Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Dailton Zilioti Valverde

NOÇÕES DE LÓGICA E TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Campo Grande - MS

2016

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Dailton Zilioti Valverde

NOÇÕES DE LÓGICA E TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Orientadora Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2016

NOÇÕES DE LÓGICA E TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Dailton Zilioti Valverde

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela banca examinadora:

Prof. Dr. Alex Ferreira Rossini
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas (Orientadora)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profa. Dra. Haydée Werneck Poubel
Universidade de Brasília - UnB

Campo Grande - MS, 28 de Outubro de 2016

Tenho comigo e confesso aos mais próximos que, por mais que eu viva ou tenha o que experimentar, não acredito que haverá algo que supere a força transformadora que foi a presença de sua pessoa em minha vida. Assim, e um dia escrevendo minha história de vida, será necessário dedicar ao menos todo um capítulo a sua pessoa.

Então, enquanto esse dia não vem, é a você, Fernando Antônio de Castilho, que eu dedico todo esse trabalho.

"Ser ou não ser, eis a questão (...)"

William Shakespeare

Agradecimentos

Meu agradecimento infinito à dona Neuza, minha mãe, que da pré-escola ao momento de hoje, jamais mediu esforços para minha melhor formação. Reconheço e sou profundamente grato por tudo. Você será eterna em meu coração.

Também meus sinceros agradecimentos aos amigos Wagner, Vilma, Joice e Edina. Cada qual a sua maneira, uma incrível maneira de pensar. Obrigado por me motivarem a pensar. Vocês serão eternos em meu pensamento.

Aos idealizadores do PROFMAT, aos responsáveis por trazer e aos responsáveis direta ou indiretamente por hoje manter este programa de pós-graduação em matemática em rede nacional, muito obrigado pela oportunidade ímpar.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a quem com dedicação, maestria, profundo e sólido conhecimento matemático me orientou. Obrigado Professora Bete pelo rico e apaixonante aprendizado. Para sempre em meu saber.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é o estudo de demonstrações matemáticas sob um olhar da lógica proposicional. Demonstrações em matemática são argumentos que estabelecem a veracidade de uma proposição. Um argumento é uma sequência de afirmações verdadeiras que terminam em uma conclusão. Técnicas de demonstração matemática são possíveis estratégias de argumentação lógica para se provar sentenças matemáticas, aqui classificadas sob quatro métodos distintos de provas:

- Método da Demonstração Direta;
- Método da Demonstração pela Contrapositiva;
- Método da Demonstração por Absurdo;
- Método da Demonstração por Indução.

Palavras-chave: Lógica Proposicional, Lógica Matemática, Técnicas de Demonstração.

Abstract

The main objective of this work is the study of mathematical statements in a look of propositional logic. mathematical statements are arguments that establish the truth of a proposition. An argument is a sequence of true statements that end in a conclusion. mathematical proof techniques are possible logical reasoning strategies to prove mathematical sentences, here classified under four distinct evidence methods:

- Direct Statement Method;
- Demonstration of the Method by Contrapositive;
- Demonstration of the Method by Absurd;
- Demonstration Method Induction.

Key words: Propositional Logic, Mathematical Logic, Demonstration Techniques.

Sumário

Introdução

Nosso estudo foi organizado sob quatro principais temas, que dão nomes aos seguintes capítulos:

I - Noções de Lógica;

II - Argumentos e Regras de Inferência;

III - Teoremas e tipos de Demonstração;

IV - Exemplos de Demonstrações Matemáticas.

Por meio do estudo de proposições, conectivos, quantificadores e suas respectivas negações, iniciamos nosso trabalho apresentando noções de lógica no Capítulo I.

O Capítulo II traz dois importantes conceitos da lógica proposicional: o de implicação lógica e o de argumento lógico, além de um compilado com as regras básicas de inferência.

Já o Capítulo III trata sobre os principais métodos de demostrações de teoremas (demonstração direta, pela contrapositiva, por absurdo ou por indução).

Por fim, o Capítulo IV traz exemplos de demonstrações matemáticas retiradas de livros diversos (ensino médio, graduação e pós-graduação). Aqui aplicaremos o conteúdo desenvolvido nos capítulos anteriores e faremos um estudo das respectivas técnicas de demonstração sob um olhar da lógica proposicional.

Capítulo 1

Noções de Lógica

Neste capítulo será feita uma introdução à lógica matemática. As regras da lógica estabelecem o significado preciso de afirmações matemáticas. Estas regras são usadas para distinguir argumentos válidos de argumentos não válidos.

1.1 Proposições

Definição 1. *Uma* ***proposição*** *é uma afirmação (sentença declarativa) que pode ser verdadeira ou falsa, mas nunca verdadeira e falsa simultaneamente.*

Quando uma proposição é verdadeira, dizemos que o seu valor lógico é verdadeiro e denotamos este valor por V, caso contrário, dizemos que o seu valor lógico é falso e denotamos por F.

Exemplo 1 *As seguintes afirmações são proposições.*

1. *Campo Grande é a capital de Mato Grosso do Sul.*

2. $1 + 1 = 2$.

3. *Elefante tem asas.*

4. $7 - 5 > 4$.

As proposições 1 e 2 são verdadeiras e as outras duas proposições são falsas.

Exemplo 2 *Considere as seguintes sentenças.*

1. *Qual é a capital da Bahia?*

2. *Demonstre o seguinte teorema.*

3. $x - 3 = 2$.

4. $x + y > z$.

As duas primeiras sentenças não são proposições, pois não são afirmações. As outras duas também não são proposições porque não são verdadeiras e nem falsas.

Assim como variáveis que representam números são denominadas variáveis numéricas, as variáveis que representam proposições são denominadas variáveis proposicionais. Usamos, como no caso de varáveis numéricas, letras para indicar **variáveis proposicionais**. As letras convencionalmente utilizadas para variáveis proposicionais são $p, q, r, s, \ldots$.

1.2 Conectivos e Operações Lógicas

Nesta seção, a partir de proposições já estabelecidas, discutiremos métodos de construção de novas proposições. Muitas sentenças matemáticas são obtidas combinando-se uma ou mais proposições. Novas proposições, chamadas de **proposições compostas**, são criadas a partir de proposições existentes usando-se os operadores lógicos, também chamados de conectivos.

Definição 2. *Seja p uma proposição. A **negação** de p é uma nova proposição que será indicada por $\sim p$ e lida como "não p". O valor lógico da proposição $\sim p$ é verdadeiro quando p é falsa, e o valor lógico da proposição $\sim p$ é falso quando p é verdadeira.*

A tabela seguinte, chamada **tabela-verdade**, resume o que foi estabelecido na definição da proposição $\sim p$. Essa tabela tem uma linha para cada uma das possibilidades de valor lógico da proposição p. Cada linha mostra o valor lógico de $\sim p$ correspondente ao valor lógico de p nesta mesma linha.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tabela 1.1: Negação de p.

Exemplo 3

p: O pantanal sul-mato-grossense é uma planície alagada. (verdadeira)

$\sim$ *p: O pantanal sul-mato-grossense não é uma planície alagada. (falsa)*

q: Elefante não tem asas. (verdadeira)

$\sim$ *q: Elefante tem asas. (falsa)*

r: $7 - 5 > 4$. *(falsa)*

$\sim$ *r:* $7 - 5 \leq 4$. *(verdadeira)*

s: $2 \neq 2$. *(falsa)*

$\sim$ *s:* $2 = 2$. *(verdadeira)*

Definição 3. *Sejam p e q proposições. A **conjunção** destas proposições é a proposição "p e q", denotada por $p \wedge q$. A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando ambas são verdadeiras, e falsa em qualquer outro caso.*

A tabela-verdade seguinte nos mostra como o valor lógico da conjunção depende dos valores lógicos das proposições envolvidas. A tabela traz uma linha para cada combinação dos respectivos valores lógicos de p e q, a saber, VV, VF, FV e FF.

Exemplo 4

r: $2 + 2 = 4$ *e* $\sqrt{2} < 2$. *(verdadeira)*

s: $2 + 2 = 4$ *e* $\sqrt{2} \geq 2$. *(falsa)*

t: $2 + 2 \neq 4$ *e* $\sqrt{2} < 2$. *(falsa)*

u: $2 + 2 \neq 4$ *e* $\sqrt{2} \geq 2$. *(falsa)*

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 1.2: Conjunção de p e q.

Definição 4. *Sejam p e q proposições. A **disjunção** destas proposições é a proposição "p ou q", denotada por $p \vee q$. A disjunção $p \vee q$ é falsa quando ambas são falsas, e verdadeira em qualquer outro caso.*

A definição da disjunção $p \vee q$ é representada na tabela-verdade abaixo:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 1.3: Disjunção de p e q.

Exemplo 5

r: π é um número irracional ou $\sqrt{2} < 2$. (verdadeira)

s: π é um número irracional ou $\sqrt{2} \geq 2$. (verdadeira)

t: π não é um número irracional ou $\sqrt{2} < 2$. (verdadeira)

u: π não é um número irracional ou $\sqrt{2} \geq 2$. (falsa)

Definição 5. *Sejam p e q proposições. A **condicional** destas proposições é a proposição "Se p, então q", denotada por $p \rightarrow q$. A condicional $p \rightarrow q$ é falsa quando p é verdadeira e q falsa, e verdadeira em qualquer outro caso.*

A definição da condicional $p \to q$ é representada na tabela-verdade abaixo:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 1.4: Condicional de p e q.

Exemplo 6

r: Se π é um número irracional, então o sol é uma estrela. (verdadeira)

s: Se π é um número irracional, então o sol não é uma estrela. (falsa)

t: Se π não é um número irracional, então o sol é uma estrela. (verdadeira)

u: Se π não é um número irracional, então o sol não é uma estrela. (verdadeira)

Definição 6. *Sejam p e q proposições. A **bicondicional** destas proposições é a proposição "p se e somente se q", denotada por $p \leftrightarrow q$. A bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira sempre que p e q têm o mesmo valor lógico, e falsa caso contrário.*

A definição da bicondicional $p \leftrightarrow q$ é representada na tabela-verdade abaixo:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 1.5: Bicondicional de p e q.

Exemplo 7

r: Elefante não tem asas se e somente se $2+2=4$. *(verdadeira)*

s: Elefante não tem asas se e somente se $2+2\neq 4$. *(falsa)*

t: Elefante tem asas se e somente se $2+2=4$. *(falsa)*

u: Elefante tem asas se e somente se $2+2\neq 4$. *(verdadeira)*

1.3 Fórmulas e Variáveis Proposicionais

Usando os conectivos lógicos - negação, conjunção, disjunção, condicional e bicondicional - podemos construir proposições de maior complexidade envolvendo um número qualquer de variáveis proposicionais. Por exemplo, podemos considerar a proposição composta $(p\vee \sim q)\rightarrow (p\wedge q)$, também chamada de **fórmula proposicional**.

Usamos tabelas-verdade para determinar o valor lógico dessas proposições compostas, como no exemplo abaixo.

Exemplo 8 ***Construção da tabela-verdade*** *da fórmula proposicional* $(p\vee \sim q)\rightarrow (p\wedge q)$.

Como nesta fórmula temos somente duas variáveis proposicionais, p *e* q*, então na tabela-verdade seguinte existem apenas 4 linhas correspondentes às combinações dos respectivos valores lógicos de* p *e* q*: VV, VF, FV e FF. As primeiras duas colunas são usadas para os valores lógicos de* p *e* q*, respectivamente. Na terceira coluna encontramos os valores lógicos de* $\sim q$*, necessários para determinar os valores lógicos de* $p\vee \sim q$*, organizados na quarta coluna. Os valores lógicos de* $p\wedge q$ *são colocados na quinta coluna. Finalmente na última coluna são colocados os valores lógicos de* $(p\vee \sim q)\rightarrow (p\wedge q)$.

p	q	$\sim q$	$p\vee \sim q$	$p\wedge q$	$(p\vee \sim q)\rightarrow (p\wedge q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F

Usando a tabela anterior e considerando as afirmações $p : 2+2 = 5\ (F)$ *e* $q : 3+4 = 7\ (V)$*, concluímos que a proposição* $(p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$ *é verdadeira.*

Observamos que no exemplo acima foram usados parênteses para indicar a ordem em que os operadores lógicos são aplicados. No caso, alterando a posição dos parênteses poderíamos ter considerado uma outra fórmula proposicional, como por exemplo $((p \vee \sim q) \rightarrow p) \wedge q$*.*

Para reduzir o número de parênteses, estabelecemos regras de prioridade para a aplicação de operadores lógicos. A negação é aplicada antes de qualquer outro operador. Isso significa que $\sim p \wedge q$ é a conjunção $(\sim p) \wedge (q)$ e não a negação da conjunção $\sim (p \wedge q)$. Outra regra é que a conjunção terá prioridade sobre a disjunção, então $p \wedge q \vee r$ significa $(p \wedge q) \vee r$ e não $p \wedge (q \vee r)$. A condicional e a bicondicional têm prioridade menor que a conjunção e a disjunção. Finalmente, a condicional deve ter prioridade maior do que a bicondicional.

Exemplo 9

1. *A fórmula* $p \vee q \leftrightarrow p \wedge q$ *deve ser entendida como* $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$*.*
2. *A fórmula* $p \leftrightarrow q \rightarrow r$ *deve ser entendida como* $p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$*.*

A tabela seguinte mostra os níveis de prioridade dos operadores lógicos.

Operador	*Prioridade*
$\sim$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Tabela 1.6: Prioridade dos operadores lógicos.

1.4 Equivalência Lógica

Uma importante estratégia usada na argumentação matemática é a substituição de uma proposição por outra respeitando o mesmo valor lógico.

Nesta seção estudaremos equivalências lógicas usualmente utilizadas na construção de argumentos matemáticos.

Definição 7. *Uma fórmula proposicional que é sempre verdadeira, quaisquer que sejam os valores lógicos de suas variáveis proposicionais, é chamada de* ***tautologia****. Uma fórmula proposicional que é sempre falsa, quaisquer que sejam os valores lógicos de suas variáveis proposicionais, é chamada de* ***contradição****.*

Tautologias e contradições são importantes no raciocínio matemático, como veremos adiante nas demonstrações de teoremas.

Exemplo 10 *Observe na tabela-verdade abaixo que a proposição* $p \wedge \sim p$ *é um contradição.*

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Exemplo 11 *A proposição* $p \vee \sim p$ *é uma tautologia.*

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Definição 8. *As proposições compostas* p *e* q *são chamadas de logicamente equivalentes, ou simplesmente* ***equivalentes****, quando* $p \leftrightarrow q$ *é uma tautologia. Usaremos a notação* $p \Leftrightarrow q$ *para indicar que* p *e* q *são equivalentes.*

Lembrando o significado do conectivo bicondicional, temos que $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia quando nas tabelas-verdade das proposições p e q as colunas que fornecem seus respectivos valores lógicos são idênticas.

É importante observar que o símbolo $\Leftrightarrow$ não é um conectivo lógico e que $p \Leftrightarrow q$ não é uma proposição composta. O símbolo $\Leftrightarrow$ apenas indica que a fórmula proposicional $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.

O próximo exemplo estabelece duas importantes equivalências chamadas de **Leis de De Morgan**.

Exemplo 12 *(Leis de De Morgan) Sejam p e q duas proposições, então são válidas as seguintes equivalências:*

1. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$;

2. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

De fato, construindo as seguintes tabelas-verdade obtemos as respectivas tautologias.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

Tabela 1.7: Leis de De Morgan.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V

Tabela 1.8: Leis de De Morgan.

No exemplo seguinte vamos estabelecer uma equivalência entre duas proposições compostas que envolvem três variáveis proposicionais diferentes: p, q e r. Neste caso, para construir a tabela-verdade precisaremos de oito linhas, uma para cada combinação dos

valores lógicos de p, q e r, respectivamente. Essas oito combinações são VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV e FFF, que serão usadas nesta ordem ao montarmos as linhas da tabela.

Exemplo 13 *As proposições $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee q)$ são equivalentes. Essa equivalência é a* ***propriedade distributiva da disjunção em relação à conjunção****. De fato, construindo a tabela-verdade verificamos que a coluna da disjunção $p \vee (q \wedge r)$ é idêntica à coluna da conjunção $(p \vee q) \wedge (p \vee q)$, assim provando a equivalência lógica*

$$p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee q).$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Exemplo 14 *A proposição $\sim q \rightarrow \sim p$ é chamada de* ***contrapositiva*** *de $p \rightarrow q$. Observe na tabela-verdade abaixo que a condicional $p \rightarrow q$ e sua respectiva contrapositiva $\sim q \rightarrow \sim p$ são equivalentes.*

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Na tabela seguinte apresentamos um resumo com algumas equivalências importantes. A veracidade dessas equivalências podem ser verificadas, como nos exemplos anteriores, por meio das respectivas tabelas-verdade.

Equivalências	Nome
$p \vee p \iff p$	Propriedade idempotente
$p \wedge p \iff p$	Propriedade idempotente
$\sim\sim p \iff p$	Propriedade da dupla negação
$p \vee q \iff q \vee p$	Propriedade comutativa
$p \wedge q \iff q \wedge p$	Propriedade comutativa
$(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$	Propriedade associativa
$(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$	Propriedade associativa
$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Propriedade distributiva
$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Propriedade distributiva
$\sim (p \vee q) \iff\sim p\wedge \sim q$	Lei de De Morgan
$\sim (p \wedge q) \iff\sim p\vee \sim q$	Lei de De Morgan
$p \vee (p \wedge q) \iff p$	Propriedade de absorção
$p \wedge (p \vee q) \iff p$	Propriedade de absorção
$p \to q \iff\sim q \to\sim p$	Contrapositiva

Pela propriedade associativa a proposição $p \vee q \vee r$ está bem definida, no sentido que tanto faz consideramos $(p \vee q) \vee r$ ou $p \vee (q \vee r)$. Analogamente, a proposição $p \wedge q \wedge r$ está bem definida.

Também de grande importância, listaremos agora equivalências que envolvem os conectivos condicionais e bicondicionais.

$p \to q$	$\Longleftrightarrow$	$\sim p \vee q$
$p \to q$	$\Longleftrightarrow$	$\sim q \to \sim p$
$p \vee q$	$\Longleftrightarrow$	$\sim p \to q$
$p \wedge q$	$\Longleftrightarrow$	$\sim (p \to \sim q)$
$\sim (p \to q)$	$\Longleftrightarrow$	$p \wedge \sim q$
$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$\Longleftrightarrow$	$p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \vee (q \to r)$	$\Longleftrightarrow$	$(p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r)$	$\Longleftrightarrow$	$p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$\Longleftrightarrow$	$(p \wedge q) \to r$
$p \leftrightarrow q$	$\Longleftrightarrow$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$

1.5 Quantificadores e suas Negações

1.5.1 Quantificadores

Em matemática encontramos sentenças que não são proposições, como por exemplo,

$$\underbrace{\text{O número real } x}_{sujeito} \underbrace{\text{é maior do que 3}}_{predicado}.$$

Representando por $p(x)$ a declaração "O número real x é maior do que 3." e atribuindo valores à variável x, obteremos proposições. Por exemplo:

$$p(\pi) : \text{O número real } \pi \text{ é maior do que 3. (verdadeira)}$$

$$p(3) : \text{O número real 3 é maior do que 3. (falsa)}$$

A declaração $p(x)$ é chamada de **sentença aberta** ou de **função proposicional**, no caso acima, de variável real x.

Podemos ter funções proposicionais de várias variáveis, por exemplo, considerando as variáveis inteiras a e b na sentença aberta $f(a, b) : a+b = 3$. Neste caso, $f(2, 5) : 2+5 = 3$ é uma proposição falsa e $f(1, 2) : 1 + 2 = 3$ é uma proposição verdadeira.

Quando atribuímos valores às variáveis de uma função proposicional a declaração resultante torna-se uma proposição. Uma importante técnica para criar proposições à partir de funções proposicionais é a quantificação.

Vamos tratar de dois tipos de quantificação:

- A universal, a qual significa que na sentença o predicado é verdadeiro para todos os elementos em consideração.
- A existencial, que nos diz que existe um ou mais elementos para os quais o predicado é verdadeiro.

Dada uma função proposicional de uma ou mais variáveis, chamaremos de **domínio da função** o conjunto de elementos que poderão ser atribuídos às variáveis.

Definição 9. *A **quantificação universal** de uma função proposicional $p(x)$ é a afirmação*

"$p(x)$ é verdadeira para todos os valores do domínio de x."

Notação: *$\forall x, p(x)$, lida como "Para todo x, $p(x)$ é verdadeira" ou simplesmente "Para todo x, $p(x)$". A quantificação universal "para todo" pode ser expressa de outras maneiras, incluindo "para cada", "dado qualquer", "para qualquer", "arbitrariamente".*

Exemplo 15 *Considere $p(x) : x^2 > 0$, onde x é uma variável real. Usando a quantificação universal obtemos a proposição:*

$$x^2 > 0 \text{ é verdadeira para todos os valores de } x \text{ em } \mathbb{R}.$$

Em símbolos:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0. \quad \textit{(falsa)}$$

Definição 10. *A **quantificação existencial** de uma função proposicional $p(x)$ é a afirmação*

"*Existe ao menos um x no domínio tal que $p(x)$ é verdadeira.*"

Notação: *$\exists x, p(x)$, lida como "Existe x tal que $p(x)$ é verdadeira" ou simplesmente "Existe x tal que $p(x)$". A quantificação existencial "existe ao menos um" pode ser expressa de outras maneiras, incluindo "existe", "para algum", "há um", "para pelo menos um". Particularmente, podemos denotar por $\exists! x, p(x)$, lido como "Existe um único x tal que $p(x)$ é verdadeira", o caso em que existe apenas um elemento do domínio que satisfaz a função proposicional $p(x)$.*

Exemplo 16 *Considere $q(x) : x + 1 < 0$, onde x é uma variável real. Usando o quantificador existencial obtemos a proposição:*

$$\textit{Existe } x \in \mathbb{R} \textit{ tal que } x + 1 < 0 \textit{ é verdadeira.}$$

Em símbolos:

$$\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 < 0. \quad \textit{(verdadeira)}$$

Os símbolos $\forall$ e $\exists$ são chamados, respectivamente, de quantificadores universal e existencial. Os significados dos quantificadores são resumidos na tabela abaixo:

Proposição	Será verdadeira quando:	Será falsa quando:
$\forall x, p(x)$	$p(x)$ é verdadeira para todo x.	Existe x tal que $p(x)$ é falsa.
$\exists x, p(x)$	Existe x tal que $p(x)$ é verdadeira.	$p(x)$ é falsa para todo x.

1.5.2 Negação de Quantificadores

Iniciaremos a seção com dois exemplos de proposições quantificadas, uma universal e a outra existencial.

1. p: Para todo número real x tem-se que $x+1$ é maior do que zero. (falsa)

   Neste caso,

   $\sim p$: Existe ao menos um número real x para o qual $x+1$ não é maior do que zero. (verdadeira)

2. q: Existe ao menos um número real x para o qual x^2-1 é menor do que zero. (verdadeira)

   Neste caso,

   $\sim q$: Para todo número real x tem-se que x^2-1 não é menor do que zero. (falsa)

No primeiro exemplo, $p(x)$ é a sentença aberta "$x+1$ é maior do que zero" e o domínio da variável é o conjunto dos números reais. Em símbolos,

$p : \forall x \in \mathbb{R},\ p(x)$. *(quantificação universal)*

Neste caso,

$\sim p : \exists x \in \mathbb{R},\ \sim p(x)$.

No segundo exemplo, $q(x)$ é a sentença aberta "x^2-1 é menor do que zero" e o domínio da variável é o conjunto dos números reais. Em símbolos,

$q : \exists x \in \mathbb{R},\ q(x)$. *(quantificação existencial)*

Neste caso,

$\sim q : \forall x \in \mathbb{R},\ \sim q(x)$.

Esses dois exemplos ilustram as seguintes equivalências lógicas, onde $p(x)$ é uma função proposicional:

$$\sim (\forall x,\ p(x)) \Longleftrightarrow \exists x,\ \sim p(x);$$

$$\sim (\exists x,\ p(x)) \Longleftrightarrow \forall x,\ \sim p(x).$$

As regras para negações de quantificadores são chamadas de leis de De Morgan para quantificadores e são resumidas na seguinte tabela:

Negação	Sentença Equivalente	Será verdadeira quando:	Será falsa quando:
$\sim (\exists x, p(x))$	$\forall x, \sim p(x)$	$p(x)$ é falsa para todo x.	Existe x para o qual $p(x)$ é verdadeira.
$\sim (\forall x, p(x))$	$\exists x, \sim p(x)$	Existe x para o qual $p(x)$ é falsa.	$p(x)$ é verdadeira para todo x.

1.5.3 Quantificadores Agrupados

Consideraremos agora funções proposicionais de duas variáveis $p(x, y)$. Como no caso de funções proposicionais de uma variável, podemos obter proposições usando os quantificadores:

1. Para todos x, y, $p(x, y)$ é verdadeira. Em símbolos, $\forall x \forall y, p(x, y)$.

2. Para todo x existe y tal que $p(x, y)$ é verdadeira. Em símbolos, $\forall x \exists y, p(x, y)$.

3. Existe x tal que para todo y, $p(x, y)$ é verdadeira. Em símbolos, $\exists x \forall y, p(x, y)$.

4. Existem x e y tais que $p(x, y)$ é verdadeira. Em símbolos, $\exists x \exists y, p(x, y)$.

Na tabela abaixo resumimos as regras de utilização dos quantificadores agrupados.

Sentença	Será verdadeira quando:	Será falsa quando:
$\forall x \forall y, p(x, y)$ $\forall y \forall x, p(x, y)$	$p(x, y)$ é verdadeira para todo par x, y.	Existe um par x, y para o qual $p(x, y)$ é falsa.
$\forall x \exists y, p(x, y)$	Para todo x existe um y para o qual $p(x, y)$ é verdadeira.	Existe um x para o qual $p(x, y)$ é falsa para todo y.
$\exists x \forall y, p(x, y)$	Existe um x tal que $p(x, y)$ é verdadeira para todo y.	Para todo x existe um y para o qual $p(x, y)$ é falsa.
$\exists x \exists y, p(x, y)$ $\exists y \exists x, p(x, y)$	Existe um par x, y para o qual $p(x, y)$ é verdadeira.	$p(x, y)$ é falsa para todo par x, y.

Exemplo 17 *(Definição de limite) Considere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função e* $a,\ L \in \mathbb{R}$. *A definição de limite de uma função real nos diz que o número real* L *é o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a *se, e somente se, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que, se* x *é um número real e* $0 < |x - a| < \delta$, *então* $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolos,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon.$$

1.6 Traduzindo Sentenças para Expressões Lógicas

As técnicas de demonstração têm na essência a manipulação de estruturas lógicas por meio das regras de inferência que serão apresentadas no Capítulo II. Por exemplo, sabendo que determinadas fórmulas proposicionais são equivalentes podemos, quando conveniente, substituir uma por outra afim de se construir um argumento válido.

Acontece que nos textos e livros de Matemática não encontramos os teoremas na forma de expressões lógicas, de maneira que nos permita simplesmente aplicar as regras de inferência para provar os resultados. Daí a importância de se familiarizar com a tradução de tais sentenças para a linguagem de expressões lógicas.

Traduzir sentenças do português para expressões lógicas requer cuidado quando envolvem mais de um quantificador distinto. Além disso, dependendo do caso, podem existir mais de uma maneira de traduzir uma sentença particular. Portanto, não existe determinada técnica que pode ser seguida e repetida passo a passo, a não ser o estudo e a prática constante. Ao realizarmos essas traduções, devemos ter em mente o objetivo de produzir expressões lógicas que sejam as mais simples possíveis.

Exemplo 18 *Use funções proposicionais e quantificadores matemáticos para expressar a sentença "Se o quadrado de um inteiro é par, então o inteiro é par".*

Solução: Está implícito na sentença a utilização do quantificador universal, donde, a afirmação é dada por

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ \textit{se } m^2 \textit{ é par então } m \textit{ é par.}$$

Considerando $p(m)$ *a função proposicional "*m^2 *é par", e* $q(m)$ *a função proposicional "*m *é par", temos que*

$$\forall m \in \mathbb{Z}, p(m) \to q(m).$$

Quando o domínio da variável está bem definido, escrevemos simplesmente

$$\forall m, p(m) \to q(m).$$

Exemplo 19 *Transcreva para a linguagem de expressões lógicas a sentença "Para todos x, y reais, tem-se $||x| - |y|| \leq |x - y|$".*

Solução: A expressão "para todos x, y" indica o uso de um quantificador universal para cada variável.

Portanto,

$$\forall x \forall y, ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Exemplo 20 *Transcreva para a linguagem de expressões lógicas a sentença "Se x e y são ambos quadrados perfeitos, então xy também é um quadrado perfeito".*

Solução: Note que quantificadores universais estão implícitos e que a afirmação se refere ao conjunto dos inteiros.

Assim,

$$\forall x \forall y, (\exists a, x = a^2 \wedge \exists b, y = b^2) \to (\exists c, xy = c^2).$$

Exemplo 21 *Traduza para uma expressão lógica a afirmação "Se a e b são inteiros ímpares, então a soma $a + b$ é um inteiro par".*

Solução: Introduzindo as funções proposicionais

$p(a, b)$*: a e b são números ímpares;*

$q(c)$*: c é um número par;*

podemos assim reescrever a sentença

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, p(a, b) \to q(a + b).$$

Como não há dúvida quanto ao domínio das variáveis a e b, escrevemos simplesmente

$$\forall a \forall b, p(a, b) \to q(a + b).$$

Exemplo 22 *Transcreva para uma expressão lógica a afirmação "Todo número real possui um inverso aditivo (ou oposto)".*

Solução: Reescrevendo a sentença explicitando os quantificadores e o domínio tem-se que "Para todo número real x, existe um número real y (chamado de inverso aditivo ou oposto) tal que $x + y = 0$".

Portanto,

$$\forall x \exists y, x + y = 0.$$

Exemplo 23 *Traduza para a linguagem de expressões lógicas a afirmação "A soma de dois números inteiros positivos é sempre positiva".*

Solução: Reescrevendo a sentença tem-se que "Se dois inteiros quaisquer são positivos, então a soma deles é positiva". Usando a simbologia tem-se que

$$\forall x \forall y, (x > 0 \wedge y > 0) \rightarrow (x + y > 0).$$

Lembrando os níveis de prioridade dos conectivos podemos eliminar os parênteses e simplesmente escrever

$$\forall x \forall y, x > 0 \wedge y > 0 \rightarrow x + y > 0.$$

Exemplo 24 *Traduza para uma expressão lógica a sentença "Todo número real diferente de zero tem um inverso multiplicativo".*

Solução: O inverso multiplicativo de um número real $x \neq 0$ é o número real y tal que $xy = 1$. Podemos assim reescrever a sentença "Para todo real x, se $x \neq 0$, então existe um y real tal que $xy = 1$".

Portanto,

$$\forall x, x \neq 0 \rightarrow \exists y, xy = 1.$$

Exemplo 25 *Traduza para uma expressão lógica a sentença "Dados x e y reais, o produto xy é positivo se x e y são ambos positivos ou são ambos negativos".*

Solução: Portanto,

$$\forall x \forall y, (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0) \rightarrow xy > 0.$$

Capítulo 2

Argumentos e Regras de Inferência

Antes do estudo das técnicas de demonstração, apresentadas no Capítulo III, falaremos sobre argumentos e regras de inferência. A demonstração de uma proposição é um argumento que estabelece sua veracidade. Num argumento teremos uma sequência de afirmações verdadeiras que organizam as informações chegando à uma conclusão.

As regras de inferência são ferramentas básicas que nos permitem manipular corretamente as afirmações para a construção de um argumento válido.

Neste capítulo, definiremos implicações e faremos uma abordagem de regras básicas de inferência que envolvem proposições compostas. Por meio de exemplos, vamos descrever como essas regras de inferência podem ser utilizadas na produção de argumentos válidos, que servirão de base para as técnicas de demonstração.

2.1 Implicações

Definição 11. *Sejam p e q proposições compostas. Dizemos que a proposição p implica a proposição q quando a condicional $p \to q$ é uma tautologia. Usaremos a notação $p \Rightarrow q$ para indicar que* ***p implica q****.*

Lembrando a definição do conectivo condicional, temos que $p \to q$ é uma tautologia quando na tabela-verdade não ocorrem linhas com p verdadeira e q falsa.

Observamos que o símbolo $\Rightarrow$ não é um conectivo lógico e $p \Rightarrow q$ não é uma proposição composta, apenas indica que $p \to q$ é uma tautologia.

Proposições quantificadas universalmente como as do tipo $\forall x, p(x) \to q(x)$, costumam

ser indicadas simplesmente por

$$p(x) \Rightarrow q(x),$$

no sentido de que a condicional $p(x) \rightarrow q(x)$ é verdadeira para todo x do domínio em questão.

Exemplo 26 *Temos que $p \wedge q \Rightarrow p$ e $p \wedge q \Rightarrow q$. De fato, $p \wedge q \rightarrow p$ e $p \wedge q \rightarrow q$ são tautologias.*

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow p$	$p \wedge q \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Exemplo 27 *Observe na tabela-verdade abaixo que a condicional $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ é uma tautologia. Portanto, temos a implicação lógica $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.*

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Exemplo 28 *Temos que a condicional $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ é uma tautologia. Portanto, temos a implicação lógica $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$.*

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

2.2 Argumentos

Inicialmente, retomaremos os dois últimos exemplos e estabeleceremos as implicações sem construir as respectivas tabelas.

Exemplo 29 *Sejam p e q proposições. Suponha que as proposições $p \to q$ e p são verdadeiras. Neste caso, podemos concluir que a proposição q também é verdadeira. De fato, como $p \to q$ é verdadeira, não ocorre o caso p verdadeira e q falsa, como sabemos que p é verdadeira concluímos que q também é verdadeira. Portanto, $(p \to q) \wedge p \to q$ é uma tautologia, o que justifica escrevermos $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$.*
Usamos a seguinte representação:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Exemplo 30 *Sejam p e q proposições. Suponha que as proposições $p \to q$ e $\sim q$ são verdadeiras. Neste caso, podemos concluir que a proposição $\sim p$ também é verdadeira. De fato, sabemos que $p \to q \Longleftrightarrow \sim q \to \sim p$ e como $\sim q$ é verdadeira, então, pelo exemplo anterior, concluímos que $\sim p$ também é verdadeira. Portanto, $(p \to q) \wedge \sim q \to \sim p$ é uma tautologia, o que justifica escrevermos $(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$.*
Usamos a seguinte representação:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

Definição 12. *Um **argumento** em lógica proposicional é uma sequência finita de proposições p_1, p_2,..., p_n e q. Um argumento é válido quando $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \to q$ for uma tautologia, isto é, quando $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow q$. Em outras palavras, um argumento é válido quando não ocorre o caso $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ verdadeira e q falsa.*

Usamos a seguinte representação:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

As proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *são chamadas de* ***premissas*** *e a proposição* q *é dita* ***conclusão****.*

2.3 Regras de Inferência

Podemos sempre usar uma tabela-verdade para mostrar que um argumento é válido, provando assim que, sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira. Porém, quando trabalhamos com uma fórmula proposicional envolvendo muitas variáveis, esse método pode ser muito longo e exaustivo. Como alternativa, podemos então estabelecer a validade de alguns argumentos mais simples, como nos dois exemplos anteriores, chamados de regras de inferência. Tais regras podem ser utilizadas para a construção de argumentos mais elaborados.

A tautologia $(p \to q) \wedge p \to q$ (Ex. 27), é uma regra básica de inferência chamada de *Modus ponens*. Em latim, *Modus ponens* significa *modo que afirma*.

A partir de regras básicas, podemos construir novas regras de inferência. Como exemplo, mostraremos que $(p \to q) \wedge \sim q \to \sim p$ é uma tautologia (Ex. 28), usando a regra *Modus ponens*.

1. $p \to q$ (hipótese)
2. $\sim q$ (hipótese)
3. $\sim q \to \sim p$ (equivalência usando (1))

$\therefore \sim p$ (*Modus ponens* usando (2) e (3))

A tautologia $(p \to q) \wedge \sim q \to \sim p$ é chamada de *Modus tollens*. Em latim *Modus tollens* significa *modo que nega* (ou negação do consequente). Outras duas importantes regras de inferência são as tautologias $p \wedge q \to p$ e $p \wedge q \to q$ (Ex. 26), chamadas de *simplificações*.

Exemplo 31 *Usando as regras de inferência estabelecidas, mostre que as hipóteses "Não está chovendo esta manhã e está mais quente que ontem", "Está chovendo pela manhã, se formos ao museu", "Se não formos ao museu, então vamos fazer um passeio no parque" e "Se fizermos um passeio no parque, então estaremos em casa no almoço" nos levam à conclusão "Estaremos em casa no almoço".*

Considere abaixo as seguintes proposições:

p: Está chovendo esta manhã.

q: Está mais quente que ontem.

r: Vamos ao museu.

s: Vamos fazer um passeio no parque.

t: Estaremos em casa no almoço.

Então as respectivas hipóteses são representadas pelas seguintes fórmulas proposicionais: $\sim p \wedge q$, $r \to p$, $\sim r \to s$ *e* $s \to t$. *Utilizando das regras de inferência, construiremos agora um argumento mostrando que, de fato, nossas hipóteses nos levam à conclusão como se segue.*

1. $\sim p \wedge q$ *(hipótese)*
2. $\sim p$ *(simplificação usando (1))*
3. $r \to p$ *(hipótese)*
4. $\sim r$ *(Modus tollens usando (2) e (3))*
5. $\sim r \to s$ *(hipótese)*
6. s *(Modus ponens usando (4) e (5))*
7. $s \to t$ *(hipótese)*

8. t *(Modus ponens usando (6) e (7))*

Portanto, com o argumento acima provamos que, de fato, a sentença

$$t : \textit{Estaremos em casa à noite};$$

decorre das premissas $\sim p \wedge q$, $r \to p$, $\sim r \to s$ *e* $s \to t$.

Na página seguinte apresentamos um resumo com algumas regras de inferência, consideradas básicas. As tautologias podem ser verificadas por meio das respectivas tabelas-verdade ou estabelecidas usando as regras de inferência já apresentadas.

Regra de Inferência	Tautologia	Implicação	Nome
p $\underline{p \to q}$ $\therefore q$	$p \wedge (p \to q) \to q$	$p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$	*Modus ponens*
$\sim q$ $\underline{p \to q}$ $\therefore \sim p$	$\sim q \wedge (p \to q) \to \sim p$	$\sim q \wedge (p \to q) \Rightarrow \sim p$	*Modus tollens*
$p \to q$ $\underline{q \to r}$ $\therefore p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$	$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$	Silogismo hipotético
$p \vee q$ $\underline{\sim p}$ $\therefore q$	$(p \vee q) \wedge \sim p \to q$	$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$	Silogismo disjuntivo
$\underline{p}$ $\therefore p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	Adição
$\underline{p \wedge q}$ $\therefore p$	$(p \wedge q) \to p$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Simplificação
p $\underline{q}$ $\therefore p \wedge q$	$p \wedge q \to (p \wedge q)$	$p \wedge q \Rightarrow (p \wedge q)$	Conjunção
$p \vee q$ $\underline{\sim p \vee r}$ $\therefore q \vee r$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \to (q \vee r)$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$	Resolução

Tabela 2.1: Regras básicas de inferência.

Capítulo 3

Teoremas e tipos de Demonstração

Neste capítulo falaremos sobre os principais métodos de demostrações de teoremas. Formalmente, um teorema é uma proposição que se pode demonstrar que é verdadeira. Uma demonstração, ou prova, é um argumento válido que estabelece a verdade de um teorema. Na demonstração podemos usar axiomas e proposições verdadeiras já estabelecidas, além das hipóteses do teorema. Axiomas ou postulados são proposições assumidas como verdadeiras.

Uma conjectura é uma proposição possivelmente verdadeira mas sem uma demonstração conhecida. Quando uma demonstração válida é encontrada, a conjectura se torna um teorema.

Teoremas também são conhecidos por proposições, corolários ou lemas. Em geral, na organização de um conteúdo matemático a maioria dos teoremas é indicada como proposição e o termo teorema é reservado para os principais resultados do assunto em questão. Um corolário é um teorema consequente de algum outro teorema já demonstrado. Demonstrações longas e complexas podem ser simplificadas quando são estabelecidos teoremas auxiliares durante a argumentação, chamados de lemas.

Discutiremos quatro técnicas que são frequentemente utilizadas para a demonstração de um teorema, listadas a seguir:

- Método da Demonstração Direta;
- Método da Demonstração pela Contrapositiva;
- Método da Demonstração por Absurdo;
- Método da Demonstração por Indução.

3.1 Demonstração Direta

Uma demonstração direta mostra que uma condicional $p \to q$ é verdadeira admitindo que p é verdadeira e concluindo que q também é verdadeira, de modo que a combinação p verdadeira e q falsa não ocorre.

Em uma demonstração direta assumimos que p é verdadeira. A partir desta hipótese e por meio de axiomas, definições, teoremas já demonstrados e as regras de inferências, concluímos que q também é verdadeira.

Traremos agora um exemplo de demonstração direta.

Exemplo 32

Proposição *Seja x um inteiro. Se x é par, então x^2 também é par.*

(Expressão lógica: $\forall x \in \mathbb{Z}, x$ é par $\to x^2$ é par.)

Prova. *(demonstração esquematizada)*

1. *x é par (hipótese);*
2. *Existe um inteiro k tal que $x = 2k$ (definição de paridade);*
3. *$x^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ (aritmética básica);*
4. *$2k^2$ é um inteiro (k é inteiro);*
5. *x^2 é par (conjunção das linhas 3 e 4 e definição de paridade).* ■

Prova. *(demonstração discursiva)*

Suponhamos que x é par. Segue que existe um inteiro k tal que $x = 2k$ e daí temos que $x^2 = 2(2k^2)$, onde $2k^2$ é inteiro. Portanto x^2 é par. ■

3.2 Demonstração pela Contrapositiva

Este segundo método consiste na utilização da equivalência $p \to q \Longleftrightarrow \sim q \to \sim p$. Assim, a condicional $p \to q$ pode ser demonstrada mostrando que a sua contrapositiva $\sim q \to \sim p$ é verdadeira. No processo de demonstração pela contrapositiva, uma prova de que a condicional $\sim q \to \sim p$ é verdadeira pode ser feita, por exemplo, pela prova direta.

Exemplo 33

Proposição *Seja x um inteiro. Se x^2 é par, então x também é par.*

(Expressão lógica: $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2$ é par $\rightarrow x$ é par.)

Prova. *(demonstração esquematizada)*

1. *x não é par (hipótese);*
2. *Existe um inteiro k tal que $x = 2k + 1$ (definição de paridade);*
3. *$x^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ (aritmética básica);*
4. *$2k^2 + 2k$ é um inteiro (k é inteiro);*
5. *x^2 não é par (conjunção das linhas 3 e 4 e definição de paridade).* ■

Prova. *(demonstração discursiva)*

Suponhamos que x^2 não é par. Segue que existe um inteiro k tal que $x = 2k + 1$ e daí temos que $x^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$, onde $2k^2+2k$ é inteiro. Portanto x^2 é par. ■

3.3 Demonstração por Absurdo

Neste método, para provar que uma proposição é verdadeira admitimos que ela seja falsa e usando argumentação válida chegamos à uma contradição.

Para provar que a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira, supomos inicialmente que $p \rightarrow q$ é falsa, ou equivalentemente, que $\sim (p \rightarrow q)$ é verdadeira. Como $\sim (p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$ (página 11), assumimos que p e $\sim q$ são ambas verdadeiras, ou seja, que p é verdadeira e q é falsa. A partir daí e usando argumentação válida chegamos à uma contradição, mostrando assim que a verdade de $p \wedge \sim q$ não é possível.

Particularmente, quando queremos provar que uma proposição simples p é verdadeira, podemos apenas mostrar que $\sim p$ é falsa. Neste método, admitimos que $\sim p$ é verdadeira e usando argumentação válida chegamos à uma contradição, mostrando assim que a verdade de $\sim p$ não é possível.

Exemplo 34

Proposição *Seja m um inteiro. Se $3m+2$ é ímpar, então m também é ímpar.*

(Expressão lógica: $\forall m \in \mathbb{Z}, 3m+2$ é ímpar $\rightarrow$ m é ímpar.)

Prova. *(demonstração esquematizada)*

1. $3m+2$ *é ímpar (hipótese);*
2. m *é par (hipótese do absurdo);*
3. *Existe um inteiro k tal que $3m+2=2k+1$ (definição de paridade, linha 1);*
4. *Existe um inteiro t tal que $m=2t$ (definição de paridade, linha 2);*
5. $3(2t)+2=2k+1$ *(conjunção das linhas 3 e 4);*
6. $2k=6t+1=2(3t)+1$ *(aritmética básica);*
7. $3t$ *é um inteiro (t é inteiro);*
8. $2k=6t+1=2(3t)+1$ *é par e ímpar (definição de paridade);*
9. *Contradição na linha 8.* ■

Prova. *(demonstração discursiva)*

Suponhamos que $3m+2$ é ímpar e que m é par. Segue que, existem inteiros k e t tais que $3m+2=2k+1$ e $m=2t$. Substituindo o valor de $m=2t$ na equação $3m+2=2k+1$ obtemos $3(2t)+2=2k+1$, assim $2k=6t+1=2(3t)+1$, absurdo. Chegamos à uma contradição, pois temos o número par $2k$ igual ao número ímpar $2(3t)+1$. ■

Exemplo 35

Proposição *O número $\sqrt{2}$ é irracional.*

Prova. *(demonstração esquematizada)*

1. $\sqrt{2}$ *é racional (hipótese do absurdo);*
2. $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$*, onde m,n são inteiros primos entre si e $n\neq 0$ (definição de racional);*
3. $2=\dfrac{m^2}{n^2}$ *(aritmética básica);*

4. $m^2 = 2n^2$ *(aritmética básica);*

5. m^2 *é par (definição de paridade);*

6. m *é par (proposição demonstrada);*

7. $m = 2k$, *com* k *inteiro (definição de paridade);*

8. $4k^2 = 2n^2$ *(conjunção das lindas 4 e 7);*

9. $2k^2 = n^2$ *(aritmética básica);*

10. n^2 *é par (definição de paridade);*

11. n *é par (proposição demonstrada);*

12. m *e* n *são pares (conjunção das linhas 6 e 11);*

13. m *e* n *são primos entre si e são pares (conjunção das linhas 2 e 12);*

14. *Contradição na linha 13.* ■

Prova. *(demonstração discursiva)*

Suponha $\sqrt{2}$ *racional. Segue que existem* m *e* n *inteiros, primos entre si, com* $n \neq 0$ *tais que* $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$. *Daí obtemos* $m^2 = 2n^2$ *e assim* m^2 *é par. Usando a proposição demonstrada anteriormente concluímos que* m *é par, logo da forma* $m = 2k$, *com* k *inteiro. Substituindo* $m = 2k$ *na equação* $m^2 = 2n^2$ *obtemos* $4k^2 = 2n^2$, *logo* $n^2 = 2k^2$. *Portanto* n^2 *é par e consequentemente* n *é par, absurdo. Aqui chegamos à uma contradição, pois* m *e* n *são primos entre si. Portanto* $\sqrt{2}$ *é irracional.* ■

3.4 Indução

Considere um inteiro $n \geq 0$ e a proposição

$$p(n) : \forall n, n^2 + n + 41 \text{ é um número primo.}$$

Em 1772, Euler constatou que

$$p(0),\ p(1),\ p(2), \ldots,\ P(39),$$

são todas verdadeiras.

De fato, analisando os primeiros casos

$$p(0) = 41,\ p(1) = 43,\ p(2) = 47,\ p(3) = 53,$$

obtemos números primos. Seguindo os passos de Euler chegaríamos a

$$p(39) = 39^2 + 39 + 41 = 1601,$$

que também é primo. Neste ponto poderíamos ficar convencidos que a proposição é verdadeira. No entanto, temos que

$$p(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 40 + (40 + 1) = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = (40 + 1)^2,$$

portanto $p(40)$ é um quadrado perfeito e assim concluímos que a proposição é falsa.

Consideremos agora um outro exemplo, tomando a seguinte proposição, onde $n \geq 1$ é um inteiro

$$p(n) : \forall n, 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Após inúmeras contas podemos desconfiar que a proposição p é verdadeira, mas não conseguiremos ainda assim testar o resultado para todos os possíveis valores de n. Para provar que de fato p é verdadeira, usaremos o que chamamos de Princípio de Indução Matemática, enunciado, logo abaixo, como um axioma.

3.4.1 Princípio de Indução (1^a Forma)

Seja $p(n)$ uma sentença aberta em $\{n \in \mathbb{Z} | n \geq n_0\}$, onde $n_0 \in \mathbb{Z}$, tal que,

(i) $p(n_0)$ é verdadeira;

(ii) Para todo $k \geq n_0$, se $p(k)$ é verdadeira (hipótese de indução), então $p(k + 1)$ é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Vamos agora retomar o exemplo acima para exemplificar uma aplicação do princípio de indução.

Exemplo 36

Proposição *Para todo inteiro $n \geq 1$ temos que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Prova.

- *Base de Indução (verificação de p(1)):*

  $p(1) : 1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$, *portanto* $p(1)$ *é verdadeira.*

- *Hipótese de Indução:*

  Suponha $p(k)$ *verdadeira para algum* $k \geq 1$, *logo,*

  $$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

  Considere $p(k+1) = (1 + \cdots + k) + (k+1)$. *Usando nossa hipótese de indução temos que*

  $$\begin{aligned} p(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}, \end{aligned}$$

  logo $p(k+1)$ *é verdadeira.*

  Portanto, pelo princípio de indução, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *é verdadeira para todo inteiro* $n \geq 1$. ■

Em alguns casos usa-se uma outra forma do princípio de indução, a qual enunciaremos a seguir.

3.4.2 Princípio de Indução (2^a Forma)

Seja $p(n)$ uma sentença aberta em $\{n \in \mathbb{Z} | n \geq n_0\}$, onde $n_0 \in \mathbb{Z}$, tal que,

(i) $p(n_0)$ é verdadeira;

(ii) Se para todo n, $p(n_0)$ e $p(n_0 + 1)$ e $\cdots$ e $p(n)$ são verdadeiras (hipótese de indução), então $p(n+1)$ é verdadeira.

Então, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Exemplo 37 *Considere a sequência*

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$$

definida da seguinte forma: os dois primeiros termos da sequência são $a_1 = 1$ *e* $a_2 = 3$ *e cada um dos termos subsequentes define-se como a soma dos dois anteriores, isto é,* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Proposição *Na sequência* $(1, 3, 4, 7, 11, \ldots)$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a desigualdade* $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ *é válida.*

Prova.

- *Base de Indução (verificação de* $p(1)$*):*

  $p(1): \ 1 < \frac{7}{4}$, *portanto* $p(1)$ *é verdadeira.*

- *Hipótese de Indução:*

  Tome $n \geq 1$ *e suponhamos agora que a afirmação seja verdadeira para*

  $$p(1),\ p(2),\ p(3),\ \ldots\ , p(n).$$

  Vamos provar que $p(n+1)$ *é verdadeira.*

  Observe que a afirmação $p(2): \ 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ *é verdadeira. Para* $n \geq 2$, *temos* $n, n-1 \geq 1$, *e podemos escrever* $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, *onde* $n,\ n-1 < n+1$. *Sendo assim, da hipótese de indução*

  $$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad e \quad a_{n-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1},$$

  logo,

  $$a_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}\frac{11}{4},$$

  mas como $\frac{11}{4} < \left(\frac{7}{4}\right)^2$, *segue que*

  $$a_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}.$$

  Portanto, pelo princípio de indução $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. ■

Capítulo 4

Exemplos de Demonstrações Matemáticas

Neste capítulo faremos um estudo da estrutura lógica de proposições matemáticas destacando a técnica de demonstração utilizada pelo respectivo autor da prova. Tais demonstrações foram extraídas de livros da Coleção PROFMAT e finalizando o capítulo temos outros quatro exemplos encontrados em livros avaliados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD - 2015).

As seguintes proposições e suas respectivas demonstrações foram extraídas do livro "Fundamentos de Cálculo", Antônio Caminha Muniz Neto, Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática.

Abaixo segue o enunciado do Teorema de Weierstrass para posterior aplicação na prova do Teorema de Rolle.

Teorema 1 *(Teorema de Weierstrass) Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e definida no intervalo* $[a, b]$*, fechado e limitado da reta. Então, existem números* c *e* d*, contidos em* $[a, b]$*, tais que, para todo* $x \in [a, b]$*,*

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Teorema 2 *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função* f *contínua definida em um intervalo aberto* I*. Se* f *tem máximo ou mínimo local em* $x = c, c \in I$ *e* f *é derivável em* c *então* $f'(c) = 0$*.*

Prova.

Suponha que f tenha um máximo local em $x = c$. A prova do caso em que f tem mínimo local em c é totalmente análoga.

Como f é derivável em c, então

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c).$$

Como $f(c)$ é máximo local, há um intervalo (a,b) no domínio de f tal que $c\in(a,b)$ e $f(x)\leq f(c)$. Portanto, $f(x)-f(c)\leq 0$, para todo $x\in(a,b)$.

Se $x<c$ então $x-c<0$ e, portanto $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$ para $x\in(a,b)$, logo

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0. \qquad \text{(i)}$$

Por outro lado, $x>c$ então $x-c>0$ e, portanto, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$ para $x\in(a,b)$, logo

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0. \qquad \text{(ii)}$$

Comparando as desigualdades (i) e (ii) e levando em conta que são os mesmo número, resulta

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)=0.$$

■

Comentários.

A prova é uma demonstração direta.

Respeitando as condições iniciais do enunciado, considere as seguintes sentenças:

$h_1: f$ tem máximo local em $x=c, c\in I$;

$h_2: f$ tem mínimo local em $x=c, c\in I$;

$h_3: f$ é derivável em c;

$t: f'(c)=0$. (tese)

Nestas condições a expressão lógica que representa o teorema é dada por

$$(h_1\vee h_2)\wedge h_3\to t,$$

ou equivalentemente

$$(h_1\wedge h_3)\vee(h_2\wedge h_3)\to t.$$

Observe que na hipótese $(h_1 \vee h_2) \wedge h_3$ o autor opta pela verdade de h_1, destacando que caso a escolha seja h_2 verdadeira a prova será análoga.

Na sequência traremos agora uma demonstração esquematizada, listando passo a passo as definições, propriedades e conceitos matemáticos na argumentação envolvida.

Prova. (demonstração esquematizada)

1. f é derivável em c (hipótese h_3);
2. $\lim\limits_{x\to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$
   (definição de derivada de uma função no ponto);
3. f tem máximo local em $x = c$ e $c \in I$
   (hipótese h_1 - Analogamente caso f tenha mínimo local em $x = c$);
4. Existe $(a, b) \subset I$ tal que $c \in (a, b)$ e $f(x) \leq f(c)$, para todo $x \in (a, b)$
   (definição de máximo local);
5. $\forall x \in (a, b), f(x) - f(c) \leq 0$ (simplificação na linha 4 e aritmética básica);
6. Se $x < c$, então $x - c < 0$ e $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$, logo $\lim\limits_{x\to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$
   (aritmética básica e propriedade de limite);
7. Se $x > c$, então $x - c > 0$ e $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, logo $\lim\limits_{x\to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$
   (aritmética básica e propriedade de limite);
8. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) = 0$ (conjunção das linhas 2, 6 e 7 e aritmética básica). ■

Teorema 3 *(Teorema de Rolle) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Prova.

Pelo Teorema de Weierstrass, a função f contínua em $[a, b]$ possui valor máximo e mínimo no intervalo. Sejam m e M os valores de mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$, respectivamente.

Se estes valores são assumidos nos extremos do intervalo, por exemplo, $f(a) = m$ e $f(b) = M$, então, como $f(a) = f(b)$ por hipótese, o mínimo e o máximo da função são o mesmo valor e, portanto, a função é constante em todo o intervalo. Como a derivada da função constante é nula, temos $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$, o que prova o Teorema de Rolle neste caso.

Caso o mínimo ou máximo absoluto da função não estejam nos extremos do intervalo, então há um ponto c no intervalo aberto (a, b) tal que $f(c)$ é máximo ou mínimo de f. Então c é extremo local de f e, pelo Teorema 6, como f é derivável em (a, b) temos $f'(c) = 0$, o que conclui a demonstração. ■

Comentários.

No enunciado do Teorema de Rolle constam as seguintes sentenças:

$h_1 : f$ é contínua em $[a, b]$;

$h_2 : f$ é derivável no intervalo (a, b);

$h_3 : f(a) = f(b)$;

$t : \exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Nestas condições a fórmula proposicional que representa o teorema é dada por

$$h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \rightarrow t.$$

A prova é uma demonstração direta e o passo inicial foi a aplicação do Teorema de Weierstrass, usando a hipótese h_1. Na sequência o autor adota a estratégia de construir uma demonstração analisando dois casos específicos: se os valores de máximo e mínimo são assumidos nos extremos do intervalo $[a, b]$, ou se são assumidos no interior do intervalo $[a, b]$.

Prova. (demonstração esquematizada)

1. f é contínua em $[a, b]$ (hipótese h_1);
2. $[a, b]$ é um intervalo fechado e limitado (decorre da linha 1);
3. m e M são os respectivos valores de mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$ (Teorema de Weierstrass nas linhas 1 e 2);

Primeiro caso: Se o mínimo e o máximo absolutos são os extremos do intervalo.

4. $f(a) = m$ e $f(b) = M$ (hipótese do primeiro caso);
5. $f(a) = f(b)$ (hipótese h_3);
6. $m = M$ (conjunção das linhas 4 e 5);
7. $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in (a, b)$ (definição de mínimo e máximo);
8. $f(x) = m = M, \forall x \in (a, b)$, isto é, f é constante (conjunção das linhas 6 e 7);
9. f é derivável no intervalo (a, b) (hipótese h_2);
10. $f'(c) = 0, \forall c \in (a, b)$ (conjunção das linhas 8 e 9);

Segundo caso: Se o mínimo ou o máximo absolutos estão no interior do intervalo.

11. $\exists c \in (a, b)$, tal que $f(c)$ é máximo ou mínimo de f (hipótese do segundo caso);
12. f é derivável no intervalo (a, b) (hipótese h_2);
13. $f'(c) = 0$, onde $c \in (a, b)$ (aplicar o Teorema 2 nas linhas 11 e 12). ■

Teorema 4 *(Teorema do Valor Médio) Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Prova.

Para aplicar o Teorema de Rolle, faremos uso de uma função g, definida a partir de f e tal que $g(a) = g(b)$.

Seja a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x \ .$$

Então g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Além disso:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \qquad \text{e}$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \ .$$

Logo, $g(a) = g(b)$. Podemos então aplicar o Teorema de Rolle para g e concluir que existe um $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Mas

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Logo, $g'(c) = 0 \implies f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, o que completa a demonstração do Teorema do Valor Médio. ■

Comentários.

A prova do Teorema do Valor Médio é uma demonstração direta que faz uso de um artifício matemático: a construção de determinada função g, tal que g possibilite a aplicação do Teorema de Rolle.

Respeitando as condições iniciais do teorema, considere as seguintes sentenças:

$h_1 : f$ é contínua em $[a, b]$;

$h_2 : f$ é derivável em (a, b);

$t : \exists c \in (a, b), f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Nestas condições a hipótese do Teorema do Valor Médio é a conjunção $h_1 \wedge h_2$ e a fórmula proposicional que o representa é dada por

$$h_1 \wedge h_2 \to t.$$

Prova. (demonstração esquematizada)

1. f é contínua em $[a, b]$ (hipótese h_1);
2. f é derivável em (a, b) (hipótese h_2);
3. Considere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ (função auxiliar);
4. $g(a) = g(b)$ (aritmética básica);
5. g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) (conjunção das linhas 1, 2 e 3);
6. $\exists c \in (a, b),\ g'(c) = 0$ (aplicar o Teorema de Rolles nas linhas 4 e 5);

7. $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (regras de derivação);

8. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (conjunção das linhas 6 e 7 e aritmética básica). ■

As próximas proposições e suas respectivas demonstrações foram extraídas do livro "Aritmética", Abramo Hefez, Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática.

Proposição 5 *Não existe nenhum número inteiro n tal que $0 < n < 1$.*

Prova.

Suponha por absurdo que exista n com essa propriedade. Logo, o conjunto $S = \{x \in \mathbb{Z}; 0 < x < 1\}$ é não vazio, além de ser limitado inferiormente. Portanto, S possui um menor elemento a, com $0 < a < 1$. Multiplicando esta última desigualdade por a, obtemos $0 < a^2 < a < 1$, logo $a^2 \in S$ e $a^2 < a$, uma contradição. Portanto, $S = \varnothing$. ■

Comentários.

Observe inicialmente que o quantificador universal está implícito na sentença. Assim, podemos representar a proposição por meio da expressão lógica

$$p : \forall n \in \mathbb{Z}, n \notin (0, 1).$$

A prova é por absurdo e o autor considera a verdade de $\sim p$, ou seja, supôs verdadeira a sentença

$$\sim p : \exists n \in \mathbb{Z}, n \in (0, 1),$$

concluindo daí uma contradição.

Corolário 6 *Dado um número inteiro n qualquer, não existe nenhum número inteiro m tal que $n < m < n + 1$.*

Prova.

Suponha, por absurdo, que exista um número inteiro m satisfazendo as desigualdades $n < m < n + 1$, logo $0 < m - n < 1$, o que contradiz a Proposição 5. ■

Comentários.

Podemos representar a sentença por meio da expressão lógica

$$p : \forall m, \forall n \in \mathbb{Z}, m \notin (n, n+1).$$

A prova é por absurdo e análoga a proposição anterior. O autor considera a verdade de $\sim p$, ou seja, supôs verdadeira a sentença

$$\sim p : \exists m, n \in \mathbb{Z}, m \in (n, n+1);$$

concluindo daí uma contradição.

Teorema 7 *(Lema de Gauss) Sejam a, b e c números inteiros. Se $a|bc$ e $(a, b) = 1$, então $a|c$.*

Prova.

Se $a|bc$, então existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ae$.

Se $(a, b) = 1$, então temos que existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ma + nb = 1.$$

Multiplicando por c ambos os lados da igualdade acima, temos que

$$c = mac + nbc.$$

Substituindo bc por ae nesta última igualdade, temos que

$$c = mac + nae = a(mc + ne)$$

e, portanto, $a|c$. ■

Comentários.

Na Aritmética a notação (a, b) indica o máximo divisor comum entre a e b.

A hipótese do teorema conhecido como Lema de Gauss é uma conjunção. A prova é uma demonstração direta e não houve a necessidade de artifícios matemáticos complexos, apenas o uso de definições, propriedades e a aritmética básica dos inteiros.

Considere h_1 a sentença $a|bc$ e h_2 que diz $(a, b) = 1$, nestas condições a fórmula proposicional que representa o teorema é dada por

$$h_1 \wedge h_2 \rightarrow t,$$

onde t é a tese $a|c$.

Prova. (demonstração esquematizada)

1. $a|bc$ (hipótese h_1);
2. Existe um inteiro e tal que, $bc = ae$ (definição de divisibilidade);
3. $(a, b) = 1$ (hipótese h_2);
4. Existem m, n inteiros tais que $ma+nb = 1$ (propriedade do máximo divisor comum);
5. $c = mac + nbc$, onde $c \in \mathbb{Z}$ (aritmética básica);
6. $c = mac + nae = a(mc + ne)$ (conjunção das linhas 2 e 6 e aritmética básica);
7. $a|c$ (definição de divisibilidade na linha 7). ■

Proposição 8 *(Lema de Euclides) Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.*

Prova.

Basta provar que, se $p|ab$ e $p \nmid a$, então $p|b$. Mas, se $p \nmid a$, temos que $(p, a) = 1$ e o resultado segue do Lema de Gauss. ■

Comentários.

A prova é uma demonstração direta e a tese do teorema é a disjunção "$p|a$ ou $p|b$". Chamando de t_1 a afirmação $p|a$ e de t_2 a afirmação $p|b$, a fórmula proposicional que representa o teorema é dada por

$$h \to t_1 \vee t_2,$$

onde h representa a hipótese $p|ab$, e t_1 e t_2 são as duas respectivas afirmações que compõem a tese.

Temos que a disjunção $t_1 \vee t_2$ equivale a condicional $\sim t_1 \to t_2$ (página 11). Assim, a estratégia adotada pelo autor foi assumir como verdade h e $\sim t_1$. Feito isto, após argumentação e a aplicação do Lema de Gauss conclui-se que a afirmação t_2 é verdadeira, validando a tese $t_1 \vee t_2$.

Prova. (demonstração esquematizada)

1. p é primo (condições iniciais do teorema);
2. Os únicos divisores de p são 1 e p (definição de números primos);
3. $p|ab$ (hipótese);
4. $p \nmid a$ (negação de t_1, hipótese adicional);
5. $(p, a)|a$ e $(p, a)|p$ (definição de máximo divisor comum);
6. $(p, a) = 1$ (conjunção das linhas 2, 4 e 5);
7. $p|b$ (aplicar o Lema de Gauss nas linhas 3 e 6). ■

Corolário 9 *Se $p, p_1, \ldots, p_n$ são números primos e, se $p|p_1 \cdots p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1, \ldots, n$.*

Prova.

Use o Lema de Euclides, indução sobre n e o fato de que, se $p|p_i$, então $p = p_i$. ■

Comentários.

Considere as sentenças

$h_1 : p, p_1, \ldots, p_n$ são números primos;

$h_2 : p|p_1 \cdots p_n$.

Nestas condições, a hipótese é a conjunção $h_1 \wedge h_2$ e a fórmula proposicional que representa a proposição é dada por

$$h_1 \wedge h_2 \to t,$$

onde t é a tese "$p = p_i$ para algum $i = 1, \ldots, n$".

A técnica de demonstração indicada é a primeira forma de indução sobre n.

Para $n = 1$ a afirmação nos diz que $p|p_1$ (base de indução), logo $p = p_1$ e, portanto, a afirmação é verdadeira.

Suponha a afirmação válida para n primos, assim, se $p|p_1 \cdots p_n$ (hipótese de indução), então $p = p_i$ para algum $i = 1, \ldots, n$. Suponha agora que $p|p_1 \cdots p_{n+1}$, ou equivalentemente $p|(p_1 \cdots p_n)(p_{n+1})$. Aplicando o Lema de Euclides tem-se que $p|(p_1 \cdots p_n)$ ou $p|p_{n+1}$, logo $p = p_i$ para algum $i = 1, \ldots, n$ ou $p = p_{n+1}$. Portanto a afirmação é válida para $n + 1$.

Teorema 10 *(Teorema Fundamental da Aritmética) Todo número natural maior do que* 1 *ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

Prova.

Usaremos a segunda forma do Princípio de Indução. Se $n = 2$, o resultado é obviamente verificado.

Suponhamos o resultado válido para todo natural menor do que n e vamos provar que vale para n. Se o número n é primo, nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, \ldots, p_r$ e $q_1, \ldots, q_s$ tais que $n_1 = p_1 \cdots p_r$ e $n_2 = q_1 \cdots q_s$. Portanto, $n = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$.

Vamos, agora, provar a unicidade da escrita. Suponha que tenhamos $n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$, onde os p_i e os q_j são números primos. Como $p_1|q_1 \cdots q_s$, pelo corolário acima, temos que $p_1 = q_j$ para algum j, que, após reordenamento de $q_1, \ldots, q_s$, podemos supor que seja q_1. Portanto,

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Como $p_2 \cdots p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares. ■

Comentários.

Note que a tese do Teorema Fundamental da Aritmética é a disjunção $t_1 \vee t_2$, que nos diz "n é primo ou n se escreve de modo único como um produto de números primos". Assim, a expressão lógica que representa o teorema é dada por

$$\forall n \in \mathbb{N},\ h \to t_1 \vee t_2,$$

onde $h : n \geq 2$.

O autor destaca a utilização do segundo princípio de indução para provar o teorema. Na sequência faz indução sobre n concluindo que, de fato, todo natural $n \geq 2$, é primo ou se escreve como um produto de números primos. Neste ponto foi provada a existência do produto de primos, mas a tese pede também a unicidade. A prova da unicidade ocorre ao supor duas representações distintas para o produto dos números primos, concluindo que, na verdade, tais representações são iguais.

Prova. (demonstração esquematizada)

Da existência:

1. 2 é primo (base de indução);
2. Todo número natural menor do que n e maior ou igual a 2, ou é primo ou se escreve de modo único, exceção da ordem dos fatores, como um produto de números primos (hipótese de indução);
3. Se n é primo, nada a demonstrar (a tese é uma disjunção);
4. n é composto (na disjunção $t_1 \vee t_2$, a negação de t_1 requer a verdade de t_2);
5. $n = n_1 n_2$, onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$
   (definição de número composto);
6. $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$, com $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ (simplificação na linha 5);
7. $n_1 = p_1 \cdots p_r$ e $n_2 = q_1 \cdots q_s$, onde $p_1, \ldots, p_r$ e $q_1, \ldots, q_s$ são primos
   (aplicar hipótese de indução);
8. $n = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$ (conjunção das linhas 5 e 7 e aritmética básica).

Da unicidade:

1. $n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$, onde os p_i e os q_j são números primos
   (hipótese da unicidade);
2. $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ (simplificação na linha 1);
3. $p_1 | q_1 \cdots q_s$ (definição de divisibilidade);

4. os p_i e os q_j são números primos (simplificação na linha 1);

5. $p_1 = q_j$ para algum j (Corolário 3 nas linha 3 e 4);

6. Reordenar $q_1, \ldots, q_s$ e supor $p_1 = q_1$ (conjunção das linhas 2 e 5 e aritmética básica);

7. $p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s$ (conjunção das linhas 2 e 6 e aritmética básica);

8. $p_2 \cdots p_r < n$ (conjunção das linhas 1 e 7 e aritmética básica);

9. $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares (hipótese de indução). ■

Proposição 11 *Um elemento $[a] \in \mathbb{Z}_m$ é invertível se, e somente se, $(a, m) = 1$.*

Prova.

Se $[a]$ é invertível, então existe $[b] \in \mathbb{Z}_m$ tal que $1 = [a]\cdot[b] = [a\cdot b]$. Logo, $a\cdot b \equiv 1 \bmod m$, isto é, existe um inteiro t tal que $a \cdot b + t \cdot m = 1$ e, consequentemente, $(a, m) = 1$.

Reciprocamente, se $(a, m) = 1$, existem inteiros b e t tais que $a \cdot b + m \cdot t = 1$ e, consequentemente, $[1] = [a \cdot b + m \cdot t] = [a \cdot b] + [m \cdot t] = [a \cdot b] + [0] = [a \cdot b]$. Portanto, $[a]$ é invertível. ■

Comentários.

Considere as afirmações

$p : [a] \in \mathbb{Z}_m$ é invertível;

$q : (a, m) = 1$.

A expressão lógica que representa a proposição é a bicondicional

$$p \leftrightarrow q,$$

ou equivalentemente

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

Neste caso é necessário realizar a prova de duas condicionais distintas: a da ida $p \rightarrow q$, e a da volta $q \rightarrow p$. Em ambas demonstrações o autor fez uma prova direta.

Corolário 12 *$\mathbb{Z}_m$ é um corpo se, e somente se, m é primo.*

Prova.

Suponha por absurdo que $\mathbb{Z}_m$ é um corpo e m não é primo, então $m = m_1 \cdot m_2$ com $1 < m_1 < m$ e $1 < m_2 < m$. Logo, $[0] = [m] = [m_1] \cdot [m_2]$ com $[m_1] \neq 0$ e $[m_2] \neq 0$, contradição.

Reciprocamente, suponha m primo. Como $(i, m) = 1$ para $i = 1, \ldots, m-1$, segue da Proposição 11 que $[1], [2], \ldots, [m-1]$ são invertíveis. Logo, $\mathbb{Z}_m$ é um corpo. ■

Comentários.

Considere as afirmações

$p : \mathbb{Z}_m$ é um corpo;

$q : m$ é primo.

A expressão lógica que representa o corolário é a bicondicional

$$p \leftrightarrow q,$$

ou equivalentemente

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

Neste caso é necessário realizar a prova de duas condicionais distintas: a da ida $p \rightarrow q$, e a da volta $q \rightarrow p$.

A prova da ida $p \rightarrow q$, a rigor é uma demonstração pela contrapositiva. De fato,

$$p \rightarrow q \Longleftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p.$$

O autor supôs $\sim q$ verdadeira concluindo daí que $\sim p$ também é verdadeira. Note que, no argumento em momento algum foi utilizada a afirmação "$\mathbb{Z}_m$ é um corpo". Somente após a conclusão de que $\sim p$ é verdade que o autor traz a afirmação de que "$\mathbb{Z}_m$ é um corpo", portanto não é uma prova por contradição, mas sim pela contrapositiva. Já a prova da condicional da volta $q \rightarrow p$ é uma demonstração direta.

As seguinte proposição e sua respectiva demonstração foi extraída do livro "Curso de Álgebra, Volume 1", Abramo Hefez, Coleção Matemática Universitária, Sociedade Brasileira de Matemática.

Teorema 13 *(Princípio de Indução Matemática) Seja $p(n)$ uma sentença aberta em $\{n \in \mathbb{Z} | n \geq n_0\}$, onde $n_0 \in \mathbb{Z}$, tal que,*

(i) $p(n_0)$ é verdadeira;

(ii) Para todo $n \geq n_0$, se $p(n)$ é verdadeira (hipótese de indução), então $p(n+1)$ é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Prova.

Seja $F = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq n_0$ e $p(n)$ é falsa$\}$. É claro que F é limitado inferiormente. Queremos provar que F é vazio. Suponha por absurdo que $F \neq \varnothing$, logo pelo princípio da boa ordenação temos que F possui um menor elemento b. Como $b \in F$ temos que $b \geq n_0$, mas por (i) temos que $n_0 \notin F$, logo $b \neq n_0$ e portanto $b > n_0$. Segue pelo Corolário 6 da Proposição 5, que $b - 1 \geq n_0$. Sendo b o menor elemento de F, temos que $b - 1 \notin F$, logo $p(b-1)$ é verdadeira.

De (ii) segue que $p(b)$ é verdadeira, portanto $b \notin F$, contradição. ■

Comentários.

No Capítulo III enunciamos como axiomas o Primeiro e o Segundo Princípio de Indução Matemática. Neste exemplo, o autor utiliza o Princípio da Boa Ordenação em $\mathbb{Z}$ para demonstrar o Segundo Princípio de Indução, também conhecido como Prova por Indução Completa.

Respeitando as condições iniciais do enunciado, considere as seguintes sentenças:

$h_1 : p(n_0)$ é verdadeira;

$h_2 : p(n)$ é verdadeira para $n \geq n_0$; (hipótese de indução)

$t_2 : p(n+1)$ é verdadeira;

$t : p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Sendo assim, podemos representar a afirmação (ii) pela condicional $h_2 \to t_2$ e a hipótese do teorema pela conjunção $h_1 \wedge (h_2 \to t_2)$.

Nestas condições, a expressão lógica que representa o teorema é a condicional

$$h_1 \wedge (h_2 \to t_2) \to t.$$

Aqui o autor fez uma prova por absurdo. De fato, supôs $h_1 \wedge (h_2 \rightarrow t_2)$ verdadeira e t falsa, chegando à uma contradição.

As seguintes proposições e suas respectivas demonstrações foram extraídas do livro "Introdução à Álgebra Linear", Abramo Hefez e Cecília S. Fernandez, Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática.

Proposição 14 *Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. Então, W é um subespaço de V se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) se $u, v \in W$, então $u + v \in W$;

(ii) se $a \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, então $au \in W$.

Prova.

Se W é um subespaço de V, então claramente as condições (i) e (ii) são verificadas.

Reciprocamente, suponhamos que W possua as propriedades (i) e (ii). Para mostrar que W é subespaço de V, precisamos somente verificar que os elementos de W possuem as propriedades A3 (a adição possui elemento neutro) e A4 (a adição possui simétricos). Tome um elemento qualquer u de W, o que é possível pois $W \neq \varnothing$. Pela condição (ii), $au \in W$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Tomando $a = 0$, segue-se que $0u = 0 \in W$ e, tomando $a = -1$, segue-se que $(-1)u = -u \in W$. ■

Comentários.

Respeitando as condições iniciais do enunciado, considere as seguintes sentenças:

$h_1 : u, v \in W$;

$t_1 : u + v \in W$;

$h_2 : a \in \mathbb{R}$ e $u \in W$;

$t_2 : au \in W$;

$p : W$ é um subespaço de V.

Sendo assim, podemos representar as afirmações (i) e (ii) pelas seguintes expressões lógicas:

(i) $h_1 \to t_1$;

(ii) $h_2 \to t_2$.

Nestas condições, a expressão lógica que representa a proposição é a bicondicional

$$p \leftrightarrow (h_1 \to t_1) \wedge (h_2 \to t_2),$$

ou equivalentemente,

$$[p \to (h_1 \to t_1) \wedge (h_2 \to t_2)] \wedge [(h_1 \to t_1) \wedge (h_2 \to t_2) \to p].$$

Neste caso é necessário realizar a prova de duas condicionais distintas: a da ida $p \to (h_1 \to t_1) \wedge (h_2 \to t_2)$, e a da volta $(h_1 \to t_1) \wedge (h_2 \to t_2) \to p$. Em ambas demonstrações o autor fez uma prova direta sem o uso de artifícios matemáticos complexos, simplesmente utilizando definições e propriedades de espaço vetorial.

Proposição 15 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Temos que T é injetiva se, e somente se, $KerT = \{0\}$.*

Prova.

Se uma transformação linear T é injetiva, então a equação $T(v) = 0$ só possui a solução $v = 0$. De fato, sendo T injetiva e como $T(0) = 0$, tem-se que $T(v) = 0 = T(0)$ implica que $v = 0$.

Suponhamos agora que $\mathrm{Ker}T = \{0\}$. Tomemos u e v vetores em V. Se $T(u) = T(v)$, então $T(u) - T(v) = 0$. Equivalentemente, $T(u - v) = 0$. Assim, $u - v \in \mathrm{Ker}T$. Como $\mathrm{Ker}T = \{0\}$, segue-se que $u - v = 0$, logo $u = v$, mostrando a injetividade de T. ∎

Comentários.

Considere as sentenças

$p : T$ é injetiva;

$q : \mathrm{Ker}T = \{0\}$.

A expressão lógica que representa a proposição é a bicondicional

$$p \leftrightarrow q,$$

ou equivalentemente,

$$(p \to q) \wedge (q \to p).$$

Neste caso é necessário realizar a prova de duas condicionais distintas: a da ida $p \to q$, e a da volta $q \to p$. Em ambas demonstrações o autor fez uma prova direta.

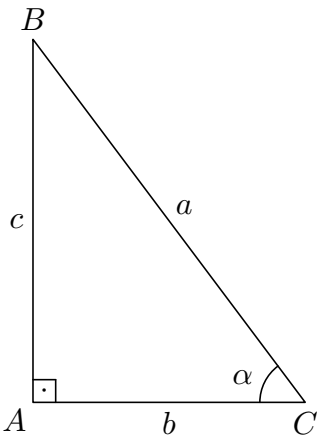
As próximas proposições e suas respectivas demonstrações foram extraídas da coleção "Matemática: Contexto & Aplicações", Luiz Roberto Dante, Editora Ática. Obra catalogada e avaliada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD-2015).

Proposição 16 *Relação fundamental do triângulo retângulo*

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1, \quad 0^o < \alpha < 90^o.$$

Prova.

Consideremos um ângulo α de vértice C e um triângulo CAB, retângulo em A, como mostra a figura.



Lembrando o Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Portanto, $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \ \ (0^o < \alpha < 90^o)$. ■

Comentários.

A demonstração do autor, numa obra voltada aos estudantes do ensino médio, é uma prova direta. A hipótese é a conjunção das sentenças h_1 e h_2 tais que

h_1 : O triângulo CAB é retângulo em A;

h_2 : α é um ângulo interno do triângulo CAB tal que $0^o < \alpha < 90^o$;

e a tese é

t : $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Nestas condições podemos representar a proposição pela expressão lógica

$$h_1 \wedge h_2 \rightarrow t.$$

Prova. (demonstração esquematizada)

1. O triângulo CAB é retângulo em A (hipótese h_1);
2. α é um ângulo interno do triângulo CAB tal que $0^o < \alpha < 90^o$ (hipótese h_2);
3. $sen\alpha = \dfrac{c}{a}$ e $cos\alpha = \dfrac{b}{a}$ (definição);
4. $sen^2\alpha + cos^2\alpha = \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2$
   (regras de potenciação e aritmética básica na linha 3);
5. $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras);
6. $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (conjunção das linhas 4 e 5 e aritmética básica). ■

Teorema 17 *(Fórmula da Soma dos n Primeiros Termos de uma PG Finita) A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica* (a_n) *de razão* $q \neq 1$ *é*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \ .$$

Prova.

Considerando a PG finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ e seja S_n a soma de seus termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n. \quad (I)$$

Vamos multiplicar os dois membros dessa igualdade pela razão q, obtendo:

$$qS_n = a_1q + a_2q + a_3q + \cdots + a_{n-1}q + a_nq,$$

ou

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_nq. \quad (II)$$

Fazendo $(I) - (II)$ obtemos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_nq.$$

Como $a_n = a_1q^{n-1}$, então $a_nq = a_1q^{n-1}q = a_1q^n$, daí:

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1q^n \Rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n).$$

Portanto, $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$, para $q \neq 1$. ■

Comentários.

O argumento consiste, basicamente, na construção da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG. A demonstração é uma prova direta e a hipótese é

$h : (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ é uma progressão geométrica finita;

já a tese é dada por

$t :\ S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$, para $q \neq 1$, é a soma da PG finita.

Assim, podemos representar o teorema pela condicional

$$h \to t.$$

Prova. (demonstração esquematizada)

1. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ é uma PG finita (hipótese);
2. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ (notação para a demonstração);
3. $qS_n = a_1q + a_2q + a_3q + \cdots + a_{n-1}q + a_nq$
   (multiplicação da linha 2 pela razão $q \neq 1$);
4. $a_n = a_{n-1}q$ (definição de PG);
5. $qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_nq$ (conjunção das linhas 3 e 4);
6. $S_n - qS_n = a_1 - a_nq$ (diferença da linha 2 pela linha 5);

7. $a_n = a_1 q^{n-1}$ (termo geral de uma PG - propriedade);

8. $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ (conjunção das linas 6 e 7 e aritmética básica). ■

As seguintes proposições e suas respectivas demonstrações foram extraídas da coleção "Matemática-Paiva", Manoel Rodrigues Paiva, Editora Moderna. Obra catalogada e avaliada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD-2015).

Teorema 18 *(Teorema do Resto) Sendo a uma constante complexa qualquer, o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x-a$ é igual a $P(a)$.*

Prova.

(O símbolo $\equiv$ deve ser lido como "*é idêntico a*".)

Sejam, respectivamente, $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x-a$, ou seja:

$$P(x) \equiv Q(x) \cdot (x-a) + R(x). \quad \text{(I)}$$

Como $gr(R) = 0$ ou $R(x) \equiv 0$, podemos indicar $R(x)$ por uma constante R.

Assim, a sentença (I) pode ser representada sob a forma:

$$P(x) \equiv Q(x) \cdot (x-a) + R.$$

Calculando $P(a)$, obtemos:

$$P(a) = Q(a) \cdot (a-a) + R \Longrightarrow P(a) = R.$$

Logo, o resto R da divisão é igual a $P(a)$. ■

Comentários.

A prova é uma demonstração direta e o teorema pode ser representado pela expressão lógica $h \rightarrow t$, onde

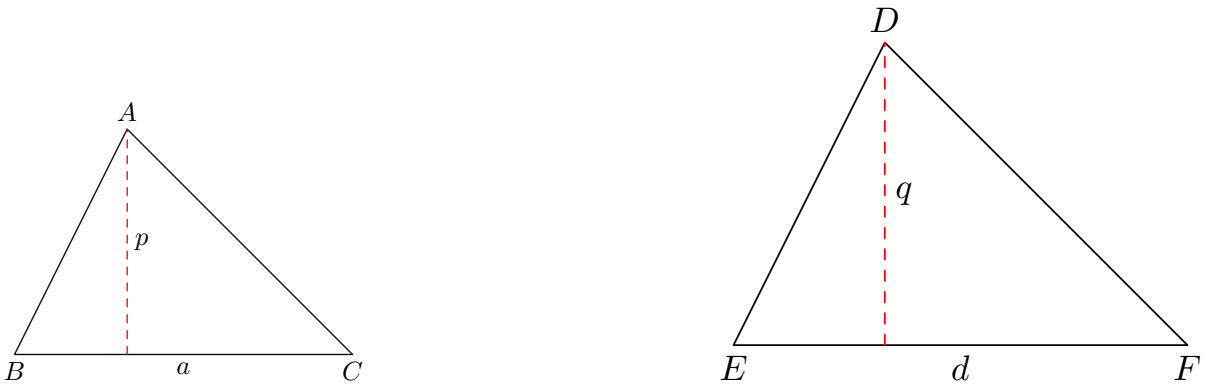
$h : a \in \mathbb{C}$; (hipótese)

$t : P(x) \equiv Q(x) \cdot (x-a) + P(a)$. (tese)

Proposição 19 *A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

Prova.

Consideremos os triângulos semelhantes ABC e DEF, tais que a razão de semelhança do primeiro para o segundo seja k:



$$\frac{a}{d} = \frac{p}{q} = k.$$

Calculando a razão da área A_1 do primeiro triângulo para a área A_2 do segundo, temos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{ap}{2}}{\frac{dq}{2}} = \frac{ap}{dq} = \frac{a}{d} \cdot \frac{p}{q} = k \cdot k = k^2.$$

■

Comentários.

A prova é uma demonstração direta.

Considerando A_1 e A_2 as respectivas áreas dos triângulos semelhantes ABC e DEF e k a razão de semelhança do primeiro para o segundo triângulo, podemos assim representar a hipótese h e a tese t do teorema

h : Os triângulos ABC e DEF são semelhantes de razão k;

$t : \dfrac{A_1}{A_2} = k^2.$

Nestas condições, a fórmula proposicional que traduz o teorema é a condicional $h \to t$.

Prova. (demonstração esquematizada)

1. Os triângulos ABC e DEF são semelhantes (hipótese);
2. $\dfrac{a}{d} = \dfrac{p}{q} = k$ (k é a razão de semelhança);

3. A_1 e A_2 são as respectivas áreas dos triângulos ABC e DEF

   (notação para a demonstração);

4. $\frac{A_1}{A_2} = k^2$ (aritmética básica). ■

Capítulo 5

Considerações Finais

Ao iniciarmos o estudo da lógica proposicional, e no desenvolvimento deste trabalho, vemos sua importância na compreensão e redação de textos matemáticos.

À medida que avançamos pelo caminho da lógica matemática, através do estudo de proposições ou teoremas, percebemos que o passo inicial é buscar compreender melhor qual estrutura lógica está por traz de cada afirmação. (O que é a sentença matemática, uma negação? Uma conjunção ou uma disjunção? Condicional, bicondicional, ou a combinação destas?). Tendo em mente em qual estrutura lógica se apoia a afirmação matemática, a compreensão de uma prova ou demonstração virá como consequência da aplicação de conceitos, propriedades, definições ou mesmo de outros resultados já demonstrados (lemas), associada à técnica de demonstração apropriada.

Por fim, é sabido que não há determinada técnica ou linha de estudo que possibilite saltos ou rápidos ganhos no aprendizado da matemática, se não o estudo e a prática constante. Nesse sentido, esperamos que este trabalho possa, de alguma forma, contribuir para a formação de professores de matemática, colaborando assim para melhor formação de seus alunos.

Referências Bibliográficas

[1] ABRAMO HEFEZ (2014). *Aritmética,* Coleção PROFMAT, SBM.

[2] ABRAMO HEFEZ (2003). *Curso de Álgebra,* Volume 1, Coleção Matemática Universitária, SBM.

[3] ABRAMO HEFEZ e CECÍLIA C. FERNANDEZ (2012). *Introdução à Álgebra Linear,* Coleção PROFMAT, SBM.

[4] ANTÔNIO CARLOS MUNIZ NETO (2016). *Fundamentos de Cálculo,* Coleção PROFMAT, SBM.

[5] CÉSAR POLCINO MILIES e SÔNIA PITTA COELHO (1998). *Números Uma Introdução à Matemática,* Edusp.

[6] DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO (2014). *Manual de Redação Matemática,* SBM.

[7] DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO (2010). *Um Convite à Matemática - Fundamentos-Lógicos com Técnicas de Demonstração, Notas Históricas e Curiosidades,* Fábrica de Ensino.

[8] EDGARD DE ALENCAR FILHO (2002). *Iniciação à Lógica Matemática,* Nobel.

[9] ELON LAGES LIMA (2013). *Números e Funções Reais,* Coleção PROFMAT, SBM.

[10] JORGE DELGADO, KATIA FRENSEL e LHAYLLA CRISSAFF (2013). *Geometria Analítica,* Coleção PROFMAT, SBM.

[11] JUDITH L. GERSTING (2001). *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação,* LTC Editora.

[12] KENNETH H. ROSEN (1995). *Discrete Mathematics and its Applications,* Mc.Graw-Hill, Inc.

[13] LUIZ ROBERTO DANTE (2013). *Matemática: Contexto & Aplicações,* Volumes 1, 2 e 3, Editora Ática.

[14] MANOEL PAIVA (2013). *Matemática Paiva,* Volumes 1, 2 e 3, Editora Moderna.

[15] http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/5940-guia-pnld-2015

Página consultada em 14/10/2016.