# LIMITE DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL COM VALORES REAIS E GENERALIZAÇÕES

Mustapha Rachidi | José Luiz Magalhães de Freitas
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

editora UFMS

# LIMITE DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL COM VALORES REAIS E GENERALIZAÇÕES

Mustapha Rachidi | José Luiz Magalhães de Freitas
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MATO GROSSO DO SUL



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Coordenadoria de Bibliotecas – UFMS, Campo Grande, MS, Brasil)

Rachidi, Mustapha.
Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações [recurso eletrônico] / Mustapha Rachidi, José Luiz Magalhães de Freitas, Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli. – Campo Grande, MS : Ed. UFMS, 2020.

Modo de acesso: https://repositorio.ufms.br
ISBN 978-65-86943-18-4

1. Funções de variáveis reais. I. Freitas, José Luiz Magalhães de. II. Mongelli, Magda Cristina Junqueira Godinho.

CDD (23) 515.8

Bibliotecária responsável: Wanderlice da Silva Assis – CRB 1/1279

Mustapha Rachidi

José Luiz Magalhães de Freitas

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

# LIMITE DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL COM VALORES REAIS E GENERALIZAÇÕES

Campo Grande - MS
2020

editora UFMS

1ª edição: 2020

Projeto Gráfico, Editoração Eletrônica
TIS Publicidade e Propaganda

Revisão
A revisão linguística e ortográfica
é de responsabilidade dos autores

A grafia desta obra foi atualizada conforme o Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa, de 1990, que entrou em vigor no Brasil em 1º de janeiro de 2009.



**Divisão da Editora UFMS - DIEDU/AGECOM/UFMS**
Av. Costa e Silva, s/nº - Bairro Universitário, Campo Grande - MS, 79070-900
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Fone: (67) 3345-7203
e-mail: diedu.agecom@ufms.br

Editora associada à

Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

ISBN: 978-65-86943-18-4
Versão digital: agosto de 2020

# SUMÁRIO

# PREFÁCIO

A atividade de ensino de um professor, especialmente de matemática, é fazer o máximo possível para que seus alunos possam dominar o conteúdo ministrado na sala de aula. O professor está constantemente levantando, ou é questionado sobre suas práticas didáticas e pedagógicas. Perguntas e questões necessárias a sua formação e para um bom desenvolvimento de seu trabalho em sala de aula. Tais questões surgem quando ele percebe que a definição de um conceito ou uma noção, um teorema, uma regra ou uma demonstração é problemática para seus alunos. Há também perguntas sobre a falta de compreensão desta ou daquela noção ou propriedade, pelos alunos.

Assim, o professor dedica uma grande parte de sua atividade, buscando soluções didáticas e pedagógicas rigorosas para essas questões, antes e depois de sua aula. Isto exige do professor, uma cultura didática, pedagógica e histórica, bem como conhecimentos do conteúdo matemático específico.

É assim que a introdução e o ensino dos conceitos de funções e limite de funções de uma variável real com valores reais representam um desafio para professores iniciantes, bem como para professores experientes. Observe que o conceito de limite, que é um tema fundamental da análise matemática, tem sido objeto de uma vasta literatura e continua sendo objeto de publicações históricas, epistemológicas, matemáticas e didáticas. Entre uma das motivações importantes deste livro, é que o professor iniciante, assim como o professor experiente, não pode ter uma visão global das várias produções da literatura, que constituem uma ferramenta importante para garantir o ensino adequado do conceito de limite.

Além disso, a segunda motivação vem de nossas experiências como jovens professores e, com o passar dos anos como professores experientes, quando nos deparamos com as dificuldades de nossos alunos em aprender os conceitos de função e limite.

Este livro tem como objetivo consolidar e fortalecer o conhecimento dos leitores e procura ajudá-los a aprimorar procedimentos metodológicos que o trabalho do professor de matemática exige para enfrentar os diferentes desafios concernentes a este importante conceito da matemática. É fato que os conceitos de função e limite não emergem totalmente formados. A História nos mostra que, desde o surgimento da ideia de limite com Newton e Leibniz, esse conceito evoluiu graças aos esforços acumulados de vários matemáticos. Neste sentido, procuramos proporcionar aos participantes, alguns elementos básicos da cultura matemática sobre os conceitos de limite e de função, através de breves estudos sobre a evolução histórica destes dois conceitos, bem como as dificuldades epistemológicas e didáticas no seu estabelecimento. Muitos estudos concordam sobre a utilidade e importância da cultura matemática para o papel do professor. Por outro lado, apresentamos uma visão aprofundada do conceito matemático de limite, numa abordagem baseada na topologia dos números reais, o que certamente trará benefícios importantes para o entendimento geral do conceito de limite.

Uma das vantagens é que a definição topológica do conceito de limite é mais geral, e permite encontrar propriedades semelhantes a outras definições de limites (finitos ou infinitos), em um ponto ou no infinito. A segunda vantagem é perceber claramente o papel fundamental das propriedades do conjunto de números reais. Além disso, percebemos que esse papel dos números reais era uma das preocupações na obra de Cauchy, considerado um dos fundadores da análise moderna. A terceira vantagem, reside no fato de que essa definição geral é facilmente generalizável para outros espaços topológicos, bem como para espaços métricos.

Nossa abordagem desse conteúdo consiste em fazer uma apresentação global de tudo o que envolve o conceito de limite, ou seja, o aspecto histórico, didático, epistemológico, análise de programas e, especialmente, matemático. Acreditamos assim, poder possibilitar um outro olhar sobre temas que envolvem os conceitos de limites e funções. Além disso, os professores interessados em explorar um tema específico do conteúdo deste livro, podem encontrar aqui um ponto de partida para desenvolver outras ideias.

Deixamos nossos agradecimentos aos participantes dessa disciplina, Rosane Corsini, Bruna Letícia Nunes Viana e Sonia Burigato, pelas discussões e comentários frutíferos, que ajudaram a melhorar o conteúdo do curso, bem como o projeto original deste livro, cada uma contribuindo com a produção de um texto complementar que consta na parte dos anexos. Gostaríamos de expressar nossos sinceros agradecimentos ao Prof. Leandro Lima, que revisou o manuscrito. Ele nos deu muitos comentários e sugestões. Agradecimentos especiais à Profa. Sonia Burigato por suas muitas observações e ajuda preciosa. Aos editores, pelo incentivo, inclusive às modificações ora apresentadas, nosso reconhecimento. Também, gostaríamos de agradecer antecipadamente ao leitor por apontar quaisquer erros ortográficos ou outro tipo de incorreção, que possam encontrar neste livro, bem como dúvidas e sugestões, que nos enviem, por email, para que possamos aprimorar esta publicação.

Mustapha Rachidi, José Luiz Magalhães de Freitas
e Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

Campo Grande, 15 fevereiro, 2020

# INTRODUÇÃO

Introduzir o conceito de limite de função de uma variável real com valores reais, bem como o conceito de função, é um desafio mesmo para professores experientes. O texto deste livro refere-se a uma abordagem da noção de limite para professores, futuros professores e demais interessados. Foi objeto de uma disciplina do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-UFMS, intitulado: **Limites de função de uma variável real com valores reais e generalizações,** ministrado pelo Prof. Mustapha Rachidi, no 2º Semestre de 2018. Destina-se aos estudantes de graduação, aos que já atuam como professores ou a futuros professores de matemática.

Partimos do fato indiscutível de que as noções de limite e de função são fundamentais na disciplina de Análise Matemática de uma maneira geral. É bem conhecido que a história da noção de limite, bem como de seu ensino, é repleta de obstáculos de diferentes naturezas: conceitual, epistemológica e didática. Desde o século XVIII, a literatura é rica em milhares de trabalhos (livros, artigos, ...) sobre este conceito central e fundamental da Análise Matemática. No entanto, embora os conceitos de função e de limite sejam amplamente estudados na literatura didática e histórica da matemática, eles continuam sendo objeto de estudos didáticos e epistemológicos, e recentemente com o uso dos softwares. Tais estudos são particularmente motivados pelas dificuldades dos alunos em aprender, assim como por seus equívocos diante desses dois conceitos. As análises realizadas nestes estudos foram feitas através de diferentes abordagens. No entanto, as abordagens epistemológica e histórica desses conceitos muitas vezes não estão presentes tanto nos manuais dos cursos de formação de professores, como também nos livros didáticos.

Uma observação geral é o fato de que o professor iniciante, assim como o professor experiente, não pode conhecer as diferentes abordagens em torno do conceito de limite, que são estudadas na literatura, e que constituem uma ferramenta importante para um ensino adequado do conceito de limite. O presente material surgiu do curso de pós-graduação em Educação Matemática da UFMS, e o público era composto de mestrandos e doutorandos, que já atuavam como professores ou futuros professores, então esta disciplina tinha características específicas. Na verdade, tentamos dar a ela diferentes dimensões relacionadas com o conceito de limite. Desse modo, uma visão sintética sobre a evolução histórica do conceito de limite, focando os obstáculos de apresentá-lo como definição. Em seguida, após o estudo das diferentes propriedades dos limites, nós analisamos dificuldades didáticas concernentes à definição do conceito de limite. A generalização desse conceito também foi igualmente abordada.

Especificamente, é feita uma breve revisão da evolução histórica dos conceitos de limite e de função, bem como uma abordagem comparativa dos currículos atuais e dos livros didáticos de matemática para os alunos. Por um lado, trata-se de sensibilizar os professores, ou futuros professores, de matemática para as dificuldades históricas, epistemológicas e didáticas na construção dos dois conceitos. Por outro lado, da importância deles desenvolverem suas próprias estratégias e escolhas para a abordagem desses dois conceitos. Por exemplo, tentar analisar situações práticas (concretas) em que os usos implícitos de funções e de limites de funções podem contribuir para a apropriação de seus conceitos. Em particular, na história da matemática, é possível encontrar esses usos, que muitas vezes escondem o conceito de variável ou de limites, conforme apresentado nos livros utilizados na disciplina.

Por outro lado, os trabalhos práticos propostos possibilitaram esclarecer aos participantes vários pontos importantes sobre o conceito de limite e de funções. Os temas de estudo resultaram em pesquisas realizadas pelos participantes do curso. Para ser mais claro, nós estamos tentando, por meio desta abordagem, tornar o conteúdo deste manuscrito mais atraente para os futuros professores. É também uma questão de permitir que o professor, que busca a perfeição no ensino do limite de funções, progrida nesse sentido. Progresso para ter uma visão global e final nos detalhes sobre as propriedades e conceitos relacionados ao conceito de limite. Nosso objetivo é trabalhar o conceito de limite das funções de uma variável real com valores reais, levando em consideração os seguintes aspectos:

1. Os diferentes conceitos envolvidos na definição deste conceito;

2. As dificuldades históricas e epistemológicas que levaram à implementação da definição de limite;

3. Abordagens didáticas, programas e livros sobre os limites de funções;

4. Estudo matemático das definições e propriedades do conceito de limite de funções de uma variável real com valores reais e suas generalizações;

5. As dificuldades matemáticas em encontrar o limite das funções de uma variável real foram discutidas e métodos práticos foram propostos.

O desenvolvimento da disciplina foi acompanhado de exercícios e problemas matemáticos, dos quais discutimos as soluções e métodos subjacentes. Além disso, questões didáticas e históricas sobre o conceito de limites e de funções foram discutidas em sala de aula. Outros foram objeto de um estudo aprofundado pelos participantes do curso, fornecendo uma contribuição dos alunos nos pareceu interessante e importante para o curso.

Para mais clareza, aqui está o esboço do conteúdo deste livro, que é composto de 6 capítulos e uma conclusão.

O primeiro capítulo é dedicado ao conceito noção de função em que, além das propriedades matemáticas, discutimos algumas considerações didáticas e históricas. O papel das estruturas do espaço vetorial e do anel é importante no Cálculo Diferencial e Integral. Trata-se de mostrar que as operações de adição de funções, de multiplicação de funções e de multiplicação de uma função por um número real, têm um papel algorítmico de construção de novas funções a partir de funções elementares simples, o que também permite ver melhor seus papeis nas operações sobre os limites de funções.

O segundo capítulo é dedicado a alguns elementos sobre as origens do Cálculo Diferencial e Integral, na visão de Newton e de Leibniz, bem como o conceito de limite, na visão de Cauchy, de Weierstrass e Stewart. Por meio de uma breve visão histórica deste conceito, levantamos também considerações e comparações didáticas relacionadas à apresentação do Cálculo Diferencial e Integral nos programas e nos livros didáticos. A evolução histórica do conceito de limite nos parece importante para seu ensino. Portanto, nosso objetivo é conscientizar os professores desse lado histórico e epistemológico. Isso permitirá que o professor tenha uma cultura sobre as dificuldades históricas e epistemológicas sobre o conceito de limite, e pode contribuir a facilitar a construção de sequências pedagógicas sobre esse conceito.

O capítulo 3 diz respeito ao estudo matemático do conceito de limite com uma abordagem topológica. As propriedades matemáticas fundamentais dos limites e suas aplicações serão estudadas. Essa abordagem facilita a generalização do conceito de limite em $\mathbb{R}^n$, bem como em outros espaços métricos. Nossa escolha de insistir nas propriedades dos reais implica a importância das propriedades topológicas de $\mathbb{R}$ para estudar o conceito de limite. A formulação épsilon-delta é obtida como um caso particular da definição de limite com os intervalos e a topologia de $\mathbb{R}$. A formulação topológica da definição do conceito de limite permite definir melhor esse conceito e o da continuidade de uma função, mesmo dentro da estrutura geral dos espaços topológicos.

No capítulo 4, discutimos as definições de limite finito de uma função de uma variável real com valores reais, que são comuns nos livros didáticos. Além disso, a análise de livros e fascículos pela Comissão IREM na França (COMMISSION INTER-IREM Université, 2017) mostra que, na maioria das vezes, a definição com épsilon-delta é frequentemente usada para demonstrar a singularidade do limite e estabelecer outras propriedades, como a soma dos limites, no entanto, na prática, o papel do épsilon-delta não é visível na resolução de exercícios e problemas. Mais precisamente, a resolução dos exercícios é baseada em técnicas que utilizam: os limites das funções usuais, regras e operações nos limites, propriedades de mudanças das variáveis, etc. O que parece análogo ao trabalho seminal de Cauchy sobre os fundamentos da análise moderna.

No capítulo 5, apresentamos alguns métodos de busca de limites, assim como os aspectos gráficos de limites. Por que os métodos? Os métodos de cálculo de limite permitem entender melhor as aplicações das propriedades do Capítulo 3. Ilustramos esses métodos com alguns exemplos simples, a fim de entender melhor as práticas e aplicações das propriedades de limites.

O Capítulo 6 é dedicado ao conceito de limite nos programas do ensino, como nas ementas de algumas disciplinas de Cálculo das universidades Brasileiras.

O último capítulo é uma conclusão geral sobre o conteúdo deste livro. Isto é, esclarecemos o conteúdo dos capítulos anteriores, a fim de entender melhor a originalidade de nossa contribuição por meio de uma questão importante para o leitor, a saber: **Que lições aprendemos deste livro?** Assim, no final, estudantes e professores terão uma visão clara do conceito de limites e suas ramificações e, ligações com diversas disciplinas.

No Apêndice A  incluimos a produção dos participantes. Os alunos trabalharam em tópicos relacionados ao conceito de função, bem como o conceito de limite e sua generalização. De maneira mais clara, as questões abordadas pelos participantes centraram-se em diferentes aspectos da definição de função, como nas abordagens ao conceito de limite e sua generalização. Os temas tratados pelos participantes foram os seguintes:

1. *Um olhar sobre a evolução histórica do conceito de função,* por Rosane Corsini.

2. *O que é uma função? Uma discussão sobre o texto de Mac Lane,* por Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato.

3. *Limite finito e infinito,* por Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli.

4. *Limite de funções em espaços métricos,* por Bruna Letícia Nunes Viana.

Nos Apêndices B e C, colocamos alguns tópicos cujos temas estão relacionados aos conceitos de função e limite, como as estruturas de anéis, corpos e espaços vetoriais, assim como o conceito de valor absoluto e de distância.

# CAPÍTULO 1

## Conceito de função de uma variável real com valor real. Generalizações

Este capítulo trata das funções numéricas de uma variável real com valores reais. Algumas propriedades e definições serão rapidamente revisadas. Outras propriedades serão aprofundadas. O intuito é colocar em prática pontos importantes para o estudo das propriedades matemáticas de limites.

## 1.1 Conceito de função: considerações históricas e didáticas

### 1.1.1 Aspectos da noção de função

O conceito de função é historicamente um dos dois conceitos centrais da disciplina de Análise, juntamente com o de limite (ou infinitesimal). Desde a Idade Média, senão antes, houve muitos trabalhos matemáticos envolvendo esse conceito. Mas, as funções estavam presentes apenas implicitamente e, portanto, obscuras, confusas. Seus diferentes aspectos ainda não haviam sido identificados.

Somente depois de décadas, que uma definição precisa da noção de função aparece, principalmente nos trabalhos de Euler. Percorrer a história dessa noção possibilita mostrar os vários aspectos que todos podem e devem abordar em seu ensino, pois são incentivados nos programas oficiais.

Vamos discutir a seguir três aspectos principais do conceito de função, isto é, o aspecto computacional (ou algébrico); o aspecto gráfico e o geométrico; e o aspecto de $y$ que depende de $x$ (intuitivo e casual).

**O aspecto computacional (ou algébrico)**

Um relacionamento do tipo computacional é a maneira mais simples de expressar uma função. Tal relação pode ser expressa em linguagem puramente retórica, isto é, sem usar notações algébricas literais, que só se tornaram gerais durante o Renascimento. A notação literal de *Viète, Stevin, e Descartes,* reforça o ponto de vista algébrico, para o qual uma função geral é uma combinação de funções básicas, obtidas a partir delas pelas quatro operações, a composição, ou mesmo a transição para o limite ou a uma primitiva ou soma de séries. É este ponto de vista que *Euler* adota, em 1748, em seu livro: *Introdução à Análise do Infinito:*

> *Uma função de grandeza variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e números ou de quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica a qual, além da variável z, contém também quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo:* $a + 3z$ ; $az - 4zz$ ; $az + b.\sqrt{aa - zz}$ ; *cz, etc. são funções de z [...]. A principal diferença nas funções é a combinação de variáveis e as quantidades constantes que as formam. Depende das operações pelas quais as quantidades podem ser recombinadas e combinadas entre si. Estas operações são adição e subtração, multiplicação e divisão; elevação de potência e extração de raízes; às quais deve ser adicionada a resolução das equações. Além dessas operações, que são chamadas algébricas, existem várias outras, que são chamadas transcendentais, como exponenciais, logaritmos e outras sem número, que o cálculo integral torna conhecido.* (EULER, 1988).

Este ponto de vista formal e natural pode revelar-se muito produtivo. Mas é, no entanto, redutivo, e deixa de lado todos os aspectos infinitesimais: as questões da continuidade; as questões do limite e as questões da convergência.

**O aspecto gráfico e o aspecto geométrico**

Traduzir os problemas geométricos em equações entre $x$ e $y$, de uma maneira geral, pela análise do problema, é o método cartesiano, ao estabelecer assim uma ponte entre a geometria e a álgebra literal, Descartes permite que esses dois domínios se enriqueçam e prepara o caminho para os cálculos infinitesimais de *Newton* e *Leibniz*. No entanto, *Descartes* tem pouco interesse na abordagem oposta: a transição da relação algébrica para a curva. Essa abordagem, da representação gráfica, tão comum em nosso ensino, é claramente expressa por *Fermat:* "Assim que uma equação contém duas grandezas desconhecidas, há um lugar correspondente e o ponto extremo de uma dessas quantidades descreve uma linha reta ou uma linha curva" (COLETTE, 1979, p. 14). Mas, a mesma ideia está presente muito antes neste grande matemático medieval que era o bispo *Nicole Oresme.*

A grande explosão da Análise Infinitesimal nos séculos XVII e XVIII baseia-se principalmente no modelo geométrico do conceito de função com *Barrow, Pascal* e *Leibniz.* Uma função geral aparece neste momento como uma linha (diríamos uma curva representativa). O termo função refere-se primeiro, em Leibniz que o introduziu, a várias grandezas geométricas relacionadas com a curva, não só, como para nós, as ordenadas, por exemplo, a subtangente, a subnormal, etc. O progresso decisivo feito por *Newton* e *Leibniz* é continuado com o método cartesiano gerando, a partir do modelo geométrico, um Cálculo Diferencial e Integral, com algoritmos próprios, que pode ser realizado independentemente de considerações gráficas. No entanto,

- A legitimidade e o fundamento final desse cálculo residem na intuição geométrica (ou cinemática).

- Mas, a intuição geométrica pode ser muito enganosa. Ela impede considerar funções radicalmente irregulares, por exemplo, descontínuas em um conjunto denso, ou contínuas em $\mathbb{R}$ e diferenciáveis em nenhum real. No entanto, essas funções "patológicas" são de grande interesse matemático e mesmo físico (o movimento browniano, ou várias funções fractais que são muito úteis na física), e seu estudo aprofundado será realizado no século XIX.

**O aspecto de $y$ depende de $x$ (intuitivo e casual)**

Uma quantidade $x$ determina completamente outra quantidade $y$. Não podemos fazer nenhum estudo quantitativo de um fenômeno natural sem recorrer a tal modelo, hoje onipresente, não só nas ciências experimentais, mas também na Economia, em várias tecnologias, em inúmeros campos da ciência e na vida moderna. No entanto, neste momento, o conceito abstrato e geral de correspondência ainda não estava claro, as funções envolvidas foram reduzidas a tabelas numéricas ou a fórmulas algébricas específicas do problema em estudo. Como no campo do contínuo digital, há a necessidade de um esclarecimento rigoroso e preciso, que traga a definição elementar e geral da função, dentro do arcabouço da teoria dos conjuntos, que usamos hoje.

### 1.1.2 Definições históricas

Ao examinarmos a história, percebemos que a noção de função demorou a ser construída e desenvolvida para assumir a forma (ou formas) que conhecemos nos ensinamentos e livros de hoje. De fato, ela vem do trabalho de filósofos e cientistas que objetivaram compreender os movimentos cinemáticos dos corpos e encontrar métodos para estudar e descrever esses fenômenos naturais.

Na Europa, os trabalhos mais notáveis sobre esse assunto são de *R. Bacon, H. Heytesbury, R. Swinshead* e *N. Oresme,* que estudaram os primeiros conceitos da cinemática (final dos séculos XIII e XIV): velocidade instantânea; primeira representação gráfica do grau de intensidade ("função"): linha vertical (linha de latitude) e linha horizontal (linha de longitudes). *Oresme* estudou o gráfico da variação da velocidade em função do tempo de viagem em aceleração uniforme, introduziu as noções de Longitudes - Latitudes, para calcular a distância percorrida em velocidade. É um *status* funcional da cinemática.

Embora as definições do conceito de função tenham sido esclarecidas no século XVIII, algumas ideias anteriores permanecem relacionadas ao trabalho de *R. Bacon, H. Heytesbury, R. Swinshead* e *N. Oresme.* Como no caso do bispo *Nicholas de Oresme* (1323-1382), um estudante da Universidade de Paris, o movimento de aceleração constante, ele representa em um gráfico a velocidade que varia com o tempo da seguinte forma: a linha horizontal, ele chamou de longitude e representou as velocidades por linhas verticais, que são perpendiculares às longitudes, que chamou latitudes.

No trabalho de desenvolvimento, no final deste capítulo, listamos definições históricas do conceito de função, que foram levadas a cabo no período de 1694 a 1927. No entanto, em vista de sua importância o conceito de funções continua a ser objeto de estudos de matemática, ensino e epistemologia. Além disso, a análise de diferentes definições que surgiram ao longo do tempo nas diferentes interpretações e representações do conceito de função pode contribuir para a reflexão sobre sua importância no atual ensino de funções (veja no Anexo 1 o trabalho de *Rosane Corsini*).

De fato, o debate sobre esse conceito não se esgota, e as idéias sobre o assunto continuam provocando discussões. De fato, o trabalho de Mac Lane sobre o conceito de função escrito em 1986 mostra que ainda há aspectos a serem discutidos sobre o assunto (ver no Anexo 2 o trabalho de *Sonia Burigato*). O trabalho de Mac Lane será discutido neste livro.

A partir do estudo de duas definições dadas para limite finito por Weierstrass, surgiu uma pergunta: "Porque a função pode não ser definida no ponto a?" Com isto, surge o trabalho (Anexo 3) de *Magda C. Junqueira Godinho Mongelli,* sobre essas duas definições e as formas de abordar em sala de aula, usando o software Geogebra.

Por outro lado, desde o trabalho de *Euler* e *Cauchy,* o conceito de função passou por diferentes generalizações para outros espaços como os espaços vetoriais normados (ver no Anexo 4 o trabalho de *Bruna Nunes*).

## 1.2 Intervalos de $\mathbb{R}$

Neste parágrafo vamos lembrar as definições e propriedades fundamentais do conceito de intervalo numérico, para estudar as funções de uma variável real com valores reais. No Capítulo 3, retornaremos ao aspecto topológico dos intervalos de $\mathbb{R}$, com o objetivo de formular uma definição do conceito de limite e o estudo de suas propriedades.

Os intervalos de $\mathbb{R}$ são importantes para o estudo dos conceitos de limite e de continuidade de uma função de uma variável real com valores reais. A noção de intervalo é conhecida por nós desde o ensino médio. Ela está ligada a dois conceitos importante que são a desigualdade e o valor absoluto.

Lembre-se que comparar dois números reais $a$ e $b$ é descobrir qual é o maior (ou se são iguais). Dizer que $a \leq b$ equivale a dizer que $a - b \leq 0$. Assim, comparar $a$ e $b$ é estudar o sinal de $a - b$ . E a relação $\leq$ uma relação de ordem entre os números reais. É bem conhecido que $\mathbb{R}$ equipado com a relação $\leq$ é um corpo ordenado e que essa ordem é total, isto é, para todos reais $x, y$ temos $x \leq y$ ou $y \leq x$. Com a relação de ordem em $\mathbb{R}$, podemos definir subconjuntos importantes, que desempenham papel fundamental no estudo do conceito de limites.

**Definição 1.1** *Chamamos intervalo de* $\mathbb{R}$ *todo subconjunto* $I$ *de* $\mathbb{R}$ *tal que para todos* $x$, $y$ *em* $I$ *e todo* $a$ *em* $\mathbb{R}$ *com* $x \leq a \leq y$, *então temos* $a \in I$.

### 1.2.1 Intervalos limitados de $\mathbb{R}$

Lembre-se primeiro da seguinte definição.

**Definição 1.2** *Seja* $I$ *um intervalo de* $\mathbb{R}$. *Dizemos que* $I$ *é:*

1. *Limitado superiormente se existe* $M$ *em* $\mathbb{R}$ *tal que:*

$$x \leq M, \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

2. *Limitado inferiormente se existe* $m$ *em* $\mathbb{R}$ *tal que:*

$$x \geq m, \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

3. *Limitado se existem* $m$ *e* $M$ *em* $\mathbb{R}$ *tal que:*

$$m \leq x \leq M, \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

A definição precedente também é valida para todo subconjunto dos números reais.

Cada intervalo de $\mathbb{R}$ que é ao mesmo tempo limitado superiormente e limitado inferiormente é chamado de **intervalo limitado.**

Seja um intervalo limitado de $\mathbb{R}$, de acordo com as propriedades de $\mathbb{R}$, o intervalo $I$ admite uma borda inferior $a$ e uma borda superior $b$. Assim, existem os seguintes tipos de intervalos limitados:

(1) Os dois reais $a$ e $b$ pertencem a $I$. Neste caso, o intervalo $I$ é formado dos reais x tal que $a \leq x \leq b$, isto é,

$$I = \{ x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \}$$

Dizemos que $I$ é um *intervalo fechado* de $\mathbb{R}$ e é notado $[a;b]$.
(2) Nenhum dos dois reais $a$ e $b$ pertence a $I$. Neste caso, do intervalo $I$ ser formado dos reais $x$ tal que $a<x<b$, isto é,

$$I = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

Dizemos que $I$ é um *intervalo aberto* de $\mathbb{R}$ e é notado$]a;b[$.
(3) Somente um dos dois reais $a$ e $b$ pertence a $I$. Neste caso, o intervalo I é "semi" aberto e apresentado de uma das duas formas:

$$I = [a,b[ = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}, \quad I = ]a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

Temos, a seguinte caracterização dos intervalos.

**Proposição 1.1** *Seja $I$ subconjunto de $\mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$I$ é um intervalo de $\mathbb{R}$;*
2. *Para cada $a$ em $I$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $]a - \epsilon, a + \epsilon[ \subset I$.*

A Proposição 1.1 também caracteriza intervalos ilimitados, estudados na Subseção 1.2.2. Também, temos a seguinte propriedade dos intervalos de $\mathbb{R}$.

**Proposição 1.2** *Seja $I_k$ com $k \in K$, uma família de intervalos de $\mathbb{R}$. Então temos*

1. *$\cap_{k\in K} I_k$ é um intervalo de $\mathbb{R}$.*
2. *Se $\cap_{k\in K} I_k \neq \emptyset$, então $\cup_{k\in K} I_k$ é um intervalo de $\mathbb{R}$.*

A classe particular dos intervalos abertos e limitados de $\mathbb{R}$, que são representados da seguinte forma:

$$]a - r, a + r[ = \{x \in \mathbb{R}; a - r < x < a + r\},$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ são números reais, é importante para o estudo do conceito de limite (finito) e a continuidade das funções numéricas de variáveis reais. De fato, essa classe de intervalos também é definida usando o conceito de valor absoluto, que aparece na definição de limite de Weirstrass. Lembre-se, que para todo $x$ em $\mathbb{R}$, o valor absoluto de $x$ é définido por:

$$|x| = x \quad \text{se} \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad |x| = -x \quad \text{se} \quad x < 0.$$

De forma equivalente, temos: $|x| = \max\{x; -x\}$.

**Proposição 1.3** *Seja a um real e r um real estritamente positivo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $x \in ]a-r; a+r[$
2. $a - r < x < a + r$
3. $|x - a| < r$

**Interpretação gráfica de** $|y - x|$. Em uma linha de origem O graduada, seja $M$ o ponto de abscissa $x$ e $N$ o ponto de abscissa $y$. Então $|y - x|$ representa a distância entre os pontos $M$ e $N$, isto é, $\overline{MN} = |y - x|$. Também, temos a seguinte notação:

$$\overline{MN} = d(x, y) = |y - x|,$$

para todos $x, y$ em $\mathbb{R}$.

## 1.2.2 Intervalos ilimitados de $\mathbb{R}$

Lembre-se da seguinte definição.

**Definição 1.3** *Seja D um subconjunto de* $\mathbb{R}$.

1. *Dizemos que $I$ é ilimitado superiormente se para todo $m$ em $\mathbb{R}$ existe*

*$x \in I$ tal que $x \geq m$.*

2. *Dizemos que $I$ é ilimitado inferiormente se para todo $M$ em $\mathbb{R}$ existe $\in I$ tal que $x \leq M$.*

Aqui temos três tipos de intervalos ilimitados.

**Intervalos não limitado superiormente.** *Seja $I$ um intervalo limitado inferiormente, mas não limitado superiormente. Seja $a$ a borda inferior de $I$. Então, o intervalo $I$ toma uma das seguintes formas:*

1. Se $a \in I$ temos $I = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\} = [a, +\infty[$. Dizemos que $I$ é fechado à esquerda e ilimitado à direita.
2. Se $a \notin I$ temos $I = \{x \in \mathbb{R}, x > a\} = ]a, +\infty[$. Dizemos que $I$ é aberto à esquerda e ilimitado à direita.

**Intervalos não limitado inferiormente.** *Seja $I$ um intervalo limitado superiormente, mas não limitado inferiormente. Seja $b$ a borda superior de $I$. Então, o intervalo $I$ toma uma das seguintes formas:*

1. Se $b \in I$ temos $I = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\} = ]-\infty, b]$. Dizemos que $I$ é fechado à direita e ilimitado à esquerda.
2. Se $b \notin I$ temos $I = \{x \in \mathbb{R}, x < b\} = ]-\infty, b[$. Dizemos que $I$ é aberto à direita e ilimitado à esquerda.

**Intervalo não limitados superiormente e inferiormente.** *Segundo a definição geral, este intervalo é igual a $\mathbb{R}$. Diz-se que este intervalo é aberto e ilimitado à direita e à esquerda.*

## 1.3 Generalidades sobre as funções de uma variável real

### 1.3.1 Definições

Vamos dar uma definição simples de função de uma variável real com valores reais ou uma breve *definição de função numérica de uma variável real.*

**Definição 1.4** *Uma função numérica de uma variável real $f$ é uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ou de uma parte $D$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Escrevemos:*

$$f \ : \ D \ \rightarrow \ \mathbb{R}.$$

*Se $D$ é o conjunto dos reais $x$ tais que $f(x)$ existe (ou $f(x) \in \mathbb{R}$), então a função $f$ é uma aplicação de $D$ em $\mathbb{R}$ e o subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ é chamado domínio da função $f$.*

**Notações**

- Para todo $x$ em $D$ o real $f(x)$ é chamado a imagem de $x$ por $f$.
- Nós denotamos por $f(D)$ o conjunto das imagens, isto é $f(D) = \{f(x), x \in D\}$.
- Se $D_1 \subset D$ denotamos $f(D_1)$ por $f(D_1) = \{f(x), x \in D_1\}$

**<u>Exemplo 1.</u>** Seja a função:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}.$$

O conjunto de definição de $f$ é o conjunto dos valores da variável real $x$ para os quais o quociente $\frac{2x}{x^2-4}$ existe. Então, então devemos ter $x^2 - 4 \neq 0$, o que implica $x \neq -2$ ou $x \neq 2$. Assim, o domínio de $f$ é:

$$D = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; 2[ \cup ]2; +\infty[ \text{ ou } D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

**Exemplo 2.** Seja a função:

$$f(x) = \frac{2x}{x-4} \text{ para } x \neq 4 \text{ e } f(4) = 3.$$

Então, $f(x)$ existe para todo real $x$. Assim, o domínio da função $f$ é: $D = \mathbb{R}$

**Gráfico de uma função numérica.**

**Definição 1.5** *Chamamos o gráfico de uma função numérica f o subconjunto de* $\mathbb{R}^2$ *formado pelos pares* $(x, f(x))$, *onde* $x$ *pertence a D o domínio da função f.*

**Gráfico e curva de uma função numérica.** O gráfico de uma função numérica pode ser representado em um plano por uma curva.

**Definição 1.6** *Seja um plano (P) e um sistema de coordenadas* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *Chamamos curva representando o gráfico de f ou* **curva representativa** *de f, o conjunto (C) dos pontos M* $(x, f(x))$ *do plano, onde a variável real* $x$ *pertence a D, o domínio da função f.*

## 1.3.2 Propriedades eventuais das funções numéricas

Existem diferentes tipos de funções numéricas de uma variável real. Cada tipo (ou classe) de funções é caracterizado por uma ou mais propriedades, o que facilita seu estudo geral. Aqui apresentamos 4 classes importantes de funções numéricas.

**Funções numéricas periódicas.** Seja $f$ uma função numérica de uma variável real cujo domínio é $D$. Se houver um real $u > 0$ tal que para todo x em $D$ temos:

1. $x + u \in D$

2. $f(x+u) = f(x)$,

então dizemos que *a função $f$ é periódica.* O número:

$$T = \min\{u > 0,\ f(x+u) = f(x), \text{ para todo } x \in D\},$$

é chamado *o período* da função $f$.

**Proposição 1.4** *Seja $f$ uma função numérica periódica de período $T$. Então, as seguintes afirmações são verificadas:*

1. $f(x+nT) = f(x)$, *para todo* $x \in D$ *e todo* $n \in \mathbb{Z}$.

2. *A curva representativa de $f$ é globalmente invariável por qualquer translação vetorial* $k\overrightarrow{v}$, *onde* $k \in \mathbb{Z}$ *e* $\overrightarrow{v} = (T, 0)$.

**Exemplo.** *Seja a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = 2\text{sen}(x + \phi).$$

A função $f$ é periódica de período $T = 2\pi$. Assim, temos:

$$f(x + 2k\pi) = f(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

**Exemplo 2.** *Seja a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = 5\text{sen}(2x + \phi).$$

A função $f$ é periódica de período $T = \pi$. Assim, temos:

$$f(x + k\pi) = f(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

**Funções numéricas: Par e Ímpar.** Seja $f$ uma função numérica de uma variável real cujo domínio é $D$. Dizemos que a **função $f$ é par** se para todo $x$ em $D$ temos:

1. $-x$ pertence a $D$

2. $f(-x) = f(x)$.

Dizemos que a **função $f$ é ímpar** se para todo $x$ em $D$ temos:

1. $(-x)$ pertence a $D$
2. $f(-x) = -f(x)$.

**Proposição 1.5** *1) Seja $f$ uma função numérica ímpar cujo domínio é $D$. Então:*

a) *A curva representativa de $f$ é simétrica em relação à origem $O$, dos eixos das coordenadas de qualquer sistema de coordenadas $(O, \vec{i}, \vec{j})$ do plano.*

b) *Se $0 \in D$ então $f(0) = 0$.*

*2) Se o sistema de coordenadas do plano cartesiano $(O, \vec{i}, \vec{j})$ é ortonormal, então a curva representativa de uma função par é simétrica em relação ao eixo $(Oy)$.*

**<u>Exemplo.</u>** Sejam a funções

$f(x) = 2x^2 + 7|x|$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x^3 - \dfrac{5}{x}$, onde $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, sabemos que $(-x)^2 = x^2$ e $|-x| = |x|$, então temos:

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 7|-x| = 2x^2 + 7|x| = f(x).$$

Assim, a função $f$ é par.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, sabemos que $(-x)^3 = -x^3$ e $\frac{5}{-x} = -\frac{5}{x}$, então temos:

$$g(-x) = (-x)^3 + \frac{5}{-x} = -x^3 + \frac{5}{x} = -\left(x^3 - \frac{5}{x}\right) = -g(x).$$

Assim, a função $g$ é ímpar.

**Funções numéricas limitadas.** *Seja $f$ uma função numérica cujo domínio é $D$.* Dizemos que:

- a função $f$ é **limitada superiormente** em $D$ se o conjunto das imagens $f(D)$ é limitado superiormente.

- a função $f$ é **limitada inferiormente** em $D$ se o conjunto das imagens $f(D)$ é limitado inferiormente.
- a função $f$ é **limitada** em $D$ se o conjunto das imagens $f(D)$ é limitado (superiormente e inferiormente).

Em outras palavras.

**Proposição 1.6** *Seja f uma função numérica cujo domínio é D. Então, temos:*

1. *A função f é* **limitada superiormente** *em D equivalente dizer que existe um real $M$ tal que:*

$$f(x) \leq M, \text{ para todo } x \in D.$$

2. *A função f é* **limitada inferiormente** *em D equivale, a dizer que existe um real $m$ tal que:*

$$m \leq f(x), \text{ para todo } x \in D.$$

3. *A função f é* **limitada** *em D equivale, a dizer que existem dois reais $m$ e $M$ tais que:*

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo } x \in D.$$

**Exemplo 1.** Seja a função $f(x) = 5\cos(2x + 7)$ com $x \in \mathbb{R}$. Como $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$-5 \leq f(x) = 5\cos(2x + 7) \leq 5, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Então, o conjunto das imagens $f(\mathbb{R}) = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ é limitado superiormente com 5 e inferiormente com -5. Assim, a função $f$ é limitada.

**Exemplo 2.** Seja a função $g(x) = 5x^2 + 3$ com $x \in \mathbb{R}$. Como $x^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$g(x) = 5x^2 + 3 \geq 3, \ \textit{para todo} \ x \in \mathbb{R}.$$

Então, o conjunto das imagens $g(\mathbb{R}) = \{ g(x), x \in \mathbb{R} \}$ é limitado inferiormente com 3, mas não é limitado superiormente (com os resultados do Capítulo 3, podemos estudar o limite de $x^2$ quando $x$ tende para + $\infty$ ou - $\infty$ ). Assim, a função $g$ é limitada inferiormente, mas não é limitada superiormente.

**<u>Exemplo 3.</u>** Seja a função $h(x) = -x^2 + 3$ com $x \in \mathbb{R}$. Como $-x^2 \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$h(x) = -x^2 + 3 \leq 3, \ \textit{para todo} \ x \in \mathbb{R}.$$

Então, o conjunto das imagens $h(\mathbb{R}) = \{h(x), x \in \mathbb{R}\}$, é limitado superiormente com 3, mas não é limitado inferiormente (com os resultados do Capítulo 3, podemos estudar o limite de $-x^2$ quando $x$ tende para + $\infty$ ou - $\infty$ ). Assim, a função $f$ é limitada superiormente mas não é limitada inferiormente.

**Proposicao 1.7** *Seja f uma função numérica cujo domínio é D. Então, as duas afirmações são equivalentes:*

1. *A função f é limitada em D.*

2. *O conjunto $\{|f(x)|, \ x \in D\}$ é limitado superiormente.*

*Prova.* Se $f$ é limitada em $D$, então existem dois reais $m$ e $M$ tais que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x$ em $D$. Seja $K = \max\{|m|, |M|\}$, então $|f(x)| \leq K$, para todo $x$ em $D$. Agora, suponha que o conjunto $\{|f(x)|, \ x \in D\}$ é limitado superiormente, então existe um real $H > 0$ tal que $|f(x)| \leq H$, para todo $x$ em $D$. Como $|x| \geq 0$, para qualquer $x$ em $\mathbb{R}$ e $|x| \leq a$ equivale à $-a \leq x \leq a$, deduzimos que:

$$-H \leq f(x) \leq H,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

**Funções numéricas monótonas.** Seja $f: D \to \mathbb{R}$. A função $f$ é dita:

- **Crescente** em $D$ se para todos $x, y \in D$: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$,
- **Derescente** em $D$ se para todos $x, y \in D$: $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$,
- **Estritamente crescente** em $D$ se para todos $x, y \in D$: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,
- **Estritamente decrescente** em $D$ se para todos $x, y \in D$: $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- **Monótona** em $D$, se $f$ é crecente ou decrescente.
- **Estritamente monótona** em $D$, se $f$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Daremos exemplos simples de funções monótonas.

<u>**Exemplo 1.**</u> Sejam as funções $f$: $[0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, e $h$ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 2\sqrt{x}, \quad g(x) = -2x^2 + 5 \quad \text{e} \quad h(x) = x^3 + 2.$$

1. Mostrar que a função $f$ é crescente (estritamente) em $[0, +\infty[$.

2. Mostrar que a função $g$ é decrescente (estritamente) em $[0, +\infty[$.

3. Mostrar que a função $h$ é crescente (estritamente) em $\mathbb{R}$.

Como exercício podemos demonstrar as seguintes propriedades.

**Proposicao 1.8** *Sejam f uma função cujo domínio é D e $\alpha$ um real. Deno-*

*tamos por $\alpha.f$ a função definida por $(\alpha.f)(x) = \alpha.f(x)$. Então, temos:*

- Se $f$ é crescente e $\alpha \in ]0; +\infty[$ então a função $\alpha.f$ é crescente.
- Se $f$ é crescente e $\alpha < 0$ então $\alpha.f$ é decrescente.
- Se $f$ é decrescente e $\alpha \in ]0; +\infty[$ então $\alpha.f$ é decrescente.
- Se $f$ é decrescente e $\alpha < 0$ então $\alpha.f$ é crescente.

*Prova.* Aqui vamos provar a primeira e quarta afirmações.
Primeira: Seja $f$ uma função crescente sobre *D*. Sejam $x, y$ em *D* tais que $x \leq y$ então $f(x) \leq f(y)$. Se $\alpha \in ]0; +\infty[$ temos $\alpha.f(x) \leq \alpha.f(y)$, assim $(\alpha.f)(x) \leq (\alpha.f)(y)$. E deduzimos que a função $\alpha.f$ é crescente.

Quarta: Seja $f$ uma função crescente sobre *D*. Sejam $x, y$ em *D* tais que $x \leq y$ então $f(y) \leq f(x)$. Se $\alpha < 0$ temos $\alpha.f(x) \leq \alpha.f(y)$, assim $(\alpha.f)(x) \leq (\alpha.f)(y)$. E deduzimos que a função $\alpha.f$ é crescente.

**<u>Exemplo 2.</u>** Sejam as funções $f$: $[0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 4\sqrt{x}, \quad g(x) = -2x^2 + 5 \quad \text{e} \quad h(x) = x^3 - 2.$$

1. Mostrar que a função $f$ é decrescente (estritamente) em $[0, +\infty[$.

2. Mostrar que a função $g$ é decrescente (estritamente) em $[0, +\infty[$.

3. Mostrar que a função $h$ é crescente (estritamente) em $\mathbb{R}$.

## 1.4 Operações e propriedades básicas

Nesta seção, fornecemos operações, definições e propriedades que serão úteis para o estudo de limite de funções. Daremos alguns exemplos e algumas aplicações.

### 1.4.1 Operações com funções

Seja $D$ um subconjunto (não vazio) de $\mathbb{R}$, por exemplo, $D = I$ (intervalo), $D = [a, +\infty[$ ($a$ um real), $D = ]+\infty; b]$ ($b$ um real). Nós denotamos por $\mathcal{F}$ $(E; R)$, o conjunto de funções de $D$ com valores em $\mathbb{R}$ que é mesmo que dizer:

$$\mathcal{F}\,(D\,;\mathbb{R}) = \{\, f: D \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é uma função} \,\}$$

Para todos $f, g$ em $\mathcal{F}\,(D\,;\mathbb{R})$ e todo $a \in \mathbb{R}$, nós consideramos as seguintas operações nas funções $f, g$ e $a \in \mathbb{R}$:

| Operações | Notação | Definição |
|---|---|---|
| Adição de duas funções | $f + g$ | $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x$ em $D$. |
| Multiplicação de duas funções | $f \times g$ | $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, para todo $x$ em $D$. |
| Produto de uma função por um real | $a . f$ | $(a . f)(x) = a . f(x)$, para todo $x$ em $D$. |

As precedentes operações de adição e de produto de duas funções, assim como o produto de uma função por um real representa um processo algorítmico para a construção de novas funções a partir de funções elementares conhecidas.

<u>**Exemplo 1.**</u> Sejam as funções $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ e $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 4\sqrt{x} \text{ e } g(x) = 2x^2 - 5.$$

Então, temos:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 4\sqrt{x} + 2x^2 - 5$, $(f \times g)(x) = f(x).g(x) = 4(2x^2 - 5)\sqrt{x}$, e $(5.f)(x) = 5.f(x) = 20\sqrt{x}$.

**Extensão.** Para $f$ em $\mathcal{F}(D_1 ; \mathbb{R})$ e $g$ em $\mathcal{F}(D_2 ; \mathbb{R})$ com $D_1 \neq D_2$ e $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, podemos definir a soma $f + g$ e o produto $f \times g$, mesmo que $f$ e $g$ não possuam o mesmo domínio. É uma questão de considerar a interseção $D_1 \cap D_2$ dos domínios $D_1$ e $D_2$ de $f$ e $g$ respectivamente. Assim, $f + g$ e $f \times g$ são definidas por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, para todo $x \in D_1 \cap D_2$.

<u>**Exemplo 2.**</u> Sejam as funções $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 4\sqrt{x} \text{ e } h(x) = x^3 - 2.$$

Então, as funções:

$$(f + h)(x) = 4\sqrt{x} + x^3 - 2 \text{ e } (f \times h)(x) = 4(x^3 - 2)\sqrt{x},$$

são definidas sobre $D = [0, +\infty[ \cap \mathbb{R} = [0, +\infty[$.

Também, usando o conceito de valor absoluto e de máximo e mínimo de dois reais, podemos definir novas funções a partir de duas funções.

**Definição 1.7** <u>*Funções* $|f|$, max $(f, g)$, min $(f, g)$</u>. *Sejam duas funções* $f$, $g : E \to \mathbb{R}$.

- *A função* $|f|$ *é definida por* $|f|(x) = |f(x)|$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$,

- *A função* max $(f,g)$ *é definida por max* $(f,g)(x) = \max(f(x), g(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}$,

- *A função* min $(f,g)$ *é definida por min* $(f,g)(x) = \min(f(x), g(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}$,

Para todos os reais $a, b$ sabemos que $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ e $\min(a,b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$, temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.9** *Relação* entre $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$. *Sejam duas funções* $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, então temos

- $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$,

- $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$,

- $|f| = \max(f, -f)$.

**Extensão.** Também quando $f$ e $g$ não possuem o mesmo domínio, podemos definir $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, assim que o quociente $\frac{f}{g}$ (para $g \neq 0$). É uma questão de considerar a interseção $D_1 \cap D_2$ dos domínios $D_1$ e $D_2$ de $f$ e $g$ respectivamente.

## 1.4.2 Função injetora, sobrejetora e bijetora

Estamos interessados em apresentar algumas propriedades gerais de funções.

**Definição 1.8** *<u>Função injetora, Função sobrejetora e Função bijetora.</u> Sejam D, F dois subconjuntos (não vazios) de* $\mathbb{R}$*, por exemplo, D ou F pode ser* $I = [a;b]$, $[a; +\infty[$ *(a um real),* $]-\infty$ *(b um real). Seja* $f : D \longrightarrow F$ *uma função.*

- *Dizemos que f é uma injetora, se para todos* $x, y$ *em D:* $f(x) = f(y)$ *implica que* $x = y$*. ou equivalentemente* $x \neq y$ *implica que* $f(x) \neq f(y)$.

- *Dizemos que f é uma sobrejetora, se para todo* $y$ *em F, existe* $x$ *em*

*D tal que $y = f(x)$.*

- *Dizemos que f é bijetora, se f é injetora e sobrejetora.*

**<u>Exemplo.</u>** Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1. A função f é injetora?

2. A função f é sobrejetora?

2. Mostre que o conjunto das imagens é $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.

**Solução.** 1) Sejam $x, y$ dois reais não nulos tais que $x \neq y$. Se $f(x) = f(y)$ então temos $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2y}{y^2+1}$. Assim, temos

$2x(y^2+1) = 2y(x^2+1) \Leftrightarrow 2xy^2 + 2x = 2yx^2 + 2y \Leftrightarrow 2xy^2 - 2x^2y = 2y - 2x$.

Então, temos que $2xy(y - x) = 2(y - x)$, e como $x \neq y$ ou equivalentemente $x - y \neq 0$, deduzimos que $xy = 1$. Portanto, deduzimos que $x \neq 0$ e $y = \dfrac{1}{x}$ têm a mesma imagem. De fato, um cálculo direto mostra que, para $x \neq 0$, temos $f(\frac{1}{x}) = f(x)$. Em conclusão, $f$ não é uma função injetora.

2) Seja $y \in \mathbb{R}$, suponha que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} = y$. Então, o real $x$ é uma solução da seguinte equação polinomial de segundo grau $yx^2 - 2x + y = 0$. Como $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2)$, deduzimos que para $|y| > 1$ temos $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2) < 0$. Assim, se $|y| > 1$ não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} = y$. Assim, a função $f$ não é sobrejetora.

3) Sejam $a = f(x)$ e $b = 1$ ou -1. Para $b = 1$ comparar os dois números $a$ e $b$ equivale a estudar o sinal de $a - b$. Temos:

$$1 - f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0.$$

Então, temos $f(x) \leq 1$. Para $b = -1$, comparar os dois números $a$ e $b$ equivale a estudar o sinal de $a - b$. Temos:

$$f(x) - (-1) = \frac{2x}{x^2+1} + = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0.$$

Então, temos $f(x) \geq -1$. Assim, temos que $-1 \leq f(x) \leq 1$, isto é, $f(\mathbb{R}) \subset [-1; 1]$

Por outro lado, temos $f(0) = 0$ e para $0 < |y| \leq 1$ temos $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2) \geq 0$, então os números reais

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{\Delta}}{2y} = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \text{ e } x_2 = \frac{2-\sqrt{\Delta}}{2y} = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y},$$

verificam $f(x_1) = f(x_2) = y$. Então temos a inclusão $[-1; 1] \subset f(\mathbb{R})$. Em conclusão, o conjunto das imagens é $f(\mathbb{R})$ é dado por:

$$f(\mathbb{R}) = [-1; 1].$$

**Proposicao 1.10** *Operações usuais com funções monótonas*. Sejam duas funções $f, g \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$.

1. *Se as funções $f$ e $g$ tiverem o mesmo sentido de monotonia (crescente ou decrescente), então $f + g$ é monótona com o mesmo sentido que $f$ e $g$.*
2. *Se $f$ e $g$ são crescentes e positivas, então $f \times g$ é monótona crescente.*
3. *Se $f$ e $g$ são decrescentes e positivas, então $f \times g$ é monótona decrescente.*

*Prova.* 1) Sejam $f, g \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$ duas funções crescentes. Sejam $x, y$ em $D$ com $x \leq y$, então $f(x) \leq f(y)$ e $g(x) \leq g(y)$. Com a propriedade da compatibilidade da relação de ordem $\leq$ com a adição em $\mathbb{R}$, deduzimos que $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$, e assim, $(f+g)(x) \leq (f+g)(y)$. Então $f + g$ é crescente. Mesma prova é válida quando $f$ e $g$ são funções decescentes.

2) Sejam $f, g \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$ duas funções crescentes e positivas. Sejam $x, y$ em $D$ com $x \leq y$, então $f(x) \leq f(y)$ e $g(x) \leq g(y)$. Com a propriedade da compatibilidade da relação de ordem $\leq$ com a multiplicação em $\mathbb{R}$, deduzimos que $f(x) \,.\, g(x) \leq f(y) . g(y)$, e assim, $(f \times g)(x) \leq (f \times g)(y)$. Então $f \times g$ é crescente. Mesma prova é válida quando $f$ e $g$

são funções decescentes e positivas. $\square$

**Exemplo.** Sejam as funções $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ e $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 4\sqrt{x} \text{ e } g(x) = 5x^2.$$

Então, as funções $f$ e $g$ são positivas. Sejam $x, y$ em $\mathbb{R}$ com $x \leq y$, sabemos que $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ e $x^2 \leq y^2$. Assim temos $f(x) = 4\sqrt{x} \leq f(y) = 4\sqrt{y}$ e $g(x) = 5x^2 \leq g(y) = 5y^2$, e deduzimos que as funções $f$ e $g$ são crescentes sobre $D = [0, +\infty[$. Então , as funções $f + g$ e $f \times g$ são crescentes sobre $D = [0, +\infty[$.

### 1.4.3 Composição de duas funções. Funções inversa

A composição de funções é uma lei que é diferente da adição, da multiplicação e do produto de funções. A composição vai permitir a construção de outra nova função a partir de duas funções. Por outro lado, as propriedades de composição de funções, vão ajudar a estudar as funções.

**Definição 1.9** *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{R}$ duas funções tais que: $f(D) \subset F$. Assim, com as funções $f$ e $g$ temos uma nova função:*

$$h : D \to \mathbb{R}$$

*Definida por*

$$h(x) = g(y) \text{ onde } y = f(x) \text{ ou } h(x) = g[f(x)], \text{ para qualquer } x \in D.$$

*E a função $h$, denotada por $h = gof$, é chamada a função composta de $f$ e $g$ ou função composta $f$ seguida por $g$.*

**Exemplo.** Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D = [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 4x^2 + 5 \text{ e } g(x) = 3\sqrt{x} + 2.$$

Dê a expressão da função composta $gof$.

Como $x^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) = 4x^2 + 5 > 0$. Assim, deduzimos que conjunto das imagens da função $f$ é tal que $f(\mathbb{R}) \subset D = [0, +\infty[$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$g(f(x)) = 3\sqrt{f(x)} + 2 = 3\sqrt{4x^2 + 5} + 2.$$

Assim, deduzimos que $gof(x) = 3\sqrt{4x^2 + 5} + 2$.

Também, uma resolução similar mostra que $fog(x) = f(g(x)) = 4(3\sqrt{x+1} + 2)^2 + 5$, assim deduzimos que:

$$fog(x) = 36x + 48\sqrt{x+1} + 57.$$

Isso implica que, temos $gof \neq fog$.

**Proposição 1.11** <u>Composição e monotonia</u>. *Sejam* $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{R}$ *duas funções tal que* $f(D) \subset F$.

1. *Se* $f$ e $g$ *são crescentes, então a função composta* $gof$ *é crescente.*

2. *Se* $f$ e $g$ *são decrescentes, então a função composta* $gof$ *é crescente.*

3. *Se* $f$ *é decrescente e* $g$ *é crescente, então a função composta* $gof$ *é decrescente.*

4. *Se* $f$ *é decrecente e* $g$ *é crescente, então a função composta* $gof$ *é decrescente.*

*Prova.* 1) Sejam $f \in \mathfrak{F}(D_1, \mathbb{R})$ e $g \in \mathfrak{F}(D_2, \mathbb{R})$ duas funções crescentes com $f(D_1) \subset D_2$. Sejam $x$, $y$ em $D_1$ com $x \leq y$, então $f(x) \leq f(y)$. Como $f(x)$, $f(y)$ pertencem à $D_2$ e $f(x) \leq f(y)$, então $g(f(x)) \leq g(f(y))$. Assim deduzimos $gof(x) \leq gof(y)$. Então, $gof$ é crescente sobre $D_1$.

2) Com a mesma prova, quando $f$ e $g$ são funções decrescentes sobre $D_1$ e $D_2$, $x \leq y$ implica que $f(y) \leq f(x)$, então $g(f(x)) \leq g(f(y))$. Assim, deduzimos que $gof(x) \leq gof(y)$. Então, $gof$ é crescente sobre $D_1$.

3) Sejam $f \in \mathfrak{F}(D_1, \mathbb{R})$ e $g \in \mathfrak{F}(D_2, \mathbb{R})$ duas funções com $f(D_1) \subset D_2$. Suponhamos que a função $f$ é crescente e $g$ decrescente. Sejam $x$, $y$ em $D_1$ com $x \leq y$, então $f(x) \leq f(y)$. Como $f(x)$, $f(y)$ pertencem à $D_2$ com $f(x) \leq f(y)$ e $g$ decrescente, então $g(f(y)) \leq g(f(x))$. Assim deduzimos $gof(y) \leq gof(x)$. Então $gof$ é decrescente sobre $D_1$.

4) Com a mesma prova se $f \in \mathfrak{F}(D_1, \mathbb{R})$ e $g \in \mathfrak{F}(D_2, \mathbb{R})$ são tais que $f(D_1) \subset D_2$ e se a função f é decrescente e $g$ crescente, então $gof$ é decrescente sobre $D_1$. $\square$

**Exemplo.** Sejam as funções $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ e $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 4x^2 + 5 \text{ e } g(x) = -3\sqrt{x}.$$

Como $4x^2 + 5 > 0$ temos $f([0, +\infty[) \subset [0, +\infty[$. Por outro lado, a função $f$ é crescente sobre $[0, +\infty[$ e a função $g$ é decrescente sobre $[0, +\infty[$, então a função $gof$ dada por $gof(x) = -3\sqrt{4x^2+5}$ é decrescente. $\square$

**Definição 1.10** **Função inversa** *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{R}$ duas funções tal que: $f(D) \subset F$ e $f(F) \subset D$. Se a função composta $gof$ é tal que:*

$$gof(x) = g[f(x)] = x, \text{ para qualquer } x \in D$$

*a função $g$ é chamada a função inversa da função $f$.*

**Exemplo.** Sejam as funções $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = \ln(2x) \text{ e } g(x) = \frac{1}{2}e^x.$$

Sabemos que $f(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$ e $e^{\ln(a)} = a$, então:

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{1}{2}e^{f(x)} = \frac{1}{2}e^{2x} == \frac{1}{2} \times 2x = x.$$

Assim, temos $gof(x) = x$ para todo $x \in ]0, +\infty[$ . Então, a função $g$ é a função inversa da função $f$. $\square$

As funções inversas são caracterizadas pela seguinte propriedade.

**Proposição 1.12** Caracterização da função inversa. *Seja $f : D \to f(D)$ uma função bijetora. Então, existe uma função inversa de $f$, denotada $f^{-1}$, tal que:*

*1. O domínio de $f^{-1}$ é $f(D)$*

*2. $f^{-1}(f(D)) = D$*

*Por outro lado, a função $f^{-1}$ é tal que*

$$\begin{cases} y & = f^{-1}(x) \\ para & x \in f(D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = f(y) \\ para & y \in D \end{cases}$$

*A função $f^{-1} : f(D) \to D$ é bijetora*

Além disso, temos as seguintes propriedades:

1) A função composta $f^{-1} of = id$, a aplicação idêntica de $D$ em $D$ definida por $id(x) = x$,

2) A função composta $fof^{-1} = id$, a aplicação idêntica de $f(D)$ em $f(D)$ definida por $id(x) = x$,

Seja $(O, \vec{i}, \vec{j})$ é uma coordenada cartesiana ortonormal do plano. Sejam $(C_f)$ a curva representativa da função $f$ e $C_{f\text{-}1}$ a curva representativa da função $f^{-1}$. Então as duas curvas $C_f$ e $C_{f\text{-}1}$ sao simétricas com relação à linha de equação $y = x$ (primeira bissetriz), isto é:

$$M(x,y) \in C_f \Leftrightarrow M'(y,x) \in C_{f^{-1}}.$$

## 1.5 Estruturas algébricas do espaço de funções de uma variável real com valores reais. Generalizações

Lembre-se do espaço $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$ de funções de $D$ com valores em $\mathbb{R}$, definido por:

$$\mathcal{F}(D;\mathbb{R}) = \{f: D \to \mathbb{R}; f \text{ é uma função}\},$$

onde $D$ é um subconjunto (não vazio) de $\mathbb{R}$, por exemplo, $D = I$ (intervalo), $D = [a; +\infty[$ ($a$ um real), $D = ]-\infty; b]$ ($b$ um real).

Na seção precedente, definiremos três operações entre os elementos do conjunto $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$. Com estas operações o conjunto $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$ pode ser equipado de estruturas algébricas interessantes. Essas estruturas são muito úteis para ensinar Análise Real no Ensino Médio, como na Universidade.

### 1.5.1 Estruturas do espaço vetorial de $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$

Para todos $f$, $g$ em $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$ e todo $a \in \mathbb{R}$, vamos considerar as duas operações seguintes:

| Operações | Notação | Definição |
|---|---|---|
| Adição de duas funções | $f+g$ | $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x$ em $D$. |
| Produto de uma função por um real | $a.f$ | $(a.f)(x) = a.f(x)$, para todo $x$ em $D$. |

Na coluna do meio, as operações + e multiplicação por um real, entre $f$ e $g$ são de fato as notações das operações de adição de funções e multiplicação de uma função por um real, que são definidas a partir das operações de adição e multiplicação com os números reais, na terceira coluna à direita. Com estas duas operações, o conjunto $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$ pode ser equipado de estruturas algébricas de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

**Proposição 1.13** *O conjunto $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$ das funções de D em $\mathbb{R}$ equipado com as operações de:*

*1. Adição de funções*

*2. Produto de uma função por um real*

*é um* **espaço vetorial real** *(ou sobre $\mathbb{R}$).*

Em geral, a notação $(\mathcal{F}(D;\mathbb{R}), +, .)$ é adotada para a estrutura de espaço vetorial real do conjunto $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

A estrutura de espaço vetorial real de $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$, é importante para o estudo de muitas propriedades matemáticas do conceito de limite de funções numéricas de variáveis reais. Por exemplo, a estrutura vetorial de $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$ real, pode dar processos para construir e estudar funções tendo uma determinada propriedade:

- As funções reais que admitem um limite em um ponto $x_0$
- As funções reais diferenciáveis num ponto $x_0$ ou num intervalo.

No caso das funções reais que admitem um limite em um ponto $x_0$, o espaço definido por:

$$\mathcal{F}_{x0}(D;\mathbb{R}) = \{f : D \to \mathbb{R}; f \text{ é uma função que admite um limite em } x_0\},$$

é um subespaço vetorial real de $(\mathcal{F}(D;\mathbb{R}), +, .)$. Por outro lado, em relação com o ensino, as estruturas de espaço vetorial pode ser usada para a construção de funções novas a partir de uma classe de funções elementares.

### 1.5.2 Estruturas do anel de $\mathcal{F}(D\,;\mathbb{R})$

Também, na precedente seção as seguintes operações entre duas funções $f, g$ são definidas:

| Operações | Notação | Definição |
|---|---|---|
| Adição de duas funções | $f+g$ | $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, para todo $x$ em $D$. |
| Multiplicação de duas funções | $f\times g$ | $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$, para todo $x$ em $D$. |

Na coluna do meio, as operações $+$ e $\times$ entre $f$ e $g$ são de fato as notações das operações de adição e multiplicação de funções; que são definidas a partir das operações de adição e multiplicação com os números reais $f(x)$ e $g(x)$, na terceira coluna à direita.

Essas duas operações nos ajudam a conferir ao espaço $\mathcal{F}(D\,;\mathbb{R})$, uma outra estrutura algébrica, isto é, é estrutura de anel.

**Proposição 1.14** *O conjunto $\mathcal{F}(D\,;\mathbb{R})$ das funções de D em $\mathbb{R}$ equipado com as operações de:*

1. *Adição de funções*

2. *Multiplicação de funções*

*é um* **anel**, *onde a função nula $\Theta$ e a função unidade $1_d$ são definidas por $\Theta(x) = 0$ e $1_d$, para todos $x \in E$*

E adotamos a notação $(\mathcal{F}(D;\mathbb{R}), +, \times)$ para a estrutura de anel do conjunto $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$.

Como no caso da estrutura de espaço vetorial, a estrutura de anel pode ter processos para estudar funções tendo uma determinada propriedade. Por exemplo, estudar o espaço $\mathcal{F}_{x\,0}(D\,;\mathbb{R})$ das funções reais que admitem um limite em um ponto $x_0$. Isto é, o espaço $\mathcal{F}_{x\,0}(D\,;\mathbb{R})$ equipado com a adição e a multiplicação é também um anel, dizemos é um subanel de $(\mathcal{F}(D;\mathbb{R}), +, \times)$.

Também, a estrutura de anel pode ser usada em relação com o ensino. Por exemplo, com ajuda da estrutura de espaço vetorial, podemos construir as funções polinomiais a partir de duas funções elementares: $1_d(x) = 1$ (a função constante) e a função $p_1(x)$. E o espaço de funções polinomiais, definido por:

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{p : D \to \mathbb{R};\; p(x) = a_n x^n + ... + a_0,\; x \in \mathbb{R},\; a_j \in \mathbb{R} \text{ com } a_n \neq 0\},$$

equipado com as três operações a adição, a multiplicação e multiplicação por um real possui estruturas de espaço vetorial real e de anel. Isto é, $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), +, .)$ é um subespaço vetorial real de $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, .)$ e $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), +, \times)$ um subanel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \times)$.

## 1.6 Conclusão

Nas seções precedentes estávamos interessados em estudar propriedades das funções de uma variável real com valores reais. O estudo das definições históricas, mostra que depois dos esforços de matemáticos para chegar a uma definição de função e à iniciação das bases de Cálculo Diferencial e Integral, começa o trabalho sobre a generalização do conceito de função, a partir do final do século XIX e início do século XX.

Sobre essa generalização, no início de século XX, levando em conta o trabalho de Dirichlet e Riemann, Lebesgue nos apresenta a seguinte generalização da definição de uma função:

Definição de Lebesgue (1875-1941). *Embora, desde Dirichlet e Riemann, seja geralmente aceito que há uma função quando há uma correspondência entre um número* $y$ *e números* $x_1, x_2$*.... sem pensar no processo usado para estabelecer essa correspondência, muitos matemáticos parecem considerar como verdadeiras funções apenas aquelas que são introduzidas por correspondências analíticas: pode-se pensar que talvez uma restrição bastante arbitrária seja introduzida. É certo que isso não limita praticamente o campo de aplicações, porque somente as funções que podem ser representadas analiticamente são usadas até agora.* (LEBESGUE, 1902).

A definição mais geral foi dada nos anos 1930 pelo grupo Bourbaki da seguinte forma:

Definição de Bourbaki. *Sejam E e F, dois conjuntos distintos ou não, uma relação entre uma variável* $x$ *de E e uma variável* $y$ *de F é chamada relação funcional em* $y$ *ou relação funcional de E a F, se para todo* $x$ *pertencente a E, existe somente um* $y$ *pertencente a F, que está na relação considerada com* $x$*, nós damos o nome de função à operação que assim se associa com todo elemento* $x$ *de E, o elemento* $y$ *em F que está na relação dada com x, dizemos que* $y$ *é o valor da função para o elemento* $x$ *e que a função é determinada pela relação funcional considerada.* (BOURBAKI, 1939).

Com a definição de Bourbaki, temos por exemplo, uma primeira generalização natural do conceito de função para $E = \mathbb{R}^n$ e $F = \mathbb{R}^p$, isto é, as funções:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p,$$

que são as funções de diversas variáveis com valores em $\mathbb{R}^p$. Quando $p = 1$ temos as funções de diversas variáveis com valores reais.

## 1.7 Exercícios

**Exercício 1.** As seguintes funções são injetoras? Sobrejetoras? Bijetoras?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.
2. $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ definida por $g(x) = x^2$.
3. $h : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ definida por $h(x) = x^2$.

O que podemos deduzir?

**Exercício 2.** As seguintes funções são injetoras? Sobrejetoras? Bijetoras?

1. Seja $f : [1, +\infty[ \to [0, +\infty[$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. A função $f$ é bijetora?
2. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. A função $f$ é injetora? Sobrejetora? Bijetora?

**Exercício 3.** Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ é estritamente crescente. Provar que para qualquer $y$ em $]-1; 1[$ existe um único $x$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

**Exercício 4.**

1) Sejam $f, g$ duas funções definidas por $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$. Mostre que: $fog = gof$.

2) Seja a função $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{se não,} \end{cases}$$

onde $\mathbb{Q}$ é o conjuto dos números racionais. Mostrar que $fof(x) = x$, para todo $x$ em $[0, 1]$, isto é $fof = id$, onde $id$ é a função identidade.

**Exercício 5.** Dê o domínio das seguintes funções

1. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^3 - x}$.
2. $g(x) = \sqrt{x^3(5-x)}$.
3. $h(x) = \dfrac{2}{\operatorname{sen}(2x)}$

**Exercício 6.** Sejam as funções $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Dê o domínio e as variações das funções $gof$ e $fog$.

**Exercício 7.** Estudar os intervalos em que são definidos e as variações das seguintes funções:

$$f(x) = (3x-1)^2 \ , \ g(x) = \frac{1}{x^2+5} \ , \ h(x) = \sqrt{x^2 - 4}.$$

**Exercício 8.** Determinar os períodos das seguintes funções:

$f(x) = \operatorname{sen}(3x+2)$ , $g(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$ , $h(x) = \tan(\frac{x}{2})$, $k(x) = \cos(ax+b)$, onde $a \neq 0$.

**Exercício 9.** Seja a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$h(x) = 2x + 3,$$

1. Calcular as seguintes imagens $h(-\frac{1}{2})$ e $h(\frac{1}{2})$.
2. Mostrar que $h$ é bijetora. Determinar a função inversa $h^{-1}$ de $h$.

**Exercício 10.** Seja $\mathcal{F}(]-a, a[; \mathbb{R})$, onde $a > 0$, o espaço vetorial real das funções de $]-a, a[$ com valores em $\mathbb{R}$.

1. Mostre que o subconjunto $\mathcal{F}_{par}(]-a, a[; \mathbb{R})$, das funções pares é um subespaço vetorial real de $\mathcal{F}(]-a, a[; \mathbb{R})$.

2. Mostre que o subconjunto $\mathcal{F}_{inpar}$ $(]-a,\ a[;\ \mathbb{R})$, das funções ímpares é um subespaço vetorial real de $\mathcal{F}$ $(]-a,\ a[;\ \mathbb{R})$.

3. Seja uma função $f \in \mathcal{F}$ $(]-a,\ a[;\ \mathbb{R})$. Sejam as funções

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ e } f_1(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

(a) Mostrar que $f_1 \in \mathcal{F}_{par}$ $(]-a, a[;\ \mathbb{R})$, e $f_2 \in \mathcal{F}_{impar}(]-a, a[;\ \mathbb{R})$.
(b) Calcular $f_1 + f_2$.
(c) O que podemos concluir?

## 1.8 Textos para estudos

### 1.8.1 Dois textos fundamentais: Definições históricas do conceito de função e What is a function?

A lista das definições históricas foram extraídos da pesquisa realizada por Grugnetti, Maffimi e Marchini (MARCHINI, GRUGNETTI, MAFFINI, 2001) sobre o conceito de função na escola italiana. O texto de Mac LANE foi retirado de seu livro (Mac LANE, 1986), também aparece no artigo por Grugnetti, Maffimi e Marchini (MARCHINI, GRUGNETTI, MAFFINI, 2001). O objetivo destes dois textos é mostrar a importância do uso da epistemologia e da história da matemática para esclarecer o significado do conceito de função.

#### Texto 1

## Definições históricas do conceito de função: visão geral

Como mencionamos, as definições a seguir foram apresentadas no artigo de Grugnetti, Maffimi e Marchini (MARCHINI, GRUGNETTI, MAFFINI, 2001). Como parte de nossa disciplina, traduzimos essas definições para o português.

**1694 LEIBNIZ** (1646 - 1716)

« Eu chamo funções todas as porções de linhas retas, que fazemos ao traçar retas indefinidas, que passam por um ponto fixo, e pelos pontos da curva. »

**1718 BERNOULLI J.** (1667 – 1748)

« Chamamos função de uma variável uma quantidade composta de qualquer forma por esta variável e por constantes. » Notação $\phi x$

**1748 EULLER** (1707 – 1783)

« Uma quantidade constante é uma quantidade determinada, que ainda conserva o mesmo valor... Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, ou seja, uma quantidade universal que inclui todos os valores determinados... Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta, de qualquer maneira, dessa mesma quantidade e de números, ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica, que além da variável *z* contém quantidades constantes, é uma função de *z*. Por exemplo, $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b.\sqrt{(aa - zz)}$; *cz;* etc., são funçoes de *z*. Uma função de variável é então, também, uma quantidade variável. »

**1755 EULLER**

« Se certas quantidades dependem de outras quantidades de tal modo que se as outras mudam, estas quantidades mudam também, então nós temos o hábito de nomear essas quantidades de funções dessas últimas. Esta denominação tem a maior abrangência e contém em si todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por consequência, $x$ designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de $x$ de alguma maneira, ou que são determinadas por $x$, são chamadas de funções de $x$. »

**1782 CONDORCET** (1743 – 1794)

« Suponho que tenho um certo número de quantidades $x$, $y$, *z*, ..., *F*; e que, para cada valor determinado de $x$, $y$, *z*, ..., etc, *F* tem um ou vários valores determinados: digo que *F* é uma função de $x$, $y$, *z*,... Enfim, eu sei que quando $x$, $y$, *z* serão determinados, *F* o será também, quando mesmo eu não sabendo nem a maneira de expressar *F* por meio de $x$, $y$, *z*, nem a forma da equação entre *F* e $x$, $y$, *z*; eu saberei que *F* é função de $x$, $y$, *z*. »

**1797 LAGRANGE** (1736 – 1813)

1 « Chamamos função de um ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entram de uma maneira qualquer, imbricadas ou não com outras quantidades que olhamos como tendo valores dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim nas funções consideramos apenas as quantidades que supomos variáveis, sem nenhuma subordinação às constantes que podem estar aí imbricadas. » 2. « Para denominar uma função de uma só variável com $x$, nós faremos simplesmente preceder desta variável a letra ou característica *f*, ou *F*; mas quando quisermos designar a função já composta desta variável, como $x^2$ ou $a + bx$ ou etc., fecharemos esta quantidade entre dois parênteses. Assim $fx$ designara uma função de $x$, $f\,(x^2)$, $f\,(a + bx)$, etc. designarão funções de $x^2$, de $a + bx$, etc. Para denotar uma função de duas variáveis independentes como $x, y$, nós escreveremos $(x, y)$, e também outras. »

**1797 LACROIX** (1765 – 1843)

« Toda quantidade cujo valor depende de uma ou de várias outras quantidades, é dita função dessas últimas, quer saibamos ou ignoremos por quais operações é inversa passar para retornar destas à primeira. »

**1821 FOURIER** (1765 – 1843)

« Em geral, a função $f(x)$ representa uma série de valores ou ordenadas onde cada um é arbitrário. »

**1821 CAUCHY** (1789 – 1857)

« Quando quantidades variáveis estão de tal forma ligadas entres elas que, o valor de uma delas sendo dado, possamos determinar o valor de todas as outras, concebemos como ordinárias essas diversas quantidades expressas por meio de uma dentre elas, que recebe então o nome de variável independente e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções desta variável. »

**1834 LOBATCHEVSCHY** (1792 – 1856)

« A concepção geral exige que uma função de $x$ seja considerada como um número que é dado para cada $x$ e que muda gradualmente ao mesmo tempo que $x$. O valor da função pode ser dado seja por uma expressão analítica, seja por uma condição que fornece um meio para testar todos os números e selecionar um dentre eles, ou, finalmente, a dependência pode existir mas permanece desconhecida. »

**1851 RIEMANN** (1826 – 1866)

« Seja z uma quantidade variável, que toma pouco a pouco, todos os valores reais possíveis, então chamamos w uma função de $z$, se a cada um desses valores corresponde um único valor da quantidade indefinida $w$, e se $z$ percorre continuamente todos os valores que se encontram entre dois valores constantes, $w$ muda também continuamente, então chamamos esta função de contínua. »

**1870 HANKEL** (1839 – 1873)

« Dizemos que $y$ é uma função de $x$ se a cada valor de $x$ de um certo intervalo corresponde um valor bem definido e sem que isto exija portanto que $y$ seja definido sobre todo o intervalo pela mesma lei em função de $x$, nem mesmo que $y$ seja definido por uma expressão matemática explícita de $x$. »

**1902 LEBESQUE** (1875 – 1941)

« Apesar de que, após Dirichlet e Riemann, concordamos geralmente em dizer que existe uma função quando existe uma correspondência entre um número $y$ e números $x_1$, $x_2$,.... sem nos preocuparmos com o procedimento que ajuda a estabelecer esta correspondência, muitos matemáticos parecem considerar como verdadeiras funções somente aquelas introduzidas por correspondências analíticas. Podemos pensar que introduzimos talvez assim uma restrição bastante arbitrária; entretanto é certo que isso não restringe praticamente o campo das aplicações, porque sozinhas, as funções representáveis analiticamente, são efetivamente empregadas até o presente. »

**1939 BOURBAKI** (1839 – 1873)

« Sejam *E* e *F*, dois conjuntos distintos ou não, uma relação entre uma variável $x$ de *E* e uma variável $y$ de *F* é dita relação funcional em $y$ ou relação funcional de *E* em *F*, se para todo $x$ pertencente a *E*, existe um só $y$ pertencente a *F*, que esteja na relação considerada com $x$. Damos o nome de função à operação que associa assim a todo elemento $x$ de *E*, o elemento $y$ em *F* que se encontra na relação da com $x$; dizemos que $y$ é o valor da função para o elemento $x$, e que a função é determinada pela relação funcional considerada. »

**1927 WEYL** (1885 – 1955)

« Sejam *E* e *F*, dois conjuntos distintos ou não, uma relação entre uma variável $x$ de *E* e uma variável $y$ de *F* é dita relação funcional em $y$ ou relação funcional de *E* em *F*, se para todo $x$ pertencente a *E*, existe um só $y$ pertencente a *F*, que esteja na relação considerada com $x$. Damos o nome de função à operação que associa assim a todo elemento $x$ de *E*, o elemento $y$ em *F* que se encontra na relação da com $x$; dizemos que $y$ é o valor da função para o elemento $x$, e que a função é determinada pela relação funcional considerada. »

A esta lista podemos acrescentar outras definições como aquelas de:

D'ALEMBERT (Enciclopédia 1785)

DIRECHLET (Sobre representação de funções quaisquer por série de senos e cossenos – 1837)

DEDEKIND (O que são e o que você deve pagar? – 1888)

PEANO (Sobre o conceito de número – 1891) e PEANO (Sobre a definição de função– 1911)

## Texto 2

# What is a function?

Por S. Mac Lane

Optamos por não traduzir este texto para o português, para permitir que os alunos se familiarizem com os textos matemáticos em inglês. Por outro lado, queríamos que o texto de Mac Lane mantivesse sua forma original. Para mais detalhes sobre esse texto, veja o livro "Matemática, Forma e Função", (Mac LANE, 1986), que discute o conceito de função. Este texto de Mac Lane também foi considerado no estudo dedicado ao conceito de funções no currículo das escolas italianas (MARCHINI, GRUGNETTI, MAFFINI, 2001).

The various intuitive ideas about functions and functional dependence are helpful but vague. Here are some of them.

*Formula.* A function is a formula in a letter $x$. When $x$ is replaced by a number, the formula produces a number, the value of the function for the given argument $x$.

This description is not very helpful for notions of functional dependence of variable quantities in physics, but it does describe the elementary Mathematical function well: Polynomial, rational, algebraic, trigonometric, and exponential functions. The idea of "formula" does need to be specified. It should include algebraic or "analytic" formulas, perhaps also the formulas given by infinite series, but it doesn't seem to encompass functions defined by several different formulas in different portions of the domain. The essential problem remains: What sorts of formulas are envisaged? Are all functions given by formulas? “Formulas” depend on the symbolism, but function depend upon the facts.

*Rule.* The variable $y$ is a function of the variable $x$ when there is given a rule which to each value of $x$ produces the corresponding value of $y$.

This description, and its variants, has for generations puzzled the students of calculus. It has a pleasant generality: Any “rule” will do. Also, the use of rules clearly takes care of the case of function defined by different formulas in different portion of the domain; any such collection of alternative formulas is clearly a rule. Neverthless this is not a formal definition, since it uses the undefinied words “corrresponds” and “rule”. Even if one defines a rule as something expressed in a specified formal language, there are troubles. (In the usual formal languages, the set of all formal expressions is denumerable, while the set of possible functions on $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ is not denumerable).

*Graph.* A function is a curve in the$(x, y)$-plane, such that each vertical line $x = a$ meets the curve in at most one point with coordinates $(a, b)$. When it does so meet, the number $b$ is the value of the function at the argument $a$. For other arguments a, the function is undefined.

The description emphasizes the geometric aspect. It is persuasive for functions of real numbers which are smooths or at least continuous, but doesn’t fit well with a function which jumps from 0 to 1 as the variable changes from rational to irrational. It involves also the (undefined) notion of a curve, and so makes arithmetic depends upon geometry.

*Dependence.* The variable quantity $y$ is a function of the quantity $x$ if and only if a determination of the value of $x$ also fixes the value $y$, so that $y$ depends on $x$. This, a physicist’s definition, is also not formal.

*Tables of Values.* A function is determined by a table of values, which opposite to each entry for the first quantity $x$ lists the corresponding numerical value for the second quantity y. This is a hard-nosed, no nonsense definition; evidently inspired by table of trigonometric or logarithmic functions. Trouble is, the actual tables are finite while most of the intended functions have infinitely many different values. It is not clear what would be meant by an infinite table.

*Syntax*. A function $f$ on a set $X$ to the set $Y$ is a simbol $f$ such that whenever the term $x$ stands for an element of $X$, then of symbols $fx$ stand for an element of $Y$, the value of $f$ at the argument x.

This doesn't really describe functions, but just the use of symbols for functions. It is a mute protest against the confusion of standard notations in which $f(x)$ ambiguously denotes a function of $x$ and a value of that function. (Thus strictly speaking, "sen" is the trigonometric function, while "sen$\phi$" denotes its value at the angle $\phi$).

Enough. The variety of these descriptions of "function" illustrate well one of our theses as to the nature of Mathematics: Human activities and facts about phenomena togheter indicate many examples of dependence of one item upon another. This leads to useful but informal idea about dependence and functions - and poses the problems of producing a formal definition, necessary to make unambiguous Mathematical statements about functions.

### 1.8.2 Estudo dos textos

**I - Evolução histórica do conceito de função.** (Veja o Texto 1)

1. **Questão inicial:** "O que é uma função?" Formular uma definição que considere adequada ou que você utiliza em suas aulas.

2. **Estudo histórico do conceito de função.**

(a) Problema 1: Quais são as definições históricas desta lista que parecem mais próxima(s) da(s) que vocês formularam?

(b) Problema 2: Analisando as definições apresentadas neste documento, destacar quatro definições que vocês consideram adequadas para suas aulas. Justificar as escolhas.

3. Para cada uma dessas quatro definições:

   (a) Comparar cada uma das definições com uma (ou algumas) definição(ões) atual(ais).

   (b) Como podemos explorar essas definições e de que forma? Para sua cultura geral; trabalho com os alunos (especificar) ou no seu curso (especificar)

**II - « O que é uma função? » de S. Mac Lane.** (Veja o Texto 2)

1. Descreva o processo das definições de uma função do texto de Mac Lane.

2. Segundo Mac Lane, o que podemos concluir sobre a definição de uma função?

**III - Definições de função nos livros didáticos.** Pesquise em 4 livros, e encontre respostas para as seguintes perguntas:

1. Apresente as definições de função, destes livros.

2. Compare essas definições.

3. O que você pode concluir sobre essas definições?

# CAPÍTULO 2

## Sobre a origem da definição do conceito de limite.

Neste capítulo apresentamos, de forma breve, alguns elementos sobre as origens do Cálculo Diferencial e Integral, na visão de Newton e de Leibniz, bem como o conceito de limite, na visão de Cauchy e de Weierstrass, assim como a de Stewart. Através de uma breve visão histórica deste conceito, levantamos também considerações e comparações didáticas relacionadas à apresentação do Cálculo Diferencial e Integral em programas e livros atuais.

## 2.1 Introdução

O estudo da história e epistemologia da matemática, assim como da ciência em geral, pode ter diferentes objetivos. Um dos principais  objetivo é de conhecer o passado da matemática, que é importante para constituir uma cultura básica sobre a evolução histórica dos conceitos matemáticos importantes. Por outro lado, temos que procurar entender como a matemática se desenvolveu, por meio do estudo cuidadoso do trabalho de pesquisa de estudiosos em diferentes épocas. Também, temos o objetivo de tentar refletir sobre os significados dessas obras e os conceitos envolvidos. Porque, estabelecer um conceito é sempre uma tarefa difícil, que requer muito tempo e exige esforço e energia. O conhecimento desse processo permite ao professor melhorar sua prática profissional.

> Existe uma ligação entre o ensino de matemática, a história da matemática e a didática ... A formação

> de um conceito novo em matemática sempre exigiu muito trabalho e esforço, e o professor consciente dessa evolução histórica cheia de obstáculos, pode construir uma estratégia visando favorecer a aquisição de conhecimentos dos alunos daí a abordagem didática (ou aquilo que se chamou de transposição didática) adequada com base na história do conceito. (AKKAR, 1985).

A noção de limite de funções reais com valores reais usa a intuição e é um esquema particularmente informal. Assim, o que queremos dizer com a palavra "limite"? O dicionário francês, Petit Robert[1], define o limite do seguinte maneira: "tamanho fixo do qual um tamanho variável pode se aproximar indefinidamente sem alcançá-lo". A precedente definição mostra bem os aspectos intuitivo e informal da noção de limite, foi a origem de trabalhos matemáticos, históricos, epistemológicos e didáticos, e que começou com os trabalhos de *Newton* e *Leibniz* e continua até hoje. Entre as dificuldades históricas com a noção de limite, há a famosa polêmica com *Berkeley,* que surgiu após a passagem do cometa Halley. De fato, é um problema que envolve limite de funções, pois até esse momento a noção de função é embrionária e a reta real ainda não havia sido construída, por outro lado uma "quantidade infinitamente pequena" não estava bem definida.

Em Análise Real, as noções de função e de limite são as primeiras noções que se tem que aprofundar. O conceito de limite levará ao de derivada. Limite e derivada das funções de uma varável real com valores reais, constituem a base do que é chamado de Cálculo Diferencial e Integral.

Neste capítulo apresentamos, de forma breve, alguns elementos sobre as origens do Cálculo Diferencial e Integral, na visão de *Newton*

---

[1] Dicionário Francês

e de *Leibniz,* bem como apresentamos o conceito de limite, na visão de *Cauchy,* de *Weierstrass,* e de *Stewart.*

## 2.2 As origens do Cálculo Diferencial e Integral com Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716)

*Newton* e *Leibniz* são considerados os fundadores do Cálculo Diferencial e Integral. De fato, o século 17, viu o florescimento de conceitos, métodos e muitos resultados matemáticos, especialmente em análise. Os trabalhos de *Newton* e *Leibniz* tornaram possível ordenar e fazer uma síntese de todas as obras desse período. O livro ”O método de fluxões e sequências infinitas”, (NEWTON, 1671), mostra que Newton pode ser considerado o inventor do Cálculo Diferencial e Integral. *Leibniz* também merece este título, por ter realizado muitos trabalhos sobre este tema. Estes foram expostos no livro de l'Hospital: “Análise dos infinitamente pequenos, para o estudo das linhas de curvas” (L'HOSPITAL, 1696).

No livro “O método de fluxões e sequências infinitas”, *Newton* estabelece claramente a ligação entre os aspectos diferencial e integral, pois as operações se invertem mutuamente: “A derivada da integral é igual ao integrando”. Com os símbolos atuais:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x).$$

*Newton* expressou usando conceitos cinéticos: *Movimentos das variáveis* (“fluentes”) e *velocidades desses deslocamentos* (“fluxões”). Os problemas de *Newton* são os seguintes:

> **Problema I: “Dada a relação de quantidades de fluentes, encontre a relação das fluxões”. (NEWTON, 1671)**

Com os termos atuais: Encontre a equação diferencial da equação primitiva conectando as coordenadas do ponto em movimento ou até mesmo, se uma das coordenadas for descrita usando a outra. Isso é interpretado como a busca pela derivada da função inicial.

> **Problema II: "Dada a relação das fluxões, encontre as quantidades de fluentes". (NEWTON, 1671)**

Em outras palavras, encontre a equação primitiva a partir da equação diferencial ou integral do integrando.

Em «**Princípios Matemáticos de Filosofia Natural**» (1687), *Newton* apresenta uma teoria que justifica o uso de fluxos usando limites de razões. Com os símbolos atuais:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

*Newton* fala da "última razão das quantidades desaparecidas" ou « **primeira razão para quantidades incipientes** » (« Principes » tradução de *Madame du Châtelet*). Aqui a « **razão** » significa «**quociente**». Newton aponta que este é o limite de um quociente e não o quociente dos limites.

*Leibniz* escreveu várias publicações sobre Cálculo Diferencial e Integral. A essência do Cálculo Diferencial e Integral de *Leibniz*, apareceu no livro: **Análise dos infinitamente pequenos, para o estudo das linhas curvas**, cujo autor é o Marquês de l'Hospital (L'HOSPITAL, 1696). *Leibniz* criou várias notações matemáticas, muitas das quais são usadas até hoje no Cálculo Diferencial e Integral. Por exemplo, conforme Baron (BARON, 1987) e Lefevre (LEFEVRE, 1996), num manuscrito de 1675 Leibniz escreveu:

$$\text{omn.}\overline{yx\,ad\,x} \sqcap \frac{b^2c}{2} - \text{omn.}\overline{\frac{x^2}{2}\,ad\,y}.$$

Depois, *Leibniz* abandona os símbolos $\sqcap$, $a\,dx$ e omn (todos), que se tornam respectivamente:

$$= \;;\; dx \quad \text{e} \quad \int \quad (\text{S alongado})\;.$$

(para mais detalhes veja BARON (1987), LEFEVRE (1998)). Aqui está a expressão atual:

$$\int_0^b xydx = \frac{b^2}{2}c - \int_0^c \frac{x^2}{2}dy.$$

*Leibniz* não faz muitas perguntas para trabalhar com os infinitésimos que representam a base de sua abordagem. Então, na expressão:

$$\frac{dy}{dx},$$

é o quociente de duas quantidades infinitesimais que realmente existem. Para *Newton*, esta expressão é o limite de um quociente, não o quociente de dois limites. Em termos de hoje, *Leibniz* considera diferenciais e *Newton* considera derivadas.

Diferentes estudos mostram que a inspiração em *Newton* é mais cinemática e geométrica. Para *Leibniz*, essa inspiração é mais formal e algébrica. Por outro lado, a invenção das notações está mais presente em *Leibniz* do que em *Newton*. Finalmente, podemos dizer que os conceitos básicos de *Newton* são as fluxões e o uso fundamental da noção de limite.

Terminamos este parágrafo com estas observações, que esclarecem a visão do trabalho de Newton e Leibniz.

**Observação 1**. No livro **"O método de fluxões e sequências infinitas"** (NEWTON, 1671), o método da fluxões de Newton foi ilustrado em exemplos para a resolução de equações algébricas polinomiais de grau 3. Até o momento, este método é eficaz na solução das equações $f(x) = 0$, onde $f$ é uma função de uma variável real com valores reais. Ele tinha generalizações e versões diferentes.
**Observação 2**. A noção de coordenadas não está presente nos trabalhos de *Newton* e *Leibniz*. Parece que *Newton* e *Leibniz* não conheciam a geometria analítica desenvolvida por Descartes e Fermat no início do século XVII. Em suas obras não há noção de coordenadas.
**Observação 3**. Antes de *Newton,* o estudo cinemático dos movimentos de corpos sólidos tem sido objeto de várias pesquisas. Na Europa, os mais notáveis são de *R. Bacon, H. Heytesbury, R. Swinshead* e *N. Oresme,* que estudaram os primeiros conceitos de cinemática (final do século 13 e século 14): Velocidade instantânea; primeira representação gráfica de grau de intensidade (« função »), Linha vertical (reta das latitudes) e Linha horizontal (eixo das longitudes). Oresme havia estudado o gráfico da variação da velocidade em função do tempo de móvel em movimento uniformemente acelerado. Oresme tinha introduzido as noções de *Longitudes – Latitudes,* para calcular a distância percorrida em velocidade. Este é um status funcional da cinemática.

## 2.3 Cauchy e o Conceito de limite

O Cálculo Diferencial e Integral foi inventado no século XVII, graças ao trabalho de *Newton* e *Leibniz*. No entanto, os matemáticos levaram 150 anos para desenvolver bases modernas de análise, que são baseadas sobre o conceito de limite. As origens dessa modernização podem ser encontradas em três obras publicadas na década de 1820 pelo matemático francês *Augustin-Louis Cauchy* (1789-1857). Ele apresentou nesses livros os resultados de sua pesquisa, o que marcará o início de uma nova era na história da análise.

O impacto do trabalho de *Cauchy* foi decisivo. Assim, no final do século XIX, os matemáticos cada vez mais orientaram suas pesquisas para uma base logicamente sólida de Cálculo Diferencial e Integral. Deve-se notar que Cauchy se interessou pelo problema. A fundação do Cálculo Diferencial e Integral interessava a *Cauchy* quando ele era assistente na École Polytechnique. Ele percebeu desde o início a importância dos conceitos de limite e continuidade. Foi ele o primeiro a formulá-las com grande clareza pela primeira vez. Usando essas noções, *Cauchy* desenvolveu uma teoria de funções diferenciáveis e integráveis de uma variável real. Graças a uma lógica e a um método rigoroso, ele conseguiu descrever o Cálculo Diferencial e Integral nos conceitos de limite e continuidade. Assim, ele abriu um novo caminho na análise matemática. *Cauchy* foi considerado, com razão, um dos primeiros matemáticos modernos.

*Cauchy* publicou mais de 700 artigos ou dissertações. Suas contribuições para o desenvolvimento da matemática estão agrupadas em três grandes tratados: «**O curso de análise da École Polytechnique**» (CAUCHY, 1821); «**O cálculo infinitesimal**» (CAUCHY, 1823); «**Lições sobre as aplicações do cálculo infinitesimal à geometria**» (CAUCHY, 1826-1828). Além de trabalhar no Cálculo Diferencial e Integral, ele também foi fundamental na fundação da teoria das funções de uma variável complexa, a teoria da elasticidade e da álgebra. Muitos teoremas e princípios são chamados de *Cauchy*.

Para dar uma breve visão geral sobre a definição do conceito de limite de *Cauchy*, consideramos o livro «**Resumo das lições dadas na Royal Polytechnic Escola sobre o cálculo infinitesimal, primeiro volume**» (1823). Vamos destacar aqui apenas os conceitos. Mas outras propriedades e exemplos foram estudados por *Cauchy*. Nas três primeiras lições desse livro, *Cauchy* apresentou definições importantes. Na **Primeira Lição**, ele descreve a noção de limite de seguinte maneira:

> Quando os valores sucessivamente atribuídos à mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo a acabar diferindo tão pouco quanto você quer, o último é chamado o limite de todos os outros. (CAUCHY, 1823, p. 1).

Cauchy apresenta uma definição da noção de limite finito. E essa noção de limite finito de Cauchy é atual. Cauchy usa o "infinitamente pequeno", e o infinitamente pequeno para Cauchy se torna uma variável ou função que tende a 0. Observamos que não tem uso de quantificadores. Na **Segunda Lição**, Cauchy apresentou uma definição da noção de função real com valores reais de seguinte maneira:

> Quando as grandezas variáveis estão tão inter relacionadas, que, dado o valor de uma delas, podemos concluir os valores de todas as outras, geralmente concebemos essas várias quantidades expressa por um deles, que então assume o nome de variável independente, e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são chamadas de funções dessa variável. (CAUCHY, 1823, p. 5).

O conceito de função real com valores reais também demorou para ser estabelecido. Historicamente, várias definições do conceito de função foram dadas. E a primeira definição da noção de função foi dada por Euler. Ainda, na **Segunda Lição**, Cauchy apresentou a definição de continuidade de uma função real com valores reais de seguinte maneira:

> Quando a função $f(x)$ admite um valor único e finito para todos os valores de $x$ entre dois limites dados, a diferença $f(x+i)$ - $f(x)$ está sempre entre esses limites uma quantidade infinitamente pequena, dizemos que $f(x)$ é uma função contínua da variável $x$ entre os limites em questão. (CAUCHY, 1823, p. 7).

Na linguagem atual o termo "limites" significa limites do intervalo. Na linguagem atual dessa definição toma a seguinte forma:

$$\lim_{a\to 0}(f(x+a)-f(x))=0 \text{ quero dizer } \lim_{a\to 0} f(x+a)=f(x).$$

Observamos também que não tem o uso de quantificadores. Finalmente, na **Terceira lição** (p.9), Cauchy apresentou a definição da derivada de uma função. Para Cauchy a derivada, quando existe, é simplesmente o limite do quociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i},$$

para uma quantidade i infinitamente pequena. Aqui, o infinitamente pequeno i se torna uma variável ou função que tende a 0. O conceito de diferencial será então definido por Cauchy (na lição 4), a partir da derivada. Observamos também que não tem uso de quantificadores.

## Comparação com os currículos de Cálculo Diferencial e Integral

Até hoje o plano de curso de Cauchy é quase o mesmo nos currículos de Cálculo Diferencial e Integral. Por exemplo, no livro do *James Stewart:* Cálculo – Volume 1 (Tradução da 7ª edição Norte-Americana) temos a seguinte comparação:

**Tabela 1:** Comparação da ordem dos currículos de Cauchy com o livro de Stewart

| Ordem Cauchy | Ordem do livro Stewart: Cálculo - Volume 1 |
|---|---|
| Variável | Não aparece |
| Função | Função |
| Limites | Limite |
| Continuidade | Continuidade |
| Derivação e diferencial | Derivada |
| Integral | Integral |

**Fonte:** Os autores

A ordem do livro de James Stewart  só não apresenta variável, o resto continua na mesma ordem da sequência dada por Cauchy. Em geral, temos a seguinte comparação:

**Tabela 2:** Comparação da ordem dos conceitos de Cauchy com outros livros

| Ordem de apresentação dos conceitos em Cauchy | Ordem de apresentação de conceitos em outros livros |
|---|---|
| Variável | Números reais e sequências<br>Conceito do limite de sequências<br>Continuidade dos números |
| Função | Conceito de função<br>Estudo mais pormenorizado das funções elementares |
| Limites | Conceito do limite de uma função |
| Continuidade | Conceito da continuidade de uma função |
| Derivação e diferencial | Derivada e diferencial:<br>Ligação entre Newton e Leibniz |
| Integral | Integral definida<br>Função primitiva<br>Métodos de integração<br>Integral indefinida. |

**Fonte:** Os autores

Segundo a literatura, podemos dizer que Cauchy é o iniciador ou o fundador de análise moderna. Até a presente data vários teoremas levam seu nome.

## 2.4 Definição de Weierstrass. Algumas observações

### 2.4.1 Definição de Weierstrass

Foi em 1850 que o matemático alemão Karl Weierstrass continuou o esforço rigoroso de Cauchy (1789-1854), dando a definição do limite de uma função em um ponto com épsilon e delta. Esta definição libertou o Cálculo Diferencial e Integral de todas as considerações "metafísicas" e marca o nascimento da análise moderna. Em 1861, Weierstrass define continuidade da seguinte forma:

> $f$ é contínua em $x_0$, se para todo real $\epsilon$ estritamente positivo, existir um $\delta$ estritamente positivo, tal que, se $x$ estiver a uma distância de $x_0$ estritamente menor que $\delta$, então o valor da função $f$ em $x$ está a uma distância estritamente menor que $\epsilon$ do valor da função $f$ em $x_0$. (WEIERSTRASS, 1886).

Na forma simbólica atual:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Weierstrass também formulou uma definição de limite e de derivada com épsilon e delta, como é geralmente ensinado hoje. Queremos dizer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ é formulado da seguinte forma:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

De fato, quanto à definição de Cauchy, a definição do conceito de limite de Weierstrass também lida com limites finitos. Na definição de Weierstrass, descobrimos que a variável real $x$ pode assumir o valor $x_0$. Mas, pode acontecer que a definição precedente de limite finito $L$ no ponto $x_0$, pode tomar a seguinte forma:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Isso vai nos levar a considerar duas definições do conceito de limite, que vamos discutir. O trabalho feito por Magda Godinho Mongelli (2018) no Anexo 3, dará uma visão muito clara sobre a diferença entre as duas definições anteriores.

### 2.4.2 Considerações didáticas

Nós vemos que a definição de limite de Weierstrass inclui os seguintes três conceitos principais:

1. Desigualdade e inequação;
2. Módulo - Conceito de valor absoluto;
3. O conceito de funções de uma variável real com valores reais.

De maneira mais clara, a noção de inequação representa uma desigualdade e comparação de variáveis. A noção de módulo é utilizada na determinação da distância, e a noção de função é uma relação matemática estabelecida entre duas variáveis, como podemos ver no esquema a seguir:

**Tabela 3:** Conceitos ligados à definição do conceito de limite.

| Inequação 1 e Módulo | Inequação 2, Módulo e função |
|---|---|
| $\|x - x_0\| < \delta$ | $\|f(x) - L\| < \epsilon$ |

**Fonte:** Os autores

A relação entre esses três conceitos cria algumas barreiras para os alunos, bem como dificuldades pedagógicas e didáticas para a introdução, bem como o ensino do conceito de limites. Em geral, o aluno tem dificuldade, pois envolve os três conceitos complexos, citado anterioramente. Ele precisa entender como saber resolver a Inequação 2, onde tem módulo e função, ele precisa saber resolver a Inequação 1, onde tem módulo. Neste tipo de situação, os alunos apresentam, de uma forma geral, dificuldades na compreensão e apropriação dos mecanismos envolvidos no conceito de limite. Por outro lado, vimos nas aulas que a noção de função, por exemplo, não possui uma definição única ou precisa, fato este que pode provocar dúvidas nos alunos. Além disso, o conceito de módulo e de inequações também podem provocar dificuldades, ainda mais quando movimentados todos juntos.

As considerações didáticas anteriores, fizeram do ensino dos conceitos de função e limite um tema que continua até hoje, para ser objeto de estudos por matemáticos e didáticos. Por exemplo, o matemático Ian Steawart formulou a definição do limite através de um jogo, que apresentaremos a seguir no item 2.4.3.

### 2.4.3 Observação: Aulas de Weierstrass

Weierstrass não publicou suas aulas. Elas são conhecidas apenas pelas notas de curso de seus alunos. O primeiro tratado de Análise publicado em alemão é de O. Stolz, aluno de K. Weierstrass, em 1885. Segundo Sinkevich (SINKEVICH, 2016):

> Infelizmente, o próprio Weierstrass nunca havia publicado ou editado suas palestras. Na maioria dos casos, elas vieram até nós em notas de seus alunos. (SINKEVICH, 2016, p. 16)

Sinkevich também relata que o matemático E. Heine lamentou-se a esse respeito, e menciona uma citação sobre isso:

> Princípios do Sr. Weierstrass são estabelecidos diretamente em suas palestras e em mensagens faladas indiretas, e em cópias manuscritas de suas palestras,

> e são bastante difundidas; no entanto, as edições de seus autores nunca foram publicadas sob a supervisão do autor, o que prejudica sua percepção unidade. (HEINE, 1872, p.172)

Sinkevich também cita a seguinte passagem de A.P Yushkevich,

> a formulação moderna de cálculo diferencial com sua técnica($\epsilon$, $\delta$)formulações e provas, é relatada para datar as palestras que Weierstrass apresentou na universidade de Berlin, palestras que foram publicadas por seus alunos. (YUSHKEVITCH, 1977, p. 192)

## 2.5 Forma imaginativa de Ian Stewart

Os três conceitos que aparecem na definição do conceito de limite mostram as dificuldades dos alunos para a apropriação desse conceito. Em seu livro, Stewart (2010), um famoso matemático do século XX, apresenta muitos exemplos práticos com gráficos e tabelas de valores, além de muitos comentários importantes, visando entender melhor os contextos e a compreensão dos conceitos matemáticos de análise. Gradualmente, isso leva ao estabelecimento de diferentes abordagens do conceito de limite, a saber: visual, numérico e algébrico. Primeiro, Stewart enfatiza os argumentos e justificativas para esse conceito matemático e seus usos. E assim que os gráficos e as imagens constituem ilustrações visuais importantes para a compreensão do conceito de limite, sobretudo com o uso da tela do computador no ensino e aprendizagem da matemática. Stewart também insiste nas demonstrações matemáticas dos resultados. Quanto a introdução do limite, ele foi motivado por vários problemas, como por exemplo, o problema da área do disco; o problema da tangente; o problema da velocidade e o paradoxo de Zenão. Finalmente, Stewart formula a definição matemática do limite de funções por meio da linguagem natural, da seguinte maneira:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$, *e declaramos o limite de* $f(x)$ *quando*

> *$x$ tende à $a$ é igual a L, se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão perto quanto desejamos) tomando $x$ suficiente perto de $a$ (à esquerda e à direita), mas não igual à $a$".* (STEWART, 2010, p.100)

Em seguida, ele formula a definição do conceito em termos de-épsilon e delta, sobre a forma de jogo. Isto é, Stewart apresentou uma forma imaginativa do conceito de limite (TERRACHER et al., 1992), da seguinte maneira:

> No jogo temos 2 jogadores: o jogador Epsilon e o jogador Delta. O jogador Epsilon inicia o jogo. Vamos resolver:
> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ?... é um pouco de jogo
> O jogador *Épsilon* indica qual desvio máximo ele aceita entre $f(x)$ e $L$, isto é, ele impõe ter $|f(x) - L| < \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é escolhido por ele.
> O jogador *Delta* tenta fazer o que é necessário para satisfazer o jogador *Épsilon*, isto é, ele tenta encontrar $\delta$ de tal forma que, se a diferença entre $x$ e $a$ for menor que $\delta > 0$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.
> Se, por sua vez qualquer que seja a escolha do jogador *Épsilon*, o jogador *Delta* ainda tiver uma estratégia vencedora, então $f(x)$ tende para $L$ quando $x$ tende para $a$.

Como o conceito de limite em termos de delta e epsilon não é fácil de assimilar pelos alunos, o jogo de Stewart consiste em ajudá-los a adquirir essa formulação por meio de um processo lúdico e instrutivo.

## 2.6 Algumas considerações finais

Como mencionamos, a definição de limite de Weierstrass envolve o conceito de valor absoluto ou módulo. De fato, formulamos a definição de Weierstrass em termos de valor absoluto, que é uma notação após a definição de Weierstrass. Mas, não há estudos suficientes sobre o conceito de valor absoluto. Na França, duas obras interessantes foram realizadas sobre este conceito, ou seja, o trabalho de *A. Duroux* e de *M.-J. Perrin-Glorian*. Segundo Duroux, até o século XIX, quando a noção de valor absoluto foi explicitamente reconhecida e designada, sem que a teoria ainda estivesse feita. A esse respeito, é importante o que *Cauchy* escreveu em 1821, em seu curso de análise na École Polythechnique Royale:

> Da mesma forma, no caso em que a letra a representa uma quantidade, concorda-se em examinar as duas expressões a e + a e representar por: - $a$ a quantidade oposta a $+a$, para estabelecer o que chamou de regra dos sinais. (CAUCHY, 1821)

Para mais detalhes, também podemos ver um trecho do texto de Cauchy sobre valores absolutos em DUROUX (1983, p. 6-7). Ainda de acordo com Duroux, em um trabalho sobre séries, publicado em 1860, Catalan fala de valor absoluto, mas não dá nenhuma notação. Em 1898, com Jourdan, a aplicação $x \rightarrow |x|$ é construída e usada com todas as suas propriedades. Epistemologicamente, o conceito de valor absoluto é ligado aos números negativos, que tem uma turbulenta história. Segundo Duroux apud Glaeser:

> A introdução conceitual dos números negativos foi um processo surpreendentemente lento. Durou mais de 1.500 anos, da época de Diofante aos nossos dias! (GLAESER, 1981, p. 2))

Apesar dos matemáticos usarem sem problemas, os números negativos (essencialmente do século XVIII) perdem-se em longos discursos para tentar explicar o que esses números representam. No exemplo, particular da regra dos sinais, Glaeser analisa como a busca, a todo custo, por um bom modelo de representação dos números negativos impede de dar uma demonstração satisfatória dessa regra (Duroux, 1983).

No Brasil, como na França, o conceito de valor absoluto é introduzido desde o ensino médio até à universidade. Ele é apresentado como uma ferramenta, mas em geral não há um capítulo específico para esse conceito. (Veja o conceito de valor absoluto em programas e livros didáticos do Brasil).

Também, a definição de limite de Weierstrass envolve o conceito de função. Historicamente, o conceito de função levou vários séculos a ser implementado desde as obras R. Bacon, H. Heytesbury, R. Swinshead e N. Oresme (séculos XIII e XIV). Por uma questão de clareza, em relação ao estudo das propriedades matemáticas do conceito de limite de funções no Capítulo 3. Já apresentamos no Capítulo 1 um estudo sucinto do conceito de função e das propriedades matemáticas das funções de uma variável real com valores reais.

## 2.7 Conclusão

Neste capítulo, discutimos algumas considerações históricas sobre o conceito de limite, especialmente as dificuldades epistemológicas e didáticas que geraram a implementação de sua definição. Também discutimos a comparação do trabalho precursor de Cauchy e Weierstrass com o conteúdo dos programas e livros atuais. Mostramos ainda, os diferentes conceitos envolvidos na definição de limite finito, a saber, os conceitos de: inequação, função e valor absoluto. O aparecimento desses três conceitos na definição de limite (finito) é fonte de dificuldades em seu ensino e sua apropriação pelos alunos.

Nosso objetivo é conscientizar os professores sobre as dificuldades e obstáculos que podem surgir ao se ensinar esse conceito fundamental da Análise Real. Além disso, isso nos permitirá considerar o estudo das propriedades matemáticas no Capítulo 3. Essas propriedades matemáticas dos limites estão intimamente relacionadas àquelas das funções de uma variável real com valores reais, que foram abordadas no Capítulo 1.

## 2.8 Trabalhos desenvolvidos

## 1- Curso de Cauchy.

Considere as seguintes perguntas:
1) O que você se pode dizer sobre cada uma das lições de Cauchy, apresentada neste capítulo?
2) Apresente seus comentários e suas observações.
3) Traduzir em termos atuais as notações de algumas das afirmações de Cauchy.

| Primeira lição (Página 1) | Comentários e observações |
|---|---|
| *Quando os valores sucessivamente atribuídos à mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo a acabar diferindo tão pouco quanto você quer, o último é chamado o limite de todos os outros.* | |

| Segunda lição (Página 5) | Comentários e observações |
|---|---|
| *A noção de função: "Quando as grandezas variáveis estão tão inter-relacionadas, que, dado o valor de uma delas, podemos concluir os valores de todas as outras, geralmente concebemos essas várias quantidades expressa por um deles, que então assume o nome de variável independente, e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são chamadas de funções dessa variável.* | |

| **Segunda lição** (Página 7) | **Comentários e observações** |
|---|---|
| *A continuidade de uma função: Quando a função $f(x)$ admite um valor único e finito para todos os valores de x entre dois limites dados, a diferença $f(x + i) - f(x)$ é sempre entre esses limites uma quantidade infinitamente pequena, dizemos que $f(x)$ é uma função contínua da variável $x$ entre os limites em questão.* | |

| **Terceira lição** (Página 9) | **Comentários e observações** |
|---|---|
| *A derivada de uma função. Para Cauchy, a derivada, quando existe, é simplesmente o limite do quociente:* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+i) - f(x)}{i}$, *para uma quantidade $i$ infinitamente pequena.* | |

## 2- Curso de Cauchy: Comparação

Comparar, a apresentação do curso de Cauchy, com os currículos de Cálculo Diferencial e Integral dos livros atuais, seguindo modelo a seguir.

| Ordem de apresentação dos conceitos em Cauchy | Ordem de apresentação de conceitos em livros de Cálculo Diferencial e Integral |
|---|---|
| Variável | |
| Função | |
| Limites | |
| Continuidade | |
| Derivação e diferencial | |
| Integral | |

## 3- Curso de Cauchy: Comparação

Tente responder  as seguintes perguntas:

1) A definição de Weierstrass contém 3 noções importantes, quais?

2) Dê sua opinião sobre esses 3 conceitos.

3) Faça suas observações sobre esta definição.

## 4- Valor absoluto

Através da análise de programas, livros e comentários (manuais e programas), responda às seguintes perguntas:

| Perguntas | Respostas - Observações |
|---|---|
| Em que série o valor absoluto deve ser introduzido? | |
| Em quais séries o valor absoluto continua a ser definido e utilisado? | |
| Dê alguns exemplos sobre o uso do valor absoluto no ensino fundamental. | |
| Dê alguns exemplos sobre o uso do valor absoluto no ensino médio. | |
| Dê alguns exemplos sobre o uso do valor absoluto na universidade. | |

# CAPÍTULO 3

## Conceito de limite de uma função de variável real com valor real e generalizações.

**Resumo.** Este capítulo é dedicado às propriedades matemáticas fundamentais dos limites de funções de uma variável real com valores reais. Alguns exemplos para ilustrar as propriedades importantes serão tratados. Generalizações do conceito de limite em $\mathbb{R}^n$, bem como em outros espaços métricos serão discutidas. Alguns exercícios e trabalhos práticos de desenvolvimento são propostos.

## 3.1 Preliminares e considerações gerais

É sabido que o estudo da noção de limite de funções de uma variável real com valores reais, constitui uma base importante para as noções de continuidade e diferenciabilidade. Para entender melhor a noção de limite de uma função $f: D \to \mathbb{R}$, onde $D$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, no real $a \in \mathbb{R}$ é importante mencionar os seguintes dois pontos:

1. A função $f$ não precisa estar definida no ponto $a$, de modo que tenha um limite de $L$ em $a$.

2. A função $f$ não precisa ser definida para valores "tão próximos", quanto desejamos de $a$, para que possamos falar sobre o limite possível de $f$ em $a$.

Em geral, nos cursos de ensino médio ou na introdução do cálculo diferencial e integral, para o estudo de limite de uma função $f$, a abordagem dos problemas precedentes é simplificada. Isto é, para poder levar em conta os dois pontos precedentes e por uma questão de simplicidade, o estudo do conceito do limite de uma função $f$ no ponto $a$, é preciso verificar as seguintes condições:

1. A função $f$ pode ser definida ou não em $x = a$.
2. Existem dois reais $\alpha$ e $\beta$ com $\alpha < a < \beta$, tal que $f$ é definida:
    (a) no intervalo $]\alpha, \beta[$ exceto talvez em $a$;
    (b) ou no intervalo $]a, \beta[$ para o limite à direita em $a$;
    (c) ou no intervalo $]\alpha, a[$ para o limite à esquerda em $a$;

A segunda condição (2) pode ser substituida pela seguinte condição. Existe um real $\epsilon > 0$ tal que a função $f$ é definida:

1. no intervalo $]a - \epsilon, a + \epsilon[$ exceto talvez em $a$;
2. ou no intervalo $]a, a + \epsilon[$ para o limite à direita em $a$;
3. ou no intervalo $]a - \epsilon, a[$ para o limite à esquerda em $a$;

Achamos que as hipóteses precedentes são consideradas nos cursos de ensino médio ou na introdução do cálculo diferencial e integral na universidade, por razões didáticas de clarificações e de simplificações, das dificuldades por trás do conceito de limite.

Aqui, vamos estudar e esclarecer o conceito de limite de uma função com uma abordagem da topologia de $\mathbb{R}$. Esta abordagem tem vários objetivos entre eles,

1. O uso da formulação inicial da definição de limite em termos de intervalos de Weirstrass;
2. Dar uma formulação da definição de limite mais rigorosa levando em consideração a natureza do ponto .

3. Ver que a formulação do conceito de limite em termos de $(\delta, \epsilon)$ pode ser encontrada, bem como suas proporiedades usuais;

4. Facilitar a generalização do conceito de limite no caso dos espaços métricos.

A topologia de $\mathbb{R}$ é baseada sobre o conceito de intervalos. Assim, voltamos à topologia de $\mathbb{R}$ e suas propriedades importantes para o estudo do conceito de limite.

## 3.2 Topologia de $\mathbb{R}$

### 3.2.1 Conjuntos abertos, Fechados de $\mathbb{R}$ e vizinhança

No capítulo 1, já introduzimos os vários tipos de intervalos em relação com a ordem e valor absoluto em $\mathbb{R}$. Os intervalos abertos são importantes para definir o conceito de conjunto aberto de $\mathbb{R}$.

**Definição 3.1** *<u>Conjuntos abertos de $\mathbb{R}$.</u> Seja $U$ um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que $U$ é um conjunto aberto $\mathbb{R}$, se para todo $x \in U$, existe um real $\epsilon > 0$ tal que:*

$$]x - \epsilon,\ x + \epsilon[\subset U.$$

A seguir daremos alguns exemplos de conjuntos abertos básicos.

<u>**Exemplos.**</u>

1. $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos abertos.

2. Os intervalos abertos $]a, b[$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, são conjuntos abertos.

3. $]a, +\infty[$ e $]-\infty, a[$, onde $a \in \mathbb{R}$ são conjuntos abertos.

4. $]-2,5[\, \cup\, ]7,10[$ é um conjunto aberto.

Veremos agora duas propriedades fundamentais caracterizando os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

**Proposição 3.1** *1. Seja $U_j$, $j \in K$, uma família de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Então, o conjunto $U = \bigcup_{j\in K} U_j$, é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$.*

*2. Sejam $\{U_1, U_2, \dots, U_m\}$ uma família de conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Então, o conjunto $U = \bigcap_{1\leq j\leq m} U_j$, é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$.*

*Prova.*

(1) Seja $x \in U = \bigcup_{j\in K} U_j$, então existe $j_0 \in K$ *tal que* $x \in U_{j_0}$. Como $U_{j_0}$ são abertos, existe $\epsilon > 0$ tal que $]x-\epsilon, x+\varepsilon[\, \subset U_{j_0}$. Assim, temos $]x-\epsilon, x+\varepsilon[\, \subset U = \bigcup_{j\in K} U_j$, o que implica em $U = \bigcup_{j\in K} U_j$ é aberto.

(2) Seja $x \in U = \bigcap_{1\leq j\in\leq m} U_j$, então $x \in U_j$, para todo $1 \leq j \leq m$. Como $U_j$ é aberto, existe $\epsilon_j > 0$ tal que $]x-\epsilon_j, x+\epsilon_j[\, \subset U_j$. Seja $\epsilon = \min\{\epsilon_j,\ 1 \leq j \leq m\}$, então temos $]x-\epsilon, x+\varepsilon[\, \subset U = \bigcap_{1\leq j\in\leq m} U_j$, o que implica em $U = \bigcap_{1\leq j\in\leq m} U_j$ é aberto. □

**Exemplos.**

1. Seja a família dos intervalos abertos $I_n = ]\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}[$ com $n \geq 1$. Então, o conjunto $\cup_{n\geq 1} I_n$ é um conjunto aberto dado por:

$$I = \cup_{n\geq 1} I_n = ]0,\ 2[.$$

2. Seja a família dos intervalos abertos $I_n = ]1+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}[$ com $1 \leq n \leq 10$. Então, o conjunto $\cup_{1\leq n\leq 10} I_n$ é um conjunto aberto dado por:

$$I = \bigcap_{1\leq n\leq 10} I_n = ]1+\frac{1}{10},\ 3+\frac{1}{10}[.$$

**Exercício.** Seja a família dos intervalos abertos $I_n = ]\,1+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\,[$. Mostrar que o conjunto $\cup_{n\geq 1} I_n$ não é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$.

O conjunto $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ dos abertos de $\mathbb{R}$ é estável por união e por interseção finita. Nós chamamos *topologia de* $\mathbb{R}$ todos esses abertos, ou seja:

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \{U \subset \mathbb{R},\, U \text{ conjunto aberto}\},$$

é a topologia de $\mathbb{R}$. Seja $A$ um subconjunto de $\mathbb{R}$, chamamos de complementar de $A$ em $\mathbb{R}$ o subconjunto definido por,

$$\complement_{\mathbb{R}} A = A^c = \{x \in \mathbb{R},\ x \notin A\}.$$

**Exemplos.**

1. $\mathbb{R}$ é o complementar de $\emptyset$.
2. Se $A = ]a, +\infty[$, onde $a \in \mathbb{R}$, seu complementar é $A^c = ]-\infty, a]$.
3. Se $A = ]\,a, b\,]$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, seu complementar é $A^c = ]-\infty, a]$ $U\,]\,b, +\infty[$

A noção de complementar permite definir outros tipos de subconjuntos importantes de $\mathbb{R}$, que são os conjuntos fechados.

**Definição 3.2** *Conjuntos fechados. Seja F um subconjunto de* $\mathbb{R}$*. Dizemos que F é um conjunto fechado de* $\mathbb{R}$*, se a complementar* $F^c$ *em* $\mathbb{R}$ *é um conjunto aberto em* $\mathbb{R}$*, ou seja* $U = A^c$ *é um conjunto aberto em* $\mathbb{R}$*.*

**Exemplos.**

1. $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos fechados.
2. Os intervalos $[\,a, b\,]$, onde $a,\ b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, são conjuntos fechados.

3. $[a, +\infty[$ e $]-\infty, a]$, onde $a \in \mathbb{R}$, são conjuntos fechados.

Uma parte $A$ que não está aberta, não é necessariamente fechada (e reciprocamente). Por exemplo, a parte $A = [0, 1[$ não é aberta nem fechada.

Do mesmo modo, os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$, os conjuntos fechados verificam as seguintes propriedades de estabilidade para a reunião e para a interseção.

**Proposição 3.2** *1. Seja $F_j$, $j \in K$, uma família de subconjunto de fechados de $\mathbb{R}$. Então, o conjunto $F = \bigcup_{j \in K} F_j$, é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$.*

*2. Sejam $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ uma família de conjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Então, o conjunto $F = \bigcap_{1 \leq j \leq m} F_j$, é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$.*

Um caso particular de conjuntos fechados é dado no seguinte corolário.

**Corolário 3.1** *Toda parte finita de $\mathbb{R}$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$.*

**Exemplos.**

1. Seja a família dos intervalos fechados $F_n = [1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}[$ com $n \geq 1$. Então, o conjunto $\bigcup_{n \geq 1} F_n$ é um conjunto fechado dado por:

$$I = \bigcap_{n \geq 1} F_n = [1,\ 2].$$

2. Seja a família dos intervalos fechados $F_n = [a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ com $n \geq 1$, onde $a \in \mathbb{R}$. Então, o conjunto $\bigcap_{n \geq 1} F_n$ é um conjunto fechado dado por:

$$I = \bigcap_{n \geq 1} F_n = \{a\}.$$

3. Seja a família dos intervalos fechados $F_n$ = $[1+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}]$ com $1 \leq n \leq 10$. Então, o conjunto $\bigcup_{1\leq n\leq 10} I_n$ é um conjunto fechado dado por:

$$I = \bigcup_{n\geq 1} I_n = [2,\ 4].$$

<u>**Exercício.**</u> Seja a família dos intervalos abertos $F_n$ = $[\ 1+\frac{1}{n}, 3\ ]$. Mostrar que o conjunto $\bigcup_{n\geq 1} F_n$ não é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$.

Finalmente, também temos uma noção que caracteriza os subconjuntos de $\mathbb{R}$, usando intervalos abertos do tipo $]x - \epsilon, x + \varepsilon[$.

**Definição 3.3** *<u>Vizinhança de um ponto de $\mathbb{R}$</u>. Seja $x$ em $\mathbb{R}$. Dizemos que uma parte W de $\mathbb{R}$, é uma vizinhança de $x$ (em $\mathbb{R}$) se existir $\epsilon > 0$ tal que $]x - \epsilon, x + \epsilon[ \subset W$.*

De acordo com a definição de um conjunto aberto, é claro que temos a seguinte equivalência:

1. *U é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$,*

2. *U é uma vizinhança de cada um dos seus pontos.*

Por outro lado, se $W$ é uma vizinhança de $x$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $V = ]x - \epsilon, x + \epsilon[ \subset W$. Para todo, $y \in V$, existe $\eta > 0$ tal que $]x - \eta, x + \eta[ \subset V \subset W$. Então, $W$ é uma vizinhança de $y$. Mais geralmente, se $W$ é uma vizinhança de $x$, existe uma vizinhança de $V$ de $x$ tal que para todo $y \in V$, temos que $W$ é uma vizinhança de $y$.

**Proposição 3.3** *Seja $x$ em $\mathbb{R}$.*

1. *Se W é uma vizinhança de $x$ e $W \subset W_1$, então $W_1$ é uma vizinhança de $x$.*

2. *Se $W_1, W_2, ..., W_m$ são vizinhanças de $x$, então $W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_m$ também é uma vizinhança de $x$.*

As vizinhanças separam os pontos de $\mathbb{R}$, no seguinte sentido.

**Proposição 3.4** *Sejam $x$ e $y$ dois reais tais que $x \neq y$. Existe então uma vizinhança $W_1$ de $x$ e uma vizinhança $W_2$ de $y$ tal que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.*

*Prova.* Seja por exemplo $\epsilon = \dfrac{|x-y|}{3}$, então é só pegar $W_1 = ]\, x - \epsilon, x + \epsilon\, [$ e $W_2 = ]\, y - \epsilon, y + \epsilon [$. Assim, temos $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. □

**Definição 3.4** <u>*Vizinhança de $+\infty$ e de $-\infty$*</u>.

1. *Dizemos que uma parte $W$ de $\mathbb{R}$ é uma vizinhança de $+\infty$ se existir $A > 0$ tal que $[A, +\infty[ \subset W$.*

2. *Dizemos que uma parte $W$ de $\mathbb{R}$ é uma vizinhança de $-\infty$ se existir $A > 0$ tal que $]-\infty, -A] \subset W$.*

As vizinhanças de $+\infty$ e de $-\infty$, também verificam as mesmas propriedades que as vizinhanças de um ponto de $\mathbb{R}$.

**Proposição 3.5** *Para $a = +\infty$ e $a = -\infty$, temos as seguintes assersões:*

1. *Se $W$ é uma vizinhança de $+\infty$ (respectivamente de $-\infty$) e $W \subset W_1$, então $W_1$ é uma vizinhança de (respectivamente de $-\infty$).*

2. *Se $W_1$, $W_2$, ..., $W_m$ são vizinhanças de $+\infty$ (respectivamente de $-\infty$), então $W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_m$ também é uma vizinhança de $+\infty$ (respectivamente de $-\infty$).*

Como vimos ao longo desta seção, os intervalos abertos $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ ($\epsilon > 0$), desempenham um papel fundamental tanto para definir os intervalos abertos, e também nas demonstrações das propriedades de limites. Este tipo de intervalos de $\mathbb{R}$ é definido como segue.

**Definição 3.5** <u>*Sistema fundamental de vizinhanças.*</u> *Sejam $x$ em $\mathbb{R}$ ou $x = +\infty$, $x = -\infty$. Dizemos que a parte $\mathcal{S}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $x$ se a seguinte propriedade for verificada:*

*1. Cada elemento de $\mathcal{S}$ é uma vizinhança de $x$.*

*2. Para cada vizinhança W de $x$, existe um elemento V de $\mathcal{S}$ tal que $V \subset W$.*

No seguinte exemplo daremos os sistemas fundamentais usuais.

**Exemplos.**

1. Seja $x \in \mathbb{R}$, os intervalos abertos contendo $x$ formam um sistema fundamental de vizinhanças de $x$.

2. Seja $x \in \mathbb{R}$, os intervalos $]\, x - \epsilon, x + \epsilon\, [$ ( *epsilon* $> 0$ ), formam um sistema fundamental de vizinhanças de $x$.

3. Seja $x \in \mathbb{R}$, os intervalos $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ $(n \geq 1)$, formam um sistema fundamental de vizinhanças de $x$.

4. Os intervalos $[A + \infty[$ (onde $A \geq 1$) formam um sistema de vizinhança fundamental de $+\infty$.

### 3.2.2 Ponto interior e Interior de uma parte - Ponto aderente

Aqui estamos interessados em apresentar algumas noções importantes para o estudo de limite e do cálculo diferencial e integral em geral.

**Definição 3.6** *Ponto interior. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que $x$ é um ponto interior de A se existe $\epsilon > 0$ tal que $]\, x - \epsilon, x + \epsilon\, [ \subset A$. Em outras palavras, $x$ é um ponto interno de A se A é uma vizinhança de $x$.*

*Chamamos interior A o conjunto $\overset{o}{A}$ dos pontos interiores de A, ou seja*

$$\overset{o}{A} = \{\, x \in \mathbb{R}, x \text{ interior de } A\}.$$

**<u>Exemplos.</u>**

1. $\overset{o}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\overset{o}{\emptyset} = \emptyset$

2. Seja $A = ]\, a,\ b]\ \ (b > a)$, o interior de $A$ é $\overset{o}{A} = ]\, a,\ b\, [$.

A operação de interior de um conjunto, possui as seguintes propriedades.

**Proposição 3.6** *Sejam A e $B \subset \mathbb{R}$. Então temos as seguintes propriedades.*

1. $\overset{o}{A} \subset A$
2. $\overset{o}{\overset{o}{A}} = \overset{o}{A}$
3. *se* $A \subset B$ *então* $\overset{o}{A} \subset \overset{o}{B}$

Temos a seguinte caracterização dos conjuntos interiores.

**Proposição 3.7** *Seja A uma parte de $\mathbb{R}$. Então, $\overset{o}{A}$ é o maior conjunto aberto (no sentido de inclusão) contido em A.*

*Em particular, $\overset{o}{A}$ é aberto, e temos a equivalência:*

1. *A é aberto*
2. $\overset{o}{A} = A$

Com os pontos interiores de um conjunto *A* tornam possível construir um conjunto aberto associado a *A*, que é o interior $\overset{o}{A}$. Há também outro conjunto de pontos que permite construir um conjunto fechado associado a *A*, que são definidos da seguinte maneira.

**Definição 3.7** <u>*Ponto aderente.*</u> *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que $x$ é um ponto aderente a A se qualquer vizinhança de $x$ intercepta o conjunto A. Em outras palavras, $x$ é um ponto aderente a A se toda vizinhança V de $x$ satisfaz:*

$$A \cap V \neq \emptyset$$

*Chamamos aderência de A o conjunto $\overline{A}$ dos pontos aderentes a A, ou seja*

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R},\ x\ \textit{aderente a}\ A\}.$$

Seja $\mathcal{S}$ um sistema fundamental de vizinhança de $x$. Então, temos a equivalência das seguintes afirmações:

1. $x$ é um ponto aderente a $A$;

2. Para todos os abertos $W$ de $\mathcal{S}$, temos $W \cap A \neq \emptyset$.

Em particular, $x$ é um ponto aderente a $A$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ temos $]x - \epsilon, x + \epsilon[ \cap A \neq \emptyset$

**Exemplos.**

1. Seja $A = ]a,\ b]$ $(b > a)$, então $a$ é aderente a $A$ e todo $x \in A$ é aderente a $A$. Assim, temos $\overline{A} = [a,\ b]$

2. Seja $A = ]a,\ b[$ $(b > a)$, a aderência de $A$ é $\overline{A} = [a,\ b]$

A operação de aderência de um conjunto, possui as seguintes propriedades.

**Proposição 3.8** *Sejam A e $B \subset \mathbb{R}$. Então, temos as seguintes propriedades:*

1. *Todo ponto do conjunto A é aderente ao conjunto A;*

2. $A \subset \overline{A}$;

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

4. *se* $A \subset B$, *então* $\overline{A} \subset \overline{B}$;

5. *Passagem ao complementar*

$$\overset{o}{A}{}^c = (\overline{A})^c \ \ e\ \ \overline{A}{}^c = (\overset{o}{A})^c$$

Temos a seguinte caracterização dos conjuntos de aderência.

**Proposição 3.9** *Seja A uma parte de* $\mathbb{R}$. *Então,* $\overline{A}$ *é o menor conjunto fechado (no sentido de inclusão) que contém A.*

*Em particular, o conjunto* $\overline{A}$ *é fechado, e temos a equivalência*

1. *A é um fechado*
2. $\overline{A} = A$

Os pontos aderentes a um conjunto $A$ podem ser caracterizados pelas sequências reais.

**Proposição 3.10** *Sejam* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathbb{R}$. *As duas proposições a seguir são equivalentes:*

1. $x$ *é um ponto aderente a A*
2. *Existe uma sequência* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de A tal que* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$

Sejam $A$ um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $x = +\infty$. Dizemos que $+\infty$ é aderente a $A$ se para toda a vizinhança $W$ de $+\infty$ temos $A \cap W \neq \emptyset$.

**Proposição 3.11** *Sejam A um subconjunto de* $\mathbb{R}$, *então:* $+\infty$ *é aderente a A se e somente A não é limitado superiormente.*

Há também outra classe de pontos associados a um subconjunto de $\mathbb{R}$, definidos a seguir.

**Definição 3.8** (*Ponto de acumulação*). *Seja A um subconjunto de* $\mathbb{R}$. *Dizemos que* $a \in \mathbb{R}$ *é um* ***ponto de acumulação*** $a$ *do subconjunto A, quando para toda vizinhança V de a temos,* $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$. *Ou, equivalentemente: Em* $(V \setminus \{a\}) \cap A$ *existem pontos de* $A \setminus \{a\}$

*O conjunto dos pontos de acumulação de A é denotado por :* $A'$.

Conjuntos de pontos de acumulação têm propriedades semelhantes às dos pontos de aderentes.

**Proposição 3.12** *Sejam $A, B$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.*

1. *Todo ponto a de acumulação de A é aderente a A;*

2. *$A' \subset A \subset \overline{A}$;*

3. *Se $A \subset B$ então $A' \subset B'$;*

<u>**Exemplos.**</u> Seja $A = ]1{,}2\,] \cup \{3\}$, então $a = 1$ é um ponto de acumulação de $A$ e todo $x \in A$ é também um ponto de acumulação de $A$. Mas para $\epsilon = \frac{1}{2}$, temos:

$$(]3 - \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}[\setminus\{3\}) \cap A = \emptyset,$$

Assim, o ponto $a = 3$ não é um ponto de acumulação de A. Então, temos $A' = [1{,}2]$.

## 3.3 Limite de funções de uma variável real com valores reais

### 3.3.1 Definição geral e suas consequências

Sejam $E$ uma parte de $\mathbb{R}$, e dois reais $a$, $L$ em $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Com a topologia de $\mathbb{R}$ podemos dar uma definição geral do conceito de limite, que é uma extensão natural da definição inicial do conceito de limite de Weirstrass.

**Definição 3.9** *<u>Limite em $a$ em termos de vizinhança.</u> Seja $f : E \to \mathbb{R}$. Dizemos que $f(x)$ tende para L quando $x$ tende para $a$ se: para toda vizinhança V de L, existe uma vizinhança W de $a$ tal que:*

$$f(W \cap E) \subset V.$$

*Escrevemos* $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Vamos provar a propriedade de unicidade de limite de uma função de variável real com valores reais.

**Proposição 3.13** *(Unicidade do limite) Seja $f : E \to \mathbb{R}$. Se a função $f$ tem um limite $L \in \mathbb{R}$ em $a$, então esse limite é único.*

*Prova.* Sejam $L_1$ e $L_2$ dois limites de $f$ em $a$, tal que $L_1 \neq L_2$. Seja $\epsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ e as duas vizinhanças $V_1 = ]\, L_1 - \epsilon, L_1 + \epsilon\, [$ e $V_2 = ]\, L2 - \epsilon, L_2 + \epsilon\, [$. Então, existem duas vizinhanças $W_1$ e $W_2$ tal que:

$$f(W_1 \cap E) \subset V_1 \text{ e } f(W_2 \cap E) \subset V_2.$$

Como $W_1$ e $W_2$ são vizinhanças do ponto $a$, então existe $\eta > 0$ tais que $]\, a - \eta, a + \eta\, [ \subset W_1 \cap W_2$. Assim, temos:

$$f(]a - \eta, a + \eta[ \cap E) \subset f(W_1 \cap E) \subset V_1 \text{ e } f(]a - \eta, a + \eta[ \cap E) \subset f(W_2 \cap E) \subset V_2.$$

Assim, temos $f(]\, a - \eta, a + \eta\, [ \cap E) \subset V_1 \cap V_2 = \emptyset$, o que é uma contradição. Então, se a função $f$ tem um limite $L$ em $a$, então esse limite é único. $\square$

Esta definição teórica geral engloba vários casos, isto é, na precedente definição temos os diferentes casos:

- $a \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$;
- $a \in \mathbb{R}$ e $L = \pm\infty$;
- $a = \pm\infty$ e $L \in \mathbb{R}$;
- $a = \pm\infty$ e $L = \pm\infty$.

Como a definição acima é geral, tentaremos explicar sua forma em alguns dos casos anteriores. Para isso, vamos apresentar os sistemas de vizinhancas fundamentais do ponto $a \in \mathbb{R}$ ou $= \pm\infty$ e do limite $L \in \mathbb{R}$. Outros casos serão discutidos e podem ser estudados da mesma forma.

Se $a \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$, seja $\mathcal{S}_a$ o sistema fundamental de vizinhanças de $a$ definido pelo intervalo aberto $]a - \delta, a + \delta[$, onde $\delta > 0$. Seja $\mathcal{S}_L$ o sistema fundamental de vizinhanças de $L$ definido pelos intervalos abertos $]L - \epsilon, L + \epsilon[$, onde $\epsilon > 0$. Neste caso, a definição do limite pode ser traduzida da seguinte forma:

**Proposição 3.14** *Seja $f : E \to \mathbb{R}$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *$f(x)$ tende para $L \in \mathbb{R}$ quando $x$ tende para $a$ ou $L = \lim_{x \to a} f(x)$;*
2. *Para toda vizinhança $V = ]\, L - \epsilon, L + \epsilon[$ de $L$, existe uma vizinhança $W = ]a - \delta, a + \delta[$ de $a$ tal que,*

$$f(W \cap E) = f(]a - \delta,\ a + \delta[\cap E) \subset V = ]L - \epsilon,\ L + \epsilon[.$$

*Ou equivalentemente, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,*

$$f(]a - \delta,\ a + \delta[\cap E) \subset ]L - \epsilon,\ L + \epsilon[.$$

Se $a = +\infty$ e $L \in \mathbb{R}$, seja $\mathcal{S}_a$ o sistema fundamental de vizinhanças de $+\infty$ definido pelos intervalos abertos $[A, +\infty[$, onde $A \geq 1$. Seja $\mathcal{S}_L$ o sistema fundamental de vizinhanças de $L$ definido pelos intervalos abertos $]L - \epsilon, L + \epsilon[$, onde $\epsilon > 0$. Neste caso, a definição do limite pode ser traduzida da seguinte forma:

**Proposição 3.15** *Seja $f : E \to \mathbb{R}$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *$f(x)$ tende para $L \in \mathbb{R}$ quando $x$ tende para $a = +\infty$ ou $L = \lim_{x \to a} f(x)$;*
2. *Para toda vizinhança $V = ]\, L - \epsilon, L + \epsilon[$ de $L$, existe uma vizinhança $W = [A, +\infty[$, onde $A > 1$, de $a = +\infty$ tal que:*

$$f(W \cap E) = f([A, +\infty[\cap E) \subset V = ]L - \epsilon,\ L + \epsilon[.$$

*Ou equivalentemente, para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $A > 0$ *tal que:*

$$f([A, +\infty[\cap E) \subset ]L - \epsilon,\ L + \epsilon[.$$

De maneira semelhante, se $a = -\infty$ e $L \in \mathbb{R}$, a definição do limite pode ser traduzida da seguinte forma:

**Proposição 3.16** *Seja* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. $f(x)$ *tende para* $L \in \mathbb{R}$ *quando* $x$ *tende para* $a = -\infty$ *ou* $L = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
2. *Para toda vizinhança* $V = ]\, L - \epsilon, L + \epsilon [$ *de* $L$*, existe uma vizinhança* $W = ]\, -\infty, -B\,]$*, onde* $B > 1$*, de* $a = -\infty$ *tal que:*

$$f(W \cap E) = f(] - \infty, -B] \cap E) \subset V = ]L - \epsilon,\ L + \epsilon[.$$

*Ou equivalentemente, para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $B > 0$ *tal que:*

$$f(] - \infty, -B] \cap E) \subset ]L - \epsilon,\ L + \epsilon[.$$

Todos os outros casos de limitações, citados acima, podem ser formulados da mesma maneira.

As proposições precedentes, levaram também formulações conhecidas que são mais apropriadas aos cálculos práticos de limites. Em particular, temos a formulação $(\delta, \epsilon)$, relacionado à formulação de Weirstrass, apresentado no primeiro capítulo. Assim temos, o seguinte corolário.

**Corolário 3.2** *(Limite finito). Seja* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função. Temos as seguintes afirmações:*

1. *Suponha que* $a \in \mathbb{R}$ *e* $L \in \mathbb{R}$*. Então,* $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$*, se e somente se, para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in E$ *e* $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.
2. *Suponha que* $a = +\infty$ *e* $L \in \mathbb{R}$*. Então,* $L = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$*, se e somente se,*

*para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $A \geq 0$ *tal que* $x \in E$ *e* $x > A \Rightarrow |f(x)$ - L$| < \epsilon$.

*2. Suponha que* $a = -\infty$ *e* $L \in \mathbb{R}$. *Então,* $L = \lim_{x \to -\infty} f(x)$, *se e somente se, para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $B \geq 0$ *tal que* $x \in E$ *e* $x < -B \Rightarrow |f(x)$ - L$| < \epsilon$.

No caso de limite infinito $L = +\infty$ temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.3** *(Limites infinitos:* $L = +\infty$*). Seja* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função. Temos as seguintes afirmações:*

1. *Se* $a \in \mathbb{R}$ *e* $L = +\infty$. *Então,* $L = \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, *se e somente se, para todo* $A > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in E$ *e* $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A$.

2. *Se* $a = +\infty$ *e* $L = +\infty$. *Então,* $L = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, *se e somente se, para todo* $B > 0$, *existe* $C \geq 0$ *tal que* $x \in E$ *e* $x > C \Rightarrow f(x) > B$.

3. *Se* $a = -\infty$ *e* $L = +\infty$. *Então,* $L = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, *se e somente se, para todo* $K > 0$, *existe* $H > 0$ *tal que* $x \in E$ *e* $x < -H \Rightarrow f(x) > K$.

No caso de limite infinito $L = -\infty$ temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.4** *(Limites infinitos:* $L = -\infty$*). Seja* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função. Temos as seguintes afirmações:*

1. *Se* $a \in \mathbb{R}$ *e* $L = -\infty$. *Então,* $L = \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, *se e somente se, para todo* $A > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in E$ *e* $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) - A$.

2. *Se* $a = +\infty$ *e* $L = -\infty$. *Então,* $L = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, *se e somente se, para todo* $B > 0$, *existe* $C \geq 0$ *tal que* $x \in E$ *e* $x > C \Rightarrow f(x) - B$.

3. *Se* $a = -\infty$ *e* $L = -\infty$. *Então,* $L = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, *se e somente se, para todo* $K > 0$, *existe* $H > 0$ *tal que* $x \in E$ *e* $x < -H \Rightarrow f(x) < -K$.

Finalmente, deve-se notar que a definição geral abrange todos os casos de pontos aderentes, incluindo pontos isolados.

### 3.3.2 Restrição de uma função e Limite

Seja $f : E \to \mathbb{R}$ uma função e $F \subset E$. A função $f_{|F} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_{|F}(x) = f(x), \text{ para todo } x \in F.$$

é chamada a *restrição de f para F.*

**Definição 3.10** *<u>Restrição de função e limite.</u> Seja $f : E \to \mathbb{R}$ uma função e $F \subset E$. Seja $a$ um ponto aderente a F. Dizemos que a função f tende a L quando $x$ tende para $a$, enquanto permanece em F se $L = \lim_{x \to a} f_{|F}(x)$, e escrevemos:*

$$L = \lim_{x \to a, x \in F} f(x)$$

Com a noção de restrição de funções podemos ver que várias propriedades de limite são locais, isto é, o estudo de funções pode ser restrito em algumas vizinhanças do ponto $a$.

**Proposição 3.17** *Seja $f : E \to \mathbb{R}$ uma função.*

1. *Sejam $F \subset E$, $a \in \bar{F}$ (o fechamento de F) com $L = \lim_{x \to a} f(x)$, então*
$$\lim_{x \to a, x \in F} f(x) = L.$$

2. *Se V é uma vizinhança de $a$ e $\lim_{x \to a, x \in V} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$*

**<u>Exemplo.</u>** Seja $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$. Sabemos que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$. Seja $F = \{\frac{1}{n}, n \geq 1\}$, como $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ deduzimos que 0 é um ponto aderente ao conjunto F. Assim temos:

$$lim_{x \to 0, x \in F} f(x) = 1 \text{ ou seja } \lim_{x \to 0, x \in F} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Com a restrição de funções e a definição geral de limite, nós temos a seguinte propriedade sobre as funções localmente limitadas, no caso de limites finitos.

**Proposição 3.18** *(função limitada localmente, restrição, e limite) Sejam $f : E \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Se $L = \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$, então a função $f$ é limitada na vizinhança de $a$, isto é, existe uma vizinhança $W$ de $a$ tal que a restrição $f_{|W \cap E}(x)$ é uma função limitada.*

Em outras palavras, podemos dizer que se $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ é finito então, existem $\eta > 0$ e $M > 0$ tal que:

$$\text{para todo } x \in J = ]\, a - \eta,\ a + \eta\,[ \text{ temos } |\, f(x)\,| \leq M,$$

isto é, existe um intervalo $W$ no qual a função $f$ é limitada. Isto é, se $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ então, seguinte a definição, para todo $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que para todo $x \in W = ]a - \eta,\ a + \eta[\, \cap E$ temos $|\, f(x) - L\,| < \epsilon$. Assim, temos:

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon, \text{ para todo } x \in W = ]a - \eta, a + \eta[\cap E.$$

Então, a restrição $f_{|W \cap E}(x)$ é uma função limitada.

<u>**Exemplo.**</u> Seja a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. Como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, então existe uma vizinhança $W$ de $0$ tal que a restrição $f_{|W \cap \mathbb{R}^*}(x)$ é uma função limitada. A vizinhança $W$ pode ser escolhida sobre a forma $W = ]\, -\epsilon,\ \epsilon[$.

### 3.3.3 Limite finito e comparação

Aqui daremos algumas propriedades práticas para a busca de limites de funções, usando ordem e propriedades de desigualdades em $\mathbb{R}$. É, de fato, uma extensão das desigualdades para as funções e seu uso prático para determinar os limites das funções.

A seguinte proposição caracteriza o comportamento local de uma função a partir de seu limite finito.

**Proposição 3.19** *(Desigualdade, limite finito e comportamento local). Sejam E um subconjunto de* $\mathbb{R}$*, f* $: E \to \mathbb{R}$ *uma função e* $a \in \mathbb{R}$*, onde* $a \in E$ *ou* $a \in E'$ *um ponto aderente, ou* $a = -\infty$*,* $a = +\infty =$ *. Sejam m, M* $\in \mathbb{R}$*. Suponha que f admite um limite finito L* $\in \mathbb{R}$ *em* $a$*. Sejam m, M* $\in \mathbb{R}$*.*

1. *Se L* $\leq$ *M, então existe uma vizinhança (ou intervalo aberto)* $V_a$ *do ponto* $a$ *tal que f*$(x) > M$*, para todo* $x \in V_a \cap E$*. Em particular, se M* $> 0$ *então f*$(x) > 0$*, para todo* $x \in V_a \cap E$*.*

2. *Se L* $\leq$ *m, então existe uma vizinhança (ou intervalo aberto)* $V_a$ *do ponto* $a$ *tal que f*$(x) \leq m$*, para todo* $x \in V_a \cap E$*. Em particular, se m* $< 0$ *então f*$(x) < 0$*, para todo* $x \in V_a \cap E$*.*

**<u>Exemplo.</u>** Seja $f : ]\,0, +\infty\,[ \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + 1$. Sabemos que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + 1 = 2 \geq 1$. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in ]\,-\epsilon, \epsilon\,[\cap]0, +\infty\,[$ temos $f(x) \geq 1$.

A seguinte proposição caracteriza a limitação do limite finito a partir do comportamento local da função.

**Proposição 3.20** *(Desigualdades e passagem ao limite). Sejam E um subconjunto de* $\mathbb{R}$*, f* $: E \to \mathbb{R}$ *uma função e* $a \in \mathbb{R}$*, onde* $a \in E$ *ou* $a \in E'$ *um ponto aderente, ou* $a = -\infty$*,* $a = +\infty$*. Suponha que f admite um limite finito L* $= \lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ *em* $a$*. Sejam m, M* $\in \mathbb{R}$*.*

1. *Se f*$(x) \geq$ *m numa vizinhança (ou intervalo aberto) do ponto* $a$*, então temos*

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \geq m.$$

2. *Se f*$(x) \leq$ *M numa vizinhança (ou intervalo aberto) do ponto* $a$*, então temos*

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \leq M.$$

**Exemplo.** Seja $f : ]\,0, +\infty\,[ \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + 1$. Para todo $x \in ]0, \pi/2[$ temos $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + 1 \geq 1$, porque $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \geq 0$. Então obtemos que $L = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \geq 1$.

A Proposição 3.20, diz respeito à comparação do limite finito de uma função com números reais. Agora vamos caracterizar a comparação de funções e de seus limites a partir do comportamento local das duas funções.

**Proposição 3.21** *(comparação de funções e de limites). Sejam E um subconjunto de $\mathbb{R}$, f, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções e $a \in \mathbb{R}$, onde $a \in E$ ou $a \in E'$ um ponto aderente, ou $a = -\infty$, $a = +\infty$. Suponha que f e $g$ admitem limites finitos $L_1 = \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ e $L_2 = \lim\limits_{x \to a} g(x) \in \mathbb{R}$. Suponha $L_1 \leq L_2$ então, existe uma vizinhança (intervalo aberto) $V_a$ do ponto $a$ tal que:*

$$f(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \in V_a \cap E.$$

*Portanto, se assumirmos que $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in E$ então temos $L_1 \leq L_2$.*

A Proposição 3.22, também se aplica quando $L_1 = \pm\infty$ e $L_2 = \pm\infty$. A uma consequência imediata desta proposição é o Teorema do Confronto conhecido também com o nome de Teorema do Sanduíche.

**Proposição 3.22** *(Teorema do Confronto). Sejam E um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$ três funções e $a \in \mathbb{R}$, onde $a \in E$ ou $a \in E'$ um ponto aderente, ou $a = -\infty$, $a = +\infty$. Sejam m, $M \in \mathbb{R}$. Suponha que f admite um limite finito $L = \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ em $a$. Suponha que existe uma vizinhança (intervalo aberto) $V_a$ do ponto $a$ tal que:*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

*para todo $x \in V_a$. Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, então temos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; L.$$

**Exemplo.** Seja a função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+x^2)+x}{x+1}$. Calcular o limite de $f(x)$ quando $x$ tende par + $\infty$. Seja $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ e $h(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Para $x > 0$ temos $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$ e $-1 + x \leq \text{sen}(x + x^2) + x \leq 1 + x$, então $\frac{-1+x}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ $\leq \frac{\text{sen}(x+x^2)+x}{x+1} \leq \frac{1+x}{x} = 1 + \frac{1}{x}$. Assim para todo $x > 0$, temos $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$, deduzimos que:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1 \leq \lim_{x \to +\infty} f(x) \leq \lim_{x \to +\infty} h(x) = 1.$$

Assim temos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Finalmente, terminamos esta subseção com propriedades da nulidade do limite. Esta propriedade pode ser uma consequência direta da Proposição 3.23.

**Proposição 3.23** *(uma propriedade do limite nulo). Sejam E um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in E$ ou $a \in E'$ um ponto aderente à E. Seja $g : E \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, então.*

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0.$$

**Exemplo.** Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$g(x) = 3 + \text{ sen}(2x) \text{ e } f(x) = \frac{5}{2 + x^2}.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|\, g(x) \,| \leq 3 + |\, \text{sen}\,(2x) \,| \leq 4$. Por outro lado, temos $0 \leq f(x) = \dfrac{5}{2 + x^2} \leq \dfrac{5}{x}$, para $x > 0$ assim com a aplicação do Teorema de Confronto temos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x} = 0$.

## 3.3.4 Limite infinito e comparação

Agora vamos estudar o caso em que os limites das funções são infinitos, usando as propriedades de comparação.

**Proposição 3.24** *(Limite infinito e comparação). Sejam E um subconjunto de* $\mathbb{R}$*, f, g* $: E \to \mathbb{R}$ *uma função e* $a \in E$ *ou* $a \in E'$ *um ponto aderente à E, ou* $a = -\infty, +\infty$*. Suponha que existe uma vizinhança* $V_a$ *do ponto* $a$ *tal que* $g(x) \leq f(x)$*, para todo* $x \in V_a$*. Então, se* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$*, temos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

**Exemplo.** Seja a função $f(x) = x^2 + |\cos(x)|$, onde $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Seja a função $g(x) = x^2$, como $|\cos(x)| \geq 0$, então temos:

$$g(x) \leq f(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, sabemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, assim temos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

O caso do limite infinito admite uma formulação similar.

**Proposição 3.25** *(Limite infinito e comparação). Sejam E um subconjunto de* $\mathbb{R}$*, f, g* $: E \to \mathbb{R}$ *uma função e* $a \in E$ *ou* $a \in E'$ *um ponto aderente à E, ou* $a = -\infty, +\infty$*. Suponha que existe uma vizinhança* $V_a$ *do ponto* $a$ *tal que* $f(x) \leq g(x)$*, para todo* $x \in V_a$*. Então, se* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$*, temos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

**Exemplo.** Seja a função $f(x) = -x - |\cos(x)|$, onde $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Seja a função $g(x) = -x + 2$, como $|\cos(x)| < 2$, então temos:

$$f(x) \leq g(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, sabemos que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, assim temos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

### 3.3.5 Limite à direita e limite à esquerda

**Definição 3.11** *<u>Limites à esquerda e limite à direita.</u> Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $E_1 = E \cap ]-\infty, a[$ e $E_2 = E \cap ]a, +\infty[$.*

1. *Suponha que $a$ é um ponto aderente à $E_1$. Se a função $f_{|E_1}$ tiver um limite em $a$, dizemos que a função f admite um* **limite à esquerda** *em $a$ e escrevemos:*

$$f_e(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) \text{ ou } f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

2. *Suponha que $a$ é um ponto aderente à $E_2$. Se a função $f_{|E_2}$ tiver um limite em $a$, dizemos que a função f admite um* **limite à direita** *em $a$ e escrevemos:*

$$f_d(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ ou } f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

**<u>Exemplo.</u>** Seja a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Sejam $E_1 = \mathbb{R} \cap ]-\infty, 0[ = ]-\infty, 0[$ e $E_2 = \mathbb{R} \cap ]0, +\infty[ = ]0 + \infty[$. É claro que temos,

$$f_e(0) = \lim_{x \to 0} f_{|E_1}(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \text{ e } f_d(0) = \lim_{x \to 0} f_{|E_2}(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

**Proposição 3.26** *(Limites, limites à esquerda e limite à direita de funções). Seja E um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função. Sejam* $a \in \mathbb{R}$, $E_1 = E \cap ]-\infty, a[$ *e* $E_2 = E \cap ]a, +\infty[$. Suponha que $a$ é aderente à $E_1$ e à $E_2$.

*1. Se* $a \notin E$ *e* $f(a^+) = f(a^-)$, *então temos* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a^+) = f(a^-)$

*2. Se* $a \in E$ *e* $f(a^+) = f(a^-)$, *então temos* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a^+) = f(a^-) = f(a)$

**Exemplo.** Seja $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$, $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 0$. Sejam $E_1 = \mathbb{R} \cap ]-\infty, 0[ = ]-\infty, 0[$ e $E_2 = \mathbb{R} \cap ]0, +\infty[ = ]0 + \infty[$. Sabemos que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$. Assim temos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

### 3.3.6 Limites de funções e limites de sequências numéricas

Damos aqui uma caraterização do limite de uma função usando as sequências de números reais.

**Proposição 3.27** *(Limites de sequências e limites de funções). Seja E um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função. Sejam* $L \in \mathbb{R}$ *e* $a \in E$ *ou* $a \in E'$ *um ponto aderente. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

*1.* $\lim_{x \to a} f(x) = L$

*2. Para toda sequência* $(u_n)$ *de E tal que* $\lim_{x \to +\infty} u_n = a$ *temos* $\lim_{x \to +\infty} f(u_n) = L$.

Em geral, a Proposição 3.28 é usada para mostrar que uma função não admite um limite em um ponto.

**Exemplo.** Seja a função $f(x) = \cos(x)$, onde $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que $f$ não admite um limite em $+\infty$.

Sejam as sequências $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ definidas por $u_n = 2\pi n$ e $v_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$. É claro que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Mas temos

$$\cos(u_n) = \cos(2n\pi) = 1 \text{ e } \cos(v_n) = \cos(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Assim, deduzimos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ não existe.

## 3.4 Operações sobre os limites

Sejam $E$ um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ duas funções $a \in E$ ou $a \in E'$ um ponto aderente à $E$, ou $a = -\infty, +\infty$. Por exemplo, $E$ pode ser um intervalo de $\mathbb{R}$ e $a$ um ponto tal que $a \in E$ ou uma extremidade de $E$ (ponto aderente de $E$) ou $a = -\infty, +\infty\}$.

Com as operações de adição e multiplicação de funções e a operação de multiplicar uma função por um número real, temos as seguintes operações com os limites finitos das funções.

**Proposição 3.28** *(Operações com Limites Finitos).*

1. Valor Absoluto - *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, *então* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$
2. Adição = *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, *então temos* $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2$.
3. Multiplicação por um real - *Suponho que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, *então* $\lim\limits_{x\to a} \lambda.f(x) = \lambda.L$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. MULTIPLICAÇÃO DE DUAS FUNÇÕES - *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ *e* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, *então* $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = L_1 \times L_2$.

5. *QUOCIENTE DE DUAS FUNÇÕES* - *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ *e* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$, *então* $\lim\limits_{x \to a} (\frac{f}{g})(x) = \frac{L_1}{L_2}$.

No caso dos limites finitos das funções, as operações de adição e multiplicação de funções e a operação de multiplicação de uma função por um número real, também temos operações nos limites.

**Proposição 3.29** *(Operações com Limites Infinitos).*

1. ADIÇÃO - *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L \in \mathbb{R}$, *então* $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$.

2. MULTIPLICAÇÃO DE FUNÇÕES = *Suponha que temos* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. *Então,*

*(a) Se* $L > 0$, *então* $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = +\infty$.

*(b) Se* $L < 0$, *então* $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = -\infty$.

**<u>Exemplo 1.</u>** Sejam a funções $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. É claro que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$. Então, temos $\lim\limits_{x \to 0} (f + g)(x) = +\infty$.

**<u>Exemplo 2.</u>** Sejam a funções $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = -2\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. É claro que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -2$. Assim, deduzimos $\lim\limits_{x \to 0} (f.g)(x) = -\infty$.

Também com a operação da composição das funções, temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.30** *(limites e composição de funções). Sejam* $f : I \to \mathbb{R}$ e

*$g : J \to \mathbb{R}$ tal que $f(I) \subset J$. Sejam, $a \in I$ ou uma extremidade de $I$ ou $a \in \{-\infty, -\infty\}$, $b \in J$ ou uma extremidade de $J$ ou $b \in \{-\infty, -\infty\}$ e $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, -\infty\}$.*

$$\text{Se } \lim_{x \to a} f(x) = b \text{ e } \lim_{x \to b} g(x) = L, \text{ então } \lim_{x \to a} g \circ f(x) = L.$$

**<u>Exemplo.</u>** Sejam a funções $f : ]-10, 10[ \to \mathbb{R}$ e $g : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}$ e $g(x) = \sqrt{x}$. É claro que $f(x) > 0$, para todo $x \in ]-10, 10[$, assim $f([-10, 10[) \subset ]0, +\infty[$. Podemos verificar que $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$ e $\lim_{x \to 3} g(x) = \sqrt{3}$, assim deduzimos $\lim_{x \to 0} g \circ f(x) = \sqrt{3}$.

## 3.5 Limite de funções monótonas

No caso das funções monótonas temos o seguinte resultado geral.

**Proposição 3.31** *(limites das funções monótonas). Sejam $I$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona em $I$. Seja $a \in ]\alpha, \beta[ \subset I$. Então a função $f$ admite um limite à direita e um limite à esquerda no ponto $a$,* com

1. $\lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x)$, *se $f$ é crescente.*
2. $\lim_{x \to a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^-} f(x)$, *se $f$ é decrescente.*

**<u>Exemplo.</u>** Seja a função $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{2} & \text{se } x = 2 \\ x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

A função $f$ é crescente em $[0, +\infty[$. Temos $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \sqrt{2}$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$. Então,

$$f(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \sqrt{2} < f(2) = \frac{3}{2} < f(2^+) = 2.$$

Na seguinte proposição daremos resultados importantes sobre os limites das funções monótonas definidas em intervalos limitados abertos de $\mathbb{R}$.

**Proposição 3.32** *(Limites nos extremos). Seja* $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ *uma monótona.*

1. *Se $f$ é crescente e limitada superiormente, então $f$ admite um limite à esquerda finito no ponto $b$, com* $\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in ]a,b[} f(x)$.
2. *Se $f$ é crescente e não limitada, então* $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.
3. *Se $f$ é decrescente e limitada inferiormente, então $f$ admite um limite à direita finito no ponto $a$, com* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in ]a,b[} f(x)$.
4. *Se $f$ é decrescente e não limitada inferiormente, então* $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

**Exemplo 1.** Seja a função $f : ]-\infty, 0[ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{1}{x}$. Para todo $x$ em $]-\infty, 0[$ temos $f(x) > 0$. Sejam $x, y \in ]-\infty, 0[$ com $x < y$. Como $0 < -y < -x$, então $f(x) = -\frac{1}{x} < -\frac{1}{y} = f(y)$ e deduzimos que a função $f$ é crescente em $]-\infty, 0[$. Para todo $M > 0$, temos $f(-\frac{1}{M}) = M$ e $f(-\frac{1}{M+1}) = M + 1 > M$, assim a função $f$ não é limitada superiormente. Segundo a precedente proposição deduzimos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

De maneira semelhante temos o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.** Seja a função $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{1}{x}$. Para todo $x$ em $]0, +\infty[$ temos $f(x) < 0$. Sejam $x, y \in ]0, +\infty[$ com $0 < x < y$, assim $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. Então, $f(x) = -\frac{1}{x} < -\frac{1}{y} = f(y)$ e deduzimos que a função $f$ é crescente em $]0, +\infty[$. Para todo $M > 0$, temos $f(\frac{1}{M}) = -M$ e $f(\frac{1}{M+1}) = -M - 1 < -M$, assim a função $f$ não é limitada inferiormente. Segundo a proposição precedente deduzimos que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

## 3.6 Generalização do conceito de limite

Apresentamos a definição geral do conceito de limite usando a topologia de $\mathbb{R}$. As primeiras vantagens desta definição teórica são:

1. Inclui todos os casos dos pontos associados ao domínio de definição $E$ da função, a saber: os pontos aderentes a $E$, o caso $+\infty$ e $-\infty$.

2. Permite encontrar as definições usuais do conceito de limite.

Por outro lado, esta definição é generalizável para espaços topológicos. Por exemplo, para espaços métricos usando a topologia de conjuntos abertos. De fato, podemos formular a definição do limite de uma função usando o intervalo aberto, de maneira idêntica àquela que demos para as funções de uma variável real com valores reais.

Lembra-se que um espaço métrico é um par $(M, d)$, onde $M$ é um conjunto e $d$ é uma métrica, que é uma função $d: M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y) \geq 0$ chamado de distância de $x$ a $y$, em que as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in M$:

$d_1$) $d(x, x) = 0$

$d_2$) Se $x \neq y$ então $d(x. y) > 0$

$d_3$) $d(x, y) = d(y, x)$

$d_4$) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Sejam $a \in M$ e $\epsilon > 0$, a **bola aberta** de centro $a$ e raio $\epsilon > 0$ é definida por:

$$B(a, \epsilon) = \{x \in M\, ;\, d(x, a) < \epsilon\}.$$

Seja $V \subset M$, se para todo $a \in V$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a; \epsilon) \subset V$, nós dizemos $V$ é um subconjunto aberto de $M$. E a topologia $\mathcal{T}_M$ do espaço métrico $(M, d)$, é formada pelos conjuntos abertos de $M$. Dizemos que uma parte $W$ de $M$ é uma vizinhança de $a$ se existir $\epsilon > 0$ tal que $B(a; \epsilon) \subset W$.

Sejam $(M, d_1)$ e $(N, d_2)$ dois espaços métricos. Sejam $E$ uma parte de $M$, $a$ em $M$ e $L$ em $N$. Com as topologias de $\mathcal{T}_M$ e $\mathcal{T}_N$ podemos dar uma definição geral do conceito de limite, que é uma extensão natural da definição inicial do conceito de limite no caso das funções de uma variável real com valores reais.

**Definição 3.12** *limites em $a \in M$. Seja $E$ um subconjunto de $M$, $a \in M$ e $L \in N$. Seja $f: E \to N$ uma função. Dizemos que $f(x)$ tende para $L$ quando $x$ tende para $a$ se: para toda vizinhança $V$ de $L$, existe uma vizinhança $W$ de $a$ tal que:*

$$f(W \cap E) \subset V.$$

*Escrevemos* $L = \lim_{x \to a} f(x)$

A seguir apresentamos algumas propriedades básicas de limite num espaço métrico.

**Proposição 3.33** *(Algumas propriedades). Sejam $E$ um subconjunto de $M$, $a \in M$ e $L \in N$. Seja $f : E \to N$ uma função.*

*1. Se $L = \lim_{x \to a} f(x)$ existe, então $L$ é único.*

*2. As seguintes afirmações são equivalentes*

*1.* $L = \lim_{x \to a} f(x)$ *existe,*

*2. Para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $\eta$ *tais que* $f(B(a;\eta) \cap E) \subset B(L;\epsilon)$.

*3. Para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $\eta > 0$ *tais que* $d_1(a, x) < \eta$ *implica que* $d_2(L, f(x)) < \epsilon$

As provas das propriedades da Proposição 3.34, são semelhantes das funções de uma variável real com valores reais.

Temos a generalização mais interessante que é o espaço métrico $M = (\mathbb{R}^n, d)$ $(n \geq 2)$, onde a distância $d$ pode ser definida por várias fórmulas clássicas. A mais usada é a *distância euclidiana,*

$$d(x, y) = \| x - y \|_2,$$

onde $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ e $\| . \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é norma euclidiana definida por $\| x \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Sendo assim, $(\mathbb{R}^n, \| . \|_2)$ é um espaço métrico, e a função considerada:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

são estudadas no Cálculo II. Assim, seguinte a Proposição 3.34 a definição do limite toma a seguinte forma. Sejam $E$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ e $L \in \mathbb{R}^m$. Seja $f : E \to \mathbb{R}^m$ uma função. Dizemos que $f(x)$ tende para $L$ quando $x$ tende para $a$ se:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tais que $d_1(a, x) = \| x - a \|_2 < \eta$ *implica que*
$$d_2(L, f(x)) = \| f(x) - L \|_2' < \epsilon,$$

onde $d_1$ e $d_2$ são as distâncias euclidianas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

A precedente definição pode ser formulada em temos de distância associada a norma do máximo ou em termos de distância associada à norma da soma em $\mathbb{R}^n$, definidas da seguinte forma.

1. A função $\| \, . \, \|_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|x\|_M$ = Máx $\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, $(\mathbb{R}^n, \| \, . \, \|_M)$ é um espaço métrico.

2. (Norma da soma) A função $\| \, . \, \|_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|x\|_S$ = $|x_1| + |x_2| + ... |x_n|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, $(\mathbb{R}^n, \| \, . \, \|_S)$ é um espaço métrico.

As precedentes generalizações são analisadas no Anexo 4, onde mais detalhes são dados neste estudo.

## 3.7 Exercícios, problemas e desenvolvimento

Apresentamos alguns exercícios para ilustrar algumas propriedades e alguns métodos práticos para encontrar determinados limites.

**Exercício 1.**

1. Seja a função $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$. Encontar um número $A > 0$ tal que $|x| > A$ implica $|f(x)| > 1000$.

2. Seja a função $f(x) = \frac{4x+1}{2x-3}$. Encontar um número $A > 0$ tal que $|x| > A$ implica $|f(x) - 2| > \frac{1}{100}$

**Exercício 2.** Encontre os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 - 3x + 7)$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2 - 3x + 7)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 - 3x + 7)$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3 - 3x = 7)$.

5. $\lim_{x\to-\infty}(2x^2 - 3x + 7)$.

6. $\lim_{x\to-\infty}(-2x^2 - 3x + 7)$.

7. $\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 3x + 7)$.

8. $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3 - 3x = 7)$.

Que podemos concluir?

**Exercício 3.** Calcule, quando existirem, os seguintes limites:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2|x|}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}), \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}, \qquad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x),$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) \qquad \lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}).$$

**Exercício 4.**

1. Mostre que qualquer função $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periódica de período $T>0$ não tem limite em $+\infty$.

2. Mostre que qualquer função $f(x) = x - E(x),\ x\in\mathbb{R}$, não tem limite em $+\infty$.

3. Seja a função definida por $f(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{|x-2|}$. A função $f$ admite um limite em 2?

4. Seja a função definida por $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$. A função $f$ admite um limite em 0?

Lembra-se que $E(x)$ é único número inteiro tal que $E(x)\le x < E(x)+1$.

**Exercício 5.**

1. Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1,$

2. Sejam $m$ e $n$ inteiros positivos. Estude o limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1 - x^n}}{x}$.

3. Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

**Exercício 6.** Encontre os seguintes limites

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x - 1}, \qquad \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 7x + 5}{x^2 - 1}, \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 5}{x^2 - 4x + 1}, \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 7x + 5}{2x - 1}.$

**Exercício 7.** Sejam $P$ e $Q$ dois polinômios com coeficientes reais de respectivos graus $n$ e $m$ estude de acordo com os valores de $n$ e $m$, respectivamente. Discutir a existência do seguinte limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

O que podemos dizer quando $x$ tende para - $\infty$?

**Exercício 8.** Encontre os seguintes limites.

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(2x)}{\mathrm{sen}(3x)} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1 - \cos(x)},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(2x)}{5x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(3x)}{\tan(x)}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}$$

**Exercício 9.** Seja a função $f$ definida por:

$$f(x) = x(x-1)\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{x(x-1)}) \text{ para todo } x \in \mathbb{R} - \{0,\, 1\}.$$

Encontrar os limites de *f* em 0 e 1.

**Exercício 10.** Sejam f e g duas funções definidas em $\mathbb{R}^+$ tais que:

para todo $x \in \mathbb{R}^+$ temos $g(x) > 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$

1. Mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ equivale a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

2. Se $L > 0$ mostre que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

Estudar o caso de - $\infty$.

**Exercício 11.** Seja *I* um intervalo de $\mathbb{R}$ e $a$ em *I*. Seja *f* uma função da variável real com valores reais definida em *I* - $\{a\}$. Mostre que se *f* tem um limite à direita e um limite à esquerda em $a$ e que, além disso, estes dois limites coincidem, então *f* admite um limite em $a$ cujo valor é o valor comum dos limites à direita e à esquerda.

# CAPÍTULO 4

## Discussões sobre duas definições de limite finito num ponto.

Com o intuito de fazer algumas observações sobre duas definições de limite finito que são comuns nos livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral e utilizadas por professores universitários em seus cursos, procuraremos fazer um estudo matemático e didático sobre essas duas definições; argumentar a escolha de uma delas entre as duas e fazer uma comparação entre elas.

## 4.1 Preliminares

Nos livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral aparece a definição formal de limite. Esta definição deve ser trabalhada pelos professores, em sala de aula nos seus cursos. No entanto percebemos que ela apresenta duas definições simbólicas, a saber:

> **Definição 1:** *Se uma função f, definida em* $E \subset \mathbb{R}$*, tem um limite* $L \in \mathbb{R}$ *no ponto* $a$ *se: Para todo* $\epsilon > 0$*, existe um* $\delta >$ *tais que* $\forall x \in E$*, tal que* $|x - a| < \delta \Rightarrow |(x) - L| < \epsilon$*. E escrevemos* $L = \lim_{x \to a} f(x)$.
>
> **Definição 2:** *Se uma função f, definida em* $E \subset \mathbb{R}$*, tem um limite* $L \in \mathbb{R}$ *no ponto* $a$ *se: Para todo* $\epsilon > 0$*, existe um* $\delta >$ *tais que:* $\forall x \in E, x \neq a$ *tal que* $|x - a| < \delta \Rightarrow |(x) - L| < \epsilon$*. E escrevemos* $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

Essas duas definições, quando ensinadas em sala de aula, apresentam dificuldades para o seu pleno entendimento do conceito formal de limite. Dificuldades estas que podem ser de várias naturezas: pedagógicas e epistemológicas. Dificuldades relacionados à noção intuitiva, à definição formal, ao cálculo de limites ou à metodologia empregada pelos professores, entre tantos fatores que vêm sendo investigados em diversas pesquisas desenvolvidas de Cálculo (ARTIGUE, 1995; CORNU, 1983; SIERPINSKA, 1985). Podemos ilustrar essas dificuldades citando o estudo feito por Vieira (1999), onde sua preocupação era em detectar as dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de limite de uma função real num ponto. Para evidenciar estas dificuldades, ele elaborou um questionário e uma dessas questões é apresentada a seguir:

> *Diga, em poucas palavras, o que entende por limite, ou seja, explique para si o que significa "o limite de uma função f, quando $x$ tende até um número L". (VIEIRA, 1999)*

Dentre as respostas a esta questão, percebeu confusões conceituais, dificuldades de expressões escritas e grande confusão na manipulação de expressões algébricas, como podemos ver nas seguintes falas:

- *A expressão referida diz-me o número para o qual a função se dirige (tende) sem o atingir; fiquei confuso se o atinge ou não.*
- *Os epsilon e os deltas é que é uma complicação; só sei isso com as sucessões.*
- *Nunca ninguém me perguntou isso e nunca tinha me apercebido das dúvidas que poderia ter sobre limites. Realmente, me senti confuso (...) Quando o limite dá infinito, existe ou não o limite? O limite tem que ser um valor?*
- *Limite de uma função num ponto é o valor que essa função admite numa vizinhança desse ponto.*
- *Limite é o valor que uma função não pode ultrapassar.*
- *O limite é uma vizinhança de um ponto. (VIEIRA, 1999)*

Além disso, há também as dificuldades dos alunos com os outros conceitos, que estão relacionados ao conceito de limite, por exemplo: limite à direita, limite à esquerda, limite de sequencias e limite de funções, além de "limite inferior, limite superior, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, limite segundo Heine, limite segundo Cauchy, limites de sucessões, limites de funções, limites infinitos e limites de funções num ponto de acumulação ou num ponto aderente" (VIEIRA, 1999). Então, podemos nos perguntar sobre os seguintes pontos:

1. Sobre o tempo necessário para a assimilação de todos esses conceitos?

2. Se as definições simbólicas dos conceitos de limite à esquerda e de limite à direita são semelhantes às do limite, qual a contribuição dos outros conceitos para o aluno que confronta pela primeira vez o conceito de limite?

3. Será que o professor avalia apenas as habilidades computacionais?

De fato, o conceito de limites e os demais conceitos a ele vinculados (citados acima) estão interligados à topologia dos números reais. Então, pode-se perguntar sobre o conhecimento dos alunos, sobre as propriedades dos números reais e suas aplicações. Parece-nos que os pontos acima também podem ajudar a entender e explicar essas dificuldades dos alunos.

Para muitos estudantes, na resolução de exercícios de limite de uma função se resume em encontrar uma forma de substituir o ponto na função utilizando-se de manipulações algébricas adequadas. Isso pode causar uma confusão conceitual. Evidencia a ausência de relação entre as noções intuitivas e formais do conceito e evidencia a forma como o professor trata o conceito em sala de aula. Para que a ideia de limite se forme é importante trabalhar o conceito intuitivamente e formalmente, e uma maneira eficaz de fazer essa passagem do intuitivo para o formal é criar atividades visuais (STEWART, 2010), como por exemplo, utilizando o *geogebra*. Isto pode ser visto no Apêndice A, deste material.

Outros problemas que podemos citar estão relacionados com a forma com que os livros didáticos tratam essas duas definições formais. Muitas vezes elas são apresentadas no livro didático apenas para provar as propriedades importantes dos limites e não apresentam em sua seção de exercícios, problemas utilizando *épsilon* e *delta*.

De maneira geral, percebemos nas dificuldades dos alunos no estudo da definição formal de limite num ponto que é necessário esclarecer o conteúdo matemático das duas definições, abordá-las intuitivamente e formalmente e ainda utilizar um *applet* para tornar o estudo destas definições mais clara o possível para os alunos. Desta forma, o objetivo deste capítulo é analisar as duas definições formais citadas no início deste texto e que são comuns nos livros didático do ensino superior, sendo abordadas de forma extremamente matemática.

Assim, em primeiro lugar, para cada definição apresentada, deve-se prestar atenção à consistência do que vai acontecer, quais consequências vão decorrer dela. Na verdade, em cada definição, aparecerá algumas dificuldades e armadilhas que os alunos precisam identificar. O que é importante é ter um curso de matemática coerente sobre a noção de limite. Alguns argumentos didáticos são apresentados na justificativa da escolha de cada uma delas e uma comparação entre as duas será feita.

## 4.2 Definições do conceito de limite: Objetivos e motivações

Consideremos o seguinte fato para as duas definições que vamos descutir neste capítulo.

A função $f$ considerada é definida sobre uma parte $E$, do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Procuramos o limite em um ponto a que é um ponto no fecho $\overline{E}$ do conjunto $E$. Recorde-se que significa que em cada intervalo contendo o ponto a existe pelo menos um ponto de $E$. E, além disso, podemos ficar limitados aos casos em que $E$ é um intervalo ou uma reunião de intervalos. Por exemplo, podemos tomar $E = ]a;b]$, onde $a$ é um ponto no fecho $\overline{E} = [a;b]$do conjunto $E = ]a;b]$

As definiçõs de limites de uma função em $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ são:

1. Definição com as vizinhança de $\mathbb{R}$ (Capítulo 3, Parágrafo 3.3.1, Definição 3.9)
2. Definição formal em termos de $(\epsilon, \delta)$ ( Definição 4.1 e Definição 4.2, Corolário 3.2 do Capítulo 3).
3. Formulação verbal (Cauchy, Capítulo 2, p. 55; Weierstrass, Capítulo 2, p. 58 e Stewart, Capítulo 2, p. 61).
4. Definição sequencial: em termos de sequências (Capítulo 3, Parágrafo 3.3.6 - Limites de função e limites de sequências numéricas)

A primeira definição e suas propriedades foram estudadas no Capítulo 3. Para mais detalhes podemos ver a Definição 3.9 considerada no Parágrafo 3.3.1. Mais precisamente, a definição formal de limite de função em $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, dada em termos de vizinhança, é considerada em alguns livros didáticos. Ela permite unificar os casos finitos e infinitos na mesma formulação. Frequentemente, se não em geral, nos livros de ensino a definição formal de limite finito de uma função em $a$ é sempre dada em termos de $(\epsilon, \delta)$. Essa definição aparece em duas formulações nos livros de ensino, a saber:

**Definição 4.1** *Formulação 1. Seja f uma função definida em E um subconjunto de $\mathbb{R}$, e $a \in \overline{E}$ o fecho de E. Dizemos que f tem como limite L em $a \in \mathbb{R}$ e, para qualquer $\epsilon$ estritamente positivo, existe $\delta$ estritamente positivo de tal forma que:*

$$\textit{Para qualquer}\ x \in E \ \ e \ \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \epsilon,$$

*e escrevemos*

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

**Definição 4.2** *Formulação 2. Seja f uma função definida em E um subconjunto de* $\mathbb{R}$*, e* $a \in \overline{E}$ *o fecho de E. Dizemos que f tem como limite L em* $a \in \mathbb{R}$ *se, para qualquer* $\epsilon$ *estritamente positivo, existe* $\delta$ *estritamente positivo de tal forma que:*

$$\text{Para qualquer } x \in E \ \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \epsilon.$$

*ou equivalentemente,*

$$\text{Para qualquer } x \in E \setminus \{a\} \text{ e } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \epsilon,$$

*e escrevemos*

$$\lim_{x \to a,\, x \in E} f(x) = L$$

Essas duas definições, que podem ser formuladas em formas equivalentes, serão analisadas no próximo parágrafo.

Além disso, poucos livros didáticos de cálculo apresentam exemplos de cálculos ou sugerem exercícios utilizando os termos $(\epsilon, \delta)$, por exemplo o livro de Balac e Sturm (BALAC e STURM, 2014) e o livro Nguyen et al. (NGUYEN e al., 2013). Os exercícios geralmente se contentam em pedir "cálculos", de limites com funções explícitas usando limites usuais e as regras de cálculos algébricos. Isto é, os livros didáticos insistem na definição formal com $(\epsilon, \delta)$, no entanto, os exercícios visam dominar o cálculo, usando as operações algébricas usuais de limites, com funções explícitas. Esse processo é encontrado inicialmente na obra de Cauchy (1821-1823). De fato, depois de ter dado suas definições de limite de quantidades e de continuidade, Cauchy não usa mais suas definições para realizar cálculos de limites, porque essas definições não se prestam aos cálculos. No entanto, Cauchy desenvolve técnicas de cálculo para calcular derivadas de funções e levantar indeterminações. Observe também que existem poucos exercícios sobre funções gerais que requerem o uso da definição em $(\epsilon, \delta)$.

Nos livros didáticos, a definição verbal pode assumir diferentes formas. Por exemplo, no livro de Stewart (2011), encontramos a seguinte definição,

**Definição 4.3** *Nós ecrevemos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

*e dizemos que*

**o limite de** $f(x)$, **quando** $x$ **se aproxima de** $a$, **é igual** a $L$

*se pudermos aproximar arbitrariamente os valores de* $f(x)$ *(tão perto de L quanto desejamos) tomando* $x$ *para estar suficientemente próximo de* $a$ *(em ambos os lados de* $a$*), mas não igual a* $a$*.*

Em alguns livros, mas muito raramente, é possível encontrar a definição de limites, formulada através de sequências, por exemplo, o livro de Ramis e Warusfel (2006) e (2013). De fato, a definição sequencial de limite não é outra senão a Proposição 3.28 do Capítulo 3. Por razões de clareza, lembramos aqui esta definição.

**Definição 4.4** *Seja f uma função definida em E um subconjunto de* $\mathbb{R}$, *e* $a \in \overline{E}$ *o fecho de E. Dizemos que f tem um limite L se, para qualquer sequência* $(x_n)$ *de E de limite* $a$*, então a sequência* $(f(x_n))$ *tem o limite L.*

Em conclusão, os livros didáticos insistem na definição formal com $(\epsilon, \delta)$. Isto é, na maioria dos livros de ensino universitário, o conceito de limite é definido por uma das duas definições, a saber, Definição 4.1

ou Definição 4.2. No entanto, essas duas definições requerem esclarecimentos. Esse é o objetivo do próximo parágrafo.

## 4.3 As duas definições: Definição 4.1 e Definição 4.2

### 4.3.1 Apresentação das duas definições

Seja um ponto $a \in \mathbb{R}$ no fecho $\overline{E}$ de $E$. Seja $f$ uma função definida de $E$ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$f : E \to \mathbb{R}.$$

Lembramos que historicamente, o conceito de limite tem sido estudado de maneira mais efetiva após a introdução do cálculo diferencial e integral por Leibniz e Newton no século 17. Foi Weierstrass (1815-1897) o primeiro a dar a definição formal que todos os matemáticos usam até hoje, a definição $(\epsilon, \delta)$. Essa definição foi dada no Capítulo 3 como uma consequência da Definição 3.9 sob a seguinte forma.

**Definição 4.5 : Primeira definição.** *Nós dizemos que $f$ tem um limite $L \in \mathbb{R}$ no ponto $a \in \mathbb{R}$ se :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

*E escrevemos:* $L = \lim\limits_{x \to a, x \in E} f(x)$.

A segunda definição de limite finito é dada sobre a seguinte forma.

**Definição 4.6 : Segunda definição.** *Nós dizemos que $f$ tem um limite $L \in \mathbb{R}$ no ponto $a \in \mathbb{R}$ se :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

*E escrevemos:* $L = \lim\limits_{x \to a, x \in E, x \neq a} f(x)$.

Alguns livros, insistem no uso do formalismo com quantificadores. Retomaremos as duas primeiras definições com os símbolos $\exists$ e $\forall$, que representam uma formulação dessas definições de maneira literal.

## 4.3.2 Discussões sobre essas definições

Aqui vamos fazer alguns comentários gerais sobre essas definições. Primeiramente, a única diferença entre essas duas definições é:

1. Na primeira definição nós temos, $0 \leq |x - a| < \delta$, o que implica que $x \in E$ pode assumir o valor $a$.

2. Na segunda definição nós temos, $0 < |x - a| < \delta$, o que implica que $x \in E$ não pode assumir o valor $a$.

Em outras palavras, a única diferença entre as duas definições é que, na segunda, olhamos apenas para os pontos $x$ de $E$ diferentes de $a$. Essa diferença tem consequências importantes nas propriedades e no conceito de limites.

**1. Significado informal da segunda definição**

*O limite de f quando* $x$ *tende para a é igual a L "significa, informalmente, que* $f(x)$ *é arbitrariamente próximo de L quando* $x \in E$ *é muito próximo do ponto* $a$ *com* $x \neq a$*" ou equivalentemente:*

$|f(x) - L| < \epsilon$ *para qualquer* $\epsilon > 0$ *pequeno, desde que* $x \in E$ *com* $0 < |x - a| < \delta$*, onde* $\epsilon$ *é suficientemente pequeno.*

**2. Tradução usando os intervalos.**

A expressão $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, pode ser escrita, usando os intervalos, sobre a seguinte forma:

**Caso da primeira definição.** *$f(x)$ está no intervalo (aberto) $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ para qualquer $\epsilon > 0$ pequeno, desde que $x \in E$ esteja no* **intervalo** *(aberto) $]a - \delta; a + \delta[$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.*

Usando os intervalos a expressão $L = \lim_{x\to a, x\neq a} f(x)$, pode ser escrita sobre a seguinte forma:

**Caso da segunda definição.** *$f(x)$ está no intervalo (aberto) $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ para qualquer $\epsilon > 0$ pequeno, desde que $x \in E$ esteja no* **conjunto** *(aberto) $]a - \delta; a[ \cup ]a; a + \delta[$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.*

**3. Tradução com inequações.** Usando as desigualdades, a expressão $\lim_{x\to a} f(x) = L$, pode ser escrita sobre a seguinte forma:

**Caso da primeira definição.**

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \forall x \in E,\ :\ a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

ou equivalentemente:

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \forall x \in E,\ :\ a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon.$$

Para a segunda definição temos a seguinte formulação.

**Caso da segunda definição.**

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \forall x \in E, E\ \ e\ x \neq a\ :\ a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

*ou equivalentemente:*

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \forall x \in E\ \ e\ x \neq a,\ :\ a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon.$$

Após essas observações sobre as diferenças entre as duas definições em termos de intervalos e desigualdades, discutiremos os elementos matemáticos comuns dessas duas definições e levantaremos alguns elementos matemáticos diferentes que estão por trás.

## 4.4 Os pontos comuns e os pontos de diferenças

### 4.4.1 Pontos comuns

Se $a \in \mathbb{R}$ não estiver em $E$, as duas definições coincidem, pois $x$ não pode ser igual $a$. Esse caso é muito importante, pois inclui, em particular, o caso de cálculo do número derivado de uma função. De fato, na expressão do quociente:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ temos que } x \neq a,$$

a função $h$ não é definida em $a$. Por exemplo, para o cálculo do número derivado da função $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$ em 0, procuramos determinar o limite da função:

$$h(x) = \frac{sen(x)}{x},$$

que não é definida em $a = 0$.

### 4.4.2 Pontos de diferenças

Se $a$ está em $E$ as duas definições não são necessariamente equivalentes. Na verdade:

(1) Com a primeira definição, $f(a)$ é o único limite de $f$ em $a \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, se $f$ tem um limite no ponto $a$, que $f$ é definida em $a$, então $f$ é contínua em $a$. Assim, basta aplicar a definição em $a$. Verifica-se que $|f(x) - L| < \epsilon$ ocorre para todo $\epsilon > 0$, o que significa que devemos ter necessariamente $f(a) = L$. Por outro lado, nos casos em que a função $f$ estiver definida no ponto $a$, e existir o limite da função $f$ quando $x$ tende para $a$ e este limite coincidir com o valor da função no ponto $a$, diremos que a função $f$ é contínua no ponto $a$.

(2) Com a segunda definição, no entanto, a função $f$ pode ter um limite, mas sem ser contínua. Por exemplo, considere a função $f$ definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = 0 \text{ se } x \neq 0 \;\text{ e } f(0) = 1.$$

Com a primeira definição $f$ não tem limite no ponto $a = 0$, com a segunda definição, a função $f$ admite limite 0.

Assim, vemos que:

- Com a primeira definição uma função $f$ pode não admitir limite em $a$,
- Com a segunda definição $f$ a função tem limite em $a$.

A segunda definição nos leva a uma caracterização do que significa uma função não ser contínua num intervalo *E*. Porque, a função $f$ pode ser definida em um intervalo aberto qualquer que contenha $a \in \mathbb{R}$, excluindo o valor de $a$. Em outras palavras, para a segunda definição do limite, quando $x$ tende a $a$, não é necessário que a função esteja definida em $a$ e pode ocorrer que a função esteja definida em $a$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. O que interessa é o comportamento de $f(x)$ quando $x$ se aproxima de $a$ e não o que ocorre com $f$ quando $x$ é exatamente igual a $a$ $(x = a)$.

Em conclusão, podemos dizer que as duas definições são equivalentes nos dois casos importantes a seguir:

1. Se a função $f$ for contínua em $a$,
2. Se a função $f$ não estiver definida em $a$.

Elas diferem no caso de uma função contínua para a qual o valor $f(a)$ é substituído por um outro valor arbitrário. Na Definição 4.5 não tem limite, na Definição 4.6 seu limite é o valor que a torna contínua.

### 4.4.3 Observação geral

É conveniente observar que a existência do limite de uma função, quando $x$ tende para $a$, não depende necessariamente que a função esteja definida em $a$, pois quando calculamos um limite, consideramos os valores da função tão próximos quanto queiramos do ponto a, porém não coincidente com $a$, ou seja, consideramos os valores da função na vizinhança do ponto $a$. Mais precisamente, o limite de uma função $f(x)$, quando $x$ tende para $a$, pode inclusive, não existir, mesmo se a função $f(x)$ é definida em $a$, ou seja, $f(x)$ existe. Haverá casos em que a função $f(x)$ não está definida no ponto $a$, mas o limite de $f(x)$ quando $x$ tenderá a $a$existe. Por exemplo, o limite da função $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ $(x \neq 0)$ quando $x$ tende para 0 existe, mas $f(0)$ não existe.

## 4.5 Análise e discussão

### 4.5.1 Considerações gerais

A primeira definição foi dada uma vez no início do cálculo, a segunda definição é a que muitas vezes é dada nos cursos de Análise Real na universidade, especialmente se considerarmos os vários exemplos semelhantes dados anteriormente. Deve ser entendido que a escolha de uma ou de outra definição não é de grande importância matemática, desde que seja consistente. No entanto, a escolha da primeira definição é bastante comum. Mas esta escolha não é óbvia, e outros professores legitimamente podem fazer escolha oposta. Aqui estão três argumentos a favor da escolha da primeira definição:

1. Argumento de importância bibliográfica: É a definição mais comum nos livros didáticos.

2. Argumento da conveniência e oportunidade: É a definição que foi

usada no ensino médio, como na França.

3. Argumento matemático: A segunda definição leva a um problema matemático, ao estudar os limites das funções compostas.

Para bem esclarecer a última afirmação (3), considerando a seguinte proposição.

**Proposição 4.1** *Seja $f: E \to \mathbb{R}$ e $g: F \to \mathbb{R}$, duas funções com $f(E) \subset F$ (de modo que a função $g o f$ é definida sobre E). Seja $a$ em E e suponhamos que f tem o limite $b$ em $a$ com $b$ em F e $g$ tem um limite em $b$. Então, a função $g o f$ tem o limite em $a$.*

Esta proposição é verdadeira, se usarmos a primeira definição. Mas se queremos usar a segunda definição, que é bem possível, então ele tem que alterar a redação da Proposição 4.1 anterior, exigindo que $g$ seja contínua em $b$.

## 4.5.2 Limite à direita e limite à esquerda

As duas definições são ligadas aos conceitos de limite à esquerda e de limite à direita. Sejam $I$ um intervalo de $\mathbb{R}$, e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função. Seja $a$ uma extremidade de $I$ com $a$ finito. Lembre-se que:

- Se $a$ for uma extremidade direita de $I$, definimos $J = I \cap ]-\infty, a[$ e a função restrição $f_{|J}$ de $f$ a $J$. Se a função $f_{|J}$ tiver um limite em $a$, dizemos que a função $f$ admite um limite à esquerda em $a$ e escrevemos: $L = \lim_{x \to a^-} f(x)$.
- Se $a$ for uma extremidade direita de $I$, definimos $J = I \cap ]a, +\infty[$ e a função restrição $f_{|J}$ de $f$ a $J$. Se a função $f_{|J}$ tiver um limite em $a$, dizemos que a função $f$ admite um limite à direita em $a$ e escrevemos: $L = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Em outras palavras, se $x$ tende para $a$, e $x$ tomando valores imediatamente menores de que $a$, dizemos que temos um limite à esquerda da função. Se $x$ tende para $a$, e $x$ tomando valores imediatamente maiores de que $a$, dizemos que temos um limite à direita da função. Podemos mostrar que, se esses limites à direita e à esquerda forem iguais, será o limite da função quando $x$ tenderá a $a$.

Independentemente da escolha que é feita entre a primeira e a segunda definição, devemos assegurar que esta escolha é consistente com o resto das aulas. Em particular, se levarmos em conta os limites à direita ou os limites à esquerda. Assim, os erros a serem evitados são:

- Definir o limite com a primeira definição e os limites à esquerda e os limites à direita com a segunda definição. Com efeito, enquanto que a função terá um limite pela esquerda e o limite pela direita, que são iguais, mas a função não tem limite em $a$.

- Definir o limite com a segunda definição e os limites à esquerda e à direita com a primeira definição. Na verdade, a função não tem limite à esquerda ou à direita, mas tem um limite.

Em outras palavras, qualquer que seja a escolha feita da definição do limite, a Definição 4.6 ou a Definição 4.5, deve-se tomar cuidado para garantir consistência. Em particular, se você fala sobre limites à direita ou à esquerda, há exatamente o mesmo problema e deve ser resolvido da mesma maneira sob pena de dizer bobagem. Isto é, o que você não deve fazer é começar com uma definição e depois usar a outra para as propriedades.

## 4.6 Conclusão

Neste capítulo, fornecemos as definições usuais do conceito de limite finito de uma função de variável real e estudamos as duas definições mais comuns nos livros didáticos. De fato, apresentamos um certo número de elementos importantes, que tornam possível esclarecer a definição do limite finito de uma determinada função em um ponto. Foram apresentados os argumentos da escolha de uma ou outra das duas definições atualmente adotadas nos livros didáticos. Emerge da nossa discussão que essa escolha não é de grande importância do ponto de vista matemático. De fato, qualquer que seja a escolha que possa ser adotada, é importante garantir a coerência das propriedades dos limites que dela resultam.

No apêndice A, teremos um estudo dessas duas definições utilizando o geogebra com objetivo de facilitar o entendimento e visualização de modo dinâmico e interativo.

# CAPÍTULO 5

## Limite: Métodos, Aspectos Gráficos e Recomendações

Como mencionamos, em geral, após a definição formal ou a definição verbal do conceito de limite de uma função com variáveis reais, a busca do limite de uma função em um ponto torna-se mais baseada em técnicas e métodos de operacionalização de cálculos algébricos. Neste capítulo, apresentaremos alguns métodos comuns para determinar o limite de uma função em um ponto $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty, +\infty$. Finalmente, damos as interpretações geométricas do limite de uma função *f*, em termos de assíntotas para a curva da função $C_f$.

## 5.1 Preliminares e motivações

Neste capítulo vamos apresentar alguns métodos práticos para a resolução de limites, utilizando os teoremas de limites, as propriedades de limites e os aspectos gráficos em relação as assíntotas. Para o limite de funções, em geral, o problema é o seguinte:

> *Para uma função f dada e um* $a \in \mathbb{R}$ *, encontrar o limite da função f, para* $x$ *numa vizinhança de* $a$*.*

Para responder a esse problema temos duas situações:

1. Se os teoremas gerais dos limites podem ser aplicados diretamente, então a solução é imediata.

2. Caso contrário, é importante verificar que os teoremas de limite não podem ser aplicados, e de localizar as expressões de *f* onde

> os teoremas não podem ser aplicados. Somente essas expressões têm que ser transformadas em expressões adequadas para aplicar os teoremas de limites.

Para as funções numéricas de uma variável real, encontramos quatro casos, onde os teoremas de limites não nos permitem concluir suas respostas, são eles:

1. $\infty - \infty$
2. $0 \times \infty$
3. $\frac{0}{0}$
4. $\frac{\infty}{\infty}$

Aqui $\infty$ pode ser $+\infty$ ou $-\infty$. Na literatura matemática os precedentes casos são chamados de **formas indeterminadas**. Na realidade, não tem **indeterminação** porque o limite existe ou não. Somente não podemos aplicar os teoremas diretamente para concluir se o limite existe ou não.

O objetivo deste capítulo é o de apresentar métodos para tratar vários exemplos básicos de limites. Também, vamos discutir as quatros precedentes situações, descritas anteriormente. A seguir faremos a discussão dos aspectos gráficos ligados aos teoremas de limites.

## 5.2 Alguns métodos específicos para a resolução de limites

Para as funções polinomiais, a busca do limite em $+\infty$ ou $-\infty$ pode aparecer na forma indeterminada do tipo $+\infty + (-\infty)$. Apresentamos aqui os dois métodos práticos para levantar esse tipo de indeterminação.

**Método 1:** Limites de funções polinomiais em $+\infty$. Seja $f$ uma função polinomial definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = a_s x^s + ... + a_1 x + a_0 \text{ com } a_s \neq 0.$$

O limite de $f(x)$ quando $x$ tende para + $\infty$ é o mesmo que o limite da função $g(x) = a_s x^s$, isto é,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a_s x^s = a_s \lim_{x \to +\infty} x^s.$$

Assim, temos as duas situações:

1. Se $a_s > 0$ temos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
2. Se $a_s < 0$ temos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$,

<u>Aplicação.</u> 1) Estudar o limite da função $f(x) = 3x^2 + 5x + 2x$ em $+\infty$.
2) Estudar o limite da função $f(x) = -x^3 + 5x + 7$ em $+\infty$.

**Solução.** 1) A função $f$ é uma função polinomial, cujo temo de grau máximo é $3x^3$, assim $a_3 = 3$ e aplicando o Método 1, temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3x^3 = 3 \lim_{x \to +\infty} x^3.$$

Como $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ deduzimos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3 \times (+\infty) = +\infty$.

2) A função $f$ é uma função polinomial, cujo termo de grau máximo é $-x^3$, assim $a_3 = -1$ e aplicando o Método 1, temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\lim_{x \to +\infty} x^3.$$

Como $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ deduzimos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1 \times (+\infty) = -\infty$.

<u>**Método 2:** Limites de funções polinomiais em $-\infty$.</u> Seja $f$ uma função polinomial definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = a_s x^s + ... + a_1 x + a_0 \text{ com } a_s \neq 0.$$

O limite de $f(x)$ quando $x$ tende para $-\infty$ é o mesmo limite que da função

$g(x) = a_s x^s$, isto é:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} a_s x^s = a_s \lim_{x \to -\infty} x^s.$$

Assim, temos os seguintes casos:

1. Se $a_s > 0$ e temos $s$ é par, então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
2. Se $a_s > 0$ e temos $s$ é ímpar, então $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,
3. Se $a_s < 0$ e temos $s$ é par, então $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,
4. Se $a_s < 0$ e temos $s$ é ímpar, então $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,

<u>Aplicação.</u> 1) Estudar o limite da função $f(x) = 3x^3 + 5x + 2$ em $-\infty$.

2) Estudar o limite da função $f(x) = -x^3 - 5x + 7$ em $-\infty$.

**Solução.** 1) A função $f$ é uma função polinomial, cujo temo de grau máximo é $3x^3$, assim $a_3 = 3$ e aplicando o Método 2, temos que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3x^3 = 3 \lim_{x \to -\infty} x^3.$$

Como $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ deduzimos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3 \times (-\infty) = -\infty$.

2) A função $f$ é uma função polinomial, cujo o termo de grau máximo é $-x^3$, assim $a_3 = -1$ e aplicando o Método 2, temos que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x^3 = -1 \times \lim_{x \to -\infty} x^3.$$

Como $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ deduzimos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$.

Para as funções racioniais, a busca de limite em $+\infty$ ou $-\infty$ pode aparecer as formas indeterminadas do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, onde $\infty$ pode ser $+\infty$ ou $-\infty$. Apresentamos aqui os métodos práticos para levantar esse tipo de indeterminação.

**Método 3:** Limites de funções racionais. O limite de uma função definida por uma fração racional (quociente de dois polinômios), quando $x$ tende a + $\infty$ ou - $\infty$, é igual ao limite do quociente dos termos de grau mais alto.
Isto é, se $f(x) = \frac{a_n x^n + ... + a_0}{b_m x^m + ... + b_0}$, com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, então temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + ... + a_0}{b_m x^m + ... + b_0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \to +\infty} x^{n-m}.$$

Também, para - $\infty$, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n + ... + a_0}{b_m x^m + ... + b_0} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \to -\infty} x^{n-m}.$$

Assim, com os precedentes resultados de limites das funções polinômiais em + $\infty$ ou - $\infty$, podemos deduzir o limite.

APLICAÇÃO. 1) Estudar o limite da função $f(x) = \frac{3x^2+5x}{x+5}$ em + $\infty$.
2) Estudar o limite da função $f(x) = \frac{x^3-5x+7}{x^2+11}$ em - $\infty$.

**Solução.** 1) A função $f$ é uma função racional, cujo numerador é $3x^3 + 5x$ e o denominador é $x + 5$. Aplicando o Método 3, temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x} = 3 \lim_{x \to +\infty} x.$$

Como $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ deduzimos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3 \times (+\infty) = +\infty$.

2) A função $f$ é uma função racional, cujo numerador é $x^3 - 5x + 7$ e o denominador é $x^2 + 11$. Aplicando o Método 3, temos que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3}{x^2} = 3 \lim_{x \to -\infty} x.$$

Como $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ deduzimos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3 \times (-\infty) = -\infty$.

Com as funções trigonométricas, também na busca de limite em $a$ pode aparecer as formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\infty \times 0$.

<u>**Método 4:**</u> <u>Limites de funções trigonométricas.</u> Para as funções trigonométricas, os seguintes limites são importantes e devem ser bem conhecido, e são definidos como limites fundamentais do cálculo, para calcular outros limites de funções trigonométricas:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1,$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

O primeiro limite mostra os outros dois. De fato, temos:

$$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{e} \quad \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{2\operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Assim, podemos deduzir que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, usando $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, porque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos(x)} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right) = 1.$

Em geral, na busca do limite em 0 das funções trigonométricas, algumas relações trigonométricas podem ser consideradas para fazer aparecer expressões do tipo $\frac{\beta.\operatorname{sen}(x)}{\alpha.x}$. Isso facilita a pesquisa pelo limite em 0.

Se $f$ é uma função trigonométrica a busca pelo limite $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ pode ser reduzida para a da busca pelo limite em 0, considerando a mudança da variável $x = \alpha + t$, logo $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} f(\alpha + t)$.

## 5.3 Métodos gerais para a resolução de limites

**Método 5: Existência de limite em $a$.** Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Para estabelecer que $f$ admite um limite em $a$, podemos usar um dos seguintes resultados:

- Usar os teoremas de limite das funções monótonas, para a existência de limite à esquerda e à direita em $a$.
- Usar os teoremas de comparação de funções.
- Usar as operações algébricas e a operação de composição.

APLICAÇÃO. 1) Estudar o limite da função $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ em $a = 0$.

2) Estudar o limite da função $f(x) = x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) + \frac{1+x\cos(x^2+1)}{x^2+1}$ em $+\infty$.

**Solução.** 1) Vamos aplicar o teorema de camparação. Sabemos que $-1 \leq sen(\dfrac{1}{x})$, para todo $x \neq 0$. Como $x^2 > 0$ temos que $-x^2 \leq x^2 sen(\dfrac{1}{x}) \leq x^2$. Por outro lado, $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = 0$, deduzimos que:

$$\lim_{x\to 0}(x^2 sen(\frac{1}{x})) = 0.$$

2) Seja $u = \frac{1}{x}$, temos $u$ tende para 0 quando $x$ temde para $+\infty$. Assim, deduzimos que:

$$\lim_{x\to+\infty} x sen(\frac{1}{x}) = \lim_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u} = 1.$$

Por outro lado, para todo $x > 0$ temos que $1 - x \leq 1 + x\cos(x^2+1) \leq 1 + x$. Assim, para todo $x > 1$ temos:

$$\frac{-2x}{x^2+1} \leq \frac{1-x}{x^2+1} \leq \frac{1+x\cos(x^2+1)}{x^2+1} \leq \frac{1+x}{x^2+1} \leq \frac{2x}{x^2+1}.$$

com os teoremas de limites das funções racionais (ver o Método 3) temos $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x^2}=-2\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2}=2\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

Aplicando o teorema de comparação, podemos deduzir que;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\cos(x^2+1)}{x^2+1}=0.$$

E com o teorema de adição de limites, obtemos:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xsen(\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\cos(x^2+1)}{x^2+1}=1+0=1.$$

**Método 6: Sequências e existência de limite.** Seja $f\colon D\to\mathbb{R}$ e $a\in\mathbb{R}$. Para estabelecer que $f$ não admite um limite em $a$, podemos usar uma das seguintes abordagens:

- Produzir uma sequência $(u_n)_n$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ e a sequência $(v_n)_n$ definida por $v_n=f(u_n)$ é divergente.
- Encontrar duas sequências $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=a$ com $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}f(v_n)$.

APLICAÇÃO. 1) Estudar o limite da função $f(x)=sen(\frac{1}{x})$ em $a=0$.

**Solução.** Sejam as duas sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ dadas por $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ e $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}$, onde $n\geq1$. Assim, temos que:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi}=0 \text{ e } \lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi+\pi/2}=0.$$

Por outro lado, temos $\dfrac{1}{x_n}=2n\pi$ e $\dfrac{1}{y_n}=2n\pi+\pi/2$, o que implica:

$f(x_n) = sen(2n\pi) = sen(0) = 0$ e $f(y_n) = sen(2n\pi + \pi/2) = sen(\pi/2) = 1.$

Então, deduzimos que:

$$f(x_n) = 0 \neq f(y_n) = 1.$$

Conclusão, a função $f(x) = sen(\frac{1}{x})$ não possui um limite em $a = 0$.

**<u>Método 7: Limite com mudança de variável.</u>** Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Se existem duas funções $g$ e $h$ tais que $f(x) = go\,h\,(x)$, então $f(x) = g(h(\mathrm{x})) = g(X)$, onde $X = h(\mathrm{x})$. Supor:

- $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b,$
- $\lim\limits_{x \to b} g(X) = L,$

então, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} goh(x) = \lim_{X \to b} g(X) = L.$$

<u>Aplicação.</u> Estudar o limite da função $f(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 1}\right)$ em $a = +\infty$.

**Solução.** Sejam as funções

$$h(x) = \frac{\pi x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 1} \text{ e } g(x) = sen(x).$$

Temos que a função $f$ é a função composta das funções $g$ e $h$, isto é,

$$f(x) = goh(x).$$

Como o teorema de limite das funções racionais temos que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi x^2}{2x^2} = \frac{\pi}{2}$. Seja X = $h(x) = \frac{\pi x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 1}$. Assim, com o teorema de limite das funções compostas, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to\pi/2} g(X) = sen(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

**Exercício.** Estudar o limite da função $f(x) = \ln(\frac{x+1}{x+2})$ em $a = 0$.

<u>**Método 8 - Volta para uma vizinhança de 0:**</u> **Uma abordagem prática.** Como uma consequência da mudança de variável podemos também voltar ao estudo de limite numa vizinhança de 0.

- Em alguns casos, para encontrar o limite $\lim_{x\to a} f(x)$, é mais prático de considerar a função $g(t) = f(t+a)$. Assim, temos $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to 0} g(t)$. Dessa maneira voltamos ao estudo de limite na vizinhança de 0.

- Em alguns casos, para encontrar o limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, é mais prático de considerar a função $g(t) = f(\frac{1}{t})$. Assim, temos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to 0} g(t)$, assim voltamos ao estudo de limite na vizinhança de 0.

<u>Aplicação.</u> Estudar o limite da função $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x) - 1}{x - \pi/2}$ em $a = \pi/2$.

**Solução.** Seja $t = x$ - $\pi/2$. Quando $x$ tende para $a = \pi/2$ temos $t$ que tende para 0. Então temos que:

$$f(x) = f(t+\pi/2) = \frac{sen(t+\pi/2)-1}{t+\pi/2-\pi/2} = \frac{sen(t+\pi/2)-1}{t}.$$

Usando a relação $sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$ e os valores notáveis $sen(\pi/2) =$ e $cos(\pi/2) = 0$, deduzimos que $sen(t+\pi/2) = cos(t)$. Então, temos:

$$f(x) = f(t+\pi/2) = \frac{cos(t)-1}{t} = t \times \frac{cos(t)-1}{t^2}.$$

Como $\lim_{t\to 0} \dfrac{cos(t)-1}{t^2} = -\dfrac{1}{2}$ (ver Método 4), deduzimos que:

$$\lim_{x \to \pi/2} f(x) = \lim_{t \to 0} t \times \frac{cos(t) - 1}{t^2} = 0 \times (-\frac{1}{2}) = 0.$$

Em conclusão, nós mostramos que $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = 0$.

**Exercício.** Estudar o limite da função $f(x) = x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ em $+\infty$.

**Método 9 - Continuidade e limite:** Seja $I$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $f$ é contínua em $a \in I$ se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Para provar que $f$ é contínua podemos:

- Usar os métodos sobre como encontrar os limites de funções em $a \in I$,

- Estudar o limite à esquerda e o limite à direita de $f$ em $a$, e verificar se os dois limites são iguais. Em particular quando $f$ é definida por uma expressão à esquerda e outra expressão à direita em $a$.

Aplicação. Estudar a continuidade em 0 da função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

**Solução.** Para $x > 0$ temos que $|x| = x$ e para $x < 0$ temos $|x| = -x$, então a função $f$ assume a seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Daí os limites à direita e à esquerda de $f$ em 0 são dados por:

$$\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x\to 0, x<0} f(x) = -1.$$

Assim, a função $f$ não é continua em 0.

**Método 10 - Extensão por continuidade.** Dois casos:

- Seja $I$ um intervalo de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ com $a \notin I$. Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f$ admite uma extensão por continuidade em $a$, se e somente se, $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$.
- Sejam $I$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e $a \in I$. Se $f : I\backslash\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f$ admite uma extensão por continuidade em $a$, se e somente se, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

Nos dois casos, a extensão por continuidade de $f$ (para $\overline{I}$ ou $I$ ), é a função $g$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & = & \text{se } x \neq a \\ L & = & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Aplicação. Estudar a extensão por continuidade em 0 da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$, onde $x \neq 0$.

**Solução.** Sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$, então a função $g$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é uma extensão por continuidade da função $f$ sobre $\mathbb{R}$.

## 5.4 Levantar a indeterminação

Como mencionado anteriormente, a dificuldade em encontrar um limite de uma função também surge quando as propriedades e os teoremas do curso não podem ser aplicados diretamente. Em geral, encontramos quatro casos, onde os teoremas de limites não nos permitem uma conclusão sobre o seu resultado:

1. $\infty - \infty$;

2. $0 \times \infty$;

3. $\frac{0}{0}$;

4. $\frac{\infty}{\infty}$,

onde $\infty$ pode ser $+\infty$ ou ser $-\infty$, nos casos de formas indeterminadas. Nestes quatro casos para determinar se existe um limite ou não, falamos em levantar a indeterminação. Nesta seção, damos alguns métodos para discutir a indeterminação.

**Método 11- Método geral para encontrar o limite em $a$:** Seja $f$ uma função definida em $I \setminus \{a\}$, onde $I$ é um intervalo de $\mathbb{R}$. Encontrar o limite de $f(x)$ quando $x$ tende para $a$, quando o teorema geral não se aplica diretamente, é procurar uma função $g$ tal que:

1. $f(x) = g(x)$, para todo $x \in I \setminus \{a\}$,

2. $\lim_{X \to a} g(x) = L$ existe.

Assim, temos $\lim_{X \to a} f(x) = \lim_{X \to a} g(X) = L$.

A busca pela função $g$ pode ser feita levando-se em conta certas regras, como por exemplo:

1. Como $a$ é fixo, podemos colocar o fator ($x$ - $a$) em evidência. Então, simplificamos por ($x$ - $a$) sobre o intervalo $x \in I \setminus \{a\}$. Em muitos casos, é importante colocar $x = a + h$ e é mais fácil colocar $h$ em evidência em vez de $x$ - $a$. Neste caso, vamos procurar o limite $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$.
2. Ao procurar o limite de um quociente de dois polinômios, quando $x$ tende a + $\infty$ ou - $\infty$, é mais apropriado fatorar a maior potência de $x$. Então, simplificaremos as potências de $x$, para facilitar o encontro de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
3. No que diz respeito aos limites das funções, cuja expressão inclui radicais, existem dois casos:

   (a) Se a expressão da função incluir produtos ou quocientes, pode-se proceder como antes (ou seja, como em (1) ou (2))

   (b) Se a expressão da função incluir somas ou diferenças, a expressão conjugada pode ser usada. Assim, podemos voltar a um produto ou a um quociente, o que nos permite concluir.

Vamos apresentar algumas situações específicas onde os procedimentos do método geral são aplicados.

**Método 12 - Levantar a indeterminação. Princípio geral de simplificação e de multiplicação**. Quando estamos com uma forma indeterminada para um limite, muitas vezes é possivel levantar a indeterminação, simplificando a expressão de *f*, usando operações algébricas tais que:

- Multiplicar com expressão conjugada do numerador ou do denominador.
- Fatorar o numerador ou o denominador e simplificar a expressão de *f*.

Também, encontrar uma função (usual) equivalente de $f$ e utilisar os crescimentos comparados das funções usuais.

<u>APLICAÇÃO. Indeterminação do tipo $\infty$ - $\infty$.</u> Estudar o limite da função $f(x) = \sqrt{x^2+2x+5} - x - 1$ em $+\infty$.

**Solução.** Como $\lim\limits_{x \to +\infty} = \sqrt{x^2+2x+5} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$, então estamos com o caso de indeterminação do tipo $+\infty - (+\infty)$.

Sejam $a$, $b$ dois números reais positivos diferentes de zero. Sabemos que $\sqrt{a} - b = \dfrac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$. Portanto, a função $f$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+5} - (x+1) = \frac{x^2+2x+5-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1} = \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}.$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x+5} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$, e usando a operação de adição de limites deduzimos que $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x+5} + x + 1) = +\infty$. Então, com a propriedade do quociente de limites deduzimos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1} = 0$. Em conclusão, temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1} = 0.$$

**Exercício.** Estudar o limite da função $f(x) = \frac{x^3 - \cos(x)x^2 + 8x + 5}{x^2 + 3x \operatorname{sen}(x) - 7}$ em $-\infty$.

<u>**Método 13:** Levantar a indeterminação e comparação.</u> O princípio geral consiste em estabelecer uma desigualdade e aplicar um dos teoremas de comparação:

1. Suponho $h(x) \leq f(x)$, se $\lim\limits_{x \to a} h(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
2. Suponho $f(x) \leq g(x)$, se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

3. Se $|f(x) - L| \leq g(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$

4. Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$

<u>Aplicação.</u> Estudar o limite da função $f(x) = x + sen(x)$ em $+\infty$ e em $-\infty$.

**Solução.** Aqui $\lim_{x \to +\infty} sen(x)$ não existe, então temos uma indeterminação para o limite $\lim_{x \to +\infty} (x + sen(x))$.

Sabemos que $-1 \leq sen(x) \leq 1$, e adicionando $x$ a cada membro da desigualdade, obtemos:

$$h(x) = x - 1 \leq x + sen(x) \leq g(x) = x + 1.$$

Portanto, temos o seguinte enquadramento $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Como $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$, o Teorema de Comparação implica que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Por outro lado, como $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, o Teorema de Comparação implica que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Em conclusão, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

**Método 2:** Também, podemos usar a fatoração $f(x) = x + sen(x) = x\left[1 + \dfrac{sen(x)}{x}\right]$, para levantar a indeterminação.

**Exercício.** Estudar o limite da função $f(x) = x^3 + \text{sen}(x)$ em $-\infty$.

<u>**Método 14:** Levantar a indeterminação com mudança de variável.</u> O princípio geral é de voltar a um limite conhecido, usando uma mudança de variável $u = u(x)$.

<u>Aplicação. Indeterminação do tipo $\infty \times 0$.</u> Sabemos que $\lim_{v \to 0} \dfrac{\text{sen}(v)}{v} = 1$,

estudar o limite da função $f(x) = x.sen(\frac{1}{x})$, onde $x \neq 0$, em $+\infty$ e em $-\infty$.

**Solução.** Como $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} sen(\dfrac{1}{x}) = 0$, então estamos com o caso de indeterminação do tipo + $\infty \times 0$.

Seja $x = \frac{1}{v}$, então temos $v = \frac{1}{x}$. Assim, como $v$ tende para 0 quando $x$ tende para + $\infty$ ou - $\infty$, deduzimos que $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{sen(v)}{v} = 1$. Então, obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{sen(1/x)}{1/x} = \lim_{v \to 0} \frac{sen(v)}{v} = 1 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} \frac{sen(1/x)}{1/x} = \lim_{v \to 0} \frac{sen(v)}{v} = 1$$

Em conclusão, nós demonstramos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

**Método 15:** Levantar a indeterminação com expressão conjugada. Lembrar-se que as expressões $t(x)\sqrt{u(x)} - v(x)\sqrt{w(x)}$ e $t(x)\sqrt{u(x)} + v(x)\sqrt{w(x)}$ são chamadas conjugadas e temos:

$$(t(x)\sqrt{u(x)} - v(x)\sqrt{w(x)})(t(x)\sqrt{u(x)} + v(x)\sqrt{w(x)}) = t^2(x)u(x) - v^2(x)w(x).$$

Neste produto não temos radicais. O princípio consiste em multiplicar o numerador e o denominador de uma forma indeterminada por uma expressão conjugada. Assim, podemos tentar sair da indeterminação.

APLICAÇÃO. Indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Estudar o limite da função $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ em $+\infty$.

**Solução.** Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, então estamos com o caso de indeterminação do tipo $\infty$ - $\infty$.

Sejam $a$, $b$ dois números reais positivos diferentes de zero. Sabemos que $\sqrt{a} - b = \dfrac{a - b^2}{\sqrt{a} + b}$. Portanto, a função $f$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, e usando a operação de adição de limites deduzimos que $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$. E com a operação do quociente de limites temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$. Em conclusão, temos que: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

**Exercício.** Estudar o limite da função $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x}$ em 0.

Estudar o comportamento local de uma função consiste em analisar seu comportamento na vizinhança de um valor real $a$ tais que: limite, continuidade, derivabilidade, tangente em $a$, ... para isso, substituímos $x$ por $a$ na expressão da função considerada. Assim, podemos chegar em duas situações:

1. Vamos resultar nas seguintes operações conhecidas do tipo: $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$; $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$; $k \times (+\infty) = +\infty$ se $k > 0$; $k \times (+\infty) = -\infty$ se $k < 0$; $\sqrt{+\infty} = +\infty$; ....

2. Vamos chegar nas formas indeterminadas: $\frac{0}{0}$; $\frac{k}{0}$ com $k \neq 0$; $\frac{\infty}{\infty}$; $(+\infty)+(-\infty)$ ou $0.\infty$.

**Método 16:** Levantar as formas indeterminadas em $a \in \mathbb{R}$ do tipo: $\dfrac{k}{0}$ com $k \neq 0$ ou $\dfrac{\infty}{0}$.

1. Como $\dfrac{k}{0} = k \times \dfrac{1}{0}$ $(k \neq 0)$ e $\dfrac{\infty}{0} = \infty \times \dfrac{1}{0}$, esta forma é "quase" determinada porque sabemos que $\frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\frac{1}{0^-} = -\infty$, então o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é infinito.

2. Para saber se o limite da função considerada é + $\infty$ ou - $\infty$, basta aplicar a regra dos sinais com o denominador seguinte onde este denominador tende para $0^+$ ou $0^-$. Na maioria dos casos, estudamos os limites à direita e à esquerda, isto é, $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x)$.

**Graficamente:** Quando $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x) = \pm\infty$ e/ou $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x) = \pm\infty$, a linha reta de equação $x = a$ é uma assíntota para a curva $(C_f)$ da função *f*.

<u>Aplicação. Indeterminação do tipo $\frac{k}{0}$.</u> Estudar o comportamento da função $f(x) = \frac{x-7}{x^2-9}$ na vizinhança de - 3. O que podemos concluir?

**Solução.** Como $\lim\limits_{x\to -3}(x-7) = -10$ e $\lim\limits_{x\to -3}(x^2-9) = 0$, então estamos com o caso de indererminação do tipo $\frac{k}{0}$.

Sabemos que $x^2$ - 9 = ($x$ - 3) ($x$ + 3), então a função $f$ pode ser escrita sobre a forma $f(x) = \dfrac{1}{x+3}\dfrac{x-7}{x-3}$, assim temos:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x-7}{x-3} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}, \quad \lim_{x\to -3, x<-3}\frac{1}{x+3} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to -3, x>-3}\frac{1}{x+3} = +\infty.$$

Com as operações sobre a multiplicação dos limites temos que:

$$\lim_{x\to -3, x<-3} f(x) = -\infty \times \frac{5}{3} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to -3, x>-3} f(x) = +\infty \times \frac{5}{3} = +\infty.$$

Em conclusão, a linha de equação $x$ = - 3 é uma assíntota vertical para a curva da função *f*.

<u>**Método 17:** Como levantar as formas indeterminadas em $a \in \mathbb{R}$ do tipo:</u> $\dfrac{0}{0}$?

O princípio geral é o seguinte:

1. Simplificar a expressão da função *f*.

2. Depois substituir $x$ por $a$ na expressão simplificada para encontrar o limite desejado de $f$ em $a$.

<u>Aplicação. Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.</u> Estudar o comportamento da função $f(x) = \frac{2x^2+x-21}{x^2-9}$, onde $x \neq$ -3 e 3, na vizinhança de 3. O que podemos concluir?

**Solução.** Como $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + x - 21) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - 9) = 0$, então estamos com o caso de indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Sabemos que $x^2 + x - 21 = (x-3)(2x+7)$ e $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$, então temos que $f(x) = \dfrac{(x-3)(2x+7)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x+7}{x+3}$. Assim, podemos deduzir que:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{2x+7}{x+3} = \frac{13}{6}.$$

Podemos concluir que a função *f* admite uma extenção por continuidade em 3.

<u>**Método 18:** Como levantar as formas indeterminadas em $a \in \mathbb{R}$ do tipo:</u> $\dfrac{0}{0}$ usando uma expressão conjugada e simplificação?

O princípio geral é o seguinte:

1. Multiplicar a expressão de *f* pela expressão conjugada para levar a simplificação.

2. Na expressão simplificada da função *f*, substitua $x$ por $a$ para encontrar o limite de *f* em $a$.

**Caso particular:** Quando a expressão da função contém termos irracionais.

APLICAÇÃO. Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Estudar o comportamento da função $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{5}}{x-1}$ na vizinhança de 1. O que podemos concluir?

**Solução.** Como $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x+4}-\sqrt{5}) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$, então estamos com o caso de indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Usando a expressão $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, temos que:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{5}}{x-1} = \frac{x+4-5}{(x-1)(\sqrt{x+4}+\sqrt{5})} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+4}+\sqrt{5})}.$$

Então, temos $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{5}}$. Assim, podemos deduzir que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Podemos concluir que a função $f$ admite uma extenção por continuidade em 1.

**Método 19:** Como levantar as formas indeterminadas com a volta para a forma de limite conhecida?

O princípio geral para voltar a uma forma de limite conhecida é baseado sobre a mudança de variável.

APLICAÇÃO. Estudar o comportamento da função $f(x) = \frac{\text{sen}(2x-2)}{x-1}$, onde $x \neq 1$, na vizinhança de 1.

*Indicação:* Voltar ao limite conhecido $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\text{sen}(t)}{t} = 1$.

**Solução.** Como $\lim\limits_{x\to 1} sen(2(x-1)) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$, então estamos com o caso de indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Usando a mudança de variável $v$=$x$-1, temos que $\frac{\text{sen}(2x-2)}{x \quad 1} = \frac{sen(2v)}{v}$.

Por outro lado, também temos: $\frac{\text{sen}(2x-2)}{x-1} = \frac{sen(2v)}{v} = 2\frac{sen(t)}{t}$, onde $t = 2v$. Assim, o limite de $f$ em 1 é dada por:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{v\to 0} \frac{sen(2v)}{v} = 2\lim_{t\to 0} \frac{sen(t)}{t} = 2 \times 1 = 2.$$

Podemos concluir que a função $f$ admite uma extenção por continuidade em 1.

## 5.5 Aspectos gráficos: comportamentos assintóticos

Estudar o comportamento assintótico de uma função tem por objetivo buscar o comportamento da função na vizinhança de + $\infty$, - $\infty$ ou um ponto $a \in \mathbb{R}$ onde $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (limites, assíntota,...).

Seja o plano cartesiano com $(O, \vec{i}, \vec{j})$ quadro ortonormal. Seja $(C_f)$ a curva da função $f$. Dizemos que a curva $(C_f)$ possui um **ramo infinito** se para pelo menos um ponto $M(x, f(x))$ da curva $(C_f)$ de $f$ temos:

$$|x| \to +\infty \text{ ou } |f(x)| \to +\infty.$$

Neste parágrafo consideramos uma curva $(C_f)$ que tem um ramo infinito. Assim, em alguns casos, o ramo infinito pode ser localizado relativamente a uma linha reta adequada.

**Método 20: Limites infinitos e assíntotas na vizinhança de $a \in \mathbb{R}$.** Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ com $a \notin I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função tal que:

1. $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$,
2. ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$,

então a reta de equação $x = a$ é uma assíntota vertical a curva da função *f*, na vizinhança do ponto $a$.

<u>Aplicação.</u> Estudar as assíntotas verticais da função $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$.

**Solução.** Para $x \neq 0$, podemos escrever:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 3x}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2} \times \frac{x^2 - 3x}{x+2}.$$

Para $x = 2$ temos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x}{x+2} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \to 2, x > 2} \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2, x < 2} \frac{1}{x-2} = -\infty.$$

A operação de produtos de limites implica que:

$$\lim_{x \to 2, x > 2} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2, x < 2} f(x) = -\infty.$$

Assim, a linha reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical para a curva da função *f*.

Para $x = -2$ o mesmo raciocínio implica que:

$$\lim_{x \to -2, x > -2} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -2, x < -2} f(x) = -\infty.$$

Assim, a linha reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical para a curva da função *f*.

**Exercício.** Estudar as assíntotas verticais da função $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2}$.

**<u>Método 21: Limites finitos na vizinhança de $+\infty$ ou $-\infty$ e assíntota horizontal.</u>** Seja *I* um intervalo de $\mathbb{R}$ não limitado e $f : I \to \mathbb{R}$

uma função, então:

1. Se o intervalo $I$ não for limitado à direita e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, então a reta de equação $y = L$ é uma assíntota horizontal a curva da função $f$, na vizinhança de + $\infty$.

2. Se o intervalo $I$ não for limitado à esquerda e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, então a reta de equação $y = L$ é uma assíntota horizontal a curva da função $f$, na vizinhança de - $\infty$.

<u>Aplicação.</u> Estudar as assíntotas horizontais da função $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-2}$.

**Solução.** Aplicando o método do quociente de frações racionais (ver o Método 3), temos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x}{x^2-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Assim, a linha reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal para a curva da função $f$ em + $\infty$. Também, temos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x}{x^2-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Assim, a linha reta é uma assíntota horizontal para a curva da função $f$ em - $\infty$.

**Exercício.** Estudar as assíntotas horizontais da função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{x^2+2} & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{-x^2-3x}{x^2+2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

**<u>Método 22: Limites na vizinhança de $+\infty$ ou $-\infty$ e assíntota oblíqua.</u>** Seja $I$ um intervalo não limitado de $\mathbb{R}$ e $f$: $I \to \mathbb{R}$ uma função. Lembre-se que a linha reta de equação $y = ax + b$ é:

A) Uma assíntota oblíqua em + $\infty$ se $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax - b] = 0$,

B) Uma assíntota oblíqua em - $\infty$ se $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax - b] = 0$.

**Como determinar a equação da linha reta $y = ax + b$? ou equivalentemente, como determinar $a$ e $b$?**

Às vezes, a equação da linha reta $y = ax + b$ pode ser obtida a partir da expressão da função *f*.

Em geral, as etapas no processo de determinação de $a$ e $b$ são as seguintes:

1. Supor que o intervalo $I$ não é limitado à direita. Se:

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a,$

(b) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b,$

então a reta de equação $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua à curva da função *f*, na vizinhança de + $\infty$.

2. Supor que o intervalo $I$ não é limitado à esquerda. Se:

(a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a,$

(b) $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = b,$

então a reta de equação $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua à curva da função *f*, na vizinhança de - $\infty$.

Aplicação 1. Estudar as assíntotas oblíquas da função $f(x) = \frac{7x+2}{x^2+x+1} - 2x + 1.$

**Solução.** Aplicação direta da definição de assíntota oblíqua. Usando o Método 3, sobre o limite das frações racionais, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{7x+2}{x^2+x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{7x}{x^2} = 7 \times \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Assim, deduzimos que:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-2x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{7x+2}{x^2+x+1} = 0.$$

Então, pela definição de assíntota oblíqua, a linha reta de equação $y$ = -2$x$ + 1 é uma assíntota oblíqua para a curva da função *f* em + $\infty$.

De maneira semelhante, temos:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-2x+1)] = \lim_{x\to-\infty}\frac{7x+2}{x^2+x+1} = 0.$$

Então, pela definição de assíntota oblíqua, a linha reta de equação $y$ = -2 $x$ + 1 é também uma assíntota oblíqua para a curva da função *f* em - $\infty$.

APLICAÇÃO 2. Estudar as assíntotas oblíquas da função $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x+1}$.

**Solução.** Aplicação do processo de determinação dos reais $a,\ b$.

**A- Assíntota oblíqua para a curva da função *f* em** + $\infty$.
**Etapa 1: Determinação d**e $a$. Para $x>0$ temos:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}.\frac{x^2-3x}{x+1} = \frac{x^2-3x}{x^2+x}.$$

Usando o Método 3, sobre o limite das frações racionais, temos:

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x}{x^2+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1.$$

**Etapa 2: Determinação de** $b$**.** Para $x>0$ temos $f(x)-x = \dfrac{x^2-3x}{x+1} - x = \dfrac{x^2-3x-(x^2+1)}{x+1} = \dfrac{-4x}{x+1}$. Assim, aplicando o Método 3, temos:

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x+1} = -4\times\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x} = -4.$$

Conclusão, a linha reta de equação $y = ax + b = x$ - 4 é uma assíntota oblíqua para a curva da função *f* em + $\infty$.

**B- Assíntota oblíqua para a curva da função $f$ em - ∞.** Com o mesmo precedente raciocínio do caso + ∞ as etapas são mesmas. Assim, temos:

**Etapa 1: Determinação de $a$. Para** $x <$ - 1, com o limite das frações racionais em - ∞ (usando o Método 3), temos:

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

**Etapa 2: Determinação de** $b$. Para $x > 0$ temos $f(x) - x = \dfrac{x^2 - 3x}{x+1} - x = \dfrac{x^2 - 3x - (x^2+1)}{x+1} = \dfrac{-4x}{x+1}$. Assim, aplicando o Método 3, temos:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{x+1} = -4 \times \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{x} = -4.$$

Conclusão, a linha reta de equação $y = ax + b = x$ - 4 é uma assíntota oblíqua para a curva da função $f$ em - ∞.

Em resumo, na prática o processo para procurar uma assíntota oblíqua é o seguinte. Seja $f$ uma função definida num intervalo ilimitado à direita ou à esquerda. A determinação de uma assíntota oblíqua em + ∞ para a curva de $f$ pode ser feito da seguinte maneira:

1. Encontre o limite do quociente $\dfrac{f(x)}{x}$ quando $x$ tende para + ∞;
2. Se esse limite for finito, ou seja, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, procuramos o limite da expressão $[f(x) - ax]$. Se esse limite é finito, quer dizer, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$, então a linha reta de equação:

$$(D) \quad : y = ax + b$$

   é uma assíntota oblíqua para a curva de $f$ em + ∞.

Para - ∞ temos o seguinte:

1. Encontre o limite do quociente $\frac{f(x)}{x}$ quando $x$ tende para - $\infty$;
2. Se esse limite for finito, ou seja, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, procuramos o limite da expressão $[f(x) - ax]$. Se esse limite é finito, quer dizer, $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = b$, então a linha reta de equação:

$$(D) \quad : y = ax + b$$

é uma assíntota oblíqua para a curva de $f$ em - $\infty$.

**<u>Método 23: Ramos infinitos e limites na vizinhança de $+\infty$.</u>** Se temos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =^{-}_{+} \infty$, então podemos distinguir os seguintes casos:

- Se $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =^{-}_{+} \infty$, nesse caso a curva de $f$ admite um ramo parabólico de direção assintótica ao eixo $(Oy)$.
- Se $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, nesse caso a curva de $f$ admite um ramo parabólico de direção assintótica ao eixo $(Ox)$.
- Se $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] =^{-}_{+} \infty$, nesse caso a curva de $f$ admite um ramo parabólico de direção assintótica a reta de equação $y = ax$.

<u>Aplicação.</u> Estudar o comportamento da função $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 5x + 4}}{x - 2}$.

**Solução.** As etapas são as mesmas que usamos para determinar a assíntota oblíqua.

**A- Em** + $\infty$, para todo $x \neq 2$ com $x > 0$, temos:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{2x^2 + 5x + 4}}{x(x - 2)} = \frac{\sqrt{2 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x - 2}$$

Sabemos que $\lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$, então com a composição de limites temos $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{x-2} = 0$. Assim, com as operações sobre os limites, deduzimos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x-2} = 0.$$

Então, a curva de *f* admite um ramo parabólico de direção assintótica ao eixo $(Ox)$ na vizinhança de + $\infty$.

**B- Em** - $\infty$. Como $\Delta = 5^2 - 4\times 2\times 4 = -7 < 0$, então $2x^2+5x+4 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, a função *f* é definida para qualquer $x$ real. Assim, com o mesmo raciocínio, como no caso + $\infty$, obtemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x-2} = 0.$$

Então, a curva de *f* admite um ramo parabólico de direção assintótica ao eixo $(Ox)$ na vizinhança de - $\infty$.

## 5.6 Algumas observações úteis

**Assíntotas e aproximações.** Seja *f* uma função definida num intervalo ilimitado à direita (ou à esquerda). Supor que a linha reta (*D*) de equação $y = ax + b$ assíntota para curva de *f*. E seja a função $\epsilon(x) = f(x) - ax - b$, então temos:

$$\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = \lim_{x\to 0}(f(x) - ax - b) = 0.$$

Assim, podemos escrever:

$$f(x) = ax + b + \epsilon(x) \text{ onde } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Assim, a função afim $g(x) = ax+b$ representa uma aproximação polinomial de grau 1 da função *f*. Graficamente, sejam $M(x,\ f(x))$ um ponto de $(C_f)$ e $N(x,\ ax+b)$ o ponto da assíntota em + $\infty$ (ou em - $\infty$) com abscissa $x$. Então, a distância entre $M$ e $N$, que é dada pela seguinte expressão $MN = |f(x) - ax - b|$, satisfaz:

$$MN = |f(x) - ax - b| \to 0 \text{ quando } \ x \to +\infty (\text{ ou quando } \ x \to -\infty).$$

isto é, a curva $(C_f)$ e a assíntota (*D*) estão cada vez mais próximas à medida que $x$ tende para + $\infty$ (ou em - $\infty$).

**Posição relativa da assíntota e da curva.** Seja *f* uma função que possui uma assíntota horizontal ou oblíqua (*D*) de equação $y = ax + b$. A posição relativa da curva $(C_f)$ e da assíntota (*D*) é determinada a partir do estudo do sinal da diferença: $\epsilon(x) = f(x) - ax - b$.

1. Se $\epsilon(x) = f(x) - ax - b > 0$, então a curva $(C_f)$ está acima da assíntota (*D*),

2. Se $\epsilon(x) = f(x) - ax - b < 0$, então a curva $(C_f)$ está abaixo da assíntota (*D*).

# CAPÍTULO 6

## O limite nos programas do ensino superior e do ensino médio no Brasil, e nos livros didáticos

Neste capítulo, apresentamos sucintamente alguns dados sobre o conceito de limite nos programas de ensino superior e médio no Brasil. Assim, vamos dar uma breve olhada na história do Cálculo Diferencial e Integral no Brasil, evidenciando o aparecimento do conceito de limite nas escolas e nos currículos do ensino médio e superior. Em seguida, apresentamos elementos sobre o conceito de limite em alguns livros didáticos, utilizados no ensino médio e no ensino superior das universidades brasileiras.

## 6.1 Limite nos Currículos de Matemática no Brasil

Para estudar o limite, precisamos olhar para a história do Cálculo no Brasil. Não há menção sobre o ensino do Cálculo no Brasil ou do conceito de função nos programas durante o Império (Carvalho, 1996). Por outro lado, no período de 1877-1990, o ensino do Cálculo pode ser observado no programa do Colégio Pedro II, fundado em 1837, considerado colégio padrão para o Ensino Secundário (atual Ensino Médio). Este programa não se alterou de 1837 até 1889, como veremos a seguir.

Com a Reforma de Benjamim Constant ocorre a introdução do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Secundário por meio do decreto

981 de 8 de novembro de 1890. O Ensino Secundário de 7 anos passa a ser obrigatório e, em seu programa de matemática (Ginásio Nacional) e nas 3ª, 5ª, 6ª e 7ª Séries, aparece o estudo de Cálculo e Geometria. Todavia, antes de começar a valer, o decreto precisou ser melhorado para se tornar executável e, como justicativa encontramos:

> (...) a verdade é que não há meios de fugir a maior parte de intricadas questões de alta matemática que no projeto encontramos. As verdades destas ciências provêm de uma dedução rigorosa, os princípios concatenam-se como uma exigência imprescindível, e a teoria posterior não será jamais compreendida com proveito se não tiverem sido bem assentadas as teorias anteriores, que lhe servem de base. (CARVALHO, 1996, p.65).

Diante disso, o então Ministro decidiu, em 11 de abril de 1891, que o plano de ensino se ponha em execução de modo que em 7 anos se forme os primeiros bacharéis em ciências e letras. Mantendo, assim, o programa mas o tornando exequível, não prejudicaria os estudantes que já estavam cursando, pois somente os alunos admitidos em 1981 que teriam o ensino de calculo, o que ocorreria, de fato, no ano de 1985 (CARVALHO, 1996). Na sequência apresentamos os programas do Colégio Pedro II em relação ao ensino do Cálculo de acordo com Carvalho (1996).

De 1889 a 1894 os programas do Colégio Pedro II não fazem referência ao estudo do Cálculo no primeiro ano do curso secundário, mas aparecem as primeiras referências ao estudo de funções. Em 1895 as funções aparecem no programa do segundo ano, e no quarto ano aparece o ensino do Cálculo e de Geometria. No item referente as noções de Cálculo Diferencial e Integral, consta: a definição de derivada e de diferencial; as regras de diferenciação das funções explícitas a uma só variável; a definição de integral; a tabela das integrais imediatas; os métodos de integração e as aplicações fáceis. **Não aparece o estudo do limite**. De acordo com Carvalho (1996), a inclusão do Cálculo no programa de 1895 e coerente e coloca que:

> Se os programas a partir de 1891 deviam incluir o Cálculo, mas sem exigi-lo para os alunos anteriores a 1891, e como o quarto ano dos alunos admitidos em 1891 ocorreria exatamente em 1895, então o primeiro ano em que, na prática, o cálculo seria presença obrigatória nos programas realmente executados seria o de 1895. (CARVALHO, 1996, p.66).

O programa de 1896 e o mesmo de 1895. O programa de 1897 para o quarto ano e bem mais detalhado, e intitulado **cálculo infinitesimal**, resumidamente temos: estudo da variável e da função; os infinitamente pequenos, os **limites**, os objetivos e a divisão do cálculo infinitesimal; derivadas e diferenciação; séries e integrais (CARVALHO, 1996). Temos aqui a **primeira referência aos limites**. No programa do ano de 1898 aparece o estudo de derivada, integral e cálculo com geometria.

No período de 1900 a 1930 ocorre o desaparecimento do Cálculo dos programas. No Colégio Pedro II em 1900 não aparece mais o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, por outro lado em 1929, encontramos no 6º ano do Curso Complementar oferecido para as Escolas Militares e Politécnicas, o estudo de função e as noções de cálculo. Esse programa vai se repetir em 1930, e foca no estudo das funções e nos **limites**. Propõe o estudo da teoria dos **limites**; limites de certas expressões indeterminadas; limite de $(1+\frac{1}{m})^m$ para m tendendo a infinito (CARVALHO, 1996).

Naquele momento estava ocorrendo muitas discussões sobre o ensino de matemática no Brasil e, entre elas, o retorno do Cálculo nos programas. Foi um movimento que teve a participação de professores importantes, como Euclides Roxo criador da disciplina de Matemática no Colégio Dom Pedro II, e que culminou com o retorno do Cálculo ao programa em 1934. Encontramos no programa para Série o estudo: da aritmética, da geometria e da álgebra; da derivada de um polinômio inteiro em x; da noção de limite e das derivadas trigonométricas e aplicações (CARVALHO, 1996). Esse programa é o mesmo de 1929. E, a partir de 1961, o ensino do Cálculo desaparece dos programas da Escola Secundária, salvo algumas exceções.

Vimos assim, como o conceito de limite apareceu ao longo dos anos nos programas do Brasil para o Ensino Secundário, atualmente chamado de Ensino Médio. Com relação ao Ensino Superior, a referência ao ensino de limite nos Currículos será observada nos programas para os Cursos de Matemática, Bacharelado e de Licenciatura.

Os pareceres 295 de 14/11/1962 e CNE/CES 1.302/2001 de 06/11/2001 dispõem sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, especificando os conteúdos que devem ser comuns a todos os cursos de Licenciatura. No caso, os conceitos de: **Cálculo Diferencial e Integral**; Álgebra Linear; Fundamentos de Análise; Fundamentos de Álgebra; Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica. Esses documentos orientam que tópicos devem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela Instituição de Ensino Superior (IES). Essa estrutura permanece vigente até hoje.

No currículo do curso de licenciatura em matemática da Universidade São Paulo (USP) de São Paulo e da Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Rio Claro “Inicialmente, no curso da USP não havia disciplinas específicas de análise ou de cálculo em seus primeiros anos, o que só foi efetivada após a década de 70” (OTERO-GARCIA, 2015, p.64) e o **limite aparece no ano de 1937**.

Encontramos no programa da disciplina de Análise Matemática para o 1º e 2º anos do curso de matemática da FFCL da USP de 1943 o **estudo da teoria dos limites**. E em 1951 havia Análise Matemática nos três primeiros anos, sendo que no primeiro ano de Análise Matemática encontramos **a referência ao estudo do Limite**.

> Eram vistos pontos como extremos e pontos de acumulação, limites e continuidade, derivadas e diferenciais, infinitésimos, integral de Riemann, integrais impróprias. Além desses, faziam parte do programa conteúdos de funções de mais de uma variável (limites e continuidade, derivadas parciais, integrais duplas e múltiplas), aplicações geométricas do cálculo diferencial (pontos singulares das curvas planas, curvas reversas, classificação de pontos regulares de uma superfície) e equações diferenciais (tipos elementares e equações lineares de coeficientes constantes). (OTERO-GARCIA, 2015, p.64).

O curso de matemática na Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas (FFCL) da UNESP de Rio Claro começou a funcionar em 1959. No programa de análise matemática do primeiro ano aparece **o estudo de infinitésimos e limites**, de 1950 até 1961, de acordo com Otero-Garcia (2015). A partir de 1963, as três disciplinas de Análise Matemática do curso tiveram suas denominações alteradas, salvo pequenas diferenças em alguns anos para: Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Avançado e Equações Diferenciais, Variáveis Complexas e Matemática Aplicada, mantendo-se até meados de 1972. A Análise Matemática manteve o mesmo programa de 1959 até 1964, quando o seu programa sofreu alteração, embora contemplasse os mesmos pontos do anterior, houve a exclusão de **infinitésimos e limites no estudo de funções** de várias variáveis. Em 1965 sua ementa passa a ser denominada Cálculo Infinitesimal e, em 1966, passou por uma reestruturação e o Cálculo Infinitesimal foi dividido em duas partes, Cálculo I e Cálculo II.

> Em 1969, Cálculo Diferencial e Integral, sem grandes alterações ..., tratava de números e funções, a derivada, seno e cosseno, o teorema da média, o traçado de curvas, funções inversas, exponenciais e logaritmos, integração, propriedades da integral, técnicas de integração, aplicações da integração, séries. O destaque é que, para esse ano, já não se observa mais nenhum

> ponto tratando dos infinitésimos; limite é introduzido depois de derivada, e continuidade só é visto juntamente com integral. (Otero-Garcia, 2015, p.65).

Essas alterações permaneceram e podem serem observadas nas ementas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de algumas universidades brasileiras. Vejamos no quadro a seguir, alguns exemplos das ementas propostas, por algumas universidades brasileiras para essa disciplina, vigentes para o ano de 2019.

**Quadro I:** Ementas de algumas instituições brasileiras

| Universidade | Conteúdo da disciplina |
|---|---|
| USP | Estudo de funções de uma variável; Limites; Derivadas e Integrais. |
| FUFJ | Limite; Continuidade Derivada; Integral Definida e aplicações; Função inversa e Técnicas de Integração. |
| UFMS | Funções de uma Variável Real. Limite e Continuidade. Derivadas e Aplicações. Integrais Indefinidas. |
| UFMT | Funções; Limites; Derivada de uma função; Integral definida e indefinida; Polinômios de Taylor. |
| UFMG | Funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Derivadas. Integrais. Aplicações. |
| UTFPR | Conjuntos Numéricos; Funções Reais de uma Variável Real; Limites e Continuidade. Derivadas; Diferenciais e Aplicações; Integrais Definidas e Indefinidas; Técnicas de Integração. |
| FURG | Limites de funções; Continuidade Derivadas; Integral. |

**Fonte:** Produzido pelos autores.

Essa sequência para apresentação dos conteúdos: Limite, Derivada e Integral vem sendo, em geral, a praticada pela maioria das universidades brasileiras para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Nesse pequeno percurso vimos que o estudo de limite já fez parte do Ensino Médio, mas que atualmente não é mais um conteúdo obrigatório nesse nível de ensino. Observamos também que a ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, com poucas exceções vem sendo, praticamente a mesma desde a década de setenta na maioria das universidades brasileiras. Sendo praticada não somente nos cursos de matemática, seja licenciatura ou bacharelado, como também nos diversos cursos de engenharia, de física, química e em cursos de administração, de economia, dentre outros. Nesse aspecto, Bianchini (2014) argumenta que apesar da origem do Cálculo ser tão antiga:

> Os textos que utilizamos hoje para o seu ensino, com pequenas diferenças de conteúdo no mundo inteiro, seguem uma filosofia educacional iniciada no século XIX, originária na concepção de um modelo de ensino estruturado e institucionalizado em torno da 'École Polytechnique' de Paris cujos diversos 'cursos' escritos e editados serviram, mais tarde, para o modelo de ensino de ciências e matemática em todo mundo. Estes textos e nossas aulas, neles baseadas, seguem a metodologia sumarizada na cadeia definição, teorema, demonstração, corolário (aplicações) (BIANCHINI, 2004, p.1.).

O que remete ao nosso próximo item para discussão, a apresentação do conceito de limite nos livros didáticos.

## 6.2 O Limite nos Livros Didáticos de Matemática

Atualmente alguns livros didáticos de ensino médio apresentam tópicos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral, como: limite de função, derivada e integral. A seguir, apresentamos exemplos de alguns desses livros.

O livro de Matemática para a 3ª série do 2º grau[1] de Gelson Iezzi et al de 1974, apresenta o tópico de limites e de derivadas. No capítulo 6, referente ao estudo de limite, os autores iniciam apresentando gráficos de algumas funções como, por exemplo, os gráficos das funções: $y = x^3$; $y = \frac{1}{x}$; $y = |x|$; $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ e também gráficos de funções definidas por várias sentenças. Na sequência temos a definição intuitiva de limite, são apresentados quatro exemplos e, em seguida, o limite é definido formalmente, ou seja, é apresentada a definição de limite por meio

[1] O nível de 2º grau daquela época corresponde ao ensino médio hoje.

dos quantificadores épsilon e delta. Detalha as propriedades de limites e a continuidade de funções, o limite trigonométrico fundamental, os limites no infinito e os limites infinitos, e finaliza o capítulo com o limite exponencial fundamental. Com relação a esse tópico o autor argumenta que "[...] ao nível do 2º grau, é impossível colocar a teoria dos limites com todo rigor matemático, apresentamos as propriedades de que precisamos em derivadas, sem cogitar de suas provas e fazendo sucessivos apelos à intuição". (IEZZI, 1974, p.23).

Outro livro do terceiro ano que aborda o estudo de limites é o Matemática: *Construção e Significado, elaborado coletivamente pela editora moderna de 2008.* No Capítulo 8, a noção de limite é introduzida com o Paradoxo de Zenão e com o cálculo da área de um círculo, ou seja, utilizando noções básicas de infinitos. Na continuidade, apresenta com exemplos o conceito de limite de uma função, fazendo tabelas com valores aproximados, pela direita e pela esquerda, de um ponto do domínio da função e obtendo, assim, os valores para a função e e identificação de pontos de seu gráfico. A partir disso, e desenhando a representação gráfica da função e definidos os limites laterais. São discutidas algumas propriedades e definidos os limites infinitos e os limites no infinito; o limite trigonométrico fundamental e o limite exponencial. Na sequência define continuidade de uma função e o limite de algumas funções contínuas tendendo ao infinito.

Paulo Bucchi (BUCCHI, 2008) em seu livro *Matemática e Cidadania para o 3º ano do Ensino Médio de 2008* , no capítulo 9, apresenta a ideia intuitiva de limite; define limites laterais; vizinhança de um ponto e a definição formal de limite. Na continuidade temos: a definição dos limites infinitos; dos limites no infinito; a continuidade de funções; as propriedade dos limites; as indeterminações na forma $\frac{0}{0}$ ; o limite da função polinomial; os limites fundamentais; o limite exponencial fundamental e termina com a definição de limite do logaritmo neperiano.

Infelizmente, os livros didáticos trazem o conceito de limite e de derivada na 3ª série, ou seja, no final do curso, onde pouco se pode aproveitar do estudo. Esse fato, é evidenciado em um estudo que analisou doze coleções de livros para o ensino médio (LIMA et tal, 2001). Verificou-se que a apresentação do conceito de limite de função, proposta para o último ano do ensino médio, é apresentada ao final do terceiro volume dessas coleções e sem relação com o que foi apresentado anteriormente. Esses autores, ao final dos exames dos livros textos, discutem sobre a importância do livro texto para o trabalho do professor de matemática e trazem uma síntese sobre cada tópico analisado. São apresentados pontos considerados interessantes e também feitas algumas críticas com relação à apresentação desses temas nessas coleções. Com relação ao tema cálculo os autores trazem que:

> Em algumas edições, o livro genérico traz capítulos sobre o Cálculo Diferencial. Seria melhor não trazê-los. Os alunos vão estudar o assunto na universidade e os que não vão ao terceiro grau não aprenderão aqui nada que se aproveite (LIMA, 2001, p. 467).

O trabalho de análise de 12 coleções de livros didáticos do Ensino Médio de Matemática, por um grupo de professores, sob a coordenação do prof. Elon Lages Lima, traz diversos argumentos com relação a ter (ou não) o ensino do conceito de limite de função no ensino médio. Entretanto, algumas vezes, estes temas não são ensinados sob o pretexto de serem difíceis e impróprios.  Apesar disso, encontramos elogios a apresentação de alguns desses livros, como o fato dos livros fazerem bastante apelo à intuição geométrica e enfatizam as ideias em apresentações claras, sem excessos de formalismo. As críticas com relação à apresentação propostas nos livros analisados foi com relação ao sentido dessa apresentação, pois na maioria das vezes aparece desvinculada dos conceitos estudados anteriormente, bem como das aplicações. "A principal razão para abordar tais assuntos no ensino médio são as aplicações do cálculo [...]" (LIMA, 2001, p.164) e, segundo os autores, tanto esse aspecto como também as motivações utilizadas nas apresentações recebem pouca atenção dos autores dos livros textos para o ensino médio.

No que concerne aos livros textos escritos para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em cursos do Ensino Superior, observa-se, com raras exceções, que há uma certa padronização na sequência dos conteúdos abordados nesses livros, conforme descrevemos abaixo. No Quadro II abaixo, apresentamos a sequência dos conteúdos nos programas propostos em alguns livros de Cálculo, destinados ao Ensino Superior.

**Quadro II:** Programa dos livros de Cálculo

| **Cálculo - vol. I - J. Stewart, 2006** | **Cálculo: Volume I - H. Anton, I. Bivens, S. Davis, 2007** | **Um Curso de Cálculo – V. I - H. Guidorizzi , 2008** | **Cálculo I - S. Carmem, C. Gimenez, R. Starke, 2011** |
|---|---|---|---|
| | | | Progressões aritméticas; Progressões geométricas; Sequências infinitas; Subsequências; Sequências limitadas; Sequências monótonas. |
| Funções e Modelos; O problema da tangente e da velocidade | Funções; Gráficos de funções utilizando calculadoras e recursos computacionais; Funções inversas; Funções trigonométricas inversas; Funções exponenciais e logarítmicas; Modelos matemáticos; Equações paramétricas. | Funções; Funções de uma variável real a valores reais; Funções trigonométricas: seno e cosseno; Funções tangente, cotangente, secante e cossecante; Operações com funções | |
| O limite de uma função Cálculos dos limites; A definição precisa de limite usando suas leis; Continuidade; Limites no infinito; Assíntotas horizontais; Tangentes; velocidades e outras taxas de variação | Limites: uma abordagem intuitiva; Calculando limites; Limites no infinito; comportamento final de uma função; Limites discutidos mais rigorosamente; Continuidade; Continuidade das Funções trigonométricas e de funções inversas. | Limite e continuidade; Definição de função contínua; Definição de limites; Limites laterais; Limites de funções compostas; Teorema do confronto; Continuidade das funções trigonométricas; O limite fundamental; Propriedades operatórias; Demonstração do teorema do confronto; Extensões do conceito de limites; Limites no infinito; Limites infinitos; Sequencias e limites de sequencias; O número e; Teorema do anulamento; do valor intermediário, e de Weierstrass. | Limite de uma sequência; Limites infinitos; Algumas propriedades dos limites infinitos; Indeterminação Limite de uma Função; Conceito de limite; Propriedades do limite; Operações com limites; Definição formal de limite; Indeterminação; Limites laterais; Limites no infinito; Cálculo de limites no infinito; Limites infinitos; Limites fundamentais; Primeiro limite fundamental; Segundo limite fundamental; Terceiro limite fundamental. |
| | | Função exponencial e logarítmica; Potência com expoente real; Logaritmo; O limite $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ | Funções Contínuas; Valores máximos e mínimos de uma função. |

**Fonte:** Produzido pelos autores.

Vemos novamente à sequência proposta por Cauchy na organização desses livros didáticos de matemática utilizados atualmente. Esses livros buscam atender os programas propostos para a disciplina de Cálculo diferencial e integral, seja para Cursos de Matemática de bacharelado ou de licenciatura, como pudemos observar no Quadro II acima que exemplificamos com algumas ementas desses cursos. Como também, para diversos outros cursos em que essa disciplina faz parte. Um ponto interessante na apresentação desses livros, nesses exemplos do quadro, é com relação à introdução do conceito de limite. Encontramos a introdução com o estudo das funções e também com o estudo das sequências. São indicações interessantes se pensarmos nos conceitos que foram vistos no ensino médio, sendo uma possibilidade para se retomar alguns conceitos e, ao mesmo tempo, fazer um estudo mais aprofundado deles com as ideias do limite.

Como síntese deste capítulo concluímos que a abordagem dos conteúdos de números reais, funções, limites e derivadas, que compõem os pilares do cálculo e da análise matemática, de modo não são introduzidos de forma articulada nos livros didáticos do ensino médio. Aliás, o trabalho de análise de livros didáticos de matemática do ensino médio, coordenado por Lima (2001), conclui que algumas coleções trazem alguns capítulos sobre Cálculo Diferencial, mas da forma como são apresentados "seria melhor não trazê-los". Por outro lado, observa-se que, de modo geral, os livros destinados às disciplinas de Cálculo I, seguem a sequência dos conteúdos proposta por Cauchy no século XIX. Além disso, com raras exceções como o livro de Cálculo de Stewart, a maioria valoriza a abordagem clássica onde apresenta-se primeiramente informações teóricas, seguida de alguns exemplos ilustrativos e listas de exercícios. As conexões entre os conteúdos, aspectos históricos, diversificação de contextos e de recursos didáticos ainda continua sendo um desafio para o estudo e abordagem em sala de aula.

# CAPÍTULO 7

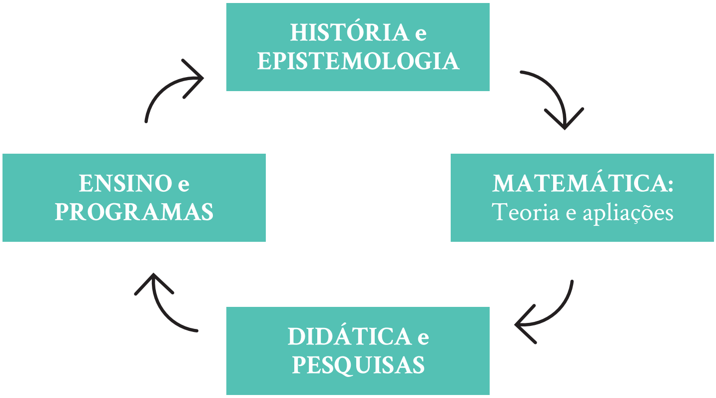
## Conclusão

A análise matemática e uma parte importante dos programas do ensino médio e universitário. Esse fato inegável não nos impede de considerar problemas ocorridos durante sua evolução ao histórica, repleta de difculdades de naturezas diferentes. Por outro lado, seu ensino gera difculdades e falhas. Essas difculdades e obstáculos de ensino estão na maioria das vezes ligadas ao conceito de função e ao conceito de limite. Como mencionado anteriormente, nossa abordagem dessa disciplina consiste em fazer uma apresentação global do que envolve o conceito de limite, ou seja, o aspecto histórico, didático, epistemológico e análise de programas.

Como essa produção é voltada para professores, tentamos, na medida do possível, esclarecer os vários aspectos subjacentes ao ensino do conceito de limite. Nosso objetivo é fornecer aos professores uma breve visão geral do conceito de limite. De fato, por meio do tratamento dado ao conteúdo dos diferentes capítulos, sensibilizamos os participantes para as ligações entre os diferentes aspectos que estão ligados ao conceito de limite. Assim, mostramos que o ensino efetivo deste conceito requer a consideração dos diferentes elementos relacionados a ele, como mostra o diagrama da Figura 1 a seguir.

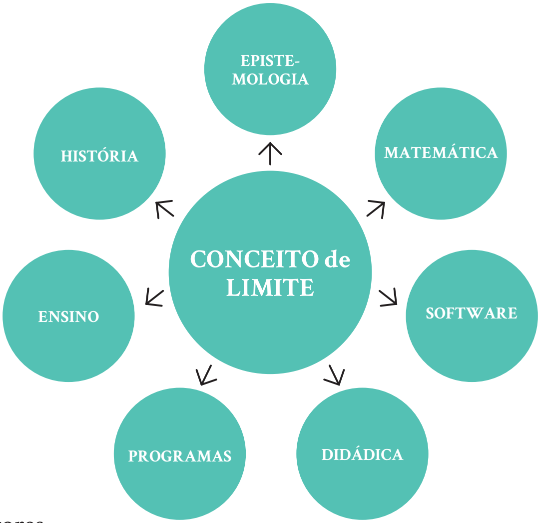
Tentamos, na medida do possível, abordar os diferentes temas descritos na Figura 1 a seguir, para permitir ao leitor apropriar-se melhor dos diferentes aspectos e abordagens que cercam o conceito de limite. Especificamente, o professor consciente desses diferentes aspectos que cercam o conceito de limite, pode construir estratégias efetivas para desenvolver suas aulas e adotar uma pedagogia apropriada para o ensino de esse conceito. Discutimos também outras ramificações relacionadas ao conceito de limites e seu ensino, onde o conteúdo do diagrama apresentado na Figura 1 se encaixa em outro um pouco mais global, que pode ser esquematizada, conforme a Figura 2 a seguir.

**Figura 1.** Aspectos relacionados ao conceito de limite.




Fonte: Os autores.

**Figura 2.** Aspectos relacionados ao conceito de limite.




Fonte: Os autores.

Portanto, ao discutir os diferentes aspectos que tratamos em diferentes capítulos, valorizamos as ideias que nos parecem importantes para cada tema.

Além do que foi dito neste contexto geral, o que este livro traz para o professor? Em outras palavras, qual é a contribuição teórica e prática do livro para o professor?

Primeiramente, tentamos trazer uma visão global do desenvolvimento do conceito de limite. A evolução histórica de suas diferentes formulações e o vínculo existente entre elas foram discutidos. De maneira geral, a ferramenta histórica possibilita conhecer como o conceito foi construído e, portanto, perceber as dificuldades e obstáculos dos alunos na compreensão do conceito em geral, em particular o de limite. Além disso, o professor que está ciente dessas diferentes formulações históricas pode construir uma estratégia apropriada para alcançar uma abordagem adequada ao ensino desse conceito.

Em seguida, também estudamos neste texto os diferentes representações e formulações matemáticas do conceito de limite. O objetivo é permitir que o professor realize as diferentes definições matemáticas do conceito de limite e os lacos estreitos que existem entre eles. Por outro lado, traçamos uma visão geral das diferentes propriedades dos limites, ilustrada por exemplos. Métodos e aplicações matemáticas de limites foram discutidos e exemplos práticos foram dados. Nosso objetivo é equipar o professor com ferramentas matemáticas para entender os aspectos teóricos e práticos relacionados ao ensino de limites. Assim, o professor pode ter ideias matemáticas precisas a fim de construir seu próprio material, tanto de acordo com o nível da classe, como de acordo com as necessidades específicas de seus alunos.

Em relação a esse assunto, analisamos duas definições comumente usadas em livros didáticos. A ideia é permitir que o professor esteja ciente das diferenças entre essas duas definições, a fim de evitar as armadilhas que podem ser confusas para os alunos.

Por fim, foi abordada a análise da evolução do conceito de limite nos programas, o que permite ao professor perceber esse importante aspecto no ensino desse conceito.

Além disso, acreditamos que, a partir do conteúdo dos capítulos deste livro, outras reflexões e ideias de natureza epistemológica e didática possam ser desenvolvidas. Por exemplo, emerge do nosso estudo que existe um paralelismo entre os dois desenvolvimentos seguintes:

1) A evolução histórica do conceito de limite, de Cauchy até hoje, passando por Weierstrass.

2) A evolução da definição do conceito de limite nos livros didáticos, do ensino médio até à universidade.

Nas duas situações, para a definição do conceito de limite, temos:

1) Formulação verbal (Cauchy e Stewart),

2) A formulação com (delta, epsilon) (Weiertrass e Stewart),

3) A formulação simbólica com (delta, epsilon).

Seria interessante fazer um estudo comparativo aprofundado dessas duas evoluções e seu impacto sobre o ensino do conceito de limite.

Esperamos que este livro seja útil como subsídio, tanto para alunos e quanto professores da disciplina de cálculo ou de análise matemática, em cursos de graduação ou de outros níveis de escolaridade.

# Referências bibliográficas


[1] AKKAR, M. La philosophie de l'enseignement et la recherche en Mathématiques. *Actes du congrès international su Mathématiques et Philosophi*e, pp.179-188. L'Harmattan, Paris et Okad, Rabat, 1985.

[2] ARTIGUE, M. La enseñanza de los princípios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In Ingeniería Didáctica em Educación Matemática: Un esquema para la Investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá, 1995, pp. 97-140.

[3] BALAC, S. et STURM, F. *Algèbre et analyse, cours de mathématiques de 1ère année*. PPUR, 2014.

[4] BARON, M. E. *The origin of the infinitesimal calculus*, Dover, New York, 1987.

[5] BRASIL, Conselho Federal de Educação. Parecer 295/62. Currículo mínimo para a licenciatura em matemática. Documenta, Brasília, n. 10, pp. 85-87, 1962.

[6] BRASIL, Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura. Diário Ocial da União, Brasília, 05 mar. 2002a, Seção 1, p. 15.: Acesso em: 13 maio 2015.

[7] BAZZONI, A., *On the concepts of function and dependence*, Principia 19 (1), pp. 1-15, 2015.

[8] BOURBAKI, N.: 1939, *Eléments de Mathématiques*, Livre I, Ch. 2, Hermann, Paris.

[9] BUCCHI, P. *Matemática e Cidadania* - Vol. 3 - 3º Ano. Escala Educacional, 2008.

[10] CARVALHO, J. B. P. de. *O cálculo na escola secundária: algumas considerações históricas.* Caderno Cedes. Campinas: Papirus, n. 40, p. 68-81, 1996.

[11] CAUCHY, L.A., *Cours d'Analyse de l' École Royale Polytechnique*. Analyse Algébrique. Oeuvres. Ser. 2, t. 3. 1- 471, 1821.

[12] CAUCHY, L.A., 1823. *Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal.* Œuvres ser. 2, IV:9-261.

[13] CAUCHY, A.-L., *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie,* tome I. Paris, 1826. (Applications II) Id., tome II, Paris, 1828.

[14] A. COQUIO et al., Polycopié de l'Université de Grenoble-Alpes. MAT 101 - L1 Semestre 1. 2016.

[15] CORNU, B., Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. Tese de doutorado - Universidade de Grenoble, 1983.

[16] CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa-Portugal: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

[17] COLETTE J.P. *Histoire des Mathématiques,* Tome 2, Vuibert, Paris, 1979.

[18] EULER L., 1988. *Introduction to Analysis of the Infinite,* Book 1, Springer-Verlag, New York.

[19] COMMISSION INTER-IREM Université, Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. *Publications IREM de Paris* – Université Denis Diderot Paris 7, 2017.

[20] DESCARTES, R. *The Geometry of René Descartes.* Trad. Smith, D. and Lathan, M., New York: Dover Pubications (1954 [1637]) .

[21] DUROUX, A.F. Valor absoluto: Grandes dificuldades para um conceito menor, *Petit x* num. 3, pp. 43-87, 1983.

[22] GLAESER, G. Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 2 no. 3, 1981.

[23] GRUGNETTI, L., MAFFINI, A., MARCHINI, C. Le concept de fonction dans l'école italienne ; usage de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques pour en clarifier le sens., Université catholique de Louvain Louvain-La-Neuve, pp. 421-443, 2001.

[24] GUIDOROZZI, H. L., *Cálculo,* Volume 1, 5ª Ed., Rio de Janeiro-RJ, LTC, 2013.

[25] HEINE, E. Die Elemente der Functionenlehre. *J. reine angew. Math.* 74 (1872), pp. 172-188.

[26] IEZZI, G. et al. *Matemática para a 3ª série do 2º grau.* São Paulo: Editora Atual. 1974.

[27] L'HÔPITAL, G. F. A. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* Paris: Imprimiere Royale, 1696.

[28] LEBESGUE, H. *Intégrale, Longueur, Aire.* Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de Paris, Paris, 1902.

[29] LEFEVRE, J. Moments et aspects de l'histoire du calcul différentiel et intégral. Cinquième partie: le dixneuvième siècle et la notion de limite, *Bulletin AMQ,* Vol. XXXVIII, num. 1, pp. 34-40, 1998.

[30] LEFEVRE, J. Moments et aspects de l'histoire du calcul différentiel et intégral. Troisième partie: Newton et Leibniz. *Bulletin AMQ,* Vol. XXXVI, num. 2, pp. 43-54, 1996.

[31] LIMA, E.L., ed. Exame de Textos: *Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio.* Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

[32] LIMA, E. L. *Análise Real,* Volume 1, Rio de Janeiro-RJ: SBM –IMPA, 1989.

[33] Mac LANE, S. *Mathematics, Form and Function.* Springer, 1986.

[34] MELLO, J. e PASTORE, L. *Matemática - Construção e Significado.* Volume único. São Paulo-SP: Editora Moderna. 2005.

[35] MARCHINI C., GRUGNETTI L., MAFFINI A. Le concept de fonction dans l'école italienne ; usage de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques pour clarifier le sens. *Actes de la Troisième Université d'Eté Européenne sur « Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique »,* Volume 2, p. 421-444, Université Catholique de Louvain, 2001.

[36] NEWTON, I., *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* London: Royal Society, 1687.

[37] NEWTON, I. *The method of fluxions and infinite series.* Tradução J. Colson. Publicação póstuma. London: H. Woodfall, 1736 [1671].

[38] NGUYEN, N. et al. *Mathématiques MPSI.* Collection Prépa-sciences, 2013.

[39] OTERO-GARCIA, S.C. Disciplinas de Análise na História de seu Ensino: uma trajetória no curso de licenciatura em matemática da UNESP de Rio Claro, *História da Ciência e Ensino: construindo interfaces* 7 (2013), p. 1-44.

[40] PERRIN-GLORIAN, M.- J. O valor absoluto no 1º ano do Ensino Médio: transposição didática e competência do aluno. *Publications mathématiques et informatique de Renne,* Volume (1995-1996) no. 3 , Talk no. 5 , pp. 1-22.

[41] RAMIS, J-P. et WARUSFEL, A. *Mathématiques. Niveau L1 : tout-en-un pour la licence : cours complet et 270 exercices corrigés.* Dunod, 2006 et 2013.

[42] REID, N. *Le calcul différentiel et intégral par la résolution de problèmes,* Lidec, 1992.

[43] RIBEIRO, J. *Matemática,* São Paulo-SP: Editora Scipione, 2008.

[44] ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro-RJ: Zahar, 2012.

[45] SIERPINSKA, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches em Didactique des Mathématiques,* vol. 6, n.1, pp. 5-67, 1985.

[46] STEWART, J. *Single Variable Calculus Concepts and Contexts,* Fourth Edition, Brooks/Cole, 2010.

[47] STEWART, J. *Cálculo* Vol. 1. São Paulo-SP: Editora Pioneira Thompson Learning, 2003.

[48] SINKEVICH, G. I. On the history of epsilontics, *Antiquitates Mathematicae,* Vol. 10 (1), pp. 183-204, 2016. doi: 10.14708/am.v10i0.805. https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1502/1502.06942.pdf

[49] TERRACHER, P.-H. et al. *MATH, Analyse et Probabilité,* Paris-France. Edit. Hachette – Lycées, 1992.

[50] VIEIRA, D.J.C. Ensino Aprendizagem do Conceito de Limite. Departamento de Matemática. Universidade de Aveiro. Revista Millenium, v. 16. 1999.

[51] YUSCHKEVITCH, P. Le concept de function jusq'au milieu du XIXe siècle, Ovaert, J.L. and Reisz, D. (Eds.), Fragments d'histoire des mathematiques, *Brochure A.P.M.E.P., nº* 41, pp. 7-68, 1981.

[52] WEIERSTRASS, K. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner-Archiv für mathematic. Band 9, 272 s. Reprint 1989.

# APÊNDICE A

## Contribuição dos Participantes

No desenvolvimento desta disciplina foram abordados aspectos teóricos e práticos, por meio de questionamentos, atividades e realização de trabalhos pelos alunos participantes, sobre alguns temas nela abordados. Após avaliação dos trabalhos, sugerimos a cada uma, algumas correções e aprimoramentos de seus textos, para que suas produções pudessem ser incorporadas como complemento do nosso livro, o que foi realizado com muita responsabilidade acadêmica. Assim, agradecemos as participantes Bruna, Rosane e Sonia, por nos enviar suas importantes contribuições, as quais foram integradas no apêndice deste livro.

Apresentamos a seguir essas produções com os títulos e os respectivos autores.

## Rosane Corsini

Um olhar sobre a evolução histórica do conceito de função e ligação com o ensino atual do conceito de função

## Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato

O que uma Função? Uma Discussão sobre o Texto de Mac Lane

## Magda C. Junqueira Godidnho Mongelli

Limites Finito e Infinito. Duas Definições de Limites

## Bruna Letícia Nunes Viana

Limites de Funções em Espaços Métricos

# Um olhar sobre a evolução histórica do conceito de função e ligação com o ensino atual do conceito de função

**Por**

**Rosane Corsini**

## Resumo

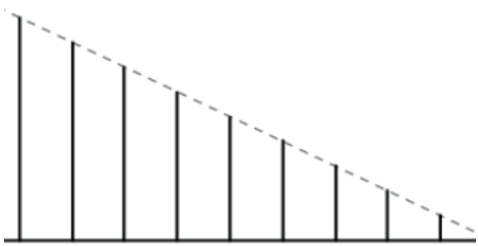
Neste trabalho apresentamos estudos e reflexões produzidos durante o curso da disciplina optativa "Limites de funções de uma variável real com valores reais e generalizações", no que tange aos estudos do conceito de funções em seus aspectos históricos. Apresentamos também uma análise dos referenciais curriculares das redes públicas (SED e REME), acerca das orientações quanto ao trabalho do tema, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, além de trazer exemplos de definições apresentados em dois livros didáticos com propostas didáticas diferentes e algumas considerações valendo-me de minha experiência nestes níveis de ensino relacionado às funções. Concluo trazendo pensamentos que me foram possíveis após a realização deste trabalho, bem como ideias que antes não povoavam minhas reflexões, deixo o convite para realizar esta viagem no tempo e nos pensamentos.

## 1. Introdução

Ao olharmos para a história, percebemos que o conceito de função levou muito tempo para ser construído e aperfeiçoado até chegar ao que conhecemos e trabalhamos atualmente. Mais precisamente, nasceu na tentativa de filósofos e cientistas em compreender a realidade e encontrar métodos que permitissem estudar e descrever fenômenos naturais. Apesar de ter sido explicitado no século XVIII, em algumas ideias anteriores já figuravam mesmo que de forma implícita.

Como no fato protagonizado pelo bispo Nicolau de Oresme (1323 – 1382), na Universidade de Paris, ao estudar o movimento com aceleração constante, em que representou num gráfico a velocidade variando com o tempo da seguinte maneira: marcou os instantes de tempo ao longo de uma linha horizontal que ele chamou de longitudes e representou as velocidades em cada tempo por linhas verticais, perpendiculares às longitudes, que ele denominou de latitudes conforme esquema abaixo.

**Figura 01** – Representação gráfica de Oresme



O conceito de função nasceu quando os cientistas passaram a descrever os movimentos de forma quantitativa. Desde então, muitas definições foram apresentadas, contemplando diferentes interpretações/representações, em tempos distintos. Neste trabalho poderão ser conhecidas algumas das definições históricas, em algumas, apresentarei particularidades interessantes encontradas em meus estudos sobre o tema.

As definições presentes neste trabalho foram apresentadas desde de 1694 até 1927, porém, os estudos não se esgotaram e as ideias não foram aceitas por completo, suscitando discussões, como nos mostra Mac

Lane, ao escrever sobre o conceito de função no ano de 1986, demonstrando que ainda há o que se discutir acerca do tema. Entendo que analisar diversas definições que surgiram ao longo do tempo, nas diferentes interpretações e representações do conceito de função, pode auxiliar na reflexão sobre a presença destas no ensino atual de funções.

## 2. Estudo de cinco definições históricas.

Neste parágrafo apresento uma análise das definições supracitadas, visando identificar qual a interpretação e/ou representação contemplada pelo autor.

**Tabela 01** – Análise das definições de função (1694 – 1927)

| Ano | Autor | Interpretação/representação observações |
|---|---|---|
| 1694 | Leibniz | Está aparentemente apoiando-se na característica gráfica da curva que representa a função. |
| 1718 | Bernoulli J. | Contempla a relação de quantidades variáveis em sua definição. |
| 1748 | Euler | Contempla a relação de quantidades variáveis em sua definição e se reporta à expressão analítica da função. Embora não defina o que significa expressão analítica, segundo Boyer (1991) tinha em mente funções algébricas e as funções transcendentes elementares como as trigonométricas, as exponenciais e as logarítmicas. |
| 1755 | Euler | Contempla a relação de quantidades variáveis e cita a expressão “funções de x”. |

| Ano | Autor | Interpretação/representação observações |
|---|---|---|
| 1782 | Condorcet | Contempla a relação de quantidades variáveis e cita a expressão "funções de x". |
| 1797 | Lagrange | Contempla a relação de quantidade variável e também se cita a utilização de expressões analíticas. |
| 1797 | Lacroix | Contempla a relação de quantidades variáveis. |
| 1821 | Cauchy | Contempla a relação de quantidades variáveis. |
| 1834 | Lobatchevsky | Refere-se à relação de dependência de y por x, e reporta à utilização de uma expressão analítica para representar uma função. |
| 1851 | Riemann | Contempla a relação de quantidade variável. |
| 1870 | Hankel | Contempla a relação de quantidades variáveis e é o primeiro que fornece a noção de domínio e fala sobre o conceito de função contínua. |
| 1902 | Lebesgue | Contempla a relação entre elementos de conjuntos numéricos e também refere-se à utilização de expressões analíticas na representação da função. |
| 1927 | Weyl | Contempla a relação entre elementos de conjuntos numéricos. |
| 1939 | Bourbaki | Contempla a relação entre elementos de conjuntos numéricos e traz o conceito de domínio bem definido. |

Dentre as definições analisadas na planilha acima, houve a solicitação por parte do professor, para que cada aluno da disciplina escolhesse cinco, as que mais se aproximassem com o trabalho desenvolvido em nossa atuação docente. Deste modo, as escolhas foram feitas com base nos trabalhos já realizados por mim, principalmente considerando as que mais me pareciam familiar.

Ao pesquisar sobre o tema, durante o desenvolvimento deste trabalho, encontrei uma definição, que não consta na lista proposta pelo professor, que disponibilizo nos anexos deste texto, mas que a meu ver, diz muito sobre uma das definições por mim escolhidas, mais precisamente a primeira delas. Esta definição é a proposta por G. H. Hardy[1] (1877 – 1947), que enumerou três características que necessitam ser respeitadas por uma função determinada pela relação entre duas quantidades variáveis x e y, são elas:

> • y é sempre determinado por um valor x;
>
> • para cada valor de x para o qual y é dado, corresponde um e somente um valor de y;
>
> • a relação entre x e y expressa através de uma expressão analítica na qual o valor de y que corresponde a um dado valor de x pode ser calculado por substituição direta de x. (Silva 1999)

O motivo pelo qual apresento a definição acima, deve-se ao fato de RÜTHING (1984) considerar que a definição de Bourbaki dada em 1939, apresentada na planilha acima, bem como nos anexos, ser uma tradução da definição de Hardy para a linguagem dos conjuntos. Talvez por ter tantas semelhanças com a definição que hoje trabalhamos, esta tenha sido

---

[1] Informação retirada do texto de BOTELHO, L. Um breve histórico do conceito de funções. Caderno Dá-Licença. UFF-RJ, disponível em https://docplayer.com.br/12770073-Um-breve-relato-do-desenvolvimento-do-conceito-de-funcao.html, pesquisado aos 01/10/2018 às 8h

minha primeira opção dentre as cinco que mais se aproximam do nosso fazer pedagógico, mesmo sem a linguagem simbólica tão característica nos formatos trabalhados atualmente. As definições escolhidas foram:

**Tabela 02** – Análise das definições escolhidas

| Ano | Autor | Interpretação/representação observações |
|---|---|---|
| 1939 | Bourbaki | Por apresentar a ideia de cada elemento x corresponder a um único y, além de dar a ideia de domínio quando coloca a relação entre conjuntos e especificar x em A |
| 1870 | Hankel | Pelo fato trazer a ideia apresentada pela definição de Boubaki, por informar que y não necessita estar definido sobre todo o intervalo, além de ser o primeiro a dar ideia de domínio quando diz “se a cada valor de x de um certo intervalo”. |
| 1821 | Cauchy | Também por apontar para a dependência de y em relação a x. |
| 1851 | Riemann | Por apresentar além da ideia da dependência de y em relação a x, apontar características da função contínua. |
| 1902 | Lebesgue | Por ressaltar a relação de dependência de quantidades variáveis, por estabelecer uma crítica ao considerar como função somente aquelas que podem ser expressas por uma expressão analítica. |

O estudo das definições, em particular estas escolhidas diante das várias apresentadas, certamente me ajudaram a expandir minha cultura de uma forma geral, visto que percebi o quanto as definições utilizadas atualmente se aproximam das definições apresentadas por diversos estudiosos, em tempos diferentes. Saber que o estudo das funções foi inserido no ensino há pouco tempo, comparado às datas das tentativas apresentadas para se chegar a um consenso, me mostrou que a dificuldade em defini-las foi, e é uma realidade, mesmo entre os filósofos, matemáticos e estudiosos.

De fato, tomar conhecimento de que em 1986, Mac Lane escreveu sobre o conceito de função discutindo cada uma de suas representações, demonstra, a meu ver, que existe ainda uma certa inquietação a respeito do tema, ou seja, o mesmo ainda não foi esgotado ou totalmente aceito como concluído, ou pelo menos não havia sido na época.

Além disso, percebo o quanto a escolha da definição a ser apresentada aos estudantes é determinante em relação ao caminho didático a percorrer no fazer pedagógico, de modo a favorecer a compreensão por parte dos estudantes de modo significativo deste conceito complexo.

## 3. As Orientações Curriculares de Matemática

Consegui com uma amiga de longa data, que atua no Ensino Fundamental na Rede Municipal de ensino (REME) de nossa capital Campo Grande, as orientações curriculares de Matemática, que me proporcionou um olhar sobre quando orienta-se iniciar a abordagem do tema, o que se pretende com o ensino de funções no Ensino Fundamental 2, bem como as orientações didático/pedagógicas para o trabalho deste ente matemático junto aos estudantes.

Antes da apresentação das planilhas contendo as orientações para o Ensino de Conteúdos Fundamentais do 9º ano, é apresentado um texto introdutório onde é ressaltada a importância de se observar a impossibilidade de se considerar os conteúdos fundamentais apresentados como limitadores para o estudo da Matemática do 6º ao 9º ano, e que não podem ser suprimidos, nem reduzidos, mas podem e devem ser aprofundados em conformidade com o Referencial Curricular de Matemática da REME, considerando também orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

A primeira vez que o tema Funções ocorre é no terceiro bimestre do 9º ano, logo após o estudo de equações do segundo grau. As orientações unem os estudos de Funções do 1º e do 2º grau, sem mencionar a apresentação de definições ou de uma formalização do conceito. Isso nos mostra que os estudos contemplam o ato de construir, interpretar, estudar os sinais, reconhecer expressões algébricas que representam funções do primeiro e do segundo grau, como podemos observar no campo objetivos da planilha constante na figura a seguir.

No que tange às orientações metodológicas, há a sugestão para que se utilize como recurso os jornais, na busca por gráficos de funções que aparecem no contexto social, bem como que se faça a interpretação de gráficos vinculados a pesquisas de opinião, consumo, dentre outros. Este fato aponta para um estudo voltado para a utilização destes conceitos no cotidiano.

**Figura 02** – Referencial Curricular Rede Municipal de Ensino - REME – Campo Grande - MS

| Orientações para o Ensino de Conteúdos Fundamentais do 9° ano | | | |
|---|---|---|---|
| **Eixo** | **Conteúdos** | **Objetivos** | **Orientações metodológicas** |
| 3º BIMESTRE | | | |
| NÚMEROS E OPERAÇÕES | Equações do 2° grau | Analisar uma situação que envolva uma equação de 2º grau.<br>Identificar e resolver sistemas de equações de 2º grau.<br>Traduzir e resolver situações-problema, utilizando equações (e sistemas de equações) do 2º grau.<br>Identificar e aplicar os princípios, aditivo e multiplicativo na resolução de equações do 2° grau.<br>Utilizar e atribuir sentido à linguagem algébrica, em seus usos na representação de incógnitas, para resolver equações do 2° grau.<br>Equacionar com o uso da linguagem algébrica uma situação-problema que pode ser representada por uma equação do 2° grau.<br>Aplicar procedimentos de fatoração, simplificação e divisão na resolução de uma equação 2° grau. | Uso de malhas quadriculadas como recurso para facilitar a organização de dados de uma equação do 2° grau e sua representação gráfica.<br>Uso de balanças algébricas ou representações de balanças (dois pratos) no papel, como recurso para a compreensão e conservação da ideia de igualdade nas equações.<br>Uso de "máquinas algébricas" impressas no papel, como recurso que pode auxiliar para atribuir sentido à linguagem algébrica.<br>Explorar o uso de atividades com sequências e padrões numéricos para o desenvolvimento do pensamento algébrico. |
| | Funções do 1° e do 2° grau | Construir o gráfico de uma função a partir de pares de soluções de uma função.<br>Interpretar gráficos de funções polinomiais de 1º grau: coeficientes angular, linear e raiz.<br>Representar gráficos de funções polinomiais de 2º grau: vértice da parábola, estudo dos sinais e análise das diversas posições das parábolas.<br>Reconhecer a expressão algébrica que representa uma função, do 1° grau ou do 2° grau a partir de uma tabela.<br>Reconhecer a representação gráfica que indica a expressão algébrica que representa uma função, do 1° grau ou do 2° grau. | Uso de jornais e revistas como recurso auxiliar na investigação de representações de gráficos de funções que apareçam no contexto social.<br>Interpretação de gráficos que vinculam pesquisas de opinião, de consumo, de taxas de emprego e desemprego, entre outros, como auxiliar para o reconhecimento de representações gráficas que indicam uma expressão algébrica. |

No quarto bimestre o tema volta a ser apresentado, mas agora em uma análise mais refinada dos componentes de sua representação algébrica como coeficiente linear, angular e raízes, no caso de funções do primeiro grau, já no que tange às funções do segundo grau, o vértice da parábola, o estudo dos sinais e a análise das diversas posições da parábola.

Além disso, recomenda-se trabalhar o reconhecimento da representação gráfica relacionada a uma expressão algébrica do primeiro ou do segundo grau, bem como o contrário, dado o gráfico, reconhecer a expressão algébrica que a representa. Este trabalho deve ser realizado observando a orientação metodológica que indicam novamente a utilização de jornais e revistas como material de apoio.

Este material deve ser utilizado para investigação e análise dos gráficos encontrados, interpretando-os de forma a ligar os gráficos representativos de situações do cotidiano como pesquisas de opiniões, de consumo, de taxas de empregos e desempregos dentre outros. Isso nos leva a crer que o ensino deve ser pautado em situações do contexto social, vinculados à realidade vivida, não abordando o estudo descontextualizado e genérico do tema.

**Figura 03** – Conteúdos fundamentais REME – CG-MS

**Orientações para o Ensino de Conteúdos Fundamentais do 9º ano**

| Eixo | Conteúdos | Objetivos | Orientações metodológicas |
|---|---|---|---|
| 4º BIMESTRE | | | |
| NÚMEROS E OPERAÇÕES | Funções do 1° e do 2° grau | Construir o gráfico de uma função a partir de pares de soluções de uma função.<br>Interpretar gráficos de funções polinomiais do 1º grau: coeficientes angular, linear e raiz.<br>Representar gráficos de funções polinomiais do 2º grau: vértice da parábola, estudo dos sinais e análise das diversas posições das parábolas.<br>Reconhecer a expressão algébrica que representa uma função, do 1° grau ou do 2° grau a partir de uma tabela.<br>Reconhecer a representação gráfica que indica a expressão algébrica que representa uma função, do 1° grau ou do 2° grau. | Uso de jornais e revistas como recurso auxiliar na investigação de representações de gráficos de funções que apareçam no contexto social.<br>Interpretação de gráficos que vinculam pesquisas de opinião, de consumo, de taxas de emprego e desemprego, entre outros, como auxiliar para o reconhecimento de representações gráficas que indicam uma expressão algébrica. |

Em relação às orientações gerais para o Ensino de Conteúdos Fundamentais para a disciplina de Aplicações Matemáticas, novamente as funções do primeiro e do segundo grau são apresentadas em um mesmo tópico no eixo “Números e Operações”, com orientações para o quarto bimestre, momento em que se trabalham as funções com mais propriedade envolvendo seus detalhes.

Dentre os objetivos elencados encontramos a representação em um sistema de coordenadas cartesianas da variação das grandezas, além da análise e caracterização do comportamento de grandezas direta e inversamente proporcionais, ou não proporcionais na resolução de situações-problema sob uma orientação metodológica que considera a utilização de materiais de apoio como o quadro valor de lugar (QVL) e o ábaco de pinos ou de papel.

Também há a orientação de que o professor deva devolver dúvidas aos estudantes, questionando-os de volta para que possam chegar ao raciocínio correto de forma orientada. Além disso, propõe que os estudantes criem jogos que possam favorecer a compreensão e o aprendizado significativo do tema.

**Figura 04** – Conteúdos fundamentais – REME – CG-MS

| Orientações para o Ensino de Conteúdos Fundamentais para a disciplina de Aplicações Matemáticas | | | |
|---|---|---|---|
| **Eixo** | **Conteúdos** | **Objetivos** | **Orientações metodológicas** |
| **4ºBIMESTRE** | | | |
| **NÚMEROS E OPERAÇÕES** | Funções do 1° e do 2° grau | Representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas.<br>Analisar e caracterizar o comportamento da variação de grandezas em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional, na resolução de situações-problema. | Nesse nível de ensino, materiais de apoio como quadro valor de lugar (QVL) e ábaco (de pinos ou de papel), já devem ser reconhecidos pelos alunos. Cabe ao professor devolver dúvidas e questionamentos de alunos com outros questionamentos, como por exemplo, “como são compostos esses números? Por que utilizamos a vírgula em determinados números? Por que vai um nas operações de adição? Essas e outras perguntas podem ajudar em processos de investigações e atividades com operações nos conjuntos numéricos.<br>A construção de jogos pelos alunos (regras, fichas com propriedades e conceitos), como recurso para que possam utilizar da linguagem matemática em situações de investigação envolvendo NÚMEROS E OPERAÇÕES. |

Com base nos excertos destas planilhas, podemos inferir que para o Ensino Fundamental o intuito é apresentar as funções do primeiro e do segundo grau, trabalhar alguns cálculos e construções sobre estas, trabalhar o reconhecimento das expressões algébricas que as representam, bem como seus gráficos, ora analisando-os, ora as expressões que os representam, além de relacionar as várias representações passíveis de serem registradas de uma função.

Quanto às orientações metodológicas, percebemos que o intuito é colocar o estudante para pesquisar formas de utilizar as representações gráficas das funções como auxiliares visuais nas pesquisas veiculadas nos diversos meios de comunicação em situações do cotidiano, trazendo para a realidade o que se trabalha, na maioria das vezes, fora de contextos, desprovidos de significados na vida real.

Em função da experiência que tenho no trabalho com o Ensino Fundamental, percebo nestas orientações algumas dificuldades em atende-las na totalidade, visto que trabalhos de pesquisas e análises demandam tempos e esforços que muitas vezes não são factíveis no dia a dia da escola.

Além disso, são muitos conteúdos a serem trabalhados em um curto espaço de tempo, e muitas vezes o livro adotado não traz esta mesma proposta, o que dificulta o trabalho daquele docente que atua em mais de uma escola, em mais de um período e em níveis diferentes de ensino.

No referencial curricular da Secretaria Estadual de Educação (SED) também para o Ensino Fundamental II, o tema Funções aparece pela primeira vez no terceiro bimestre do 9º ano, abordando Funções do 1º Grau, entretanto neste já fala-se de conceituação e reconhecimento de funções do primeiro grau, e aparentemente sugere um estudo mais aprofundado desta função. Porém, não trata do conceito de função antes de se falar do caso particular das funções do primeiro grau.

Além disso, no referencial curricular do estado, não percebemos orientações metodológicas, deixando a escolha a cargo do professor, a escolha de sua organização didática, bem como dos recursos materiais e tecnológicos que deseja utilizar em suas aulas. Nesta etapa, pretende-se desenvolver algumas competências/habilidades elencadas no excerto que segue.

**Figura 05** – Referencial curricular – 9º ano –3º Bimestre - Secretaria Estadual de Educação (SED) MS

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES

**NÚMEROS E OPERAÇÕES**

- Identificar os pares ordenados de números reais como as coordenadas cartesianas de pontos.
- Construir plano cartesiano e associar os eixos do plano com as coordenadas das abscissas e ordenadas.
- Relacionar os valores das coordenadas das abscissas e ordenadas como pares ordenados.
- Verificar a noção de uma função por meio de exemplo prático.
- Identificar e conceituar a função do 1º grau.
- Calcular o resultado de uma função de 1º grau.
- Analisar o gráfico de uma função de 1º grau.
- Identificar o zero de uma função como o valor da abscissa que anula uma função.
- Resolver problemas envolvendo função de 1º grau.
- Construir gráficos da função do 1º grau.
- Resolver problemas envolvendo sistemas de equações do 1º grau.

No quarto bimestre do 9º ano, a proposta é para se trabalhar com funções do segundo grau, gráficos, zeros da função, sendo as competências/habilidades a serem desenvolvidas:

**Figura 06** – Referencial curricular SED-MS – 9º ano - 4º bimestre

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES

**NÚMEROS E OPERAÇÕES**

- Identificar e conceituar funções do 2º grau.
- Calcular o resultado de uma função do 2º grau.
- Construir gráficos da função do 2º grau no plano cartesiano.
- Associar a concavidade da parábola.
- Identificar o vértice da parábola.
- Determinar o ponto mínimo ou ponto máximo de uma função quadrática.
- Analisar o resultado da função do 2º grau para representá-lo no gráfico, no plano cartesiano.
- Resolver problemas envolvendo a função de 2º grau representando-a no gráfico.
- Determinar os zeros de uma função quadrática.
- Identificar e representar no gráfico o domínio e a imagem da função quadrática no plano cartesiano.

Já nas orientações para o Ensino Médio da SED, as Funções são estudadas no primeiro dos três anos que compõem este nível. Percebemos que já se fala em definir, interpretar, esboçar, analisar, reconhecer, enfim, trata o tema com um pouco mais de profundidade e aborda seus detalhes de forma mais técnica, por assim dizer. Percebemos na figura 07 que o tema vem após o trabalho com conjuntos numéricos bem e intervalos reais.

Embora aponte como competências/habilidades a ser desenvolvida a compreensão da noção de função como relação de interdependência entre grandezas, quando refere-se às definições a serem trabalhadas, inicia com a de Domínio e Contradomínio, não se reportando à definição de função de um modo geral, ficando a cargo do docente apresentar a definição que melhor lhe aprouver de acordo com suas escolhas didáticas.

**Figura 07** – Referencial curricular Ensino Médio – 1º ano – 1º Bimestre– SED-MS

| **MATEMÁTICA – 1º ANO**<br>**1º Bimestre** | |
|---|---|
| **Competências e Habilidades** | **Conteúdos** |
| **Conjuntos**<br>➢ Incluir um número no conjunto numérico a que pertence observando suas características;<br>➢ Identificar os diferentes conjuntos numéricos pelos seus respectivos nomes;<br>➢ Representar conjuntos numéricos através de diagramas;<br>➢ Identificar elementos dos diferentes conjuntos numéricos;<br>➢ Localizar números reais na reta numérica;<br>➢ Encontrar a diagonal de um triângulo utilizando o Teorema de Pitágoras;<br>➢ Calcular a , utilizando aproximações sucessivas;<br>➢ Identificar números irracionais pelas suas características;<br>➢ Identificar os números irracionais representados geometricamente como hipotenusa dos triângulos retângulos na construção da espiral pitagórica;<br>➢ Representar números irracionais na reta numérica.<br>**Funções**<br>➢ Compreender a noção de função como relação de interdependência entre grandezas;<br>➢ Utilizar os conhecimentos de funções na interpretação e resolução de situações-problema;<br>➢ Determinar domínio, imagem e zeros de funções;<br>➢ Reconhecer e operar com funções compostas e inversas;<br>➢ Resolver equações, inequações e problemas que envolvam funções polinomiais;<br>➢ Identificar e analisar valores de variáveis, intervalos de crescimento e decrescimento;<br>➢ Reconhecer uma função polinomial do 1º grau através do gráfico e/ou de sua lei, utilizando suas particularidades: raiz, coeficiente angular, coeficiente linear, estudo do sinal, etc<br>➢ Ler, interpretar e transcrever da linguagem corrente para a linguagem simbólica e vice-versa;<br>➢ Representar e interpretar gráficos de fenômenos;<br>➢ Reconhecer uma função do 2º grau através do gráfico e/ou de sua lei utilizando suas particularidades: raízes, significado dos coeficientes, máximos e mínimos, conjunto imagem, estudo do sinal, etc. | **Conjuntos**<br>• Conjuntos numéricos<br>✓ Conjunto dos números reais;<br>✓ Conjunto dos números inteiros relativos;<br>✓ Conjunto dos números racionais;<br>✓ Conjunto dos números irracionais;<br>✓ Intervalos reais.<br>**Funções**<br>• **Definições**<br>✓ Domínio e contradomínio;<br>✓ Classificação de funções;<br>✓ Compostas e Inversas<br>✓ Plano cartesiano;<br>✓ Construção de gráficos;<br>✓ Análise de gráficos.<br>• **Função afim ou do 1º grau**<br>✓ Gráficos;<br>✓ Plano cartesiano;<br>✓ Coeficientes da função;<br>✓ Estudo dos sinais;<br>✓ Inequações.<br>• **Função Quadrática ou do 2º grau**<br>✓ Gráficos;<br>✓ Raízes da equação;<br>✓ Estudos dos sinais;<br>✓ Inequações do 2º grau;<br>✓ Máximos e mínimos (vértice da parábola). |

No segundo bimestre, percebemos que são trabalhadas outras funções como a exponencial a logarítmica e a modular, isso significa que o momento de se trabalhar o conceito de funções, desvinculado de casos particulares está presente no primeiro bimestre do primeiro ano, de modo aparentemente superficial, cabendo ao docente escolher aprofundar ou não o estudo de acordo com suas concepções.Nas orientaçãoe para o Ensino Médio o tema não figura mais nos outros bimestres nem nos próximos anos, podendo aparecer como ferramenta para resolver algum exercício, mas não sendo mais objeto de estudos.

## 4. Discussão

Sempre que trabalhei com o conceito de funções, e já o fiz em uma quantidade razoável de vezes, não me atentava muito acerca das diferentes definições de funções presentes nos livros didáticos. Talvez por trabalhar sempre com este conceito na educação básica, e as definições apresentadas seguirem um padrão semelhante, sendo abordada por meio de conjuntos, na maioria das vezes nos capítulos anteriores tratarem sobre a teoria dos conjuntos, falando sobre produto cartesiano, relações para assim entrar nas funções.

Entretanto, não me questionava quais elementos estavam sendo fornecidos pela definição e os tipos de exercícios que o manual propunha na sequência, se estava em consonância com a definição apresentada, ou se solicitavam o que não havia sido previamente subsidiado. Agora percebo o quanto isto pode afetar o aprendizado significativo do tema em todas as suas nuances. Um exemplo seria, se a definição não diz o que é domínio, não explicita suas características e onde se localiza, não deveria propor exercícios que os solicitem.

Para melhor esclarecer as afirmações acima, apresento duas definições e exercícios que se seguem nos capítulos destinados à introdução do tema Funções no primeiro ano do Ensino Médio. A escolha dos dois livros se deu por perceber que ambos realizam escolhas didáticas diferentes. O intuito é refletir sobre o que temos disponível nos manuais por meio destes dois exemplos e instigar a curiosidade para observar com mais cuidado outros casos outros livros didáticos.

**Livro 1**

> Considerando dois conjuntos, A e B, não- vazios e uma relação binária de A em B, dizemos que essa relação é função de A em B se, e somente se, a cada elemento x do conjunto A corresponder um único elemento y do conjunto B.
> $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ lê-se: f é função de A em B
>
> Ou no caso de ser possível escrever uma lei de correspondência através de uma expressão matemática:
> $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ lê-se: y é função de x, com $x \in A$ e $y \in B$
>
> *Matemática aula por aula – Benigno Barreto Filho – FTD 1998*

Apresento primeiramente esta definição por trabalhar com este manual há algum tempo e por me identificar com a proposta desta coleção. Nela o tema Funções é trabalhado após o estudo da teoria de conjuntos, produto cartesiano, relações, evoluindo até chegar ao estudo das funções desde a sua definição reportando-se às relações. Esta proposta vem ao encontro das diretrizes curriculares da instituição que sou servidora, abordando todos os temas que necessito apresentar aos estudantes.

Por realizar um trabalho bem detalhado sobre relações antes de definir funções, apresenta neste capítulo exercícios como os contidos nas figuras a seguir:

**Figura 08** – Exercícios resolvidos logo após a definição Livro 1

Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $B = \{-5, -2, 1, 4, 5, 6\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x + 1\}$:

a) determinar a relação *R* em forma de pares ordenados
b) construir um diagrama de flechas
c) verificar se essa relação é uma função. Em caso afirmativo determinar os conjuntos D(f), CD(f) e Im(f)

**Figura 09** – Exercícios resolvidos logo após a definição Livro 1

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 3\}$, pede-se:

a) determinar a relação em forma de pares ordenados
b) construir o diagrama de flechas
c) verificar se essa relação é uma função de *A* em *B*

**Figura 10** – Exercícios resolvidos logo após a definição Livro 1

Determinar o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 + x$ b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 4}$ c) $f(x) = \sqrt{-3x + 15}$

No exercício da Figura 08, percebemos que o autor favorece o trânsito entre os diversos registros de representação das funções, quando o enuncia apresentando a relação por meio da notação de conjuntos e solicita a resolução por meio do diagrama de flechas e o cálculo do Domínio, do Contradomínio e da Imagem analisando a expressão algébrica.

Praticamente a mesma dinâmica pode ser observada no exercício da Figura 09, mas este solicita a determinação da relação em forma de pares ordenados. Já no exercício da Figura 10, percebemos que ao solicitar a determinação do domínio das funções dadas na forma algébrica em que o Conjunto de Partida e o Conjunto de Chegada não são apresentados da mesma forma que os exercícios anteriores, o que indica se tratar em ambos os caso do conjunto dos números Reais ($\mathbb{R}$).

Isso significa que o professor deve trabalhar situações que exemplifiquem a forma de proceder a resolução destes exercícios, visto que a definição apresentada, e os exercícios propostos até o momento não subsidiam a percepção de como se soluciona o exercício em questão. No caso particular desta coleção, sempre que há uma técnica nova de resolução que será demandada, alguns exemplos são apresentados, indicando o caminho a seguir, não como os clássicos "siga o modelo", mas que dão a ideia de caminhos para se resolver situações similares.

As definições encontradas em livros didáticos do Ensino Médio seguem sempre a mesma dinâmica da definição apresentada anteriormente neste texto, o que varia é a quantidade de informações adicionais que estas disponibilizam.

**Livro 2**

Um outro exemplo que gostaria de trazer, parece vir ao encontro da proposta de se trabalhar o conceito de funções vinculado a situações do cotidiano, este manual, traz o conteúdo do Ensino Médio em Volume único.

Antes de conceituar e definir funções, o autor apresentou em capítulos anteriores a Teoria dos Conjuntos, Conjuntos Numéricos, e no capítulo em que conceitua e define as funções, apresenta a linguagem para trata-las, como o sistema cartesiano, pares ordenados, bem como a forma com que devemos localizá-los, além de apresentar os quadrantes. Após propor alguns exercícios, conceitua funções por meio de uma situação-problema, apresentado na Figura 11,

**Figura 11** – situação apresentada antes de formalizar o conceito de função – Livro 2

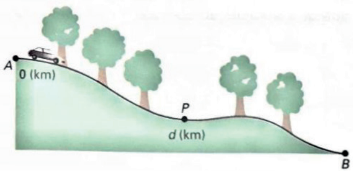
## 2. CONCEITO DE FUNÇÃO

Utilizamos medidas para indicar o comprimento de uma corda, a velocidade de um automóvel, a temperatura de uma região, a profundidade de um rio etc. Toda característica de um objeto que pode ser expressa por meio de uma medida é chamada de **grandeza**. São exemplos de grandezas: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa, vazão etc.

A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto depende da variação das medidas de outras grandezas: o crescimento de uma planta depende do tempo; a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura; a pressão no mar depende da profundidade etc. Para estudar essas dependências, os cientistas usam equações matemáticas relacionando as grandezas envolvidas.

Suponhamos, por exemplo, que um automóvel percorra um trecho *AB* de uma estrada a uma velocidade constante de 80 km/h.

Consideremos *A* como ponto de partida e associemos a ele a marca 0 km. A cada ponto *P*, do trecho *AB*, associemos a marca *d* km, que indica a distância de *P* até *A*, medida ao longo da trajetória.




Após esta explanação questiona: Que distância terá percorrido o automóvel após duas horas da partida? E segue com explicações, a apresentação de raciocínios, a tabulação de dados variados em uma tabela, relacionando t (horas) e d (quilômetros), e conclui que do mesmo modocom que se pode relacionar as grandezas d e t, pode-se relacionar outras grandezas, e exemplifica com o caso do termômetro, que relaciona o comprimento da coluna de mercúrio ou álcool com a temperatura; o preço de uma peça de tecido se relaciona com a metragem desse tecido e conclui que relações desta natureza são chamadas de funções.

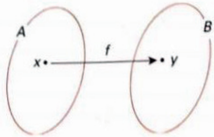
Em seguida traz as formas de representação de uma função, neste momento traz uma situação em que apresenta alguns dias de determinado mês e suas respectivas temperaturas, dispondo estes dados em diagramas de flechas, em uma tabela, no plano cartesiano e por meio de uma expressão algébrica, mas destaca que nem sempre é possível representar uma função por meio de uma expressão algébrica.

Somente após este trabalho, apresenta a generalização do conceito, que percebemos ser uma definição de função.

**Figura 12** – Generalização do conceito de Função – Livro 2

Generalizando:

Sendo $A$ e $B$ conjuntos não-vazios, chama-se **função** de $A$ em $B$ toda correspondência $f$ que associa cada elemento de $A$ a um único elemento de $B$.




- Os conjuntos $A$ e $B$ são o domínio (D) e o contradomínio (CD) da função $f$, respectivamente.
- Indica-se que $f$ é uma função de domínio $A$ e contradomínio $B$ por meio do símbolo $f: A \rightarrow B$.
- Cada elemento $y$ de $B$ associado, através de $f$, a um elemento $x$ de $A$ é chamado de imagem de $x$. Esse fato é indicado por $y = f(x)$ (lê-se: "$y$ é igual a $f$ de $x$" ou "$y$ é a imagem de $x$ através de $f$").
- O subconjunto de $B$, formado por todos os elementos que são imagens através de $f$, é chamado de conjunto imagem de $f$, que se indica por Im(f).

Percebemos que esta definição é um pouco mais detalhada, no sentido se parecer que se dialoga com o estudante enquanto define. Os exercícios que seguem envolvem diagramas de flechas, como na figura 12, tabelas, notação de conjuntos, representações gráficas e da forma algébrica tal como ocorre no outro manual. O que podemos inferir neste caso é que o autor aparentemente trata com mais ênfase a utilização das funções e de suas representações em situações cotidianas.

## 5. Conclusão

Olhar para os manuais tendo em vista a definição apresentada pelo autor, observar as escolhas didáticas e analisar se estas subsidiam de fato o trabalho proposto ao estudante foi um exercício bastante proveitoso, que me permitiu a percepção da necessidade de se avaliar com cautela a definição que apresentarei aos estudantes, os exercícios que proporei, principalmente o risco de buscar exercícios diversos em sites, livros, apostilas ou outros materiais, visto que cada autor se baseia nos subsídios que fornece aos estudantes para que consigam de fato se envolverem nas atividades gerando assim um aprendizado significativo.

Outro ponto a ser observado é que a escolha da definição diz muito sobre o trabalho que realizarei. Além disso, colocar os estudantes em contato com outras definições, fatos históricos que as envolveram, as evoluções dos conceitos presentes nas definições à medida em que se passava o tempo pode fazer com que ele compreenda a complexidade do conteúdo, que se interesse em saber mais sobre ele, além de possibilitar a motivação para saber mais sobre outros conteúdos em suas evoluções históricas.

Um aspecto que também gostaria de ressaltar é que após este estudo percebi que apresentar funções por meio de relação entre grandezas que podem ser diretas ou inversamente proporcionais, trabalhando-as a partir de situações do dia a dia, utilizar meios de comunicação para se pesquisar situações em que as funções, suas formas de representação foram utilizadas para tratar de assuntos do cotidiano pode aproximar o estudante do estudo do conteúdo, fazendo-o se interessar mais pelo conhecimento e pela apreensão de mais detalhes que o envolve. Mesmo que se trabalhem exercícios contextualizados de forma intramatemática, se estes forem propostos depois de se conhecer a aplicabilidade prática, pode inclusive chamar mais a atenção e motivar o estudo e proporcionar uma chance maior de se obter êxito no processo de ensino.

Vale ressaltar que além da bibliografia apresentada neste trabalho, foram utilizados como apoio para a escrita notas de aula, materiais fornecidos pelo professor durante a disciplina.

# Bibliografia


BOTELHO, L. **Um breve histórico do conceito de funções**. Caderno Dá-Licença. UFF-RJ, disponível em https://docplayer.com.br/12770073-Um-breve-relato-do-desenvolvimento-do-conceito-defuncao. html, pesquisado aos 01/10/2018 às 8h.

FILHO, B.B. **Matemática Aula por Aula**. Editora FTD. São Paulo. 2009 https://www.somatematica.com.br/emedio/funcoes/funcoes.php, pesquisado aos 01/10/2018 às 10h.

PAIVA, M. **Matemática, volume único**. Editora Moderna. São Paulo, 2005. Notas de aula e materiais fornecidos pelo professor durante as aulas

SILVA,M.H.M. e REZENDE, W.M. **Análise histórica do conceito de função**. Caderno Dá Licença. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense. v.2.pp.28-33. Niterói, 1999.

# Anexo

Definições históricas do conceito de função: visão geral

Para subsidiar a compreensão da planilha apresentada no tópico 1.2, apresentamos a seguir as definições contempladas.

**1694 LEIBNIZ (1646 - 1716)**
“Eu chamo funções todas as porções de linhas retas, que fazemos ao traçar retas indefinidas, que passam por um ponto fixo, e pelos pontos da curva.”

**1718 BERNOULLI J. (1667 – 1748)**
« Chamamos função de uma variável uma quantidade composta de qualquer forma por esta variável e por constantes. » Notação $\phi x$

**1748 EULER (1707 – 1783)**
“ Uma quantidade constante é uma quantidade determinada, que ainda conserva o mesmo valor... Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, ou seja, uma quantidade universal que inclui todos os valores determinados... Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta, de qualquer maneira, dessa mesma quantidade e de números, ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica, que além da variável z contém quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo, a+3z; az-4zz; az+b.sqrt(aa-zz); cz; etc., são fonctions de z. Uma função de variável é então, também, uma quantité variável.»

**1755 EULER**
“ Se certas quantidades dependem de outras quantidades de tal modo que se as outras mudam, estas quantidades mudam também, então nós temos o hábito de nomear essas quantidades de funções dessas últimas. Esta denominação tem a maior abrangência e contém em si todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por consequência, x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x de alguma maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x. »

**1782 CONDORCET (1743 – 1794)**
“Suponho que tenho um certo número de quantidades x, y, z, ..., F; e que, para cada valor determinado de x, y, z, ..., etc, F tem um ou vários valores determinados: digo que F é uma função de x, y, z, ... Enfim, eu sei que quando x, y, z serão determinados, F o será também, quando mesmo eu não sabendo nem a maneira de expressar F por meio de x, y, z, nem a forma da equação entre F e x, y, z; eu saberei que F é função de x, y, z.”

**1797 LAGRANGE (1736 – 1813)**
«Chamamos função de um ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entram de uma maneira qualquer, imbricadas ou não com outras quantidades que olhamos como tendo valores dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim nas funções consideramos apenas as quantidades que supomos variáveis, sem nenhuma subordinação às constantes que podem estar aí imbricadas”
2. Para denominar uma função de uma só variável com x, nós faremos simplesmente preceder desta variável a letra ou característica f, ou F; mas quando quisermos designar a função já composta desta variável, como $x^2$ ou a+bx ou etc., fecharemos esta quantidade entre dois parênteses. Assim fx designara uma função de x, $f(x^2)$ f(a+bx), etc. designarão funções de $x^2$, de a+bx, etc. Para denomar uma função de duas variáveis independentes como x, y, nós escreveremos f(x,y), e também outras.”

**1797 LACROIX (1765 – 1843)**
« Toda quantidade cujo valor depende de uma ou de várias outras quantidades, é dita função dessas últimas, quer saibamos ou ignoremos por quais operações é preciso passar para retornar destas à primeira.”

**1821 CAUCHY (1789 – 1857)**
« Quando quantidades variáveis estão de tal forma ligadas entres elas que, o valor de uma delas sendo dado, possamos determinar o valor de todas as outras, concebemos como ordinárias essas diversas quantidades expressas por meio de uma dentre elas, que recebe então o nome de variável independente e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções desta variável.”

**1834 LOBATCHEVSKY (1792 – 1856)**
«A concepção geral exige que uma função de x seja considerada como um número que é dado para cada x e que muda gradualmente ao mesmo tempo que x. O valor da função pode ser dado seja por uma expressão analítica, seja por uma condição que fornece um meio para testar todos os números e selecionar um dentre eles, ou, finalmente, a dependência pode existir mas permanece desconhecida.”

**1851 RIEMANN (1826 – 1866)**
«Seja z uma quantidade variável, que toma pouco a pouco, todos os valores reais possíveis, então chamamos w uma função de z, se a cada um desses valores corresponde um único valor da quantidade indefinida w, e se z percorre continuamente todos os valores que se encontram entre dois valores constantes, w muda também continuamente, então chamamos esta função de contínua.”

**1870 HANKEL (1839 – 1873)**
«Dizemos que y é uma função de x se a cada valor de x de um certo intervalo corresponde um valor bem definido e sem que isto exija portanto que y seja definido sobre todo o intervalo pela mesma lei em função de x, nem mesmo que y seja definido por uma expressão matemática explícita de x.”

**1902 LEBESQUE (1875 – 1941)**
«Apesar de que, após Dirichlet e Riemann, concordamos geralmente em dizer que existe uma função quando existe uma correspondência entre um número y e números $x_1, x_2$,.... sem nos preocuparmos com o procedimento que ajuda a estabelecer esta correspondência, muitos matemáticos parecem considerar como verdadeiras funções somente aquelas introduzidas por correspondências analíticas. Podemos pensar que introduzimos talvez assim uma restrição bastante arbitrária; entretanto é certo que isso não restringe praticamente o campo das aplicações, porque sozinhas, as funções representáveis analiticamente, são efetivamente empregadas até o presente”.

**1939 BOURBAKI**
«Sejam E e F, dois conjuntos distintos ou não, uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita relação funcional em y ou relação funcional de E em F, se para todo x pertencente a E, existe um só y pertencente a F, que esteja na relação considerada com x. Damos o nome de função à operação que associa assim a todo elemento x de E, o elemento y em F que se encontra na relação da com x; dizemos que y é o valor da função para o elemento x, e que a função é determinada pela relação funcional considerada.”

**1927 WEYL** (1885 – 1955)
«Ninguém jamais soube explicar o que é uma função. Mas uma função f está definida se por um meio qualquer pudermos associar a um número a, um número b ... Dizemos então que b é o valor da função f para o valor a do argumento”.

A esta lista podemos acrescentar outras definições como aquelas de:
**D’ALEMBERT (Enciclopédia 1785)**
**DIRECHLET** (Sobre representação de funções quaisquer por série de senos e cossenos – 1837)
**DEDEKIND** (O que são e o que você deve pagar? – 1888)
**PEANO** (Sobre o conceito de número – 1891) e PEANO (Sobre a definição de função– 1911)
**S. Mac Lane** escreveu sobre o conceito de função (1986).

# A DIFICULDADE EM SE DEFINIR O QUE É UMA FUNÇÃO: UMA DISCUSSÃO SOBRE O ARTIGO DE MAC LANE

Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato
UFMS/INMA
soniaburigato@gmail.com

## RESUMO:

Neste texto discutimos a dificuldade em se definir um conceito como o de função. As argumentações são em torno das seis noções utilizadas ao longo dos anos para descrever o que era uma função apresentadas por Mac Lane em seu artigo. Esse autor traz sua opinião sobre a pertinência, ou não, dos argumentos de cada uma dessas noções, buscando dar uma possível resposta a questão apresentada no título do seu artigo: "*O que é uma função?*". Para essa discussão, introduzimos um exemplo atual da apresentação desse conceito proposta por um livro didático do ensino fundamental, bem como um dos principais problemas, evidenciados pelas pesquisas, na compreensão do que seja uma função. Em síntese, vimos como esse conceito ainda é de difícil definição. Seu estudo envolve diversas representações e, muitas vezes, o ensino acaba priorizando uma delas para o estudo com as funções. O que contribui para que persista, para alguns estudantes, a ideia de que uma função é uma fórmula.

**Palavras-chave:** Funções. Definições. Dificuldades.

## INTRODUÇÃO:

Neste artigo apresentamos uma discussão realizada na disciplina de Tópicos Especiais de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática sobre o conceito de funções. Este conceito se destaca pela sua importância no ensino de matemática desde a educação básica. Fato facilmente constatado se olharmos as orientações para o seu ensino como objeto de estudo nos programas de matemática para o ensino fundamental e também para o ensino médio. Isso se deve principalmente por ele ser um conceito com grande aplicabilidade tanto na matemática, como também nas outras áreas do ensino.

Em seu desenvolvimento histórico vemos que antes de ser o objeto matemático, como o conhecemos, ele era um conceito relacionado a problemas práticos. Particularmente, na física, encontramos diversos momentos em que o conceito de função foi utilizado para o estudo e desenvolvimento de conceitos físicos. Atualmente, vemos sua importância como ferramenta para resolver situações de diversas áreas, como: química, geografia, física, biologia, entre outras.

Nos documentos oficiais encontramos referências sobre essas relações com as outras áreas do ensino, como também na própria matemática. Vejamos como elas aparecem nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) que ainda estão em vigência; como também nas novas orientações que estão em fase de implantação, no caso a Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também **papel importante** para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Ge-

> ografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas [...]. (BRASIL, p.43-44, grifo nosso).

> Relações e inter-relações estão presentes em muitas situações reais nas quais se aplica a Matemática. As relações estão presentes em problemas que envolvem a proporcionalidade entre duas ou mais grandezas, escalas, divisão em partes proporcionais etc. que tratam da interdependência entre grandezas. Dessas relações, evolui-se para **a noção de função, uma noção integradora da Matemática**. (BRASIL, 2018, p. 521).

Esse papel integrador citado no BNCC se verifica também na graduação, momento em que o conceito de função é utilizado em cursos das mais diversas áreas, e não somente nas de exatas. Encontramos em cursos da área de humanas, como cursos de administração e de economia, o conceito de função sendo utilizado para compreensão de diversos fenômenos, por exemplo, o estudo de funções: lucro, custo e receita. Além disso, esse conceito é retomado para estudos posteriores de conceitos matemáticos mais avançados, em disciplinas como a de Análise nos cursos de Matemática.

Essas observações confirmam não somente a importância do conceito de função no ensino de matemática, mas também a preocupação na sua construção como objeto de estudo. Nesse aspecto, a aprendizagem desse conceito é considerada um ponto crucial a ser discutido e vem sendo um tema muito investigado. Diversos estudos vêm evidenciando como os alunos têm dificuldades em compreender o conceito de função (CARAÇA, 2003; LIMA, 2001; SEGADAS, 2016), citando casos em que os estudantes relacionam esse conceito como sendo: uma regra, uma representação gráfica ou uma fórmula. Consideram as formas de representações utilizadas para estudar aspectos do conceito de função como sendo o próprio conceito. Muitas vezes ao lidarem com alguma função particular eles não conseguem ver as relações envolvidas nessas diferentes representações da função dada.

Definir um conceito não é tarefa fácil, mas com relação ao conceito de função sabemos que seu desenvolvimento foi problemático inclusive entre os próprios matemáticos. De fato, encontramos no texto de Mac Lane exatamente essa questão: "*O que é uma função?*". O autor apresenta algumas ideias sobre funções e dependência funcional, em que podemos compreender como foi difícil definir este conceito com toda a sua complexidade.

Essa reflexão é extremamente importante para que o professor de matemática possa compreender todos os aspectos envolvidos na constituição do conceito de função. Principalmente para que ele possa pensar em como organizar a apresentação desse conceito ao estudante ao longo dos anos de ensino. Levando em consideração tanto a diversidade de ideias envolvidas nesse conceito, bem como as dificuldades que essas noções possam apresentar aos alunos.

O que nos remete a nossa problemática que é discutir "*O que é uma função?*" segundo as ideias propostas no texto de Mac Lane. Para isso, iniciaremos apresentando as seis possíveis respostas a essa questão juntamente com as opiniões dadas por Mac Lane a cada uma delas. Em seguida, selecionamos um livro didático do 9º ano do ensino fundamental como outra possibilidade para responder a essa questão; no caso a primeira definição de função proposta para educação básica. Buscando fazer uma discussão das ideias apresentadas por Mac Lane com o que é apresentado nesse exemplo que escolhemos, e o que vem sendo discutido pelas pesquisas.

## Texto de Saunders Mac Lane sobre funções

Ao buscar responder a questão "*O que é uma função*" Mac Lane discute seis noções para o conceito de função, enfatizando que são ideias úteis, mas que elas trazem noções imprecisas sobre esse conceito.

A primeira traz uma ideia já bastante conhecida de que: "A função é uma **fórmula** com a letra *x*. Quando *x* é substituído por um número, a fórmula produz um número, o valor da função para o dado argumento *x*." (1986, p. 126, tradução nossa). Para Mac Lane essa apresentação é pertinente para descrever as funções elementares, como: polinomiais, racionais algébricas, trigonométricas e exponenciais. Entretanto, para o autor essa noção não abrange as funções definidas por partes e, também, não é útil para descrever as noções de dependência funcional de uma quantidade variável na física, ou seja, nem toda função pode ser representada por uma fórmula.

Na segunda ideia a função é apresentada como sendo uma regra em que: "A variável *y* é uma função da variável *x* quando há uma **regra** que estabelece que para cada valor de x produz um correspondente valor de *y*." (1986, p. 127, tradução nossa). Essa noção atende o caso de uma função definida por partes, citada anteriormente. Mac Lane traz que essa descrição, apesar de poder ser uma generalização interessante ao favorecer o uso geral, causa dificuldade aos alunos. Afinal, o que é uma regra? Essa palavra, como também "corresponder" não são claras e, podem ser extremamente confusas para os estudantes.

A terceira ideia descreve uma função como um gráfico:

> A função é uma curva no plano (x, y), tal que cada linha vertical x = *a* encontra a curva em no máximo um ponto com coordenadas (a, b).

> Quando isso acontece, o número b é o valor da função no argumento a. Para outros argumentos a, a função é indefinida. (1986, p. 127, tradução nossa).

Mac Lane destaca alguns aspectos, como:

- Essa descrição tem problemas quando a função não é contínua, quando tem um salto de 0 para 1, ou quando as variáveis mudam de racional para irracional;
- Essa noção envolve uma noção não definida do que seja uma curva;
- Ela funciona bem para funções reais suaves, ou continuas;
- A ênfase está no aspecto geométrico.

A quarta descrição está relacionada à ideia de **dependência**: "Uma variável quantidade y é função de uma quantidade x, se e somente se, uma determinação do valor de x também fixa o valor de y, de modo que y depende de x." (1986, p. 127, tradução nossa). Mac Lane argumenta que é uma definição de físicos e que ela não é formal.

A tabela de valores é a quarta ideia, e traz que: "Uma função é determinada por uma **tabela de valores**, que opõe para cada entrada da primeira lista da variável quantidade x, lista o valor numérico correspondente para a segunda quantidade y." (1986, p. 127, tradução nossa). Segundo Mac Lane essa ideia foi inspirada nas tabelas dos logaritmos e nas tabelas trigonométricas, que são finitas, o que torna essa definição sem sentido, pois o que seria uma tabela de valores infinitos?

A última ideia utilizada se relaciona a sintaxe, em que:

> Uma função *f* em um conjunto *X* para todo conjunto *Y* é um símbolo *f* de forma que sempre que o termo *x* se apoia em um elemento *X*, então a cadeia de símbolos *fx* se apóia em um elemento de *Y*, o valor de *f* no argumento *x*. (1986, p. 127, tradução nossa).

Para Mac Lane essa ideia não apresenta o que é uma função, simplesmente descreve como utilizar os símbolos no estudo com as funções.

Mac Lane argumenta que essas ideias são imprecisas, mas são importantes para ilustrar os problemas que podemos encontrar na tentativa de se definir formalmente uma função. Pondera que podemos utilizar noções intuitivas úteis com exemplos de dependência de um item sobre o outro, encontrados nas atividades humanas e nas observações de fatos sobre fenômenos. São noções informais, mas favoráveis para o estudo sobre a dependência e funções.

Essa argumentação final de Mac Lane nos fez refletir em como essas noções que ele considera úteis aparecem no ensino atualmente. Diante disso, buscamos encontrar outra resposta para a questão inicial do texto de Mac Lane "*O que é uma função?*", mas sendo uma proposta utilizada no ensino atual. Escolhemos exemplificar com a apresentação da definição de função de um livro didático do 9º ano do ensino fundamental, que discutimos em seguida.

## A definição de função apresentada em um livro didático relacionada às ideias discutidas por Mac Lane em "*O que é uma função?*"

O artigo de Mac Lane (1986) propõe uma discussão muito pertinente, já que nem sempre conseguimos compreender e refletir sobre como é problemático definir um conceito como o de função. Por exemplo, se fizermos a questão: "*O que é uma função?*" para professores de matemática, certamente todos apresentarão uma definição, mas também é provável que elas sejam diferentes. Sendo diferentes, provavelmente envolvem aspectos relacionados ao conceito que também podem suscitar compreensões diferentes, e talvez problemáticas ao aluno. Como esse conceito é trabalhado ao longo do ensino, os estudantes terão vários momentos que lidar com a definição de função conforme esse conceito for sendo retomado.

A primeira vez que o conceito de função aparece formalmente definido é no último ano do ensino fundamental, no caso no 9º ano. Nos primeiros anos da educação básica são apresentadas inicialmente algumas ideias sobre relações em situações práticas. O objetivo é trabalhar intuitivamente com esse conceito, preparando para sua apresentação posteriormente. Geralmente a definição é inserida em situações resolvidas, nas quais vão sendo discutidas as resoluções, buscando trabalhar com a ideia de relação e também com algumas representações de função.

Essa abordagem é uma das indicações que aparecem no novo documento que está sendo implementado para orientar o ensino médio (BRASIL, 2018). Para exemplificarmos, como o ensino vem trabalhando, escolhemos apresentar uma situação proposta por um livro didático para estudo do conceito de função. É um livro que passou pela avaliação do Programa Nacional do Livro Didático e que tem um capítulo dedicado ao estudo de funções, o autor inicia com a seguinte situação:

> A empresa de TV a cabo cobra de seus assinantes uma mensalidade de R$ 95,00 e mais R$ 5,00 por programa extra comprado. Desse modo, o valor a ser pago (preço) no final de cada mês depende do número de programas comprados pelo assinante. (BIANCHINI, 2015, p. 172)

Em seguida o autor traz que irá organizar um quadro buscando mostrar a relação existente entre o número de programas extras comprados e os valores a serem pagos; depois já começa a inserir a notação para uma função em termos de $x$ e $y$ e a sua lei de formação. A representação gráfica de uma função é proposta ao final de uma lista de atividades para o aluno trabalhar com esses aspectos desenvolvidos inicialmente. Vejamos na Figura 1 como o livro desenvolve essa situação até apresentar a definição de função.

**Figura 1.** Situação apresentada pelo livro didático. (BIANCHINI, 2015, p. 172-173)

| Número de programas extras | Preço (em real) |
|---|---|
| 0 | 95 |
| 1 | $95 + 1 \cdot 5$ |
| 2 | $95 + 2 \cdot 5$ |
| 3 | $95 + 3 \cdot 5$ |
| 4 | $95 + 4 \cdot 5$ |

Indicando por $x$ o número de programas extras comprados e por $y$ o preço a pagar, podemos relacionar essas duas grandezas pela sentença:

$$y = 95 + x \cdot 5 \text{ ou } y = 95 + 5x$$

Note que, a cada valor atribuído à letra $x$, obtemos **um único** valor para $y$, por exemplo:

- para $x = 0$, temos:

$$y = 95 + 5 \cdot 0 = 95 + 0 = 95$$

Isso significa que, quando não se compra programa extra, o preço é R$ 95,00.

- para $x = 1$, temos:

$$y = 95 + 5 \cdot 1 = 95 + 5 = 100$$

Ou seja, com a compra de 1 programa extra, o preço sobe para R$ 100,00.

- para $x = 2$, temos:

$$y = 95 + 5 \cdot 2 = 95 + 10 = 105$$

Ou seja, com a compra de 2 programas extras, o preço é R$ 105,00.

Nesse caso, podemos dizer que o preço a pagar ($y$) é obtido em **função** do número de programas extras comprados ($x$).

> Dizemos que a grandeza $y$ é **função** da grandeza $x$ se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de $x$, exista um único valor de $y$.

Na função que relaciona o número de programas extras comprados ($x$) e o preço a pagar ($y$), escrevemos a sentença $y = 95 + 5x$. Nesse caso, as letras $x$ e $y$ são chamadas de **variáveis** e a sentença $y = 95 + 5x$ é chamada de **lei da função**.

Em geral, dizemos que $y$ é uma função de $x$ por $y = f(x)$ (lemos: $y$ é igual a $f$ de $x$). Então, para o caso em que a lei da função é $y = 95 + 5x$, podemos escrever $f(x) = 95 + 5x$.

Esse trabalho inicial será importante para que o aluno desenvolva a habilidade desejada nos anos posteriores de estudo indicadas nas Bases Nacionais Comuns para o ensino médio:

> Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios e validade, imagem, crescimento e decrescimento. (BRASIL, 2018, p. 531).

Retomando as ideias discutidas por Mac Lane podemos observar que essa apresentação da definição de função contempla a noção de fórmula discutida por ele. De fato, por exemplo, esse livro ao trazer a expressão $y = 5x + 95$ em que a substituição do número de programas extras comprados obtém o valor que deverá ser pago. Essa ideia é bastante trabalhada no ensino, mas o problema está em dar muita ênfase somente a esse aspecto. E lamentavelmente, na maioria das vezes, é isso mesmo que vem acontecendo. Segundo Lima (2001), a maioria dos livros didáticos para o ensino médio define função por meio de fórmulas.

Essa ênfase acaba por comprometer a compreensão do que seja uma função. Encontramos diversos estudos que mostram que muitos alunos acabam por compreender a noção de função como simplesmente o estudo de uma fórmula para se encontrar alguns valores. Segundo Sierpinska, esse problema é sério à medida que para alguns estudantes "Apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas de funções." (SIERINSKA, 1992 apud: SEGADAS, 2016, p.116). Sagadas (2016)enfatiza que esse caso:

> [...] é fortemente conectado com a dominância de uma abordagem analítica em detrimento de uma abordagem gráfica, o que irá se manifestar didaticamente em dificuldades posteriores de conectar diferentes representações de funções. (SAGADAS, 2016, p. 116).

A representação gráfica também aparece como uma noção muito problemática para o aluno ao lidar com o conceito de funções. Em Bianchini também encontramos a ideia de uma função descrita como um gráfico, isso ocorre após o livro fazer uma discussão sobre a representação algébrica de uma função, das ideias de relação e dos elementos que envolvem uma função. Para discutir a ideia de gráfico, esse autor inicia com a função $y = x + 1$ especificando que os valores do $x$ são números do conjunto dos números inteiros. Vejamos na Figura 2, como o livro apresenta.

**Figura 2.** Apresentação da representação gráfica de uma função. (BIANCHINI, 2015, p. 179)

Considere a função *f* dada pela lei $y = x + 1$, em que *x* representa um número inteiro qualquer. Vamos construir seu gráfico.

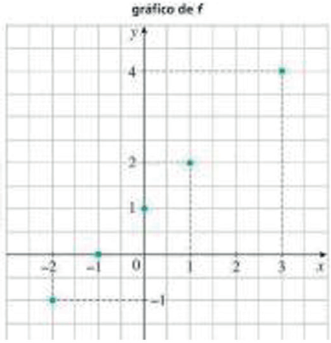
Para isso, atribuímos valores a *x* e calculamos os valores de *y*, determinando os pares ordenados correspondentes. Esses dados foram organizados no quadro ao lado.

Para representar graficamente essa função, vamos marcar, em um plano cartesiano, os pontos determinados por esses pares ordenados. Os pontos marcados são apenas alguns dos pontos do gráfico dessa função, pois existem infinitos pares ordenados $(x, y)$, que satisfazem a lei $y = x + 1$, sendo *x* um número inteiro.

**Quadro com alguns pontos do gráfico de *f***

| x | $y = x + 1$ | (x, y) |
|---|---|---|
| −2 | $y = -2 + 1 = -1$ | $(-2, -1)$ |
| −1 | $y = -1 + 1 = 0$ | $(-1, 0)$ |
| 0 | $y = 0 + 1 = 1$ | $(0, 1)$ |
| 1 | $y = 1 + 1 = 2$ | $(1, 2)$ |
| 3 | $y = 3 + 1 = 4$ | $(3, 4)$ |

**gráfico de f**




Note que há uma reta que passa por esses pontos, porém nem todos os pontos da reta são pontos do gráfico. Por exemplo, no gráfico não há um ponto de abscissa 0,5, pois 0,5 não é um número inteiro.

Bianchini (2015) escolhe trabalhar com essa função particular para fazer o estudo da representação gráfica relacionado a uma tabela de valores, no caso ele denomina como quadro, iniciando com o conjunto dos números inteiros. Essa escolha é pertinente, pois muitos alunos costumam achar que sempre podem "ligar" os pontos encontrados nas tabelas e representados no plano cartesiano para fazer a representação gráfica de uma função, como se todas as funções fossem contínuas. Nesse aspecto o livro traz uma observação interessante ao dizer que existe uma reta que passa pelos pontos encontrados, mas que nem todos os pontos da reta são pontos do gráfico da função.

O autor em seguida discute a representação gráfica da mesma função para o conjunto dos números racionais, podemos ver como ele apresenta na Figura 3.

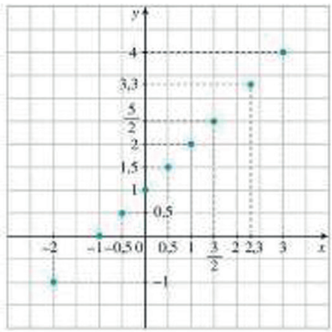
**Figura 3.** Representação gráfica de uma função do livro didático. (2015, p. 179)

Considere agora uma função $g$ dada pela mesma lei da função $f$, $y = x + 1$, porém com $x$ representando um número racional qualquer.

Como todo número inteiro é também um número racional, todos os pontos do gráfico de $f$ também são pontos do gráfico de $g$. Além desses pontos, podemos obter outros. Veja:

**Quadro com alguns pontos do gráfico de g**

| $x$ | $y = x + 1$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| −0,5 | $y = -0{,}5 + 1 = 0{,}5$ | $(-0{,}5; 0{,}5)$ |
| 0,5 | $y = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$ | $(0{,}5; 1{,}5)$ |
| $\frac{3}{2}$ | $y = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ | $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ |



Bianchini escolheu fazer a representação de alguns pontos no plano cartesiano e também apresentou uma tabela com alguns valores. Em seguida, são feitas novamente observações sobre os pontos representados no plano cartesiano, vejamos na Figura 4.

**Figura 4.** Observações do livro didático sobre uma representação gráfica de uma função (2015, p. 180).

Também neste caso não foram marcados todos os pontos do gráfico de $g$, pois existem infinitos pares ordenados $(x, y)$, sendo $x$ um número racional, que satisfazem a lei $y = x + 1$.

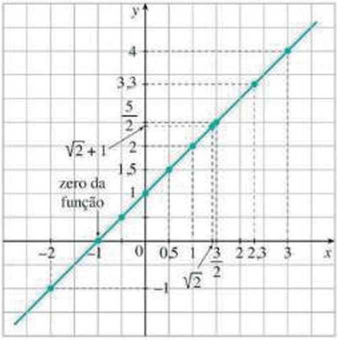
Novamente, é possível perceber que há uma reta passando pelo gráfico da função $g$. Embora haja nesse gráfico infinitos pontos dessa reta, nem todos os pontos dela pertencem ao gráfico de $g$, como o ponto de abscissa $x = \sqrt{2}$, pois $\sqrt{2}$ não é um número racional.

**OBSERVAÇÃO**

- O termo *infinitos* não significa *todos*, por isso não podemos traçar a reta que passa pelos pontos obtidos no gráfico da função $g$. Imagine esse gráfico como "uma reta com buracos".

Ao final o livro faz a discussão da representação gráfica da mesma função, mas sendo definida para números do conjunto dos números reais, Figura 5.

**Figura 5.** Representação de uma função do livro didático. (BIANCHINI, 2015, p. 180)




Os pontos obtidos para os gráficos das funções $f$ e $g$ também são pontos do gráfico de $h$, pois os números inteiros e os números racionais são números reais. Além desses pontos, devemos considerar aqueles cujos pares ordenados $(x, y)$ satisfazem a lei $y = x + 1$, sendo $x$ um número irracional, como $x = \sqrt{2} \simeq 1{,}4$, ou seja, $(\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$.

Trazendo para este final a observação de que agora é possível traçar a reta que passa pelos pontos obtidos, pois esta função está definida para os valores de x do conjunto dos números reais. Esse trabalho inicial com a construção da representação geométrica de uma função é importante para que o aluno perceba a importância de observar os conjuntosnuméricos no momento de construir a representação geométrica de uma função.

De fato, diversos estudos mostram que os alunos têm muita dificuldade em trabalhar com funções definidas em conjuntos discretos, como também com função definidas por partes no conjunto dos números reais (SAGADAS, 2016). Geralmente ao fazerem a representação gráfica dessas funções eles acabam ligando os pontos do gráfico da função, buscando deixar ao final uma representação gráfica contínua, isso ocorre mesmo em funções definidas para o conjunto dos números reais, mas que são descontínuas (NASSER, SOUZA e TORRACA, 2106).

Além disso, a discussão da representação geométrica de uma função juntamente com a sua definição é extremamente importante para compreensão de que esse conceito pode ser representado de maneiras diferentes e que cada representação favorece aspectos diferentes desse mesmo conceito.

> O conceito de função permite estabelecer uma correspondência entre as leis matemáticas e as leis geométricas, entre as expressões analíticas e os lugares geométricos (conjunto de todos os pontos que gozam de uma mesma propriedade). Para estabelecer essa correspondência não há mais que, a cada expressão analítica, fazer corresponder aquele lugar que define a mesma função que ela. (CARAÇA, 2003, p.133).

Desse modo, o aluno poderá compreender que se tratam do mesmo conceito representado de modo diferente e, talvez assim, evitar que se tenha uma ideia equivocada de que uma função se resume simplesmente ao uso de uma fórmula. Entretanto, definir uma função não é tarefa fácil, nessa definição proposta por esse livro vimos que são trabalhas as ideias discutidas por Mac Lane e que o autor buscou relacioná-las. Todavia, se pensarmos separadamente nas ideias de Mac Lane e somente na definição dada no livro, no caso: "Dizemos que a grandeza $y$ é função da grandeza $x$ se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de $x$, exista um único valor de $y$." (BIANCHINI, 2015, p. 173). Vemos que ela, analisada de modo isolado, também tem problemas se pensarmos no que significa para os alunos "grandeza" e "corresponder". No próximo exemplo que o livro apresenta ele utiliza a ideia de correspondência entre elementos de uma situação, mas não encontramos nenhuma discussão sobre o que seja grandeza nos capítulos anteriores, então não sabemos se ele fez uma discussão sobre o que está considerando como grandeza.

## Considerações finais

Neste artigo procuramos discutir o texto de Mac Lane buscando mostrar como é difícil definir o conceito de função. Vimos que a tentativa de descrever o comportamento desse conceito com toda a sua complexidade, não é tarefa fácil e pode fazer com que algumas escolhas acabem por priorizar alguns aspectos, como no caso da expressão algébrica, em que o aluno tenha como compreensão que função é simplesmente uma fórmula para se obter valores específicos. Sabemos que essa dificuldade se dá pela ênfase que o ensino vem dando ao estudo da expressão analítica de uma função, nesse aspecto os autores de livros didáticos estão buscando modificar essas apresentações, como vimos no exemplo apresentado. Entretanto, são práticas que foram mantidas por muitos anos em parte em função de como esse conceito se desenvolveu. Nesse sentido Caraça argumenta que ao estudar um texto o leitor algumas vezes precisará ser indulgente com o autor:

> "O matemático é um ser humano, com os mesmos defeitos e as mesmas limitações dos seres humanos. Um desses defeitos é a indolência que o faz sacrificar à rotina; houve um tempo – vai para o século e meio ou dois – em que a noção função, ainda que não suficientemente depurada, se assimilava inteiramente a expressão analítica; de então para cá, ficou a mesma maneira de dizer, que não corresponde hoje ao estado de evolução do conceito. (CARAÇA, 2003, p. 123).

Essa indulgência não deve ser confundida com concordar, mas sim estar atento que muitos autores podem fazer escolhas que consideram pertinentes, mas que nem sempre são adequadas para que o aluno compreenda o conceito de função. Cabendo ao professor fazer a escolha do material mais adequado para que o estudante consiga compreender esse conceito ao longo do ensino. É importante que o professor tenha a sua definição do conceito, sabendo tanto dos aspectos matemáticos envolvidos, das orientações dos programas de ensino, como das dificuldades no desenvolvimento desse conceito até chegarmos ao que é apresentado atualmente.

# Referências:


BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini – 9º ano**. São Paulo, editora Moderna, 2015.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Parte III. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM)**, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf Acesso em: 05/10/2018.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Base Nacional Comum Curricular (BNCC) 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br Acesso em: 05/10/2018.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa, Portugal. Livraria: Gradiva, 2003.

LIMA, E. L. (Editor). **Exame de Textos: Análise de Livros de matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001

MAC LANE, S. **Mathematics, Form and Function**. Springer, 1986, p. 126-128.

# DISCUSSÃO DE DUAS DEFINIÇÕES FORMAIS DE LIMITE DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL NUM PONTO A COM O GEOGEBRA

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
INMA/UFMS
magda.mongelli.ufms@gmail.com

## RESUMO:

Este artigo surge com o objetivo de discutir duas definições formais de limite de funções de uma variável real num ponto a. As duas definições em questão já foram discutidas com um enfoque matemático no Capítulo 4 e se referem às definições 4.1 e 4.2. Na verdade, o que vamos fazer é desenvolver uma maneira de abordar estas duas definições de forma intuitiva e formal com o uso do *applet geogebra*, o que nos permitirá ter uma visão clara das sutilezas dessas duas definições através de tabelas de aproximações pela direita e pela esquerda de *a*, com uma visão dinâmica possibilitada pelo *applet*. Ao mesmo tempo vamos discutir a continuidade e descontinuidade de uma função no ponto a, através da análise de gráfico de funções desenhadas no *geogebra*, em relação ao conceito de limite, bem como faremos uma discussão formal das duas definições com o estudo de *épsilon* e *delta*, de maneira interativa e dinâmica. Isto vai permitir a interação e a percepção de que para cada *épsilon* escolhido é possível encontrar um *delta*. Finalmente, o trabalho com o *geogebra* permite o estudo de várias representações que são fundamentais para a formação do conceito intuitivo e formal de limite e do entendimento das duas definições a serem discutidas.

**Palavras-chave:** Limite; *Geogebra*; Definição Formal; Tabelas; Gráficos.

# 1. INTRODUÇÃO:

No ensino, o conceito de limite de funções aparece na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I em diversos cursos do Ensino Superior, como por exemplo, Matemática, Física, Engenharia e muitos outros. Nos livros didáticos do Ensino Superior, o limite é uma maneira efetiva de avaliar o comportamento de uma função numa vizinhança de um ponto (que pode ou não pertencer ao seu domínio). Em geral, essa ideia é formulada nesses livros como uma definição formal. Estas definições formais nos livros didáticos podem ser apresentadas sobre uma dessas formas.

**Definição 1:** Dizemos que uma função $f$, definida em $E \subset \boldsymbol{R}$, tem um limite $L \in \boldsymbol{R}$ no ponto a se:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, $\forall\, x \in$ , tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, e escrevemos $L = \lim_{x \to a} f(x)$

**Definição 2:** : Dizemos que uma função $f$, definida em $E \subset \boldsymbol{R}$, tem um limite $L \in \boldsymbol{R}$ no ponto $a$ se:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ ($\forall\, x \in E$, $x \neq a$), tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, e escrevemos $L = \lim_{x \to a, x \neq a} f(x)$.

Apesar de já termos discutido matematicamente essas duas definições no Capítulo 4, nossa preocupação agora é com o entendimento dos conceitos envolvidos nessas duas definições e de como podemos abordá-las em sala de aula. Lembrando, que os alunos apresentam dificuldades no entendimento do conceito formal de limite e que muitos professores apenas dão ênfase na parte procedimental, o que é importante, mas não é suficiente para o entendimento do conceito. Assim, ampliaremos o estudo do conceito de limite utilizando o *geogebra*, passando da ideia intuitiva até a formalização do conceito. Que o ato de conceituar preceda ao ato de definir. Especificamente, se por um lado conceituar a definição de limite, é uma atividade de compreensão do objeto em estudo e da criação subjetiva de significados pelo aluno, por outro lado definir formalmente limite é manipular símbolos, registros, sinais da linguagem matemática, na qual está imersa o objeto, o conceito em tratamento.

O foco desse trabalho é o estudo de duas definições de limite num ponto $a$ descritas anteriormente com o *applet* geogebra, pois de acordo com Stewart (2009), o uso de ferramentas tecnológicas tais como computadores e calculadoras gráficas, é de suma importância para se entender com clareza os conceitos de limites. Dessa forma, nossa discussão tem o seguinte formato:

• As duas definições serão discutidas de forma intuitiva com o uso de tabelas de aproximações pela direita e pela esquerda de um ponto $a$, e por meio de gráficos.

• As duas definições serão discutidas por meio da continuidade e descontinuidade usando o conceito do limite de uma função num ponto $a$.

• As duas definições serão discutidas de maneira formal num ambiente dinâmico como forma de olhar as regiões de possíveis escolhas para o *épsilon* e consequentemente encontrar o *delta*.

Para um melhor entendimento do nosso objetivo, vamos estudar os itens listados anteriormente ligados às duas definições, utilizando três funções distintas que podem estar definidas no ponto a ou não. Isto é, essas duas definições serão investigadas de forma intuitiva e formal, utilizando vários tipos de representações: estáticas e dinâmicas utilizando o *geogebra* na apropriação do conceito de limite de função num ponto $a$. As funções que abordaremos neste texto, para a discussão dessas duas definições de limite no ponto $a = 1$, são as seguintes:

• $f(x)=x+2$, para $x \in \boldsymbol{R}$;

- $g(x)=x+2$, para $x \neq 1$
- $h(x) = \begin{cases} x+2, para\ x \neq 1 \\ 2, para\ x = 1 \end{cases}$

O conteúdo deste trabalho se desenvolve da seguinte maneira. No parágrafo 2, vamos discutir a forma intuitiva das duas definições para as três funções *f*, *g* e *h* com o auxílio do *geogebra*. Também vamos mostrar a ligação entre o limite das funções *f*, *g* e *h* no ponto *a=1* com os conceitos de continuidade e descontinuidade. O parágrafo 3 é reservado para a discussão formal de limite no ponto *a=1* das duas definições usando *épsilon* e *delta* com o apoio do *geogebra*. No parágrafo 4, fazemos uma discussão dos estudos feitos nos parágrafos anteriores com as funções *f*, *g* e *h*, culminando nas duas precedentes definições dadas na introdução do texto, isto é, Definição 1 e Definição 2. Com isso chegamos à formulação geral dessas duas definições de limite finito no ponto a para uma função *f* qualquer. No parágrafo 5, fazemos uma discussão geral com uma conclusão e perspectivas.

## 2. Discutindo as duas definições de forma intuitiva

### 2.1 Tabela de aproximação pela direita e pela esquerda para o estudo de limite de função finito num ponto *a*

Ao estudarmos o limite de uma função, a primeira coisa a se pensar é na sua condição de existência, isto é, estabelecer o domínio da função e se o ponto a pertence ou não ao domínio da função. Em alguns casos precisamos saber como a função se comporta quando a variável *x* está muito próxima de um ponto *a* que não pertence ao seu domínio. Para isto, devemos estudar a teoria de limites, a qual permite a análise de uma função em uma vizinhança do ponto *a*, sem se preocupar com o valor da função neste ponto. A análise de tabelas de aproximações é importante para o entendimento do conceito intuitivo de limite finito de funções num ponto *a*.

Para nosso trabalho prático com o *geogebra*, queremos evidenciar os seguintes pontos matemáticos. A primeira função $f$ considerada está definida para todo $x$ real e em particular está definida no ponto $a=1$ e se trata de uma função continua nesse ponto. A segunda função g está definida para todo $a \neq 1$, isto é, não está definida no ponto $a=1$ e se trata de uma função que apresenta descontinuidade no ponto $a=1$. A terceira e última função $h$, assume o valor 2 para $a=1$ e h(x) = x+2 pode assumir qualquer valor desde que $a \neq 1$, isto quer dizer que o ponto (1, 3) não pertence ao gráfico da função e ela é descontínua neste ponto.

Através da análise de tabelas e de gráficos desenvolveremos o conceito intuitivo de limite, onde atribuindo valores para x nas proximidades do ponto $a=1$ (à direita e à esquerda), analisaremos o que acontece com a função nas proximidades deste ponto.

Na sequência do texto, vamos discutir as três formas citadas anteriormente, a saber: forma intuitiva de limite no ponto $a=1$ com tabelas e gráficos; a continuidade de descontinuidade no ponto $a=1$ e a definição formal de limite no ponto $a=1$ com épsilon e delta.

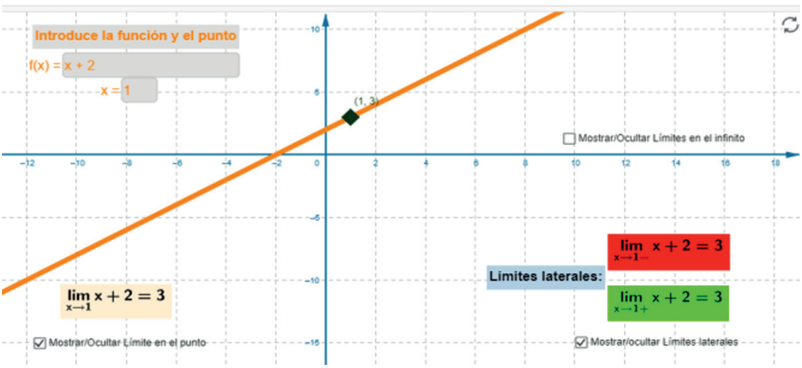
#### 2.1.1 Caso I: O estudo da função $f(x)=x+2$, $x \in R$, na vizinhança do ponto $a=1$ pela direita e pela esquerda

Para analisar o comportamento da função $f$, na proximidade do ponto $a=1$, vamos utilizar o *applet* elaborado por Luis M. I. Albarrán disponibilizado no site: https://www.geogebra.org/m/P5WR9dHt[1]. Este *applet* vem de encontro no estudo do conceito de limite de função num ponto, pois apresenta duas interpretações visuais: uma gráfica e uma por tabelas, como podemos observar na Figura 1. Neste primeiro momento vamos discutir as duas primeiras tabelas, pois nosso estudo se trata apenas de limite finito.

[1] https://www.geogebra.org/m/P5WR9dHt

FIG. 1: Estudo da função f com o *applet*

| x | y | x | y | x | y | x | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.9 | 2.9 | 1.1 | 3.1 | -10 | -8 | 10 | 12 |
| 0.99 | 2.99 | 1.01 | 3.01 | -100 | -98 | 100 | 102 |
| 0.999 | 2.999 | 1.001 | 3.001 | -1000 | -998 | 1000 | 1002 |
| 0.9999 | 2.9999 | 1.0001 | 3.0001 | -10000 | -9998 | 10000 | 10002 |
| 0.99999 | 2.99999 | 1.00001 | 3.00001 | -100000 | -99998 | 100000 | 100002 |



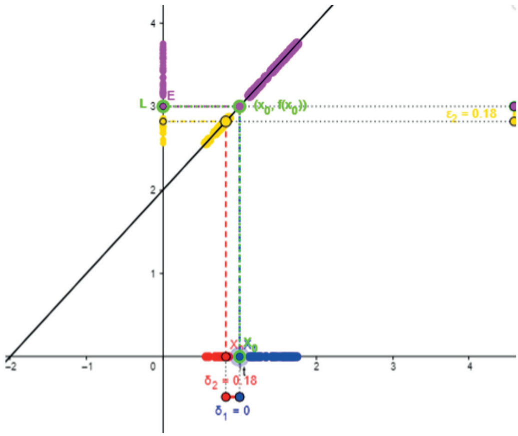

Fonte: Autor

A utilização de tabelas de aproximações serve para aproximar o valor da imagem de uma função (se existir) quando a variável x se aproxima de um determinado ponto *a*. O gráfico e a tabela mostram o comportamento da função $f(x)= x+2,\ x \in R$, nas proximidades do ponto $a=1$, isto é, para valores de x à esquerda e à direita de $a=1$.

Vamos analisar os valores da Tabela Rosa. Inicialmente, consideremos a primeira coluna onde foram atribuídos valores para *x*, valores cada vez menores que 1 e cada vez mais próximos de 1, o que implicou na segunda coluna da Tabela Rosa, onde para cada um desses valores de *x* dado, obtivemos um valor para $f(x)=x+2$ e percebemos que quanto mais próximo de $a=1$ estamos, a função vai ficando cada vez maior e se aproximando de três. Enquanto isso, para a coluna 1 da Tabela Verde, atribuímos valores para *x*, um pouquinho maior que 1, mas cada vez chegando mais próximo de 1, para esses valores de x atribuídos, os valores da função $f(x) = x+2$, vai se aproximando de 3.

Podemos ver isto, de uma forma diferente e interativa, utilizando o *applet* disponibilizado em http://geogebra.nasnuvens.net.br/delta-e-epsilon/limite-de-funcoes/[2], como na Figura 2. Quando o $x$ representado pela cor vermelha vai de aproximando de $a=1$ pela esquerda, os valores de $f(x)$ representado pela cor amarela vai se aproximando de 3. Quando o $x$ representado pela cor azul vai se aproximando cada vez mais de $a=1$ pela direita, os valores de $f(x)$ representado pela cor rosa vai se aproximando de 3.

FIG. 2: Estudo da função f com o applet na vizinhança do ponto a=1 pela direita e pela esquerda




Fonte: Autora

A Tabela e o *Applet* são importantes na verificação do que acontece com os valores $f(x)$ da função quando os valores de $x$ se aproximam de $a=1$, quer seja pela direita ou quer seja pela esquerda do ponto $a=1$. Com isto, concluímos que quando $x$ tende a $a=1$ pela direita ($x \to 1^{+}$)os valores da função tende a 3, o mesmo acontecendo quando x tende a $a=1$ pela esquerda ($x \to 1^{-}$) os valores da função tende a 3. Podemos passar da linguagem verbal para a linguagem matemática da seguinte maneira:

[2] http://geogebra.nasnuvens.net.br/delta-e-epsilon/limite-de-funcoes/

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$, traduzida da leitura da Tabela Rosa,

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$, traduzida da Tabela Verde,

onde $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ são os limites laterais à esquerda e à direita da função *f* no ponto *a=1*. De fato, podemos avançar um pouco mais no nosso estudo e dizer que $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3$. Observamos também, com ajuda do gráfico, que o valor da função *f(x)= x+2* no ponto *a=1*, assume o valor 3, isto é, *f(1)=3*.

De maneira geral, o limite de uma função *f* quando *x* tende ao ponto a existe e é igual a determinado número *L* se:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$

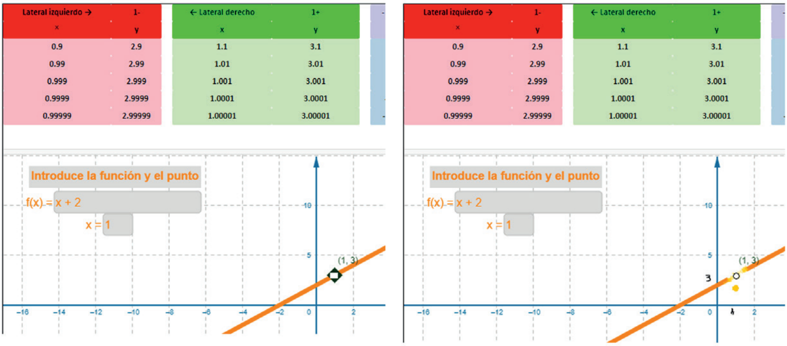
#### 2.1.2 Caso II: O estudo das funções *g(x)=x+2, x≠1*, e *h(x)= x+2* para *x≠1 e h(1)=2* na vizinhança do ponto *a=1* pela direita e pela esquerda

Utilizando o *applet*[3] (https://www.geogebra.org/m/P5W R9dHt) vamos estudar as tabelas das funções *g* e *h* que aparecem na Figura 3. Tanto para a função *g*, quanto para a função *h*, quando os valores de *x* se aproximam de *a=1*, quer seja pela direita ($x \to 1^+$) ou quer seja pela esquerda ($x \to 1^-$). Os valores da função *g(x)* tende a 3 e os valores da função *h(x)* também.

O mesmo é comprovado nas Figuras 3 e 4.

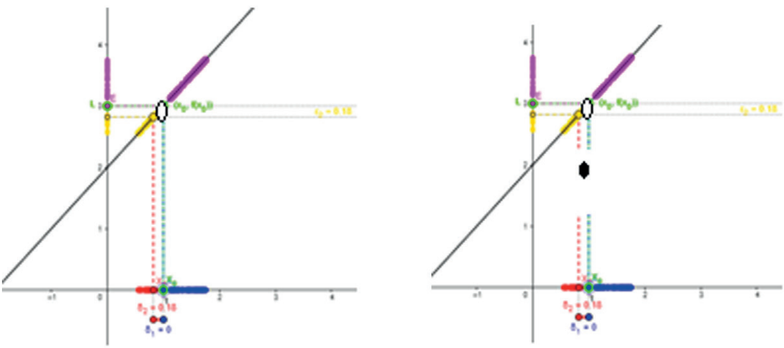
[3] https://www.geogebra.org/m/P5WR9dHt

FIG. 3: Estudo das funções g e h com o *applet*




Fonte: Autora

FIG. 4: Estudo das funções g e h com o *applet*



Fonte: Autora

Concluímos que:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 3\ .$$

E da mesma maneira:

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 3$$

Observamos que para a função $g$ os limites laterais existem e são iguais, mas a função g não é definida no ponto $a=1$. Já para a função $h$ os limites laterais existem e são iguais, mas o valor da função no ponto $a=1$ é diferente do valor dos limites laterais, isto é, $h(1)=2$ é diferente de 3, que é o valor assumido pelos limites laterais. Um fato importante de ser colocado aqui é que a função $f$ é definida no ponto $a=1$, com $f(1)=3$ e que os limites laterais são iguais a $f(1)=3$.

## 2.2 Continuidade, descontinuidade e limite de uma função no ponto *a=1*

Vamos analisar o comportamento das mesmas funções $f$, $g$ e $h$, através de seus gráficos, nas proximidades do ponto $a=1$. Sabemos do item 2.1 que existe o $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ , $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$ e $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$. Vamos conectar este fato com o conceito de continuidade e descontinuidade das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, usando as tabelas e os gráficos dessas funções.

### 2.2.1 Continuidade da função f no ponto *a=1*

Observando o gráfico da Figura1, podemos ver que a função é definida para todo $x \in \boldsymbol{R}$ e em particular é definida no ponto $a=1$. Seu gráfico não apresenta "interrupções" ou "buracos" e o ponto (1,3) pertence ao gráfico da função $f$. Sabemos que $f(1)= 3$ e do item anterior que: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

Neste caso, dizemos que a função $f$ é contínua no ponto $a=1$. Ou seja, para que uma função $f$ seja contínua em um ponto $x=a$ é necessário que a função esteja definida em $a$ e que os valores de $f(x)$, para $x$ próximos de $a$, estejam próximos de $f(a)$. Definindo formalmente: Uma função f é contínua no ponto a se:

(a) Existe $f(a)$

(b) Existe $\lim_{x\to a} f(x)$;

(c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Logo, nossa função estudada $f(x) = x+2$, $x \in \boldsymbol{R}$, é continua no ponto *a=1.*

### 2.2.2 Descontinuidade das funções *g* e *h* no ponto *a=1*

As funções apresentadas na Figura 3 não estão definidas no ponto *a=1.* Ao analisar o comportamento destas funções nas vizinhanças do ponto *a=1,* do item 2.1 tiramos que:

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1} h(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = 3$$

Na Figura 3, visualmente percebemos que não são funções contínuas no ponto *a=1,* pois visualmente os gráficos dessas funções apresentam um "buraco" no ponto (1,3).

Se uma função não é contínua em um ponto *a,* dizemos que ela é descontínua neste ponto. De fato, a primeira função *g* não assume o valor 3 no ponto *a=1,*e também não está definida neste ponto, mesmo assim os limites laterais são iguais, isto é, $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = 3$ e consequentemente existe $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$. A segunda função *h* assume o valor 2 no ponto *a=1* e o $\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^-} h(x) = 3$ e portanto a função *h* é descontínua no ponto *a=1.* Consequentemente vemos que as duas funções *g* e *h* não estão definidas no ponto *a=1,* mas os limites laterais assumem valores iguais e com isto existe o limite da função no ponto *a=1.*

Podemos agora definir formalmente a continuidade de uma função *f* num subconjunto E de R. Vemos no Capítulo 1, parágrafo 1.2.2, que os intervalos têm um papel importante no estudo das funções, e no Capítulo 3, parágrafo 3.2 os intervalos são fundamentais para o estudo de limite. Assim, vamos trabalhar com as funções definidas sobre os intervalos, para estudar a continuidade e descontinuidade de uma função sobre um intervalo.

> *Uma função f é dita contínua em um intervalo aberto (a, b) se for contínua em todos os valores de x contidos neste intervalo. E f é dita contínua no intervalo fechado [a, b] se for contínua no intervalo aberto (a, b) e, além disso,* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *e* $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Observamos que as funções *g* e *h* da Figura 4 são contínuas em todos os pontos do domínio, com exceção do ponto *a=1*, e vemos claramente que o ponto $(1, f(1))$, não pertence ao gráfico da função f(x).

Evidenciamos que o tratamento geométrico (gráficos) e algébricos (tabelas) nos estudos das funções *f*, *g* e *h*, favorecem a um melhor entendimento do conceito intuitivo de limite. Todas as discussões feitas até aqui são base para chegarmos a uma definição formal de limite de função num ponto a. Mas antes precisamos elucidar a relação existente entre o *épsilon* (ε) *e o delta* (δ) da definição de limite.

Em conclusão deste parágrafo, podemos dizer que temos uma ilustração prática com tabelas e gráficos do conceito de limite discutido no Capítulo 4 com as duas definições formais com *épsilon* e *delta*. Isto é, de maneira experimental com as tabelas e os gráficos observamos que para a primeira definição (Definição 1), quando a função está definida no ponto *a*, usando o conceito de limite, a função é necessariamente contínua. Mas para a segunda definição (Definição 2), a função *g* não é definida no ponto *a=1*, mas tem limites laterais nesse ponto, nesse caso a função é descontínua no ponto *a=1*. De maneira semelhante, a função *h* é definida no ponto *a=1*, mas os limites laterais são diferentes de *h(1)=3*. Este fato, é ligado a descontinuidade das duas funções no ponto *a=1*.

Vamos estudar as duas definições de maneira formal usando *épsilon* e *delta*.

## 3. Discutindo as duas definições de forma formal com *épsilon* e *delta*

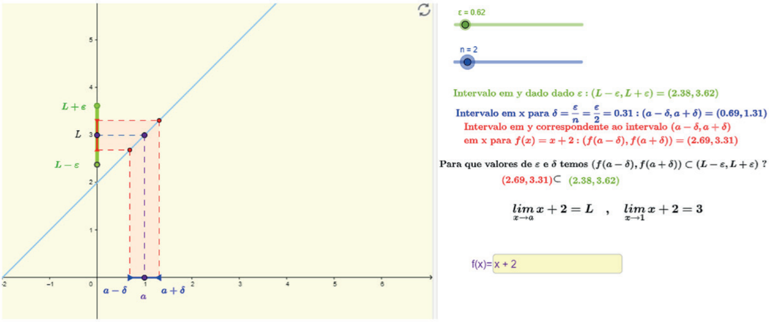
Para as próximas discussões, estaremos utilizando o *applet* online disponibilizado em: *geogebra.org/m/G9gvdPXh*[4]. Neste applet podemos estudar limites através de sua definição formal de modo dinâmico, como mostrado na Figura 5. Mas antes, de chegarmos à definição formal, vamos olhar as regiões de possíveis escolhas para o *épsilon* e consequentemente encontrar o *delta*.

### 3.1 Estudo do épsilon e do delta para a função $f$

Vamos estudar a função $f$ nas proximidades do ponto $a=1$. O objetivo é mostrar que para $x$ pertencente ao intervalo aberto (a-$\delta$,a+$\delta$), a sua imagem $f(x)$ vai pertencer ao intervalo aberto $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, em que $L = 3$ é o limite da função quando $x \to 1$ e, na Figura 5, tomamos como exemplo $\varepsilon = 0{,}62$ É importante notar que essa relação expressa exatamente o significado da definição. Consideremos $\varepsilon = 0{,}62$. O intervalo em $y$ dado o $\varepsilon$ é (L- $\varepsilon$, $L + \varepsilon$) =(2,38; 3,62) onde no gráfico é representado pela região em verde no eixo y. O intervalo x para $\delta = \frac{\varepsilon}{n} = \frac{\varepsilon}{2} =$ 0,31 é$(a - \delta, a + \delta)$ = (0,69; 1,31) está representado pela cor azul no eixo x. Intervalo em $y=f(x)$ correspondente no intervalo (0,69, 1,31) em $x$ para $f(x)=x+2$ tal que $(f(a-\delta), f(a + \delta))$= (2,69; 3,31) e está representado pelo cor vermelha no eixo y. Perguntamos para que valores de $\varepsilon$ e $\delta$ temos $(f(a-\delta), f(a+\delta)) \subset$(L $- \varepsilon$ , $L + \varepsilon$), isto é: (2,69; 3,31)$\subset$(2,38; 3,62), com isto, podemos finalmente concluir que $\lim_{x \to 1} x + 2 = 3$.

[4] *geogebra.org/m/G9gvdPXh*

FIG.5: Estudo do épsilon e do delta para a função *f*



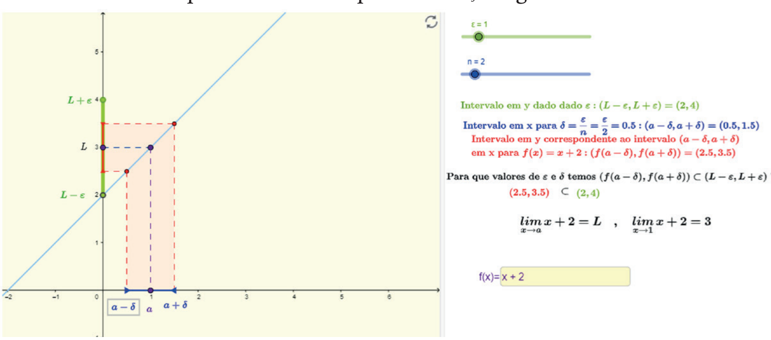

Fonte: Autora

Perceba que mesmo se tomarmos outro $\varepsilon$, por exemplo, $\varepsilon = 2$, existirá um $\delta = 0{,}5$ de forma que o intervalo em y dado esse $\varepsilon$ será (2, 4) e o intervalo em x para $\delta = 0{,}5$ será (0,5; 1,5) e $(f(0.5), f(1{,}5)) = (2{,}5,\ 3{,}5)$ onde $(2{,}4) \subset (3{,}5)$ e assim $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$. Essa situação aparece na Figura 6.

### 3.2 Estudo do épsilon e do delta para as funções *g* e *h*

As discussões feitas são as mesmas para as funções *g* e *h*, podemos tomar $\varepsilon = 2$ e obter $\delta = 0{,}5$ de forma que $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$ e $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$.

FIG.6: Estudo do épsilon e do delta para as funções *g* e *h*




Fonte: Autora

É importante que os alunos manipulem o $\varepsilon$ e percebam que sempre existirá um $\delta$ e o valor do limite permanece o mesmo. Os aspectos visuais, verbais e as manipulações algébricas ligadas à definição do limite de uma função num ponto a, são complementares no processo de aprendizagem do conceito, além da utilização de diferentes representações (além da representação simbólica). A aprendizagem conceitual ocorre quando:

> o sujeito percebe regularidades em eventos ou objetos, passa a representá-los por determinado símbolo e não mais depende de um referente concreto do evento ou objeto para dar significado a esse símbolo. Trata-se, então, de uma aprendizagem representacional de alto nível. (MOREIRA, 2011, p.38 e 39)

Para as próximas discussões, estaremos utilizando o *applet* geogebra nas nuvens online disponibilizado em: http://geogebra.nasnuvens.net.br/delta-e-epsilon/limite-defuncoes/[5]. Neste *Applet* podemos estudar limites através de sua definição formal. No tópico, limite por definição, temos alguns recursos: *ver épsilon, ver delta, ver x0 e L*, como mostrado nas Figuras 12 e 13.

## 4. Definição Formal de Limite Finito num Ponto a

Como pudemos observar os resultados desenvolvidos nos parágrafos 2 e 3, podemos definir formalmente o conceito de limite finito no ponto *a=1*, para as funções f, g e h. Também, vamos apresentar as duas definições de maneira geral para um função qualquer e evidenciamos com isso que podemos refazer os passos anteriores no estudo do limite finito de uma função *f* qualquer num ponto a, usando o *geogebra* para conseguir as tabelas, os gráficos e o estudo de *épsilon* e *delta* de maneira dinâmica.

### 4.1 Caso da Definição 1

No item 2, mostramos o comportamento da função *f* nas proximidades do ponto *a=1*, isto é, para valores de *x* à esquerda e à direita de *a=1*

[5] http://geogebra.nasnuvens.net.br/delta-e-epsilon/limite-de-funcoes/

e concluímos que a função tende a 3. Na sequência chegamos ao seguinte resultado: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 3$ e do fato de f(1)=3, mostramos que a função $f$ é contínua (item 3). No item 4, escolhemos um $\varepsilon = 0{,}62$ e encontramos um $\delta = 0.31$ de forma que para $x \in (0{,}69;\ 1{,}31)$, sua imagem $f(x) \in (2{,}38;\ 3{,}62)$, em que $(2{,}69;\ 3{,}31) \subset (2{,}38;\ 3{,}62)$ e $L = 3$ é o limite da função quando $x \to 1$.

Assim, a função f(x) descrita no gráfico da Figura 5 e definida no intervalo aberto I, (0,69; 1,31),contendo *a* (*a=1*), exceto, possivelmente o próprio a (*a=1*). Dado o $\varepsilon = 0,\ 62$, existe um $\delta = 0{,}31$, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 3 quanto desejarmos, basta para isso, tornar x suficientemente próximo de 1, ou seja, conjecturando um valor para $\delta$. Seja $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = 0,\ 62$ dado, temos que encontrar um $\delta > 0$ talque:

$|x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

$1 - \delta < x < 1 + \delta$ então $|(x+2) - 3| < \varepsilon$

$1 - \delta < x < 1 + \delta$ então $|x - 1| < \varepsilon$

Temos que $|x - 1| < \delta$ implica $|x - 1| < \in$, vamos encontrar um c> 0 tal que $|x - 1| < c . \in$. Vamos tomar c = 0,31 e $|x - 1| < c . \in$. Implica que $|x-1| < 0{,}31 \Rightarrow 0{,}38 < x < 1{,}31$. Consideremos $\delta = min\{1{,}31\ ;\ \frac{\varepsilon}{0{,}31}\}$ e com isso $|(x+2)-3| = |x-1| < 0{,}31 .\ \frac{\varepsilon}{0{,}31} < \varepsilon$ e portanto: $|f(x)-3| < \varepsilon$ e podemos dizer que $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$. Com isso escrevemos a definição formal:

> *Dizemos que uma função f, definida em $E \subset \boldsymbol{R}$, tem um limite $L \in \boldsymbol{R}$ no ponto a se: para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ $(\forall\ x \in E, x \neq a)$, tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ escrevemos $L = \lim_{x\to a, x\neq a} f(x)$.*

## 5. Conclusão e perspectivas

Discutimos duas definições de limite finito para três funções *f*, *g* e *h* no ponto *a=1*, utilizando o *geogebra* onde foi possível através de tabelas, gráficos e o estudo do *épsilon* e *delta* culminar na definição formal. Isto proporcionou uma visão ampla do conceito de limite finito e a manipulação algébrica e geométrica de forma dinâmica foram necessárias para chegarmos a definição geral e formal de limite finito de uma função $f$ num ponto $a$.

Assim, percebemos que o *applet* se mostrou ser uma ferramenta de grande auxílio no ensino de conceitos de limite de uma função $f$ no ponto $a$. Isto é, pudemos com o *applet* atribuir diversos valores para $\varepsilon > 0$, o que implicou em encontrar um $\delta > 0$ para o seu correspondente $\varepsilon$. Com as tabelas e as aproximações feitas em torno do ponto $a=1$, pudemos observar que as funções se aproximavam cada vez mais de 3, tanto pela direita, quanto pela esquerda. Discutimos continuidade e descontinuidade de uma função num ponto e finalmente chegamos às duas definições formais de limite. A primeira se refere a funções definidas num ponto $a=1$, a segunda função não está definida no ponto $a=1$ e terceira está definida no ponto $a=1$, mas é descontinua no ponto $a=1$. Também discutimos a extensão do precedente processo para o estudo de limite de uma função $f$ qualquer num ponto $a$.

Com isso, parece para nós que para minimizar as dificuldades dos alunos na disciplina de Cálculo I no entendimento do conceito de limites de funções num ponto $a$, o uso do *applet geogebra* pode ser fundamental, e torna o ensino desse conceito mais dinâmico e eficiente. Porque estamos certos que entender o conceito de limite é crucial para estudantes de Cálculo, haja vista que ele estabelece a base para o desenvolvimento dos conceitos de continuidade, derivada e integral. O trabalho desenvolvido neste texto pode servir para os professores e para os alunos como forma de praticarem a definição formal de limite com épsilon e delta.

Finalmente, como perspectiva de trabalho, pretendemos desenvolver com o *geogebra* mais exemplos e discutir outros exercícios sobre o estudo do limite com *épsilon* e *delta*, culminando num material para a utilização por alunos e professores.

# 6. Referências


ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte**. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra; Márcia Tamanaha. 6 edição. Porto Alegre: Bookman, 2000.

MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

ROCHA, M. D. **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Ouro Preto, 2010.

STEWART, J. (2009). **Cálculo**: volume 1. (A. C. Moretti, A. C. G. Martins, trads. , H. Castro rev. técnica) (6a ed.). São Paulo: Cengage Learning.

# LIMITES DE FUNÇÕES EM ESPAÇOS MÉTRICOS

BRUNA LETÍCIA NUNES VIANA

## RESUMO:

O presente trabalho, desenvolvido para a disciplina de Tópicos Especiais de Matemática: Limites de funções de uma variável real com valores reais e generalização, contém discussões sobre limites de funções em Espaços Métricos $(E, d)$ e algumas de suas possíveis definições encontradas em alguns livros que abordam estes temas. Para isso, apresenta-se o que motivou esta discussão, assim como alguns conceitos básicos para então discutirmos as definições e alguns exemplos e propriedades. Por fim, voltamosa um conhecido caso particular destes espaços, o espaço $n$-dimensional euclidiano, apresentando algumas de suas propriedades e exemplos.

## 1. INTRODUÇÃO:

Este artigo compõe uma das atividades feitas para a disciplina de Tópicos Especiais de Matemática: Limites de funções de uma variável real com valores reais e generalização, ofertada no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Sabendo da grande dificuldade dos alunos neste tema, e em particular a minha dificuldade na época em que aprendi este conceito, decidi me matricular nesta disciplina que se propunha a discutir conceitos envolvidos acerca de limites, e possivelmente algumas generalizações.

Durante a disciplina, discutimos tópicos como o estudo de funções e algumas de suas definições, inequações, definições de limites e generalizações destas definições em espaços como $\mathbb{R}^n$ (para $n > 1$) e um espaço métrico $(M, d)$. Sendo assim, nos foi pedido que escolhessemos o tema de maior interesse para produção de uma apresentação e posteriormente um artigo.

Devido ao meu pouco contato com espaços métricos em minha graduação, escolhi este tema para que eu pudesse aprofundar meus estudos, visto que não possuia nenhum contato com este tipo de espaços, exceto com alguns casos específicos, como $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ (para $n > 1$). Sabemos que, na matemática, o estudo de casos mais gerais, como o conceito de limite de funções em um espaço métrico, carrega uma série de dificuldades, visto que em toda generalização muitas propriedades são "perdidas".

Por exemplo: no caso da generalização de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}^n$ (para $n > 1$) perdemos a ordenação, visto que em $\mathbb{R}$ é plausível dizermos que dados $x, y \in \mathbb{R}$ podemos ter $x \leq y$, ou vice-versa. Porém, quando temos $x, y \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ não conseguimos ordená-los devido as suas múltiplas entradas. Esta não é uma constatação simples, visto que muitas propriedades importantes de limites também são perdidas, como por exemplo, o tão conhecido Teorema do Confronto (ou sanduíche), que nos diz que dados três funções $f, g, h$ em que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ em uma vizinhança $x \neq a$, e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ então $\lim_{x \to a} g(x) = L$. No caso $f, g, h$ possuírem contradomínio em $\mathbb{R}^n$, não há como cumprimir a hipótese $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, logo o Teorema não é mantido.

Entretanto, o contrário é verdadeiro: quando temos uma generalização e passamos ao estudo de um caso particular, utilizando novamente o exemplo de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, vemos que todas as propriedades de $\mathbb{R}^n$ são satisfeitas no caso particular $n = 1$, ou seja, $\mathbb{R}$.

Com os espaços métricos $(M, d)$ esta lógica não é diferente. Embora $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ sejam casos particulares de espaços métricos, como veremos na próxima seção, nem todo espaço métrico possui operações bem definidas que um anel exige (nos casos citados, temos a multiplicação e adição usuais definidas). Sendo assim, não podemos falar de soma de funções, nem de multiplicação de funções, e por consequência também não conseguimos definir as operações inversas, como divisão e subtração. Porém, todas as propriedades de espaços métricos são mantidos para seus casos particulares.

Sendo assim, motivados pelo estudo da generalização do conceito de limites de funções para espaços métricos, o presente trabalho tem como objetivo discutir quatro definições de limites nestes espaços, que embora muito parecidas, apresentam suas particularidades. Estas definições são encontradas em vários livros sobre estes espaços, e estas variações passam muitas vezes despercebidas pelos alunos, justamente por serem tão parecidas.

Para isso, apresentaremos alguns conceitos básicos necessários para fazer este estudo, como definição de um espaço métrico, definição de ponto aderente e de acumulação nestes espaços, e alguns exemplos para elucidar estas definições. Em uma outra seção serão apresentados as discussões sobre limites de funções nestes espaços, e como tópicos suas definições e propriedades. Também utilizaremos alguns exemplos para diferenciar as definições aqui apresentadas. Por fim, na última seção, voltaremos ao caso particular de espaços métricos aqui já citado: ($\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$), listando algumas propriedades de limites de funções exclusivas deste caso.

## 2. Conceitos Básicos

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos básicos para o entendimento da discussão sobre limites de funções em espaços métricos que será feito na próxima seção.

**Definição 2.1** (Métrica). Uma **métrica** em um conjunto M é uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$ chamado de distância de $x$ a $y$, em que as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in M$:

$d_1) d(x, x) = 0$

$d_2)$Se $x \neq y$ então $d(x.y) > 0$

$d_3) d(x, y) = d(y, x)$

$d_4) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

**Definição 2.2** Um espaço métrico é um par $(M, d)$ em que M é um conjunto e $d$ é uma métrica.

**Exemplo 2.1** (Métrica zero-um). Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definirmos uma métrica, como segue: $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} d(x,x) = 0 \\ d(x,y) = 1, \text{ se } x \neq y \end{cases}$$

**Exemplo 2.2** (Espaços vetoriais normados). Seja $E$ um espaço vetorial. Uma norma em $E$ é uma função real $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $\|x\|$, chamado norma de $x$, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

$N_1)$ Se $x \neq 0$ então $\|x\| \neq 0$

$N_2)$ $\|\lambda x\| = \|\lambda\| . \|x\|$

$N_3)$ $\| x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

Assim, considerando $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x-y\|$, temos que a função $d$ é uma métrica.

(1) (Norma Euclidiana) Considere a seguinte função em $\mathbb{R}^n$: $\|.\|_E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|x\|_E = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, $(\mathbb{R}^n, \|.\|_E)$ é uma espaço métrico se definido da maneira descrita nesse exemplo.

(2) (Norma do máximo) Considere a seguinte função em $\mathbb{R}^n$: $\|.\|_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|x\|_M = \text{Máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, $(\mathbb{R}^n, \|.\|_M)$ é um espaço métrico se definido da maneira descrita nesse exemplo.

(3) (Norma da soma) Considere a seguinte função em $\mathbb{R}^n$ : $\|.\|_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|x\|_S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, $(\mathbb{R}^n, \|.\|_S)$ é um espaço métrico se definido da maneira descrita nesse exemplo.

OBS: No caso $n = 1$ todas estas normas são coincidentes. Sendo assim, por conveniência denotamos $\|x\|$ por $|x|$.

**Definição 2.3** (Bola aberta). Seja $a$ um ponto em um espaço métrico $M$. Dado um número real $\epsilon > 0$ definimos a **bola aberta** de centro $A \in M$ e raio $\epsilon$ como o seguinte conjunto:

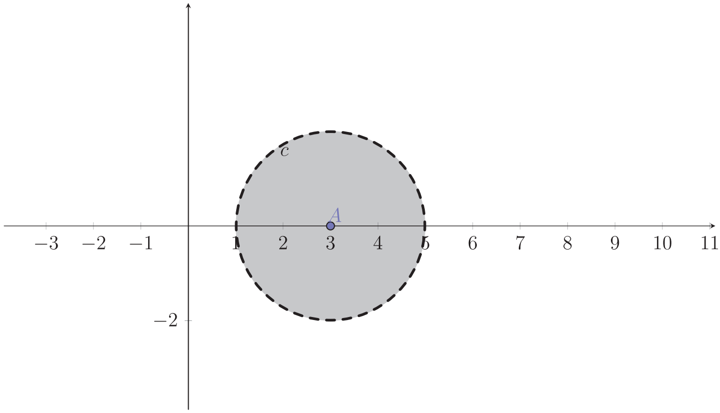
$$B(a; \epsilon) = \{x \in M; d(x, a) < \epsilon\}$$

**Exemplo 2.3.** É uma bola aberta em $\mathbb{R}$ o seguinte conjunto:

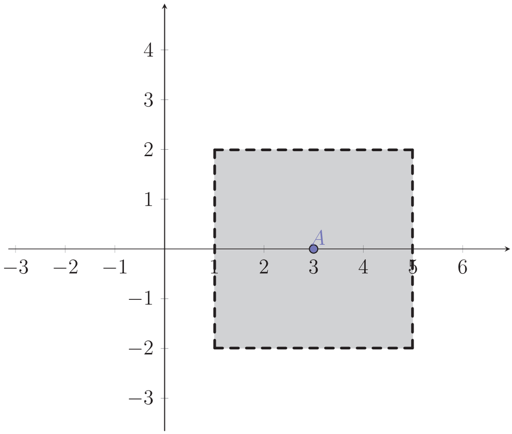
$$B(3; 2) = \{x \in \mathbb{R}/|x - 3| < 2\}$$

**Exemplo 2.4.** Considere $A = (3, 0)$ um ponto de $\mathbb{R}^2$. São bolas abertas em $\mathbb{R}^2$ os seguintes conjuntos:

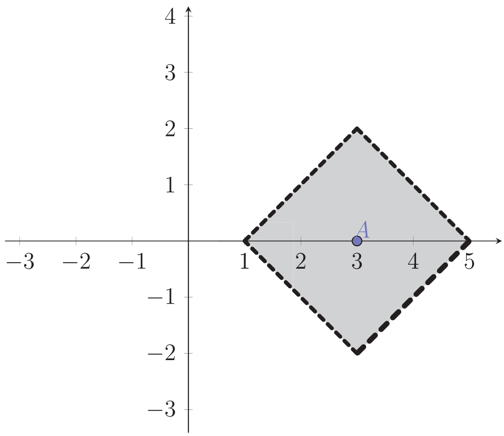
(1) $B(A,2) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x - A\|_E < 2\}$




(2) $B(A,2) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x - A\|_M < 2\}$



(3) $B(A,2) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x - A\|_S < 2\}$




**Definição 2.4.** Dizemos que $a \in M$ é um **ponto de acumulação** a um subconjunto $X$ de um espaço métrico $M$, quando para todo $\epsilon > 0$, a bola $(B(a;\epsilon) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset$. Ou, equivalentemente:

1) Em $(B(a;\epsilon) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset$ existem pontos de $X \setminus \{a\}$

NOTAÇÃO: $a \in X'$

**Definição 2.5.** Dizemos que $a \in M$ é um **ponto aderente** a um subconjunto $X$ de um espaço métrico $M$, quando $d(a,X) = 0$. Ou, equivalentemente:

1) $\forall\, \epsilon > 0$ tem-se $B(a;\epsilon) \cap X \neq \emptyset$

2) Para todo aberto $A$ que contenha $a$ temos $A \cap X \neq \emptyset$

3) Toda vizinhança de $a$ tem pontos em comum com $X$

4) $\forall\, \epsilon > \exists\, x \in X$ tal que $d(a,x) < \epsilon$

NOTAÇÃO: $a \in \overline{X}$

*OBS*$_1$: Não é necessário que o ponto aderente pertença ao conjunto $X$. Por exemplo, considere $X = (0, \infty]$. Temos que 0 é ponto aderente de $X$ pois para todo $\epsilon > 0$ temos $B(0; \epsilon) \cap X \neq \emptyset$.

**Teorema 2.1.** Todo ponto do conjunto $X$ é aderente ao próprio conjunto.

*Demonstração.* De fato, seja um ponto $x \in X$, temos que para toda bola aberta $B(x; \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, o ponto $\{x\}$ pertence ao conjunto $B(x, \epsilon)$ $\cap X$. Logo, $B(x, \epsilon) \cap X \neq \emptyset$, ou seja, $x$ é ponto aderente de $X$. $\square$

**Teorema 2.2.** Todo ponto $a$ de acumulação a um conjunto $X$ é aderente ao conjunto $X$.

*Demonstração.* De fato, seja um ponto $a \in X'$. Pela definição temos que para todo $\epsilon > 0$, a bola $(B(a; \epsilon) \setminus \{a\}) \cap \mathrm{X} \neq \emptyset$ ;. Sendo assim, temos $B(a; \epsilon) \cap \mathrm{X} \neq \emptyset$.

$\square$

A recíproca deste teorema não é verdadeira, ou seja, nem todo ponto $a$ de aderência a um conjunto $X$ é ponto de acumulação do conjunto $X$. Ilustraremos este fato no seguinte exemplo.

**Exemplo 2.5.** Considere o seguinte conjunto de números reais: $A = (-2, 1) \cup \{2\}$. Temos que $2 \in A$, logo, pelo Teorema 2.1, temos $2 \in \overline{X}$. Entretanto, é intuitivo e de facil verificação que não se acumulam outros pontos do conjunto $A$ perto do ponto 2, que não ele próprio.

# 3. Limites de Funções

Nesta seção serão apresentadas algumas definições e propriedades de Limites de Funções em Espaços Métricos, e explicitadas algumas das diferenças entre suas definições seguidas de alguns exemplos. É importante que estejamos atentos a estas diferenças, visto que nos livros escolhe-se uma destas definições, mas as diferenças, assim como a justificativa das escolhas, não são explicitadas. Também é importante ressaltar que não há uma definição "mais correta"do que a outra. Há apenas escolhas mais coerentes com os objetivos pretendidos, caso dos livros que analisamos.

### 3.1. Definições.

**Definição 3.1** Seja X um subconjunto do espaço métrico M (ou seja, $X \subset M$), $a \in \overline{X}$ um ponto aderente a X e $f: X \longrightarrow N$ uma aplicação definida em X e tomando valores em um espaço métrico N. Dizemos que um ponto $b \in N$ é o *limite* de $f(x)$ quando $x$ tende para $a$ e escrevemos:

$$b = \lim_{x \to a} f(x)$$

quando

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \text{ se } x \in X \text{ e } d(x,a) < \delta \Longrightarrow d(f(x), b) < \epsilon$$

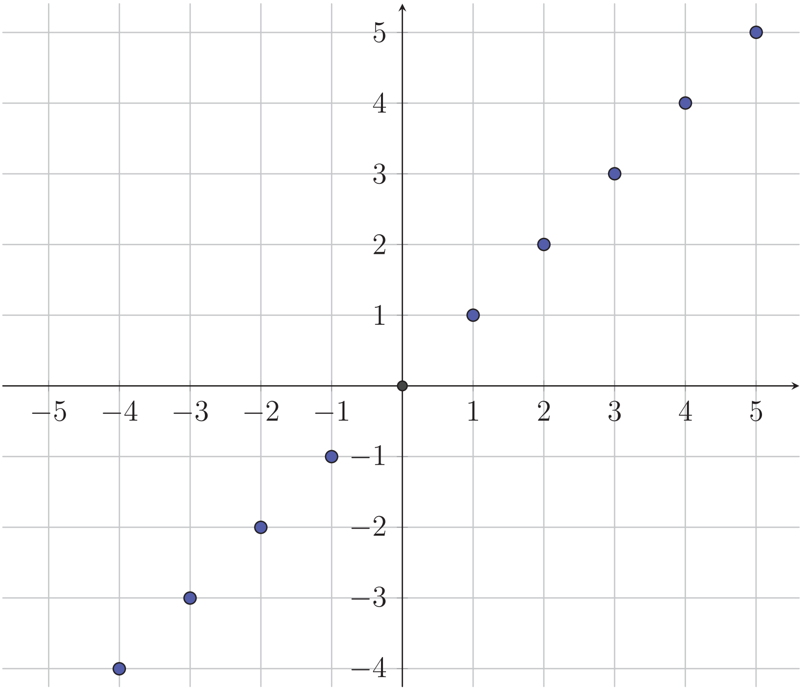
**Definição 3.2** Seja X um subconjunto do espaço métrico M (ou seja, $X \subset M$), $a \in X'$ um ponto de acumulação de X e $f: X \longrightarrow N$ uma aplicação definida em X e tomando valores em um espaço métrico N. Dizemos que um ponto $b \in N$ é o *limite* de $f(x)$ quando $x$ tende para $a$ e escrevemos:

$$b = \lim_{x \to a} f(x)$$

quando

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \text{ se } x \in X \text{ e } d(x,a) < \delta \Longrightarrow d(f(x), b) < \epsilon$$

**Exemplo 3.1.** Considere a seguinte função: $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida pela lei de formação $f(x) = x$, como ilustrada no gráfico seguinte.



Vamos fazer o estudo do limite dessa função, utilizando as definições desta seção, para $x = 1$.

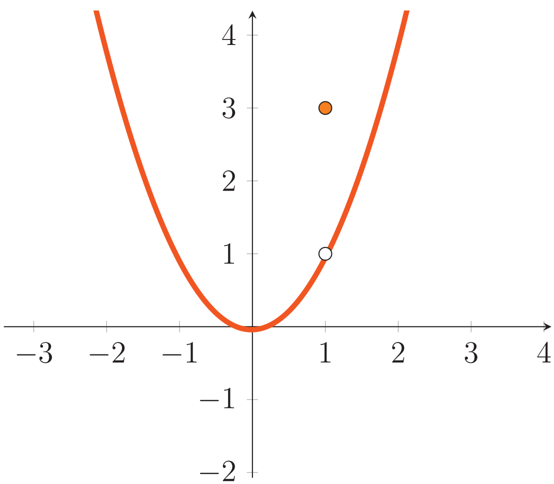
Como 1 é ponto do domínio de $f$ temos, pelo Teorema 2.1, que ele é aderente a $\mathbb{N}$. Entretanto, 1 não é ponto de acumulação (Para verificar este fato, basta se atentar a definição de ponto de acumulação, e tomar $\epsilon = \frac{1}{2}$, daí a bola de centro 1 e raio $\epsilon$ não tem interseção com o conjunto $\mathbb{N}$).

Segue que podemos verificar o limite apenas para as definições 3.1 e 3.3. É fácil verificar que o limite existe para estas duas definições.

**Exemplo 3.2.** Considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \neq 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Como ilustrada abaixo:



Verificaremos a existência do limite desta função para $x = 1$. Note que 1 é ponto de acumulação de $\mathbb{R}$, logo também é ponto aderente a este conjunto. Percebemos que o limite desta função, no ponto referido, não existe nas definições 3.1 e 3.2 (para verificar este fato, basta tomarmos qualquer $\epsilon > 0$ e $x = 1$, e perceberemos que o valor do limite, caso existisse, deveria coincidir com o valor da função no ponto).

Sendo assim, a condição da distância $d(x, 1)$ ser ESTRITAMENTE maior que zero ($0 < d(x, 1) < \delta$), implica que podemos analisar o comportamento da função em volta do ponto 1, mas sem analisarmos o que ocorre no ponto 1, ou seja, podemos analisar funções que não são contínuas em um ponto, visto que o que nos interessa é apenas a vizinhança deste ponto (a saber, o ponto para o qual o x "tende").

**3.2. Propriedades.**

(1) (Unicidade do Limite). O limite de uma função $f$ em um ponto $a$ (que poderá ser tanto de acumulação, quanto aderente), é único.

(2) (Definição de Limite via sequências). Sejam $M$, $N$ espaços métricos e $a \in \overline{X} \subset M$. Dada $f : X \longrightarrow N$, tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_n \in X$, com $x_n \longrightarrow a, n \longrightarrow +\infty$ tem-se $\lim_{x_n \to =\infty} f(x_x) = b$.

É importante notar que o uso desta última propriedade é uma "ferramenta"interessante especialmente quando desejamos mostrar que o limite de uma função não existe, como no exemplo abaixo.

**Exemplo 3.3.** Não existe limite da função $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = sen(\frac{1}{x})$, quando x tende a zero.

De fato, utilizando a propriedade anterior, basta encontrarmos duas sequências de pontos que tendem para um mesmo ponto, entretanto, quando aplicadas a lei de formação desta função, obtemos limites distintos.

Tome as sequências $x_k = \dfrac{1}{\pi + 2k\pi}$ e $y_k = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$.

Temos que $\dfrac{1}{x_k} \to 0$ e $\dfrac{1}{y_k} \to 0$ quando $k + \infty$, entretanto:

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = 0$$

e

$$\lim_{k \to +\infty} f(y_k) = 1$$

o que contradiz as condições da propriedade anterior.

## 4. Caso de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_E)$

Nesta seção estudaremos um caso particular de limites em um espaço métrico, qual seja, limites em espaços euclidianos $n$-dimensionais munidos da norma ecludiana. A seguir serão apresentadas algumas propriedades de limites neste caso, considerando a Definição 3.4 apresentada na seção anterior.

(1) Seja a um ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Dada a aplicação $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ cujas funções coordenadas são $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tem-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$$

(2) Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X'$, pontos $b, c \in \mathbb{R}^m$, aplicações $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $\alpha$: X $\longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\lim_{x \to a} g(x) = c$, $\lim_{x \to a} \alpha(x) = \alpha_0$. Então:

2.1) $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = b + c$;

2.2) $\lim_{x \to a} \alpha(x).f(x) = \alpha_0.b$;

2.3) $\lim_{x \to a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$.

(3) (Permanência do sinal) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, e $a \in X'$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = b > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$, com $0 < |x - a| < \delta$ implica que $f(x) > 0$.

Estas propriedades nos fornecem um "maquinário"para resolvermos os limites em espaços euclidianos $n$-dimensionais, como veremos no exemplo abaixo.

**Exemplo 4.1.** Seja $f: (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida pela seguinte lei de formação: $f(x, y) = (xy, sen(\frac{1}{y}))$. Temos que não existe $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$. De fato, como temos que não existe $\lim_{y \to 0} sen(\frac{1}{y})$, (já mostrado no exemplo 3.3), utilizando a primeira propriedade desta seção, temos que $f_2(x, y) = sen(\frac{1}{y})$ não existe. Portanto não existe limite da função $f$ em $(x, 0)$.

## 5. Conclusão

Neste artigo buscou-se discutir conceitos envolvidos acerca de limites em espaços métricos $(M, d)$. Tentou-se trazer alguns conceitos básicos, que dessem base para entender a discussão central deste, qual seja: variações nas definições de limites em espaços métricos e suas implicações.

Durante todo o curso, pudemos refletir sobre vários temas que acabam ficando "escondidos" na definição de limites, tanto em livros, quanto nos cursos que utilizam-se destes livros. Dentre estes temas estão as funções, as inequações, a utilização de letras gregas (este último que, apesar de não aparentar problema, pode ser por vezes um obstáculo epistemológico para o aluno), dentre tantos aspectos que nós, professores, devemos estar atentos, em especial nas situações de sala de aula.

Para complementar a discussão, escolhi olhar para duas variações nas definições de limites em espaços métricos que encontrei em alguns livros: a primeira, quanto a característica do ponto para o qual o x tende.

Como discutimos em seções anteriores, se analisamos o limite de uma aplicação em um ponto a de acumulação ($a \in X'$), pedimos que a se acumulem pontos próximos ao ponto $a$, logo $a$ não pode ser um ponto isolado (ver exemplo 3.1).

Um segundo aspecto para o qual nos atentamos foi a escolha de deixarmos a distância de $x$ até $a$ ($d(x, a)$) estritamente maior que zero ou não. Esta escolha é significativa visto que caso a distância seja estritamente maior que zero, o limite da função existe para funções que não são contínuas nesse ponto (ver exemplo 3.2). Já se a distância pode ser zero, ou seja $x = a$, para que o limite exista, é necessário e suficiente que o valor da função no ponto coincida com o valor do limite da função.

Como já argumentamos anteriormente, não há definição "mais"-correta do que outra, há apenas definições mais coerentes com o objetivo de cada autor. Entretanto, devemos estar sempre atentos a estas variações, que apesar de passarem despercebidas por muitos, provocam grandes alterações quanto às suas abrangências.

Por fim, gostaria de argumentar que por certo muitos outros aspectos estão escondidos por trás das definições de limites utilizadas tanto em espaços métricos, quanto nos seus casos particulares, cabendo a nós, professores, sempre aprofundarmos estes estudos com intuito de tornar o ensino e aprendizagem deste tópico cada vez melhor.

# Referências


[1] Lima, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 3a edição. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

[2] Lima, Elon Lages. - **Curso de Análise vol.1**. 13a edição. Rio de Janeiro. IMPA, 2011.

[3] Lima, Elon Lages. - **Curso de Análise vol. 2**. 11a edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

# APÊNDICE B

## Definições de Grupos, Anéis, Corpos e Espaço vetorial

Este apêndice sobre as estruturas algébricas de grupos, anéis e corpos, visa facilitar o entendimento das estruturas de espaço vetorial e de anel, do conjunto de funções reais com valores reais, considerados no Capítulo 1. De fato, as operações algébricas entre funções de uma variável real com valores reais, são necessárias para o estudo das operações algébricas de limites.

## B.1 GRUPOS.

Um grupo é um conjunto G equipado com uma operação $o : G \times G \longrightarrow G$, denotada $(x; y) \mapsto xoy$, tal que:

1. $o$ é associativa: $(xoy)oz = xo(yoz)$, para quaisquer $x; y$ em $G$;
2. Existe um (único) elemento neutro $e$ em $G$ tal que $xoe = eox = x$, para todo $x$ em $G$;
3. Todo elemento $x$ em $G$ possui um (único) inverso $x^{-1}$ em $G$ tal que $xox^{-1} = x^{-1}ox = e$.

Um grupo $(G; o)$ chama-se abeliano se a operação $o$ é comutativa, isto é, $xoy = yox$, para quaisquer $x; y$ em $G$.

Exemplos.

1. Os conjuntos $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Q}; +)$, $(\mathbb{R}; +)$ e $(\mathbb{C}; +)$ são grupos abelianos com elemento neutro zero 0.
2. Os conjuntos $(\mathbb{Q}^*;\times)$, $(\mathbb{R}^*;\times)$ e $(\mathbb{C}^*;\times)$ são grupos abelianos com elemento neutro zero 1.

3. Os conjuntos $(\mathbb{Q};\times)$, $(\mathbb{R};\times)$ e $(\mathbb{C};\times)$ não são grupos porque o elemento neutro zero 0 não possui inverso.

## B.2 ANÉIS.

Um anel é um conjunto $A$ equipado com duas operações $+ : A\times A \longrightarrow A$ e $o : A\times A \longrightarrow A$, denotadas $(x; y) \mapsto x + y$ e $(x; y) \mapsto xoy$, tal que:

1. $(A, +)$ é um grupo cujo elemento neutro é denotado 0, chama-se o zero de $A$;

2. A operação $o$ é associativa: $(xoy)oz = xo(yoz)$, para quaisquer $x; y$ em $G$;

3. A operação $o$ é distributiva relativamente a operação $+$, isto é:

$$\begin{cases} xo(y+z) = & xoy + xoz \\ (y+z)ox = & yox + zox \end{cases}$$

Um anel $(A; +; o)$ chama-se comutativo se a operação $o$ é comutativa.

Um anel $(A; +; o)$ chama-se unitário se a operação $o$ possui um elemento neutro denotado por $1 \in A$, o elemento 1 é chamado a unidade do anel $A$.

**Exemplos**

1. Os conjuntos $(\mathbb{Z}; +;\times)$, $(\mathbb{Q};+;\times)$, $(\mathbb{R};+;\times)$ e $(\mathbb{C};+)$ são anéis comutativos e unitários.

2. Seja $\mathbb{K}[X]$ o conjunto dos polinômios. O conjunto $(\mathbb{K}[X];+;\times)$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é um anel comutativo e unitário.

## B.3 CORPOS.

Um corpo é um conjunto $K$ equipado com duas operações $+ : K\times K \longrightarrow$ $A$ $o : K\times K \longrightarrow K$, denotadas $(x; y) \mapsto x + y$ e $(x; y) \mapsto xoy$, tal que :

1. $(K,+, o)$ é um anel unitário,

2. $(K^*; o)$ é um grupo, onde $K^* = K \setminus \{0\}$;

Um corpo $(K; +; o)$ chama-se comutativo se a operação $o$ é comutativa.

**Exemplos**

1. Os conjuntos $(\mathbb{Q};+;\times)$, $(\mathbb{R};+;\times)$ e $(\mathbb{C};+)$ são corpos comutativos.

2. Os conjuntos $(\mathbb{Z}; +;\times)$, $(\mathbb{K}[X]; +;\times)$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ não são corpos.

## B.4 ESPAÇOS VETORIAIS.

Seja $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou um corpo unitário e comutativo. Um espaço vetorial sobre $K$ é um conjunto $E$ equipado com duas operações $+ : E\times E \longrightarrow E$ (operação interna) e $\times : K\times E \longrightarrow E$ (operação externa), denotadas $(x; y)$ $\mapsto x+y$ e $(a; y) \mapsto a\times y = \mathrm{a}.y$, tal que:

1. $(E; +)$ é um grupo comutativo cujo elemento neutro é denotado 0, chama-se o zero de $E$,

2. A operação $\times$ verifica as seguintes propriedades:

(a) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$, para todos $\alpha, \beta$ em $K$ e $x$ em $E$,

(b) $\alpha(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$, para todos $\alpha$ em $K$ e $x, y$ em $E$,

(c) $(\alpha.\beta).x = \alpha(\beta.x)$, para todos $\alpha, \beta$ em $K$ e $x$ em $E$,

(d) 1.x=x, para todo $x$ em $K$

**Exemplos**

1. Os conjuntos $(\mathbb{C}; +; .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2. Os conjuntos $(\mathbb{R}^n; +; .)$ $(n \geq 1)$ e um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3. Seja $\mathbb{K}[X]$ o conjunto dos polinômios. O conjunto $(\mathbb{K}[X]; +; .)$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $K$.

# APÊNDICE C

## Valor absoluto e distância

O objetivo deste apêndice sobre os conceitos de valor absoluto e de distância é recuperar o vínculo entre essas duas noções, que desempenham um papel importante na análise matemática, principalmente a noção de distância que é usada na generalização do conceito de limite de funções definidas em espaços métricos e espaços normados.

## C.1 Preliminares históricas e didáticas

Segundo Duroux (1984), até o século XIX, a noção de valor absoluto era explicitamente reconhecida e designada, sem que a teoria ainda fosse feita. A esse respeito, é importante o que Cauchy escreveu em 1821, em seu curso de análise na École Polythechnique Royale: *da mesma forma, no caso em que a letra a representa uma quantidade, concorda-se em examinar as duas expressões* $\mathbf{a}$ *e* $+\mathbf{a}$ *e representar por :*$-\mathbf{a}$ *a quantidade oposta a* $+\mathbf{a}$*, para estabelecer o que chamou de regra dos sinais*. Em 1898 a aplicação $x \longrightarrow |x|$ foi introduzida por Jordan e usada com todas as suas propriedades.

De modo geral, o valor absoluto intervirá com todas as suas propriedades nos números, invariantes com respeito a seu sinal. O outro uso importante do valor absoluto é aquele que permite fornecer a $\mathbb{R}$ uma distância $d(x; y) = |x - y|$, também se torna um espaço métrico no qual podemos desenvolver toda o conteúdo de análise. Estão relacionados a este conceito de distância todos os problemas de aproximação, de comparação de um número com outros (DUROUX, 1984).

No ensino, o valor absoluto é normalmente introduzido no 7º ano, e continua a ser usado no ensino médio até à universidade. Mas tem poucas pesquisas históricas e didáticas sobre esse conceito. Citamos aqui somente dois artigos sobre esse conceito: o artigo de Duroux (1984) e o de Perrin-Glorian (1996).

Existem outros usos do valor absoluto, importantes como no caso de séries absolutamente convergentes, onde a noção de valor absoluto aparece como um caso especial da noção de norma que tem um papel fundamental na matemática, em particular na análise funcional (DUROUX, 1984).

Em conclusão, podemos dizer que o valor absoluto, que pode aparecer como uma noção menor em matemática (como ele á tratado no ensino), desempenha um papel importante em vários campos.

## C.2 Valor absoluto

O valor absoluto de um real $x$, denotada por $|x|$, é definido simplesmente, por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{ou equivalentemente } |x| = \max\{x, -x\}.$$

**Interpretação gráfica do valor absoluto:** Em uma linha reta graduada, de origem O, seja $M$ o ponto de abscissa $x$ e $N$ o ponto de abscissa $y$. A distância entre os pontos M e N, denotada por $MN = d(x; y)$ é dada por:

$$d(x, y) = MN = |x - y|.$$

Assim, se $N = O$ a origem da linha reta, o numero $d(0; x) = OM = |x|$, o valor absoluto, representa a distância entre a origem $O$ e o ponto $M$.

O valor absoluto tem várias propriedades. Na seguinte proposição daremos algumas delas.

**Proposição C.1** *Para todos reais $x, y$ temos as seguintes propriedades:*

(1) $|x| = 0$ *é equivalente a* $x = 0$*;*

(2) $|x - y| = |y - x|$*;*

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$*;*

(4) $|x| = |y|$ *é equivalente a* $x = y$ *ou* $x = -y$*;*

(5) $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

A distância é ligada aos conceitos de intervalos e desigualdades.

**Proposição C.2** *Para todos reais* $a$*,* $r > 0$ *as seguintes armações são equivalentes.*

*1.* $|x - a| < r$

*2.* $x \in ]a - r, a + r[$

*3.* $a - r < x < a + r$*.*

# C.3 Generalização de valor absoluto: A distância

## C.3.1 Definição e exemplos

As três primeiras propriedades da Proposição C.1, monstram que a distância $d(x, y) = |x - y|$, onde $x, y$ estão em $\mathbb{R}$, satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(x, y) = 0$ equivale a $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$, equivale a $x$, $y$ em $\mathbb{R}$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todos $x$, $y$, $z$ em $\mathbb{R}$ (Desigualdade triangular).

De maneira geral, uma distância pode ser definida sobre vários conjuntos.

**Definição C.1** _Definição de distância._ Seja $E$ um conjunto. *Chamamos distância em $E$ qualquer aplicação $d : E \times E \to [0, +\infty[$ e vale as seguintes propriedades:*

1. $d(x, y) = 0$ *equivale a* $x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$, *para todos* $x$, $y$ em *E;*

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *para todos* $x$, $y$, $z$ em *E* (*Desigualdade triangular*).

**Exemplo 1:** Distâncias sobre $E = \mathbb{R}^2$. Sejam $(x_1, x_2)$ e $(y_1, y_2)$ a aplicação de $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[$ definida por:

$$d_2((x_1, x_2),\ (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

é uma distância em $\mathbb{R}^2$. Também, as aplicações:

$$d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[ \text{ e } d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[,$$

definidas por,

1. $d_1((x_1, x_2),\ (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$,

2. $d_\infty((x_1, x_2),\ (y_1, y_2)) = \min\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\}$,

são também distâncias em $\mathbb{R}^2$.

De maneira geral, as seguintes aplicações definidas sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ por:

1. $d_2((x_1, ..., x_n),\ (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$;

2. $d_1(x_1, ..., x_n),\ (y_1, ..., y_n)) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$;

3. $d_\infty((x_1, ..., x_n),\ (y_1, ..., y_n)) = \min\{|x_1 - y_1|,\ ...,\ |x_n - y_n|\}$,

são distâncias em $\mathbb{R}^2$.

### C.3.2 Bolas abertas em $\mathbb{R}^n$

Seja uma distância $d(x,y)$ em $\mathbb{R}^2$, por exemplo $d(x,y) = d_1(x,y)$ ou $d_2(x,y)$ ou $d_\infty(x,y)$. Seja $a = (a_1, \ldots, a_n)$ em $\mathbb{R}^2$ e $r > 0$ o conjunto:

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ d(a,x) < r\},$$

é chamado de bola aberta de centro $a$ e de raio $r$. Assim, temos:

1. Para $E = \mathbb{R}$ a distância é $d(x,y) = |x-y|$ e as bolas abertas são os intervalos abertos $]a-r,\ a+r[$.

2. Para $E = \mathbb{R}^2$ e a distância $d(x,y) = d_2(x,y)$, as bolas abertas são os discos abertos de centro $a = (a_1,\ a_2)$ e raio $r$

3. Para $E = \mathbb{R}^3$ e a distância $d(x,y) = d_2(x,y)$, as bolas abertas são as esferas abertas de centro $a = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ e raio $r$.

Como vimos nos capítulos 1 e 3, os intervalos abertos e fechados de $\mathbb{R}$ foram definidos pelo valor absoluto. Assim, no capítulo 1, os intervalos de $\mathbb{R}$ desempenharam um papel fundamental no estudo de funções. No capítulo 3, a topologia de $\mathbb{R}$, baseada nas propriedades de intervalos abertos, também foi fundamental para definir o conceito de limite e estudar suas propriedades. No caso das distâncias de $\mathbb{R}^n$, o conceito de bolas abertas também será fundamental para a definição de limite de funções definidas em $\mathbb{R}^n$ e o estudo suas propriedades.

Este livro foi editorado com as fontes Crimson Text e Barlow.
Publicado on-line em: https://repositorio.ufms.br