica o termo conforme para análise como aquelas T-splines que cumprem as seguintes condições: extensões de T-junção não se intersectam, a primeira extensão de face não está em uma face três-vizinhos de um vértice extraordinário, e um vértice extraordinário não é incidente nas faces três-vizinhos de outro vértice extraordinário.

O primeiro requisito para a utilização do método dos elementos de contorno na análise isogeométrica é a discretização da superfície do contorno em elementos. Além disso, é necessário estabelecer as funções de forma e os nós que influenciam na determinação da superfície de cada elemento. Uma face da T-malha pode resultar em mais de um *elemento T-spline*, o qual é parte de uma superfície T-spline. No entanto, cada face da T-malha estendida, também denominada *T-malha elementar*, possui associação um para um com um elemento T-spline. A Figura 3.11 ilustra, utilizando a mesma T-spline da Figura 3.9, em (a) a T-malha estendida ou T-malha elementar destacando as extensões de face em linhas tracejadas, e em (b) a superfície T-spline com as subdivisões dos elementos.

A superfície T-spline é composta pela união de todos elementos T-spline. A

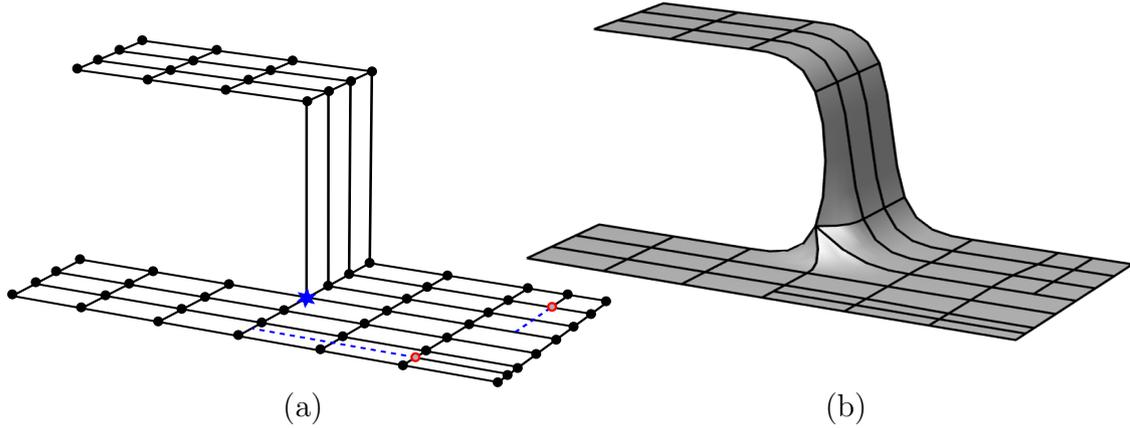


Figura 3.11: Malha elementar. (a) T-malha estendida ou T-malha elementar, com extensões de face em linhas tracejadas azuis. (b) Superfície T-spline com subdivisões dos elementos: malha elementar.

superfície do  $e$ -ésimo elemento T-spline de uma malha elementar  $\mathcal{M}^e$  é definida por

$$\mathcal{X}^e(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n^e} R_i^e(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{P}_i^e, \quad (3.26)$$

em que  $n^e$  é o número de funções de forma racionais ( $R_i^e(\boldsymbol{\xi})$ ) e, conseqüentemente, número de pontos de controle ( $\mathbf{P}_i^e$ ) que influenciam no elemento e  $\boldsymbol{\xi}$  são coordenadas tomadas em relação a um sistema local de coordenadas associado ao domínio paramétrico do elemento  $[-1, 1]$ . A função  $R_i^e(\boldsymbol{\xi})$  do  $e$ -ésimo elemento é definida como

$$R_i^e(\boldsymbol{\xi}) = \frac{w_i^e N_i^e(\boldsymbol{\xi})}{W(\boldsymbol{\xi})} = \frac{w_i^e N_i^e(\boldsymbol{\xi})}{\sum_{j=1}^{n^e} w_j^e N_j^e(\boldsymbol{\xi})},$$

em que  $N_i^e(\boldsymbol{\xi})$  e  $w_i^e$  são a  $i$ -ésima função de forma polinomial e o  $i$ -ésimo peso que influenciam no elemento, respectivamente.

De acordo com o conceito de elementos T-splines e a determinação de sua superfície, é possível uma associação com o método dos elementos de contorno, assumindo os pontos de controle como os nós, e as funções de forma racionais como as funções de forma do elemento.

A fim de se determinar o conjunto de pontos de controle, pesos e as funções de forma que influenciam em um elemento, utiliza-se uma técnica denominada extração de elementos de Bézier. Na análise isogeométrica, a técnica já foi empregada para representações com NURBS e T-splines (veja [3] e [35]), com a justificativa de semelhança com o conceito padrão de métodos de elementos finitos. Além disso, Borst [15] comenta que essa técnica facilita o processo de refinamento do modelo. No caso de NURBS, a extração é realizada sobre os vetores de nós em cada direção paramétrica e consiste em inserir nós repetidos até que todos atinjam multiplicidade igual ao grau da curva. Na T-spline, a característica local dos vetores de nós que determinam cada função T-spline e a presença de vértices extraordinários na T-malha, tornam o processo mais complexo.

A extração em elementos de Bézier tem como objetivo computar um operador linear que mapeia as bases polinomiais de *Bernstein* dos elementos de Bézier para as funções T-splines globais. A transformação linear de tal operador para o  $e$ -ésimo

elemento é definida por uma matriz denotada por  $\mathbf{C}^e$ . Seja  $\bar{\mathbf{B}}$  o vetor contendo as bases polinomiais de Bernstein, o vetor com as funções T-splines globais que influenciam no  $e$ -ésimo elemento é definido como  $\mathbf{N}^e = \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{B}}$ . A transposta do operador de extração de Bézier mapeia os pontos do controle que influenciam no  $e$ -ésimo elemento, representados matricialmente por  $\mathbf{P}^e$ , para os pontos de controle de Bézier em forma matricial, isto é,  $\mathbf{Q}^e = \mathbf{C}^{eT} \mathbf{P}^e$ . A Figura 3.12 exemplifica a utilização do operador de extração de Bézier para o elemento  $e_3$  da curva.

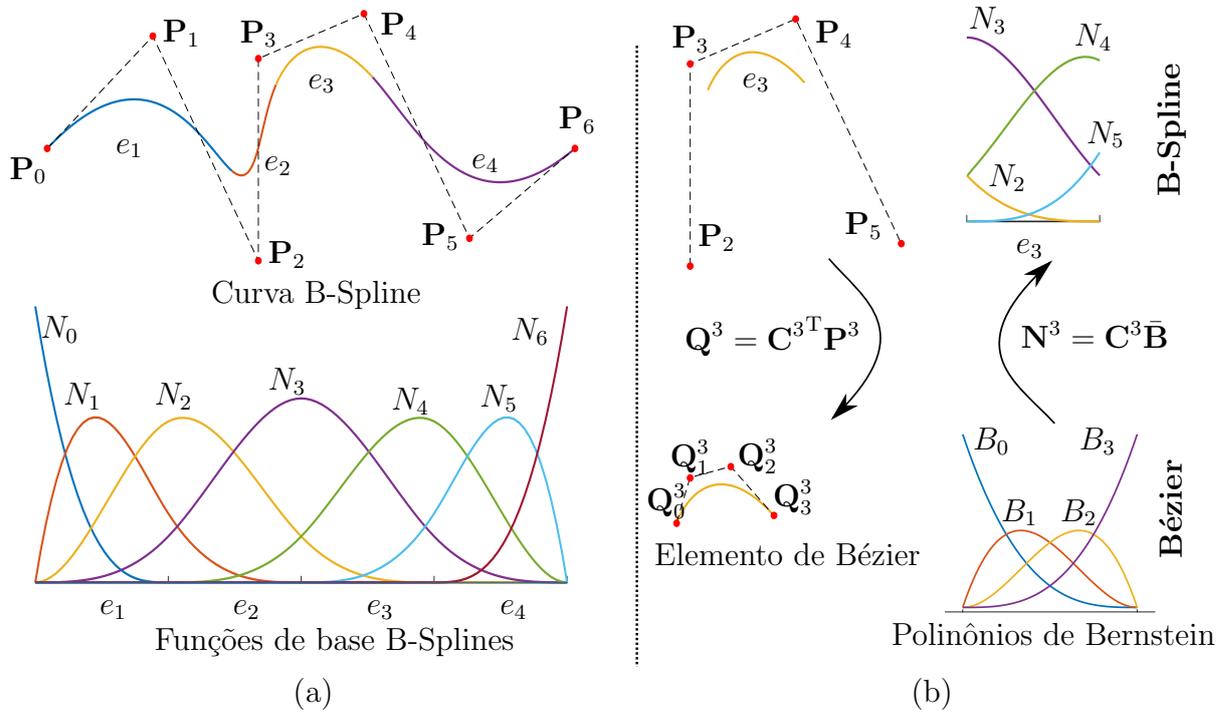


Figura 3.12: Extração de elemento de Bézier. (a) Curva B-spline, em que as cores indicam as regiões dos elementos. (b) Mapeamento do elemento  $e_3$  com o operador de extração de Bézier  $\mathbf{C}^3$ .  $\mathbf{P}^3$  e  $\mathbf{N}^3$  são as matrizes que contém, respectivamente, os pontos de controle e as funções T-splines globais que influenciam em  $e_3$ .

As bases polinomiais de Bernstein unidimensionais são definidas sobre um intervalo paramétrico  $-1 \leq \xi \leq 1$ , conforme a Equação (3.3).

Para o caso bidimensional, as bases de Bernstein de grau  $p$  são formadas através do produto tensorial de duas bases de Bernstein unidimensionais:

$$\bar{B}_{i,j,p}(\boldsymbol{\xi}) = \bar{B}_{i,p}(\xi^1) \bar{B}_{j,p}(\xi^2), \quad 0 \leq i, j \leq p. \quad (3.27)$$

Considerando  $p = 3$ , obtém-se 4 funções unidimensionais enumeradas da esquerda pra direita e 16 funções bidimensionais enumeradas da esquerda pra direita e de baixo para cima, conforme ilustrado na Figura 3.13. Assim, a matriz  $\mathbf{C}^e$  do  $e$ -ésimo elemento de Bézier bidimensional é de ordem  $n^e \times 16$ , em que  $n^e$  é o número de funções de forma T-splines que influenciam no elemento.

O procedimento de extração de Bézier aplicado em T-splines é dividido em dois casos tratados de forma independente, resultando em um conjunto de elementos de Bézier que pode ser utilizado de forma única na análise isogeométrica. O primeiro caso, trata os elementos oriundos de faces regulares, já o segundo aborda os elementos oriundos das faces da vizinhança 2-anel de um vértice extraordinário.

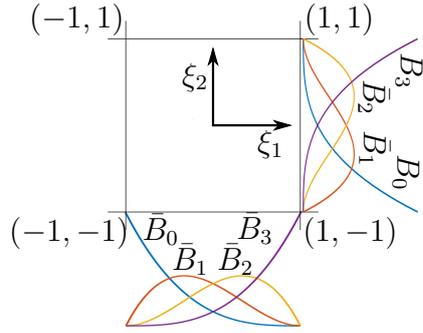


Figura 3.13: Bases de Bernstein para elemento de Bézier bidimensional.

### 3.3.1 Extração de Bézier para faces regulares

Antes de iniciar a descrição do procedimento de extração dos elementos de Bézier para faces regulares é importante definir a origem das T-splines *estruturadas*, aquelas cuja T-malha não possui nós extraordinários.

O conceito de T-splines surgiu do conceito de *point-based splines*, ou PB-splines, uma generalização das B-splines, apresentada em detalhes em [38] e [3]. De forma breve, em uma superfície PB-spline os pontos de controle não possuem um relacionamento topológico entre si, portanto não é baseada em uma malha, mas baseada em pontos. Uma superfície PB-spline é especificada por um conjunto de pontos de controle  $\mathcal{C}$ , em que o  $i$ -ésimo ponto  $\mathcal{C}_i$ , é um ponto de controle com posição  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$  e um par de vetores de nós  $\Xi^1$  e  $\Xi^2$ . Tais vetores determinam a função de base  $N_i(\boldsymbol{\xi})$ , não nula sobre o domínio  $\Omega_i$ . Uma superfície PB-spline  $\mathcal{X}$  é definida como

$$\mathcal{X}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i \in \mathcal{C}_\xi} N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{P}_i, \quad (3.28)$$

em que  $\mathcal{C}_\xi \subset \mathcal{C}$  é um subconjunto de pontos que influenciam na coordenada paramétrica  $\boldsymbol{\xi}$ , tal que, se  $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_i$  então  $i \in \mathcal{C}_\xi$ .

De acordo com Bazilevs [3], as PB-splines conservam algumas das propriedades das NURBS, acrescentam algumas vantagens, como possibilidade de refinamento local, porém surgem características indesejáveis sob alguns aspectos, como por exemplo, a falta da compreensão do conceito de elemento, devido à ausência da topologia. Outra observação que vale a pena destacar sobre a estrutura é a replicação de dados dos vetores de nós, considerando que a vizinhança de um ponto possui vetores de nós com valores repetidos. As T-splines, portanto, são uma combinação de flexibilidade das PB-splines com a ideia de topologia e estrutura das NURBS (veja [38]).

O procedimento de extração dos elementos de Bézier para faces regulares utiliza a definição de *ancoragem*. A ancoragem é uma forma de associar vetores de nós locais, com uma localização na T-malha. A localização de uma âncora na T-malha depende do grau da função T-spline, de forma que para funções de grau par a âncora é localizada no centro das faces, e para funções de grau ímpar a âncora é localizada nos vértices da malha. Combinações de grau par e ímpar em cada uma das direções paramétricas, geram âncoras nas arestas da T-malha. Neste trabalho, considerando as T-splines bicúbicas, cada vértice da T-malha está associado a uma âncora, e conseqüentemente uma função T-spline, com exceção dos vértices extraordinários, aos quais nenhuma âncora está associada.

Diferentemente das NURBS, que utilizam vetores de nós globais, nas T-splines os vetores de nós são locais obtidos a partir dos valores de intervalos de nós associados às arestas da T-malha. Tais vetores de nós locais também determinam o domínio paramétrico das funções. De forma similar às PB-splines, o conjunto de domínios paramétricos locais aos quais um ponto  $\xi$  pertence, determina o conjunto de funções T-spline e, conseqüentemente, de pontos de controle que influenciam naquele ponto.

A  $\alpha$ -ésima âncora, associada ao vértice  $\mathcal{V}_\alpha$  possui dois vetores de intervalos de nós  $\Delta \Xi_\alpha = \{\Delta \Xi_{\alpha,1}, \Delta \Xi_{\alpha,2}\}$ , um para cada direção paramétrica  $\xi^1$  e  $\xi^2$ , que posteriormente são transformados em dois vetores de nós  $\Xi_\alpha = \{\Xi_{\alpha,1}, \Xi_{\alpha,2}\}$ . Uma configuração válida para os intervalos de nós das arestas de uma T-malha requer que a soma dos intervalos em lados opostos de uma face sejam iguais. A Figura 3.14 ilustra parte de uma T-malha estendida com valores de intervalos de nós da  $i$ -ésima aresta definido como  $a^i$ . Os valores  $a^{18} = a^{13} + a^{14}$  e  $a^6 = a^{11} + a^{12}$  exemplificam uma configuração válida. As arestas referentes às extensões de face possuem valores de intervalo iguais aos das arestas paralelas das faces nelas incidentes.

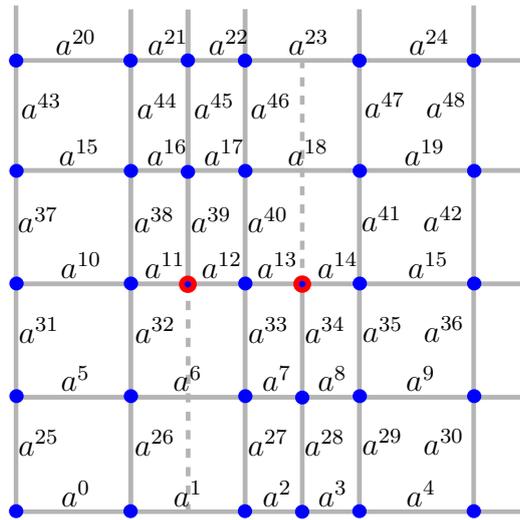


Figura 3.14: T-malha estendida: valores de intervalos de nós.

A determinação dos intervalos de nós para a  $\alpha$ -ésima âncora depende de um sistema local de coordenadas, que é definido considerando uma das arestas incidentes no vértice como direção  $\xi^1$  e a direção perpendicular como  $\xi^2$ . O vetor de intervalos de nós  $\Delta \Xi_{\alpha,1}$  é obtido com os seguintes passos (o vetor  $\Delta \Xi_{\alpha,2}$  é computado de maneira similar):

- cria-se um vetor de intervalos vazio,  $\Delta \Xi_{\alpha,1}$ ;
- adiciona-se o valor de intervalo de nós das duas arestas incidentes na direção  $\xi^1$  ao vetor  $\Delta \Xi_{\alpha,1}$ .
- a partir dessas arestas iniciais, adicionam-se, nas respectivas posições, o valor das arestas imediatamente seguintes e anteriores na mesma direção. Em caso de T-junção, em que não há arestas adiante, o valor de intervalo utilizado é da aresta da face da T-junção na mesma direção. Este procedimento é realizado até que se obtenha  $p + 1 = 4$  valores no vetor.

- em caso de não haver mais arestas/faces na direção  $\xi^1$ , o valor de intervalo zero é utilizado até que se complete o vetor.

A partir do vetor de intervalos de nós  $\Delta\Xi_{\alpha,1} = \{\Delta\xi_0^1, \Delta\xi_1^1, \Delta\xi_2^1, \Delta\xi_3^1\}$ , é possível extrair o vetor de nós local  $\Xi_{\alpha,1} \{\xi_0^1, \xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1\}$ , considerando que  $\Delta\xi_i^1 = \xi_{i+1}^1 - \xi_i^1$ . No entanto, é necessário atribuir um valor inicial a  $\xi_0^1$ , considerado aqui como 0. O vetor de nós local possui  $p + 2 = 5$  valores.

A Figura 3.15 demonstra o esquema para a computação dos vetores de nós locais para T-spline bicúbica referente às âncoras  $\alpha$  e  $\beta$ . Considerando que ambas as âncoras possuam a direção  $\xi^1$  na horizontal e  $\xi^2$  na vertical, e considerando a parte da T-malha ilustrada na Figura 3.14, os vetores de intervalos de nós são  $\Delta\Xi_{\alpha,1} = \{0, a^5, a^6, a^7\}$ ,  $\Delta\Xi_{\alpha,2} = \{0, a^{26}, a^{32}, a^{38}\}$ , e  $\Delta\Xi_{\beta,1} = \{a^{12}, a^{13}, a^{14}, a^{15}\}$ ,  $\Delta\Xi_{\beta,2} = \{a^{28}, a^{34}, a^{40}, a^{46}\}$ .

O domínio  $\Omega_\alpha$  (e de forma análoga  $\Omega_\beta$ ) é determinado através da combinação dos domínios de cada um dos vetores de nós  $\Xi_{\alpha,1} = [\xi_0^1, \xi_4^1]$  e  $\Xi_{\alpha,2} = [\xi_0^2, \xi_4^2]$ , conforme ilustrado por linhas pontilhadas na Figura 3.15.

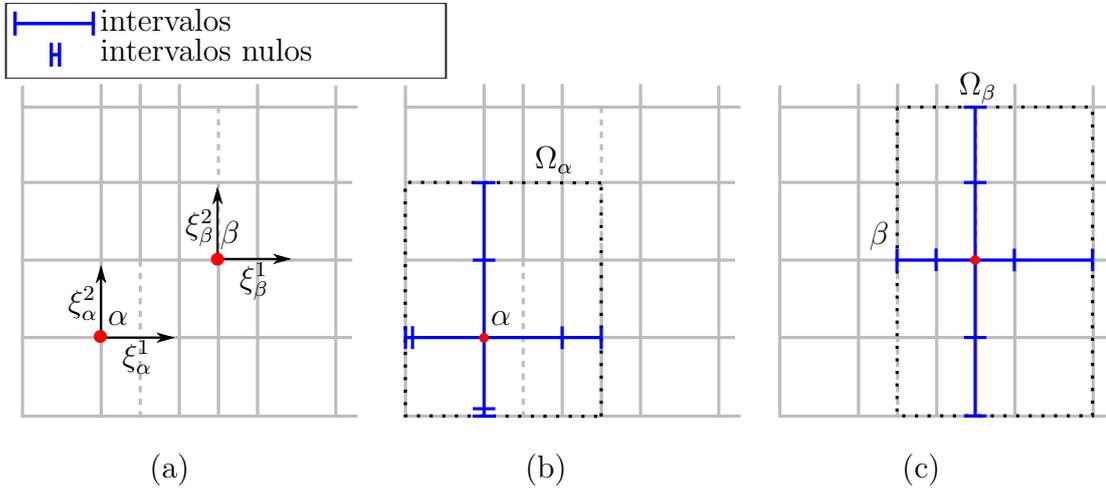


Figura 3.15: Cálculo dos vetores de nós locais. (a) âncoras  $\alpha$  e  $\beta$  (pontos vermelhos); (b) e (c) esquema para obtenção dos vetores de intervalos de nós  $\Delta\Xi_\alpha$  e  $\Delta\Xi_\beta$ , respectivamente. As linhas pontilhadas definem os limites dos domínios de cada função na superfície.

Uma vez definidos os vetores de nós locais  $\Xi_\alpha$ , estes são transformados em vetores de nós estendidos  $\bar{\Xi}_\alpha$ , tornando-os vetores de nós abertos, com multiplicidade  $p + 1 = 4$  em suas extremidades. O conjunto de funções referentes a cada vetor de nós estendido  $\bar{\Xi}_{\alpha,1}$  e  $\bar{\Xi}_{\alpha,2}$  é obtido a partir da equação de definição das B-splines (3.5). Porém, apenas uma dessas funções corresponde a cada vetor de nós local  $\Xi_{\alpha,1}$  e  $\Xi_{\alpha,2}$ . Essa função está relacionada com o posicionamento da coordenada da âncora  $\alpha$  no vetor de nós estendido, e pode ser identificada pelo índice  $n_i$ , que é quantidade de nós inseridos no início do vetor de nós para transformá-lo em um vetor nós estendido.

A Figura 3.16 ilustra dois exemplos com o conjunto de funções cúbicas ( $p = 3$ ) referente ao respectivo vetor de nós estendido e destaca a função relacionada ao vetor de nós original. Em (a) é considerado o vetor de nós  $\Xi_{\alpha,1} = \{0, 1, 2, 2.5, 3\}$  e o vetor de nós estendido  $\bar{\Xi}_{\alpha,1} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, 1, 2, 2.5, 3, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}\}$ , como a multiplicidade do primeiro nó é 1, então  $n_i = p + 1 - 1 = 3$  é o índice da função correspondente. Em (b) considera-se o vetor de nós  $\Xi_{\alpha,1} = \{0, 0, 1, 2, 2.5\}$  e vetor de nós estendido  $\bar{\Xi}_{\alpha,1} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, 0, 1, 2, 2.5, \mathbf{2.5}, \mathbf{2.5}, \mathbf{2.5}\}$ , a função correspondente é a de índice  $n_i = p + 1 - 2 = 2$ .

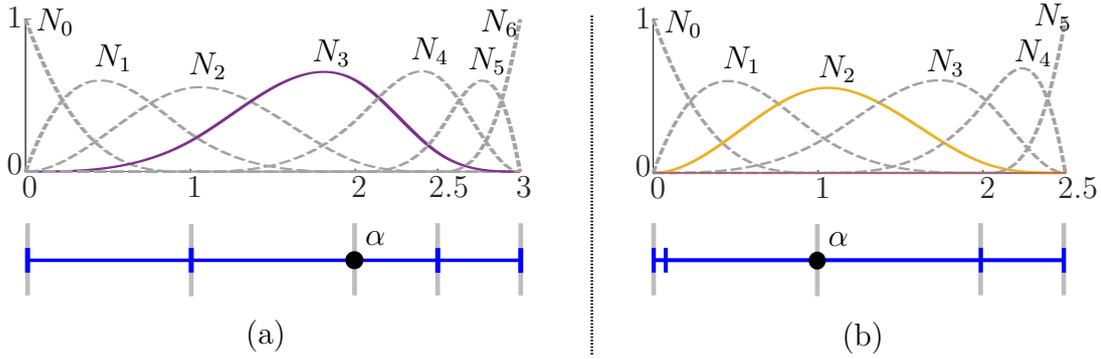


Figura 3.16: Funções definidas a partir de um vetor de nós de  $\alpha$  (pontos pretos). (a)  $\bar{\Xi}_{\alpha,1} = \{0, 1, 2, 2.5, 3\}$ . (b)  $\bar{\Xi}_{\alpha,1} = \{0, 0, 1, 2, 2.5\}$ .

Antes de prosseguir para a matriz de extração de Bézier de um elemento regular, é importante mencionar algumas observações sobre a extensão adicionada neste trabalho com o objetivo de tratar a determinação dos vetores de nós e, conseqüentemente, funções de forma em T-malhas contendo arestas de vinco. Ao buscar os valores de intervalos das arestas a partir de uma âncora, quando uma aresta de vinco é encontrada, um valor de intervalo zero é adicionado ao vetor de intervalos de nós, representando um ponto de tangência e uma descontinuidade na função.

A Figura 3.17 ilustra de forma unidimensional duas situações para a determinação de vetores de nós, considerando arestas de vinco perpendiculares e intervalo de nós igual a 1. Em (a) a aresta de vinco limita o domínio  $\Omega_\alpha$ , e um valor de intervalo zero é adicionado ao final do vetor de intervalos de nós, o que resulta em um aumento da multiplicidade do nó 3. Note que tal consideração pode ser justificada devido ao intervalo nulo de nós entre o próximo vértice e seu ponto de tangência. O vetor de nós, iniciando em zero é  $\Xi_{\alpha,1} = \{0, 1, 2, 3, 3\}$ , vetor de nós estendido  $\bar{\Xi}_{\alpha,1} = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3\}$  e  $n_i = 3$ , então a função correspondente é a  $N_3$ , em destaque na imagem.

Na Figura 3.17 (b) a aresta de vinco é incidente no vértice associado à âncora  $\beta$ . Considerando uma descontinuidade no vértice, o domínio é dividido em dois, portanto dois vetores de nós são determinados. Desconsiderando os intervalos nulos referente aos pontos de tangência, o primeiro vetor de nós é definido como  $\Xi_{\beta,1} = \{0, 1, 2, 2, 2\}$ , com vetor de nós estendido  $\bar{\Xi}_{\beta,1} = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2\}$  e  $n_i = 3$ , então a função correspondente é a  $N_3$ . No entanto, a função  $N_3$  não está relacionada à âncora  $\beta$ , mas sim ao ponto de tangência associado ao vértice naquela direção, denominado  $\beta_t$ . A próxima função,  $N_4$ , é relacionada à âncora  $\beta$ . O segundo vetor é  $\Xi_{\beta,1} = \{0, 0, 0, 1, 2\}$ , com vetor de nós estendido  $\bar{\Xi}_{\beta,1} = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2\}$  e  $n_i = 1$ , então a função correspondente é a  $N_1$ . Novamente, a função  $N_1$  está relacionada ao ponto de tangência associado ao vértice naquela direção, denominado  $\beta_s$ . A função anterior,  $N_0$ , é relacionada ao vértice. Note que a função  $N_3$  é não nula em todo o domínio, e a  $N_4$  é não nula apenas no intervalo mais próximo à aresta de vinco, e o mesmo ocorre para  $N_1$  e  $N_0$  respectivamente. Então, tanto  $N_4$  quanto  $N_0$  estão relacionadas com a âncora, dependendo do domínio que se encontra o elemento. Caso a âncora  $\beta$  esteja associada a um vértice de borda, então apenas um domínio é considerado.

A função bidimensional relacionada a  $\alpha$  é obtida pelo produto tensorial entre as funções  $N_\alpha(\xi^1)$  e  $M_\alpha(\xi^2)$  definidas pelos respectivos vetores  $\bar{\Xi}_{\alpha,1}$  e  $\bar{\Xi}_{\alpha,2}$ . A Figura 3.18 demonstra a relação entre os vetores de nós e a função computada, ilustrando os elementos que são influenciados pela função.

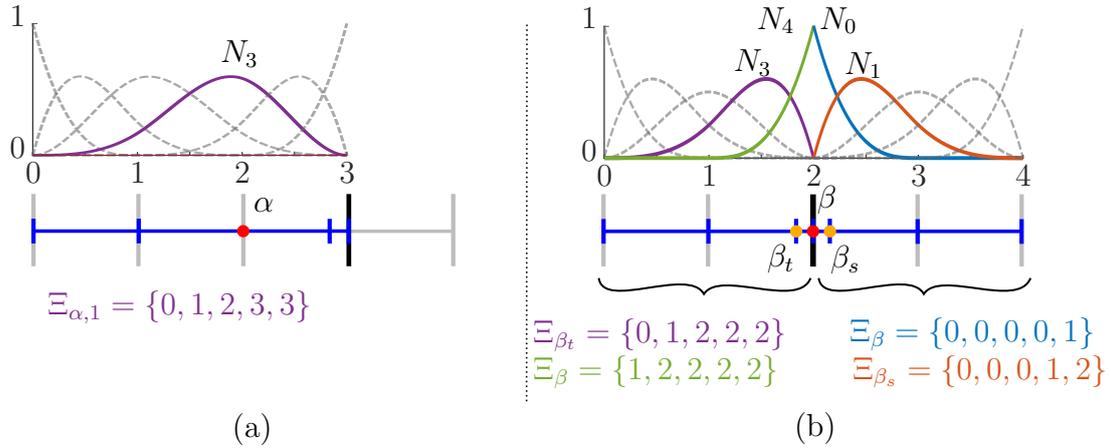


Figura 3.17: Funções de forma associadas à âncora (pontos em vermelho) e ao ponto de tangência (pontos em laranja) quando há arestas de vinco (em preto). Os vetores de nós e as funções correspondentes possuem a mesma cor. (a) aresta de vinco limita o domínio da função. (b) aresta de vinco cria dois domínios da função, para cada um dois vetores de nós.

Os elementos pertencentes a vizinhança 2-anel de um nó extraordinário serão desconsiderados neste processo, e serão tratados de forma distinta na Seção 3.3.2.

Objetivando uma visão do elemento, referente ao relacionamento com as âncoras, a Figura 3.19 apresenta uma T-malha estendida com âncoras e um elemento em destaque, o qual está no domínio de diversas âncoras, dentre elas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ , o que representa que as funções definidas por tais âncoras interferem na determinação da superfície deste elemento. A matriz de extração de Bézier de um elemento possui uma linha correspondente a cada âncora cujo domínio ele pertence.

Então, conhecidos os vetores de nós  $\Xi_\alpha$  da  $\alpha$ -ésima âncora, as linhas correspondentes dos operadores de extração para todos elementos em  $\Omega_\alpha$  podem ser computadas. A ideia principal do processo de extração de Bézier é realizar a inserção de nós no vetor de nós estendido, até que todos os nós tenham multiplicidade  $p$ , semelhante como é feito para NURBS (veja [8]). Se o vetor de nós estendido ( $\bar{\Xi} = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2.5, 3, 3, 3, 3\}$ ) da Figura 3.16(a) fosse considerado como de uma NURBS, então a extração de Bézier iria produzir as funções de base conforme ilustrado na Figura 3.20, na qual fica explícita as discontinuidades criadas com a inserção de nós, e os 4 elementos. É importante ressaltar que a inserção de um nó em um vetor de nós resulta na criação de um ponto de controle, e o resultado das inserções até se alcançar a multiplicidade  $p$  em cada nó do vetor é a geração dos pontos de controle de Bézier.

Conforme Scott [36], uma das diferenças entre a extração para NURBS e T-splines é que na T-splines apenas uma única linha do operador é computada — função  $N_3$  da Figura 3.16(a) —, enquanto na NURBS todas as linhas são computadas no mesmo procedimento — funções  $N_0$  a  $N_6$  da Figura 3.16(a).

A Tabela 3.1 apresenta o operador de extração de Bézier, computado para o caso de uma NURBS, com uma matriz para cada elemento, no entanto apenas as linhas em destaque formam a função T-spline correspondente à função  $N_3$  da Figura 3.16 (a) em cada elemento, de tal forma que, a linha em destaque na cor vermelha  $[\frac{1}{5} \frac{2}{5} \frac{4}{5} \frac{3}{5}]$

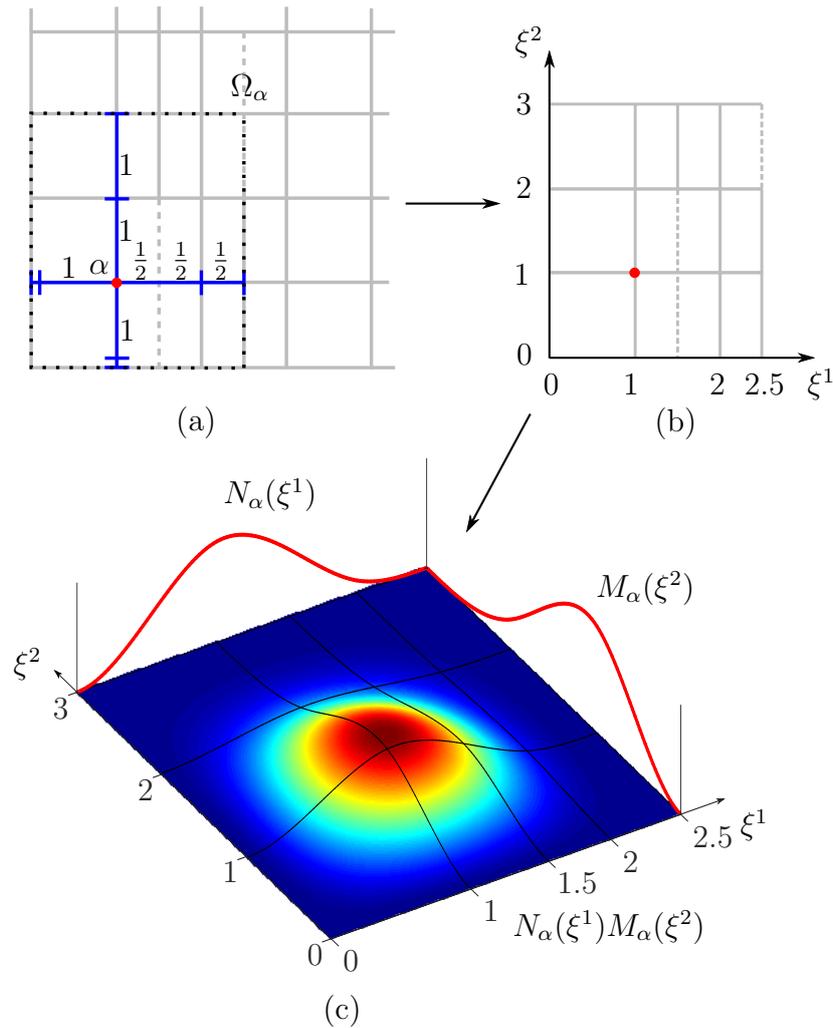


Figura 3.18: Função bidimensional associada à âncora. (a) Domínio  $\Omega_\alpha$  em linhas pontilhadas e valores dos intervalos de nós no domínio. (b) Sistema local de coordenadas da âncora  $\alpha$ . (c) Função bidimensional  $N_\alpha(\xi^1)M_\alpha(\xi^2)$  e os limites dos elementos (linhas pretas).

irá compor o operador de extração do elemento cujo domínio é  $[1, 2]$  e é associada à âncora que gerou tal vetor de nós. Quando o processo é realizado para todas as funções T-splines que influenciam um elemento  $e$ , a matriz de extração de Bézier  $\mathbf{C}^e$  é completada.

O algoritmo utilizado neste trabalho para computar apenas as linhas da extração de Bézier referentes à função associada à âncora é o mesmo apresentado por Scott [35]. Já a linha da extração de Bézier referente à função adicional, no caso de arestas com vinco, são calculadas por um algoritmo proposto a seguir. Ambos algoritmos utilizam o conceito de nó interno, que é um nó que não está no vetor de nós computado, e tem por objetivo subdividir um elemento. Esta situação ocorre em regiões próximas a uma T-junção, quando há mais de um elemento em uma face da T-malha, contendo uma subdivisão de um intervalo de nós causada por uma extensão de face.

Na Figura 3.17 (b) nota-se que as funções adicionais ( $N_0$  e  $N_4$ ), devido a aresta de vinco, são não nulas apenas no intervalo mais próximo da âncora. Assim, o algoritmo para o cálculo da linha da matriz de extração de Bézier do elemento é simplificado e considera um único intervalo. Entretanto, os limites do elemento podem não coincidir com os limites do intervalo, pois devido aos nós internos o intervalo pode ser subdivi-

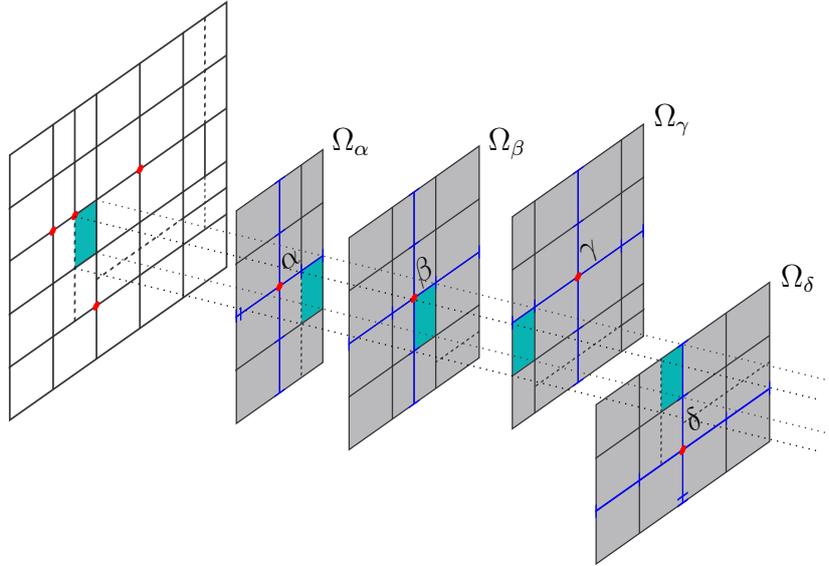


Figura 3.19: Relação do elemento (em azul) com os domínios  $\Omega_\alpha$ ,  $\Omega_\beta$ ,  $\Omega_\gamma$  e  $\Omega_\delta$ .

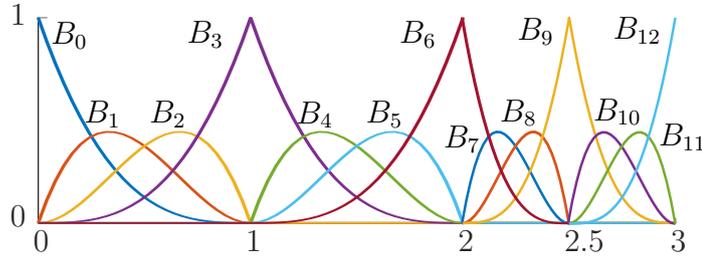


Figura 3.20: Funções de base dos elementos de Bézier após a inserção de nós ao vetor referente ao vetor de nós estendido ( $\bar{\Xi} = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2.5, 3, 3, 3, 3\}$ ) da Figura 3.16 (a).

dido: em 2 subintervalos, quando o elemento coincide com o início ou fim do intervalo, ou em 3 subintervalos, quando tanto o início quanto o fim do elemento não coincidem com os limites do intervalo. O número de subintervalos é igual ao número de linhas do operador de extração resultantes do algoritmo.

A Figura 3.21 ilustra em três exemplos a extração de Bézier unidimensional de grau  $p = 3$ , referente à função  $N_4$ . Cada linha resultante representada em um retângulo é associada a um subintervalo, e os retângulos com linhas sólidas indicam o subintervalo do elemento  $e$ . O algoritmo é processado na ordem reversa aos subintervalos, iniciando com a atribuição do valor 1 à última posição da última linha. Os demais valores da linha são calculados por meio de uma progressão geométrica cuja razão é  $q$ . Para cada subintervalo é definido o valor de  $q = \frac{(i\_sub - i\_int)}{(f\_sub - i\_int)}$ , em que  $i\_int$  é o início do intervalo e  $i\_sub$  e  $f\_sub$  são o início e o fim do subintervalo, respectivamente. O primeiro valor de uma linha é copiado para a última posição da linha anterior.

Na Figura 3.21 o intervalo não nulo da função  $N_4$  é  $[1, 2]$ . Em (a) o elemento  $e$  está no primeiro subintervalo  $[1, 1.6]$ , portanto, das duas linhas resultantes, a primeira é referente ao elemento. Em (b) o subintervalo referente ao elemento  $e$  é  $[1.2, 1.6]$ , então a segunda linha indica a extração de Bézier do elemento. Caso elemento  $e$  coincida com o intervalo  $[1, 2]$ , a linha resultante será  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ .

Com as linhas da extração de Bézier computadas, em ambas as direções, para o  $e$ -ésimo elemento no domínio da  $\alpha$ -ésima âncora, a montagem na matriz  $\mathbf{C}^e$  é realizada conforme segue. Considerando a ilustração da Figura 3.22, as linhas de extração de

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{20} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_0 \\ \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{20} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{6} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_3 \\ \bar{B}_4 \\ \bar{B}_5 \\ \bar{B}_6 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_6 \\ \bar{B}_7 \\ \bar{B}_8 \\ \bar{B}_9 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_9 \\ \bar{B}_{10} \\ \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{12} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Tabela 3.1: Ilustração do operador de extração de Bézier computado a partir do vetor de nós estendido ( $\bar{\Xi} = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2.5, 3, 3, 3, 3\}$ ) da Figura 3.16 (a). Cada matriz está relacionada com um elemento para o caso da NURBS, apenas as linhas destacadas formam a função T-spline correspondente à função  $N_3$  em cada elemento, de forma que a linha em vermelho é referente a tal função no segundo elemento cujo domínio é  $[1, 2]$ .

Bézier unidimensionais computadas são  $c_{N_3}$  referente à direção  $\xi_\alpha^1$ , e  $c_{M_4}$  e  $c_{M_3}$  referente à direção  $\xi_\alpha^2$ , sendo a última associada ao ponto de tangência. Nesse caso, duas linhas são adicionadas na matriz  $\mathbf{C}^e$ , as quais são obtidas através do produto tensorial das linhas unidimensionais, tal que,  $c_{N_3} \times c_{M_4}$  está associado com a âncora  $\alpha$ , e  $c_{N_3} \times c_{M_3}$  associado com o ponto de tangência  $\alpha_t$ , conforme demonstrado na Equação (3.29).

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} N_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_3 \\ M_4 \\ \vdots \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{N_3} \\ \vdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{M_3} \\ c_{M_4} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_0 \\ \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{B}_0 \\ \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} N_3 M_3 \\ N_3 M_4 \\ \vdots \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{N_3} \times c_{M_3} \\ c_{N_3} \times c_{M_4} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_{0,0} \\ \bar{B}_{0,1} \\ \vdots \\ \bar{B}_{4,4} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Os conceitos apresentados na extração de Bézier para elementos regulares consideram que a  $\alpha$ -ésima âncora possui um sistema local de coordenadas  $(\xi_\alpha^1, \xi_\alpha^2)$ , o qual até agora foi considerado pelos elementos naquele domínio  $\Omega^\alpha$ . Entretanto, um elemento pode ser influenciado por âncoras com sistemas local de coordenadas distintos. Então é necessário estabelecer um sistema local de coordenadas para o  $e$ -ésimo elemento  $(\xi_e^1, \xi_e^2)$ , escolhendo duas arestas perpendiculares da face da qual derivou tal elemento, e a origem como um vértice incidente na face.

O sistema de coordenadas da âncora deve se alinhar com o sistema de coordenadas de cada elemento por ela influenciado. Tal ajuste é feito sobre os vetores de intervalos de nós calculados no sistema local de coordenadas original. A Figura 3.23 apresenta as 4 situações quanto ao sistema local de coordenadas entre 4 âncoras e um elemento  $e$ . O sistema de coordenadas da âncora  $\alpha$  está alinhado com o sistema de coordenadas do elemento  $e$ , portanto os vetores de intervalos de nós referentes aos eixos  $\xi_\alpha^1$  e  $\xi_\alpha^2$  são

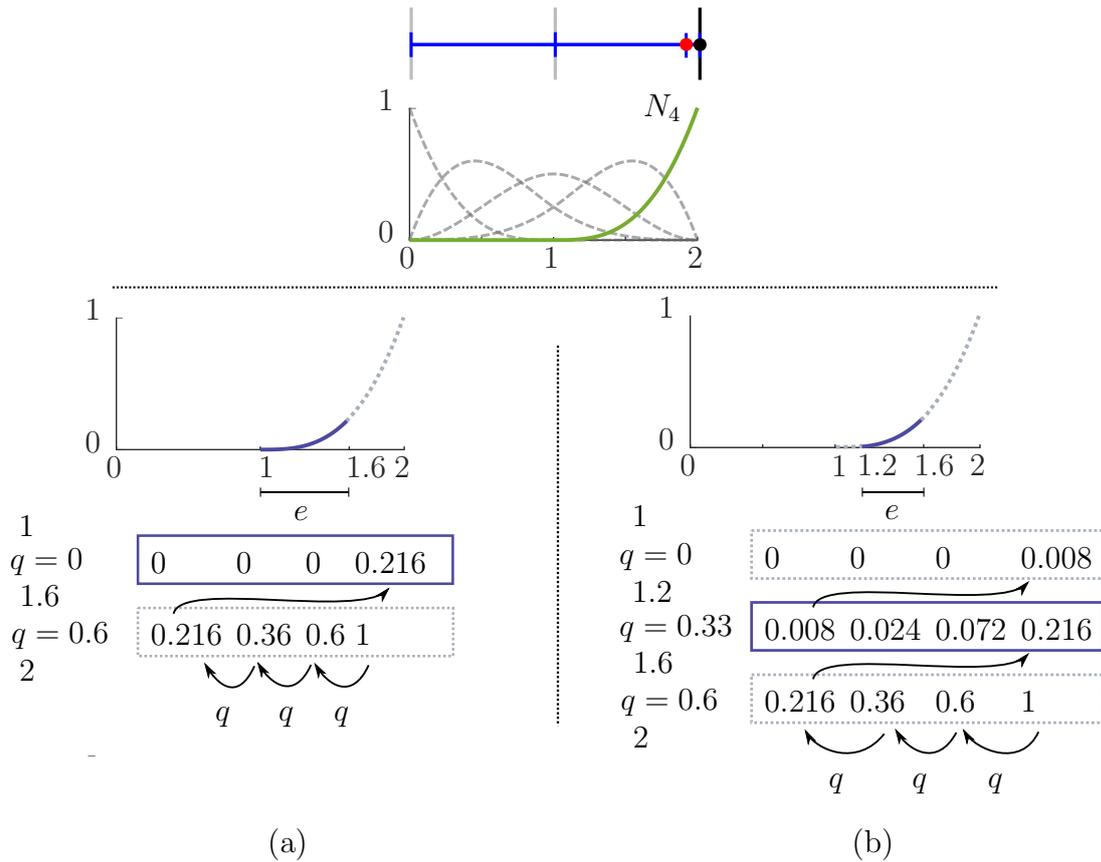


Figura 3.21: Exemplos a extração de Bézier com aresta de vinco, referente à função  $N_4$  (Figura 3.17 (c), a qual é não nula no intervalo  $[1, 2]$ ). Em (a) são criados dois subintervalos, e em (b) dois nós internos resultam em 3 subintervalos. Os retângulos com linhas sólidas indicam a linha da extração de Bézier referente ao elemento  $e$ .

os considerados em  $\xi_e^1$  e  $\xi_e^2$ , respectivamente. Na âncora  $\beta$ , o vetor de intervalo de nós referente ao eixo  $\xi_\beta^2$  é considerado em  $\xi_e^1$ , já o vetor de intervalo de nós referente ao eixo  $\xi_\beta^1$  deve ser invertido para ser considerado em  $\xi_e^2$ . Tal inversão também deve ser realizada para os vetores de intervalos de nós referentes aos eixos  $\xi_\gamma^1$  e  $\xi_\gamma^2$ , e considerados em  $\xi_e^1$  e  $\xi_e^2$ , respectivamente. No caso da âncora  $\delta$ , o vetor de intervalo de nós referente ao eixo  $\xi_\delta^1$  é considerado em  $\xi_e^2$ , já o vetor de intervalo de nós referente ao eixo  $\xi_\delta^2$  deve ser invertido para ser considerado em  $\xi_e^1$ .

Após a inversão de um vetor de intervalos de nós, o vetor de nós deve ser computado novamente. A inversão do vetor de intervalos de nós  $\Delta \Xi^1 = \{1, 0.5, 0.3, 0.9\}$  resulta em  $\overleftarrow{\Delta \Xi^1} = \{0.9, 0.3, 0.5, 1\}$ , e os respectivos vetores de nós são  $\Xi^1 = \{0, 1, 1.5, 1.8, 2.7\}$  e  $\overleftarrow{\Xi^1} = \{0, 0.9, 1.2, 1.7, 2.7\}$ . As funções computadas a partir de  $\Xi^1$  e  $\overleftarrow{\Xi^1}$  são invertidas.

### 3.3.2 Extração de Bézier para faces irregulares

Conforme comentado na seção anterior, um nó extraordinário não possui âncora associada, e isso ocorre devido à impossibilidade de determinação de um sistema local de coordenadas único nesse vértice. Consequentemente, não há como estabelecer uma função computada através de vetores de nós associada à esse tipo de vértice.

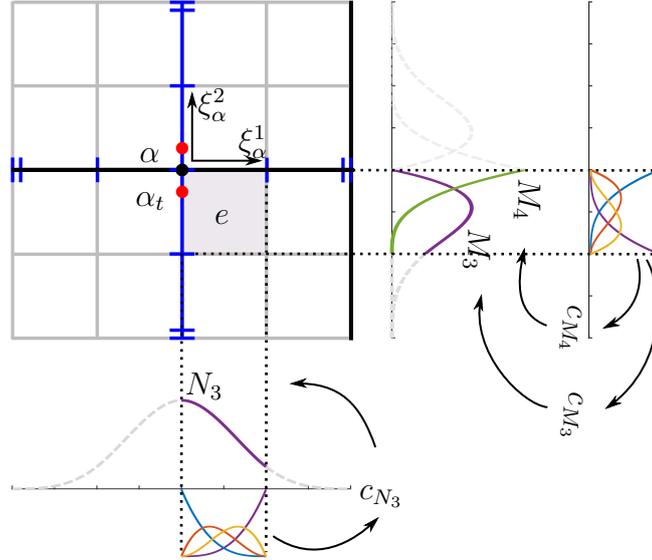


Figura 3.22: Extração de Bézier bidimensional para o elemento  $e$ .  $c_{N_3}$ ,  $c_{M_3}$  e  $c_{M_4}$  são linhas das matrizes de extração unidimensionais, em  $\xi_\alpha^1$  e  $\xi_\alpha^2$ . A matriz de extração bidimensional é o produto tensorial entre tais linhas.

Uma solução, apresentada por Scott [35], gera um mapa linear entre os pontos de controle da T-spline de um elemento e os pontos de controle do elemento de Bézier correspondente. A proposta é obter os pontos de controle de um elemento de Bézier  $\mathbf{Q}$  como combinações lineares dos pontos de controle  $\mathbf{P}$  da T-spline. Os coeficientes das combinações lineares são funções polinomiais racionais dos intervalos de nós das arestas incidentes ao elemento. Os pontos  $\mathbf{Q}$  são divididos entre face ( $\mathbf{Q}^f$ ), aresta ( $\mathbf{Q}^a$ ) e vértice ( $\mathbf{Q}^v$ ). A Figura 3.24 (a) apresenta a organização dos pontos de controle de um elemento de Bézier bicúbico.

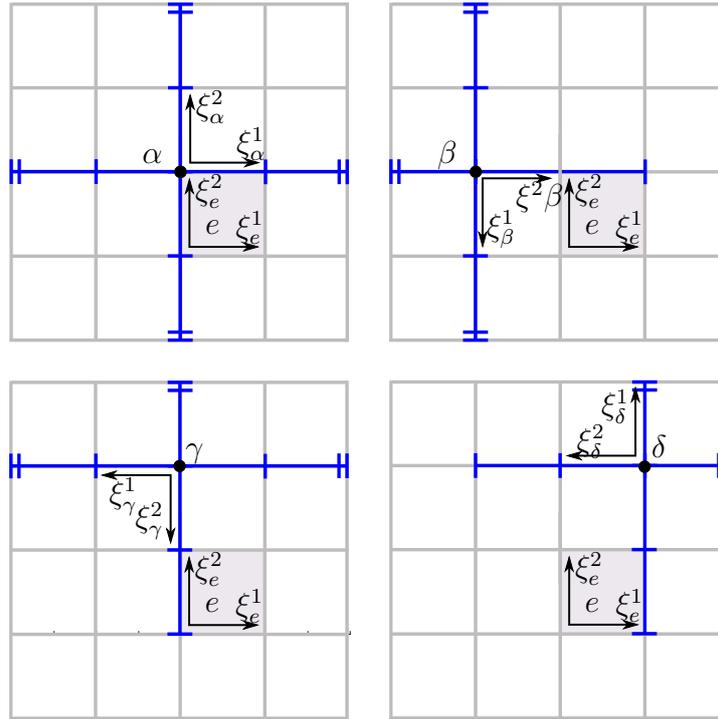
Os pontos de controle  $\mathbf{Q}^f$  são escritos em termos dos quatro pontos de controle da T-spline  $\mathbf{P}_A$ ,  $\mathbf{P}_B$ ,  $\mathbf{P}_C$  e  $\mathbf{P}_D$  associados aos vértices do elemento e intervalos de nós  $a$  a  $f$ , ilustrados na Figura 3.24 (b). A partir dos pontos  $\mathbf{Q}^f$ , são computados os pontos  $\mathbf{Q}^a$  e  $\mathbf{Q}^v$ , conforme demonstrado na Figura 3.24 (c) e (d), respectivamente. Vale ressaltar em (d) que o vértice relativo ao ponto  $\mathbf{Q}^v$ , representa todos os vértices incidentes nas faces da vizinhança 1-anel de um nó extraordinário.

Considerando  $abc = a + b + c$  e  $def = d + e + f$  os fatores da interpolação linear dos pontos de controle da T-spline para os pontos  $\mathbf{Q}^f$  são descritos matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_5^f \\ \mathbf{Q}_6^f \\ \mathbf{Q}_9^f \\ \mathbf{Q}_{10}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b+c}{abc} & \frac{e+f}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{b+c}{abc} & \frac{d}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{a}{abc} & \frac{d}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{a}{abc} & \frac{e+f}{def} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{b+c}{abc} & \frac{f}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{b+c}{abc} & \frac{d+e}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{a}{abc} & \frac{d+e}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{a}{abc} & \frac{f}{def} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{c}{abc} & \frac{e+f}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{c}{abc} & \frac{d}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{a+b}{abc} & \frac{d}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{a+b}{abc} & \frac{e+f}{def} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{c}{abc} & \frac{f}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{c}{abc} & \frac{d+e}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{a+b}{abc} & \frac{d+e}{def} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{a+b}{abc} & \frac{f}{def} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_A \\ \mathbf{P}_B \\ \mathbf{P}_C \\ \mathbf{P}_D \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Os dois pontos de aresta  $\mathbf{Q}_i^a$  e  $\mathbf{Q}_j^a$  referenciados na Figura 3.24 (c) são computados como

$$\mathbf{Q}_i^a = \left( \frac{a}{a+b} \right) \mathbf{Q}_a^f + \left( \frac{b}{a+b} \right) \mathbf{Q}_d^f, \quad \mathbf{Q}_j^a = \left( \frac{a}{a+b} \right) \mathbf{Q}_b^f + \left( \frac{b}{a+b} \right) \mathbf{Q}_c^f. \quad (3.31)$$


 Figura 3.23: Sistemas de coordenadas local do vértice ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ ) e do elemento  $e$ .

Por fim, o ponto de controle referente a um vértice de um elemento de Bézier, ilustrado na Figura 3.24 (d), é calculado, considerando  $n$  a valência do vértice, da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}_j^v = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_{i-1}}{a_{i-1} + a_{i+1}} \right) \left( \frac{a_{i+2}}{a_i + a_{i+2}} \right) \mathbf{Q}_i^f. \quad (3.32)$$

Quando  $\mathbf{Q}^a$  e  $\mathbf{Q}^v$  pertencem a arestas ou vértices, incidentes em faces de elementos regulares, ou seja, na borda da região definida pelos elementos irregulares, as Equações (3.31) e (3.32) são ignoradas. O valor utilizado, nesse caso, é o valor computado na extração de Bézier para o elemento regular, e consiste do vetor de fatores e uma lista de pontos de controle da T-spline, os quais correspondem a uma das colunas da matriz  $\mathbf{C}$  do elemento regular, e de sua lista de pontos de controle que nele influenciam. O índice da coluna depende do índice do ponto de controle de Bézier, e da orientação do sistema local de coordenadas dos dois elementos envolvidos.

Note que as Equações (3.31) e (3.32) quando desenvolvidas podem ser escritas no formato matricial conforme a Equação (3.30), de forma que os fatores dos pontos de controle da T-spline referente ao  $e$ -ésimo elemento sejam organizados em uma matriz  $\mathbf{F}^e$ , tal que

$$\mathbf{Q}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{P}^e, \quad (3.33)$$

em que  $\mathbf{Q}^e$  é o vetor contendo os 16 pontos de controle do elemento de Bézier e  $\mathbf{P}^e$  é o vetor contendo  $n^e$  pontos de controle da T-spline utilizados na combinação linear.

A Figura 3.25 mostra, por meio das setas, os pontos de controle da T-spline que são combinados na determinação dos pontos  $\mathbf{Q}^f$ ,  $\mathbf{Q}^a$  e  $\mathbf{Q}^v$ , respectivamente em (a), (b) e (c). A matriz  $\mathbf{F}$  possui alguns valores nulos, pois nem todos os pontos de controle da T-spline são utilizados na combinação linear de todos os pontos de controle de Bézier.

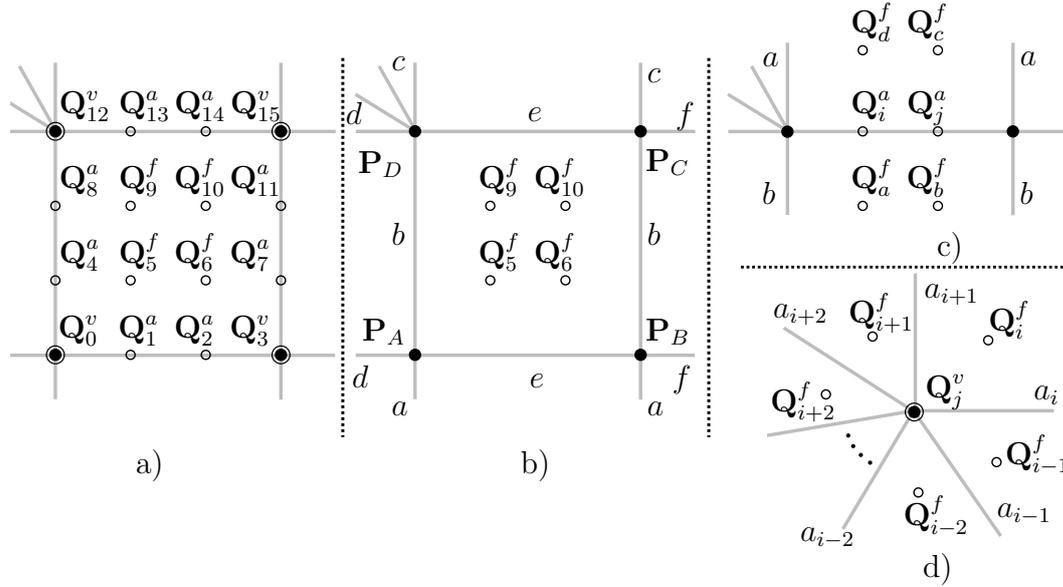


Figura 3.24: Pontos de controle: Bézier e T-Spline.  $\mathbf{Q}^v$ ,  $\mathbf{Q}^a$  e  $\mathbf{Q}^f$  são pontos de controle do elemento de Bézier (círculo vazado preto),  $\mathbf{P}_A$ ,  $\mathbf{P}_B$ ,  $\mathbf{P}_C$  e  $\mathbf{P}_D$  são pontos de controle da T-spline (ponto sólido preto) e  $a, \dots, f$  são intervalos de nós das arestas incidentes no elemento.

Conforme apresentado no início desta seção, dado um elemento de Bézier  $e$ ,  $\mathbf{Q}^e = \mathbf{C}^e \mathbf{T} \mathbf{P}^e$ , em que  $\mathbf{Q}^e$  são os pontos de controle do elemento de Bézier,  $\mathbf{P}^e$  são os pontos de controle da T-spline associados as funções que influenciam no elemento  $e$  e  $\mathbf{C}^e$  é a matriz de extração de Bézier. Assim, de acordo com a Equação (3.33), determina-se a matriz de extração de Bézier para elementos irregulares como  $\mathbf{C}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{T}$ .

O tratamento de arestas de vinco na extração de Bézier em elementos irregulares também é uma proposta original deste trabalho. Considerando a mesma ideia de combinação linear, com exceção do cálculo do pontos  $\mathbf{Q}^f$ , conforme Equação (3.30), os pontos  $\mathbf{Q}^a$  e  $\mathbf{Q}^v$  são computados de forma diferente. A Figura 3.26 (a) mostra uma aresta de vinco identificada como  $A_e$  e os dois pontos  $\mathbf{Q}_i^a$  e  $\mathbf{Q}_j^a$ , os quais são computados como

$$\mathbf{Q}_i^a = \left( \frac{d+e}{def} \right) \mathbf{P}_A + \left( \frac{f}{def} \right) \mathbf{P}_B, \quad \mathbf{Q}_j^a = \left( \frac{d}{def} \right) \mathbf{P}_A + \left( \frac{e+f}{def} \right) \mathbf{P}_B. \quad (3.34)$$

No entanto, visando uma suavização na transição de uma aresta de vinco com uma aresta sem vinco,  $\mathbf{Q}_i^a$  é calculado conforme a Equação (3.34), somente se o vértice associado ao  $\mathbf{P}_A$  for extraordinário, ou se a aresta identificada como  $A_d$  for aresta de vinco. E de forma independente e análoga, o mesmo ocorre com  $\mathbf{Q}_j^a$ , utiliza-se a Equação (3.34), apenas se o vértice associado ao  $\mathbf{P}_B$  for extraordinário, ou se a aresta identificada como  $A_f$  for a aresta de vinco. Caso as condições não sejam satisfeitas, a Equação (3.31) é utilizada.

Para o cálculo do ponto  $\mathbf{Q}^v$ , relativa a um  $v$ -ésimo vértice que contém  $n_v$  arestas de vinco nele incidentes. Caso  $n_v < 2$ , utiliza-se a Equação (3.32). Se  $n_v > 2$ , de acordo com a Figura 3.26 (b), então  $\mathbf{Q}^v = \mathbf{P}_v$ , em que  $\mathbf{P}_v$  é o ponto de controle associado ao vértice  $v$ . Por fim, se  $n_v = 2$ , e as arestas de vinco identificadas como  $A_a$  e  $A_b$ , conforme ilustrado na Figura 3.26 (c), o cálculo é realizado como

$$\mathbf{Q}^v = \left( \frac{a}{a+b} \right) \mathbf{Q}_a^a + \left( \frac{b}{a+b} \right) \mathbf{Q}_b^a. \quad (3.35)$$

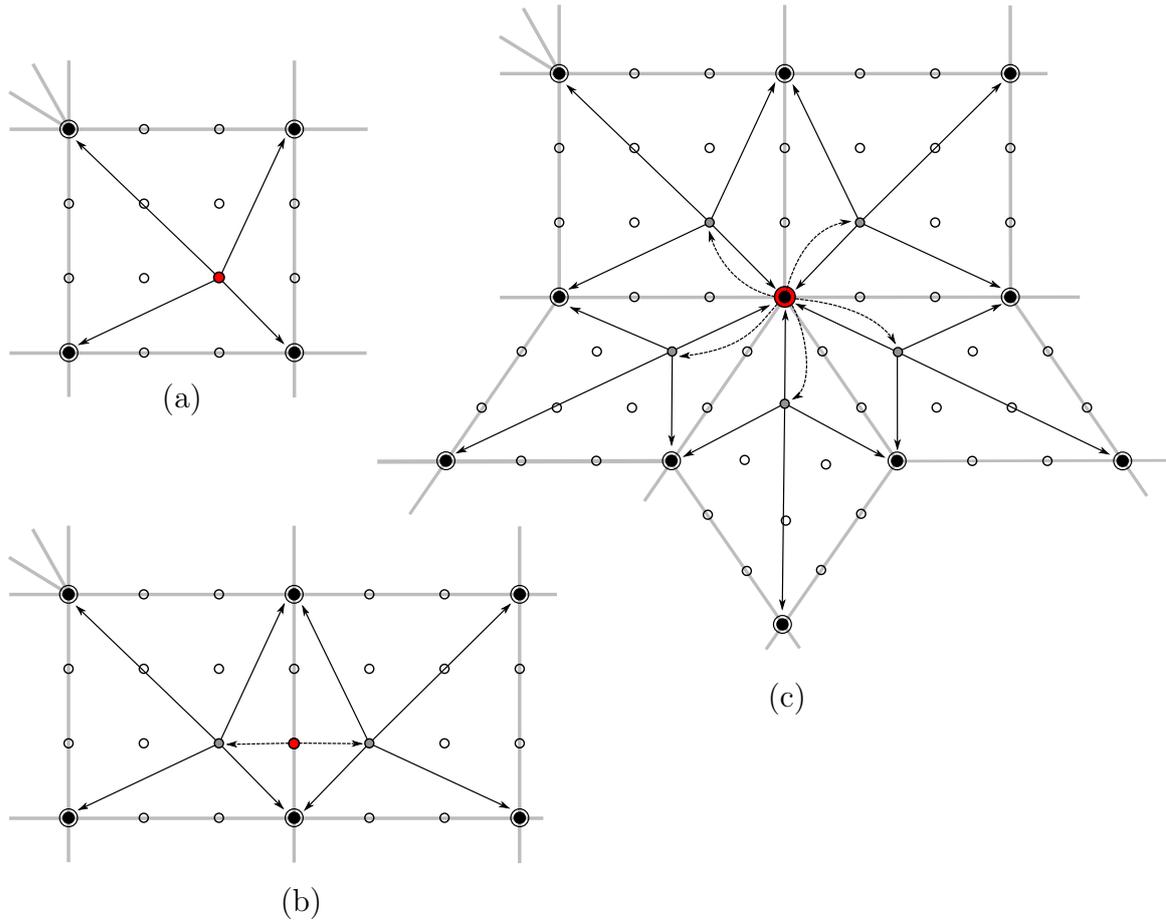


Figura 3.25: Associação dos pontos de controle: Bézier e T-Spline. As setas indicam a utilização dos pontos de controle da T-spline (ponto sólido preto) para o cálculo dos pontos de controle de Bézier (círculo vazado preto): pontos de face  $Q^f$  em (a), pontos de arestas  $Q^a$  em (b) e pontos de vértice  $Q^v$  em (c).

Os elementos irregulares incidentes na vizinhança 1-anel de um nó extraordinário possuem continuidade  $C^1$  uns com os outros, e  $C^2$  com elementos regulares. Os elementos na vizinhança 1-anel são  $C^1$  com os elementos irregulares incidentes neles, porém  $C^0$  uns com os outros, o que pode limitar algumas aplicações de modelagem geométrica. Scott [35], propõe uma estrutura de otimização dos elementos na vizinhança 1-anel de um nó extraordinário para alcançarem uma continuidade  $G^1$  entre si. Liu [22] também utiliza de tal estrutura a fim de alcançar uma suavidade na região do nó extraordinário, incrementando a continuidade da superfície para  $G^1$ . Baseado nestes trabalhos, a otimização foi implementada neste trabalho e será descrita de forma bastante sucinta.

O procedimento inicia com a elevação de grau para a obtenção de elementos de Bézier biquárticos. A condição necessária e suficiente para dois elementos de Bézier adjacentes terem continuidade  $G^1$  é compartilharem o mesmo plano tangente sobre o contorno. Então, os coeficientes da matriz de extração de Bézier são otimizados para satisfazer a continuidade  $G^1$ . Para um nó extraordinário com valência  $n$ , existem  $20n+1$  coeficientes de Bézier únicos e  $20n$  equações de restrição devem ser satisfeitas. Seja  $i$  o índice de uma função associada a um elemento da vizinhança 1-anel, as equações de restrição são montadas em uma matriz  $\mathbf{G}^i$  e os valores correspondentes do lado direito no vetor  $\mathbf{g}^i$ . Além disso, há  $40n$  equações de suavização que resulta na matriz  $\mathbf{F}^i$  e o vetor com valores do lado direito  $\mathbf{f}^i$ . O sistema para a determinação dos coeficientes

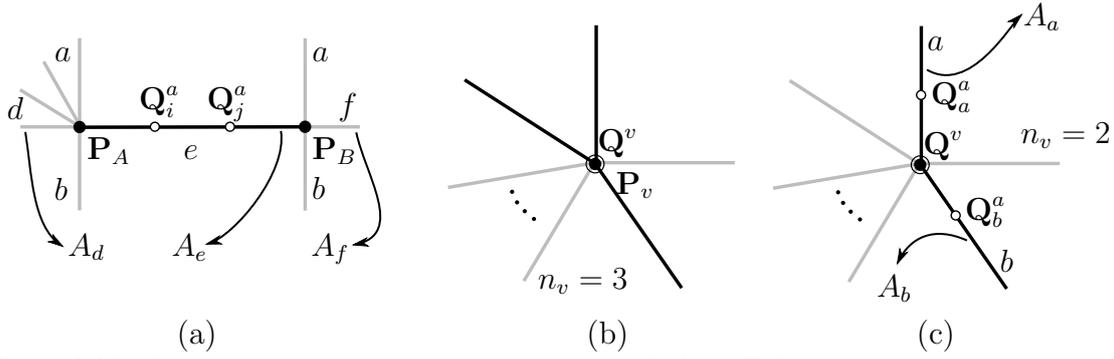


Figura 3.26: Pontos de controle com arestas de vinco: Bézier e T-Spline.  $n_v$  é o número de arestas de vinco (na cor preta). (a) Os pontos de controle  $\mathbf{Q}_i^a$  e  $\mathbf{Q}_j^a$  são determinados a partir de pontos de controle  $\mathbf{P}_A$  e  $\mathbf{P}_B$  e comprimento de arestas  $d, e$  e  $f$ . (b) No caso de mais de duas arestas de vinco,  $\mathbf{Q}^v = \mathbf{P}_v$ , em que  $\mathbf{P}_v$  é o ponto de controle associado ao  $v$ -ésimo vértice. (c) No caso de duas arestas de vinco, o ponto  $\mathbf{Q}^v$  é calculado a partir de  $\mathbf{Q}_a^a$  e  $\mathbf{Q}_b^a$  e comprimento de arestas  $a$  e  $b$ .

otimizados de Bézier  $\tilde{\mathbf{c}}^i$ , termos da matriz otimizada  $\tilde{\mathbf{C}}$  resulta em um problema de mínimos quadrados com restrição linear, descrito por

$$\min_{\tilde{\mathbf{c}}^i \in \mathbf{S}^i} \|\mathbf{F}^i \tilde{\mathbf{c}}^i - \mathbf{f}^i\|_2, \quad (3.36)$$

em que

$$\mathbf{S}^i = \{\tilde{\mathbf{c}}^i \mid \|\mathbf{G}^i \tilde{\mathbf{c}}^i - \mathbf{g}^i\|_2 = \min\}. \quad (3.37)$$

O sistema deve ser solucionado para o conjunto de funções de base obtido a partir da união das funções de cada elemento da vizinhança 1-anel do nó extraordinário. Os detalhes da solução do problema da suavização podem ser encontrados em [35].

### 3.3.3 Pontos de colocação

Conforme descrito no Capítulo 2, para que o sistema do método dos elementos de contorno tenha solução, o número de pontos de colocação (pontos fonte) deve ser igual ao número de nós do modelo. No caso das NURBS, Li e Qian [34], apresentam algumas alternativas para os pontos de colocação: distribuição uniforme, pontos de quadratura de gauss, valores máximos de funções de base e abscissas de *Greville*. Tal estudo, demonstrou que as abscissas de *Greville* resultaram em maior estabilidade e precisão na análise isogeométrica, além de ser a mais comum na literatura. A abscissa de *Greville* é um valor no domínio paramétrico cuja função de base resulta em uma maior influência (peso) do ponto de controle, e no caso das NURBS, é computada a partir do vetor de nós, da seguinte forma:

$$\bar{\xi}_i = \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i+2} + \cdots + \xi_{i+p}}{p}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.38)$$

em que  $n$  é o número de pontos de controle e  $p$  é o grau da NURBS.

Em superfícies, a Equação (3.38) deve ser aplicada em ambas direções, e os pontos de colocação são obtidos através da combinação entre os valores em cada direção. Beer [5] utiliza tal método para computar os pontos de colocação em uma superfície NURBS.

No entanto, esse processo não pode ser diretamente aplicado em uma superfície T-spline, pois depende de vetores de nós globais. Scott [35] adaptou a Equação (3.38)

para determinação do ponto de colocação, relativo à cada âncora da T-malha, a partir de uma média sobre vetores intervalos de nós locais, computada durante o processo de extração de Bézier em elementos regulares. O resultado é uma coordenada no sistema local de coordenadas da âncora, que deve ser mapeada para as coordenadas paramétricas  $[-1, 1]$  de um ou mais elementos. De acordo com a proposta, sejam  $\Delta\xi_{\alpha,1}$  e  $\Delta\xi_{\alpha,2}$  os vetores de intervalos de nós da âncora  $\alpha$ , os componentes da coordenada do ponto de colocação  $(\bar{\xi}_\alpha^1, \bar{\xi}_\alpha^2)$  são calculados como

$$\left( \frac{-\Delta\xi_0^1 - 2\Delta\xi_1^1 + 2\Delta\xi_2^1 + \Delta\xi_3^1}{5}, \frac{-\Delta\xi_0^2 - 2\Delta\xi_1^2 + 2\Delta\xi_2^2 + \Delta\xi_3^2}{5} \right) + (\xi_\alpha^1, \xi_\alpha^2), \quad (3.39)$$

em que  $(\xi_\alpha^1, \xi_\alpha^2) = (\Delta\xi_0^1 + \Delta\xi_1^1, \Delta\xi_0^2 + \Delta\xi_1^2)$  são as coordenadas de  $\alpha$  em  $\Omega_\alpha$ . A Figura 3.27 exemplifica a determinação o ponto de colocação referente à âncora  $\alpha$  como

$$(\bar{\xi}_\alpha^1, \bar{\xi}_\alpha^2) = \left( \frac{-0 - 2 + 2 + \frac{1}{2}}{5}, \frac{-0 - 2 + 2 + 1}{5} \right) + (1, 1) = (1.1, 1.2), \quad (3.40)$$

e os mapeamentos necessários para se obter a amostra do ponto de colocação em coordenadas paramétricas do elemento  $e$ . Note, neste exemplo, que o sistema de coordenadas do elemento está alinhado com o sistema de coordenadas da âncora. Quando a coordenada do ponto de colocação pertence a mais de um elemento (por exemplo sobre uma aresta), são criadas mais de uma amostra para aquele ponto, de tal forma que a avaliação em cada amostra gere a mesma localização na superfície.

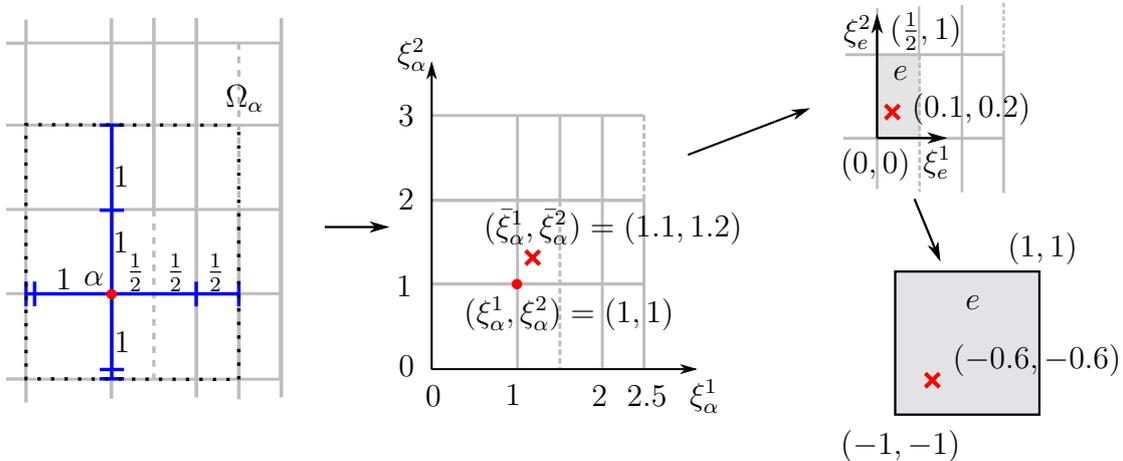


Figura 3.27: Cálculo do ponto de colocação (x vermelho) referente à âncora  $\alpha$  (ponto vermelho), e mapeamento para as coordenadas paramétricas do elemento.

Para os vértices extraordinários o ponto de colocação será a posição do próprio vértice, o qual será mapeado para a interseção dos elementos da vizinhança 1-anel deste vértice, e a coordenada da amostra de cada elemento será um dos cantos de seu domínio paramétrico.

Neste trabalho, os pontos de colocação referente aos pontos de tangência podem ser tratados de forma similar considerando seus próprios vetores intervalos de nós modificados com um intervalo nulo adicional, conforme comentado na Seção 3.3.1 e demonstrado na Figura 3.17(b).

### 3.4 Considerações finais

Neste capítulo foram introduzidos os conceitos de curvas de Bézier, B-splines e NURBS, necessários para compreensão de T-splines, utilizada como representação dos modelos neste trabalho. A partir de uma T-malha, contendo T-junções e vértices extraordinários, foi descrito o processo de extração dos elementos de Bézier, os quais representam o contorno discretizado da superfície possibilitando a análise através do MEC. Além disso, no final do capítulo, descreveu-se sobre a determinação dos pontos de colocação para modelos representados por T-splines.

# Capítulo 4

## Arcabouço proposto

### 4.1 Considerações iniciais

Os aspectos da implementação da análise isogeométrica utilizando o método de elemento de contorno são apresentados neste capítulo. Os sólidos utilizados neste trabalho são representados por T-spline cujas T-malhas foram modeladas e exportadas do CAD. A Seção 4.2 apresenta os módulos implementados, descrevendo as representações da T-malha utilizada no módulo de extração de Bézier, e da malha utilizada no módulo de análise. As funcionalidades de visualização do protótipo em MATLAB são apresentadas de forma bastante ilustrativa. Uma malha é obtida a partir da extração de elementos de Bézier da T-malha, e utilizada como modelo de análise, descrito na Seção 4.3, o qual abrange os conceitos de malha e seus componentes, detalhando a combinação de malhas, descontinuidades, exemplificando a prescrição das condições de contorno a partir de funções e demonstrando a reordenação e montagem do sistema com exemplos práticos dos conceitos apresentados na Seção 2.3.1. Por fim, na Seção 4.4 são apresentados os métodos de integração numérica, baseados na regra quadratura de Gauss, utilizados na resolução da integral de contorno, numericamente, a parte mais sensível em um sistema de simulação.

### 4.2 Descrição geral do arcabouço proposto

Neste trabalho os modelos utilizados foram representados por T-Splines, as quais são definidas a partir de uma T-malha e gerados com o auxílio do software CAD Autodesk Fusion 360 [2] com uma licença educacional. O CAD permite a criação e edição de formas modeladas por T-Splines e a exportação dos modelos para um arquivo texto em um formato TSM (*T-spline Mesh*). A fim de obter o arquivo TSM no Fusion 360, foi implementado um plugin utilizando a API em C++ no CAD, que permite que o usuário selecione o modelo T-spline a ser exportado para um arquivo TSM, para o qual utiliza-se o método `TSplineBody::saveAsTSMFile(std::string &filename)`.

O arquivo TSM contém uma descrição textual da T-malha, que a especifica por meio de rótulos em cada linha informando as faces, arestas, vincos, vértices, semi-arestas, grupos de pontos de tangência e outros. A Figura 4.1 ilustra a topologia do modelo geométrico de uma T-malha com representação dos seus componentes.

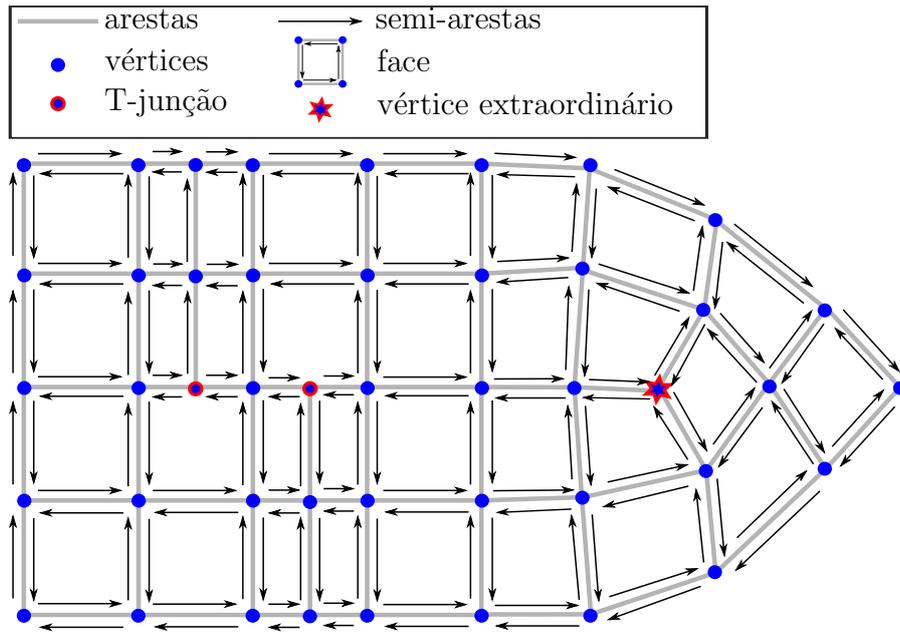


Figura 4.1: Modelo geométrico da T-malha.

O modelo utilizado para representação da T-malha conta com uma estrutura de dados baseada em semi-arestas, similar ao apresentado por Wang [47]. A estrutura é uma B-Rep (em inglês *Boundary Representation*) e consiste em uma hierarquia de componentes topológicos. Na implementação em C++, uma T-spline é representada pela classe `TSpline`, conforme diagrama de classes da Figura 4.2. A classe `TSpline` contém uma lista de faces (`TFace`), uma lista de vértices (`TVertex`), uma lista de arestas (`TEdge`) e uma lista de semi-arestas (`THalfEdge`). A classe `TEdge` representa as arestas, as quais possuem os dois vértices da T-malha que nela incidem, duas semi-arestas (em sentidos opostos), e podem ser de vinco. Um objeto da classe `TFace` representa uma face, a qual possui uma semi-aresta que pertence ao único laço de semi-arestas que a descreve. Uma semi-aresta, representada por um objeto da classe `THalfEdge` conhece seu vértice de origem, sua aresta, e sua face, além da relação com outras semi-arestas: a próxima e a anterior do laço a qual ela pertence, e a oposta de sua aresta. Uma semi-aresta do lado externo de uma aresta de borda não contém face associada. Os vértices, representados pela classe `TVertex`, possuem uma semi-aresta, representando uma das semi-arestas que partem daquele vértice. As semi-arestas podem indicar o tipo de vértice de origem, se é um canto ou uma T-junção, na face incidente. Há ainda o conceito de L-junção, o qual define os vértices dos cantos das T-malhas abertas.

Tal modelo de representação da T-malha foi utilizado na implementação do módulo responsável pela extração dos retalhos de Bézier, na qual utilizou-se a linguagem C++. O módulo toma como entrada um arquivo no formato TSM — exportado pelo plugin implementado no Fusion —, cria a representação da T-malha conforme as classes apresentadas, extrai os elementos de Bézier e gera como saída um outro arquivo, com extensão `.be`, contendo a malha de análise, que será utilizada como modelo de análise Seção 4.3. A descrição da solução implementada para extração dos elementos de Bézier foi apresentada na Seção 3.3.

Além da questão topológica, a implementação requer, da representação adotada para a T-malha, informações de intervalos de nós, os quais, na estrutura, são associ-

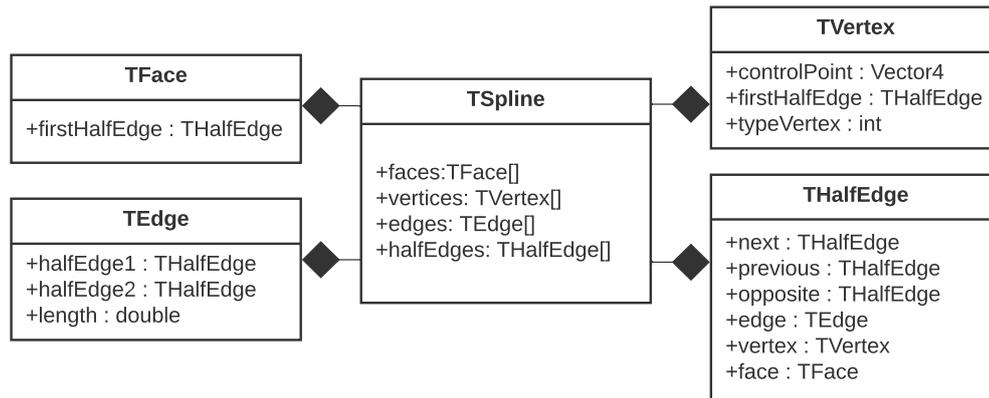


Figura 4.2: Diagrama de classes C++.

ados a cada aresta, além dos pontos de controle, relacionados com cada vértice. A estrutura ainda foi complementada com uma série de consultas que permitem realizar as operações topológicas necessárias para a implementação da solução, como exemplo, criar as extensões de face a partir das T-junções, verificar se uma face está em uma região 2-anel de um vértice, e outras.

O módulo de extração implementado em C++ é uma das possibilidades para a geração do arquivo do modelo de análise. Outras formas são possíveis, desde que forneçam a malha de análise descrita através de um arquivo com extensão *.be*, cuja descrição é apresentada no Apêndice A. O arquivo contém as informações necessárias para determinação da superfície dos elementos que representam o modelo, as quais, para cada elemento são: o conjunto de pontos de controle e as respectivas funções de forma. O arquivo contém ainda a lista de pontos de colocação necessários para o método empregado na análise.

A malha de análise, ou apenas *malha*, contém uma coleção de *nós* e uma coleção de *elementos*. Um elemento é representado por uma lista de índices para os nós que nele influenciam e por uma matriz de extração de Bézier  $\mathbf{C}$ , a partir da qual determina-se suas funções de forma. A malha não fornece informações sobre conectividade ou vizinhança entre os elementos, no entanto, os nós da malha são compartilhados entre os elementos, possibilitando identificar nós com elementos em comum, assim como elementos com nós em comum. Um nó é um ponto de controle da T-spline, então cada nó representa uma posição no  $\mathbb{R}^3$  e possui um ponto de colocação, o qual foi determinado durante o processamento do vértice da T-malha relacionado com aquele ponto de controle. Um nó de borda é originado de um ponto de controle associado a um vértice de borda na T-malha.

Um protótipo do solucionador da análise isogeométrica foi implementado em MATLAB, e toma como entrada uma malha em um arquivo *.be*. O protótipo disponibiliza recursos de interface gráfica para visualização da malha através dos elementos, nós, pontos de colocação, inclusive permitindo operações de movimentação de nós ou de elementos. A Figura 4.3 apresenta em (a) as arestas que delimitam os elementos (cinza), os nós (azul) e os pontos de colocação (vermelho). Em (b) o elemento selecionado em destaque (azul) foi movimentado na direção do eixo  $z$ , assim como o nó selecionado (vermelho) na direção do eixo  $y$ . A seleção de elementos e nó é realizada de forma iterativa com a utilização do mouse ou por linha de comando através de funções. Há funções também para alterar as cores dos componentes, além de ocultar/mostrar tais

componentes como nós, arestas dos elementos, pontos de colocação e outros. A interface contém um ícone que denota orientação dos eixos do sistema global, apresentado por um cubo no canto esquerdo inferior da janela, no qual as cores *RGB*, em português, vermelho, verde e azul, das faces indicam os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e a face preenchida indica o sentido positivo do eixo, enquanto a face com um "X" indica o sentido oposto.

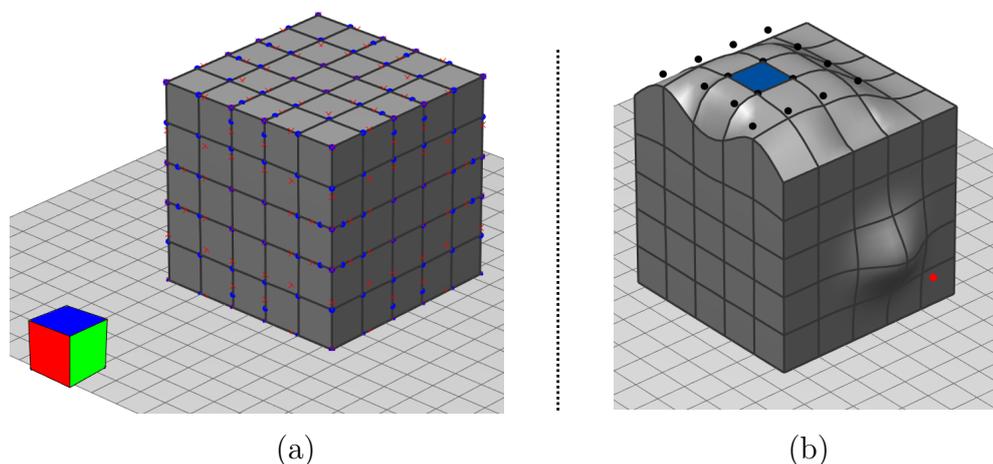


Figura 4.3: Protótipo: componentes visuais. (a) Arestas em cinza escuro indicam os limites de cada elemento, nós (pontos de controle) em azul e pontos de colocação em vermelho. (b) O elemento selecionado em azul foi movido de acordo com o vetor  $(0,0,2)$ , o ponto de controle selecionado em vermelho foi movido de acordo com o vetor  $(0,3,0)$ .

A renderização da malha ocorre individualmente para cada um de seus elementos da seguinte forma: um tessellador avalia as coordenadas globais da superfície para alguns pontos paramétricos do elemento dados por uma grade, a partir dos quais são criados os triângulos que serão renderizados. O protótipo permite determinar o refinamento da grade alterando a suavidade na renderização.

Uma vez a malha carregada, o protótipo permite a prescrição de condições de contorno no modelo, necessárias para a montagem e solução do sistema. A prescrição das condições de contorno é realizada sobre um conjunto de elementos por meio de funções das coordenadas do domínio paramétrico dos elementos representando valores na superfície, comentado com mais detalhes na Seção 4.3. Ao selecionar os elementos, determina-se a superfície na qual será aplicada a condição de contorno (que deve incluir todos elementos de uma região delimitada por arestas de vinco), então define-se os graus de liberdade  $(x,y,z)$  e a função que define a condição de contorno. Um sistema é montado e solucionado pelo método dos mínimos quadrados, cujo resultado são os valores nodais referentes ao conjunto de elementos selecionados. Três funções foram implementadas: constante ou uniforme, linear que resulta em uma variação fixa entre dois valores em uma direção, e bilinear que é a aplicação linear em ambas as direções. A condição de contorno também pode ser prescrita com base na normal da superfície selecionada e uma escala. E ainda para força de superfície foi implementada a aplicação de torque, que resulta na prescrição de forças tangenciais à um eixo de rotação determinado. A aplicação valida as condições de contorno prescritas considerando as regiões do nó, verificando se há conflitos de valores diferentes prescritos, e garantindo o requisito do método dos elementos de contorno, uma incógnita por grau de liberdade por nó.

O protótipo fornece a visualização de vetores que podem representar as condições

de contorno prescritas, utilizadas para a montagem do sistema, assim como os vetores normais à superfície, através da interpolação dos respectivos valores nodais em cada elemento. A Figura 4.4(a) ilustra os vetores normais à superfície (em ângulos diferentes) e um conjunto de elementos selecionados em azul, juntamente com todos os nós que os influenciam. Em (b) os elementos selecionados em (a) foram ocultados com o objetivo de visualizar os vetores (laranja) que representam o deslocamento prescrito nos elementos da face interna do cilindro vazado.

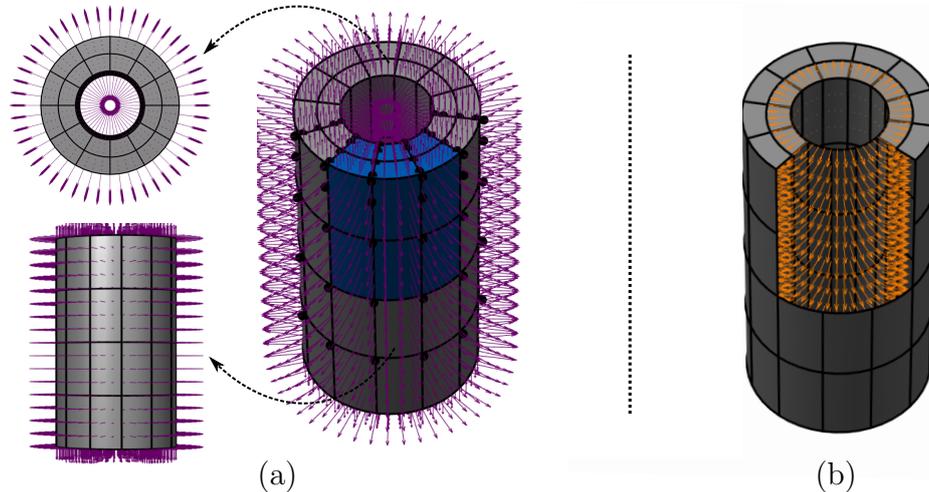


Figura 4.4: Protótipo: Vetores. (a) Vetores normais à superfície, e conjunto de elementos selecionados em azul, juntamente com todos os nós que neles influenciam. (b) Elementos ocultados para visualização dos vetores (laranja).

Prescritas as condições de contorno no modelo, é realizada a montagem do sistema do método de análise. Para a resolução do sistema é necessário a especificação do material do objeto representado pela malha, o qual é definido pelo módulo de *Young* e coeficiente de *Poisson*. Após a resolução do sistema, a solução é atribuída para os valores nodais dos elementos. Os resultados da análise podem ser visualizados por vetores, ou através da renderização com um mapa de cores e uma barra de cores representando qualquer combinação dos componentes dos valores nodais de deslocamento ou força de superfície dos nós da malha. A Figura 4.5 apresenta a malha deformada, com mapa de cores referente ao componente  $y$  do deslocamento. A malha original não deformada é mantida em cinza claro semi-transparente. O valor do componente  $y$  do deslocamento é pequeno comparado à dimensão do cubo, o que dificulta a visualização da deformação. Para possibilitar um destaque visual na deformação, o protótipo dispõe de uma escala a ser aplicada nos componentes da deformação, assim como ocorreu na imagem. Todas as imagens ilustradas no Capítulo 5 foram geradas por tal protótipo.

Conforme apresentado, o protótipo em MATLAB tem por objetivo a visualização e validação numérica dos resultados da simulação, sem se preocupar com o desempenho do sistema. No entanto, considerando que em um sistema de simulação, o desempenho é um fator de suma importância, o módulo de análise similar ao implementado em MATLAB foi implementado em C++ com objetivo de avaliar o desempenho do método de análise em uma linguagem apropriada para esse fim. A implementação do solucionador em C++ contempla apenas resultados numéricos, e consiste na montagem e solução do sistema, a partir de informações importadas de um arquivo. Em MATLAB, foi implementada uma função que cria este arquivo contendo a descrição da malha de análise, com nós e elementos, os pontos de colocação, o material, além das condições

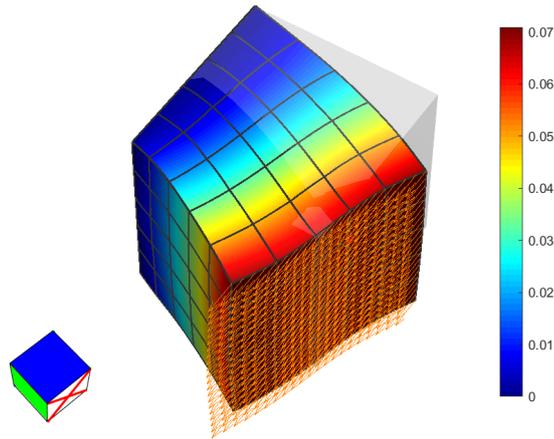


Figura 4.5: O mapa de cores da malha deformada com escala representa a coordenada  $y$  do deslocamento. Em cinza claro semi-transparente está a malha original não deformada. Os vetores na cor laranja indicam a força de superfície prescrita.

de contorno prescritas através da aplicação.

O diagrama de classes da Figura 4.6 foi utilizado em MATLAB para implementação das classes referente a representação de uma malha. Um objeto da classe `Mesh` é uma malha, e contém uma lista de elementos (`Element`) e uma lista de nós (`Nodes`). A classe `Element` representa um elemento e possui uma lista de nós os quais nele influenciam, e conseqüentemente uma lista de funções de forma, objeto da classe (`ShapeFunction`). Os elementos de Bézier são representados pela classe derivada `BezierElement`, a qual possui como função de forma um objeto da classe `BezierShapeFunction`, contendo o grau da superfície e a matriz de extração de Bezier do elemento. A classe `Node` representa um nó, e armazena uma posição no espaço tridimensional e um ponto de colocação, o qual pode conter várias amostras, uma em cada elemento com uma posição paramétrica local, todas representando a mesma posição espacial na superfície. Um nó também armazena sua multiplicidade. Os valores nodais de deslocamento e força de superfície são armazenados nos atributos "u" e "t", e a quantidade de valores de "t", é indicada pela multiplicidade. O atributo "dofs" contém os graus de liberdade para cada nó, o que significa qual o valor nodal incógnito para cada coordenada  $(x, y, z)$  do nó.

O trecho de código em MATLAB a seguir ilustra os comandos necessários para a execução da análise numérica implementada referente ao exemplo do cilindro vazado do Capítulo 5. No código, a linha 1 refere-se ao carregamento da malha a partir do arquivo `.be`. Na sequência, linha 2, a interface gráfica do protótipo é criada, permitindo a visualização e interação com a malha. As linhas 4-6 representam a prescrição das condições de contorno, selecionando os elementos, definindo a condição de contorno sobre os três componentes do deslocamento como um fator aplicado a normal à superfície, finalizando com a retirada da seleção de elementos. Na linha 8 o material é definido, para ser utilizado na execução da análise numérica nas linhas 10 e 11. Neste exemplo a visualização dos resultados é feita por mapa de cores. A linha 13 indica o fator de escala da deformação, na linha 14 é definido o componente  $x$  do deslocamento como escalar para o mapa de cores, o qual é habilitado nas linhas 15 e 16 juntamente com a barra de cores.

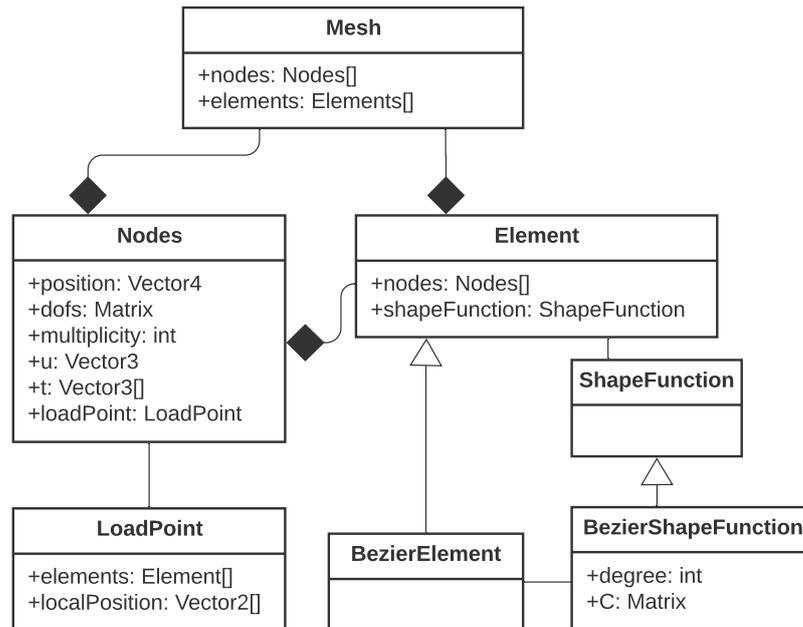


Figura 4.6: Diagrama de classes MATLAB.

```

1 malha = readMesh('../CilindroVazado.be');
2 mi = MeshInterface(malha);
3
4 mi.selectElements([1:160]);
5 mi.makeConstraint('xyz', -0.1, 'direction', 'normal');
6 mi.deselectAllElements;
7
8 material = Material(1e5,0);
9
10 solver = ElastostaticSolver(malha,material);
11 solver.execute();
12
13 mi.deformMesh(5);
14 mi.setScalar('u', 'x');
15 mi.showColorMap;
16 mi.showColorbar;

```

### 4.3 Modelo de análise

Uma malha pode ser definida através da combinação de duas outras já especificadas, permitindo a construção de malhas mais complexas a partir daquelas mais simples. Um exemplo simples é a definição de um cubo combinando seis malhas (duas a duas) de superfícies planares e quadradas, cada uma equivalente a uma face. Há duas formas de combinação de malhas: *adição de componentes* ou *colagem*.

Na adição de componentes, os nós e elementos das duas malhas combinadas são concatenados na malha resultante. A quantidade de nós e de elementos da malha resultante é igual a soma das respectivas quantidades das malhas combinadas. Na colagem, duas malhas são combinadas fundindo, em um único nó, os nós de borda que coincidem na mesma posição espacial, respeitando um critério de aproximação

(por questão de numérica). Os elementos de ambas as malhas são concatenados e adicionados na malha resultante, considerando os ajustes de índices dos nós unificados. O número de elementos da malha resultante é igual a soma dos elementos das malhas combinadas, no entanto, o número de nós da malha resultante é menor comparado à soma dos nós das malhas combinadas, devido tal procedimento.

Note que, na combinação por adição de componentes, os elementos da malha resultante não compartilham nós oriundos de malhas diferentes. Já na colagem, elementos originais de uma malha podem passar a compartilhar nós com elementos de outra malha.

A Figura 4.7(a) mostra uma combinação entre três malhas — o vão entre elas é apenas ilustrativo demonstrando que são malhas distintas — evidenciando em cada uma delas um elemento e seus respectivos nós. Em (b) é dado o exemplo da combinação por colagem, com os nós agrupados (pretos). Em (c) é apresentado a combinação por adição de componentes, na qual os nós de borda possuem a mesma posição. Na imagem, tais nós foram levemente deslocados a fim de demonstrar a replicação.

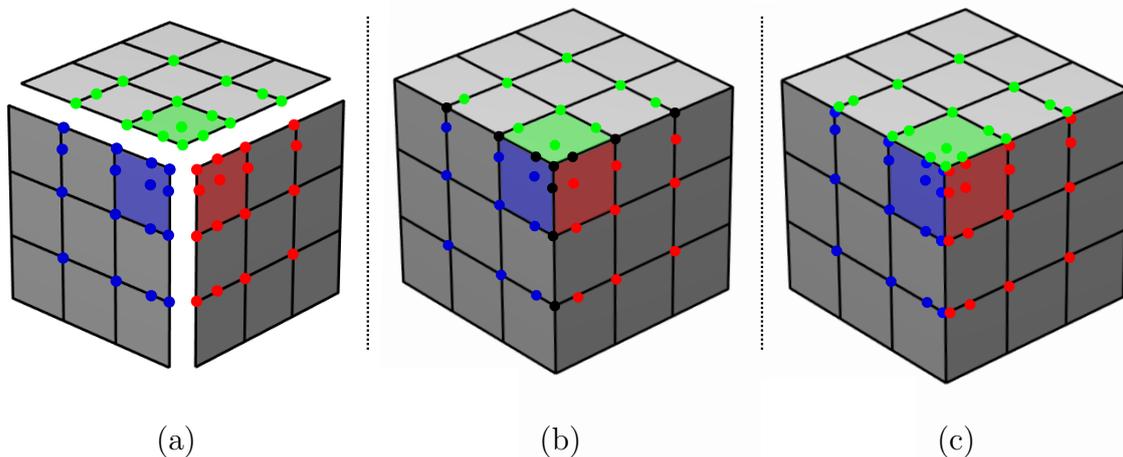


Figura 4.7: Combinação entre malhas. (a) são três malhas que se tocam nas bordas — o vão entre elas é apenas ilustrativo demonstrando que são malhas distintas — evidenciando em cada uma delas um elemento e seus respectivos nós. (b) exemplifica a combinação por colagem, com os nós agrupados (pretos). Em (c) é apresentada a combinação por adição de componentes, com nós de borda na mesma posição — foram levemente deslocados para demonstrar a replicação.

Para que uma superfície composta por mais de uma malha esteja livre de frestas, mesmo quando deformada, é necessário que a sequencia de nós seja coincidente em toda borda em comum nas malhas combinadas. Ao se utilizar a combinação, assume-se que tal requisito é satisfeito, pois nenhuma validação foi implementada para combinação.

As combinações entre malhas geram discontinuidades geométricas entre as superfícies de cada malha, comportamento semelhante a inserção de uma aresta de vinco na junção. Na Figura 4.7(b) os nós unidos (pretos) asseguram uma continuidade de superfície entre os elementos em destaque, porém há uma discontinuidade geométrica entre tais elementos. Nesse caso são utilizados os nós múltiplos, Seção 2.3.1.

A forma de representar as discontinuidades geométricas é através do conceito de elementos descontínuos, Seção 2.3.1. Neste modelo há nós que ocupam uma mesma posição no espaço, no entanto cada um deles possui uma normal de superfície, permitindo assim que força de superfície diferentes sejam aplicadas independentemente

em cada nó. Tal representação ocorre quando utiliza-se a combinação por adição de componentes. Vale observar que caso os valores de deslocamentos destes nós sejam diferentes, a superfície pode conter frestas.

Por fim, além da descontinuidade geométrica há ainda a descontinuidade de força de superfície, a qual pode ocorrer mesmo em regiões geometricamente contínuas. Assim, em um mesmo lugar geométrico há dois valores diferentes de trações, nesse caso, devido à aplicação de uma condição de contorno, e não a uma descontinuidade geométrica. No modelo proposto neste trabalho, esta situação é possível apenas se houver uma aresta de vinco entre tais elementos, e isso deve ser definido na modelagem do sólido, antecipadamente à extração dos elementos de Bézier.

Na malha, cada nó possui um ponto de colocação associado, pois o número de pontos de colocação deve ser igual ao número de nós. Um ponto de colocação pode conter mais de uma amostra, cada qual com sua coordenada do domínio paramétrico de um elemento, sendo que todas representam a mesma localização na superfície, conforme Seção 3.3.3. Quando há uma combinação de malhas por colagem, nós são eliminados devido a operação de união, e o número de pontos de colocação passa a ser maior que o número de nós. A proposta para solucionar o problema é simples, quando um nó é eliminado, o ponto de colocação associado também é eliminado. Portanto, tanto na colagem quanto na adição de componentes, os pontos de colocação da malha combinada são todos aqueles associados aos nós resultantes nela.

Dois pontos de colocação não podem estar em uma mesma posição na superfície, então ao replicar os nós, e conseqüentemente, os pontos de colocação, deve-se garantir que estes não ocupam a mesma posição. Isso só seria possível na combinação por adição de componentes, se os pontos de colocação estivessem localizados na borda que será combinada. Na literatura, esse problema é tratado aplicando um deslocamento constante para o interior da malha, no caso de NURBS, (veja [5]). No entanto, a estratégia de geração dos pontos de colocação utilizada neste trabalho, com base em coordenadas de Greville, proposta por Scott [35], cria os pontos afastados das descontinuidades, referentes às bordas, evitando o problema.

A utilização de cada uma das formas de combinação entre malhas resulta em diferentes pontos de colocação, inclusive a ordem de combinação das malhas podem alterar a lista final de tais pontos. Além disso, a configuração de pontos de colocação gerada a partir de uma malha única, pode ser ainda diferente. No entanto, o resultado da análise deve ser o mesmo, considerando apenas o erro devido a precisão numérica.

A Figura 4.8 apresenta uma comparação entre três formas de representar uma malha de um cubo de 150 elementos: (a) combinação por colagem (alguns pontos de colocação são eliminados), (b) combinação por adição (todos os pontos de colocação originais das malhas são utilizados) e (c) malha única. O elemento em destaque na cor azul visa ilustrar a diferença entre seus pontos de controle em cada malha. Nota-se uma diferença nos pontos de controle no caso da malha única, em que não há pontos de tangência na região associada à vizinhança 1-anel de um vértice extraordinário da T-malha.

Os conceitos de nós múltiplos e elementos descontínuos podem ser utilizados concomitantemente em uma mesma malha, combinada por colagem e/ou adição de componentes. Entretanto, as descontinuidades geométricas criadas devido as arestas de vinco na malha são tratadas apenas com nós múltiplos.

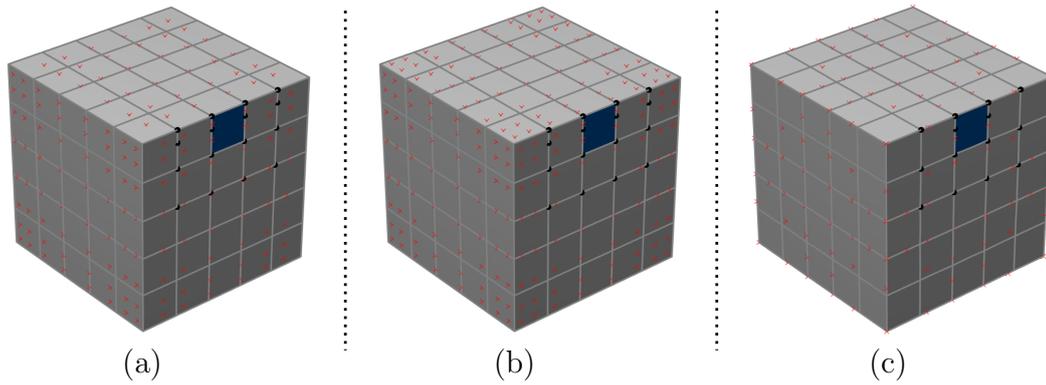


Figura 4.8: Pontos de colocação na combinação de malhas. (a) combinação por colagem (alguns pontos de colocação são eliminados), (b) combinação por adição (todos os pontos de colocação das malhas originais são utilizados) e (c) única malha.

### Aplicação das condições de contorno

A aplicação das condições de contorno no método dos elementos de contorno resume-se a prescrição de deslocamentos  $\mathbf{u}$  ou forças de superfície  $\mathbf{t}$  em uma região da superfície. Tais valores devem ser representados por valores nodais em cada nó que influencia naquela superfície, por grau de liberdade, Seção 2.3.1, de forma que em cada nó contenha apenas um valor incógnito, o qual será determinado via resolução do sistema. A Figura 4.9 mostra os valores nodais de deslocamento e força de superfície de nós múltiplos, em (a) e (b), e de nós com multiplicidade única, em (c) a (e).

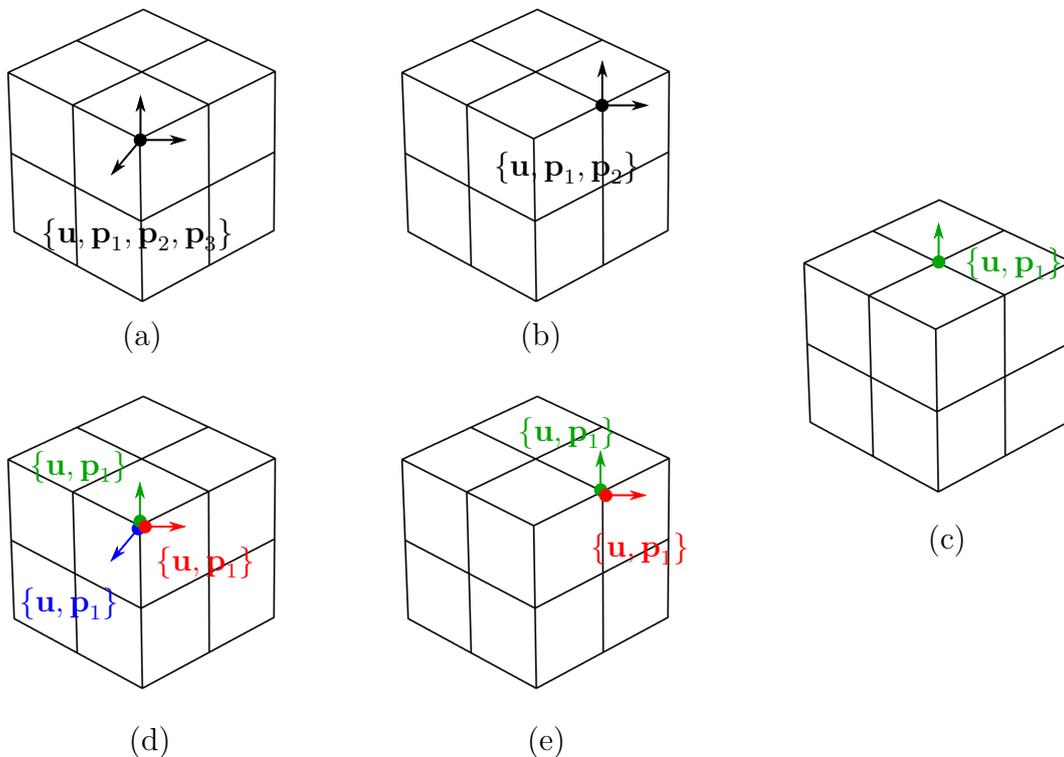


Figura 4.9: Valores nodais de deslocamento e força de superfície. Nós múltiplos, em (a) e (b), e nós com multiplicidade única, em (c) a (e). Elementos descontínuos em (d) e (e).

Ainda considerando a Figura 4.9 (a) e (d), em que são destacados nós posicionados no canto do objeto, três exemplos de prescrição de condição de contorno são

expostos. No primeiro, considere que forças de superfície  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$  são prescritas nas três regiões do nó, e a incógnita é o deslocamento  $\mathbf{u}$ . Ambos os conceitos apresentados permitem tal simulação, porém o resultado com nós múltiplos, em (a), é único, e com elementos descontínuos, em (d), são 3 incógnitas das quais espera-se, do resultado do sistema, valores iguais, para que não ocorram frestas na superfície. No segundo exemplo, suponha que o deslocamento  $\mathbf{u}$  é prescrito, restando ao sistema determinar os valores dos três valores de forças de superfícies  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$ . Nesse caso, a única alternativa é a utilização de elementos descontínuos com a mesma condição de contorno prescrita, (d). Como terceiro exemplo, imagine que a força de superfície  $\mathbf{t}_1$  de uma região do nó é incógnita, e as demais forças de superfície  $\mathbf{t}_2$  e  $\mathbf{t}_3$  e o deslocamento  $\mathbf{u}$  são prescritos. Nesse caso, nós múltiplos são essenciais para a solução do problema.

Na literatura, os exemplos encontrados nos resultados dos trabalhos envolvendo análise isogeométrica utilizando MEC utilizam geometrias simples, com poucos detalhes sobre descontinuidade e composição de geometrias e com condições de contorno homogêneas, determinadas diretamente no valor de nós específicos, como em Beer [7] e em Scott [35].

Neste trabalho as condições de contorno são definidas para uma porção da superfície relativa a um conjunto de um ou mais elementos, o que significa condições prescritas para todos os nós que influenciam aqueles elementos. Os valores prescritos para a superfície devem ser transportados para os valores nodais, que, em condições homogêneas, é feito com atribuição direta. São consideradas condições de contorno homogêneas aquelas na qual os valores nodais prescritos são constantes para todos os nós do conjunto de elementos, seja para deslocamento ou força de superfície, em cada um de seus componentes.

Uma forma dinâmica para prescrever condições de contorno heterogêneas através de funções foi implementada neste trabalho. Tais funções determinam os valores a serem prescritos em uma parte da superfície definida por um conjunto de elementos. Entretanto, a atribuição aos valores nodais, que influenciam em tais elementos, a partir dos valores prescritos por uma função não é direta. Seja  $f(\xi^1, \xi^2) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  a função que prescreve um componente de uma condição de contorno na superfície  $\Gamma^e$  do  $e$ -ésimo elemento, e  $\mathbf{b}$  um vetor contendo  $n_a$  amostras de valores de  $f$  avaliados em coordenadas do domínio paramétrico  $[-1, 1]$ , então um sistema é definido como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (4.1)$$

em que  $\mathbf{A}$  é uma matriz de ordem  $n_a \times n^e$ , em que cada linha é composta pela avaliação das  $n^e$  funções de forma do elemento nas respectivas coordenadas paramétricas utilizadas para a determinação das amostras. O vetor  $\mathbf{x}$  contém os  $n^e$  valores nodais do elemento relativos à condição de contorno prescrita, com os quais deve-se garantir avaliações em  $\Gamma^e$  resultando em valores mais próximos possíveis daqueles amostrados pela função  $f$ . O sistema Equação (4.1) é montado tal que  $n_a > n^e$ , portanto com mais equações que incógnitas, sendo a solução dada no sentido dos mínimos quadrados. Note que  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{b}$  foram considerados como vetores devido à condição de contorno ser aplicada sobre apenas um componente do nó. Caso a condição de contorno prescrita por uma função implique em  $g$  graus de liberdade, utilizam-se matrizes com  $g$  colunas para  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{b}$ , e a solução é obtida em um único sistema.

Quando a porção da superfície, na qual será aplicada uma condição de contorno, engloba um conjunto de  $n_c$  elementos, contendo diversos nós em comum, o sistema é

construído a fim de determinar, simultaneamente, os valores nodais de todos elementos do conjunto. A matriz  $\mathbf{A}$ , nesse caso, armazena valores de avaliações das funções de forma de todos elementos do conjunto, no entanto, em cada linha apenas as funções de forma relativas ao elemento da amostra são não nulas, tornando tal matriz esparsa. O número de linhas das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{b}$  são iguais ao número total de amostras,  $n_c \times n^a$ , e o número de colunas de  $\mathbf{A}$  é definido pela dimensão do conjunto obtido da união dos nós que influenciam nos  $n_c$  elementos. Uma mapa relaciona os índices globais das funções de forma com os índices das colunas de  $\mathbf{A}$ .

A Figura 4.10 apresenta em destaque parte de uma superfície com  $n_c = 2$  elementos:  $\Gamma^{e_1} \cup \Gamma^{e_2}$ . Os nós (pontos pretos) que influenciam cada elemento são aqueles pertencentes ao retângulo tracejado na mesma cor da superfície do elemento. Os valores nodais  $x_i$  foram distribuídos na imagem de acordo com as coordenadas espaciais dos pontos de controles de cada elemento. As  $n_a = 36$  amostras (pontos vermelhos) distribuídas em forma de grade no domínio paramétrico são utilizadas pela função  $f(\xi^1, \xi^2)$  para avaliação na superfície de cada elemento (pontos verdes), totalizando 72 amostras. É importante ressaltar que a amostragem regular no domínio paramétrico não garante a regularidade espacial das amostras na superfície.

A Equação (4.2) representa o sistema da Equação (4.1) referente ao exemplo ilustrada na Figura 4.10. O número resultante da união das funções de forma de  $e_1$  e  $e_2$  é 20, enumeradas de 0 a 19. O termo  $\mathbf{A}(i, j) = N_j^i(\xi_i^1, \xi_i^2)$  é o valor da  $j$ -ésima função de forma avaliada na  $i$ -ésima coordenada paramétrica das amostras  $(\xi_i^1, \xi_i^2)$ , em que,  $0 \leq j \leq 19$  e  $0 \leq i \leq 71$ . O termo  $\mathbf{b}(i) = f(\xi_i^1, \xi_i^2)$  é valor da  $i$ -ésima amostra. Um valor nulo na posição  $\mathbf{A}(i, j)$  indica que a  $i$ -ésima amostra não pertence ao elemento que contém a  $j$ -ésima função de forma. Por exemplo, a função de forma  $N_4$  não influencia no elemento  $e_1$ , portanto naquela coluna, nas linhas referentes as amostras de  $e_1$ , os valores são iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} N_0^0 & N_1^0 & N_2^0 & N_3^0 & 0 & N_5^0 & N_6^0 & N_7^0 & \dots & 0 \\ N_0^1 & N_1^1 & N_2^1 & N_3^1 & 0 & N_5^1 & N_6^1 & N_7^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_0^{35} & N_1^{35} & N_2^{35} & N_3^{35} & 0 & N_5^{35} & N_6^{35} & N_7^{35} & \dots & 0 \\ 0 & N_1^{36} & N_2^{36} & N_3^{36} & N_4^{36} & 0 & N_6^{36} & N_7^{36} & \dots & N_{19}^{36} \\ 0 & N_1^{37} & N_2^{37} & N_3^{37} & N_4^{37} & 0 & N_6^{37} & N_7^{37} & \dots & N_{19}^{37} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & N_1^{70} & N_2^{70} & N_3^{70} & N_4^{70} & 0 & N_6^{70} & N_7^{70} & \dots & N_{19}^{70} \\ 0 & N_1^{71} & N_2^{71} & N_3^{71} & N_4^{71} & 0 & N_6^{71} & N_7^{71} & \dots & N_{19}^{71} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ \vdots \\ x_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{35} \\ b_{36} \\ b_{37} \\ \vdots \\ b_{70} \\ b_{71} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

A solução do sistema da Equação (4.2) determina os valores nodais referentes às condições de contorno prescritas na superfície dos dois elementos. No entanto, este é um exemplo meramente ilustrativo, pois tais valores nodais podem influenciar em outros elementos caso a superfície não seja delimitada por arestas de vinco.

A proposta de prescrição das condições de contorno sobre uma região definida por um conjunto de elementos é justificada prevendo uma extensão deste trabalho para simulações considerando problemas de contato. A utilização da operação de refinamento da superfície, a qual produz melhores resultados nos casos de superfícies representadas por T-spline comparados à NURBS, é capaz de produzir elementos menores, os quais

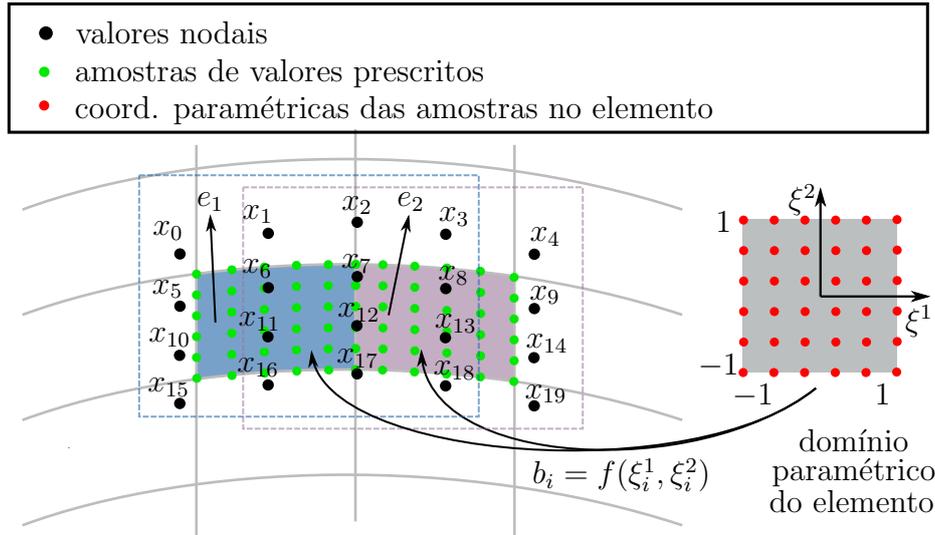


Figura 4.10: Exemplo de prescrição de condição de contorno determinada por uma função em uma porção da superfície definida pelos elementos  $e_1$  e  $e_2$ . Os retângulos tracejados relacionam os nós com os elementos.

representaria um contato, definindo regiões mais detalhadas, sobre as quais são especificadas as condições de contorno de forma mais controlada.

Para evitar a necessidade de prescrever condições de contorno para todos os elementos/nós da malha, um padrão com prescrição de força de superfície nula ( $\mathbf{t} = 0$ ) é adotado para todos os graus de liberdade em todos os nós sem condição de contorno prescrita.

## Montagem do sistema

Após a prescrição das condições de contorno, um sistema deve ser solucionado para determinação dos valores nodais incógnitos, conforme apresentado na Seção 2.3.1. A Figura 4.11 ilustra um exemplo hipotético de uma malha utilizado para demonstração da montagem do sistema. São dois elementos  $e_1$  e  $e_2$ , cada um composto por dois nós, tal que  $\mathcal{N}^{e_1} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2\}$  e  $\mathcal{N}^{e_2} = \{\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3\}$ , totalizando três nós (em preto, rotulados como  $\mathcal{N}_1$ ,  $\mathcal{N}_2$  e  $\mathcal{N}_3$ ) e três pontos fonte (em azul). Os valores nodais  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  incógnitos (ou prescritos  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{\mathbf{t}}$ ) são apresentados, na imagem, por grau de liberdade  $(x, y, z)$ , com número subscripto indicando o índice global do deslocamento ou força de superfície, respectivamente. O nó  $\mathcal{N}_2$  apresenta uma descontinuidade geométrica, o qual foi representado por um nó múltiplo,  $m_2 = 2$ , portanto duas forças de superfície, uma referente à cada região de elemento, e um deslocamento estão contidos neste nó. Apesar disso, note que apenas uma incógnita por grau de liberdade é encontrada em cada nó. Os nós  $\mathcal{N}_1$  e  $\mathcal{N}_3$  possuem multiplicidade única.

O primeiro passo para montagem do sistema é a computação das matrizes de influência  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ . O número de deslocamentos de nós  $n_u = 3$  e forças de superfícies  $n_t = 4$  do modelo, indicam que a matriz quadrada  $\mathbf{H}$  possui ordem  $3n_u = 9$ , e  $\mathbf{G}$  é de ordem  $3n_u \times 3n_t = 9 \times 12$ . A divergência entre a ordem das matrizes é devido o nó múltiplo. A Equação (4.3) ilustra a montagem do sistema  $\mathbf{HU} = \mathbf{GT}$  para o seguinte

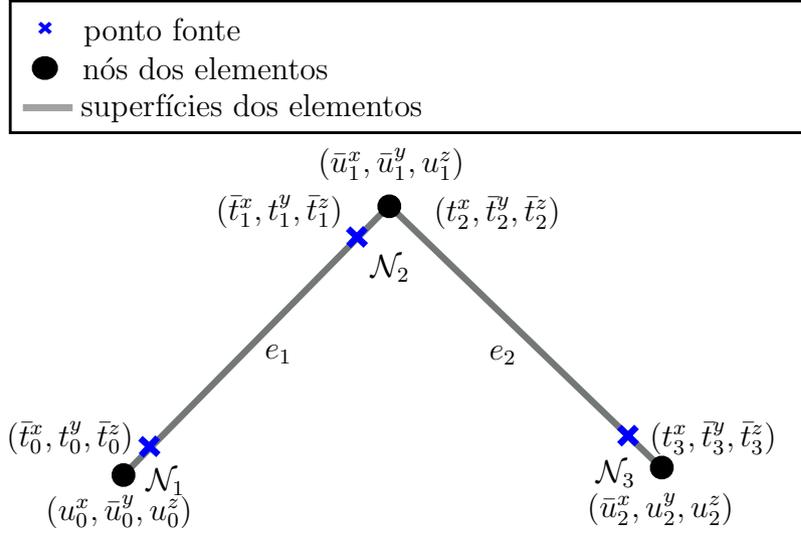


Figura 4.11: Exemplo hipotético de uma malha contendo 3 nós e 2 elementos, usado como demonstração para a montagem do sistema.

exemplo:

$$\begin{bmatrix} h_{0,0}^{x,x} & h_{0,0}^{x,y} & h_{0,0}^{x,z} & h_{0,1}^{x,x} & h_{0,1}^{x,y} & h_{0,1}^{x,z} & h_{0,2}^{x,x} & h_{0,2}^{x,y} & h_{0,2}^{x,z} \\ h_{0,0}^{y,x} & h_{0,0}^{y,y} & h_{0,0}^{y,z} & h_{0,1}^{y,x} & h_{0,1}^{y,y} & h_{0,1}^{y,z} & h_{0,2}^{y,x} & h_{0,2}^{y,y} & h_{0,2}^{y,z} \\ h_{0,0}^{z,x} & h_{0,0}^{z,y} & h_{0,0}^{z,z} & h_{0,1}^{z,x} & h_{0,1}^{z,y} & h_{0,1}^{z,z} & h_{0,2}^{z,x} & h_{0,2}^{z,y} & h_{0,2}^{z,z} \\ h_{1,0}^{x,x} & h_{1,0}^{x,y} & h_{1,0}^{x,z} & h_{1,1}^{x,x} & h_{1,1}^{x,y} & h_{1,1}^{x,z} & h_{1,2}^{x,x} & h_{1,2}^{x,y} & h_{1,2}^{x,z} \\ h_{1,0}^{y,x} & h_{1,0}^{y,y} & h_{1,0}^{y,z} & h_{1,1}^{y,x} & h_{1,1}^{y,y} & h_{1,1}^{y,z} & h_{1,2}^{y,x} & h_{1,2}^{y,y} & h_{1,2}^{y,z} \\ h_{1,0}^{z,x} & h_{1,0}^{z,y} & h_{1,0}^{z,z} & h_{1,1}^{z,x} & h_{1,1}^{z,y} & h_{1,1}^{z,z} & h_{1,2}^{z,x} & h_{1,2}^{z,y} & h_{1,2}^{z,z} \\ h_{2,0}^{x,x} & h_{2,0}^{x,y} & h_{2,0}^{x,z} & h_{2,1}^{x,x} & h_{2,1}^{x,y} & h_{2,1}^{x,z} & h_{2,2}^{x,x} & h_{2,2}^{x,y} & h_{2,2}^{x,z} \\ h_{2,0}^{y,x} & h_{2,0}^{y,y} & h_{2,0}^{y,z} & h_{2,1}^{y,x} & h_{2,1}^{y,y} & h_{2,1}^{y,z} & h_{2,2}^{y,x} & h_{2,2}^{y,y} & h_{2,2}^{y,z} \\ h_{2,0}^{z,x} & h_{2,0}^{z,y} & h_{2,0}^{z,z} & h_{2,1}^{z,x} & h_{2,1}^{z,y} & h_{2,1}^{z,z} & h_{2,2}^{z,x} & h_{2,2}^{z,y} & h_{2,2}^{z,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^x \\ u_0^y \\ u_0^z \\ u_1^x \\ u_1^y \\ u_1^z \\ u_2^x \\ u_2^y \\ u_2^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{0,0}^{x,x} & g_{0,0}^{x,y} & g_{0,0}^{x,z} & g_{0,1}^{x,x} & g_{0,1}^{x,y} & g_{0,1}^{x,z} & g_{0,2}^{x,x} & g_{0,2}^{x,y} & g_{0,2}^{x,z} & g_{0,3}^{x,x} & g_{0,3}^{x,y} & g_{0,3}^{x,z} \\ g_{0,0}^{y,x} & g_{0,0}^{y,y} & g_{0,0}^{y,z} & g_{0,1}^{y,x} & g_{0,1}^{y,y} & g_{0,1}^{y,z} & g_{0,2}^{y,x} & g_{0,2}^{y,y} & g_{0,2}^{y,z} & g_{0,3}^{y,x} & g_{0,3}^{y,y} & g_{0,3}^{y,z} \\ g_{0,0}^{z,x} & g_{0,0}^{z,y} & g_{0,0}^{z,z} & g_{0,1}^{z,x} & g_{0,1}^{z,y} & g_{0,1}^{z,z} & g_{0,2}^{z,x} & g_{0,2}^{z,y} & g_{0,2}^{z,z} & g_{0,3}^{z,x} & g_{0,3}^{z,y} & g_{0,3}^{z,z} \\ g_{1,0}^{x,x} & g_{1,0}^{x,y} & g_{1,0}^{x,z} & g_{1,1}^{x,x} & g_{1,1}^{x,y} & g_{1,1}^{x,z} & g_{1,2}^{x,x} & g_{1,2}^{x,y} & g_{1,2}^{x,z} & g_{1,3}^{x,x} & g_{1,3}^{x,y} & g_{1,3}^{x,z} \\ g_{1,0}^{y,x} & g_{1,0}^{y,y} & g_{1,0}^{y,z} & g_{1,1}^{y,x} & g_{1,1}^{y,y} & g_{1,1}^{y,z} & g_{1,2}^{y,x} & g_{1,2}^{y,y} & g_{1,2}^{y,z} & g_{1,3}^{y,x} & g_{1,3}^{y,y} & g_{1,3}^{y,z} \\ g_{1,0}^{z,x} & g_{1,0}^{z,y} & g_{1,0}^{z,z} & g_{1,1}^{z,x} & g_{1,1}^{z,y} & g_{1,1}^{z,z} & g_{1,2}^{z,x} & g_{1,2}^{z,y} & g_{1,2}^{z,z} & g_{1,3}^{z,x} & g_{1,3}^{z,y} & g_{1,3}^{z,z} \\ g_{2,0}^{x,x} & g_{2,0}^{x,y} & g_{2,0}^{x,z} & g_{2,1}^{x,x} & g_{2,1}^{x,y} & g_{2,1}^{x,z} & g_{2,2}^{x,x} & g_{2,2}^{x,y} & g_{2,2}^{x,z} & g_{2,3}^{x,x} & g_{2,3}^{x,y} & g_{2,3}^{x,z} \\ g_{2,0}^{y,x} & g_{2,0}^{y,y} & g_{2,0}^{y,z} & g_{2,1}^{y,x} & g_{2,1}^{y,y} & g_{2,1}^{y,z} & g_{2,2}^{y,x} & g_{2,2}^{y,y} & g_{2,2}^{y,z} & g_{2,3}^{y,x} & g_{2,3}^{y,y} & g_{2,3}^{y,z} \\ g_{2,0}^{z,x} & g_{2,0}^{z,y} & g_{2,0}^{z,z} & g_{2,1}^{z,x} & g_{2,1}^{z,y} & g_{2,1}^{z,z} & g_{2,2}^{z,x} & g_{2,2}^{z,y} & g_{2,2}^{z,z} & g_{2,3}^{z,x} & g_{2,3}^{z,y} & g_{2,3}^{z,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0^x \\ t_0^y \\ t_0^z \\ t_1^x \\ t_1^y \\ t_1^z \\ t_2^x \\ t_2^y \\ t_2^z \\ t_3^x \\ t_3^y \\ t_3^z \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Ambas as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são compostas por submatrizes de ordem  $3 \times 3$ . Cada grupo de 3 linhas ( $i \times 3 - 2, i \times 3 - 1, i \times 3$ ) são relativas ao ponto fonte  $s_i$ . De forma similar, cada grupo de 3 colunas ( $k \times 3 - 2, k \times 3 - 1, k \times 3$ ) é relativo a um valor nodal do nó  $\mathcal{N}_j$  (veja mais adiante). O resultado da integração entre  $s_i$  sobre o  $e$ -ésimo elemento são duas submatrizes matrizes  $\mathbf{H}_i^e$  e  $\mathbf{G}_i^e$ , ambas de ordem  $3 \times 3n^e$ , ( $n^e = |\mathcal{N}^e|$ ). Tais submatrizes são adicionadas às matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , respectivamente, nas linhas referentes à  $s_i$  e nas colunas determinadas pelo mapeamento dos  $n^e$  índices globais dos nós incidentes no elemento  $e$ , conforme  $k = \Lambda_u^e(j)$  e  $k = \Lambda_t^e(j)$ . Na matriz  $\mathbf{H}$ , o mapeamento é direto, pois

o número de grupos de colunas é igual ao número total de nós, entretanto, na matriz  $\mathbf{G}$ , a multiplicidade  $m_2$  do nó  $\mathcal{N}_2$  influencia no mapeamento dos índices das colunas, assim, o  $\mathcal{N}_2$  pode ser mapeado para  $m_2$  índices diferentes dependendo da região na qual o elemento  $e$  pertença. Assim, os mapeamentos referentes à  $e_1$  são  $\Lambda_u^{e_1}(1) = 1$ ,  $\Lambda_u^{e_1}(2) = 2$ ,  $\Lambda_t^{e_1}(1) = 1$  e  $\Lambda_t^{e_1}(2) = 2$ , enquanto os relacionados à  $e_2$  são  $\Lambda_u^{e_2}(1) = 2$ ,  $\Lambda_u^{e_2}(2) = 3$ ,  $\Lambda_t^{e_2}(1) = 3$  e  $\Lambda_t^{e_2}(2) = 4$ .

A seguir é apresentado um trecho de código da implementação do protótipo em MATLAB responsável por computar as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , em que  $nn$  é o número de nós, e conseqüentemente pontos fonte, e  $ne$  é o número de elementos. A linha 4 do código realiza o mapeamento de cada ponto fonte com as linhas das matrizes. A linha 10 do código calcula as submatrizes  $\mathbf{H}_i^e$  e  $\mathbf{G}_i^e$ , comentadas anteriormente, além do termo livre representado pela variável  $ce$ , conforme apresentado na Seção 4.4. Os  $n^e$  índices globais das colunas das matrizes de influência são computados na linha 9, conforme  $\Lambda_u^e(i)$  e  $\Lambda_t^e(i)$ , os quais podem idênticos na ausência de nós múltiplos. As atribuições das linhas 11, 12 e 13 acumulam tais resultados nas matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  representadas respectivamente pelas variáveis  $H$  e  $G$ , assim como a variável  $c$  representando o termo livre do ponto fonte corrente. Tal termo deve ser adicionado na matriz  $\mathbf{H}$ , e para isso é multiplicado pelas funções de forma (linha 16) resultando em uma matriz de ordem  $3 \times 3n^s$ , em que  $n^s$  é o número de nós do elemento que contém o ponto fonte  $s$ . Este mesmo elemento é utilizado para o mapeamento dos índices das colunas de  $\mathbf{H}$ , definido na linha 17 do código.

```

1 for i = 1:nn
2     c = zeros(3,3);
3     pontoFonte = pontosFonte(i);
4     linhas = i*[1 2 3];
5
6     [pos, N] = calculaPos(pontoFonte);
7     for e = 1:ne
8         elemento = elementos(e);
9         [hColunas, gColunas] = mapaColunas(elemento);
10        [ce, h, g] = calculaHG(pontoFonte, pos, elemento);
11        H(linhas, hColunas) = H(linhas, hColunas) + h;
12        G(linhas, gColunas) = G(linhas, gColunas) + g;
13        c = c + ce;
14    end
15
16    c = kron(N', c);
17    cColunas = mapaColunas(pontoFonte.elemento);
18    H(linhas, cColunas) = this.H(linhas, cColunas) + c;
19 end

```

Uma vez definidas as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , e os vetores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{T}$ , uma reorganização é necessária para a montagem do sistema, de acordo com a descrição da Seção 2.3.3. As matrizes e vetores do exemplo acima, reorganizados, formam um sistema  $\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{T}}$



do termo da integral avaliada sobre um conjunto  $\mathcal{G}^e$  de pontos de Gauss no elemento, tal que o  $p$ -ésimo ponto  $\mathcal{G}_p^e \in \mathcal{G}^e$  possui uma coordenada do domínio paramétrico  $(\xi_p^1, \xi_p^2) \in ([-1, 1], [-1, 1])$  avaliada como  $\mathbf{x}^e(\mathcal{G}_p^e)$  pertencente a  $\Gamma^e$ , ponderados pelos respectivos fatores  $w_{\mathcal{G}_p^e} \in \mathbb{R}$ , pré-computados. O conjunto de pontos avaliados são os pontos  $\{\mathbf{x}^e(\mathcal{G}_1^e), \mathbf{x}^e(\mathcal{G}_2^e), \dots, \mathbf{x}^e(\mathcal{G}_{|\mathcal{G}^e|}^e)\}$  pertencentes a  $\Gamma^e$ . O número de pontos de Gauss  $|\mathcal{G}^e|$  depende da precisão requisitada no protótipo, quanto maior, mais preciso é o resultado, e é definido, no caso de uma superfície, pelo produto entre o número de pontos em cada direção paramétrica. Assim, as matrizes  $\mathbf{H}^e$  e  $\mathbf{G}^e$  podem ser rescritas como

$$\mathbf{H}^e(\mathbf{s}) = \sum_{p=1}^{|\mathcal{G}^e|} \mathbf{T}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}(\mathcal{G}_p^e)) w_{\mathcal{G}_p^e} J^e \mathbf{S}^e(\mathcal{G}_p^e), \quad e \quad (4.7)$$

$$\mathbf{G}^e(\mathbf{s}) = \sum_{p=1}^{|\mathcal{G}^e|} \mathbf{U}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}(\mathcal{G}_p^e)) w_{\mathcal{G}_p^e} J^e \mathbf{S}^e(\mathcal{G}_p^e), \quad (4.8)$$

em que  $\mathbf{x}^e(\mathcal{G}_p^e)$  é um ponto em  $\Gamma^e$ , e  $\mathbf{S}^e(\mathcal{G}_p^e) = [S_1^e(\mathcal{G}_p^e) S_2^e(\mathcal{G}_p^e) \dots S_{n^e}^e(\mathcal{G}_p^e)]$  são as funções de forma do elemento, avaliados a partir das coordenadas paramétricas do  $p$ -ésimo ponto de Gauss.  $J^e = |\mathbf{n}(\mathcal{G}_p^e)|$  é o jacobiano referente a mudança de variável de integração.

Similarmente às Equações (4.7) e (4.8), o termo livre definido pela Equação (2.39) pode ser calculado utilizando o método de quadratura de Gauss como

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}) = - \sum_{e=1}^{|\mathcal{B}|} \sum_{p=1}^{|\mathcal{G}^e|} \mathbf{T}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}(\mathcal{G}_p^e)) w_{\mathcal{G}_p^e} J^e. \quad (4.9)$$

Os termos das soluções fundamentais  $\mathbf{U}^*$  ou  $\mathbf{T}^*$  tendem a infinito quando a distância  $r = |\mathbf{s} - \mathbf{x}(\mathcal{G}_p^e)|$ , se aproxima de zero, caracterizando uma integral singular, que pode ser de singularidade fraca ( $\frac{1}{r}$ ) ou singularidade forte ( $\frac{1}{r^2}$ ), respectivamente. Conforme comentado na Seção 2.3.1, após aplicação do truque do movimento de corpo rígido, o do termo  $\mathbf{T}^*$  pode ser tratado com singularidade fraca, e avaliado da mesma forma que o termo  $\mathbf{U}^*$ .

As integrais foram classificadas em:

- *regular* (não singular): quando  $\mathbf{s}$  está distante do elemento integrado;
- *quase singular*: quando  $\mathbf{s}$  está próximo ao elemento integrado;
- *singular*: quando  $\mathbf{s}$  pertence ao elemento integrado.

A avaliação das integrais regulares pode ser feitas diretamente aplicando a regra da quadratura Gaussiana a partir das Equações (4.6) e (4.8). No entanto, os casos de integral quase singular e singular merecem um tratamento especial e algumas técnicas são utilizadas em conjunto com tal método.

#### 4.4.1 Integral quase singular

Na integração quase singular, o ponto fonte  $\mathbf{s}$  está próximo ao elemento sendo integrado. Scott [35] não faz um tratamento diferenciado para este caso, e resolve

da mesma forma que a integral regular. Utiliza, para ambos os casos, um número alto de pontos de Gauss para minimizar o erro. Beer [5] propõe uma estratégia de subdivisão do elemento em regiões usando um esquema de subdivisão denominado com o termo em inglês *quadtree*, de forma que regiões mais próximas do ponto fonte são mais subdivididas, o conseqüentemente conterà mais pontos de Gauss.

Neste trabalho, a subdivisão do elemento em *regiões* — definida por uma porção retangular do domínio paramétrico do elemento — foi implementada baseada na proposta de Beer, a qual é realizada sobre NURBS e fundada sobre o domínio paramétrico. Na proposta, a subdivisão é embasada em uma relação entre a menor distância paramétrica do  $\mathbf{s}$  ao elemento e dimensão paramétrica do elemento. Porém, é importante ressaltar que a distância  $r = \|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|$  envolvida nos termos das soluções fundamentais considera pontos no espaço global, sem relação com distâncias no domínio paramétrico. Além disso, como aqui os elementos (de Bézier) são tratados de forma independentes, a proximidade de um  $\mathbf{s}$  a um elemento só pode ser feita em coordenadas globais.

O esquema inicia considerando, para o  $e$ -ésimo elemento,  $|\mathcal{R}^e| = 1$ , em que  $\mathcal{R}^e$  é seu conjunto de regiões. Então, segue com a determinação da razão de aspecto  $R/L$ , associada a cada direção paramétrica, em que  $R$  é a menor distância entre o ponto fonte  $\mathbf{s}$  e a superfície da região do elemento, valor calculado através de um algoritmo iterativo (ver [5]) e adaptado para elementos de Bézier, e  $L$  é o comprimento médio das duas bordas da superfície do elemento em cada direção ( $L_{\xi^1}$  e  $L_{\xi^2}$ ). O comprimento da borda da superfície de um elemento pode ser por uma integral que na prática é aproximada pela soma de pequenas seguimentos definidos por pontos avaliados sobre a borda, quanto maior o número de pontos mais preciso é o resultado.

Uma vez definida a razão de aspecto  $R/L_{\xi^1}$  para  $r$ -ésima região, a quantidade de pontos de Gauss  $|\mathcal{G}^{r,\xi^1}|$  a ser utilizado na região na direção  $\xi^1$  é extraída a partir de uma *tabela de relação* que vincula intervalos de tal valor com a quantidade de pontos. Caso o resultado da tabela seja maior que o valor padrão previamente definido, então a região deve ser dividida ao meio na direção  $\xi^1$ , caso contrário,  $|\mathcal{G}^{r,\xi^1}|$  pontos de Gauss são utilizados na região na direção  $\xi^1$ . O procedimento similar ocorre com a direção  $\xi^2$  e o conjunto de pontos de Gauss para a região é  $\mathcal{G}^r$  obtido pelo produto cartesiano entre  $\mathcal{G}^{r,\xi^1}$  e  $\mathcal{G}^{r,\xi^2}$ . Assim, uma região pode ser mantida ou subdividida, em 2 ou em 4 regiões, até que o nível máximo de subdivisão seja atingido.

O parâmetro que define a classificação da integral como regular ou quase singular é a distância  $R > 0$  (se  $R = 0$  a integral é singular). Uma vez estabelecidos a tabela de relação e o valor padrão da quantidade de pontos de Gauss, o procedimento de subdivisão é generalizado, tornando o processo de subdivisão apto para atender ambos os casos.

A Figura 4.12 ilustra um ponto fonte  $\mathbf{s}$ , três elementos  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  e os pontos de Gauss avaliados na superfície de cada elemento. O elemento  $e_1$  é integrado de forma regular, com  $|\mathcal{R}^{e_1}| = 1$ , enquanto  $e_2$  é subdividido um único nível ( $|\mathcal{R}^{e_2}| = 4$ ), e  $e_3$  em 4 níveis ( $|\mathcal{R}^{e_3}| = 11$ ), ambos representando integrais quase singulares. Para elemento  $e_3$  nota-se um número maior de pontos de Gauss comparado a  $e_1$  e  $e_2$ , com maior concentração nas regiões mais próximas ao ponto fonte  $\mathbf{s}$ .

A  $r$ -ésima região  $\mathcal{R}_r^e$  resultantes da subdivisão do  $e$ -ésimo elemento é definida por um par de coordenadas paramétricas no domínio  $[-1, 1]$ . O conjunto de pontos de Gauss  $\mathcal{G}^r$ , obtidos em coordenadas locais da região, devem ser mapeados para as

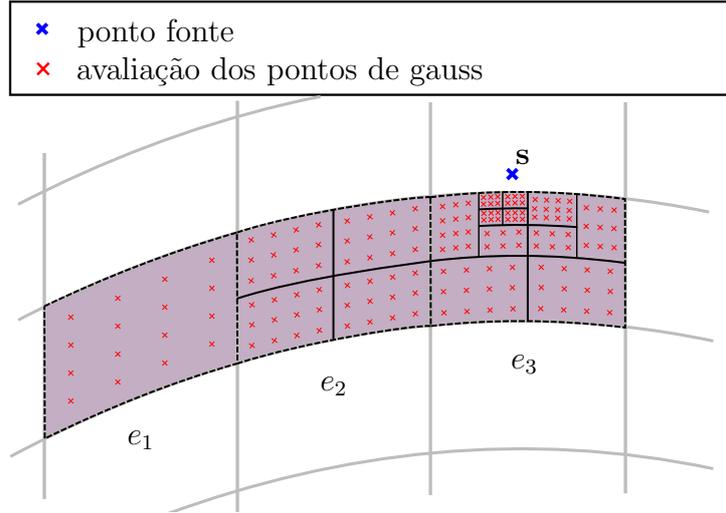


Figura 4.12: Integração regular/quase singular para o ponto fonte  $s$ . Elemento  $e_1$  integrado de forma regular, sem subdivisões. Elemento  $e_2$  e  $e_3$  integrados com subdivisão de regiões, quase singulares.

coordenadas do domínio do elemento. Tal transformação implica em um jacobiano, o qual para a  $r$ -ésima região é calculado como

$$J^{\mathcal{R}_r} = \frac{\Delta_{\xi^1} * \Delta_{\xi^2}}{4},$$

em que  $\Delta_{\xi^1}$  é o comprimento paramétrico  $\mathcal{R}_r$  em  $\xi^1$ , e  $\Delta_{\xi^2}$  é o similar em  $\xi^2$ . Quando  $|\mathcal{R}^e| = 1$  então  $J^{\mathcal{R}^e} = 1$ .

Assim, nas Equações (4.7) e (4.8), o somatório do  $e$ -ésimo elemento é substituído pelo somatório das  $|\mathcal{R}^e|$  regiões do elemento

$$\mathbf{H}^e(\mathbf{s}) = \sum_{r=1}^{|\mathcal{R}^e|} \sum_{p=1}^{|\mathcal{G}^r|} \mathbf{T}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}(\mathcal{G}_p^r)) w_{\mathcal{G}_p^e} J^e J^{\mathcal{R}_r} \mathbf{S}^e(\mathcal{G}_p^r), \quad e \quad (4.10)$$

$$\mathbf{G}^e(\mathbf{s}) = \sum_{r=1}^{|\mathcal{R}^e|} \sum_{p=1}^{|\mathcal{G}^r|} \mathbf{U}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}(\mathcal{G}_p^r)) w_{\mathcal{G}_p^e} J^e J^{\mathcal{R}_r} \mathbf{S}^e(\mathcal{G}_p^r). \quad (4.11)$$

De forma similar, o mesmo conceito é aplicado na Equação (4.9), para a determinação do termo livre como

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}) = - \sum_{e=1}^{|\mathcal{B}|} \sum_{p=1}^{|\mathcal{G}^e|} \mathbf{T}^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}(\mathcal{G}_p^e)) w_{\mathcal{G}_p^e} J^e J^{\mathcal{R}_r}. \quad (4.12)$$

#### 4.4.2 Integral singular

A integração singular ocorre quando o ponto fonte  $s$  está na superfície do elemento sendo integrado, e é dividida em singularidade fraca ou singularidade forte. No entanto, conforme já comentado, o tratamento da singularidade fraca será suficiente para avaliação das integrais singulares do problema.

### 4.4.3 Integral singular fraca

A integral singular fraca é devida ao termo  $(1/r)$  da solução fundamental  $\mathbf{u}^*$ , na Equação (2.37). Na literatura, a solução usualmente aplicada é a subdivisão do elemento em regiões triangulares, cuja a ideia é realizar a integração em um sistema de coordenadas local na qual o jacobiano tende a zero ao se aproximar do ponto de singularidade (ponto fonte). Scott [35] utiliza um sistema de coordenadas polares centrado no ponto fonte, o qual divide o elemento em até 4 sub-elementos triangulares integrados de forma regular através de quadratura de Gauss. Beer [5] adota uma proposta semelhante, cujo objetivo é criar um sistema de coordenadas local  $(\eta^1, \eta^2)$ , dividir o elemento em regiões triangulares utilizando os cantos como vértices e tratar cada uma com integração regular por meio da quadratura de Gauss. Beer aplica esta solução sobre NURBS, e neste trabalho, para aplicação sobre elementos de Bézier, algumas adaptações são consideradas.

O domínio paramétrico de uma  $r$ -ésima região triangular  $\mathcal{R}_r$ , assim como considerado no elemento, é  $[-1, 1]$ , portanto, um ponto  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$  com coordenadas locais  $(\eta^1, \eta^2)$  de  $\mathcal{R}_r$  é representado em coordenadas locais do elemento  $(\xi^1, \xi^2)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\xi^1 &= \sum_{i=1}^3 f_i(\eta^1, \eta^2) \xi_i^1 \\ \xi^2 &= \sum_{i=1}^3 f_i(\eta^1, \eta^2) \xi_i^2,\end{aligned}\tag{4.13}$$

em que,  $(\xi_i^1, \xi_i^2)$  são as coordenadas locais dos três vértices  $\mathbf{z}_i$   $i = 1, 2, 3$  que definem  $\mathcal{R}_r$ , dos quais  $\mathbf{z}_3$  é o vértice referente ao ponto fonte  $\mathbf{s}$ , onde a singularidade ocorre, e  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2$  são dois vértices consecutivos do elemento, então os valores das coordenadas de  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2$  sempre serão 1 ou  $-1$ . As funções de forma  $f_i$   $i = 1, 2, 3$  de  $\mathcal{R}$  são

$$\begin{aligned}f_1(\eta^1, \eta^2) &= \frac{1}{4}(1 + \eta^1)(1 - \eta^2), \\ f_2(\eta^1, \eta^2) &= \frac{1}{4}(1 + \eta^1)(1 + \eta^2), \\ f_3(\eta^1, \eta^2) &= \frac{1}{2}(1 - \eta^1).\end{aligned}\tag{4.14}$$

A Figura 4.13 apresenta a subdivisão da região de um elemento em 4 triângulos, situação que ocorre quando  $\mathbf{s}$  é interno ao elemento. Se  $\mathbf{s}$  estiver em um dos cantos do elemento a subdivisão resulta em 2 triângulos, e se  $\mathbf{s}$  pertencer à borda do elemento, são 3 triângulos.

As derivadas das transformações são expressas como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi^1}{\partial \eta^1} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^1} \xi_i^1 & \frac{\partial \xi^2}{\partial \eta^1} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^1} \xi_i^2 \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial \eta^2} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^2} \xi_i^1 & \frac{\partial \xi^2}{\partial \eta^2} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^2} \xi_i^2,\end{aligned}\tag{4.15}$$

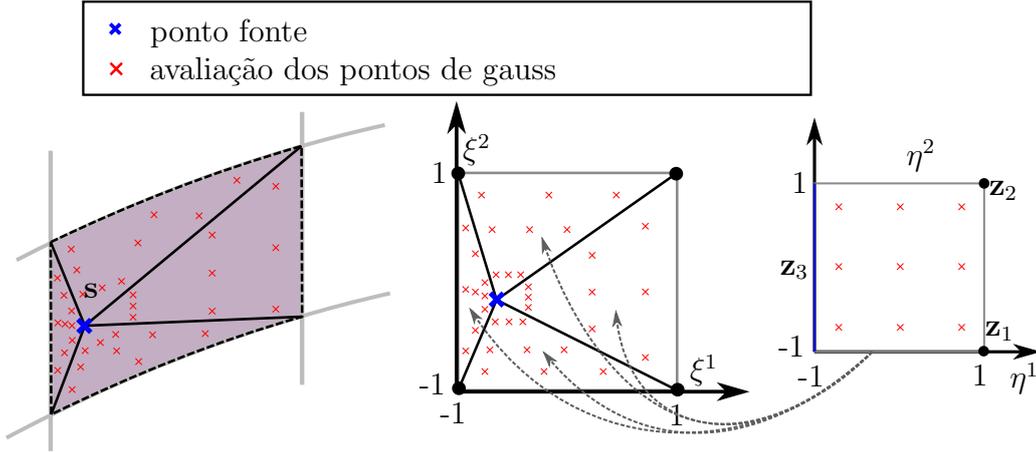


Figura 4.13: Mapeamento do sistema de coordenadas de um elemento com o sistema de coordenadas da região triangular. Ambos os domínios paramétricos são  $[-1, 1]$ .

em que, as derivadas das funções de forma são descritas por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_1(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^1} &= \frac{1}{4}(1 - \eta^2) & \frac{\partial f_1(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^2} &= -\frac{1}{4}(1 + \eta^1) \\
 \frac{\partial f_2(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^1} &= \frac{1}{4}(1 + \eta^2) & \frac{\partial f_2(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{4}(1 + \eta^1) \\
 \frac{\partial f_3(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^1} &= -\frac{1}{2} & \frac{\partial f_3(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

O conjunto de pontos de Gauss  $\mathcal{G}^r$ , obtidos em coordenadas locais de  $\mathcal{R}_r^e$  do  $e$ -ésimo elemento, devem ser mapeados para as coordenadas do domínio do elemento. O jacobiano resultante da transformação do ponto de Gauss dado pelas coordenadas  $(\eta^1, \eta^2)$  em  $\mathcal{R}_r$  é

$$J^{\mathcal{R}_r} = \frac{\partial \xi^1}{\partial \eta^1} \frac{\partial \xi^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \xi^2}{\partial \eta^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial \eta^2},$$

e tende a zero quando  $\mathbf{x}^e(\xi^1, \xi^2)$  se aproxima do ponto fonte  $\mathbf{s}$ , o qual, em  $\mathcal{R}_r$ , é representado por  $\mathbf{z}_3$ .

Os tipos dos triângulos formados com a subdivisão do elemento influenciam na precisão dos resultados da integração. Nos experimentos deste trabalho observou-se tal fenômeno de forma mais acentuada em triângulos pontiagudos, os quais ocorrem quando  $\mathbf{s}$  está próximo à borda do elemento. A Figura 4.14 ilustra em (a) a subdivisão de um elemento em triângulos, e em (b) a distribuição dos pontos de Gauss (5 em cada direção) sobre o triângulo em destaque simulando o ponto fonte cada vez mais próximo da borda. Tal aproximação implica em pontos de Gauss também mais próximos ao ponto fonte, causando uma singularidade, o que leva à imprecisão numérica nos resultados da integração.

Beer [5] comenta que a razão de aspecto, que no caso de NURBS é calculada sobre o elemento, e conseqüentemente, impacta na forma dos triângulos gerados, possui uma influência significativa nos erros de integração, e sugere, sem detalhes, que elementos com razão de aspecto ruins devem ser subdivididos. Tal proposta pode amenizar a razão de aspecto do elemento, no entanto não garante um formato satisfatório para os triângulos gerados.

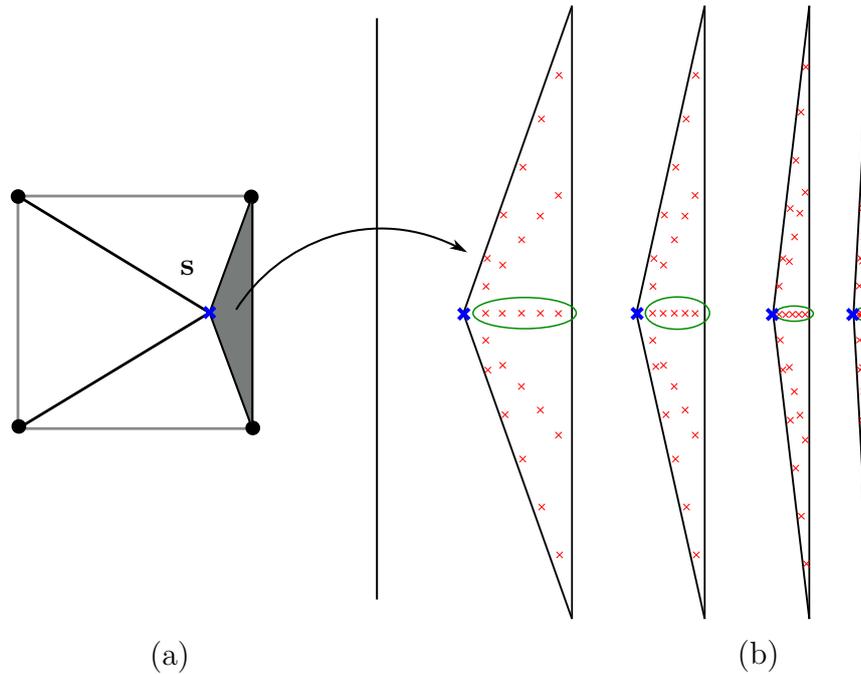


Figura 4.14: Simulação ponto fonte  $\mathbf{s}$  próximo à borda. (a) A região do elemento é subdividida em 4 triângulos, a partir de  $\mathbf{s}$  (azul). (b) Quanto mais próximo da borda está  $\mathbf{s}$ , mais pontiagudo será o triângulo em destaque, e mais próximo de  $\mathbf{s}$  estão os pontos de Gauss.

Na Seção 4.4.4 é apresentada uma proposta de subdivisão em triângulos e regiões retangulares a fim de melhorar a precisão numérica da integração singular.

De forma idêntica com o que ocorre no processo de subdivisão em regiões na integração regular, considerando  $\mathcal{R}^e$  como o conjunto de regiões triangulares do  $e$ -ésimo elemento, as mesmas Equações (4.10) e (4.11), referentes às matrizes de influência  $\mathbf{H}^e(\mathbf{s})$  e  $\mathbf{G}^e(\mathbf{s})$ , respectivamente, assim como a Equação (4.12) que trata do termo livre, são usadas para o caso de integração singular.

#### 4.4.4 Comparação e proposta de subdivisão em triângulos

Na Seção 4.4.3 ficou evidente que a precisão numérica da integração está diretamente relacionada com o tipo dos triângulos gerados com a subdivisão do elemento. Com o objetivo de quantificar triângulos para relacionar com uma precisão foi estabelecida uma medida denominada  $\gamma$  que é a altura do menor triângulo da subdivisão com base na borda do elemento, ou seja, a menor distância entre o ponto fonte singular e as bordas do elemento (veja a Figura 4.13).

A Figura 4.15 ilustra em (a) os 4 triângulos obtidos pela subdivisão a partir de um ponto fonte, com destaque para o menor triângulo, o qual foi utilizado para análise da precisão numérica. Foram considerados um conjunto de pontos fonte localizados a uma distância  $\gamma = [0, 1]$  da borda do elemento, e conseqüentemente um conjunto de triângulos. O resultado com menor precisão numérica obtida dentre tais pontos fonte é plotada no gráfico (curva em azul) relacionada com  $\gamma$ , apresentado em (b). Nos experimentos deste trabalho, a análise da precisão numérica da integração foi realizada sobre o termo livre  $\mathbf{C}(\mathbf{s})$ , pois conforme a Equação (2.28), quando o ponto fonte  $\mathbf{s}$  pertence a uma região suave da superfície o valor do termo livre é definido matricialmente por  $\mathbf{C}(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\mathbf{I}$ , em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem 3. Assim, foi

considerado um ponto fonte com tais características, e o valor utilizado como precisão numérica foi o maior valor absoluto da matriz resultante de  $\mathbf{C}(\mathbf{s}) - \frac{1}{2}\mathbf{I}$ .

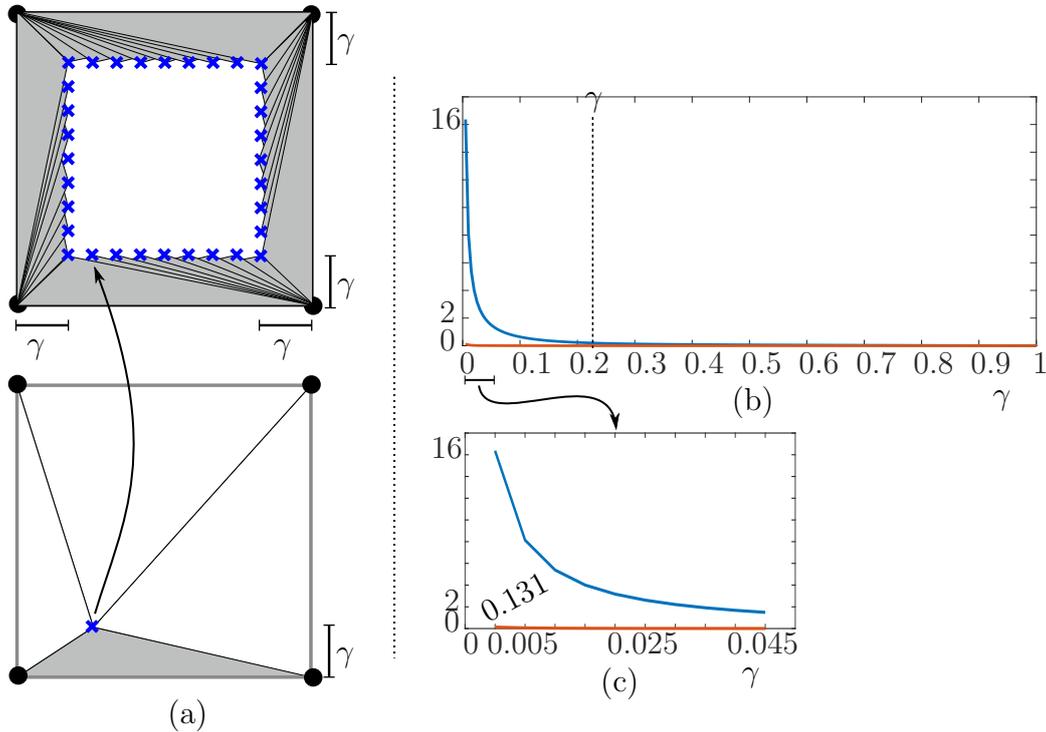


Figura 4.15: Comparação da precisão numérica da integração singular relativa a distância  $\gamma$  do ponto fonte  $\mathbf{s}$  à borda. (a) Menor triângulo, dentro os 4 da subdivisão, considerando  $\gamma$ . (b) e (c) gráfico da precisão numérica alcançada com método de Beer [5] (em azul) e método proposto (em vermelho).

Uma proposta de subdivisão é apresentada neste trabalho com o objetivo de evitar triângulos com razão de aspecto que afetem a precisão dos resultados da integração. Durante os experimentos, foram simulados pontos fonte em intervalos de 0,005 de distância da borda, a fim de uma comparação entre ambos os métodos. A Figura 4.15(c) mostra a precisão do resultado relacionado a  $\gamma$  com mais detalhes para  $\gamma$  próximo de zero ( $\mathbf{s}$  próximo da borda), sendo que o menor valor do experimento foi  $\gamma = 0,005$ , no qual a precisão alcançada foi de 16,367 no método de Beer e 0,131 na nova proposta (curva em vermelho). A comparação de precisão entre os dois métodos é mostrada na Tabela 4.1, cujas colunas representam os valores de  $\gamma$  na qual a precisão é alterada. A subdivisão proposta neste trabalho atinge precisão  $< 10^{-2}$  para  $\gamma \geq 0,040$ , no entanto, no método de Beer os experimentos mostraram tal precisão apenas numa pequena região central do elemento.

$\gamma$	$\geq 0.985$	$\geq 0.9$	$\geq 0.145$	$\geq 0.040$	$\geq 0.010$	$\geq 0.005$
Proposta	$< 10^{-5}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-3}$	$< 10^{-2}$	$< 10^{-1}$	0.131
Beer [5]	$< 10^{-2}$	$< 10^{-1}$	$< 10$	$< 10$	$< 10$	16.367

Tabela 4.1: Precisão dos resultados por método de acordo com os valores  $\gamma$ .

Os resultados apresentados foram extraídos da integração singular de um elemento localizado em uma região plana da superfície. No entanto, outros experimentos foram realizados com elementos deformados em regiões contínuas, e os resultados foram no máximo uma casa decimal a menos na precisão, o que ainda demonstra uma grande vantagem sobre o método de Beer.

A ideia principal da proposta de subdivisão é, em um primeiro passo, subdividir o elemento em regiões quadrangulares, e em um segundo passo, subdividir a região que contém o ponto fonte em triângulos. No terceiro passo, as demais regiões retangulares são analisadas e podem ser subdivididas em outras regiões retangulares de acordo com o algoritmo utilizado para integração quase singular/regular descrito na Seção 4.4.1.

A Figura 4.16 apresenta dois exemplos da subdivisão proposta. A primeira coluna ilustra o elemento subdividido em triângulos do modo de Beer, a segunda coluna apresenta a subdivisão em regiões retangulares. Na terceira coluna, é mostrado o resultado da subdivisão em triângulos (linhas tracejadas pretas) e subdivisão em regiões (linhas tracejadas vermelhas). Em (a) é ilustrado um ponto fonte no interior do elemento, e em (b) um ponto fonte na borda do elemento. Quando o ponto fonte está em um canto do elemento, a única região é subdividida em dois triângulos, conforme apresentado em (c).

Ainda na Figura 4.16 o termo  $d$  indica a menor distância paramétrica, maior que zero, do ponto fonte à borda do elemento. Uma região principal é criada de forma que suas bordas são equidistantes  $d$  do ponto fonte, exceto quando o ponto fonte pertence à borda do elemento, a qual limita a região. As demais regiões são consequência da continuação dos seguimentos utilizados para delimitar a região principal. A subdivisão da região principal em triângulos utiliza a abordagem descrita em Beer [5] comentada anteriormente, centrada no ponto fonte. A distância do ponto fonte até a borda do elemento é a mesma, no entanto, o formato dos triângulos gerados mudou, e é o mesmo para todos os triângulos ao redor no ponto, gerando pontos de Gauss de forma simétrica.

Uma vez determinadas as regiões, o número de ponto de Gauss por região é proporcional ao número de ponto de Gauss estabelecido para o elemento, de acordo com a dimensão da região. O número de pontos de Gauss da região principal é aplicado para cada triângulo.

## 4.5 Considerações finais

Este capítulo abordou algumas particularidades de implementação e do fluxo do processo de análise, desde a modelagem do sólido utilizando o Autodesk Fusion 360, passando pela extração de Bézier (implementado em C++) até a análise numérica (implementação em MATLAB). Esta etapa envolve importação e criação da malha, prescrição das condições de contorno, execução da análise e visualização dos resultados. As funcionalidades do protótipo foram descritas de forma ilustrativa. Dois exemplos expõem a prescrição das condições de contorno a partir de funções, e a reordenação e montagem do sistema linear. Por fim, foram descritos os métodos responsáveis pela integração numérica utilizando a regra de quadratura de Gauss, os quais são diretamente associados com a precisão numérica do sistema.

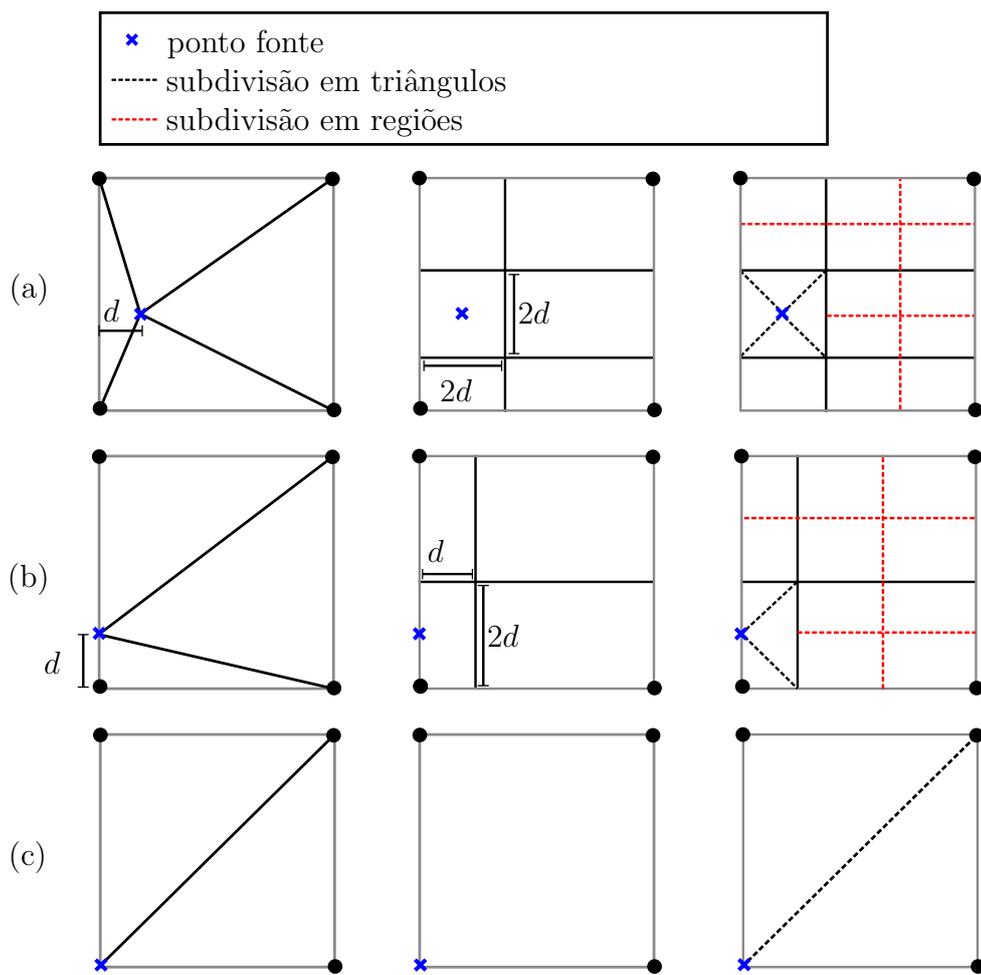


Figura 4.16: Proposta de subdivisão em triângulos e regiões. Coluna da esquerda: subdivisão conforme Beer. Colunas central e direita: nova proposta de subdivisão.

# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1 Considerações iniciais

Este capítulo visa exemplificar resultados gráficos e numéricos da análise isogeométrica com método dos elementos de contorno de sólidos representados por um conjunto de retalhos de Bézier, além de ilustrar as funcionalidades implementadas na aplicação.

A modelagem geométrica dos objetos utilizados nos experimentos foram gerados no software CAD Autodesk Fusion 360 [2] com uma licença educacional. No CAD, as formas são modeladas por T-splines com funções de base bicúbicas e exportadas para um arquivo no formato TSM, como descrito no Capítulo 4. A análise numérica com o MEC é realizada sobre um conjunto de retalhos de Bézier, cuja extração a partir de T-splines foi discutida na Seção 3.3. No entanto, tais elementos de Bézier podem ser oriundos de outras representações, como por exemplo NURBS e superfícies de subdivisão, desde que as informações estejam contidas corretamente no arquivo *.be*, cuja descrição é apresentada no Apêndice A.

Os resultados estão organizados em dois conjuntos. No primeiro, são utilizados modelos geométricos simples, no entanto comuns em diversas aplicações práticas, com o objetivo de demonstrar funcionalidades da análise implementada na aplicação proposta. O foco é testar e validar a corretude da análise isogeométrica (cilindro vazado submetido à pressão interna) e demonstrar diferentes condições de contorno e verificar o desempenho do sistema (cubos com resoluções variadas). O segundo conjunto visa modelos geométricos mais robustos, com T-malhas contendo T-junções, nós extraordinários e arestas de vinco.

Todas as medidas de comprimento são consideradas em uma unidade de comprimento qualquer, bem como as medidas de massa e tempo, e são tomadas em unidades arbitrárias, u.c., u.m., u.t., respectivamente. Os modelos para os experimentos apresentados neste capítulo estão descritos na tabela Tabela 5.1, contendo informações sobre o número de elementos e número de pontos de controle de suas respectivas malhas.

Tabela 5.1: Modelos utilizados para apresentação dos resultados.

Modelo	# Elementos	# P. Controle
Cilindro vazado	480	680
Cubo (5)	150	200
Viga biengastada	224	268
Mola	448	634
Tubo	682	728
Chapa com furos	876	1108
Bloco com pressão interna	572	574

## 5.2 Cilindro vazado

No exemplo do cilindro vazado, uma força de superfície é prescrita na face interna do cilindro representando uma pressão interna. O objetivo da utilização deste modelo é verificar a corretude e a precisão do método implementado a partir de uma solução exata, para pressão constante, em termos de deslocamentos, dada por

$$u_e(r) = \frac{1}{E} \frac{pr_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left\{ (1 - \nu)r + \frac{r_e^2(1 + \nu)}{r} \right\}, \quad (5.1)$$

em que  $u_e$  é a solução exata do deslocamento radial para o raio  $r$ ,  $p$  é a força de superfície aplicada na face interna do cilindro,  $r_e$  e  $r_i$  são os raios externos e internos do cilindro,  $E$  é o módulo de *Young* e  $\nu$  o coeficiente de *Poisson*. O eixo de orientação do cilindro é o eixo  $z$  e passa pela origem, e a simulação da pressão consiste em aplicar uma condição de contorno que representa um deslocamento na face interna do cilindro na direção do vetor normal à superfície  $\mathbf{n}$ , conforme a Figura 5.1 (a).

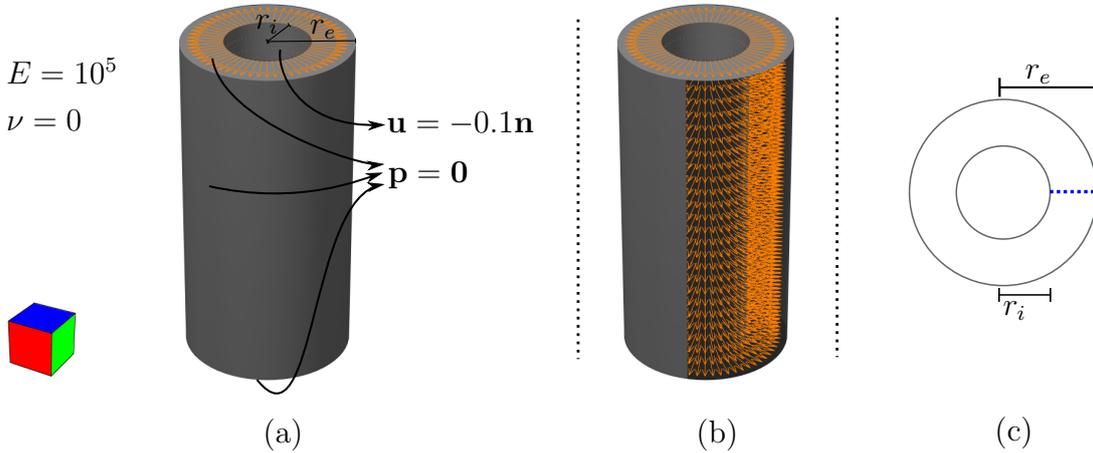


Figura 5.1: Cilindro vazado. (a) Especificação das condições de contorno. (b) Vetores indicando o deslocamento aplicado na face interna do cilindro (parte da face externa foi ocultada para permitir a visualização dos vetores). (c) pontos de amostra para avaliação da solução exata.

A comparação do deslocamento radial  $u = \|\mathbf{u}\|$ , resultado da simulação, com solução exata  $u_e$  ocorreu a partir de uma amostra de 20 pontos radiais igualmente espaçados, distribuídos entre a face interna e a face externa na direção  $x$ , conforme ilustrados em azul na Figura 5.1 (c). O deslocamento em pontos internos ao corpo é calculado de acordo com a Equação (2.42) a partir dos valores, de deslocamento e força de superfície, determinados no contorno do objeto. O erro máximo calculado,  $|\frac{u-u_e}{u}|$ ,

considerando os 20 pontos de amostra, foi de  $8.4752^{-4}$ . A Figura 5.2 apresenta em (a) os elementos, pontos de controle (em azul) e pontos de colocação (em vermelho) do modelo, em (b) o mapa de cores com escala representada pelo componente  $x$  do deslocamento e em (c) o cilindro deformado parcialmente oculto para permitir a comparação da deformação e da configuração original em cinza claro semi-transparente.

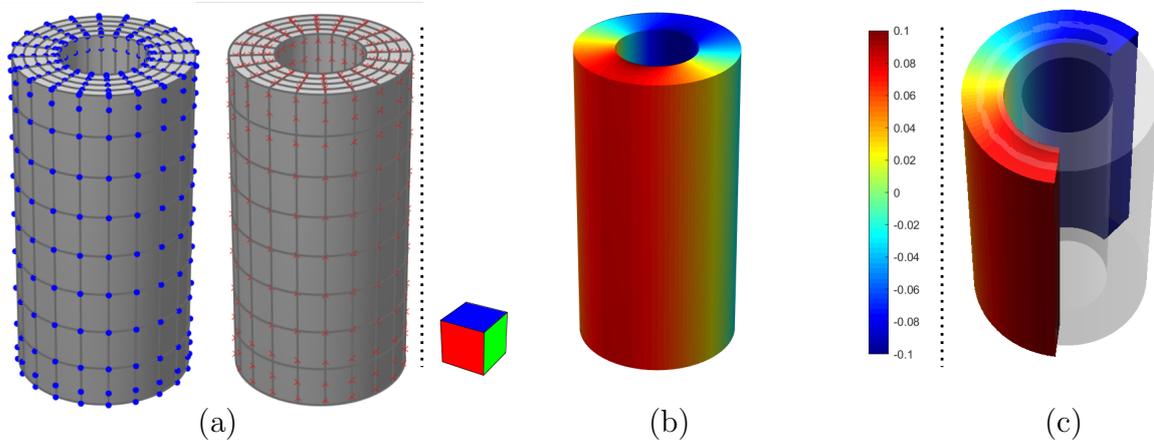


Figura 5.2: Cilindro vazado componentes e deformação. (a) Os elementos, pontos de controle (azuis) e ponto de colocação (vermelhos). (b) Mapa de cores com escala representada pelo componente  $x$  do deslocamento. (b) Cilindro deformado parcialmente oculto e configuração original em cinza claro.

### 5.3 Cubos

O cubo é utilizado como exemplo visando validar diferentes condições de contorno e eficiência. A Figura 5.3(a) apresenta um cubo com comprimento de 10 u.c. modelado a partir de uma combinação por colagem de seis malhas representando as faces, alinhadas com os eixos do sistema global de coordenadas. Conforme comentado na Seção 4.3, tal combinação assegura uma continuidade de superfície, e gera uma descontinuidade geométrica nas arestas do cubo. O material é definido com módulo de *Young* e coeficiente de *Poisson* nos valores de  $10^3$  u.c./ $(\text{u.m} \times \text{u.t.}^2)$  e 0.3, respectivamente. As condições de contorno representam uma restrição de movimento em uma face e uma força de superfície na direção da normal na face oposta, esta representada pelos vetores na cor laranja. O resultado da análise é ilustrado na Figura 5.3 em (b), (c), (d) e (e), através de mapas de cores representando os componentes  $x$ ,  $y$ , e  $z$  do deslocamento e força de superfície total ( $\|\mathbf{t}\|$ ), respectivamente.

Considerando a configuração da simulação, incluindo especificação do material e das condições de contorno, o maior deslocamento, obtido na face na qual foi prescrita a força de superfície, foi no componente  $x$  na ordem de  $10^{-5}$ . Tal deslocamento não é suficiente para apreciação visual da deformação. Portanto, uma escala de deformação (200) é aplicada com o objetivo de demonstrar o efeito que as condições de contorno prescritas causam no objeto, e o resultado é mostrado na Figura 5.4. O objeto na forma original é renderizado com transparência, a fim de facilitar a visualização da deformação. Além disso, os vetores referentes a força de superfície são ilustrados na cor laranja.

As condições prescritas para o modelo do cubo podem ser aplicadas em qualquer uma das três modelagens mencionadas, no entanto, há simulações que requerem uma

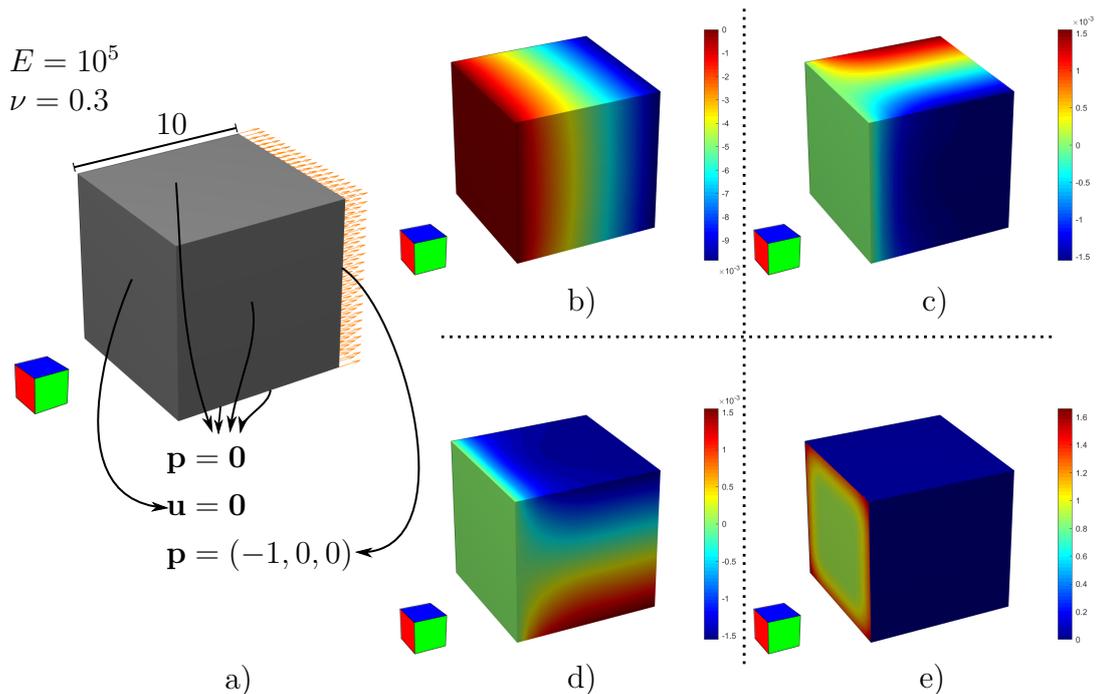


Figura 5.3: Cubo com condições de contorno aplicadas (a) e mapa de cores representando componente  $x$  do deslocamento (b), componente  $y$  do deslocamento (c), componente  $z$  do deslocamento (d) e força de superfície total ( $\|\mathbf{t}\|$ ) (e).

modelagem específica da malha. A combinação por colagem e a malha única geram nós múltiplos nas descontinuidades geométricas, o que incluem as emendas (colagens). No exemplo à seguir, as condições de contorno prescritas para o cubo inviabilizam a utilização de nós múltiplos, então apenas a combinação por adição (nós replicados na mesma posição, cada um deles com valores nodais de deslocamento e força de superfície) permite que tal configuração seja simulada. A Figura 5.5 ilustra em (a) um cubo com condições de contorno prescritas que representam duas faces adjacentes restritas de movimento e uma terceira face adjacente com força de superfície. No ponto do canto, em destaque, há três valores desconhecidos, sendo um deles o deslocamento  $\mathbf{u}$  referente à face superior. Apesar de desconhecido, nas duas bordas superiores referente às faces

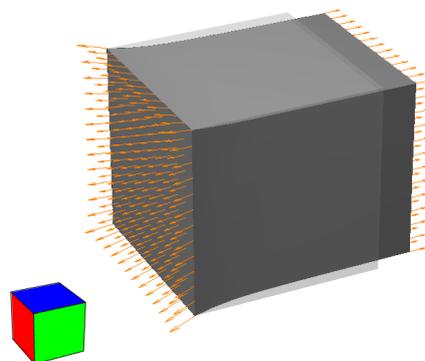


Figura 5.4: Cubo original em cinza claro semi-transparente. Cubo deformado (com escala de 200) em cinza escuro. Vetores referentes a força de superfície.

restringidas de movimento, o deslocamento deve ser nulo, e caso não fosse causaria um vão entre as faces na superfície. A Figura 5.6 apresenta o cubo deformado com mapa de cores representado pelo deslocamento total, além dos vetores na cor laranja indicando força de superfície, podendo-se notar o deslocamento nulo ao longo das duas bordas superiores restritas de movimento.

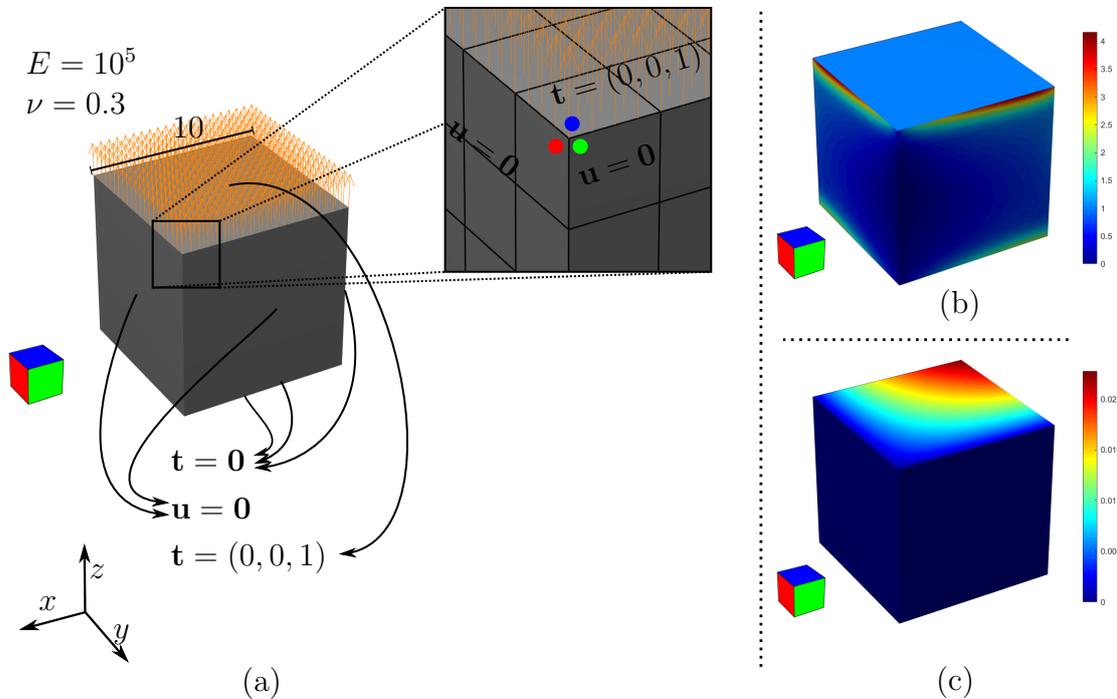


Figura 5.5: Cubo modelado com combinação de malhas. (a) Condições de contorno prescritas. (b) Mapa de cores representando a força de superfície total. (c) Mapa de cores representando o deslocamento total.

O cubo modelado com malha única é utilizado para avaliar o desempenho do método. Os tempos de processamento foram avaliados durante a montagem do sistema (matrizes  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$ ) com aplicação das condições de contorno, tarefa com maior demanda computacional, e resolução do sistema, na implementação em C++. A Tabela 5.2 apresenta 6 cubos modelados com um número diferente de elementos tal que o Cubo- $n$  possui  $n^2$  elementos por face. Para cada modelo são especificados o número de elementos, o número de pontos de controle (nós), uma média aproximada de pontos de Gauss utilizados para integração referente a cada ponto fonte, o tempo de montagem e tempo de resolução do sistema.

Tabela 5.2: Avaliação de desempenho da montagem e resolução do sistema.

Modelo	# elem.	# nós	Montagem (ms)	Resolução (ms)
Cubo-3	54	56	33	1
Cubo-5	150	200	262	19
Cubo-7	294	392	921	101
Cubo-9	486	632	2433	283
Cubo-11	726	920	5275	660
Cubo-13	1014	1256	10108	1345

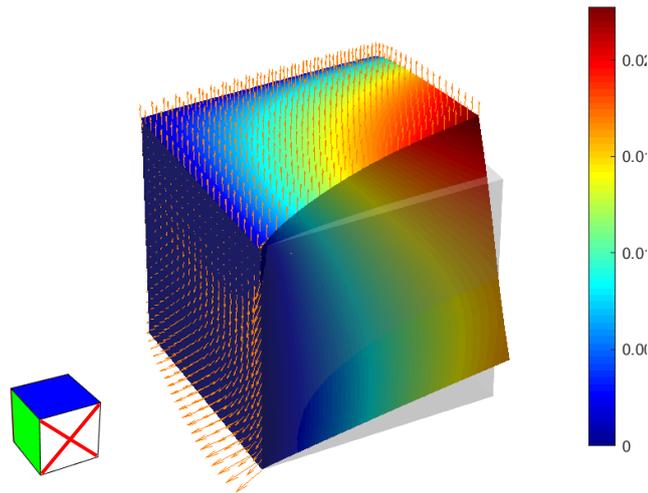


Figura 5.6: Cubo original na cor cinza claro, e cubo deformado com mapa de cores representando o deslocamento total. Os vetores na cor laranja indicam a força de superfície.

## 5.4 Viga biengastada

A Figura 5.7 apresenta uma viga com condições de contorno prescritas representando uma restrição de deslocamento nas extremidades e uma força de superfície na face superior. Porém, a força de superfície prescrita possui 4 valores diferentes ao longo da face superior, e a solução foi modelar a viga contendo 3 arestas de vinco nesta face, permitindo descontinuidades de força de superfície. O resultado da simulação é mostrado na Figura 5.8 com o mapa de cor representado pelo componente  $z$  do deslocamento.

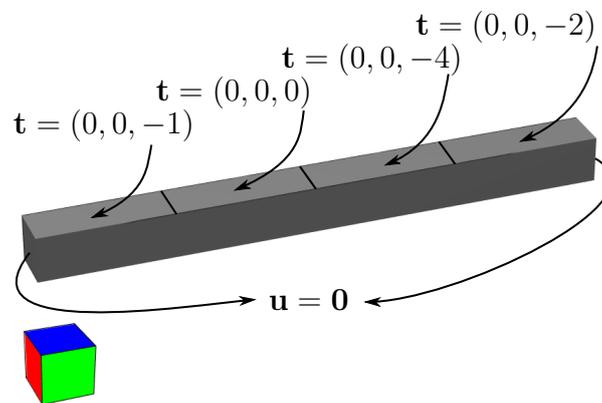


Figura 5.7: Viga com condições de contorno prescritas. As arestas na cor preta indicam as arestas de vinco (descontinuidade de força de superfície).

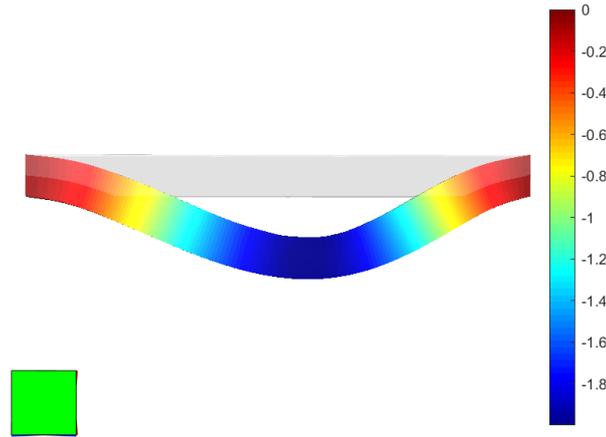


Figura 5.8: Viga original na cor cinza claro, e viga deformada com mapa de cores representado pelo componente  $z$  do deslocamento.

## 5.5 Mola

A mola foi construída a partir de uma seção transversal quadrada resultando em arestas de vinco, conforme apresentada na Figura 5.9. As condições de contorno essenciais foram prescritas nas extremidades da mola, e condições de contorno naturais no restante do modelo. O material utilizado é definido com módulo de *Young* e coeficiente de *Poisson* nos valores de  $210^5$  e 0, respectivamente. A Figura 5.9 ilustra em (a) as especificações da mola e as condições de contorno com destaque nos vetores na cor laranja indicando o deslocamento prescrito na extremidade superior da mola, e em (b) o mapa de cores representando o componente  $z$  do deslocamento.

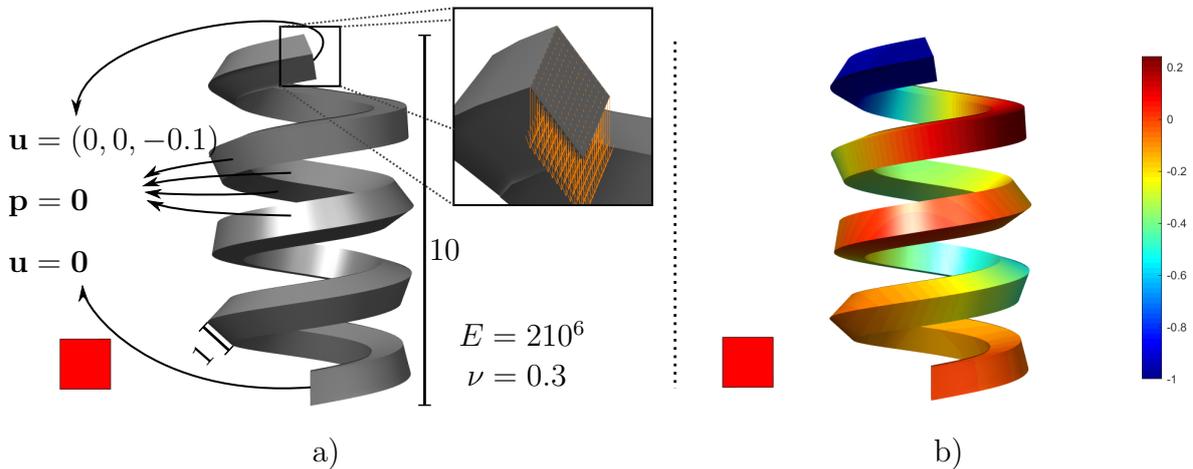


Figura 5.9: Mola. (a) Especificações da mola espiral, aplicação das condições de contorno com destaque nos vetores de força de superfície da extremidade. (b) Mapa de cores representando o componente  $z$  do deslocamento.

A Figura 5.10 demonstra o resultado da simulação por meio de uma deformação com escala de 1.2. A configuração original do modelo está na cor cinza semi-transparente e a configuração deformada em azul.

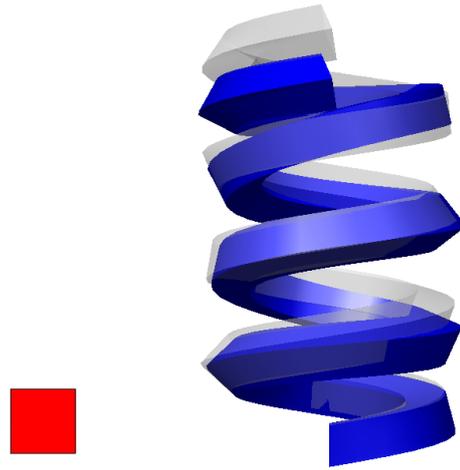


Figura 5.10: Mola espiral deformada com escala de deformação variando de 0 a 1.2. A configuração original está em cinza semi-transparente e a configuração deformada em azul.

## 5.6 Tubo

Tubo foi o nome dado ao modelo resultante da união entre dois cilindros vazados. Em sua modelagem foram utilizados todos os recursos da T-malha implementados na extração de retalhos de Bézier, sendo eles, arestas com vinco, nós extraordinários (com suavização) e junções T. O material utilizado é definido com módulo de *Young* e coeficiente de *Poisson* nos valores  $210^5$  e 0.3, respectivamente. A Figura 5.11(a) demonstra as condições de contorno essenciais e naturais prescritas para o modelo. A aplicação de uma força de superfície que representa um torque em uma região só foi permitida pois tal região é delimitada por arestas de vinco, em que há uma descontinuidade geométrica. Ainda na Figura 5.11(a) destaca-se os vetores tangentes, que são perpendiculares ao vetor normal da superfície e ao eixo de rotação do torque, que passa pelo centro do tubo na direção do eixo  $z$ . Em (b) e (c) são ilustrados os tubos com mapa de cores representando o deslocamento total ( $\|\mathbf{u}\|$ ), e o componente  $y$  da força de superfície, respectivamente.

Na Figura 5.12 é possível visualizar, em três posições diferentes o tubo deformado na cor azul sobreposto com a configuração original em cinza semi-transparente. A escala de deformação utilizada foi 120.

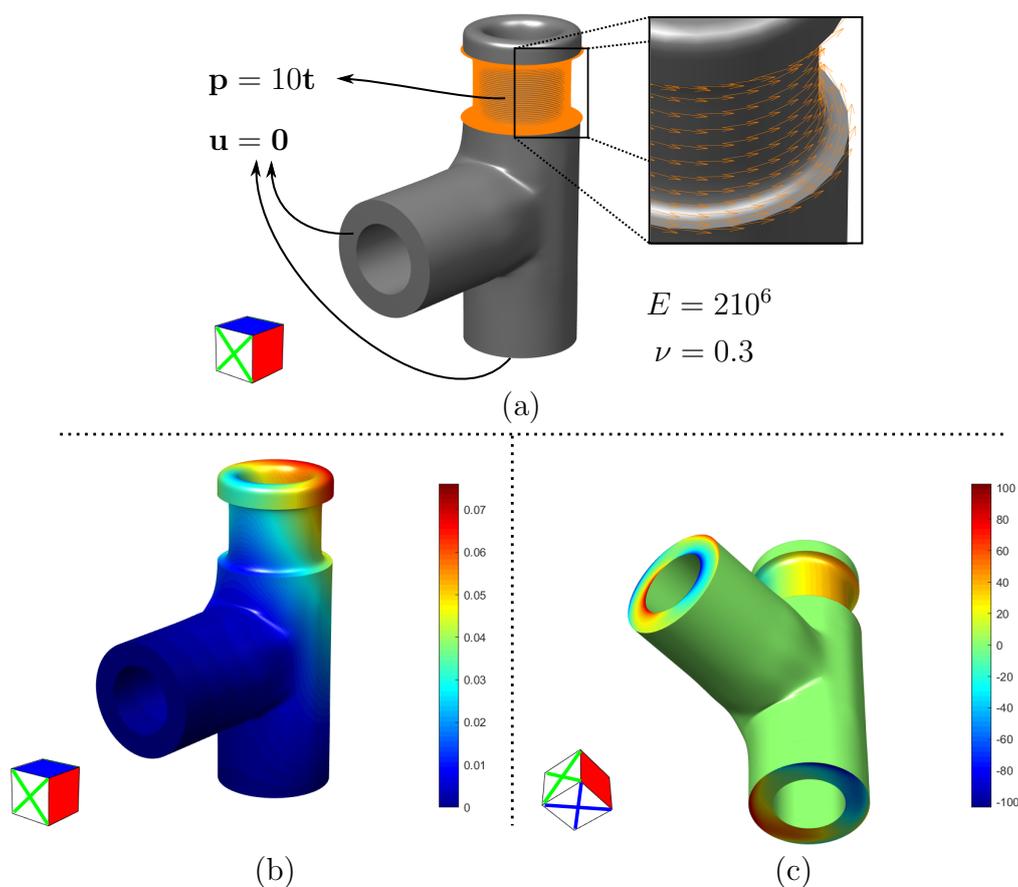


Figura 5.11: Tubo. (a) Especificações do tubo, com destaque aos vetores de força de superfície resultados da aplicação do torque ( $\mathbf{q}$  é o vetor tangente à superfície perpendicular ao eixo que define o torque). (b) Mapa de cores do deslocamento total ( $\|\mathbf{u}\|$ ). (c) Mapa de cores representando o componente  $y$  da força de superfície.

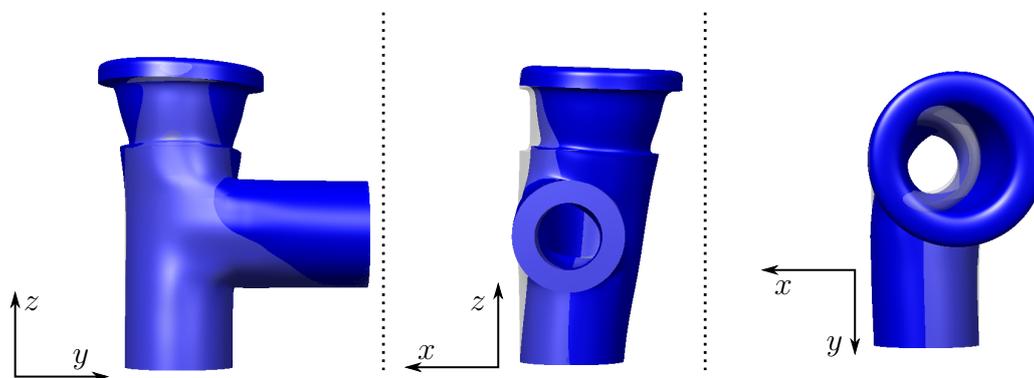


Figura 5.12: Na cor azul, o tubo deformado com uma escala de deformação 120, e na cor cinza semi-transparente a configuração original.

## 5.7 Chapa com furos

Visando complementar o exemplo do modelo do tubo, outra peça mecânica representada por um modelo não primitivo é apresentada. A chapa com furos é uma peça quadrada, esfeça, com bordas arredondadas, contendo 5 furos de dimensões iguais, estes com arestas de vinco em suas bordas. As Figuras 5.13 (a) e (d) mostram duas versões de condições de contorno aplicadas ao mesmo modelo. Em ambas, os furos dos cantos estão com restrição de movimento, no entanto, na primeira, um deslocamento na direção da normal é prescrito nos elementos das laterais do furo central, já na segunda, no furo central é aplicado um torque especificado por um eixo paralelo ao eixo  $z$  que passa no centro do furo.

As Figuras 5.13 (b) e (c) são resultados da simulação do modelo (a). Primeiro, em (b) o mapa de cores representando o deslocamento radial  $\|(u_x, u_y)\|$ , em que nota-se o valor  $\|(u_x, u_y)\| = 1$  na borda do furo central. Em (c), a deformação, com escala 1 aplicada, está em azul com omissão de superfície para evidenciá-la e a configuração original em cinza claro semi-transparente.

As Figuras 5.13 (e) e (f) são resultados da simulação do modelo (d). Em (e) os vetores em vermelho representam os deslocamentos, e em f) a deformação com escala de 100, sem a configuração original, porém com as arestas dos elementos enfatizando a torção do furo central.

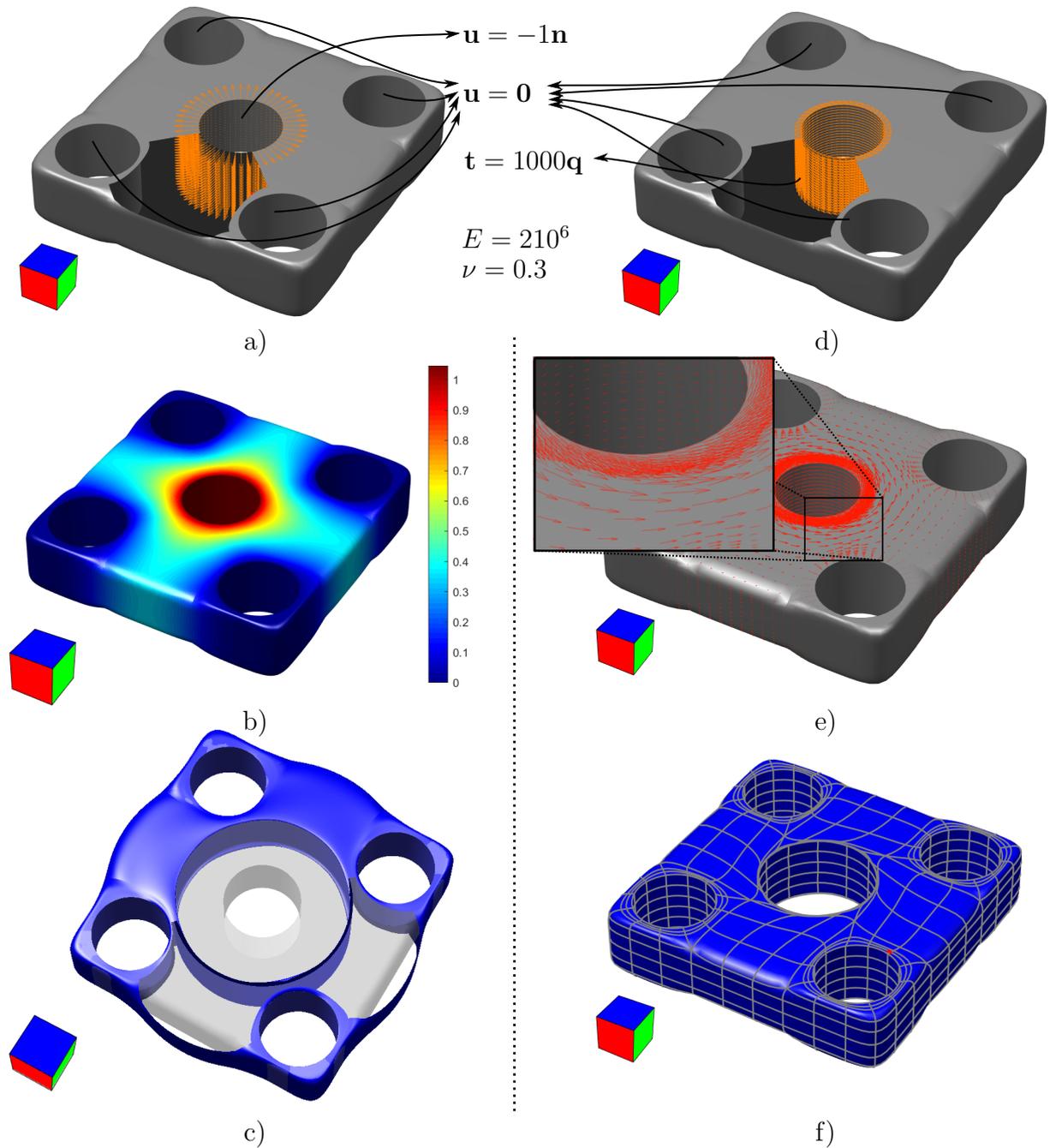


Figura 5.13: Chapa com Furos. (a) Deslocamento prescrito em direção ao vetor normal da face interna do furo central, representando uma pressão (vetores laranja). (b) Mapa de cores representando o deslocamento radial  $\|(u_x, u_y)\|$ . (c) Chapa deformada (azul). (d) Torque prescrito na face interna do furo central, especificado por um eixo paralelo ao eixo  $z$  que passa no centro do furo (vetores laranja). (e) Vetores dos deslocamentos (vermelho). (f) Deformação (azul) e arestas dos elementos (cinza claro).

## 5.8 Bloco com pressão interna

A Figura 5.14 ilustra um bloco contendo duas cavidades esféricas em seu interior. A condição de contorno prescrita na superfície externa do bloco restringe de deslocamento a face da extremidade esquerda, cuja as bordas são arestas de vinco. Na cavidade, central uma força de superfície na direção inversa à normal é aplicada representando uma pressão e na outra cavidade um deslocamento é aplicado. A força de superfície e o deslocamento prescritos estão ilustrados com vetores em destaque nas cores vermelha e laranja, respectivamente.

Um refinamento foi realizado na região central das laterais da malha onde haverá a deformação devido à pressão interna, conforme Figura 5.14(a).

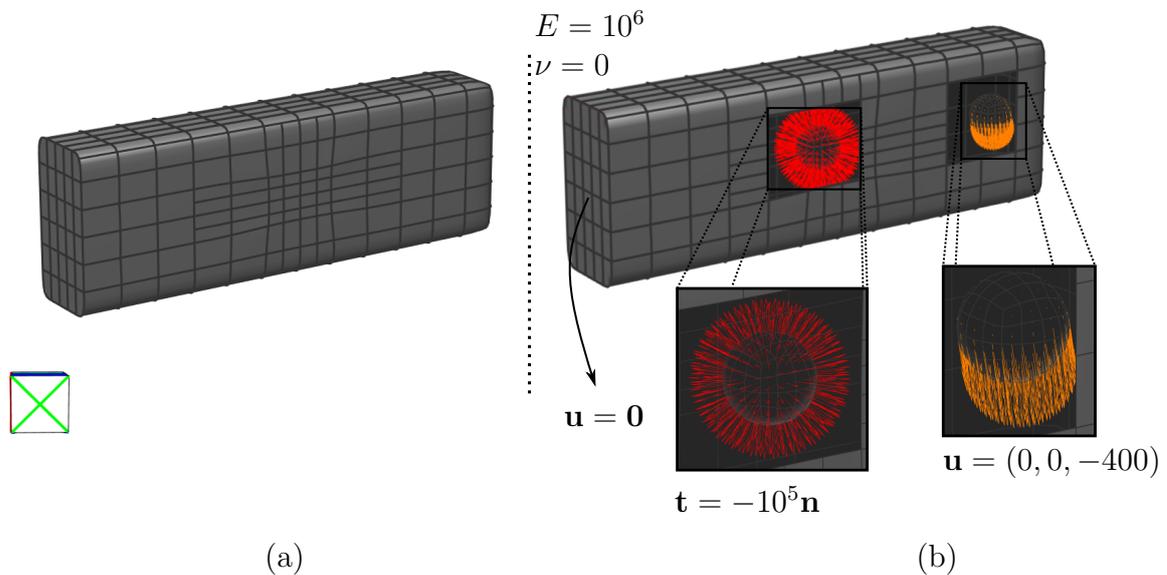


Figura 5.14: Bloco com pressão interna. (a) Bloco com malha refinada na região da cavidade central. (b) Condições de contorno prescritas na face da extremidade esquerda e nas cavidades internas (vetores em vermelho e laranja).

A Figura 5.15 demonstra a deformação no bloco, em que nota-se a expansão da região onde há pressão interna. Em (a) e (b) o bloco deformado (com escala 30) é ilustrado com mapas de cores com escalar representando a coordenada  $z$  e a coordenada  $y$  do deslocamento, respectivamente.

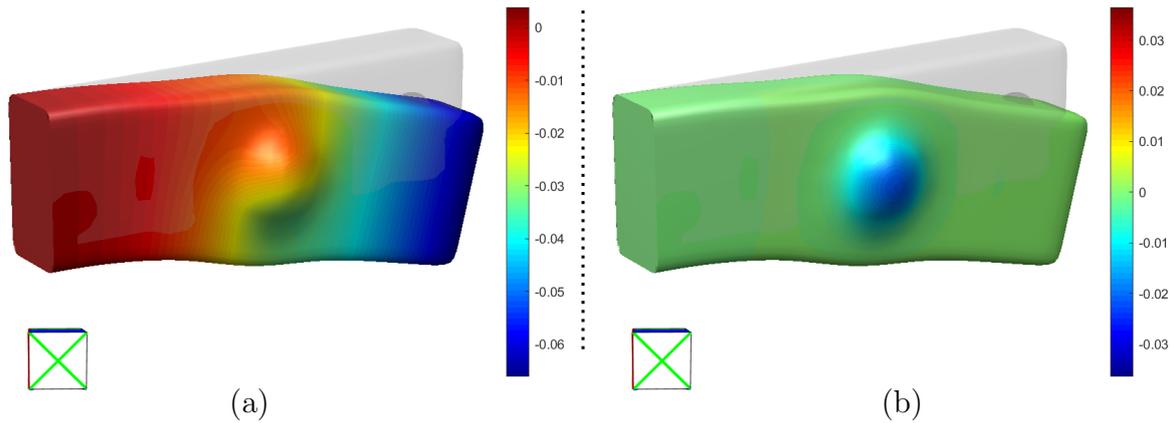


Figura 5.15: Bloco deformado com mapa de cores representando a coordenada  $z$  do deslocamento, em (a) e coordenada  $y$  do deslocamento, em (b).

## 5.9 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentados os resultados da análise isogeométrica com o MEC. As imagens foram extraídas diretamente da aplicação, demonstrando o máximo das funcionalidades implementadas. Os resultados numéricos da determinação de deslocamento interno no exemplo do cilindro vazado foram satisfatórios quando comparados a solução analítica. Um cubo foi utilizado como modelo padrão, com grau de refinamento variado, para avaliar o desempenho do sistema. Os exemplos mais robustos demonstraram a flexibilidade da aplicação, principalmente quanto à prescrição das condições de contorno, simulando restrição, força de superfície, pressão, torque, em conjunto com a utilização de nós múltiplos e elementos descontínuos, demonstrando a utilização dos conceitos desenvolvidos durante o texto. Os resultados das simulações dos exemplos foram apresentados através de mapas de cores, vetores, e deformações, permitindo de forma clara a visualização dos efeitos da simulação dos sólidos.

# Capítulo 6

## Conclusão

### 6.1 Discussão dos resultados

Neste trabalho foi desenvolvido um estudo sobre a aplicação prática do método dos elementos de contorno à análise isogeométrica elastostática de sólidos com vincos. O propósito não foi apenas atestar a efetividade da análise isogeométrica com o MEC, mas criar uma aplicação prática que seja adequada para a solução de problemas reais com modelos sujeitos a restrições de movimento e carregamentos genéricos. O estudo foi complementado com o desenvolvimento de um arcabouço computacional para IGA com o MEC. O módulo encarregado pela análise numérica foi desenvolvido para executar sobre um modelo de análise genérico, o qual pode ser definido independente da representação geométrica do sólido. Tal definição foi feita por uma malha, contendo elementos e nós, além do conjunto de pontos de colocação, requeridos pelo MEC. Neste trabalho, a superfície geométricas adotada para representação dos sólidos a serem analisados são T-splines, devido suas vantagens sobre NURBS.

O módulo de análise proposto, descrito no Capítulo 2, permite a modelagem de descontinuidades através de elementos descontínuos e nós múltiplos. O emprego de nós múltiplos na IGA, não foi encontrado nos trabalhos na literatura pesquisada, e trata-se de uma aplicação original. A multiplicidade de um nó está associada às regiões de elementos, as quais são parte da superfície delimitada por vincos. O modelo de análise proposto considera tal representação da descontinuidade, portanto, espera-se que a geometria seja capaz de definir e fornecer as informações sobre as regiões de elementos e conseqüentemente, sobre vincos. As T-splines atendem estes requisitos, e o modelo de análise correspondente foi obtido pelo processo de extração de Bézier, apresentado no Capítulo 3. O algoritmo implementado foi baseado na proposta de Scott [36], no entanto, extensões foram introduzidas para tratar arestas de vinco na T-malha, e calcular pontos de colocação para pontos de tangência.

No Capítulo 4 foram descritos os módulos do arcabouço proposto. O módulo de extração de Bézier, implementado em C++, recebe como entrada um arquivo no formato TSM do CAD, e o transforma em uma malha com elementos, nós, e pontos de colocação em um formato de arquivo próprio *.be*. No módulo de análise, implementado MATLAB, o modelo é especificado a partir de um ou mais arquivos *.be* cada um representando uma malha, as quais podem ser combinadas: por adição de componentes e/ou por colagem. A combinação é uma alternativa para caracterizar uma

descontinuidade, além das arestas de vinco. A colagem gera nós múltiplos, enquanto a adição de componentes gera elementos descontínuos, os quais representam a única forma de modelar situações com mais de uma força de superfície incógnita no nó. Neste capítulo, também foi abordado sobre a integração numérica da equação integral de contorno, procedimento essencial para o MEC, cuja solução utiliza a regra de quadratura de Gauss. Para a integração regular e quasi-singular, um esquema de subdivisão adaptativa do elemento em regiões de integração é utilizado. Para integração singular foi proposto um esquema de subdivisão o qual obteve melhor precisão comparado com a subdivisão em triângulos sugerida por Beer et al. [5]. O módulo de análise também foi implementado em C++, a fim de avaliar o desempenho computacional do método, o qual recebe como entrada a malha, o material e as condições de contorno prescritas através da aplicação em MATLAB, em um arquivo exportado pela própria aplicação em MATLAB.

O protótipo, apresentado no Capítulo 4, abrange o módulo de análise, e serve como interface gráfica para a visualização do sólido representado pelo modelo, tais como seus componentes, vetores e mapa de cores referentes aos valores do problema físico. Todas as ilustrações dos resultados do Capítulo 5 foram geradas com o protótipo, o qual ainda possibilita a seleção iterativa de elementos com o propósito de determinar parte da superfície na qual serão aplicados carregamentos uniformemente distribuídos, pressões, e forças decorrentes de torques, além de restrições de movimentos em graus de liberdade específicos. Apesar das condições de contorno serem impostas na superfície, estas necessitam ser transportadas para os nós do modelo (demonstrado no Capítulo 4), os quais influenciam os elementos da seleção, atingindo também os demais elementos influenciados por aquele nó. Na literatura não se encontrou essa flexibilidade, pois as condições de contorno são definidas arbitrariamente apenas para demonstração das funcionalidades, ou são condições de contorno homogêneas, ou são aplicadas diretamente sobre os nós que estão na superfície. Há ainda quem considera funções de interpolação específicas em diferentes elementos para prescrever as condições de contorno daquele elemento, e note que a definição de tais funções tem a mesma complexidade de se definir os valores nodais diretamente.

Em virtude dos resultados obtidos, pode-se afirmar que todos os objetivos da tese foram plenamente atingidos.

Na literatura pesquisada não foi encontrada aplicação disponível com tais funcionalidades, então o protótipo desenvolvido neste trabalho ficará disponível na Internet, com o objetivo de auxiliar a evolução da pesquisa na área. As funcionalidades desenvolvidas são consideradas um avanço mediante ao que foi encontrado na literatura, no entanto, ainda assim há várias limitações que necessitam ser investigadas e dependem de estudos futuros, como discutido a seguir.

## 6.2 Trabalhos futuros

- A equação integral de contorno descrita na Capítulo 2 não considera efeitos que ocorrem no interior do domínio o que limita a análise a problemas lineares e domínios homogêneos. Esta restrição pode ser contornada com a consideração das *forças de volume*, aquelas ocorridas no interior do domínio. Para consideração de forças de volume constantes, como por exemplo a força de gravidade, é adicionado

à equação integral de contorno (Equação (2.29)) um termo com uma integral sobre o domínio. Tal integral pode ser transformada em uma integral de contorno usando o teorema de *Green* (veja [5]).

- O cálculo dos valores de deslocamento no interior do domínio do sólido foi utilizado no cilindro vazado apresentado na Capítulo 5. No entanto, a visualização de tais valores no interior do sólido só seria possível através de uma superfície obtida por um plano de corte. A determinação de tal superfície envolve o cálculo de interseção entre uma superfície T-spline, que representa o contorno do sólido e o plano de corte, resultando em um polígono com valores nodais interpolados a partir de valores do contorno. Então, sobre a superfície do polígono uma malha triangular é gerada, cujos vértices (pontos internos ao sólido) são avaliados conforme a Seção 2.3.3, e interpolados para determinação da grandeza nos demais pontos daquela superfície necessários para renderização (vetores e mapa de cores).
- Procedimento para realizar refinamento dinâmico na T-malha sobre parte da superfície. Neste trabalho, os refinamentos, quando necessários — como utilizado no exemplo do bloco com pressão interna no Capítulo 5 — foram realizados durante a modelagem diretamente no CAD. Tal operação não é simples, pode tornar a T-malha não adequada para análise, e notou-se que em alguns casos o refinamento local em uma face implica automaticamente no refinamento em outras faces vizinhas. Um fator positivo é que a implementação própria do extrator de Bézier permitirá que operações de refinamento sejam aplicadas diretamente na T-malha em um processo anterior ao processo de extração, utilizando o CAD apenas para modelagem original. Alguns trabalhos que tratam os refinamentos locais utilizam outros tipos de representação, tais como, PHT-splines e LR-splines.
- Extensão do módulo de análise para consideração de sólidos com materiais que não são linearmente elásticos, os quais podem representar grandes deformações e materiais plásticos (aqueles que absorvem permanentemente parte das deformações decorrentes das forças sob as quais foram submetidos). Tal extensão, permite incrementar o domínio de análise para outros problemas da mecânica do contínuo e inclui a resolução de um sistema de equações não lineares, reutilizando grande parte do modelo de análise aqui proposto.
- Extensão para problemas dinâmicos, com ambiente multi-corpos em movimento ocasionando contatos. Nesse caso o modelo de análise deve considerar a equação integral de contorno construída a partir da equação de movimento, a qual considera aceleração, velocidade e possui integração temporal. A malha de análise deve ser capaz de calcular a interseção entre dois objetos, que normalmente ocorre em duas fases, uma geral e outra exata, a qual é responsável por determinar a região de contato, sobre a qual deve-se aplicar forças que impeçam a interpenetração dos objetos. Conforme já relatado anteriormente, a aplicação de cargas em regiões específicas pode necessitar de operações de refinamento local da superfície, o que não depende da malha de análise mas sim da T-malha, ou seja, a geometria do modelo também é influenciada. No refinamento, mais pontos de controle devem ser adicionados tal que a aplicação de carga na região não interfira em outras parte da superfície.

- Módulo de extração de elementos de Bézier para outras representações, como por exemplo superfícies de subdivisão, a qual tem sido amplamente utilizada na indústria da animação, para efeitos especiais e para entretenimento. A Pixar lançou um padrão denominado OpenSubdiv [33], o qual foi adotado por grandes companhias, tal como a DreamWorks. Na prática o módulo deve gerar o arquivo no formato *.be* contendo os elementos, os nós, e os pontos de colocação, considerando as arestas de vinco da superfície, e determinando as regiões de elemento.

# Apêndice A

## Formato *.be*

O arquivo *.be* contém informações dos elementos de Bézier que formam a superfície do modelo, além dos pontos de colocação utilizados para a análise. Cada nó possui um identificador, contendo valores quaisquer de índices, desde que únicos, além das coordenadas espaciais. Cada elemento possui um identificador, um grau  $p$  (o mesmo para ambas direções, normalmente 3 ou cúbico), uma lista de  $m$  índices de nós, uma lista de  $m$  regiões de elemento (1, 2, ...) e uma matriz de extração de Bézier de ordem  $m \times (p+1)^2$ . Cada um dos  $m$  pontos de colocação possui uma ou mais amostras, e cada amostra contém o identificador de um elemento e as coordenadas do ponto no domínio paramétrico daquele elemento ( $\xi_1, \xi_2$ ). A organização do arquivo *.be* é demonstrada a seguir, acompanhada de um exemplo (com algumas linhas omitidas).

```
//Número total de nós (Ex. linha 1)
#_nós
//Identificador do nó, posição no espaço tridimensional (Ex. linhas 2 a 6)
id_nó x y z w

//Número de elementos de Bézier (linha 7)
#_elementos_de_Bézier
//Identificador do elemento, número de nós do elemento, grau
do elemento (Ex. linha 8)
id #_nós grau
//Lista de índices do nós do elemento (Ex. linha 9)
lista_índice_nós
//Lista de regiões de elemento, uma por nó (Ex. linha 10)
lista_região_nó
//Matriz de extração de Bézier: número de nós ×
(grau+1)x(grau+1) (Ex. linhas 11 a 19)
matriz_extração_Bezier

//Lista de pontos de colocação (Ex. linhas 54 a 67)
id_nó #_elementos
id_elemento ξ
```



56	58	0.600000	1.000000
57	2	2	
58	45	0.600000	-1.000000
59	46	-0.600000	-1.000000
60	0	3	
61	0	-1.000000	-1.000000
62	1	-1.000000	-1.000000
63	2	-1.000000	-1.000000
64	.	.	.
65	245	2	
66	123	-0.200000	1.000000
67	122	-0.200000	-1.000000

# Referências Bibliográficas

- [1] Dreamworks. <https://www.dreamworks.com/>, acessado em 10/06/2021.
- [2] AUTODESK. Fusion 360. <https://www.autodesk.com/products/fusion-360/overview>, acessado em 01/06/2021.
- [3] BAZILEVS, Y., CALO, V., COTTRELL, J., EVANS, J., HUGHES, T., LIPTON, S., SCOTT, M., AND SEDERBERG, T. Isogeometric analysis using t-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (01 2010), 229–263.
- [4] BEER, G. *Advanced numerical simulation methods: From cad data directly to simulation results*. CRC Press, Jan. 2015.
- [5] BEER, G., AND BORDAS, S. *Isogeometric Methods for Numerical Simulation*, vol. 561. Springer, 01 2015.
- [6] BEER, G., DUENSER, C., AND MALLARDO, V. Efficient and realistic 3-d boundary element simulations of underground construction using isogeometric analysis. *Computers and Geotechnics* 134 (06 2021), 104055.
- [7] BEER, G., MARUSSIG, B., AND DUENSER, C. Isogeometric boundary element method for the simulation of underground excavations. *Géotechnique Letters* 3, 3 (2013), 108–111.
- [8] BORDEN, M. J., SCOTT, M. A., EVANS, J. A., AND HUGHES, T. J. R. Isogeometric finite element data structures based on bézier extraction of nurbs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 87, 1-5 (2011), 15–47.
- [9] BREBIA, C. A. *Boundary Element Techniques*. Springer, Berlin, 1984.
- [10] CHEN, L., AND DE BORST, R. Locally refined t-splines. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 114, 6, 637–659.
- [11] CHEN, L., SIMEON, B., AND KLINKEL, S. A nurbs based galerkin approach for the analysis of solids in boundary representation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 305 (2016), 777–805.
- [12] CHOULIARAS, S., KAKLIS, P., KOSTAS, K., GINNIS, A., AND POLITIS, C. An isogeometric boundary element method for 3d lifting flows using t-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 373 (2021), 113556.
- [13] COTTRELL, J., HUGHES, T., AND BAZILEVS, Y. *Isogeometric Analysis: Toward integration of CAD and FEA*. 09 2009.

- [14] DE FALCO, C., REALI, A., AND VÁZQUEZ, R. Geopdes: A research tool for isogeometric analysis of pdes. *Advances in Engineering Software* 42, 12 (2011), 1020–1034.
- [15] DE BORST, R., AND CHEN, L. The role of bézier extraction in adaptive isogeometric analysis: Local refinement and hierarchical refinement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 113, 6 (2018), 999–1019.
- [16] DÖRFEL, M. R., JÜTTLER, B., AND SIMEON, B. Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with t-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199, 5 (2010), 264–275. Computational Geometry and Analysis.
- [17] GONG, Y., DONG, C., AND QIN, X. An isogeometric boundary element method for three dimensional potential problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 313 (2017), 454–468.
- [18] HUGHES, T. J. R., COTTRELL, J. A., AND BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), 4135–4195.
- [19] LAI, W., YU, T., BUI, T. Q., WANG, Z., CURIEL-SOSA, J. L., DAS, R., AND HIROSE, S. 3-d elasto-plastic large deformations: Iga simulation by bézier extraction of nurbs. *Advances in Engineering Software* 108 (2017), 68–82.
- [20] LI, X., ZHENG, J., SEDERBERG, T. W., HUGHES, T. J., AND SCOTT, M. A. On linear independence of t-spline blending functions. *Computer Aided Geometric Design* 29, 1 (2012), 63–76. Geometric Constraints and Reasoning.
- [21] LIAN, H., KERFRIDEN, P., AND BORDAS, S. Shape optimization directly from cad: An isogeometric boundary element approach using t-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 317 (2017), 1–41.
- [22] LIU, L., ZHANG, Y. J., AND WEI, X. Handling extraordinary nodes with weighted t-spline basis functions. *Procedia Engineering* 124 (2015), 161 – 173. 24th International Meshing Roundtable.
- [23] LIU, L., ZHANG, Y. J., AND WEI, X. Weighted t-splines with application in re-parameterizing trimmed nurbs surfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 295 (2015), 108–126.
- [24] MALLARDO, V., AND RUOCCO, E. An improved isogeometric boundary element method approach in two dimensional elastostatics. *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 102 (01 2014), 373–391.
- [25] MALLARDO, V., AND RUOCCO, E. A nurbs boundary-only approach in elasticity. *European Journal of Computational Mechanics* 25 (06 2016).
- [26] MARUSSIG, B., AND HUGHES, T. A review of trimming in isogeometric analysis: Challenges, data exchange and simulation aspects. *Archives of Computational Methods in Engineering* 25 (06 2017), 1–69.
- [27] MCNEEL, R., AND ASSOCIATES. Rhinoceros 3d. <https://www.rhino3d.com/>, acessado em 20/06/2021.

- [28] NGUYEN, V. P., ANITESCU, C., BORDAS, S. P., AND RABCZUK, T. Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation* 117 (2015), 89–116.
- [29] NGUYEN-THANH, N., NGUYEN-XUAN, H., BORDAS, S., AND RABCZUK, T. Isogeometric analysis using polynomial splines over hierarchical t-meshes for two-dimensional elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200, 21 (2011), 1892–1908.
- [30] PAGLIOSA, P. *Um Sistema de Modelagem Estrutural Orientado a Objetos*. PhD thesis, USP - Campus São Carlos, 1998.
- [31] PENG, X., ATROSHCHENKO, E., KERFRIDEN, P., AND BORDAS, S. Isogeometric boundary element methods for three dimensional static fracture and fatigue crack growth. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 316 (2017), 151–185. Special Issue on Isogeometric Analysis: Progress and Challenges.
- [32] PIEGL, L., AND TILLER, W. *The NURBS Book*, second ed. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1996.
- [33] PIXAR. Open subdiv. <http://graphics.pixar.com/opensubdiv/>, acessado em 10/05/2021.
- [34] QIAN, X. Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral. *Computer-Aided Design* 43 (11 2011), 1427–1437.
- [35] SCOTT, M., SIMPSON, R., EVANS, J., LIPTON, S., BORDAS, S., HUGHES, T., AND SEDERBERG, T. Isogeometric boundary element analysis using unstructured t-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 254 (2013), 197 – 221.
- [36] SCOTT, M. A., BORDEN, M. J., VERHOOSSEL, C. V., SEDERBERG, T. W., AND HUGHES, T. J. R. Isogeometric finite element data structures based on bézier extraction of t-splines. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 88, 2 (2011), 126–156.
- [37] SEDERBERG, T., CARDON, D., FINNIGAN, G., NORTH, N., ZHENG, J., AND LYCHE, T. T-spline simplification and local refinement. *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 23 (08 2004), 276–283.
- [38] SEDERBERG, T. W., ZHENG, J., BAKENOV, A., AND NASRI, A. T-splines and t-nurccs. *ACM Trans. Graph.* 22, 3 (July 2003), 477–484.
- [39] SIMPSON, R., BORDAS, S., LIAN, H., AND TREVELYAN, J. An isogeometric boundary element method for elastostatic analysis: 2d implementation aspects. *Computers & Structures* 118 (2013), 2 – 12. Special Issue: UK Association for Computational Mechanics in Engineering.
- [40] SIMPSON, R., BORDAS, S., TREVELYAN, J., AND RABCZUK, T. A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 209-212 (2012), 87–100.

- [41] SIMPSON, R., SCOTT, M., TAUS, M., THOMAS, D., AND LIAN, H. Acoustic isogeometric boundary element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 269 (2014), 265–290.
- [42] SIQUEIRA, M., PAIVA NETO, A., AND PAGLIOSA, P. Geração de malhas por refinamento de delaunay, 2015.
- [43] SUN, D., AND DONG, C. Shape optimization of heterogeneous materials based on isogeometric boundary element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 370 (2020), 113279.
- [44] SUN, F., DONG, C., AND YANG, H. Isogeometric boundary element method for crack propagation based on bézier extraction of nurbs. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 99 (2019), 76–88.
- [45] TAUS, M., RODIN, G. J., HUGHES, T. J., AND SCOTT, M. A. Isogeometric boundary element methods and patch tests for linear elastic problems: Formulation, numerical integration, and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 357 (2019), 112591.
- [46] VUONG, A.-V., HEINRICH, C., AND SIMEON, B. Isogat: A 2d tutorial matlab code for isogeometric analysis. *Comput. Aided Geom. Des.* 27, 8 (2010), 644–655.
- [47] WANG, W., ZHANG, Y., DU, X., AND ZHAO, G. An efficient data structure for calculation of unstructured t-spline surfaces. *Visual Computing for Industry, Biomedicine, and Art* 2 (12 2019).
- [48] ZHANG, Q., SABIN, M., AND CIRAK, F. Subdivision surfaces with isogeometric analysis adapted refinement weights. *Computer-Aided Design* 102 (2018), 104–114. Proceeding of SPM 2018 Symposium.
- [49] ZHAO, G., YANG, J., WANG, W., ZHANG, Y., DU, X., AND MAYI, G. T-splines based isogeometric topology optimization with arbitrarily shaped design domains. *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 123 (01 2020), 1033–1059.