UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JONATHAN WILLIAN DE SOUZA

UM ESTUDO SOBRE OS EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE NA OBMEP

TRÊS LAGOAS - MS
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

UM ESTUDO SOBRE OS EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE NA OBMEP

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Câmpus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade.

TRÊS LAGOAS - MS
2021

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Pólo de Três Lagoas

UM ESTUDO SOBRE OS EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE NA OBMEP
por
JONATHAN WILLIAN DE SOUZA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora

Allan Edley

Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade (Orientador)

UFMS/CPTL

Osmar Jesus Macedo

Prof. Dr. Osmar Jesus Macedo

UFMS/CPTL

Regis Stabile

Prof. Dr. Régis Leandro Braguim Stábile

IFSP/Câmpus Birigui

Três Lagoas, 26 de fevereiro de 2021.

Dedico este trabalho a minha tia, Kelly Cristina Aparecida Lopes de Souza, que me incentivou a estudar desde o princípio, e veio a falecer de câncer durante a graduação em matemática.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela oportunidade concedida.

A minha tia Kelly, pelo incentivo sempre presente no início de tudo; A minha vó Valdéia, por toda a ajuda no dia-a-dia, me oportunizando estudar por mais horas; A minha noiva Nayara, por ter passado por todas as fases junto comigo, dando força nos momentos em que pensei não ser possível seguir no curso; Aos demais familiares e amigos que participaram de alguma forma dessa trajetória.

Ao meu orientador, Allan, por acreditar na minha ideia inicial, mas principalmente pela ajuda imensurável durante todo o processo de confecção da dissertação.

À banca examinadora, composta pelos docentes Allan, Osmar e Régis, pelas contribuições inestimáveis para a consecução do trabalho.

Aos docentes do Departamento de Mestrado em Matemática da UFMS (Três Lagoas), por todos os ensinamentos durante o curso.

A professora Manuella do IFSP-Birigui, por toda ajuda com o programa Lyx, utilizado na digitação.

À turma de 2019, o apoio de vocês se fez presente no momento mais difícil dessa trajetória, sentirei muita falta de todos os momentos juntos.

“O sucesso é ir de fracasso em fracasso sem perder o entusiasmo.” (Winston Churchill)

Resumo

A OBMEP desde 2005 incentiva o estudante a buscar na Matemática mais do que simplesmente fazer cálculos, mas sim desenvolver o raciocínio lógico matemático presente em suas questões. Com bolsas de estudo, medalhas e títulos, a instituição busca somar novos talentos para o Brasil, como bem diz a sua logo. Neste trabalho, abordaremos as temáticas de probabilidade e combinatória, utilizando questões da OBMEP de 2005 a 2019. Pretende-se enunciar novas soluções para os exercícios, bem como inserir comentários e sugestões, com o intuito de auxiliar os docentes que venham a utiliza-lo em sala de aula, como material de apoio. O foco principal, é um olhar pedagógico para cada questão, um auxílio sobre como um professor pode utilizar o banco de questões e as provas anteriores como objeto de estudo para motivar seus alunos a buscarem algo a mais. Sempre ressaltando as diversas oportunidades que essa e outras competições estudantis têm a oferecer.

Palavras-chave: Probabilidade, OBMEP, Ensino de Matemática.

Abstract

OBMEP since 2005 encourages students to look for more than just calculations in Mathematics, but to develop the logical mathematical reasoning present in their questions. With scholarships, medals and titles, the institution seeks to add new talents to Brazil, as its logo says. In this work, we will approach the themes of probability and combinatorics, using questions from the OBMEP from 2005 to 2019. We intend to enunciate new solutions for the exercises, as well as insert comments and suggestions, in order to help teachers who come to use it in the classroom, as support material. The main focus is a pedagogical look at each question, an aid on how a teacher can use the question bank and the previous tests as an object of study to motivate his students to look for something more. Always highlighting the diverse opportunities that this and other student competitions have to offer.

Keywords: Probability, OBMEP, Mathematics Teaching.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Siglas

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OBM - Olímpiada Brasileira de Matemática.
SBM - Sociedade Brasileira de Matemática.
IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
BNCC - Base Nacional Comum Curricular.
MCTIC – Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações.
PIC - Programa de Iniciação Científica Junior.
POTI - Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo.
CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.
CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.
PICME - Programa De Iniciação Científica e Mestrado.
LDBEN - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.
PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais.
CONAE - Conferência Nacional de Educação.
PNAIC - Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa.
FNE - Fundo Nacional de Educação.
E.F. - Ensino Fundamental.

Sumário

Introdução

Motivação sem dúvida nenhuma é palavra chave quando falamos de ensino público. Temos alunos sem perspectiva, professores desvalorizados e pelos anos que assim estiveram, agora desmotivados.

Quando decidimos por essa profissão, nosso objetivo não é ensinar contas, muito menos aplicação de fórmulas, mas, sim mudar a realidade de alguém. Lecionar é ter uma chance em um dia aleatório, munido de 45 minutos, de fazer uma criança ou adolescente refletir a forma como encara a vida, ensinar a fazer planos e traçar metas. A maioria das pessoas almejam melhores condições de vida, mesmo as que não pensam nisso desde a juventude, portanto quanto antes adentrarmos na estrada que nos levará a atingir tais objetivos, melhor. Para isso, as ferramentas que devemos usar pra motivar meus alunos, são: nossa trajetória; casos de amigos que mudaram de vida através da educação; oportunidades como: vestibulares, faculdades, concursos públicos e a OBMEP.

Desde 2005 a OBMEP vem tentando transformar a forma como as pessoas veem a matemática, com diversas premiações: títulos, medalhas e bolsas de estudos. Com programas voltados desde a qualificação de professores, para que atuem juntamente às escolas, direcionando um treinamento que explore o potencial do aluno; até um programa que oferece aos estudantes medalhistas a oportunidade de cursar um mestrado juntamente com a graduação, com bolsa fornecida pela Capes.

O principal trunfo da OBMEP (e de outras competições estudantis) veio a pouco tempo. A partir de 2018, as mais conceituadas instituições de Ensino Superior do país (Unicamp, USP, Unesp), passaram a ceder vagas à cursos específicos através dos resultados obtidos por alunos de escolas públicas e particulares na OBMEP e OBM, respectivamente. O aluno então, passou a ter uma ponte pra realizar o sonho de entrar em uma faculdade pública, pois ao invés de disputar com milhares de adolescentes, vagas nos mais concorridos vestibulares, tendo de se aprofundar em todas as disciplinas da grade curricular, agora poderia simplesmente se dedicar mais àquela que de fato tem interesse, ou facilidade.

O docente dispõe então, de uma ferramenta poderosa para incentivar seus alunos, e este trabalho tem o intuito de evidenciar como a tarefa de propor questões das olimpíadas com a temática de probabilidade, pode ser fácil, mesmo para o professor que antes não tinha tal hábito. Mostrando outras soluções, sugerindo métodos de ensino e adicionando comentários às questões, esse material, faz a função de mediador entre o professor e o estudo de exercícios de probabilidade da OBMEP.

No capítulo 1, abordamos alguns fatos históricos relacionados à probabilidade, destacando alguns matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento desta temática. O 2° capítulo narra particularidades da OBMEP, todos os seus programas de treinamento e incentivo a estudantes e professores, indo além das avaliações. As definições, exemplos e desdobramentos dos conceitos principais envolvidos na combinatória e na probabilidade estão disponíveis no capítulo 3. Os capítulos 4 e 5, tratam das questões de probabilidade da OBMEP na primeira e segunda fases, respectivamente, trazendo alternativas de resolução e analisando os benefícios pedagógicos das diferentes soluções para o processo de ensino aprendizagem do aluno.

Capítulo 1

Breve Histórico

Uma forma de enunciar do que trata a probabilidade é "[...] o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o 'acaso' representa um papel preponderante." (VIALI, 2008, p.143). O acaso, expressa toda a variabilidade das coisas, a incerteza à nossa volta. Ele está presente em muitas áreas, no lançamento de uma moeda, em uma partida de futebol ou nas previsões do tempo, por exemplo.

Além de permear o estudo dos jogos de apostas, a probabilidade se desenvolveu pela necessidade de obter dados estatísticos, através da amostragem. "Em 3000 a.C., já se realizavam censos na Babilônia, China e Egito. Há registros de que o rei chinês Yao, nessa época, mandou fazer uma verdadeira estatística agrícola e um levantamento comercial do país." (LOPES, 2005, p.1). Ainda por Lopes (2005), o "acaso", foi o responsável pela criação de algumas de nossas atividades, como: a criação do seguro, por comerciantes marítimos na mesopotâmia e os jogos de azar no início da era pré-cristã, por Gregos, Babilônios, Egípcios e Romanos. Segundo Calabria (2013), os estudos sobre esses casos, só começaram a aparecer nos séculos XV e XVI, com os italianos Luca Pacioli (1445-1517), Niccolo Fontana (1499-1557), Tartaglia (1500-1557) e Girolamo Cardano (1501-1576), que realizavam estimativas baseados na frequência em que os resultados eram obtidos em jogos anteriores.

Cardano, segundo Viali (2008), foi o primitivo no que se refere a utilização de métodos de contagem para determinação de um evento, além de apresentar a probabilidade como a razão que conhecemos hoje, porém, restringindo as análises ao lançamento de dados.

No início do século XVII, conforme Calabria (2013), Galileu Galilei (1564-1642), assim como Cardano, tratava de resolver problemas como o porquê a aparição de um número como resultado de uma soma no lançamento de três dados era mais favorável que outro valor. Porém, a probabilidade de fato reside nos pensadores europeus desde meados de 1600, a qual temos o marco na Teoria das Probabilidades, as sete cartas trocadas entre Pierre Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662). As cartas tratavam da divisão do prêmio em jogos de apostas que são interrompidos antes do seu final, e precisam ter o bônus distribuindo entre os jogadores. Os dois discutiam sobre métodos de contagem para estimar o prêmio dado ao jogador que estiver ganhando, proporcionalmente a quantidade de rodadas já realizadas. Nas correspondências, Fermat desenvolve um método de contagem para essa decisão e Pascal afirma que está correto, mas apenas para dois jogadores, pois, caso aumentássemos essa quantidade, o jogo poderia terminar em menos rodadas. Fermat em outra carta diz concordar com os métodos de Pascal, corrigindo lhe alguns erros e de forma amigável chegam em um consenso, afirmando ainda que os resultados venham a ser compartilhados a outras pessoas. A troca de cartas, apresenta dois princípios básicos sobre a divisão no jogo de apostas: a fração que ele receberá do total, existe, tanto perdendo, quanto ganhando ou mesmo que o jogo seja interrompido, dependendo da situação do jogador no momento da interrupção, ou seja, das chances que ele tinha de vencer; e que, se no caso de apenas dois jogadores, ambos tiverem a mesma chance de vencer no instante que o jogo foi interrompido, deverão dividir o prêmio igualmente. Algumas das cartas podem ser vistas, com tradução, em Calabria (2013).

Pascal explica que o número de casos favoráveis e o número total de um evento específico, é o que determina a divisão das apostas. "[...] No entanto, se eles estão disputando dois jogos e com uma pontuação de 1 a 0, ou disputando três jogos com os pontos de 2 a 1, ou competindo 11 jogos com pontos de 10 a 9, o resultado da divisão das apostas, no momento da interrupção do jogo, deverá, em todos os casos, ser a mesma. Este é um dos princípios de Pascal." (CALABRIA, 2013, p.44). Além das cartas, Pascal publicou o Tratado do Triângulo Aritmético, relacionando o cálculo da probabilidade as 19 propriedades contidas nele, o qual ficou equivocadamente, conhecido como Triângulo de Pascal.

Segundo Calabria (2013), Chistiaan Huygens, teve acesso as correspondências trocadas entre Fermat e Pascal, além de ser o primeiro a publicar de forma sistemática a divisão de apostas, utilizando regras e desenvolvendo a ideia de expectativa, que pra ele, consistia no valor médio que uma pessoa ganharia, caso jogasse este mesmo jogo por diversas vezes. Ele publicou esses resultados juntamente com exercícios sobre retirada de bolas coloridas. Exercícios esses, que foram resolvidos e explicados posteriormente por James Bernoulli (1654-1705), desenvolvendo princípios de permutação e combinação, além de aplicar o estudo da probabilidade a situações morais e econômicas. Os estudos foram ainda aprofundados por Abraham de Moivre (1667-1754) e Pierre Simon Laplace (1749-1827), após as publicações do último, a probabilidade ganhou o interesse de diversos nomes conhecidos na Matemática, como Gauss (1777-1855), Euler (1707-1783), Poisson (1781-1840) e Lebesgue (1875-1941).

Vejamos agora, um pouco da biografia de alguns dos estudiosos da probabilidade citados neste capítulo.

1.1 Cardano

Nascido em Roma, no início do século XVI. Optou os 15 anos por fazer medicina, mas como não teria condições financeiras de se manter no curso, lecionava astronomia, geometria e alquimia, além de escrever horóscopos e participar de jogos de apostas, onde acumulou dinheiro suficiente para custear sua formação. Percebendo a aptidão para jogos, dedicou-se ao estudo da probabilidade nos jogos de azar. Cem anos após sua morte, foi publicado um tratado em 1663, denominado *O livro dos jogos de azar* (TOMAZ, 2007).

1.2 Fermat

Natural de Beaumont de Lomagne, em 1601, pôde se dedicar aos estudos, pois seus pais, comerciantes, tinham uma boa condição financeira. Estudou monastério franciscano e formou-se em direito. Conselheiro do parlamento de Toulose e da Câmara de Requerimentos, aos 30 anos, dedicava-se à Matemática nas horas vagas. Temas como cálculo infinitesimal, geometria analítica e teoria da probabilidade, além da Teoria dos Números, a qual mais contribuiu. A principal contribuição foi o conhecido "Último Teorema de Fermat", enunciado em 1637 (PEREIRA, 2019).

1.3 Pascal

Nascido em 1623, em Clermont Ferrand na França. Filho de professor de Matemática, desde cedo mostrou aptidão a disciplina. Aos 16 anos, apresentou um trabalho sobre geometria projetiva, onde continha o hexágono místico de Pascal, em uma das reuniões que ia com seu pai. Publicou ainda trabalhos sobre seções cônicas, pressão atmosférica e existência do vácuo, antes de começar os estudos sobre aritmética e probabilidade. Publicou em 1654, o "Tratado sobre o Triângulo Aritmético" em Matemática além de contribuir com o "Tratado do equilíbrio dos líquidos", que conhecemos como Princípio de Pascal, na Física. Ainda arrumou tempo para a invenção da primeira calculadora básica, a Pascaline. Faleceu em 1662 (CALABRIA, 2013).

1.4 Huygens

Holandês, nascido em Haia, em 1629. Estudou direito e Matemática, fazendo publicações sobre quadratura do círculo e depois sobre a Teoria da Probabilidade. Trabalhou com polimento de lentes, desenvolvendo um novo método de fazê-lo e com isso, passou a observar a lua, publicando depois uma obra as suas fases. O relógio de pêndulo foi patenteado por ele, ficando conhecido por essas invenções como o maior mecanicista do século XVII (CALABRIA, 2013).

Capítulo 2

Conhecendo a OBMEP

As informações presentes nesse capítulo são pautadas em OBMEP (2020a). A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC.

Identificando talentos na área de matemática desde 2005, a OBMEP tem como objetivos principais:

- Promover e estimular o estudo da Matemática;
- Auxiliar a educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Reconhecer estudantes prodígios, incentivando seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Contribuir com o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Propor uma maior integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio, a OBMEP contou no ano de 2019 com mais de 18 milhões de alunos participantes da olimpíada.

Vejamos abaixo alguns programas criados pela OBMEP, com os sites eletrônicos para quem quiser conhecê-los mais.

PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA JR. (**PIC**) : Voltado aos medalhistas da OBMEP, o PIC é composto por professores em polos espalhados pelo país, com intuito de despertar interesse dos discentes pela Matemática e ciências em geral. Os alunos classificados têm então a oportunidade de participar da plataforma, onde podem encontrar apostilas, vídeo aulas, tarefas e fóruns de dúvidas. Os alunos tem encontros mensais em universidades vinculadas a OBMEP, onde são avaliados e caso se mantenham no programa recebem um auxílio financeiro, fornecido pela CAPES. Mais informações sobre o PIC podem ser obtidas em: www.obmep.org.br/pic.htm.

PORTAL DO SABER :Com diversos materiais de apoio aos estudantes, O Portal do Saber da OBMEP tem por objetivo preencher possíveis lacunas no aprendizado dos estudantes, inclusive ofertando temáticas que não fazem parte do currículo no Ensino Fundamental e Ensino Médio, através de vídeo aulas. Mais informações podem ser obtidas em: portaldosaber.obmep.org.br.

OBMEP NÍVEL A : Voltada para alunos do 4º e 5º anos do ensino fundamental das escolas públicas, a olimpíada teve sua 1ª edição no ano de 2019, com previsão de ocorrer no 2º semestre de 2021, no mesmo formato da edição anterior. Mais informações em: www.obmep.org.br/informacoesNivelA.DO.

BANCO DE QUESTÕES E PROVAS ANTIGAS : Uma plataforma com questões similares as da OBMEP, voltada para os discentes se prepararem para as próximas edições, através do auxílio de vídeos e soluções. Os alunos ainda podem filtrar as questões por ano, nível, fase ou tema. Mais informações em: www.obmep.org.br/provas.htm.

PORTAL CLUBES DE MATEMÁTICA : Um lugar para encontrar outros amigos com os mesmos objetivos: se preparar para a OBMEP! Com desafios e competições semanais que podem ser acessados em: clubes.obmep.org.br.

POTI – POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO : Como todo atleta olímpico precisa de treinamento, na OBMEP não é diferente. Os mais de 60 polos presenciais espalhados pelo Brasil, oferecem treinamento intensivo na preparação de alunos do 8º e 9° ano e Ensino Médio que tem a oportunidade de assistir aulas de professores capacitados pela OBMEP. Para os alunos que não residem em uma das cidades sedes, existe a possibilidade de assistir remotamente, através dos polos virtuais. Mais informações em: poti.impa.br.

PICME - PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E MESTRADO: Com parcerias com a CNPq (Iniciação Científica) e com a CAPES (Mestrado), estudantes universitários podem fazer cursos concomitantes com a graduação. Um belo exemplo é Arthur Avila, brasileiro vencedor da medalha Fields, que foi medalhista da OBMEP e fez mestrado no IMPA junto com a graduação (CAIRES, 2020). Mais informações em: picme.obmep.org.br/.

PROGRAMA OBMEP NA ESCOLA : Um curso voltado a habilitação de docentes para exercerem nas escolas cursos extraclasse aos alunos interessados em participar das próximas OBMEPs. O docente recebe um auxílio financeiro do IMPA, enquanto leciona um total de duas horas semanais no contraturno de uma turma de vinte alunos, escolhidos por ele, dentre os discentes da escola. O objetivo, além de tornar a OBMEP mais próxima dos estudantes, é oportunizar a obtenção de medalhas para a instituição, promovendo a aprendizagem de matemática na sua comunidade escolar. Mais informações em: www.obmep.org.br/OBMEP_na_escola.html.

Desde 2018 algumas das maiores universidades públicas do Brasil, passaram a dar vagas em cursos específicos de Ensino Superior, entre elas Unicamp, USP e Unesp, mediante conquistas em competições estudantis como a OBMEP. Uma excelente oportunidade para aqueles alunos que se dedicaram em uma disciplina específica a ponto de atingir um certo domínio e por se aprofundar tanto em um assunto, teriam dificuldades para ter um resultado competitivo nos vestibulares das mesmas instituições de ensino.

Capítulo 3

Combinatória e probabilidade

3.1 BNCC

Neste capítulo serão abordadas as temáticas de combinatória e probabilidade no ensino fundamental e ensino médio, conforme a BNCC. Veremos como esses conceitos são trabalhados desde as séries iniciais e sua evolução com o passar dos anos/séries. Antes de estuda-los, vejamos como foram as mudanças até aqui, na BNCC, que regulamenta todos os temas da educação básica.

Desde a constituição de 1988, o Brasil tenta inserir uma regulamentação para a educação; a constituição foi o primeiro espaço que o regimento da educação teve nas leis brasileiras. Em dezembro de 1996, é aprovada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), tínhamos então, o primeiro documento legal que tratava apenas de educação e seus desdobramentos. Em 1997, são consolidados, em dez (10) volumes, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Fundamental, do 1º ao 5º ano, apontados como referenciais de qualidade para a educação brasileira; foram feitos para auxiliar as equipes escolares na execução de seus trabalhos, sobretudo no desenvolvimento do currículo, que claro, ainda passaria por diversas mudanças. Entre 1998 e 2000, são lançados documentos similares aos PCNs, mas voltados ao período do 6° ao 9° ano e ao Ensino Médio, respectivamente. Homologado em 2008 e vigente até 2010, o Programa Currículo em Movimento veio para unir as três categorias do ensino básico em um só documento e se adequar aos novos modelos de ensino. Em março de 2010, houve a Conferência Nacional de Educação (CONAE), uma reunião com diversos especialistas em educação discutindo a necessidade da criação de uma base nacional curricular. De 2010 à 2012, surgem gradativamente, documentos orientadores para a implementação de uma nova diretriz, que só em 2012 com o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) e as ações do Pacto e define suas Diretrizes Gerais, documento similar e vinculado aos interesses do Ensino Médio foi lançado em 2013 (BRASIL, 2018).

Uma nova CONAE, organizada afora pelo Fundo Nacional de Educação (FNE), reafirma em 2014 a necessidade de criação de uma base nacional curricular. Depois de discutida finalmente por quem é diretamente afetado por estes documentos (professores, alunos e coordenadores), em 16 de setembro de 2015, a 1ª versão da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) é disponibilizada. Ainda passaria por outras duas versões até ser homologada em dezembro de 2017, isso para o Ensino Fundamental, pois a implementação para o ensino médio passou também por discussões e sugestões de ideias por parte da sociedade até sua homologação em dezembro de 2018. A partir das respectivas homologações da BNCC, o governo federal deu prazo de dois anos para que os estados e municípios elaborem o seu próprio currículo, pautados na BNCC, mas podendo se adequar às diversidades do nosso país. A BNCC de 2017, para o Ensino Fundamental (E.F.), define que a temática Probabilidade e estatística, seria obrigatória desde o 1° ano do E.F (BRASIL, 2018).

Questões sobre problemas de contagem, devem, inicialmente, estar restritos àquelas cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles que utilizam dos princípios aditivos e multiplicativos. Sobre o estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a concepção de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade é baseado no conceito de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral (BRASIL, 2017).

Nas tabelas abaixo, temos os conceitos de Combinação e de Probabilidade no Ensino Básico durante o Ensino Fundamental anos iniciais, conforme documento da BNCC.

Tabela 3.1: Probabilidade - Ensino Fundamental - Anos iniciais

	Probabilidade: Objeto(s) de estudo/habilidade(s)
1° ANO E.F.	Noção de acaso: • (EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.
2° ANO E.F.	Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano: • (EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.
3° ANO E.F.	Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral: • (EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
4° ANO E.F	Análise de chances de eventos aleatórios: • (EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
5° ANO E.F.	Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios; Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis: • (EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não. • (EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3.2: Combinatória - Ensino Fundamental - Anos iniciais

	Combinatória: Objeto(s) de estudo/habilidade(s)
1° ANO E.F.	-
2° ANO E.F.	-
3° ANO E.F.	-
4° ANO E.F.	Problemas de contagem: • (EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
5° ANO E.F.	Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?": • (EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem (BRASIL, 2017).

Nas tabelas abaixo, temos os conceitos de Combinação e de Probailidade no Ensino Básico durante o Ensino Fundamental anos finais, conforme documento da BNCC (Base nacional comum curricular).

Tabela 3.3: Probabilidade - Ensino Fundamental - Anos finais

	Probabilidade: Objeto(s) de estudo/habilidade(s)
6° ANO E.F.	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável; Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista). • (**EF06MA30**) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
7° ANO E.F.	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências: • (**EF07MA34**) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
8° ANO E.F.	Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral: • (**EF08MA22**) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
9° ANO E.F.	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes: • (**EF09MA20**) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3.4: Combinatória - Ensino Fundamental - Anos finais

	Combinatória: Objeto(s) de estudo/habilidade(s)
6° ANO E.F.	-
7° ANO E.F.	-
8° ANO E.F.	O princípio multiplicativo da contagem: • (**EF08MA03**) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
9° ANO E.F.	-

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na tabela abaixo, temos os conceitos de Combinação e de Probabilidade no Ensino Básico durante o Ensino Médio, conforme documento da BNCC.

Observação: O Ensino Médio não está com os conteúdos separados por série, pois isso cabe a cada Estado, individualmente, adequando as habilidades e conhecimentos às séries que julgar conveniente, conforme a resolução (BRASIL, 2017).

Tabela 3.5: Combinatória e Probabilidade - Ensino Médio

	Combinatória: Competência(s) específica(s)/habilidade(s)	Probabilidade: Competência(s) específica(s)/habilidade(s)
ENSINO MÉDIO	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente: • (**EM13MAT310**) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.	Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático: • (**EM13MAT311**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades. • (**EM13MAT312**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. • (**EM13MAT511**) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Análise combinatória

Vejamos agora, alguns conceitos necessários para o estudo da probabilidade, todos esses conceitos estão presentes na BNCC e são vistos diversas vezes pelos alunos durante a educação básica, eles serão utilizados depois para resolução de exercícios da OBMEP. As definições e exemplos utilizados nessa sessão foram baseadas em Morgado (2016).

Observação: A Teoria dos Conjuntos, deve ter sido vista, com realização de exercícios em sala de aula para que o aluno consiga um melhor entendimento deste conteúdo.

Princípio aditivo: Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Em outras palavras, se as decisões d_1 e d_2, que podem ser tomados de x e y maneiras, respectivamente, não implicam uma na escolha da outra, então o número de maneiras de serem tomadas as duas decisões é $x + y$.

Exemplo. Maria possui 3 brincos e 5 pulseiras, quantas joias ela possui?

Solução: Como brincos e pulseiras são conjuntos distintos, ela possui $3 + 5 = 8$ joias.

Princípio multiplicativo: Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$.

Em termos de conjunto, dizemos que se um conjunto de escolhas A tem m elementos e um conjunto de escolhas B tem n elementos, então o conjunto de escolhas de A e B é representado por $A \times B$, cuja cardinalidade é $\#(A \times B) = m.n$.

Exemplo. Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, branco e cinza, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?

Solução: A primeira listra pode ser colorida de 3 modos, a segunda de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na primeira listra), a terceira listra de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na segunda listra) e a quarta de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na terceira listra) e quarta de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na terceira listra). A resposta é $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

Exemplo. O conjunto A possui 4 elementos e o conjunto B possui 7 elementos. Quantas são as funções $f : A \to B$? Quantas são as funções injetoras $f : A \to B$?

Solução: Como temos de associar cada elemento de A a um único elemento de B, para o 1° elemento de A, temos 7 opções, para o 2° temos 7 opções, assim como para o 3° e 4° elementos de A. Logo, teremos: $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$ funções.

Agora, se elas forem injetoras, não podemos ter um elementos de B associado a dois elementos distintos em A, desta forma, para o 1° elemento de A, temos 7 opções, para o 2° temos 6 opções, para o 3° teremos 5 e para o 4° elemento temos 4 opções. Logo, teremos um total de: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ funções injetoras.

Permutação simples: Dados n objetos distintos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de quantas formas é possível ordená-los?

A permutação, como o próprio nome diz, nos auxilia nos problemas sobre troca de posição. Por exemplo, para as letras A, B e C temos 6 diferentes ordenações: $\{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$. Para o caso geral, de n elementos distintos, temos n opções para escolher o elemento que ocupará a 1ªposição, depois $n - 1$ opções para escolher o elemento da 2ªposição e assim sucessivamente, até termos 1 opção para o elemento que vai ocupar a n-ésima posição, assim temos que o número de modos de ordenar n objetos distintos é,

$$n \cdot (n-1) \cdots (1) = n!.$$

Exemplo. Quantos são os anagramas da palavra *PRÁTICO*?

Solução: Cada anagrama de *PRÁTICO* nada mais é que uma ordenação das letras P, R, A, T, I, C, O. Assim o número de anagramas de *PRÁTICO* é $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Exemplo. Se A é um conjunto com n elementos, quantas são as funções $f : A \to A$ bijetoras?

Solução: Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ os elementos de A. Daí, para o elemento a_1 como domínio, temos n opções para a imagem $f(a_1)$. Como a função é bijetora, ela é particularmente injetora, então, elementos distintos do domínio não podem ter a mesma imagem, assim, para a_2, teremos $n-1$ opções para a imagem $f(a_2)$ e assim sucessivamente, até que em a_n reste apenas 1 opção para a imagem $f(a_n)$. Logo, teremos

$$n \cdot (n-1) \cdots (1) = n! \text{ funções.}$$

Combinação Simples: De quantas formas podemos escolher p objetos distintos dentre n objetos distintos dados? Ou o análogo, quantos são os subconjuntos com p elementos do conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$?

Vejamos, cada um dos p elementos é denominado uma combinação simples de classe p dos n objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Daí, por exemplo, as combinações simples de classe 2 dos objetos a_1, a_2, a_3, a_4 são

$$\{a_1, a_2\}\ \{a_1, a_3\}\ \{a_1, a_4\}\ \{a_2, a_3\}\ \{a_2, a_4\}\ \{a_3, a_4\}.$$

Logo, o número de combinações é denotado por C_n^p, neste caso é dado por $C_4^2 = 6$. Uma outra notação usada para C_n^p é $\binom{n}{p}$.

Analisando esse resultado, temos: A escolha do 1° elemento podia ser feita de 4 formas e a do 2° de 3 formas. O que resultaria em $4 \cdot 3 = 12$. Porém, as combinações $\{a_1, a_2\}\ \{a_2, a_1\}$ são as mesmas, mas contamos como se fossem distintas. Em geral, na resposta 12, contamos cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos. Assim, como em uma combinação os elementos podem ser escritos em $P_2 = 2! = 2$ ordens, cada combinação foi contada 2 vezes. Segue que a resposta é $\frac{12}{2!} = 6$.

Abrangendo para um caso geral, com n elementos e subconjuntos com p elementos, temos

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-p+1)}{p!} \text{ modos,}$$

tal que $0 < p < n$, e $C_n^0 = 1$.

E multiplicando, numerador e denominador, por $(n-p)!$, obtemos:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \text{ modos de escolha.}$$

Exemplo. Edélcio é dono de uma escola e deseja contratar 3 pessoas para o mesmo cargo. Chegaram até ele, 5 currículos, de quantas formas ele pode escolher os 3 funcionários?

Solução: Como visto, temos 5 currículos, que serão escolhidos em subconjuntos com 3 em cada, daí

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \;\; \Rightarrow \;\; C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10.$$

Exemplo. Sejam $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as funções $f : I_m \to I_n$ estritamente crescentes?

Solução: Ao definirmos uma função qualquer satisfazendo tais condições, definimos uma imagem, que nada mais é do que um subconjunto do contradomínio. Ou seja, cada função f estritamente crescente da origem à uma combinação de m elementos do contradomínio $\{f(1), f(2), \ldots, f(m)\}$ e vice versa, dado uma combinação $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ no contradomínio existe uma única forma de ordenar eles de maneira crescente, ou seja, essa combinação esta associada a uma imagem de uma única função f. Resumindo, existe uma bijeção entre as funções estritamente crescentes de I_m e I_n e o número de combinações de m elementos agrupados n a n, ou seja o número pedido é,

C_m^n funções estritamente crescentes.

Arranjo simples: Na combinação simples de n elementos agrupados p a p, definida a pouco como $C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$, os agrupamentos feitos não diferem um dos outros caso os elementos mudem de posição dentro do agrupamento. No caso do Arranjo, quando mudamos a ordem desses elementos geramos um novo agrupamento, no mesmo caso, como temos p elementos juntos, eles podem trocar de posição $P_p = p!$ vezes. Assim, denominamos o agrupamento e p elementos dentro os n disponíveis, quando a ordem importa, como

$$A_n^p = C_n^p \cdot p! = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \cdot p! \;\Rightarrow\; A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemplo. Nayara é professora e decide escolher 3 alunos para apresentar um projeto na feira de Ciências da escola. Um deles fará a apresentação dos fatos históricos, outro vai explicar o fenômeno como vemos hoje e o último vai mostrar quais são as expectativas dos estudos sobre o futuro deste tema. Se ela tem 20 alunos, de quantas formas essa escolha pode ser feita?

Solução: Como as funções dos 3 alunos na apresentação serão distintas, a ordem de escolha importa. Logo, queremos arranjar 3 dos 20 alunos disponíveis, daí

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \;\Rightarrow\; A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840 \text{ formas de escolha.}$$

Exemplo. (PUC-SP 2018/1) A secretária de um médico precisa agendar quatro pacientes, A, B, C e D, para um mesmo dia. Os pacientes A e B não podem ser agendados no período da manhã e o paciente C não pode ser agendado no período da tarde. Sabendo que para esse dia estão disponíveis 3 horários no período da manhã e 4 no período da tarde, o número de maneiras distintas da secretária agendar esses pacientes é:

(A) 72 (B) 126 (C) 138 (D) 144

Solução: Primeiramente, os pacientes A e B devem ser tratados a tarde e o paciente C de manhã. Já o paciente D, não tem restrição, vamos então separar o problema em dois casos:

Caso 1. Paciente D é atendido de manhã: Temos então, 2 pacientes de manhã para 3 horários, onde a ordem de encaixe deles nos respectivos horários gera um atendimento diferente, então de manhã temos A_3^2 formas de encaixe. Já para o período da tarde, restaram 2 pacientes e 4 horários disponíveis, então temos A_4^2 possibilidades. Então, pelo princípio multiplicativo, temos $A_3^2 \cdot A_4^2 = 6 \cdot 12 = 72$ formas de atender.

Caso 2. Paciente D é atendido a tarde: Temos então, 3 horários de manhã para o paciente C. No período da tarde, restam 3 paciente e 4 horários disponíveis, assim $A_4^3 = 24$. Então, pelo princípio multiplicativo, temos $3 \cdot 24 = 72$ formas de atender.

Portanto, pelo princípio aditivo, temos $72 + 72 = 144$ formas distintas de realizar os atendimentos, letra (D).

Permutação com repetição: Quantos anagramas existem com a palavra "*BANANA*"?

Desde já, não é $P_6 = 6!$, pelo fato da palavra conter letras repetidas, no caso, três letras "A" e duas letras "N", e quando essas letras são trocadas de posição entre si, A com A e/ou N com N, não temos um novo anagrama, mas o mesmo já obtido.

Vejamos então como resolver esse impasse, temos três A, dois N e um B, se as letras fossem todas diferentes, teríamos $P_6 = 6!$, mas como os A são iguais, contamos cada anagrama $3! = 6$ vezes e como os N são iguais, contamos cada anagrama $2! = 2$ vezes, logo

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60 \text{ anagramas.}$$

Abrangendo a ideia para um caso geral, seja $\alpha + \beta + \cdots + \kappa + \gamma = n$, onde as letras que se repetem são $\alpha, \beta, \ldots, \kappa$ e γ, então teremos um total de

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\kappa,\gamma} = C_n^{\alpha} \cdot C_{n-\alpha}^{\beta} \cdots C_{n-\alpha-\beta-\cdots-\kappa}^{\gamma} = \frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!} \cdot \frac{(n-\alpha)!}{\beta!(n-\alpha-\beta)!} \cdots \frac{(n-\alpha-\beta-\cdots-\kappa)!}{\gamma!(n--\alpha-\beta-\cdots-\kappa-\gamma)!}$$

$$\Rightarrow\ P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\kappa,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\gamma!0!} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\gamma!}.$$

Exemplo. Quantos são os anagramas da palavra "*MATEMÁTICA*"?

Solução: Como temos 3 letras A, 2 letras M, 2 letras T, 1 letra C, 1 letra I e 1 letra E, a resposta é

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

Exemplo. Quantos são os números de 7 dígitos, maiores que 6000000, podem ser formados usando apenas os algarismos $1, 3, 6, 6, 6, 8, 8$?

Solução: Primeiramente, para ser maior do que 6000000 com os dígitos disponíveis ele obrigatoriamente deve começar por 6 ou por 8, vejamos esses casos separados.

Caso 1. Começando por 8: Temos P_6^3 para alocar os algarismos restantes, já que o 6 se repete três vezes, daí $1 \cdot P_6^3 = \frac{6!}{3!} = 120$.

Caso 2. Começando por 6: Temos $P_6^{2,2}$ para alocar os dígitos restantes, pois os algarismos 8 podem trocar de lugar e os dois algarismos 6 restantes também podem se permutar, daí $1 \cdot P_6^{2,2} = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$.

Portanto, teremos $120 + 180 = 300$ números satisfazendo a condição.

Combinação com repetição (completa): De quantas formas é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores?

Desde já, a resposta não é $C_7^4 = 35$, pois este é um resultado quando queremos escolher 4 sabores distintos dentre os 7 sabores disponíveis, porém, na questão levantada, podemos sim repetir os sabores, então essas possibilidades não podem ser ignoradas. Representamos a resposta desse exercício como CR_7^4 que é o número de combinações com repetição de classe 4 de 7 objetos, então, essa representação é usada quando podemos repetir os elementos já escolhidos, diferente da combinação simples.

Vamos pensar em CR_n^p ainda usado o exemplo da compra de sorvetes. Para isso, vamos precisar escolher as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_7$, onde cada variável x_i é a quantidade de sorvetes comprados daquele determinado sabor, ou seja, no nosso exemplo, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$, onde $0 \leq x_i \leq 4$, $1 \leq i \leq 7$. Para resolver isso, precisamos interpretar a equação como tendo 6 sinais "+" que separam as quantidades escolhidas de sorvete, que serão 4 (sejam eles distintos ou iguais), sendo assim, a quantidade de escolha dos sabores pode ser expressa por uma permutação dos 4 sabores escolhidos e dos 6 sinais "+", ou seja, P_{10} onde se repetem 4 vezes um objeto (sorvete) e 6 vezes o objeto "+", daí

$$P_{4+6}^{4,6} = P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4!6!} = C_{10}^{4}.$$

Logo, $CR_7^4 = C_{10}^4 = 210$.

Abrangendo a ideia para n sabores de sorvete e p bolas escolhidas CR_n^p, ou seja, para expressar o número de soluções não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$, onde teríamos p bolas e $n-1$ sinais "+", teremos

$$CR_n^p = C_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1}^{p}.$$

Portanto, $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Exemplo. De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes em uma loja onde há 5 tipos de refrigerantes?

Solução: Supondo que os tipos são: A, B, C, D e E, como podemos comprar até e vezes o mesmo refrigerante quer dizer que podemos repetir essa escolha, logo, trata-se de uma combinação com repetição, daí

$$CR_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = 35.$$

Exemplo. Quantas são as soluções inteiras não-negativas da inequação $x + y + z \leq 5$?

Solução: A soluções podem ser dividas em diversos grupos: onde $x + y + z = 5; x + y + z = 4; ...; x + y + z = 0$.

Logo, temos: $CR_3^5 + CR_3^4 + CR_3^3 + CR_3^2 + CR_3^1 + CR_3^0 = C_7^5 + C_6^4 + C_5^3 + C_4^2 + C_3^1 + C_2^0 = 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56$.

3.2.1 Outros métodos de contagem

Princípio da Inclusão-Exclusão: É uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos. Na sua versão mais simples, ele afirma que,

- Para dois conjuntos, A e B:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

O que é facilmente verificável, pois, se $\#(A \cap B) \neq 0$, então quando fazemos a soma $\#A + \#B$, estamos somando a interseção duas vezes, por isso, subtraímos uma delas.

- Para a união de 3 conjuntos, A, B e C, teríamos:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

Logo, contamos os elementos dos três conjuntos (A, B e C) e ao fazer isso, estamos contando as interseções dois a dois duas vezes cada e a interseção dos três conjuntos três vezes. Depois subtraímos as três interseções dois a dois. Mas ao fazer isso, excluímos três vezes a interseção dos três juntos, que foi contado três vezes e retirada três vezes, resta somar esta, uma vez.

- De um modo geral, para n conjuntos, teríamos:

$$\#\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot S_n$$

onde, $S_1 = \sum_{i=1}^{n} \#(A_i)$, $S_2 = \sum_{l \leq i \leq j \leq n} \#(A_i \cap A_j)$, ...

Ou seja, o número de elementos da união, é obtido somando os números de elementos de cada conjunto, subtraindo os números de elementos da interseção das interseções dois a dois, somando os das interseções três a três, subtraindo os das interseções quatro a quatro etc. Essa demonstração será omitida neste trabalho por não ser o foco dele, porém, pode ser vista na integra em (MORGADO, 2016, p. 173-174).

Exemplo. Quantos são os anagramas da palavra *CAPÍTULO* que têm C em 1° lugar, ou A em 2° lugar ou P em 3° lugar ou I em 4° lugar?

Solução: Defina-se

A_1 = conjunto dos anagramas de *CAPÍTULO* que têm C em 1° lugar;

A_2 = conjunto dos anagramas de *CAPÍTULO* que têm A em 2° lugar;

A_3 = conjunto dos anagramas de *CAPÍTULO* que têm P em 3° lugar;

A_4 = conjunto dos anagramas de *CAPÍTULO* que têm I em 4° lugar;

Queremos calcular $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ e temos que:

$\#A_1 = \#A_2 = \#A_3 = \#A_4$ = n° de anagramas de *CAPÍTULO* que têm uma letra fixa = $7! = 5040$.

$\#\left(A_1 \cap A_2\right) = \#\left(A_1 \cap A_3\right) = \#\left(A_1 \cap A_4\right) = \#\left(A_2 \cap A_3\right) = \#\left(A_2 \cap A_4\right) = \#\left(A_3 \cap A_4\right)$ = n° de anagramas de CAPÍTULO que têm duas letras fixas = $6! = 720$.

$\#\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = \#\left(A_1 \cap A_2 \cap A_4\right) = \#\left(A_1 \cap A_3 \cap A_4\right) = \#\left(A_2 \cap A_3 \cap A_4\right)$ = n° de anagramas de CAPÍTULO que têm três letras fixas = $5! = 120$.

$\#\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right)$ = n° de anagramas de CAPÍTULO que têm 4 letras fixas = $4! = 24$.

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4 \cdot 5040 - 6 \cdot 720 + 4 \cdot 120 - 24 = 16296.$$

O Princípio das Gavetas de Dirichlet: Se n objetos forem colocados em no máximo, $n-1$ gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

Vejamos a prova desse resultado por absurdo, vamos então supor que em cada gaveta existe, no máximo, um objeto. Então o total de objetos colocados em todas as $n-1$ gavetas, será no máximo $n-1$ objetos, o que é um absurdo visto que tínhamos n objetos inicialmente.

Esse princípio é também conhecido como Princípio da Casa dos Pombos.

Exemplo. Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas aniversariam no mesmo mês.

Solução: Como temos 13 pessoas e 12 meses no ano, temos que o máximo de pessoas fazendo aniversário em meses distintos são 12, logo a 13° pessoa fará aniversário no mesmo mês que uma das 12 pessoas que fazem em meses distintos, assim, pelo Princípio de Dirichlet, ao menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo mês.

Exemplo. Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução: Podemos dividir o quadrado de lado em 2 em quatro quadrados de mesma área, eles terão dimensões 1x1 e portanto a diagonal de um desses quadrados, por Pitágoras, mede $\sqrt{2}$. Se colocarmos cada um dos quatro pontos em um desses quadrados, quando alocarmos o 5° ponto, teremos dois pontos dentro de um mesmo quadrado de lado 1, daí como a maior distância dentro de um quadrado é a sua diagonal, segue que a distância máxima entre eles será a distância da diagonal, que é $\sqrt{2}$.

3.3 Probabilidade

Nesta seção abordaremos alguns conceitos importantes da teoria de probabilidade que serão importantes para a resolução de exercícios nos capítulos seguintes, usamos como principais referências Morgado (2016) e Iezzi (1997).

Definição 3.3.1. Seja um experimento aleatório, com as seguintes características:

- Há um número finito (digamos n) de eventos elementares (casos possíveis). A união de todos os eventos elementares é o espaço amostral Ω.
- Os eventos elementares são igualmente prováveis.
- Todo evento A é uma união de m eventos elementares onde $m \leq n$.

$$\text{Probabilidade de } A = \mathrm{P}(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{m}{n}.$$

As propriedades a seguir, são consequências imediatas de definição acima.

1) Dado um espaço amostral Ω, então $P(\Omega) = 1$;

Comentário: Vamos supor que o espaço amostral Ω tenha n elementos. Daí, por definição, temos:

$$P(\Omega) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#(\Omega)}{\#(\Omega)} = \frac{n}{n} = 1.$$

2) $P(\emptyset) = 0$;

Comentário: Seja Ω o espaço amostral, como $\#(\emptyset) = 0$, então

$$P(\emptyset) = \frac{\#(\emptyset)}{\#(\Omega)} = 0.$$

3) Para todo evento $A, 0 \leq P(A) \leq 1$;

Comentário: Seja Ω o espaço amostral, então $\#(A) \leq \#(\Omega)$, daí

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} \leq \frac{\#(\Omega)}{\#(\Omega)} = 1 \;\Rightarrow\; P(A) \leq 1 \;(I).$$

E como A é um evento de Ω, então $\#(A) \geq 0$, então

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} \geq 0 \;\Rightarrow 0 \leq P(A) \;(II).$$

Segue por (I) e (II), que

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

4) Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Comentário: Vamos supor que $\#(A) = n$ e $\#(B) = m$ e o espaço amostral é Ω tal que $\#(\Omega) = z \geq n + m$, então

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#(\Omega)} = \frac{n+m}{z} = \frac{n}{z} + \frac{m}{z} = P(A) + P(B).$$

Exemplo. Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter 2 caras? Qual a probabilidade de obter pelo menos 2 caras?

Solução: Vamos indicar com H, cara e com T coroa. O espaço amostral é então

$$\Omega = \{(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH), (TTT)\}.$$

Donde, $\#(\Omega) = \text{casos poss\acute{\imath}veis} = 8$.

Seja A o evento "obter 2 caras" temos que,

$$A = \{(HHT), (HTH), (THH)\}.$$

Assim, $\#(A) = 3$ e portanto,

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{3}{8}.$$

Seja B o evento "obter pelo menos duas caras" temos que,

$$B = \{(HHT), (HTH), (THH), (HHH)\}.$$

Logo,

$$\#B = 4 \text{ e } P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo. Suponhamos que de n objetos escolhermos r ao acaso com reposição. Qual a probabilidade de que nenhum objeto seja escolhido mais de uma vez?

Solução: O número de casos possíveis é igual a n^r. Já a quantidade de casos favoráveis é dada por $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)$. Logo, a probabilidade é

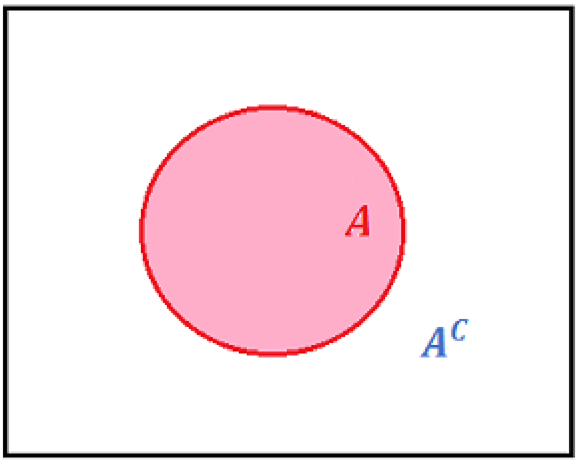
$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}{n^r}.$$

Uma aplicação interessante deste resultado é a seguinte: vamos supor que seja igual a probabilidade do aniversário de uma pessoa em qualquer dia do ano. Se tivermos r pessoas ao acaso, a probabilidade de que todas façam aniversário em dias diferentes é dada pela fórmula acima, onde $n = 365$.

Muitas vezes dado um evento A, fica mais fácil calcular $P(A^c)$ ao invés de $P(A)$. Para casos assim, temos o seguinte resultado que pode ser usado para o cálculo de $P(A)$ através de $P(A^c)$, ou o contrário.

Teorema 3.3.1. *Dado um evento A, $P(A^c) = 1 - P(A)$.*

Figura 3.1: "A" complementar



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Como $A \cap A^C = \emptyset$ e $A \cup A^C = \Omega$, pela propriedade 4), temos

$$P\left(A \cup A^C\right) = P(A) + P\left(A^c\right) \;\Rightarrow\; 1 = P(A) + P\left(A^c\right) \;\Rightarrow\; P\left(A^c\right) = 1 - P(A).$$

□

Exemplo. Uma urna contém 100 bolinhas numeradas de 1 a 100. Uma bolinha é escolhida e observado seu número. Admitindo-se probabilidades iguais a $\frac{1}{100}$ para todos os eventos elementares, qual a probabilidade de:

a) Observarmos um número não múltiplo de 5?

Solução: Seja D o evento, o número é múltiplo de 5. Temos:

$$D = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100\}.$$

Daí, $P(D) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

O evento que nos interessa é D^C. Logo, $P\left(D^C\right) = 1 - P(D) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Exemplo. Uma moeda foi cunhada de tal forma que é 4 vezes mais provável sair cara do que coroa. Calcule as probabilidades de sair cara e coroa.

Solução: Seja C o evento cara e K o evento coroa, temos então que $P(C) = 4 \cdot P(K)$ e como os dois eventos são os únicos possíveis, segue que

$$P(C) + P(K) = 1 \;\Rightarrow\; 4 \cdot P(K) + P(K) = 1 \;\Rightarrow P(K) = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Daí,

$$P(C) = 1 - P(K) \;\Rightarrow\; P(C) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Probabilidade condicional: Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de B dado A é o número $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Representaremos este número pelo símbolo $P(B/A)$. Logo,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ onde } P(A) \neq 0.$$

Exemplo. Um grupo de pessoas está classificado da seguinte forma:

Tabela 3.6: Probabilidade condicional - Exemplo

	fala inglês	fala alemão	fala francês
homens	92	35	47
mulheres	101	33	52

Fonte: MORGADO, 2015.

Escolhe-se uma pessoa ao acaso. Sabendo que esta pessoa fala francês, qual a probabilidade de que seja homem?

Solução: Seja A o evento que ocorre se a pessoa escolhida fala francês e B se a pessoa escolhida é homem. Temos então

$$P(A) = \frac{47+52}{360} = \frac{99}{360} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{47}{360}$$

e portanto,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{47}{360}}{\frac{99}{360}} = \frac{47}{99}.$$

Exemplo. Considere um tetraedro, como um dado, com 4 faces numeradas de 1 a 4. Dois tetraedros, t_1 e t_2, são lançados sobre um plano e observam-se os números das faces nas quais se apoiam os tetraedros. Se a soma dos pontos obtidos for maior que 5, qual a probabilidade de que o número observado em t_1 seja 4?

Solução: Para obtermos um valor na soma maior que 5, esse valor poderá ser 6,7 ou 8, o que gera os pares de resultados em t_1 e t_2, respectivamente: $\{(1,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$, portanto são 6 possíveis combinações. Destas, $t_1 = 4$ em $\{(4,2),(4,3),(4,4)\}$.

Sejam então, B o evento: sair 4 em t_1 e A o evento: $t_1 + t_2 > 5$, temos

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(B/A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

No caso particular em que o fato de já ter acontecido o evento A, não interfere em nada nas chances de ocorrer o evento B, segue que a probabilidade condicional do evento B dado o acontecimento do evento A, é $P(B)$. Logo,

$$P(B/A) = P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A).$$

Definição. Dois eventos A e B são chamados independentes se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Essa definição pode ainda ser estendida para n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, eles serão independentes se $\forall k$ e $\forall i_1, i_2, \ldots, i_k$, tem-se

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Exemplo. Treze cartas são escolhidas de um baralho de 52 cartas. Seja A o evento "o rei de espada está entre as 13 cartas" e B o evento "as 13 cartas são do mesmo naipe". Prove que A e B são independentes.

Solução: Temos,

$$P(A) = \frac{C_{52}^{12}}{C_{52}^{13}} = \frac{51! \cdot 13! \cdot 39!}{12! \cdot 39! \cdot 52!} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4};$$

$$P(B) = \frac{4}{C_{52}^{13}};$$

Daí,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{C_{52}^{13}}.$$

Assim, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ou seja, A e B são de fato eventos independentes.

Exemplo. As probabilidades de que duas pessoas A e B resolvam um problema são, $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{3}{5}$. Qual a probabilidade de que:

a) ambos resolvam o problema?

Solução: Como os eventos A e B são independentes, pois uma pessoa saber resolver um problema não remete nada ao fato de outra pessoa também conseguir, temos

$$P(\text{ambos resolvam}) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}.$$

b) ao menos um resolva?

Solução: Nesse caso, temos 3 casos: A resolver o problema e B não, B resolver o problema e A não, ou ainda ambos resolverem, daí

$$P(\text{ao menos um resolva}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{15} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{15}.$$

c) nenhum resolva?

Solução: É preciso que A não resolva e que B também não consiga, daí

$$P(\text{nenhum resolva}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

Capítulo 4

Exercícios da OBMEP - Primeira Fase

Neste capítulo, serão abordados todos os exercícios da 1ª fase, de nível 3, de probabilidade da OBMEP, até o ano de 2019. Em alguns casos, haverá uma solução sugerida e comentários de que auxiliam o docente a exemplificar tais conceitos para os alunos durante as aulas, com o objetivo de que tenham uma melhor compreensão do conteúdo e sequencialmente melhores resultados nas próximas edições da competição. Todos os exercícios e as "soluções da OBMEP", foram retirados integralmente de OBMEP (2020b), já as "soluções sugeridas", bem como os comentários e sugestões, foram elaborados pelo autor.

Questão 19 (**N***í***vel 3 – 2005**) Brasil e Argentina participam de um campeonato internacional de futebol no qual competem oito seleções. Na primeira rodada serão realizadas quatro partidas, nas quais os adversários são escolhidos por sorteio. Qual é a probabilidade de Brasil e Argentina se enfrentarem na primeira rodada?

(A) $1/8$
(B) $1/7$
(C) $1/6$
(D) $1/5$
(E) $1/4$

Solução da OBMEP :
Alternativa B.
Como há 7 possíveis adversários para o Brasil, todos com a mesma chance de serem escolhidos, a probabilidade do adversário do Brasil na primeira rodada ser a Argentina é $1/7$.

Solução sugerida :
Vamos calcular a probabilidade de Brasil e Argentina não serem adversários. Como o Brasil tem 7 possíveis adversários e 6 nos interessam (Argentina não entra), a probabilidade de não se enfrentarem é $\frac{6}{7}$. Logo, como o exercício quer a probabilidade deles se enfrentarem de fato, e os eventos enfrentamento ou não enfrentamento são disjuntos, temos:

$$\begin{aligned} P(\text{enfrentamento}) &= 1 - P(\text{não ter enfrentamento}) \\ P(\text{enfrentamento}) &= 1 - \tfrac{6}{7} = \tfrac{1}{7}. \end{aligned}$$

Outra solução: A quantidade total de possíveis partidas é dada por $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 1$. Vejamos, aquelas em que Brasil e Argentina se enfrentam, primeiramente, temos 4 partidas para acontecer, então devemos escolher uma delas para o confronto. Depois, para que as duas seleções estejam nela temos uma possibilidade. Daí, para a próxima partida, vamos escolher 2 dos 6 times restantes, logo, C_6^2,restaram 4 equipes das quais vamos escolher outras duas, C_4^2 e as duas últimas equipes se enfrentaram. Assim, a probabilidade desejada vai ser dada por:

$$P = \frac{4 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2}{C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 1} = \frac{4}{4 \cdot 7} = \frac{1}{7}.$$

Comentários e sugestões : A ideia de fixar um time é peça chave para a resolução do exercício e vale a pena questionar o aluno do porque não é "contado duas vezes", pois poderíamos ter fixado a Argentina para analisar os casos.

Questão 16 (**N***í***vel 3 – 2006**) Uma caixa contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Dela são retiradas ao acaso duas bolas. Qual a probabilidade de que o maior número assim escolhido seja o 4?

(A) $1/10$
(B) $1/5$
(C) $3/10$
(D) $2/5$
(E) $1/2$

Solução da OBMEP :

Alternativa C.

O número de maneiras de retirarmos duas bolas da caixa é 10, o que podemos ver listando as possibilidades: $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\}\,\{2,3\}\,\{2,4\}\,\{2,5\}\,\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}$.O 4 é o maior número escolhido em $\{1,4\},\{2,4\}$ e $\{3,4\}$, ou seja, em 3 casos. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{3}{10}$.

Solução sugerida :

Podemos retirar da caixa os pares $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\}\,\{2,3\}\,\{2,4\}\,\{2,5\}\,\{3,4\}$ $\{3,5\},\{4,5\}$ ou seja, temos 10 pares distintos. Vamos calcular a probabilidade do 4 ser o menor, o que acontece quando escolhemos o par $\{4,5\}$,logo essa probabilidade é $\frac{1}{10}$. E ainda vamos calcular a probabilidade do 4 não pertencer ao par, assim os pares em que isso acontece são: $\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\}\,\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\}$,logo essa probabilidade é $\frac{6}{10}$. Logo, a probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} P(4 \text{ ser o maior}) &= 1 - (P(4 \text{ ser o menor}) + P(4 \text{ não pertencer ao par})) \\ P(4 \text{ ser o maior}) &= 1 - \left(\tfrac{1}{10} + \tfrac{6}{10}\right) = 1 - \tfrac{7}{10} = \tfrac{3}{10}. \end{aligned}$$

Outra solução: O número total de possibilidades de se retirar duas dentre as cinco bolas disponíveis é C_5^2. Primeiramente é preciso que o 4 seja sorteado, daí temos uma possibilidade. E para que ele seja o maior, o 5 não pode ser sorteado, logo, restam 3 opções. Assim, a probabilidade desejada é,

$$P(4 \text{ ser o maior}) = \frac{1 \cdot 3}{C_5^2} = \frac{3}{10}.$$

Comentários e sugestões : Pensar no complementar é uma saída muito usada em Combinatória e principalmente em Probabilidade, é importante sempre resolver os exercícios com os alunos pelos menos dessas duas formas (calculo direto e inverso) para que os alunos consigam identificar o complementar.

Questão 20 (**N***í***vel 3 – 2008**) Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual é a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

(A)$\frac{7}{8}$
(B)$\frac{5}{6}$
(C)$\frac{2}{3}$

(D) $\frac{5}{8}$
(E) $\frac{3}{4}$

Solução da OBMEP :
Alternativa D.
Pedro pode terminar o jogo de cinco maneiras diferentes, listadas abaixo:

1. cara, cara, cara - probabilidade $\frac{1}{8}$;
2. cara, cara, coroa - probabilidade $\frac{1}{8}$;
3. cara, coroa - probabilidade $\frac{1}{4}$;
4. coroa, cara - probabilidade $\frac{1}{4}$;
5. coroa, coroa - probabilidade $\frac{1}{4}$.

Ele terminar com coroa nas alternativas 2,3 e 5. Como as alternativas acima são mutuamente exclusivas, a probabilidade de sua última jogada ser coroa é $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$.

Solução sugerida :
Vamos calcular a probabilidade de ele terminar com cara. O que pode acontecer de duas formas:

- cara, cara e cara;
- coroa e cara.

Logo a probabilidade pedida pode ser obtida por,

$$\begin{aligned} P(\text{terminar em coroa}) &= 1-P(\text{terminar em cara}) \\ P(\text{terminar em coroa}) &= 1-(P(\text{cara, cara e cara})+P(\text{coroa e cara})) \\ P(\text{terminar em coroa}) &= 1-\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\right)=1-\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{8}. \end{aligned}$$

Comentários e sugestões : Na situação onde o professor resolve esse exercício em sala, é interessante deixar os alunos construírem os casos, mesmo que verbalmente; por não ser tão complexo, o discente consegue explanar ao menos algum caso, o que pode gerar nele interesse pelo conteúdo.

Questão 15 (**N*í*vel 3 – 2009**) Luciana tem três canetas pretas e três vermelhas. Ontem ela pegou, ao acaso, uma dessas canetas e colocou-a na bolsa. Hoje ela colocou uma caneta preta na bolsa. Se ela retirar uma dessas duas canetas da bolsa, sem olhar, qual a probabilidade de essa caneta ser preta?
(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{2}{3}$
(C) $\frac{3}{5}$
(D) $\frac{3}{4}$
(E) $\frac{4}{7}$

Solução da OBMEP :
Alternativa D.
Vamos denotar por P e V canetas pretas e vermelhas, respectivamente. Como o número de P e V que Juliana tem são iguais, as probabilidade de ela escolher uma P ou uma V ao acaso são ambas iguais a $\frac{1}{2}$. Podemos então fazer a seguinte tabela:

Tabela 4.1: Questão 15 - Resolução

caneta colocada na bolsa ao acaso	probabilidade	canetas na bolsa no dia seguinte	probabilidade de tirar uma P
P	$\frac{1}{2}$	P, P	1
V	$\frac{1}{2}$	V, P	$\frac{1}{2}$

Fonte: OBMEP, 2020b.

Como os eventos (P, P) e (P, V) são disjuntos, a probabilidade de Juliana tirar uma caneta preta da bolsa é

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Solução sugerida :

Sejam V e P, respectivamente, as canetas vermelha e preta. Vamos calcular a probabilidade de retirar uma caneta vermelha no dia seguinte. Ontem, quando escolhemos uma caneta ao acaso a chance de ser vermelha ou de tirar preta era de $\frac{3}{6}$. Vejamos abaixo, com a adição da caneta quais as chances de tirar vermelha,

$$\begin{aligned} P(V\,\text{hoje}) &= P(V\,\text{ontem}) \cdot P(V\,\text{hoje, tendo}\,V\,\text{e}\,P) + P(P\,\text{ontem}) \cdot P(V\,\text{hoje, tendo}\,P\,\text{e}\,P) \\ P(V\,\text{hoje}) &= \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot 0 = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Logo, como os eventos V e P são disjuntos, temos

$$\begin{aligned} P(P\,\text{hoje}) &= 1 - P(V\,\text{hoje}) \\ P(P\,\text{hoje}) &= 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

Comentários e sugestões : Importante sempre ressaltar nesse tipo de exercício os princípios usados (multiplicativo e aditivo) com os alunos, visto que na questão eles se misturam, pois são a base para compreensão do tema. O aluno que compreende que a próxima escolha dele é alterada se a primeira for e associa isso rapidamente ao princípio multiplicativo, está a par dos conceitos vistos.

Questão 12 (**N***í***vel 3 − 2011**) Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher ao acaso uma de suas blusas, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?

(A) $\frac{1}{9}$
(B) $\frac{1}{8}$
(C) $\frac{2}{9}$
(D) $\frac{3}{8}$
(E) $\frac{3}{4}$

Solução da OBMEP :

Alternativa C.

As amigas podem escolher suas blusas, sem restrição, de $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ maneiras diferentes. Por outro lado, se elas devem escolher blusas sem repetição de cores e uma delas já escolheu a sua entre as 3 possibilidades, uma outra terá apenas 2 possibilidades e a última apenas 1, num total de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades sem repetição de cores. Logo a probabilidade em questão é igual a $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

Solução sugerida :

Primeiramente vejamos que,

$$P(\text{todas diferentes}) = 1 - (P(\text{todas iguais}) + P(\text{duas iguais}))\,.$$

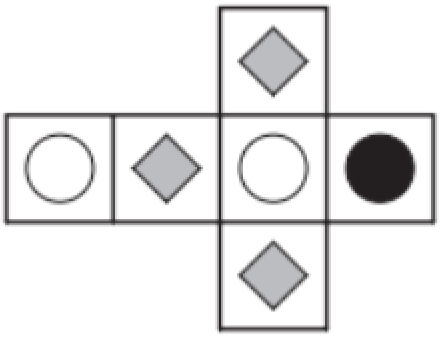
Daí, para que sejam todas iguais, precisamos escolher qual é essa cor, então temos 3 opções. Depois disso, a chance de que cada menina escolha a cor desejada é de $\frac{1}{3}$. Logo, $P(\text{todas iguais}) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Para escolher duas blusas iguais, temos novamente 3 opções de escolha da cor que repetirá; depois temos 2 opções de escolha da cor diferente; 3 opções de escolha da menina que usará essa cor distinta e como a probabilidade de que cada uma delas escolha a cor designada é de $\frac{1}{3}$, temos que a $P(\text{duas iguais}) = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{9}$, contudo, como visto acima:

$$\begin{aligned} P(\text{todas diferentes}) &= 1 - (P(\text{todas iguais}) + P(\text{duas iguais})) \\ P(\text{todas diferentes}) &= 1 - \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{6}{9}\right) = 1 - \tfrac{7}{9} = \tfrac{2}{9}. \end{aligned}$$

Comentários e sugestões : A solução sugerida, nos dá um modo de resolver o exercício que é atraente pro aluno, pois pensar em cada decisão e suas respectivas escolhas, são atividades cognitivas que fazemos o tempo todo.

Questão 14 (**Nível 3 – 2013**) Um dado foi construído usando a planificação da figura. Qual é a probabilidade de obtermos dois resultados diferentes quando jogamos esse dado duas vezes?

Figura 4.1: Questão 14 - Enunciado



Fonte: OBMEP, 2020b.

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{11}{18}$
(C) $\frac{2}{3}$
(D) $\frac{5}{6}$
(E) $\frac{31}{36}$

Solução da OBMEP :

Alternativa B.

As probabilidades de obter um quadrado cinza, um círculo branco ou um círculo preto em um lançamento desse dado são, respectivamente, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$. A probabilidade de obter dois símbolos iguais em dois lançamentos consecutivos é então $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$;segue que a probabilidade de obter dois símbolos distintos é $1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$.

Uma segunda solução é como segue. Os mesmos dois símbolos distintos podem ser obtidos de duas maneiras diferentes em lançamentos consecutivos. Logo, a probabilidade de obtermos um quadrado cinza e um círculo branco é $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, a probabilidade de obtermos um quadrado cinza e um círculo preto é $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ e a probabilidade de obtermos um círculo branco e um círculo preto é $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$. Assim, a probabilidade de obtermos dois símbolos diferentes em lançamentos consecutivos é $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$.

Solução sugerida :

Sejam CB, CP e QC, respectivamente, círculo branco, círculo preto e quadrado cinza, que tem probabilidades de saírem no lançamento do dado de $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{6}$. Logo,

$$\begin{aligned} P(\text{figuras diferentes}) &= P(CB).P(\text{não sair } CB)+ \\ & \quad P(CP).P(\text{não sair } CP) + P(QC).P(\text{não sair } QC) \\ P(\text{figuras diferentes}) &= \tfrac{2}{6} \cdot \left(1 - \tfrac{2}{6}\right) + \tfrac{1}{6} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{6}\right) + \tfrac{3}{6} \cdot \left(1 - \tfrac{3}{6}\right) \\ P(\text{figuras diferentes}) &= \tfrac{8}{36} + \tfrac{9}{36} + \tfrac{5}{36} = \tfrac{22}{36} = \tfrac{11}{18}. \end{aligned}$$

Comentários e sugestões : Quando a questão tem muitas formas de se resolver, onde nenhuma é muito mais extensa que as demais, é interessante pedir para que o aluno trace o caminho da resolução, pois podemos ter a sorte de ao menos dois alunos pensarem diferentes estratégias de resolução, e então podermos mostrar que ambas chegam ao mesmo lugar.

Questão 12 (**N$\acute{\imath}$vel 3 – 2015**) Na figura, o círculo das centenas está dividido em três setores, um semicircular e outros dois de mesma área. Cada um dos outros dois círculos estão divididos em setores de mesma área. As setas nesses círculos, quando giradas, param ao acaso em algum setor, determinando um número de três algarismos. Por exemplo, na figura elas determinam o número 331.

Figura 4.2: Questão 12 - Enunciado

Fonte: OBMEP, 2020b.

Qual é a probabilidade de que o número determinado pelas setas, após serem giradas, seja maior do que 260?

(A) 45%

(B) 55%

(C) 60%

(D) 65%

(E) 70%

Solução da OBMEP :

Alternativa B.

Na roleta das centenas, a probabilidade de a seta parar no setor marcado com o número 3 é de $1/2$, e a probabilidade de a seta parar no setor marcado com o números 1 ou 2 é de $1/4$ para cada um deles. Na roleta das dezenas, a probabilidade de a seta parar num dos setores com os números $1, 3, 4, 5,$ e 8 é de $1/5$ para cada um deles. O número determinado pelas setas, depois de giradas, é maior que 260 quando acontece alguma das situações seguintes:

- A seta da roleta das centenas para no setor marcado com 3, o que acontece com probabilidade $1/2$. Não importa o que ocorre nas casas das dezenas e das unidades.
- A seta da roleta das centenas para no setor marcado com 2 e a seta do setor das dezenas para no setor marcado com 8, o que acontece com probabilidade $(1/4)\cdot(1/5)$. Não importa o que ocorre na casa das unidades.

Assim, a probabilidade de que o número determinado pelas setas, após serem giradas, seja maior do que 260 é

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{20},$$

o que representa uma porcentagem de $50\%+5\%=55\%$ de probabilidade.

Solução sugerida :

Vejamos que $P(\text{maior que } 260)=1-P(\text{menor que } 260)$. Considerando as mesmas probabilidades iniciais: para os valores dentro das roletas da centena, dezena e unidade, segue que para obtermos um valor menor que 260, temos dois casos:

- Com o número 1 na centena e seguido de quaisquer valores na dezena e unidade, assim $P(1 \text{ na centena}) = \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}$.
- Com o número 2 na centena e seguido de uma dezena diferente de 8 e uma unidade qualquer, assim $P(2 \text{ na dezena e não ter 8 na dezena}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot 1=\frac{1}{5}$.

Assim, a probabilidade de desejada, pode ser obtida, como mostrado acima, por

$$\begin{aligned}
P(\text{maior que } 260) &= 1-P(\text{menor que } 260)\\
P(\text{maior que } 260) &= 1-(P(1 \text{ na centena})+P(2 \text{ na dezena e não ter 8 na dezena}))\\
P(\text{maior que } 260) &= 1-\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}\right)=\tfrac{11}{20}.
\end{aligned}$$

E aplicando uma regra de três básica, $\frac{11}{20}=55\%$.

Outra solução: Note que os círculos a princípio estão divididos em *3*, *5* e *10* partes. No entanto, para usar a abordagem escolhida para essa solução, vamos dividir o 1° círculo em 4 partes iguais, ao invés de 3 partes distintas como no enunciado. Como os círculos estão divididos em 4 ,5 e 10 partes, vamos analisá-los como se estivessem divididos em 20 partes, que é o MMC entre esses valores, sendo assim, no 1° círculo, o espaço destinado ao número 3 equivale a 10 partes (pois ele é metade do círculo), os números 1 e 2 equivalem a 5 partes cada. No 2° círculo, como ele possui 5 divisórias, cada uma equivale a 4 partes das 20 partições que fizemos e no 3° círculo que tem 10 divisórias, cada uma equivale a 2 partes das 20 partições iniciais. Portanto, a quantidade total que pode ser escolhida são $20\cdot 20\cdot 20$ partições distintas.

Começando por 3, teremos $\frac{20}{2}=10$ possibilidades e para os outros dois círculos independe, pois será maior que 260 de qualquer forma, então temos $10\cdot 20\cdot 20=4000$ possíveis partições que geram números maiores que 260 começando por 3.

Já no caso em que começa por 2, que representa $1/4$ do 1° círculo, teremos $\frac{20}{4}=5$ possibilidades, no 2° precisamos que seja o número 8 a sair, assim, como ele representa $1/5$ do círculo, teremos $\frac{20}{5}=4$ possíveis valores e no 3° círculo qualquer valor é válido então temos 20 opções de partições, assim, teremos $5\cdot 4\cdot 20=400$ partições que geram números maiores que 260. Logo, a probabilidade é dada por:

$$P(\text{maior que } 260)=\frac{4000+400}{20\cdot 20\cdot 20}=\frac{11}{20}=0,55=55\%.$$

Comentários e sugestões : Outro caso onde é importante deixar o aluno traçar caminhos de resolução, porque mesmo que não conclua esses pensamentos, é plausível de se imaginar que consiga dizer quais podem ser os números na centena e dezena. A ideia de usar o MMC nesses casos, quase sempre passa pela cabeça do aluno, porém muitas das vezes a falta de prática com a aplicação dessa ferramenta em uma situação problema acaba por inibir a tentativa.

Questão 16 (**N*í*vel 3 – 2016**) A professora decidiu premiar, por sorteio, dois dentre os 20 alunos da turma de João. Para o sorteio, 20 bolas com os números dos alunos foram colocadas em uma caixa. A primeira bola sorteada pela professora caiu no chão e se perdeu, sem que ninguém visse seu número. Ela decidiu fazer o sorteio das bolas restantes. Qual é a probabilidade de que João tenha sido um dos dois alunos sorteados?

(A) $\frac{1}{10}$
(B) $\frac{2}{19}$
(C) $\frac{19}{200}$
(D) $\frac{39}{380}$
(E) $\frac{37}{342}$

Solução da OBMEP :

Alternativa A.

Como a bolinha que caiu não foi encontrada, nada se pode afirmar sobre ela, isto é, se ela era de João ou não era, então, tudo se passa como se ela ainda estivesse na caixa. Portanto, a probabilidade de João vencer é de 2 chances em 20, ou seja, $^2/_{20} = {}^1/_{10}$.

Uma outra maneira de resolver o problema é dividi-lo em casos:

Caso 1. A bolinha que caiu era a de João. Neste caso, a probabilidade de João ganhar é 0, sua bolinha nunca será sorteada.

Caso 2. A bolinha que caiu não é a de João. Neste caso, a probabilidade de João ganhar é

$$\frac{19}{20} \cdot \left(\frac{1}{19} + \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} \right) = \frac{1}{10}.$$

De fato, a probabilidade da bolinha não ser a de João é de $^{19}/_{20}$. Para João ter ganhado, ou isto ocorreu já na primeira retirada (1 bola entre 19 no total) ou isto ocorreu da primeira vez (com probabilidade $^{18}/_{19}$) e a segunda bola retirada foi a de João (com probabilidade de $^1/_{18}$).

Solução sugerida :

Vamos calcular a probabilidade de João não ganhar o sorteio. Daí, Se a bola que caiu no chão foi a dele, é obvio que ele terá 100% de chance de perder no sorteio das duas bolas, mas se a primeira bola não foi dele, restam $\frac{18}{19}$ chances de perder na 1ª bola sorteada e $\frac{17}{18}$ na 2ª bola sorteada, logo, indicando o verbo pertencer, quando a bola era a de João, temos

$$\begin{aligned}
P(\text{não ganhar}) &= P(1^{\text{a}} \text{ pertencer}).P(\text{perder}|1^{\text{a}} \text{ pertencendo}) + \\
&\quad P(1^{\text{a}} \text{ não pertencer ao João}).P(\text{perder}|1^{\text{a}} \text{ não pertencendo}) \\
P(\text{não ganhar}) &= \tfrac{1}{20} \cdot 1 \cdot 1 + \tfrac{19}{20} \cdot \left(\tfrac{18}{19} \cdot \tfrac{17}{18}\right) \\
P(\text{não ganhar}) &= \tfrac{1}{20} + \tfrac{17}{20} = \tfrac{18}{20} = \tfrac{9}{10}.
\end{aligned}$$

Assim, como ganhar e não ganhar são eventos disjuntos, temos

$$\begin{aligned}
P(\text{ganhar}) &= 1 - P(\text{não ganhar}) \\
P(\text{ganhar}) &= 1 - \tfrac{9}{10} = \tfrac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Outra solução: Temos que as formas de escolher as 3 bolas dentre as 20 é dada por $A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18$, pois a ordem importa, já que uma das bolas será descartada. Dentre essas formas, João pode ganhar na 2ª bola sorteada (a 1ª sorteada que não caiu no chão), o que pode acontecer de $19 \cdot 1 \cdot 18$ modos, ou ele ainda pode ganhar na 3ª bola (a 2ª sorteada que não caiu no chão), o que pode acontecer de $19 \cdot 18 \cdot 1$ modos. Logo, a probabilidade é dada por

$$P(\text{ganhar}) = \frac{19 \cdot 1 \cdot 18 + 19 \cdot 18 \cdot 1}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

Comentários e sugestões : A questão pode gerar mais interesse por parte dos discentes se trouxermos uma caixa com as bolinhas para a sala e a partir daí fazer questionamentos, como “Se a sua bolinha caiu no chão, será que ainda dá pra ganhar?”. Sobre os modos de resolução, o mais usado pelos alunos deve ser o 2ª da OBMEP, mas é importante articular com o aluno a solução usando o arranjo simples.

Questão 19 (**N**$\mathit{\acute{\imath}}$**vel 3 – 2017**) Uma caixa contém nove bolas idênticas numeradas de 1 a 9. Uma bola é sorteada, seu número é anotado e a bola é devolvida à caixa. Repete-se esse procedimento mais duas vezes, anotando-se também os números da segunda e terceira bolas sorteadas. Qual é a probabilidade de que a soma dos números nas duas primeiras bolas sorteadas não seja um múltiplo de 3 e a soma nas três bolas sorteadas seja um múltiplo de 3?

(A) $\frac{2}{9}$
(B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{2}{3}$
(D) $\frac{6}{9}$
(E) $\frac{7}{9}$

Solução da OBMEP :

Alternativa A.

O espaço amostral desse experimento é formado pelas trincas (a, b, c) com a, b e c variando de 1 a 9, ou seja, $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ pontos equiprováveis.

Observe que um número natural pode ser múltiplo de 3 ou estar a uma distância 1 ou 2 do próximo múltiplo de 3. Por exemplo, 4 está a uma distância 2 de 6, e 5 está a uma distância 1 de 6.

Assim, a pode ser escolhido de 9 maneiras, e b não pode assumir 3 dos 9 valores, isto é, ou não pode assumir 3,6 e 9 ou não pode assumir 1,4 e 7, ou não pode assumir 2,5 e 8. Assim, b pode assumir 6 valores.

Para escolha de c, utilizamos o mesmo argumento, só que agora queremos que assuma um dos três valores que tornem o resultado da soma $a + b + c$ um múltiplo de 3.

Portanto, o número de pontos que satisfazem o enunciado é $9 \cdot 6 \cdot 3 = 162$, e a probabilidade é $\frac{162}{729} = \frac{2}{9}$.

Solução sugerida :

Para obtermos uma soma de dois números a e b, onde 3 não divide $a + b$, precisamos que $a + b$ deixe resto 1 ou 2 na divisão por 3, daí o terceiro número, c, deverá completar o que falta para ser múltiplo de 3, como nos casos abaixo:

- Caso 1: A soma $a + b$ deixa resto 1 e c deixa resto 2, ambos na divisão por 3, assim: $a + b = (1+3), (3+1), (2+2), (1+6), (6+1), (4+3), (3+4), (2+5), (5+2), (7+3), (3+7), (2+8),$ $(8+2), (4+6), (6+4), (9+1), (1+9), (5+5), (6+7), (7+6), (5+8), (8+5), (4+9), (9+4),$ $(7+9), (9+7), (8+8)$ são os valores que satisfazem a condição, dos $9 \cdot 9 = 81$ resultados possíveis e $c = 2, 5$ ou 8, dos 9 resultados possíveis, daí

$$P(\text{Caso 1}) = \frac{27}{9 \cdot 9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{81}{729}.$$

- Caso 2: A soma $a + b$ deixa resto 2 e c deixa resto 1, ambos na divisão por 3, assim: $a + b = (1 + 1), (1 + 4), (4 + 1), (2 + 3), (3 + 2), (1 + 7), (7 + 1), (2 + 6), (6 + 2), (3 + 5), (5 + 3), (4 + 4), (2 + 9), (9 + 2), (3 + 8), (8 + 3), (4 + 7), (7 + 4), (5 + 6), (6 + 5), (5 + 9), (9 + 5), (6 + 8), (8 + 6), (7 + 7), (8, 9), (9, 8)$ são os valores que satisfazem a condição, dos $9 \cdot 9 = 81$ resultados possíveis e $c = 1, 4$ ou 7, daí

$$P(\text{Caso 2}) = \frac{27}{9 \cdot 9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{81}{729}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P(3 \text{ não dividir } a + b \text{ e } 3 \text{ dividir } a + b + c) &= P(\text{Caso 1}) + P(\text{Caso 2}) \\
P(3 \text{ não dividir } a + b \text{ e } 3 \text{ dividir } a + b + c) &= \tfrac{81}{729} + \tfrac{81}{729} = \tfrac{162}{729} \\
P(3 \text{ não dividir } a + b \text{ e } 3 \text{ dividir } a + b + c) &= \tfrac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Comentários e sugestões : Fica mais fácil conseguir que os alunos construam a linha de raciocínio da solução sugerida se pedirmos para testarem números, até que percebam um padrão nas somas, padrão que na verdade está baseado nos restos. Conseguindo traçar esse parâmetro é provável que estabeleçam os dois casos que a questão precisa.

Capítulo 5

Exercícios da OBMEP - Segunda Fase

Neste capítulo, serão abordados todos os exercícios da 2^{a} fase, de nível 3, de probabilidade da OBMEP, até o ano de 2019. Em alguns casos, haverá uma solução sugerida e comentários de que auxiliam o docente a exemplificar tais conceitos para os alunos durante as aulas, com o objetivo de que tenham uma melhor compreensão do conteúdo e sequencialmente melhores resultados nas próximas edições da competição. Todos os exercícios e as "soluções da OBMEP", foram retirados integralmente de OBMEP (2020b), já as "soluções sugeridas", bem como os comentários e sugestões, foram elaborados pelo autor.

Questão 5 (**N*í*vel 3 – 2005**) Em um jogo cada participante recebe um cartão com 4 números distintos de 1 a 20, dispostos em duas linhas e duas colunas. Os números são sucessivamente sorteados de uma caixa que contém 20 bolas idênticas, que foram numeradas de 1 a 20. Ganha o participante que for o primeiro a ter sorteados dois números de uma linha ou dois números de uma coluna.

a) Os cartões $\frac{1}{12} \mid \frac{5}{3}$ e $\frac{1}{12} \mid \frac{5}{3}$ são equivalentes, porque se um deles ganha o jogo então o outro ganha também. Descreva todos os cartões equivalentes a $\frac{7}{9} \mid \frac{2}{4}$.

b) Qual a probabilidade de que o cartão $\frac{1}{12} \mid \frac{5}{3}$ ganhe logo na segunda bola sorteada?

Solução da OBMEP :

a) Dois cartões são equivalentes quando suas linhas e colunas são compostas pelos mesmos quatro pares de números. No caso do cartão $\frac{7}{9} \mid \frac{2}{4}$, os quatro pares são $(7,2),(2,4),(4,9)$ e $(9,7)$. Os outros cartões que possuem estes mesmos pares em suas linhas e colunas são:

$$\frac{9}{4} \mid \frac{7}{2}, \frac{4}{2} \mid \frac{9}{7}, \frac{2}{7} \mid \frac{4}{9}, \frac{9}{7} \mid \frac{4}{2}, \frac{2}{4} \mid \frac{7}{9}, \frac{7}{2} \mid \frac{9}{4} \text{ e } \frac{4}{9} \mid \frac{2}{7}.$$

b) Solução 1: Existem 20 maneiras de sortear a primeira bola. Uma vez sorteada a primeira bola, há 19 maneiras de sortear a segunda (pois não há números iguais nos cartões). Pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $20 \cdot 19$ maneiras de sortear os dois primeiros números. Este é o número total de casos possíveis para o experimento. Para que o cartão $\frac{1}{12} \mid \frac{5}{3}$ ganhe logo na segunda bola sorteada, os dois números sorteados devem formar uma de suas linhas ou colunas, em um número de quatro. Como há duas maneiras de sortear uma linha ou uma coluna, o número de casos favoráveis é 8. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{8}{20 \cdot 19} = \frac{2}{95}$.

Solução 2: Para que o cartão ganhe na segunda bola sorteada, a primeira bola deve ter um dos 4 números do cartão. Como há 20 bolas, a probabilidade de isto ocorrer é $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Além disso, o número da segunda bola deve ser um dos dois números que estão na linha ou na coluna do primeiro; como agora restam 19 bolas na caixa, a probabilidade disto ocorrer é $\frac{2}{19}$. Assim, a probabilidade do cartão ganhar logo na segunda bola sorteada é $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{19} = \frac{2}{95}$.

Solução 3: Podemos pensar nos dois primeiros números sorteados como um subconjunto de dois elementos dos números de 1 a 20, que são em um número de $\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!18!} = 10 \cdot 19$. Este é o número total de casos possíveis para este experimento. Por outro lado, o número de casos favoráveis é 4, que é o número de pares do cartão que estão na mesma linha ou na mesma coluna. Deste modo, a probabilidade pedida é $\frac{4}{10 \cdot 19} = \frac{2}{95}$.

Solução sugerida :

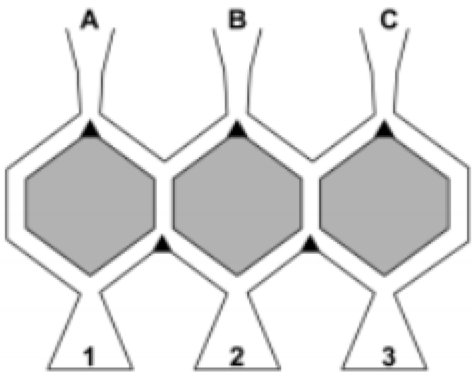
b) Vamos calcular a probabilidade de o cartão não ganhar nas duas primeiras rodadas. O que pode acontecer se nenhum dos 4 números for escolhido na primeira rodada $\left(P(\text{não sair na } 1^{\text{a}}) = \left(\frac{16}{20} \cdot 1\right)\right)$ ou se um dos quatro números sair na primeira, porém um dos dois que formam linha e coluna não sair na segunda $\left(P(\text{sair na } 1^{\text{a}} \text{ mas não sair na } 2^{\text{a}}) = \left(\frac{4}{20} \cdot \frac{17}{19}\right)\right)$, daí

$$\begin{aligned}
P(\text{ganhar na } 2^{\text{a}} \text{ rodada}) &= 1 - P(\text{não ganhar na } 2^{\text{a}} \text{ rodada}) \\
P(\text{ganhar na } 2^{\text{a}} \text{ rodada}) &= 1 - \left(\frac{16}{20} \cdot 1 + \frac{4}{20} \cdot \frac{17}{19}\right) \\
P(\text{ganhar na } 2^{\text{a}} \text{ rodada}) &= 1 - \frac{93}{95} = \frac{2}{95}.
\end{aligned}$$

Comentários e sugestões : O item b) possui diversas formas de resolução, a mais comum deve ser a 2^{a} por ser um linha de pensamento mais direta, porém é muito importante que o docente mostre ao aluno que existem várias formas de se fazer aquilo, visto que um discente pode ter pensado em uma das soluções mas não quis falar por imaginar estar errada. Para gerar entusiasmo com dos alunos pelo conteúdo, o professor pode aplicar a situação na sala, montando peças e fazendo as perguntas aos alunos sobre as probabilidades.

Questão 5 (**N***í***vel 3** – **2008**) No brinquedo ilustrado na figura, bolinhas são colocadas nas entradas A,B ou C e movem-se sempre para baixo, terminando em uma das caixas 1,2 ou 3. Ao atingir um dos pontos marcados com ▲, as bolinhas têm chances iguais de ir para cada um dos dois lados.

Figura 5.1: Questão 5 - Ilustração



Fonte: OBMEP, 2020b.

a) Se uma bolinha for colocada em C, em quais caixas ela pode parar? E se ela for colocada em B?

b) Se uma bolinha for colocada em A, qual a probabilidade de que lá vá parar na caixa 2? E se ela for depositada em B, qual é essa probabilidade?

c) Se colocarmos uma bolinha em cada entrada (uma de cada vez), qual a probabilidade de que, no final, haja uma bolinha em cada caixa?

Solução da OBMEP :

a) Uma bolinha colocada em C só poderá parar nas caixas 2 e 3; se colocada em B, ela poderá parar em qualquer uma das caixas.

b) Se ela parte de A, para chegar à caixa 2 ela deve ir para a direita tanto na primeira como na segunda bifurcação. Como a bolinha tem chances iguais de ir para a direita ou para a esquerda em cada bifurcação, a probabilidade dela chegar à caixa 2 é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ou 25%.

Se a bolinha for depositada em B, pelo mesmo raciocínio, ela poderá chegar à caixa 2 por dois caminhos diferentes: direita, esquerda ou esquerda, direita; ambos ocorrem com probabilidade $\frac{1}{4}$. Como esses eventos são disjuntos, a probabilidade de um deles ocorrer é a soma das probabilidades de cada evento individual. Logo, a probabilidade da bolinha sair de B e chegar à caixa 2 é $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ou 50%.

c) Existem três situações possíveis para que no final, haja uma bolinha em cada caixa. Descrevemos estas situações na tabela abaixo, onde (por exemplo) a primeira linha indica a situação em que uma bolinha colocada em A cai na caixa 1, outra colocada em B cai na caixa 2 e a última, colocada em C, cai na caixa 3.

Tabela 5.1: Questão 18 - Possíveis casos

	caixa 1	caixa 2	caixa 3
1^a	A	B	C
2^a	A	C	B
3^a	B	A	C

Fonte: OBMEP, 2020b.

Observando que os eventos "bola colocada em X caiu na caixa Y" são independentes e lembrando que a probabilidade de eventos independentes ocorrerem simultaneamente é igual ao produto das probabilidades de cada evento, a probabilidade de que cada uma dessas situações ocorra é:

$$1^a \ situação : \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{32};$$

$$2^a \ situação : \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64};$$

$$3^a \ situação : \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}.$$

Por outro lado, a ocorrência de cada uma das configurações acima é um evento disjunto dos outros dois; a probabilidade de ao menos um deles ocorrer é então igual à soma das probabilidades dos eventos individuais. Logo, a probabilidade de que haja uma bolinha em cada caixa é

$$\frac{9}{32} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}.$$

A título de observação, listamos abaixo as 12 possibilidades para a distribuição de três bolinhas pelas caixas e suas respectivas probabilidades.

Tabela 5.2: Questão 18 - Todas as probabilidades

caixa 1	caixa 2	caixa 3	probabilidade
A	B	C	$^{18}/_{64}$
A	C	B	$^{3}/_{64}$
A	BC	vazia	$^{6}/_{64}$
A	vazia	BC	$^{9}/_{64}$
AB	vazia	C	$^{9}/_{64}$
AB	C	vazia	$^{3}/_{64}$
B	C	C	$^{3}/_{64}$
B	AC	vazia	$^{1}/_{64}$
vazia	AB	C	$^{6}/_{64}$
vazia	ABC	vazia	$^{2}/_{64}$
vazia	AC	B	$^{1}/_{64}$
vazia	A	BC	$^{3}/_{64}$

Fonte: OBMEP, 2020b.

Solução sugerida :

c) Vejamos as probabilidades das bolinhas terem saído de A,B e C e pararem nas caixas 1, 2 e 3 separadamente:

Tabela 5.3: Probabilidades das bolinhas separadas

	caixa 1	caixa 2	caixa 3
Partindo de A	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	0
Partindo de B	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
Partindo de C	0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora que sabemos quais são as probabilidades individualmente, vamos junta-las, mas como queremos saber a probabilidade de ficarem separadas, podemos fazer:

$$P(\text{separadas}) = 1 - P(\text{juntas}).$$

Onde,

$$\begin{aligned}
P(\text{juntas}) &= P(A \text{ e } B \text{ em } 1) + P(A \text{ e } B \text{ em } 2 \text{ e } C \neq 2) + P(B \text{ e } C \text{ em } 2 \text{ e } A \neq 2) + \\
&\quad P(B \text{ e } C \text{ em } 3) + P(A \text{ e } C \text{ em } 2 \text{ e } B \neq 2) + P(A, B \text{ e } C \text{ em } 2) \\
P(\text{juntas}) &= \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\left(1-\tfrac{1}{4}\right)+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\left(1-\tfrac{1}{4}\right)+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} \\
P(\text{juntas}) &= \tfrac{3}{16}+\tfrac{3}{32}+\tfrac{3}{32}+\tfrac{3}{10}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{32}=\tfrac{20}{32}=\tfrac{5}{8}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$P(\text{separadas}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

Comentários e sugestões : Excelente exercício, os itens a) e b) constroem a linha de raciocínio a ser usada em c), é interessante que o professor trabalhe questões desse tipo com o aluno, principalmente para que ele consiga resolver questões em OBMEPs futuras, pois apesar dessa questão, a prova não tem por costume criar esse caminho com os itens anteriores, geralmente o aluno tem de pensar nessas etapas antes de pensar na questão maior proposta pelo exercício.

Questão 4 (**N*í*vel 3 – 2009**) Quatro times, entre os quais o Quixajuba, disputam um torneio de vôlei em que:

- cada time joga contra cada um dos outros uma única vez;
- qualquer partida termina com a vitória de um dos times;
- em qualquer partida, os times têm a mesma probabilidade de ganhar;
- ao final do torneio, os times são classificados em ordem pelo número de vitórias.

a) É possível que, ao final do torneio, todos os times tenham o mesmo número de vitórias? Por quê?

b) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com o Quixajuba isolado em primeiro lugar?

c) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com três times empatados em primeiro lugar?

Solução da OBMEP :

a) O número total de partidas disputadas no torneio é $3 + 2 + 1 = 6$. Como 6 não é divisível por 4, o torneio não pode acabar com os quatro times tendo o mesmo número de vitórias.

b) 1ª solução: Para que o Quixajuba termine isolado em primeiro lugar, ele deve ganhar todas as suas partidas. De fato, se ele ganhar duas ou menos, então os outros três times dividirão pelo menos quatro vitórias entre si, e assim algum deles deve ter pelo menos duas vitórias; nesse caso, o Quixajuba não seria o campeão isolado. Para cada um dos três jogos entre os outros times há duas possibilidades. Logo, o número de maneiras do Quixajuba terminar sozinho em primeiro lugar é $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Como há $2^6 = 64$ resultados possíveis para as seis partidas, a probabilidade de o Quixajuba ser o campeão isolado é $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$.

2ª solução: Argumentamos como acima que o Quixajuba será o campeão isolado se e somente se ele vencer suas três partidas. Como a probabilidade de o Quixajuba ganhar um jogo contra qualquer dos outros times é $\frac{1}{2}$, a probabilidade de ele ganhar suas três partidas é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

c) Suponhamos que os times sejam A,B,C e D e que o torneio termine com D isolado em último lugar. Então D perdeu todas suas partidas; de fato,

- se D tivesse ganho suas três partidas, teria terminado o torneio em primeiro lugar (como vimos no item anterior);
- se D tivesse ganho duas (ou uma) partidas, os outros times dividiriam quatro (ou cinco) vitórias entre si; nesse caso, pelo menos um deles teria ganho no máximo uma partida e assim D não teria ficado em último lugar isolado.

Logo A,B e C dividem entre si as seis vitórias, ou seja, cada um deles ganhou duas vezes; uma contra D e uma contra um dos outros. Para as partidas entre A, B e C temos apenas duas possibilidades: A ganhou de B que ganhou de C que ganhou de A, ou A ganhou de C que ganhou de B que ganhou de A. Em resumo, há apenas duas possibilidades para que A, B e C dividam a liderança, e neste caso D acaba o torneio em último lugar isolado. Como qualquer um dos times pode acabar em último lugar isolado, enquanto os outros dividem a liderança, segue que o número de possibilidades para que isto aconteça é $4 \cdot 2 = 8$. Por outro lado, o número total de possibilidades para os resultados das seis partidas é $2^6 = 64$. Logo a probabilidade de que três times dividam a liderança é $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$.

Solução sugerida :

Observação: Vamos utilizar tabelas de resultados, onde lê-se: o time da coluna obteve vitória (verde)/ derrota (vermelho) contra o time da linha.

a) Vamos supor que isso aconteça com uma vitória para cada time:

Tabela 5.4: Uma vitória para cada

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como visto na tabela acima, se A vencer B e B vencer C, já teríamos D com duas vitórias. Ou ainda, se A vencer D e B vencer A, já teríamos C com duas vitórias, enfim, é impossível ter todos empatados com uma vitória.

Vamos supor que todos os times terminem empatados com duas vitórias para cada:

Tabela 5.5: Duas vitórias para cada

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

ou

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

ou

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Do mesmo modo do caso anterior, teremos um dos times com uma quantidade de vitórias diferente, no caso diferente de duas.

Vamos supor que todos os times tenham 3 vitórias:

Tabela 5.6: Três vitórias para cada

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como vemos na tabela acima, caso A obtenha três vitórias, nenhum dos outros três times conseguiriam fazer o mesmo.

Portanto, os quatro times não podem terminar o torneio com o mesmo número de vitórias, seja qual for esse número.

c) Como visto nas tabelas em a), esse caso só pode acontecer, caso três times tenham duas vitórias e o quarto time tenha três derrotas. Vamos supor que o time D tenha as três derrotas; assim, os time A,B e C venceram o time D $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\right)$, mas o time A ainda tem de vencer B ou C $\left(2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\right)$, logo temos duas opções:

Tabela 5.7: D perde os três jogos e A vence B ou C.

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

ou

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Fonte: Elaborada pelo autor.

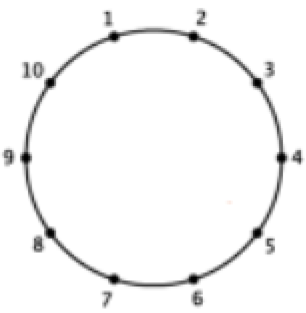
Na tabela acima, os quadros pretos representam que os resultados estão conectados, em outras palavras, se B vencer C então C perdeu para B. Assim, analisando o time B, temos de escolher o resultado contra os times C e D $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}\right)$ e depois escolher o resultado do confronto entre C e D $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}\right)$, mas fizemos essa análise fixando o time D como aquele que teria quantidade de derrotas diferente dos outros três, logo, temos quatro opções de times para fazerem esse papel, assim,

$$P(\text{três times empatados}) = 4 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{8}.$$

Comentários e sugestões : O desenho das tabelas facilita ao aluno a concepção do que trata o exercício, sem muito esforço é possível responder os itens pedidos aplicando o princípio multiplicativo junto a noção que a tabela nos dá dos possíveis acontecimentos e esse é um recurso conhecido no geral por conta dos campeonatos que existem, é uma maneira pratica de fazê-lo. É mais cômodo ao aluno, se mostrarmos primeiro essa forma de pensar e depois a resolução feita pela OBMEP.

Questão 5 (**N*í*vel 3 – 2011**) Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.

Figura 5.2: Questão 24 - Enunciado



Fonte: OBMEP, 2020b.

a) Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que o segmento determinado pelos pontos correspondentes seja um diâmetro da circunferência?

b) Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo?

Um ângulo inscrito em uma circunferência é reto se e somente se o arco correspondente é uma semicircunferência.

c) Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um retângulo?

Solução da OBMEP :

a) 1ª solução: O princípio multiplicativo mostra que o número de maneiras de retirar duas bolas, uma a uma, é $10 \cdot 9 = 90$. Dessas retiradas, há dez para as quais o segmento determinado pelos pontos retirados é um diâmetro, a saber, $(1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10), (6,1), (7,2), (8,3), (9,4)$ e $(10,5)$. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{10}{90} = \frac{1}{9}$.

2ª solução: Retira-se uma bola qualquer. Das nove possibilidades de retirar uma bola, apenas uma determinará, junto com a primeira, um diâmetro. Logo, a probabilidade de retirar duas bolas que determinam um diâmetro é $\frac{1}{9}$.

3ª solução: É possível retirar duas bolas de $\binom{10}{2} = 45$ maneiras diferentes. Dessas retiradas há cinco que determinam diâmetros; logo a probabilidade procurada é $\frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.

b) 1ª solução: O princípio multiplicativo mostra que o número de maneiras de retirar três bolas, uma a uma, é $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Para que uma retirada determine um triângulo retângulo, ela deve conter duas bolas a e b que determinam um diâmetro e uma terceira bola x distinta dessas duas. Ordenando essas três bolas das $3! = 6$ maneiras possíveis, vemos que há seis retiradas que consistem dessas bolas. Como há cinco pares de bolas que determinam um diâmetro e a bola extra pode ser escolhida de oito maneiras diferentes, o número de retiradas que determinam um triângulo retângulo inscrito é $6 \cdot 5 \cdot 8 = 240$. Logo, a probabilidade procurada é $\frac{240}{720} = \frac{1}{3}$.

2ª solução: Uma vez retiradas três bolas, podemos formar com elas três grupos de duas bolas. Observamos que se um desses grupos determina um diâmetro, então isso não pode acontecer para os outros dois grupos. Como cada grupo de duas bolas tem probabilidade $\frac{1}{9}$ de determinar um diâmetro, a probabilidade procurada é então $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

3ª solução: Há $\binom{10}{3} = 120$ maneiras de escolher três bolas, ou seja, há 120 triângulos inscritos com vértices nos vértices do decágono. Por outro lado, cada diâmetro determina oito triângulos retângulos inscritos, num total de $5 \cdot 8 = 40$; ou seja, há 40 escolhas de três bolas que determinam triângulos retângulos inscritos. A probabilidade procurada é então $\frac{40}{120} = \frac{1}{3}$.

c) 1ª solução: O número de retiradas de quatro bolas é $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ e cada uma dessas retiradas determina um quadrilátero inscrito. Por outro lado, as bolas de uma retirada que determina um retângulo inscrito devem determinar dois diâmetros. Há dez escolhas para a primeira bola de uma tal retirada e a bola diametralmente oposta pode então aparecer em qualquer uma das três posições seguintes; as outras duas bolas podem então ser escolhidas de oito maneiras diferentes, correspondentes aos quatro diâmetros ainda não determinados. Assim as retiradas que determinam um triângulo retângulo são em número de $10 \cdot 3 \cdot 8$ e a probabilidade procurada é então $\frac{10 \cdot 3 \cdot 8}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{21}$.

2ª solução: Para que as quatro bolas retiradas determinem um retângulo, as três primeiras devem determinar um triângulo retângulo, o que acontece com probabilidade $\frac{1}{3}$;uma vez fez feito, há uma única escolha para a quarta bola entre as sete remanescentes. Logo, a probabilidade procurada é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{21}$.

3ª solução: Há $\binom{10}{4} = 210$ maneiras de escolher quatro bolas, ou seja, há 210 quadriláteros inscritos com vértices nos vértices do decágono. Por outro lado, um retângulo inscrito é determinado por dois diâmetros, ou seja, há $\binom{5}{2} = 10$ retângulos inscritos, correspondentes a dez escolhas de quatro bolas. Logo, a probabilidade procurada é $\frac{10}{210} = \frac{1}{21}$.

Solução sugerida :

b) Podemos calcular a probabilidade de não ser triângulo retângulo. Para isso, temos 10 opções de escolha para o primeiro ponto; o segundo ponto não pode ser o primeiro e nem o oposto à ele, logo temos 8 opções e para o terceiro ponto, não podemos escolher o primeiro, nem o segundo e nem os seus opostos, ou seja, nos restam $10 - 4 = 6$ pontos à disposição. Como temos $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ opções de escolher 3 dentre os 10 pontos disponíveis, a probabilidade desejada é

$$\begin{array}{rcl} P(\text{ser retângulo}) & = & 1 - P(\text{não ser retângulo}) \\ P(\text{ser retângulo}) & = & 1 - \frac{10 \cdot 8 \cdot 6}{720} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Comentários e sugestões : Construir com os alunos a ideia do complementar é imprescindível, nessa questão vemos como ela pode nos auxiliar bem e com uma linha de pensamento bastante direta, ainda mostrar a quantidade de formas de se resolver, apesar de diminuir a quantidade de exercícios vistos no todo, contribui para a aprendizagem e a motivação do aluno de uma forma mais significativa por vezes do que dezenas de exercícios que só seguem um caminho . Articular diferentes segmentos da matemática durante as aulas é um desafio constante enfrentado pelos educadores, exercícios que fazem isso trazendo tanto conceitos juntos tem de ser vistos como essenciais ao final dos conteúdos, pois o aluno geralmente não imagina que temas tão distintos podem se encaixar em uma só questão.

Questão 5 (**N***í***vel 3** $-$ **2012**) Em uma caixa há 9 bolas amarelas numeradas de 1 a 9 e, em uma segunda caixa, há 9 bolas brancas, também numeradas de 1 a 9. Todas as bolas são idênticas, exceto por sua cor e seu número. Uma bola amarela é sorteada e colocada na segunda caixa; a seguir, uma é sorteada da segunda caixa.

a) Qual é a probabilidade de que a bola sorteada na segunda caixa seja amarela?

b) Qual é a probabilidade de que as duas bolas sorteadas tenham o mesmo número?

c) Qual é a probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa tenha o número 1?

Solução da OBMEP :

a) Ao se tentar sortear uma bola da 2ª caixa, há 10 bolas idênticas, uma das quais é amarela. Logo, a probabilidade de que a segunda bola retirada seja amarela é $\frac{1}{10}$.

b) Ao se sortear uma bola da 2ª caixa, há duas bolas com o mesmo número da primeira bola sorteada (uma amarela e uma branca). A probabilidade de que uma delas seja a 2ª bola é $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

c) 1ª solução: A primeira bola pode ser sorteada de 9 maneiras e a segunda de 10. O número total de possibilidades para o sorteio das bolas é, portanto, $9 \cdot 10 = 90$. Para contar quantos são os sorteios em que a segunda bola tem o número 1, consideremos dois casos:

- A bola sorteada da 1ª caixa tem o número 1. Neste caso, há apenas uma possibilidade para o sorteio da 1ª bola, mas duas para o sorteio da 2ª (já que há duas bolas com o número 1 na segunda caixa quando ela é sorteada). Logo, há $1 \cdot 2 = 2$ formas de se obter 1 na 2ª bola.

- A bola sorteada da 1ª caixa tem o número diferente de 1. Neste caso, há 8 possibilidades para o sorteio da 1ª bola, e apenas uma para o sorteio da 2ª (já que há somente uma bola com o número 1 na segunda caixa quando ela é sorteada). Logo, há $8 \cdot 1 = 8$ formas de se obter 1 na 2ª bola.

A probabilidade de que a segunda bola tenha o número 1 é, portanto,

$$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{2+8}{90} = \frac{1}{9}.$$

2ª solução: As bolas de 1 a 9 figuram em igual quantidade em ambas as caixas. Logo, mesmo depois de passada uma bola da 1ª para a 2ª, todos os números continuam tendo a mesma chance de serem sorteados. Portanto, a probabilidade de que a segunda bola seja a bola de número 1 é $\frac{1}{9}$.

3ª solução:

$$\begin{array}{rcl} P(2^{\text{a}}\text{ bola} = 1) & = & P(1^{\text{a}}\text{ bola} = 1) \cdot P(2^{\text{a}}\text{ bola} = 1 \mid 1^{\text{a}}\text{ bola} = 1) + \\ & & P(1^{\text{a}}\text{ bola} \neq 1) \cdot P(2^{\text{a}}\text{ bola} = 1 \mid 1^{\text{a}}\text{ bola} \neq 1) \\ P(2^{\text{a}}\text{ bola} = 1) & = & \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{10} + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{9}. \end{array}$$

Solução sugerida :

a) Vamos calcular a probabilidade de não ser amarela, como temos 9 bolas brancas e 1 amarela na segunda caixa, $P(\text{não ser amarela}) = \frac{9}{10}$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} P(\text{ser amarela}) & = & 1 - P(\text{não ser amarela}) \\ P(\text{ser amarela}) & = & 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}. \end{array}$$

b) Temos 9 opções de escolha para ser o número que vai aparecer em ambas as bolas; temos chance de $\frac{1}{9}$ de desse estar na bola amarela que foi para a 2ª caixa e depois temos $\frac{2}{10}$ de chance de uma dessas duas bolas ser sorteada, logo

$$P(\text{mesmo número}) = 9 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

c) Vamos calcular a probabilidade de não ser 1 o número sorteado na 2ª caixa, daí

$$\begin{array}{rcl} P(\text{não sair 1}) & = & P(\text{não ser 1} \mid 1^{\text{a}} \text{ foi 1}) + P(\text{não ser 1} \mid 1^{\text{a}} \text{ não foi 1}) \\ P(\text{não sair 1}) & = & P(1^{\text{a}} \text{ sair 1}) \cdot P(\text{não sair 1 na } 2^{\text{a}} \text{ tendo saído 1 na } 1^{\text{a}}) + \\ & & P(1^{\text{a}} \text{ não sair 1}) \cdot P(\text{não sair 1 na } 2^{\text{a}} \text{ não tendo saído 1 na } 1^{\text{a}}) \\ P(\text{não sair 1}) & = & \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{10} + \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{80}{90}. \end{array}$$

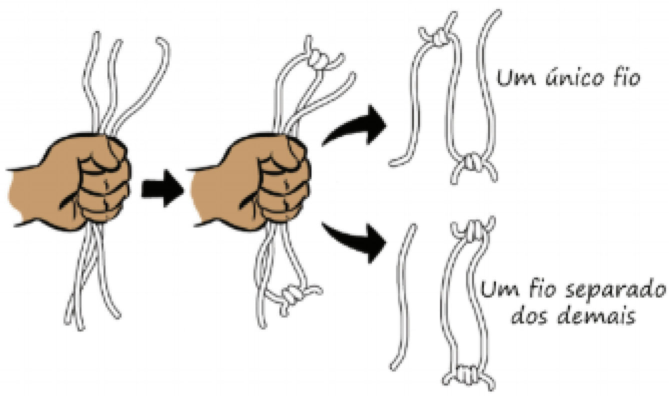
Logo, como os eventos sair 1 e não sair 1 são independentes, temos

$$\begin{array}{rcl} P(\text{sair 1}) & = & 1 - P(\text{não sair 1}) = 1 - \frac{80}{90} \\ P(\text{sair 1}) & = & \frac{10}{90} = \frac{1}{9}. \end{array}$$

Comentários e sugestões : Trazer uma caixinha com bolinhas e mostrar pro aluno a situação na prática, ajuda no desafio de não se agarrar a fórmula, principalmente no caso da probabilidade condicional, que como visto nas duas soluções do item c), a concepção chega ao aluno de forma natural.

Questão 5 (**Nível 3 – 2013**) Homero segura um número ímpar de barbantes idênticos e pede para Sofia amarrar pares de pontas ao acaso, de cada lado de sua mão, até que sobre somente uma ponta de cada lado. A figura ilustra o procedimento para três barbantes.

Figura 5.3: Questão 5 - Enunciado



Fonte: OBMEP, 2020b.

a) Com três barbantes, qual é a probabilidade de que todos os barbantes fiquem unidos em um único fio?

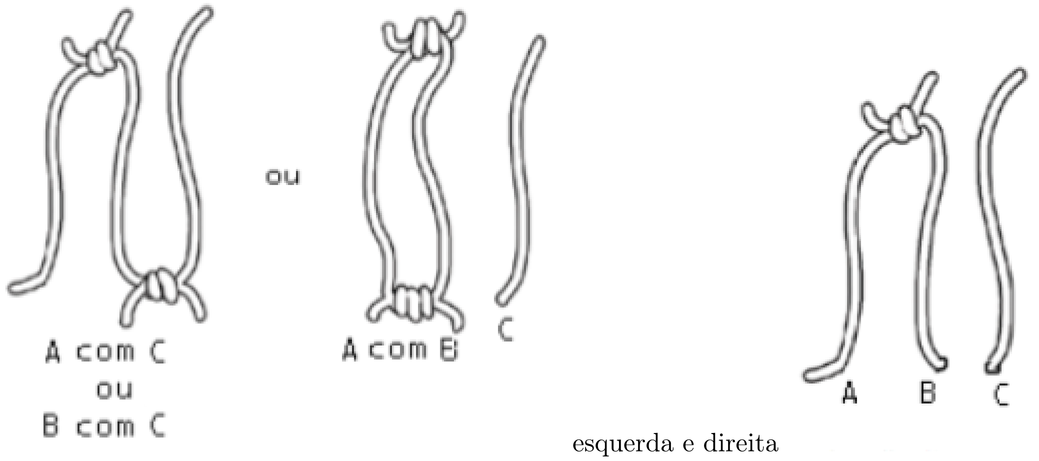
b) Com cinco barbantes, qual é a probabilidade de que um dos pedaços originais de barbante fique separado dos demais?

c) Com cinco barbantes, qual é a probabilidade de que os barbantes fiquem unidos em um único fio?

Solução da OBMEP :

a) 1ª solução: Após amarrar dois barbantes do lado de cima da mão, temos a situação da figura à direita. Os possíveis resultados após amarrar duas pontas do outro lado da mão são mostrados na figura à esquerda.

Figura 5.4: Questão 5 - Solução 1



esquerda e direita

Fonte: OBMEP, 2020b.

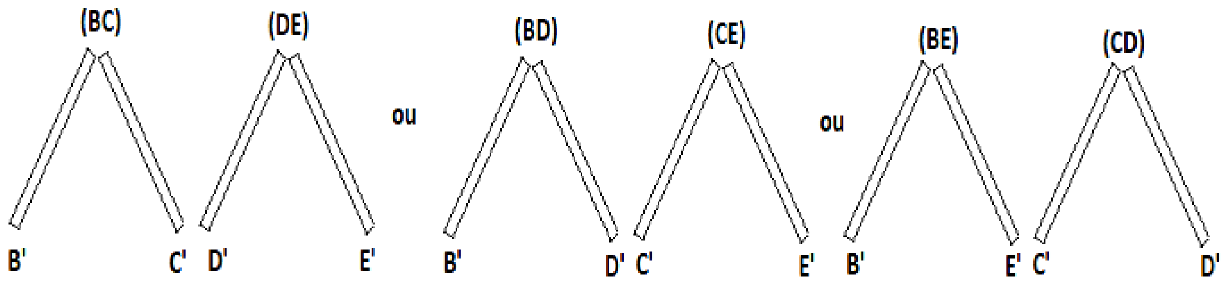
Temos duas possibilidades para o caso da esquerda (barbantes unidos em um único fio) e 1 possibilidade para o caso da direita, num total de $2 + 1 = 3$. Assim, a probabilidade de formar um único fio é $\frac{2}{3}$. Podemos expressar esse raciocínio dizendo que, uma vez dado um nó do lado de cima da mão, a ponta em baixo correspondente à ponta solta em cima tem 3 escolhas: ficar sozinha ou unir-se a uma das outras duas. Em 2 dessas escolhas (unir-se a uma das outras duas) é formado um único fio, ou seja, a probabilidade de formar um único fio é $\frac{2}{3}$.

2ª solução: Vamos supor que as pontas dos barbantes do lado de cima da mão sejam rotuladas com as letras A, B, C e as pontas correspondentes do outro lado com A', B', C'. Para dar um nó em cima da mão, basta escolher a ponta que vai ficar solta (3 possibilidades) e amarrar as outras duas. O mesmo ocorre do outro lado da mão, e segue que temos $3 \cdot 3 = 9$ possibilidades para dar nós de ambos os lados da mão. Haverá um barbante isolado quando a ponta solta do lado de baixo fora ponta correspondente à ponta solta do lado de cima; isso ocorre uma vez a cada escolha de como amarrar os barbantes na parte de cima, num total de 3 casos. Logo, a probabilidade de que os barbantes não estejam unidos em um único fio é $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ e a de que estejam unidos em um único fio é $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

b) 1ª solução: Como na 1ª solução do item (a), após dar dois nós de um dos lados da mão, a outra ponta de barbante não usado tem 5 escolhas, sendo que em apenas 1 delas ele ficará solto; logo, a probabilidade de que um dos pedaços fique isolado é $\frac{1}{5}$.

2ª solução: Como na 2ª solução do item (a), vamos supor que as pontas dos barbantes do lado de cima da mão sejam rotuladas com as letras A, B, C, D e E, enquanto as pontas correspondentes do outro lado são rotuladas com A', B', C', D' e E'. Para dar os nós em cima da mão, basta escolher a ponta que vai ficar solta (5 possibilidades) e amarrar as outras quatro duas a duas (3 possibilidades; por exemplo, se A ficou solta, as possibilidades são (BC, DE), (BD, CE) e (BE,CD)), como podemos ver na imagem a seguir elaborada pelo autor:

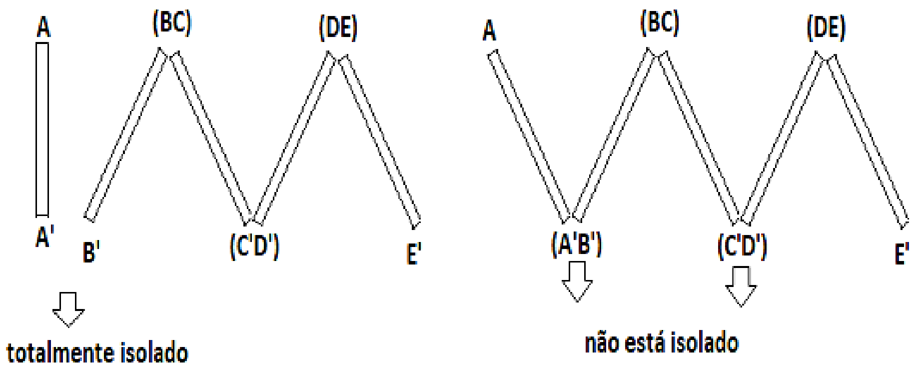
Figura 5.5: Questão 5 (2013) - item b)i



Fonte: Elaborada pelo autor.

O mesmo ocorre do outro lado da mão, e segue que temos $(5 \cdot 3)^2$ possibilidades para dar nós de ambos os lados da mão. Haverá um barbante isolado quando a ponta solta do lado de baixo for a ponta correspondente à ponta solta do lado de cima, exemplificado na imagem a seguir elaborada pelo autor:

Figura 5.6: Questão 5 (2013) - item b)ii



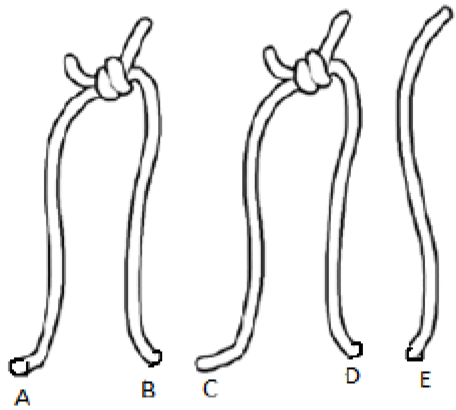
Fonte: Elaborada pelo autor.

Isso ocorre uma vez a cada escolha de como amarrar os barbantes na parte de cima, num total de $(5 \cdot 3) \cdot 3$ ($5 \cdot 3$ escolhas da ponta solta na parte de baixo, uma para cada possibilidade de dar nós na parte de cima, e 3 escolhas de como amarrar as outras quatro pontas). Logo, a probabilidade de que um dos pedaços originais de barbante fique separado dos demais é $\frac{(5 \cdot 3) \cdot 3}{(5 \cdot 3)^2} = \frac{1}{5}$.

c) 1ª solução: Como na 1ª solução do item (b), após dar dois nós de um dos lados da mão, a outra ponta do barbante não usado tem 5 escolhas, a saber, ficar solta ou unir-se a uma das outras 4 pontas; para formar um único fio, ela deve ser unida a outra ponta, o que acontece com probabilidade $\frac{4}{5}$. Isso feito, a outra ponta do fio ao qual a ponta solta foi unida tem 3 possibilidades, a saber, ficar solta ou unir-se a uma das outras 2 pontas; para formar um único fio, ela deve ser unida a outra ponta, o que acontece com probabilidade $\frac{2}{3}$. Logo, a probabilidade de os barbantes formarem um único fio é $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.

Para exemplificar, observamos na figura abaixo, que a ponta E pode ser unida às pontas A, B, C e D. Se, por exemplo, ela for unida à ponta A, para que os barbantes formem um único fio é necessário que a ponta B seja unida a um das pontas, C ou D.

Figura 5.7: Questão 5 (2013) - item c)



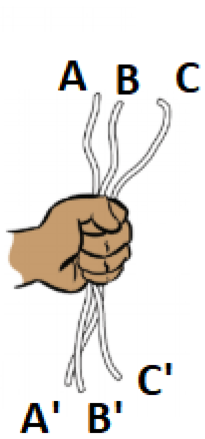
Fonte: OBMEP, 2020b.

2ª solução: Supomos aqui também que as pontas dos barbantes do lado de cima da mão sejam rotuladas com as letras A, B, C, D e E e as pontas correspondentes do outro lado com A', B', C', D' e E'. Já vimos que o número de maneiras de dar dois nós de ambos os lados da mão é $(5 \cdot 3)^2$. Para cada maneira de amarrar os barbantes na parte de cima ($5 \cdot 3$ possibilidades), haverá um fio único quando a ponta da parte de baixo correspondente à ponta solta em cima for unida a uma das outras quatro (4 possibilidades) e, depois disso, a outra ponta (embaixo) do barbante de três fios assim formado for unida a uma das restantes (2 possibilidades). Logo a probabilidade de os barbantes formarem um único fio é $\frac{(5 \cdot 3) \cdot 4 \cdot 2}{(5 \cdot 3)^2} = \frac{8}{15}$.

Solução sugerida :

a) Vejamos a figura abaixo, onde as pontas superiores são A, B e C e as inferiores respectivas, são A', B' e C'.

Figura 5.8: Questão 5 - Solução sugerida a)



Fonte: OBMEP, 2020b.

Para escolhermos ao acaso os dois nós feitos em cima e os dois nós feitos em baixo, temos $C_3^2 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ modos distintos. Dentre esses, os casos em que temos os três barbantes unidos por um único fio, são aqueles em que os nós são dados em: AB e $B'C'$,AB e $A'C'$, AC e $A'B'$,AC e $B'C'$, BC e $B'A'$, BC e $A'C'$. Logo, temos 6 casos favoráveis, daí

$$P = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Comentários e sugestões : Um exercício com entendimento simples do que se pede, porém os itens b) e c), por disporem de muitos casos, necessitam de uma análise criteriosa para abranger todos os casos. Seria interessante, para o professor que venha a trabalhar essa questão em sala com os alunos, que trouxesse os barbantes afim de que os próprios pudessem argumentar sobre alguns dos princípios presentes nas soluções.

Questão 6 (**N*í*vel 3 – 2014**) Cada uma das cem pessoas de uma fila escolhe, ao acaso, um número de 1 a 20 e escreve em um papel, mantendo esse número em segredo. Depois que todos escreveram, o primeiro da fila anuncia o seu número. Em seguida, o segundo da fila faz o mesmo, e assim sucessivamente. A primeira pessoa que anunciar um número igual a um número já anunciado ganha um prêmio.

a) O primeiro da fila não tem chance de ganhar o prêmio. Qual é a posição da próxima pessoa da fila que também não tem chance alguma de ganhar o prêmio?

b) Qual é a probabilidade de que o terceiro da fila ganhe o prêmio?

c) Quem tem maior probabilidade de ganhar o prêmio: o sétimo da fila ou o oitavo? Justifique.

d) Em que posição ou posições da fila é maior a probabilidade de ganharem prêmio? Justifique.

Solução da OBMEP :

a) O 22° da fila, pois até o 21° teremos 21 cartões para 20 números e podemos afirmar, pelo Princípio da Casa dos Pombos, que haverá pelo menos dois cartões com o mesmo número, ou seja, o prêmio já terá saído.

b) Para que o terceiro ganhe, o segundo deve ter um número diferente do primeiro e o terceiro ter um número igual a um dos cartões dos dois primeiros:

$$P_3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 2}{20 \cdot 20 \cdot 20} = \frac{19}{200} = 9,5\%.$$

c) Vamos calcular $\frac{P_8}{P_7}$:

$$\frac{P_8}{P_7} = \frac{\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot\cdot 15\cdot 14\cdot 7}{20\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20}}{\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot\cdot 15\cdot 14\cdot 6}{20\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20}} = \frac{\frac{14\cdot 7}{20}}{\frac{6}{1}} = \frac{98}{120} < 1.$$

Logo, $P_8 < P_7$.

d) Vamos calcular a fração $\frac{P_{n+1}}{P_n}$:

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot \ldots [20-(n-2)]\cdot[20-(n-1)]\cdot n}{20\cdot 20\cdot 20\cdot\ldots\cdot 20\cdot 20}}{\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot\ldots[20-(n-3)]\cdot[20-(n-2)]\cdot(n-1)}{20\cdot 20\cdot 20\cdot\ldots\cdot 20\cdot 20}} = \frac{\frac{(21-n).n}{20}}{\frac{(n-1)}{1}} = \frac{21 \cdot n - n^2}{20 \cdot n - 20}.$$

Vamos analisar agora a partir de qual n, maior do que 1, P_{n+1} fica menor que P_n, ou seja, $\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1$,

$$\frac{21 \cdot n - n^2}{20 \cdot n - 20} < 1 \Leftrightarrow 21 \cdot n - n^2 < 20 \cdot n - 20 \Leftrightarrow n^2 - n > 0 \Leftrightarrow n > 5 \Leftrightarrow n \geq 6.$$

Logo, $P_6 > P_7 > P_8 > ... > P_{21}$. Analogamente, $P_{n+1} = P_n$ quando $n^2 - n - 20 = 0$, ou seja, quando $n = 5$. Logo $P_5 = P_6$ e $P_{n+1} > P_n$ quando $n^2 - n - 20 < 0$, ou seja, quando $n < 5$. Logo, $P_2 < P_3 < P_4 < P_5$.

A maior probabilidade ocorre para os participantes nas posições 5 e 6.

Solução sugerida :

b) Temos 20 opções para escolher o número que repetirá; 2 opções para escolher qual das pessoas (1ª ou 2ª) terá o mesmo número que a 3ª; como a probabilidade de uma pessoa estar com um número específico é $\frac{1}{20}$, então essa é probabilidade da 3ª pessoa e daquela que possui o mesmo número terem esse tal número, logo a probabilidade da pessoa com número diferente será $\frac{19}{20}$, assim

$$P(3^{\text{a}} \text{ ganhar}) = 20 \cdot 2 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{200}.$$

c) Vamos calcular $P(8^{\text{a}}$ ganhar$)$ e $P(7^{\text{a}}$ ganhar$)$,

- Para 7ª ganhar: Temos 20 opções para escolher o número que irá se repetir; 6 opções para escolher qual das pessoas (1ª à 6ª) que terá o mesmo número que a 7ª; daí temos $\frac{1}{20}$ de chance que essas duas pessoas tenham a placa com o número escolhido e para as outras 5 pessoas restantes, temos sequencialmente as probabilidades de $\frac{19}{20}$, $\frac{18}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{16}{20}$ e $\frac{15}{20}$ de que tenham números distintos entre si e ainda distintos do número que se repete, logo
$$P(7^{\text{a}} \text{ ganhar}) = 20 \cdot 6 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{20}.$$
- Para 8ª ganhar: Temos 20 opções para escolher o número que irá se repetir; 7 opções para escolher qual das pessoas (1ª à 7ª) que terá o mesmo número que a 8ª; daí temos $\frac{1}{20}$ de chance que essas duas pessoas tenham a placa com o número escolhido e para as outras 6 pessoas restantes, temos sequencialmente as probabilidades de $\frac{19}{20}$, $\frac{18}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{16}{20}$, $\frac{15}{20}$ e $\frac{14}{20}$ de que tenham números distintos entre si e ainda distintos do número que se repete, logo
$$P(8^{\text{a}} \text{ ganhar}) = 20 \cdot 7 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{20}.$$

Como as duas probabilidades são escritas como produto de vários fatores e vários desses fatores são iguais, basta usar aqueles que diferem para saber qual delas é maior, daí como $P(7^{\text{a}}\text{ganhar}) e P(8^{\text{a}}\text{ganhar})$,tem como fatores diferentes 6 e $7 \cdot \frac{14}{20} = 4,9$, respectivamente, então, como $6 > 4,9$, temos que $P(7^{\text{a}}$ ganhar$)$ é maior.

Comentários e sugestões : O modo de resolver os itens b) e c) da solução sugerida, deixa o exercício mais cotidiano para o aluno, pois pensar nas soluções uma a uma é algo que fazemos o tempo todo, como já mencionado. O item d) de fato exige muitos conceitos de análise do aluno, o que torna difícil a resolução, poderia ser passado em sala algo parecido, para resolver a inequação.

Questão 6 (**N***í***vel 3 – 2016**) Para a primeira fase de um torneio internacional de futebol foram classificadas 3 equipes espanholas, 2 francesas, 1 alemã, 1 portuguesa e 1 italiana. Nessa fase, serão realizadas quatro partidas, com os confrontos definidos por sorteio. Em seguida, duas semifinais serão realizadas com as quatro equipes vencedoras da primeira fase, também com os confrontos definidos por sorteio. As duas equipes vencedoras jogarão a partida final.

a) Qual é a probabilidade de que, na primeira fase, as duas equipes francesas se enfrentem?

b) Qual é a probabilidade de ocorrer, na primeira fase, um confronto entre duas equipes espanholas?

c) Admitindo que em cada confronto do torneio as equipes têm, todas, iguais probabilidades de ganhar, qual é a probabilidade de que a final seja realizada entre duas equipes de um mesmo país?

Solução da OBMEP :

a) Fixada uma equipe, todas as demais 7 equipes têm a mesma probabilidade (igual a $\frac{1}{7}$) de ser sua adversária na próxima fase, Logo, a probabilidade de que uma equipe francesa enfrente a outra na primeira fase é $\frac{1}{7}$.

Outra solução: Um modo de definir os confrontos consiste em ordenar, por sorteio, as 8 equipes e determinar os quatro jogos: Equipe1 $\times$ Equipe2, Equipe3 $\times$ Equipe4, Equipe5 $\times$ Equipe6 e Equipe7 $\times$ Equipe8. Procedendo deste modo, há $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sorteios possíveis para as equipes. Para produzir um caso favorável devemos:

- Escolher a partida em que as equipes francesas vão se enfrentar (4 possibilidades);
- Escolher a ordem dessas equipes no sorteio (2 possibilidades);
- Definir a posição das demais equipes ($6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ possibilidades).

Logo, o número de casos favoráveis é $4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ e a probabilidade de que duas equipes francesas se enfrentem na primeira fase é

$$\frac{4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{7} .$$

Outra solução: O número de emparelhamentos possíveis entre duas equipes é $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ (seleciona-se a primeira equipe dentre 8, depois a segunda dentre 7 e divide-se o resultado do produto por 2 devido à simetria dentro de cada par, pois a ordem das equipes em uma partida não deve ser levada em conta na contagem). Desses 28 emparelhamentos, há um só entre equipes francesas, mas isto pode ocorrer em qualquer dos quatro jogos da primeira fase. Logo, a probabilidade de duas equipes francesas se enfrentarem é $\left(\frac{1}{28}\right) \cdot 4 = \frac{1}{7}$.

b) Há três confrontos possíveis entre equipes espanholas. A probabilidade de cada confronto na primeira fase é $\frac{1}{7}$. Como esses confrontos são mutuamente excludentes (isto é, no máximo um dos confrontos pode ocorrer), a probabilidade de que duas equipes espanholas se enfrentem na primeira fase é $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$.

Outra solução: Como na segunda solução do item a), há $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sorteios possíveis. Para produzir um caso favorável devemos:

- Escolher duas das três equipes espanholas para se enfrentarem (3 possibilidades);
- Escolher a partida em que essas equipes vão se enfrentar (4 possibilidades);
- Escolher a partida em que essas equipes no sorteio (2 possibilidades);
- Definir a posição das demais equipes ($6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ possibilidades).

Logo, o número de casos favoráveis é $3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ e a probabilidade de que duas equipes espanholas se enfrentem na primeira fase é

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3}{7}.$$

Outra solução: O número de emparelhamentos entre as três equipes espanholas é igual a 3. Qualquer um desses emparelhamentos pode ocorrer em qualquer um dos quatro jogos da primeira fase e assim a probabilidade de duas equipes espanholas se enfrentarem nessa fase é $\frac{3}{28} \cdot 4 = \frac{3}{7}$.

c) Há $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ possibilidades para o par de equipes que se enfrentarão na final. Como as chances de vitória são iguais em cada confronto, todos estes 28 possíveis encontros são equiprováveis. Deles, um é entre duas equipes francesas e três são entre equipes espanholas. Logo a probabilidade de que a final seja entre equipes do mesmo país é $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

Outra solução: A final será entre duas equipes: Equipe A $\times$ Equipe B. Como todas as equipes têm a mesma probabilidade de chegar à final, a probabilidade da Equipe A ser espanhola é $\frac{3}{8}$, pois são três equipes espanholas dentre oito equipes participantes do torneio. Se a Equipe A for espanhola, a probabilidade da Equipe B ser também espanhola é $\frac{2}{7}$. Logo a probabilidade de uma final entre duas equipes espanholas é $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$. De forma análoga, a probabilidade de uma final francesa é $\frac{2}{28} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$. Logo a probabilidade de uma final entre duas equipes de um mesmo país é $\frac{3}{28} + \frac{1}{28} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

Outra solução: Para que haja dois times franceses na final é necessário que eles estejam presentes na 2ª fase, que não disputem jogos entre si e que vençam seus jogos da 2ª fase. Para que estejam na 2ª fase é necessário que não disputem partidas entre si e que vençam seus jogos da 1ª fase. A probabilidade de dois times franceses disputarem a final é, portanto,

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{28}.$$

Analogamente, há três possibilidades da final ser realizada com dois times espanhóis e, como caso dos times franceses descrito acima, cada uma das duplas de times espanhóis tem probabilidade igual a $\frac{1}{28}$ de disputar a final. Logo a probabilidade de dois times do mesmo país disputarem a final é $4 \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{7}$.

Outra solução: Como vimos acima, a probabilidade dos dois times franceses disputarem a final é $\frac{1}{28}$. Para calcular a probabilidade de uma dupla de times espanhóis disputar a final, vamos dividir em casos simultaneamente excludentes:

1) Três times espanhóis disputam a 2ª fase.

2a) Dois times espanhóis disputam a 2ª fase e não há dois times espanhóis que se enfrentam na 1ª fase.

2b) Dois times espanhóis disputam a 2ª fase e dois times espanhóis se enfrentam na 1ª fase.

No caso 1), nenhum dos times espanhóis disputou com outro espanhol jogos da 1ª fase, todos eles venceram seus jogos e, na segunda fase, o time espanhol que não disputou com outro time de seu país venceu o jogo. A probabilidade, neste caso, é $\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{28}$.

No caso 2a) $\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$.

No caso 2b) $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$.

Logo a probabilidade de dois times do mesmo país disputarem a final é $\frac{1}{28} + 3 \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{7}$.

Solução sugerida :

a) Vamos calcular a probabilidade das duas equipes francesas não se enfrentarem na 1ª fase, como uma equipe tem 7 possíveis e adversárias e dessas 7, 6 nos convém (a outra francesa não serve), temos que $P(\text{não se enfrentarem}) = \frac{6}{7}$. Como os eventos se enfrentarem e não se enfrentarem são independentes, temos

$$\begin{aligned} P(\text{se enfrentarem}) &= 1 - P(\text{não se enfrentarem}) \\ P(\text{se enfrentarem}) &= 1 - \tfrac{6}{7} = \tfrac{1}{7}. \end{aligned}$$

b) Vamos calcular a probabilidade de não se enfrentarem. A 1ª equipe espanhola tem 7 opções de confronte, dos quais 5 não são equipes espanholas; para a 2ª equipe restam 5 opções de confronto, dos quais 4 não são equipes espanholas; e para a 3ª restam 3 opções de equipes donde nenhuma é espanhola, logo

$$P(\text{espanhóis não se enfrentarem}) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{4}{7}.$$

E como os eventos espanhóis se enfrentarem ou não, são independentes, temos

$$\begin{aligned} P(\text{espanhóis se enfrentarem}) &= 1 - P(\text{espanhóis não se enfrentarem}) \\ P(\text{espanhóis se enfrentarem}) &= 1 - \tfrac{4}{7} = \tfrac{3}{7}. \end{aligned}$$

Comentários e sugestões : Importante mostrar aos alunos que a 3ª solução da OBMEP no item a), no que diz respeito ao emparelhamento, na verdade usa combinação, ressaltando que podemos pensar nessa ferramenta sem necessariamente usar a fórmula. As segundas soluções em cada item, utilizam um raciocínio de escolha por partes, o que deve ser estimulado em sala, pois auxilia o aluno desenvolver uma auto correção, pelo fato de analisar passo a passo não esquecendo de fazer uma escolha.

Questão 6 (**N*í*vel 3 – 2015**) Seis bolas idênticas foram numeradas de 1 a 6 e colocadas em uma caixa. Joaquim retira, uma a uma, quatro bolas da caixa e observa seus números, sem recolocá-las na caixa.

a) Qual é a probabilidade de que o menor número observado seja 1?

b) Qual é a probabilidade de que o maior número observado seja 5?

c) Qual é a probabilidade de que o menor número observado seja 1 e o maior seja 5?

d) Qual é a probabilidade de que o menor número observado saia na primeira bola retirada e o maior, na última bola?

Solução da OBMEP :

a) O número de retiradas possíveis é $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Para que 1 seja o menor número observado, basta que ele saia. Isso pode ocorrer em qualquer das 4 bolas retiradas (4 possibilidades). Nas demais posições, podem ocorrer quaisquer das bolas restantes, para um total de $5 \cdot 4 \cdot 3$ possibilidades. Logo a probabilidade de que 1 seja o menor número observado é

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

Outra solução: Como argumentado acima, para que 1 seja o menor número observado, basta que ele saia. Em cada bola retirada, a probabilidade de que saia 1 é $\frac{1}{6}$. Logo, a probabilidade de que saia 1 em alguma bola é $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Outra solução: É irrelevante se as bolas são retiradas uma a uma ou todas de uma vez. Considerando que as bolas são retiradas simultaneamente, o número de retiradas possíveis é C_6^4. O número de retiradas em que aparece o 1 é C_5^3. Logo, a probabilidade de que 1 seja o menor número observado é

$$\frac{C_5^3}{C_6^4} = \frac{C_5^2}{C_6^2} = \frac{\frac{5 \times 4}{2}}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{2}{3}.$$

b) O número de retiradas possíveis é, como no item anterior, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Para que 5 seja o maior número observado, é preciso que ele saia e que o 6 não saia. A posição em que o 5 ocorre pode ser escolhida de 4 modos. Nas demais 3 posições, podem sair quaisquer dos números de 1 a 4; há, assim, $4 \cdot 3 \cdot 2$ para estas escolhas. Logo, a probabilidade de que 5 seja o maior número observado é

$$\frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{4}{15}.$$

Outra solução: Como no item anterior, é irrelevante se as bolas são retiradas uma a uma ou todas de uma vez. Considerando que as bolas são retiradas simultaneamente, o número de retiradas possíveis é C_6^4. O número de retiradas em que aparece o 5 mas não aparece o 6 é C_4^3. Logo, a probabilidade de que 5 seja o menor número observado é

$$\frac{C_4^3}{C_6^4} = \frac{C_4^1}{C_6^2} = \frac{4}{\frac{6 \cdot 5}{2}} = \frac{4}{15}.$$

c) O número de retiradas possíveis é, como nos itens anteriores, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Para que o 1 seja o menor número observado e 5 seja o maior, é preciso que ambos saiam e que o 6 não saia. A posição em que o 1 ocorre pode ser escolhida de 4 modos; aquela em que o 5 ocorre, de 3 modos. Nas demais 2 posições, podem sair quaisquer dos números de 2 a 4; há, assim, $3 \cdot 2$ possibilidades para essas escolhas. Logo, a probabilidade de que 1 seja o menor e 5 seja o maior número observado é

$$\tfrac{4\cdot 3\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} = \tfrac{1}{5} .$$

Outra solução:

Como nos itens anteriores, é irrelevante se as bolas são retiradas uma a uma ou todas de uma vez. Considerando que as bolas são retiradas simultaneamente, o número de retiradas possíveis é C_6^4. O número de retiradas em que aparecem o 1 e o 5 mas não aparece o 6 é C_3^2 (de fato, precisamos escolher dois dentre os três números: 2, 3 e 4). Logo, a probabilidade de que 1 seja o menor número observado e de que 5 seja o maior número observado é

$$\tfrac{C_3^2}{C_6^4} = \tfrac{C_3^1}{C_6^2} = \tfrac{3}{\frac{6\cdot 5}{2}} = \tfrac{1}{5} .$$

d) O número de retiradas possíveis é, como nos itens anteriores, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. As possibilidades para o menor e o maior número retirado e o número de retiradas em que eles ocorrem na primeira e última posições, respectivamente, são listados na tabela abaixo:

Tabela 5.8: Questão 3, item d) - Solução

Menor	Maior	Número de retiradas em que aparecem na primeira e última posição respectivamente.	Possibilidades de cada caso
1	4	2	(1234) e (1324)
1	5	$3 \cdot 2 = 6$	(1235), (1325), (1245), (1425),(1345) e (1435)
1	6	$4 \cdot 3 = 12$	(1236), (1326), (1246), (1426), (1256), (1526), (1346), (1436), (1356), (1536), (1456), e (1546).
2	5	2	(2345) e (2435)
2	6	$3 \cdot 2 = 6$	(2346), (2436), (2356), (2536), (2456) e (2546)
3	6	2	(3456) e (3546)

Fonte: OBMEP, 2020b.

Logo, a probabilidade de que o menor número saia na primeira posição e o maior na última é

$$\tfrac{2+6+12+2+6+2}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} = \tfrac{30}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} = \tfrac{1}{12} .$$

Outra solução:

Quaisquer que tenham sido as 4 bolas retiradas, as diversas ordenações dos números das bolas têm todas a mesma chance de ocorrer. O número de ordenações possíveis é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. As ordenações em que o menor número aparece na primeira posição e o maior na última são apenas duas (correspondentes às duas possíveis ordenações dos números do meio). Logo, a probabilidade de que o menor número saia na primeira posição e o maior na última é:

$$\tfrac{2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \tfrac{1}{12} .$$

Solução sugerida :

a) Para 1 ser a menor, a bola número 1 tem de ser retirada. Vamos calcular a probabilidade de ela não ser retirada.

$$P(\text{bola 1 não sair}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Logo, como bola 1 sair ou não são eventos independentes, então

$$\begin{aligned} P(\text{bola 1 sair}) &= 1 - P(\text{bola 1 não sair}) \\ P(\text{bola 1 sair}) &= 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

b) Vejamos a possibilidade de isso acontecer na 1^a bola. Para que o 5 saia na 1^a bola, temos $\frac{1}{6}$ de chance; considerando que o 5 saiu na primeira bola, queremos que o 6 não saia na segunda, terceira e nem na quarta bola, essas probabilidades são: $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$, respectivamente. Essa mesma análise, pode ser feita 4 vezes, pois o 5 pode sair na $2^a, 3^a$ ou 4^a bolas, logo

$$P(\text{5 sair e 6 não sair}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{15}.$$

c) Precisamos que as bolas 1 e 5 saiam além da bola 6 não sair. Supondo que a bola 1 estivesse na 1^a posição e bola 5 na 2^a posição, teríamos $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ (pois a bola 6 não pode sair), mas as bolas 1 e 5 podem mudar de posição nos 4 espaços disponíveis, uma pode ocupar 4 espaços e a outra 3 espaços (visto que um deles já foi ocupado pela primeira), daí, a probabilidade desejada pode ser obtida por

$$P = 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5}.$$

d) Escolhidas as 4 bolas, existe sempre uma de menor número e uma de maior número dentre elas. A chance da bola de menor número ser sorteada na 1^a bola é de $\frac{1}{4}$; para a segunda bola, queremos que não seja aquela de maior número, ou seja temos $\frac{2}{3}$ de chance disso acontecer; para a terceira bola, também não queremos que seja de maior número, logo $\frac{1}{2}$ e para a última resta . Assim, a probabilidade pedida pode ser obtida por:

$$P(\text{menor na } 1^a \text{ e maior na última}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{12}.$$

Comentários e sugestões : Mostrar ao aluno a solução utilizando combinações por último, ajuda na difícil missão do docente de convencer o aluno sobre a importância de saber usar a fórmula, não queremos que ele só saiba fazer dessa forma, mas sim que consiga julgar qual caminho venha a ser melhor, e no exercício, a análise usando combinação facilita bastante.

Considerações Finais

Como pôde ser observado, a OBMEP cumpre o regimento de conteúdos no ensino, imposto pela BNCC, logo, cada temática nela presente, já foi também articulada pelo professor em sala de aula, pois este também segue a BNCC, assim, os conteúdos cobrados na OBMEP não são novos aos alunos.

Cabe ao docente mostrar que existem diversas maneiras de se resolver um problema, valorizando sempre o processo cognitivo do aluno, por exemplo, apresentando um problema para a turma, que instigue a participação dos estudantes à expor suas ideias, de modo a guiar o seus pensamentos para a resolução da questão. O bom funcionamento dessa metodologia de ensino está vinculado a preparação do professor, que deve dispor de diferentes métodos de resolução. Contudo, não é utopia imaginar que qualquer discente empenhado possa alcançar bons resultados nesta avaliação.

As oportunidades que as grandes faculdades públicas estão concedendo aos jovens talentos do Brasil, mediante conquistas nas competições estudantis, não podem ser desperdiçadas, por isso os alunos devem conhecer todas essas vantagens, já especificadas neste trabalho, que estão à disposição de quem se interessar pela competição.

Os professores em geral, têm o hábito de começar a aula respondendo perguntas que não foram feitas, desestimulando o aluno, que nem havia se dado conta do problema e já tem que buscar uma solução. É preciso preparar o aluno antes de iniciar um novo conceito, contar uma história, fazer perguntas a fim de que ele chegue na questão desejada é uma forma de fazê-lo. Articular questões de probabilidade que tratem de problemas do cotidiano é uma tarefa relativamente simples, podemos ver isso inclusive nas questões abordadas no trabalho, todas ilustravam alguma situação corriqueira, onde mesmo que não tenhamos o hábito de parar e calcular a melhor decisão naquele dado momento, ela existe e o seu cálculo também.

Os diversos métodos de resolução na probabilidade, tornam a disciplina mais agradável, e foi um aprendizado primordial durante o trabalho, principalmente para não descartar uma ideia dada por um aluno para a solução de uma questão, pois ela pode se encaixar em alguma dessas várias soluções.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: Ministério da Educação, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 28 de jun. de 2020.

[2] BRASIL. **Histórico**. Base Nacional Comum Curricular, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/historico>. Acesso em: 22 de jun. de 2020.

[3] CAIRES, Luiza. **Jornal da USP**, 2019. Disponível em: < https://jornal.usp.br/ciencias/ciencias-exatas-e-da-terra/artur-avila-dificuldades-da-ciencia-no-brasil-limitaram-trajetoria-ascendente-da-matematica/>. Acesso em: 30 de jun. de 2020.

[4] CALABRIA, Angelica Raiz; CAVALARI, Mariana Feiteiro. **Um passeio histórico pelo início da teoria das probabilidades**. Campinas: SBHMAT, 2013.

[5] IEZZI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar: Combinatória e probabilidade**. Ed. 3. São Paulo: Atual, p.77-81. 1997.

[6] LOPES, Celi Espasandin; MEIRELLES, Elaine. **Estócastica nas séries iniciais**. Campinas: XVIII Encontro de professores de Matemática - LEM/IMECC/UNICAMP, p.1. 2005.

[7] MORGADO, Augusto et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Ed. 10. SBM, 2016.

[8] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo C. Pinto. **Matemática Discreta**. Ed. 2. Rio de Janeiro: SBM, p. 166. 2015.

[9] OBMEP. **Apresentação**. OBMEP 2020, 2020. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acesso em 20 de jun. de 2020a.

[10] OBMEP. **Provas e soluções**. OBMEP 2020,2020. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 10 de jul. de 2020b.

[11] PEREIRA, Juliana Fernandes. **O Último Teorema de Fermat módulo um inteiro**. São José dos Campos: p. 2. 2019.

[12] TOMAZ, Priscilla S. Santos. Gerolamo Cardano: **Pai da Teoria da Probabilidade ou Um Bom Apostador de Jogos de Azar?**. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática. Curitiba: UFPR, p.2-3. 2007.

[13] VIALI, L. **Algumas considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades**. Revista Brasileira de História da Matemática. n. 16, v. 8, p. 143. Out. 2008.