

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL**

ADEMIR MEDEIROS DOS SANTOS JUNIOR

**A IMPORTÂNCIA DA MÚSICA COMO INSTRUMENTO MOTIVADOR PARA AS
AULAS DE MATEMÁTICA**

CAMPO GRANDE

2015

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL**

ADEMIR MEDEIROS DOS SANTOS JUNIOR

**A IMPORTÂNCIA DA MÚSICA COMO INSTRUMENTO
MOTIVADOR PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA**

ORIENTADOR: Prof. Dr. EDSON CARVALHO RODRIGUES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática – INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

**CAMPO GRANDE – MS
FEVEREIRO 2015**

A IMPORTÂNCIA DA MÚSICA COMO INSTRUMENTO MOTIVADOR PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA

ADEMIR MEDEIROS DOS SANTOS JUNIOR

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edson Rodrigues Carvalho – UFMS

Prof. Dr. Claudemir Aniz - UFMS

Profa. Dra. Selma Helena Marchiori Hashimoto – UEMS

CAMPO GRANDE – MS

FEVEREIRO DE 2015

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Método de divisão musical.....	28
Figura 2 - Método de divisão musical (exemplo 2).....	29
Figura 3- Início da música Amigos para Sempre - cálculo matemático.....	32
Figura 4 - Ponto de aumento.....	35
Figura 5- Lição 58 do livro Método de Divisão Musical.....	35
Figura 6 – Questão sobre frações e música.....	36
Figura 7 – Intervalos e suas razões.....	38
Figura 8 - Sequência de notas no piano.....	44
Figura 09 - Ciclo das quintas.....	45
Figura 10 – Gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3^x$	47
Figura 11 – Notas musicais e PG crescente.....	51
Figura 12 – Flauta Pan e Xilofone.....	55

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Divisão de valores das notas.....	31
Quadro 2 – Escala diatônica.....	39
Quadro 3 – Razões entre os comprimentos da corda.....	43
Quadro 4 – Escala diatônica - divisão do comprimento de cordas.....	43
Quadro 5 – Notas musicais e termos da progressão geométrica.....	50

RESUMO

Neste trabalho, as relações entre música e matemática são descritas de modo a mostrar a importância de se utilizar estas relações para despertar no aluno do ensino fundamental e médio o gosto pela matemática. Inicialmente faz-se um breve comentário sobre aprendizagem nas aulas de matemática, sobre interdisciplinaridade, livro didático e projetos. Apresenta-se um pouco sobre a história da música e a matemática e da música como recurso didático, assim como a música na sala de aula. Conceitos e definições de música são apresentados, juntamente com a construção da primeira escala musical que foi realizada utilizando frações de uma corda e suas relações matemáticas associadas. Com base nestas relações uma série de atividades que podem ser utilizadas em sala de aula são sugeridas.

Palavras-Chave: Matemática. Música. Ensino Médio.

ABSTRACT

In this paper, the relationship between music and mathematics are described in order to show the importance of using these relationships to awaken the student's middle and high school a taste for mathematics. Initially makes a brief commentary about learning in math classes, interdisciplinarity, textbook and projects. Present a little about the history of music and mathematics and music as a teaching resource, as well as music in the classroom. Concepts and music definition are presented, along with the construction of the first musical scale that was performed using fractions of a string and its associated mathematical relationships. Based on these relationships series of activities that can be used in the classroom are suggested.

Keywords: Mathematics. Music. Secondary School.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	08
2 APRENDIZAGEM NAS AULAS DE MATEMÁTICA.....	11
2.1 O PROCESSO DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE MATEMÁTICA.....	11
2.2 PROCESSOS DIDÁTICOS E USO DE FERRAMENTAS MATEMÁTICAS.....	17
3 A MÚSICA COMO RECURSO DIDÁTICO.....	21
3.1 A MÚSICA COMO RECURSO DIDÁTICO NO DECORRER DA HISTÓRIA.....	21
3.2 MÚSICA – CONCEITO E DEFINIÇÕES.....	23
3.3 A MÚSICA EM SALA DE AULA.....	25
4 A MÚSICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA.....	28
4.1 AS RELAÇÕES ENTRE A MÚSICA E A MATEMÁTICA.....	28
4.2 SUGESTÕES DE ATIVIDADE.....	36
4.3 FREQUÊNCIA E ALGURA DO SOM.....	37
4.4 PITÁGORAS, ESCALAS MUSICAIS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS.....	37
4.5 SUGESTÃO DE ATIVIDADE – AULA 1.....	40
4.6 RAZÃO E PROPORÇÃO NA MÚSICA.....	41
4.7 SUGESTÃO DE ATIVIDADE - AULA 2 – RAZÕES E PROPORÇÕES NA MÚSICA.....	42
4.8 CICLO DAS QUINTAS.....	47
4.9 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E A ESCALA TEMPERADA.....	48
4.10 SUGESTÃO DE ATIVIDADE – AULA 3 - ATIVIDADE SOBRE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E A ESCALA TEMPERADA	49
4.11 AULA 4 – NÚMEROS PRIMOS E A MÚSICA	51
4.12 SUGESTÃO DE ATIVIDADES	52
4.13 AULA 5 - LOGARÍTIMOS NA MÚSICA	53
4.14 ATIVIDADE 3.....	54
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	55

1 INTRODUÇÃO

A aprendizagem é um processo fundamental da vida, o indivíduo aprende e através dessa aprendizagem, desenvolve os comportamentos que lhe possibilitam viver. Os efeitos da aprendizagem podem ser percebidos em todas as atividades do cotidiano, quando se considera a vida em termos da comunidade ou do indivíduo. Cada geração é capaz de aproveitar das experiências das gerações anteriores, como também, é capaz de oferecer sua contribuição para o crescente patrimônio do conhecimento (BATTRO, 1969).

A disciplina de Matemática frequentemente é deixada de lado pelos alunos e desperta sentimentos de revolta. Não é difícil encontrar estudantes que tem dificuldades e dizerem que odeiam a Matemática. Tal postura é facilmente aceitável e compreensível do ponto de vista emocional, uma vez que, é quase improvável gostarmos de algo que nos foge a compreensão, ou que, nos causem problemas. Por outro lado, os alunos que tem facilidade na disciplina são ávidos por novos desafios, buscam constantemente o auxílio do professor e não desistem quando são colocados diante de situações inusitadas. A existência dessa disparidade de sentimentos e posturas diante da disciplina de Matemática nos faz refletir quais são as possíveis causas, fatores e conteúdos responsáveis por tal fenômeno presentes no contexto escolar. Comprovar esta percepção cultivada ao longo dos anos trabalhando em salas de aula do ensino médio e buscar soluções e estratégias para minimizar esta problemática é a motivação maior para a estruturação desta pesquisa. Nela, buscamos uma interrelação entre a música e a matemática como uma motivação para o ensino e a aprendizagem da matéria.

A música está presente em vários momentos do dia a dia da sociedade, podendo ser decisiva na vida de uma pessoa, podendo ajudá-la a desenvolver habilidades e controles muito importantes. Para direcionamento do estudo o seguinte questionamento foi levantado: Como a relação entre música e Matemática pode ser trabalhada em sala de aula?

Segundo Abdounur (1999), a música produzida pelo tocar de um instrumento ou ouvida por meio de um aparelho de som é matemática, pois o som pode ser interpretado como uma função matemática, a altura musical está relacionada com a frequência, a intensidade com a amplitude da onda, temperamento de uma escala

com a progressão geométrica e Serie Harmônica com Séries de Fourier. Ainda podemos acrescentar que o ritmo contido em qualquer música é a soma constante de números inteiros e frações que permitem a contagem de tempos musicais.

O objetivo geral deste estudo consiste em mostrar a importância da música como um instrumento motivador para o ensino e a aprendizagem de matemática. Mais especificamente, queremos mostrar que a música, ao longo da história, tem desempenhado um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento científico, sendo, em particular, um campo fértil de aplicações da matemática. Além disso, propor algumas sugestões que utilize a música como uma ferramenta motivadora para o ensino e a aprendizagem de um tópico de matemática do ensino médio.

2 A APRENDIZAGEM NAS AULAS DE MATEMÁTICA

2.1 O PROCESSO DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE MATEMÁTICA

O processo ensino aprendizagem tem promovido discussões entre pesquisadores que focam seus estudos nas dificuldades relacionadas ao ensino da matemática.

A questão se dá não pela falta de importância da disciplina, mas pela maneira que é abordada pelos professores, onde sua ação pedagógica é voltada para atividades com apresentação de conceitos e fórmulas, distanciando a realidade do educando. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) prevê que o educando deve desenvolver, dentre outras, as competências e habilidades que o permitam:

Reconhecer o sentido histórico da ciência e da tecnologia, percebendo o seu papel na vida humana em diferentes épocas e na capacidade humana de transformar o meio e compreender as ciências como construções humanas, entendendo como elas se desenvolvem por acumulação, continuidade ou ruptura de paradigmas, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade (BRASIL, 2002, p. 217).

A falta de material didático e de jogos adequados na maioria das escolas são fatores que colaboram para que os conhecimentos da matemática não sejam apresentados aos alunos de forma dinâmica, despertando pouco interesse já que se limita a vê-la como uma ciência baseada em aplicações de fórmulas, quando na verdade é fundamental para a compreensão da maioria dos acontecimentos diários.

Paulo Freire desenvolveu uma proposta de educação dialógica e libertadora contrária à proposta de “educação bancária”, caracterizada por ações de depósito, transferência, transmissão de valores e conhecimentos, onde a relação educador-educando se resume em “narrador” e “dissertador”. Segundo Freire (1971, p. 27):

Este é um modo estático, verbalizado de entender o conhecimento que desconhece a confrontação com o mundo, com a fonte verdadeira do conhecimento, nas suas fases e nos diferentes níveis, não só entre os homens, mas também entre os seres vivos em geral.

A educação baseada no diálogo educador-educando, fornece subsídios para a concepção de um discurso horizontal, levando a formação do homem dialógico de Freire. É necessário que os profissionais da educação estejam cientes que, hoje, a relação das pessoas com o saber passa por muitas alternativas e fontes de conhecimento, além da escola.

E que não devemos ensinar os velhos conteúdos de forma eletrônica, em absoluto, o que quero dizer é que o velho pode ser ensinado num novo olhar e pensar lúdico com o auxílio da informática, buscando formas e meios diversos na transmissão de novas ciências. De se ver como se forma o raciocínio criativo e lógico de um jovem aluno, de como conhecer novas culturas, como viajar pelo mundo, que não seja de forma tradicional, como livros, enfim, trabalhar o imaginário consciente na transmissão de novos saberes (GARRIDO, 2000, p. 28).

Por este fator, a escola deve atuar, segundo Vigotsky (1999), despertando os vários processos internos para que o aluno seja capaz de interagir com os outros alunos, pois o ambiente escolar é considerado o espaço ideal para a obtenção do conhecimento científico, onde a tarefa principal do professor é intermediar o aluno e o objeto de conhecimento.

Vygotsky (1988) considera a aprendizagem como a construção de conhecimentos e não como uma transferência do saber do professor para o aluno, sendo ela um processo de construção de conhecimento, que se dá na interação do aluno com o professor ou com seus pares subjacentes.

O autor desenvolveu a zona de desenvolvimento proximal onde o indivíduo pode realizar sozinho o que teria potencial para realizar, devendo a escola atuar nessa área, para despertar processos internos no momento em que um aluno interage com o outro.

Atrás de um conhecimento científico existe um sistema de hierarquias onde há uma relação entre o sujeito e o objeto do conhecimento. O jogo motiva as aulas e estimula o sujeito a desenvolver “habilidades” para utilizar as funções psicológicas superiores.

Inúmeras são as discussões que tem surgido nos últimos anos acerca do processo de ensino e de aprendizagem nas escolas, teorias são levantadas destacando novas abordagens do professor para com o aluno, sempre visando a

valorização do tempo/espço a ser trabalhado em sala de aula, bem como a relação entre professor e aluno e a construção do conhecimento.

A interdisciplinaridade tem sido utilizada por muitas escolas como um caminho encontrado para alcançar essa valorização em sala de aula, integrando as várias disciplinas que compõem o currículo escolar, mostrando aos alunos que no ensino de ciências pode conter aspectos matemáticos, assim como a educação física podem somar conteúdos da física, da matemática, da biologia, enfim, demonstrando que esses conteúdos se completam se envolvem.

Câmara (1999, p. 15) elucida que:

A interdisciplinaridade deve ser pensada como um elo entre ciências, por um lado, considerando o território de cada uma delas e, ao mesmo tempo, identificando possíveis áreas que possam se entrecruzar, buscando as conexões possíveis. E essa busca se realiza por meio de um processo dialógico que permite novas interpretações, mudança de visão, avaliação crítica de pressupostos, um aprender com o outro, uma nova reorganização do pensar e do fazer.

Conforme afirmou Câmara (1999), portanto, a interdisciplinaridade atua como uma ligação entre as ciências, apesar de cada uma ser vista em sua disciplina. O professor sempre que possível deve levantar o conteúdo de outra disciplina interligando as ciências.

Para Fazenda (1993, p. 41) a “[...] interdisciplinaridade é proposta de apoio aos movimentos da ciência e da pesquisa. É possibilidade de eliminação do hiato existente entre a atividade profissional e a formação escolar”. Assim, trata-se, basicamente, da eliminação de barreiras entre as disciplinas, levantando projetos escolares realizados pelos professores em conjunto para que se possa ter consciência do melhor ponto para interligar as ciências.

Vale destacar que não consiste numa proposta fácil de ser implantada no projeto escolar, visto que exige do professor que se aventure por conteúdos que não são de seu domínio, considerando que a formação desses profissionais ainda se dá de maneira compartimentalizada, abstrata e distante da realidade. Sendo, portanto, fundamental, que os professores atuem de maneira integrada na construção do projeto, trabalhando em equipe de forma a auxiliar o outro em sua abordagem.

Sobre o assunto, Gallo (1999, p. 38) elucida que: “[...] se, no lugar de partirmos de racionalizações abstratas de um saber previamente produzido,

começarmos o processo educacional na realidade que o aluno vivencia em seu cotidiano, poderemos chegar a uma educação muito mais integrada, sem dissociações abstratas”. Assim, trata-se do desenvolvimento do aluno de forma integral, fazendo com ele visualize que as disciplinas estão integradas e podem ser vistas no seu dia a dia, a partir desse conhecimento por parte do aluno, é possível, inclusive, esperar melhorias no seu aproveitamento e rendimento.

Luck (1995) destaca como objetivos da interdisciplinaridade no contexto escolar: a realização do homem como pessoa, nas suas várias dimensões; a superação do individualismo e dos desajustamentos provocados pela fragmentação; a interação política e social do homem em seu meio.

Sabendo-se das dificuldades para implantação da interdisciplinaridade nas escolas, enquanto componente do processo de ensino e de aprendizagem, deve-se buscar soluções e buscar sua concretização.

Pode-se conceber que pela estruturação encontrada no currículo atual, considerando-o como um guia para as propostas educacionais e, sobretudo nas ações adequadas de condução dos trabalhos pelos professores, ainda que “maleável”, é tido como um projeto que funciona de forma eficaz. Contudo, há de se reconhecer que mesmo com uma carga proveniente das transformações de séculos anteriores, o currículo é enriquecido e efetivado de maneira condizente com a forma mais apropriada de seu manejo.

A escola também se torna responsável direta pela condução e disseminação do currículo, contribuindo assim com sua transformação (FORQUIN, 1993). Sob essa ótica, é possível afirmar que uma estruturação ou reestruturação dos conteúdos com base em conceitos amplos de diálogos abertos, favorecem uma perspectiva relacional onde o conhecimento é estabelecido através de uma “via de mão dupla” e ainda caracterizando o aprendizado em um contexto onde todos são educadores e educandos.

A prática pedagógica dentro de um contexto reflexivo e atuante poderá ser um veículo no que diz respeito ao posicionamento político, social e cultural, se refletida em posturas seletivas na educação, mediante a condução não assertiva no âmbito curricular. A condição de vivenciar os conteúdos para as novas gerações estudantis, de forma a não incorrer ao erro de reforçar os desejos e interesses de uma minoria, é certificar que o currículo seja um neutralizador dos extremos, tendo um papel de “naturalizar a seleção cultural”, onde o conhecimento seria uma

consequência natural de todos esses processos da sociedade como um todo, reconhecendo seus valores cultivados e, sobretudo diminuindo as desigualdades (ARAÚJO, 2010).

Enfatiza-se aqui a pedagogia de projetos, como meio para concretização da interdisciplinaridade dentro das escolas. Luck (1995, p. 88) destaca que “interdisciplinaridade caracteriza-se pela intensidade de trocas entre os especialistas e pelo grau de integração real das disciplinas no interior de um mesmo projeto de pesquisa”.

O ensino por projeto é composto por diversas fases, iniciando-se pela definição do tema, em seguida o principal objetivo deve ser delimitado, bem como a formulação de problemas, em seguida, tem-se o planejamento, a execução e divulgação dos trabalhos, podendo favorecer a compreensão e a integralização das informações.

Para Freire (1996) o educador deve atuar com base na realidade dos alunos, desenvolvendo um projeto que também englobe a participação dos mesmos, assim poderá promover maiores laços entre professor e aluno nesse processo, buscando a participação deles de forma ativa.

Acerca do desenvolvimento de projetos, Gonçalves e Pimenta (1990, p. 86) afirmam que:

[...] partindo dos conhecimentos que os alunos já possuem, quando ingressam na escola (adquiridos através das experiências sociais), a escola utilizará métodos que desenvolvam a capacidade de pensar e de sentir, em relação permanente com o fazer. Em síntese, procurará promover o desenvolvimento integrado e integrativo do cidadão, seja em relação a si mesmo, seja em relação a comunidade próxima e à sociedade em geral.

A partir da escolha do tema é que os problemas são formulados e os objetivos são traçados, podendo levantar hipóteses de resultados, que serão tomadas como base no caminhar da execução das atividades.

Prado (1999) elucida que a partir da pedagogia de projetos é possível manter as disciplinas integradas, rompendo os limites entre elas, devendo os educadores no momento de sua elaboração utilizar-se da criatividade, coletividade e interação, levantando as inúmeras dúvidas que surgem no dia a dia em sala de aula,

acreditando que este será o caminho para respondê-las. Deve-se afirmar ainda, que as ideias dos alunos também devem ser fonte de inspiração para o desenvolvimento de projetos, devendo professor e aluno se considerarem como aprendizes permanentes.

Dessa forma, a pedagogia de projetos contribui para a interdisciplinaridade ser implantada dentro da escola com eficiência, fazendo com que a escola funcione como um espaço de construção de aprendizagem significativa.

A prática do professor no processo de ensino e aprendizagem necessita atualmente de uma profunda interação em sala de aula. É importante que o professor acompanhe a aprendizagem do aluno verificando se as técnicas didáticas utilizadas estão sendo bem recebidas. Desta forma, é preciso haver um entusiasmo no ensino principalmente no campo da matemática, através de métodos que incentive os alunos ao estudo (SANTOS, 2001).

O papel do professor de matemática em sala de aula é conduzi-la até o aluno despertando o seu interesse pela matemática. De acordo com Bento de Jesus Caraça (1970):

A Matemática é geralmente considerada uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol nem os clamores dos homens. Isto só em parte é verdadeiro. Sem dúvida, a Matemática possui os seus problemas próprios, que não têm ligação imediata com os problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham, tal como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real; uns e outros se entroncam na mesma mãe.

Cabe ao professor de matemática habituar o aluno a resolver problemas, isso porque diferente de outras disciplinas, não se aprende matemática de um dia para o outro, não se trata de decorar textos, é preciso ser capaz de comparar conceitos, raciocinar, conjecturar e expressar conceitos por meio de fórmulas e aplicá-las.

Ressalta-se que é preciso fazer com que o aluno raciocine, pense livremente fazendo com a resolução de um problema se dê de forma interativa onde o professor deve formular perguntas instigando o aluno obter o resultado. Fazer com que o

aluno desenvolva seu próprio raciocínio é o papel social e humano da matemática na escola. (VASCONCELOS, 2006). Para isso é preciso que o professor:

- Conheça o nível intelectual e as informações que os alunos já possuem;
- Conheça o princípio social dos alunos, evitando conflitos Escola-Meio;
- Utilize estratégias conducentes ao interesse dos alunos (fazendo uso da motivação contínua);
- Forneça um *feedback* aos alunos pela avaliação formativa oral e escrita que deve estar onipresente no processo de ensino e de aprendizagem. (VASCONCELOS, 2006)

Deste modo o professor irá conduzir o aluno à resolução do problema através do raciocínio fazendo com que ele crie novos hábitos de pensamento e ação. Gagné (1971) argumenta que:

O acontecimento num tipo de aprendizagem está sujeito aos pré-requisitos desse conhecimento e que são tipos mais simples de aprendizagem. Deste modo, para resolver certos problemas o aluno deve instruir-se de associações ou fatos específicos e diferenciá-los; seguidamente deve aprender conceitos que começam por ser gerais até se tornarem específicos. Só depois o aluno atinge o conhecimento de certos princípios que lhe permitirão resolver os problemas iniciais. Trata-se assim, de um processo lógico que começa no geral e acaba no particular, iniciando-se no simples e terminando no complexo.

É preciso deixar claro que nem todos os alunos tem a mesma capacidade para resolver um problema, raciocinar de uma forma lógica fazendo com que o professor tenha, que por muitas vezes retornar às matérias já abordadas, mas que não foram bem assimiladas.

2.3 PROCESSOS DIDÁTICOS E USO DE FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

É possível entender o material didático como instrumento intermediador da relação pedagógica, colocando-se como facilitador do processo de ensino e de aprendizagem. De acordo com Bandeira (2008), o material didático pode ser amplamente definido, devendo ser considerado como um produto pedagógico

utilizado na educação, sobretudo, como um material instrucional elaborado com finalidade didática.

Conceituando material didático com base no Ministério da Educação pode-se dizer que consiste em “todo e qualquer recurso utilizado em um procedimento de ensino, visando à estimulação do aluno e à sua aproximação do conteúdo” (BRASIL, 2007, p. 21).

Nesse contexto, é possível depreender do texto, que material didático é um instrumento utilizado para facilitar a transmissão de conhecimentos, sendo uma ferramenta de aproximação entre o aluno e o conteúdo de estudo.

No que diz respeito a material didático impresso, pode-se definir com base em Fernandes (2009) como o recurso pedagógico que possui como suporte de comunicação o papel, tendo como objetivo facilitar o processo de ensino e de aprendizagem. Bandeira (2008) complementa, afirmando que o material didático impresso pode ser dividido em coleções ou conjuntos, podendo se apresentar como: caderno de atividades; guia do aluno; guia do professor; livro-texto; livro didático; livros paradidáticos; pranchas ilustrativas, entre outros. Dentre estes, o mais conhecido e utilizado é o livro didático.

Destacando acerca do livro didático, conforme já foi dito, trata-se de um material impresso, constituído de conteúdos voltados para determinada área/disciplina, podendo conter também exercícios de fixação para cada conteúdo. No Brasil, dificilmente se encontra uma escola que não se utilize deste material didático impresso, ele é tido como ferramenta principal no processo ensino e de aprendizagem, sendo os demais materiais didáticos, seja impresso ou digital, coadjuvantes nesse processo, atuando como complemento às aulas. É possível dizer que com a utilização do livro didático, o professor transmite seus conhecimentos pautado em outra pessoa, o autor do livro, geralmente, alguém consagrado por seus conhecimentos na área em estudo. Assim, o professor trabalha condicionando ideias, sendo este método de ensino por vezes criticado, considerado como um método estático e arbitrário.

Ramos (2007) justifica a utilização do livro didático pela falta de uma biblioteca bem equipada nas escolas e pelo pouco tempo que os professores possuem para preparar suas aulas. Para Geraldi (1987) o uso do livro didático é problemático, já que torna professor e alunos subordinados às suas ideias, havendo

um programa já pronto a ser seguido, com conteúdos, exercícios e avaliação da aprendizagem predispostas. Brito (1997) complementa, informando que o livro didático proporciona a massificação do ensino, reduzindo a autonomia intelectual de cada indivíduo.

Para Coracini (1999, p. 2) o livro didático expõe como e o que o professor deve ensinar, denominando de educação castradora, segundo a linguista:

A escola, enquanto instituição escolar, herda da cultura ocidental o culto ao *logos*, à razão, àquilo que distinguiria os homens dos animais, mascarando, assim, por extensão, a constitutividade heterogênea, polifônica do sujeito e do discurso. Em nome da ordem e do progresso, propõe-se uma educação castradora – apenas a uns é dado o poder de produzir sentido, de decidir sobre o que é bom para uns e outros -, uma educação onde as verdades são absolutas e inquestionáveis porque respaldadas pela ciência, onde só há uma interpretação possível para os fatos e para o mundo; enfim uma educação que silencia, discrimina, reforça o centro e o justifica, impedindo, ou ao menos dificultando, a emergência de uma ética revolucionária marcada pelas `pequenas revoltas e diárias que, no dizer de Foucault, são responsáveis pelos deslocamentos e constante movimento, resultante do turbilhão que constitui a subjetividade heterogênea do discurso e do sujeito.

Assim, o livro didático, apesar de assumir papel de protagonista nas escolas brasileiras é criticado na literatura relacionada ao assunto, sendo considerado como um recurso didático que mecaniza o ensino, não proporcionando a autonomia intelectual de cada indivíduo.

No que se refere ao ensino da matemática é preciso encontrar meios dinâmicos de integrar a pessoa jovem e adulta em uma sociedade tecnológica e científica. Sobre esta consideração, Almeida (1998, p. 21) disserta:

A função social da leitura e da escrita de nomes e números; os pontos de vista que eles têm sobre a escola e o que dela esperam; os mecanismos por eles utilizados para sobreviverem numa sociedade letrada (apanhar o ônibus, identificar preços dos produtos, dividir o salário no fim do mês, guardar o número de telefone, etc.); os conhecimentos e experiências que eles trazem.

Para a aprendizagem da pessoa jovem e adulta, o ensino da matemática deve envolver conteúdos direcionados para o processo de iniciação à formalização

da disciplina. Ou seja, busca-se a construção de uma abordagem ampla que seja efetivada de forma gradativa.

Estima-se que desta forma, o aluno ao final do processo, seja capaz de resolver problemas envolvendo ideias das operações aritméticas, além de reconhecer figuras e formas geométricas presentes no seu cotidiano. (ALMEIDA, 1998).

Explica-se que existe uma preocupação acerca do uso do sistema monetário, leitura e produção de textos, pois há entre os alunos habilidades diversificadas em relação à escrita e à leitura. Para resolver esta situação, costuma-se estimular trabalhos em pares de modo que alunos mais hábeis fiquem juntos com os que possuem alguma dificuldade.

Problemas matemáticos resolvidos de forma dinâmica pelos alunos em sala de aula promovem uma maior participação, onde os estudantes criam situações que representam a transação comercial apontada no problema resultando em discussões significativas sobre a matemática, ao utilizarem diferentes formas para expressarem o nível de conhecimento acerca do conteúdo. (LIMA; BARBOSA, 1999).

Embora o que acontece na prática em sala de aula seja o professor seguir a os conteúdos apresentados no livro didático, existem vários caminhos para propor novos desafios aos alunos, até mesmo de forma interdisciplinar no próximo capítulo será discorrida a relação entre a música e a matemática, tema deste trabalho.

3 A MÚSICA COMO RECURSO DIDÁTICO

3.1 A MÚSICA COMO RECURSO DIDÁTICO NO DECORRER DA HISTÓRIA

O estudo dos fenômenos sonoros já era uma preocupação para os povos primitivos que, em geral, associavam diferentes sons à magia e ao sobrenatural. Fohi (30 a.C.), filósofo chinês, ligava a altura dos sons a elementos fundamentais: ar, água, terra, fogo e vento (NEPOMUCENO, 1977 apud PERROTTA; PERROTTA, 2004).

A música surge com mais evidência na Grécia Antiga, quando tem início a tomada de consciência, da necessidade do ensino da música por uma ótica que pode ajudar o desenvolvimento sociocultural do ser humano, mas por volta de 2.500 a.C, já existiam manifestações musicais no Egito, porém sem o cunho educacional.

Historicamente, a primeira lei quantitativa referente ao estudo do som foi estabelecida por Pitágoras (século VI a.C.) que, ao pesquisar o comportamento das cordas, verificou que seu comprimento estava relacionado à altura do som e, quando se reduzia o comprimento da corda à metade do valor inicial, era possível obter um som duas vezes mais agudo, o que correspondia a uma frequência duas vezes maior que a anterior. Por outro lado, muitos documentos desse período foram perdidos e, como a ordem dos pitagóricos era secreta e comunitária, é arriscado imputar exclusivamente a Pitágoras tal descoberta. Mais correto seria atribuir tais descobertas aos membros da escola pitagórica (BOYER, 2000 apud PERROTTA; PERROTTA, 2004).

Em meados do século XVII, o matemático francês Marin Mersenne conseguiu relacionar a altura de um som com o número de vibrações por segundo, ou seja, com a frequência. Nessa época, Galileu verificou que uma corda vibrando provocava oscilações em uma outra corda igual e nas mesmas condições, desde que estivesse nas proximidades (é o fenômeno da ressonância). Nesse mesmo século, Torricelli construiu o primeiro aparelho a vácuo. Com ele Kiercher demonstrou que o som não se propaga no vácuo; Gassend comparou as velocidades do som de um tiro de canhão (som grave) com um tiro de espingarda (som agudo) e constatou que sons graves e agudos apresentavam velocidades iguais (NEPOMUCENO, 1977 apud PERROTTA; PERROTTA, 2004).

Nessa época, no que diz respeito ao processo educacional, obedecia-se a dois níveis: o básico, para crianças e o avançado direcionado aos jovens. Todas essas organizações e preocupações com a estrutura do ensino da música em Esparta, Creta, Atenas, tinham como objetivo primordial o enfoque religioso e sociocultural.

Duas disciplinas formavam o currículo fundamental: a “música” e a “ginástica”, e elas se distribuíam nos três níveis de formação: primária (dos 7 aos 14 anos); secundária (20 aos 30 anos) e nível superior (30 aos 35 anos).

Na primeira fase, a música ocupava a maior parte da educação, por proporcionar habilidades importantes para a execução de tarefas atribuídas a outras músicas e era desenvolvida de forma ampla com o objetivo de atingir uma educação abrangente que incluía o desenvolvimento total da criança. A segunda fase compreendia o período de estudos das disciplinas “científicas” que formavam o que os gregos denominavam de *quadrivium*, (aritmética, geometria, música e astronomia) que eram as chamadas ciências exatas. Neste período se desenvolvia o estudo da música adquirida pelo aluno na primeira fase. Na terceira fase, o aluno se dedicava aos estudos da *trivium* (gramática, retórica, dialética) sendo trabalhado para construir relações de caráter filosófico. (BEYER, 1993).

A história da música como recurso didático tem sua relevância na possibilidade de permitir o desenvolvimento de competências relacionado à leitura e interpretação de textos. Consta nos PCNs:

Abre-se aí um campo fértil às realizações interdisciplinares, articulando os conhecimentos de História com aqueles referentes à Língua Portuguesa, à Literatura, à Música e a todas as Artes, em geral. Na perspectiva da educação geral e básica, enquanto etapa final da formação de cidadãos críticos e conscientes, preparados para a vida adulta e a inserção autônoma na sociedade, importa reconhecer o papel das competências de leitura e interpretação de textos como uma instrumentalização dos indivíduos, capacitando-os à compreensão do universo caótico de informações e deformações que se processam no cotidiano (BRASIL, 1998).

Como elemento didático, a música atua na preservação da memória e da cultura humana. Essa questão de cultura e memória também é trazida no bojo dos PCN'S:

O direito à memória faz parte da cidadania cultural e revela a necessidade de debates sobre o conceito de preservação das obras humanas. A constituição do Patrimônio Cultural e sua importância para a formação de uma memória social e nacional sem exclusão e discriminações é uma abordagem necessária a ser realizada com os educandos, situando-os nos "lugares de memória" construídos pela sociedade e pelos poderes constituídos, que estabelecem o que deve ser preservado e lembrado e o que deve ser silenciado e "esquecido" (BRASIL, 1998).

Assim, o ensino de música sempre esteve presente na história, fazendo a música parte da história da própria sociedade, estando presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais até os dias de hoje, mesmo que de forma implícita, merecendo uma maior atenção por parte das escolas.

3.2 MÚSICA – CONCEITOS E DEFINIÇÕES

Música é a combinação de ritmo, harmonia e melodia, de maneira agradável ao ouvido. No sentido amplo, é a organização temporal de sons e silêncios (pausas). No sentido restrito, é a arte de coordenar e transmitir efeitos sonoros, harmoniosos e esteticamente válidos, podendo ser transmitida pela voz ou por instrumentos musicais. A música é uma manifestação artística e cultural de um povo, em determinada época ou região, é um veículo usado para expressar os sentimentos¹.

Segundo Paschoal Bona (2002), música é uma arte de manifestar diversos sentimentos mediante o som. Em outras palavras música é uma forma de comunicação universal e que por meio desta expressamos nossos sentimentos. E é dividida em três partes melodia, harmonia e ritmo.

A melodia é a combinação sucessiva de sons, a harmonia a combinação simultânea dos sons, e o ritmo a combinação dos valores dos tempos de cada nota musical.

¹ Disponível em: <http://www.significados.com.br/musica/> Acesso em 30/07/2014.

A música pode ser considerada uma das maiores criações artísticas do homem, por possuir um papel bastante significativo na vida do ser humano, ou seja, pode trazer prazer, confortar o espírito, ajudar a refletir, causar emoção, informar e comportar conteúdo crítico, entre outros. Segundo Abbagnano (2000, p.689):

Duas são as definições filosóficas fundamentais dadas da música. A primeira considera-a como revelação privilegiada e divina ao homem (...) que pode assumir a forma do conhecimento ou do sentimento. A segunda considera-a como uma técnica ou um conjunto de técnicas expressivas que concernem à sintaxe dos sons.

O autor observa que a música é conceituada como uma ciência ou arte privilegiada, tendo como objeto, a realidade suprema e divina, onde na primeira fase a música possui como objeto a harmonia como característica divina do universo e na segunda fase, o objeto da música é o princípio cósmico, ou seja, Deus, razão autoconsciente ou vontade infinita sendo que nesse princípio, a música se autorrevela na forma de sentimento (ABBAGNANO, 2000).

Na “Poética” de Aristóteles a arte como a epopeia, a tragédia, a comédia e variadas espécies de música instrumental e de canto, assim como a dança e a pintura possuem similares no que concerne a imitação da realidade natural e humana. Para isso, faz-se uso de meios elementares como as cores e figuras e também de princípios estéticos gerais como o ritmo e a harmonia. Na concepção de Nunes (1991, p. 28), estes meios e princípios são “aplicáveis aos sons vocais e instrumentais, as palavras na poesia propriamente dita e aos movimentos do corpo na dança”.

No pensamento de Aristóteles a diferença entre as espécies de música instrumental, não residem dos meios que adotam, mas, sobretudo daquilo que é imitado e da forma porque imitam. Na “Poética” de Aristóteles linhas, cores, volumes, movimentos e palavras, coisas e ações eram imitados e representados por certos meios, com o máximo de semelhança ou de fidelidade possível. As artes como a escultura, a poesia e a pintura possuíam conteúdo representativo, na concepção aristotélica, diferentemente da música. Quanto a esta doutrina mimética, esta possui certas sutilezas. Segundo Nunes (1991, p. 38):

No terceiro livro de “A República”, Platão relaciona determinados modos harmônicos com determinados sentimentos e qualifica os ritmos pela escala moral das atitudes. Há ritmos que imitam a baixeza e o desregramento, existem harmonias patéticas, melancólicas e lânguidas, como há entusiásticas, energéticas e marciais. É como se a música pudesse exteriorizar, no tempo, a qualidade efetiva dos sentimentos humanos.

Portanto, na concepção de Platão a música imita um conteúdo psíquico ou moral, e a forma de combinações dos sons corresponde às formas características do entusiasmo, da tristeza e melancolia. O filósofo grego Aristóteles argumentava que a mimese artística é inerente à tendência natural dos homens e animais. Valorizava a arte em decorrência de sua semelhança com a realidade, onde aceita a produção artística como aparência.

Quanto à tendência do ser humano e animais a imitar, Aristóteles argumenta:

Parece haver duas causas e ambas devidas à nossa natureza, que deram origem a poesia. A tendência para a imitação é instintiva no homem, desde a infância. Neste ponto distingue-se de todos os outros seres, por sua aptidão muito desenvolvida para imitação. Pela imitação adquire seus primeiros conhecimentos, por ela todos experimentam prazer. (ARISTÓTELES apud NUNES, 1991, p. 40)

Dessa forma, pode-se dizer que o conceito de mimese, em concordância com o pensamento de Aristóteles das relações entre a arte e a natureza, não imita o individual, mas o essencial e o necessário, ou seja, imitam as coisas como elas deveriam ser de acordo com a finalidade que a natureza se propõe a atingir. Nesse caso, não há imitação das coisas como são por isso Aristóteles dizia que a poesia e a arte como um todo são mais filosóficas que a história.

3.3 A MÚSICA EM SALA DE AULA

Diversos autores, dentre eles psicólogos, psicanalistas e estudiosos do assunto, como Ilari, Martins, Scagnilato, Chiarelli e Barreto, relatam que a música tem a capacidade de atender aos mais diversos aspectos do desenvolvimento humano, como físico, mental, social, emocional e espiritual. Para Martins (2004) a música pode e deve ser utilizada como fator determinante no desenvolvimento

motor, linguístico e afetivo de todos os indivíduos, estando presente em todas as culturas do mundo desde o início da humanidade.

Em texto da UNESCO (2005) refere-se à linguagem musical como sendo uma importante forma de expressão, e que deve ser inserida no contexto educacional nas suas diversas etapas, que se inicia na criança até a adolescência. Para Lima (2010) o educador utilizando-se da música é capaz de explorar e desenvolver as características do aluno, caracterizando-se como ferramenta importante na exploração e desenvolvimento musical, emocional, afetivo e cognitivo da criança e do adolescente. Com a música o aluno desenvolve sua coordenação motora, acuidade visual e auditiva, assim como a memória, atenção, criatividade e capacidade de comunicação e socialização.

Diante do que mencionado pelos autores, percebe-se que a introdução da música em sala de aula como prática educativa, constitui-se em um aliando de aprendizagem não arbitrária e assim desperta na criança e adolescente maior interesse pelos diversos assuntos abordados.

Educar musicalmente é propiciar à criança uma compreensão progressiva da linguagem musical, através de experimento e convivências orientadas. O conhecimento é construído a partir da interação do aluno com o meio ambiente, e o ritmo é parte primordial do mundo que o cerca (MARTINS, 1985, p.47).

Alguns autores se preocupam com o avanço do ensino, a música gradativamente vai perdendo espaço para os livros didáticos e exercícios repetitivos, conduzindo às práticas enfadonhas e descontextualizadas. Importante ressaltar que a música está inserida na prática escolar desde o século passado, passando por mudanças de acordo com tendências e enfoques, constituindo-se num recurso pedagógico de operacionalização de ensino. A música no contexto de ensino aprendizagem conta com meios auxiliares, como os recursos naturais, audiovisuais, visuais, auditivos e estruturais, como componentes auxiliares do momento de ensino/aprendizagem.

Para Snyders (1990) a partir da música e com a música, é possível que se obtenha temas muito ricos e que através deles são abordadas as mais diversas disciplinas. Para o autor as escolares não valorizarem a música, é fato. Porém também é fato que o professor que utiliza a música como instrumento de ensino, ou

seja, como recurso pedagógico, consegue absorver dos alunos maior aprendizado, observado pelo interesse despertado. Logo os resultados obtidos pelos alunos são positivos e importantes para o seu desenvolvimento motor e afetivo.

Ferreira (2007) ressalta que a música deve estar presente na sala de aula, assim como está para as aulas de educação física, pois envolve atividades e situações desafiadoras e significativas, favorecendo a exploração, a descoberta e a apropriação de conhecimento.

De acordo com Góes (2009) as instituições de ensino estão cada vez mais usando a música no ensino/aprendizado, uma vez que a música atrai, une e envolve o aluno constituindo-se como fonte de motivação, elevação da autoestima, estímulo de diferentes áreas do cérebro, aumento da sensibilidade, melhora da criatividade, capacidade de concentração e memorização. Nesse caso, o autor se refere a uma forma de ensino que certamente deveria ser aplicada por todas as instituições de ensino através da música ou outro meio, mas que seja de uma forma não-arbitrária.

Para os autores Chiarelli e Barreto (2005) a música no contexto educacional é uma grande aliada para a percepção, estimula a memória e a inteligência, relacionando-se ainda com habilidades linguísticas e lógico-matemáticas ao desenvolver procedimentos que ajudam o aluno a se reconhecer e a se orientar melhor no mundo. Entende-se assim que com a música os alunos são estimulados e desenvolvem suas atividades com mais facilidade por adquirirem o equilíbrio emocional.

Os autores Chiarelli e Barreto (2005) chamam atenção para o fato de que as atividades de musicalização são aplicáveis também para alunos portadores de necessidades especiais, pois essa forma de ensino caracteriza-se por seu caráter lúdico e de livre expressão e não apresentam pressões nem cobranças de resultados. Dessa forma os alunos nessas condições, permanecem relaxados. A música é uma ponte para a desinibição, contribuindo para o envolvimento social, despertando noções de respeito e consideração pelo outro, e abrindo espaço para outras aprendizagens.

Para Martins (2004) é papel do educador, planejar, diagnosticar e ajudar o aluno a desenvolver a inteligência musical e construir seu conhecimento vivenciando as diversas formas de aprendizagem. Conclui-se assim que a música é uma linguagem cujo conhecimento é construído que não está pronto em “prateleiras”. A

musicalização na escola é uma condutora de aprendizado com alegria, descontração e entusiasmo.

A música pode proporcionar muitos benefícios em âmbito escolar, segundo uma pesquisa realizada pelo psiquiatra e educador búlgaro Dr. Georgi Lozanov, na qual se sugere que a música influencia nossa capacidade de relaxamento, rejuvenescimento e concentração. Lozanov (1978) também sugere que a música tem grande influência nas dimensões cognitivas do aprendiz, acelerando significativamente a quantidade de informações retidas.

Faria (2001) define a música como um importante fator na aprendizagem, pois a criança desde pequena já ouve música, a qual muitas vezes é cantada pela mãe ao dormir, conhecida como cantiga de ninar. Segundo a autora, a música é muito importante na aprendizagem, pois o aluno convive com ela desde muito pequeno.

Se na pedagogia tradicional, o ator principal era o professor e o aluno, mero espectador que recebia os conhecimentos de forma vertical, ou seja, o aluno era o elemento passivo da ação educacional, veremos que hoje, a escola contemplativa se torna insuficiente. Os alunos devem participar ativamente e, o professor quanto mais propiciar isto, mais estará favorecendo a construção de seu próprio conhecimento, o melhoramento das relações entre professores e alunos e uma maior integração. Integração esta que é sempre bem vista entre todas as relações nas sociedades. Em complementação, Silva (2000) observou que foram obtidos importantes resultados no desempenho do aluno por meio de promoção de sua interação nas aulas, o que corrobora a ideia de se considerar ativos os participantes no processo ensino-aprendizagem.

Dessa forma, relacionar a música e a matemática na sala de aula pode ajudar a resolver algumas dificuldades encontradas no ensino. Portanto no próximo capítulo descrevem-se algumas relações entre a música e a matemática que podem ser utilizadas em sala de aula pelos professores da matéria.

4 A MÚSICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA

4.1 AS RELAÇÕES ENTRE A MÚSICA E A MATEMÁTICA

Esta parte do trabalho tem como principal objetivo apresentar conceitos musicais que servirão de suporte para mostrar a relação entre a matemática e a música. A música divide-se em três partes: melodia, harmonia e ritmo. Conforme Bona (2002) se define melodia, harmonia e ritmo como:

Melodia é a combinação dos sons sucessivos (dados uns após os outros); Harmonia é a combinação dos sons simultâneos (dados de uma só vez); e Ritmo é a combinação dos valores dos tempos musicais. Não existe música sem ritmo, e o ritmo de cada música é formado pela combinação entre as figuras das notas e as pausas, ou seja, o silêncio entre dois sons musicais.

As figuras utilizadas para as construções de partituras são as apresentadas a seguir. Ao lado de cada figura acompanha um número que a representa, bem como sua respectiva pausa.

Figura 1 - Método de divisão musical

FIGURA	NOME	PAUSA	NÚMERO
	semibreve		1
	minima		2
	semínima		4
	colcheia		8
	semi colcheia		16
	fusa		32
	semifusa		64

Fonte: Bona (2002)

A Coluna 4 da figura 1 mostra uma sequência de números que está associada à sequência de figuras da primeira coluna. Cada número define o valor do tempo musical da figura que lhe corresponde, conforme a fórmula do compasso musical, fórmula que aparece no início da música determinando o tempo de cada nota. Assim, as figuras, semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa, representam um intervalo de tempo sempre correspondente à metade da figura anterior, ou seja, a semibreve tem duração do dobro da mínima; a mínima tem o dobro de duração da semínima e assim por diante. É fácil perceber que essa sequência de número é uma progressão geométrica.

Outra imagem que exemplifica bem essa relação entre os valores de cada figura musical está na Figura 2:

Figura 2 - Método de divisão musical (exemplo 2)

Semibreve	 =	2 	4 	8 	16 	32 	64 
Minima	 =	2 	4 	8 	16 	32 	
Seminima	 =	2 	4 	8 	16 		
Colcheia	 =	2 	4 	8 			
Semicolcheia	 =	2 	4 				
Fusa	 =	2 					

Fonte: Bona (2002)

Nessa Figura, observamos que uma semibreve equivale a duas mínimas, uma mínima equivale a duas semínimas e assim por diante. Para se compreender um trecho musical, é necessário tanto conhecer essas figuras e seus valores como também a fórmula de compasso dessa música.

Compasso é uma forma de dividir quantitativamente em grupos os sons de uma composição musical com base em notas e pausas. Muitos estilos musicais tradicionais já presumem um determinado compasso. A valsa, por exemplo, tem o compasso $\frac{3}{4}$ e o rock tipicamente usa compassos $\frac{4}{4}$, $\frac{12}{8}$ ou $\frac{3}{4}$.

Para explicarmos melhor a questão dos tempos musicais apresentamos um compasso $\frac{4}{4}$, supondo que cada tempo desse compasso represente um segundo do relógio.

Dessa forma, teremos as divisões dos valores das notas feitas da seguinte forma: semibreve 4 tempos, mínima 2 tempos, semínima 1 tempo, colcheia $\frac{1}{2}$ tempo, semicolcheia $\frac{1}{4}$ de tempo, fusa $\frac{1}{8}$ de tempo e semifusa $\frac{1}{16}$ de tempo. Como no Quadro 1:

Quadro 1 - Divisão de valores das notas

FIGURA	PAUSA	TEMPO	NOMENCLATURA
		4	SEMIBREVE
		2	MÍNIMA
		1	SEMÍNIMA
		$\frac{1}{2}$	COLCHEIA
		$\frac{1}{4}$	SEMI-COLCHEIA
		$\frac{1}{8}$	FUSA

Fonte: Dados primários da pesquisa

Nessa figura, observamos que a relação entre as colunas 1 e 3 – figura e tempo - é mantida constante, mesmo mudando os valores dos tempos das figuras, a razão permanece de 2 para 1.

Usando esse compasso e os tempos divididos dessa maneira, analisamos a forma de divisão musical de um trecho de uma musica conhecida com o título Amigos para Sempre, tema das Olimpíadas de 1992 em Barcelona¹.

Figura 3- Início da música Amigos para Sempre - cálculo matemático



$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mid 1 + 1 + 1 + 1 \mid 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mid 1 + 1 + 1 + 1$$

Fonte: Dados primários da pesquisa

Cada barra vertical, que aparece na Figura 3 corresponde a uma barra de compasso, que é uma simbologia musical para separar a música de quatro em quatro tempos. É possível perceber que a cada quatro tempos inicia-se um novo compasso e, dentro de cada compasso, é feita uma soma dos tempos envolvendo valores inteiros e frações, cuja soma é feita mentalmente quando se toca.

Em um compasso são apresentados dois números como em uma fração, mas não tem o mesmo sentido, pois na fração temos a ideia de divisão entre o numerador (número de cima da fração) e o denominador (número de baixo) o que não acontece na música, o número de cima representa quantos tempos terá cada compasso da música e chamamos de unidade de compasso e o número de baixo representa a figura que preenche um tempo que chamamos de unidade de tempo. A seguir, apresentaremos a definição de fórmula de compasso, alguns exemplos e as sequências dos valores que cada figura tem em seu respectivo compasso.

¹ Musica catalogada pelo Nr. BWV114, do compositor Andrew Lloyd Webber (Londres, 22 de março de 1948). Disponível em: <http://www.umamusicapormes.com.br/partitura.ph>. Acesso em 30/07/2014.

Fórmula de Compasso são os dois números que aparecem em forma de fração no início de cada música, onde a unidade de compasso que é o “numerador” dessa fração indica quantos pulsos tem cada compasso e a unidade de tempo que é o “denominador” indica a figura que representa um pulso, conforme a tabela apresentada na Figura 1. Algumas fórmulas de compasso são:

 **Quaternário simples** têm-se quatro pulsos a cada compasso e a nota que representa um pulso é a semínima. 

 **Ternário simples** têm-se três pulsos a cada compasso e a nota que representa um pulso é a semínima. 

 **Binário simples** têm-se dois pulsos a cada compasso e a nota que representa um pulso é a semínima. 

Observa-se que nessas três fórmulas de compasso apresentadas os tempos musicais correspondem aos mesmos do Quadro 1. De outra forma, se mudarmos a fórmula de compasso muda o valor de cada nota, a nota que correspondia a 2 tempos passa a valer apenas 1, e a de 1 tempo passa a valer $\frac{1}{2}$, e assim por diante.

 **Binário simples** têm-se dois pulsos a cada compasso e a nota que representa um pulso é a mínima. 

 **Ternário simples** têm-se três pulsos a cada compasso e a nota que representa um pulso é mínima. 

 **Quaternário simples** têm-se três pulsos a cada compasso e a nota que representa um pulso é mínima. 

Existem também fórmulas de compasso composto, em que cada pulso é subdividido em três “semipulsos”. Exemplos de compassos compostos:

 **Binário composto** têm-se seis semipulsos (divididos em dois pulsos) e a nota que representa um semipulso é a semínima.



 **Ternário composto** têm-se nove semipulsos (divididos em três pulsos) e a nota que representa um semipulso é a semínima.



 **Quaternário composto** têm-se doze semipulsos (divididos em quatro pulsos) e a nota que representa um semipulso é a semínima.



 **Binário composto** têm-se seis semipulsos (divididos em dois pulsos) e a nota que representa um semipulso é a colcheia.



 **Ternário composto** têm-se nove semipulsos (divididos em três pulsos) e a nota que representa um semipulso é a colcheia.



 **Quaternário composto** têm-se doze semipulsos (divididos em quatro pulsos) e a nota que representa um semipulso é a colcheia.

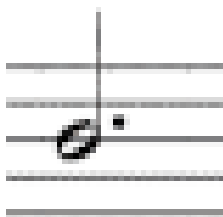


É importante observar que embora as fórmulas de compasso se alterem quando se altera a música, a relação existente entre cada nota não muda, isto é, cada figura de nota corresponde exatamente à metade da anterior, respeitando a seguinte ordem: semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa. Assim, definindo a semibreve como tendo o valor um (1) inteiro, os valores das demais figuras serão estabelecidos na sequência $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ e $\frac{1}{64}$. Portanto essa progressão geométrica é utilizada por qualquer músico que toca lendo partituras.

Além das figuras das notas, outra simbologia utilizada para contagem dos tempos é o ponto de aumento, esse ponto de aumento como veremos na Figura 4 a seguir fica localizado em frente à nota, e com ele aumentamos nessa nota a metade

do seu valor, esse fator é importante e está relacionado com um conceito matemático, estudado no ensino básico: o conceito de função. Pois o valor do ponto depende do valor da nota como uma função, cuja lei de formação é $f(x) = \frac{x}{2}$, onde x é o valor da nota e $f(x)$ o valor do ponto.

Figura 4 - Ponto de aumento



Fonte: Dados primários da pesquisa

Na Figura 4, se considerarmos essa mínima acrescida de um ponto no compasso $\frac{4}{4}$, ela terá 3 tempos e, dessa mesma forma, valerá para todas as outras figuras em seus respectivos compassos: o ponto acrescenta metade do valor da nota. Pode-se usar dois, até três pontos em frente à nota, de modo que o segundo ponto aumenta metade do primeiro e o terceiro aumenta metade do segundo, como se pode observar na Figura 5, onde aparece algumas somas de frações.

Figura 5- Lição 58 do livro Método de Divisão Musical



Fonte: Bona (2002)

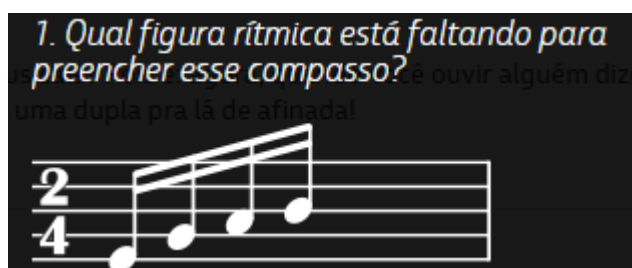
A Figura 5 mostra uma parte da lição 58 do livro Método de Divisão Musical do autor Paschoal Bona, no primeiro compasso uma mínima pontuada que vale 3 tempos pois, somente a mínima vale 2 tempos mais o ponto que vale 1 tempo, no segundo compasso temos uma semínima pontuada que vale $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$, e no

terceiro compasso temos uma semínima duplamente pontuada que vale a $\frac{7}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ além de termos uma repetição de duas colcheias pontuadas que valem cada uma $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, observemos que a soma de cada compasso deve ser 4. Em um compasso quaternário como este, o menor valor de uma figura é de $\frac{1}{16}$, que é a semifusa, e se a figura estiver com três pontos, o terceiro ponto corresponderá a $\frac{1}{128}$, totalizando a figura mais os três pontos $\frac{15}{128} = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$.

4.2 SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Cabe aqui sugerir com atividade para sala aula depois de explicado para os alunos os conceitos sobre as frações, música e as fórmulas de compasso. Propor para os alunos a seguinte questão na figura 1 a seguir:

Figura 6 – Questão sobre frações e música



Fonte: Revista Petrobras Conhecer. Ed 3(2014)

Portanto, uma parte da música que é o ritmo mostra relação entre a música e a matemática, de modo que ao tocar uma musica, o músico está contando os tempos a todo momento, e onde se encaixa perfeitamente a frase do filósofo e matemático Leibniz: “Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi”: “A música é um exercício oculto de aritmética de uma alma inconsciente que lida com números”.

4.3 FREQUÊNCIA E ALTURA DO SOM

A altura musical ou a altura de cada nota é importante para uma música, pois se a música é composta por melodia, harmonia e ritmo como dito anteriormente, e a harmonia é a combinação de sons simultâneos, ao tocar duas notas juntas a “distância” entre os sons que em música chamamos de intervalo musical, pode ser dissonante, não agradável ao ouvido, ou consonante agradável ao ouvido. Segundo Schafer (1991, p.155) dissonância é tensão e consonância é relaxamento.

Altura é a propriedade que permite identificar um som mais agudo ou mais grave, dessa forma, diferenciamos as notas musicais, ou seja, quanto mais aguda a nota diremos que ela é mais alta e quanto mais grave mais baixa. A altura está relacionada com a frequência, de modo que altura é a maneira como o ouvido percebe as frequências sonoras.

Para termos uma melodia, é preciso movimentar o som em diferentes altitudes (frequências). Isto é chamado mudança de altura. Assim diz Murray Schafer em seu livro *O Ouvido Pensante*.

Frequência é o número de ciclos de uma onda num período de tempo. É comum utilizar a unidade de medida hertz (Hz), para expressar a frequência. O som produzido por nossos passos é uma frequência, 1 passo por segundo, 2 passos por segundo, 3 passos por segundo se pudéssemos ouvir 262 passos por segundo teríamos o som da nota dó, a uma frequência de 262 hertz. Os sons consonantes ou agradáveis aos nossos ouvidos são combinações de frequências.

4.4 PITÁGORAS, AS ESCALAS MUSICAIS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Foi com um monocórdio, instrumento de uma única corda que Pitágoras (571 – 496 a. C) realizou suas experiências e tentou organizar os sons consonantes por meio de suas alturas, altura é a propriedade do som que permite identificar um som mais agudo ou mais grave.

Pitágoras percebeu que ao se tocar uma corda produzia som e quando tocada a corda e a sua metade os sons eram reconhecidos pelos nossos ouvidos como o mesmo, o primeiro mais grave e o segundo mais agudo, esse som mais agudo posteriormente foi chamado de oitava.

Segundo Abdounur (1999, p. 5), a primeira experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo, para observar fenômenos de forma artificial foi a de Pitágoras com o monocórdio. Os pitagóricos foram os únicos até Aristóteles a fundamentar cientificamente a música, começando a desenvolvê-la e tornando-se aqueles mais preocupados com esse assunto.

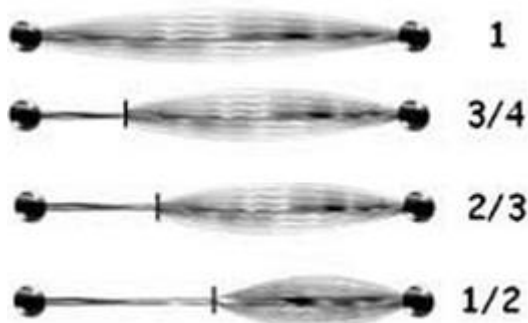
Em se tratando da história da matemática segundo Eves (2004, p. 97):

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagóricos. Esse grupo de matérias tornou-se conhecido na Idade média como quadrivium.

Pitágoras descobriu que se prendermos uma corda na sua terça parte e tocarmos os $\frac{2}{3}$ restantes um novo som aparece que combina com o som da corda solta de forma harmoniosa. E também, se segurarmos a corda de modo a tocar $\frac{3}{4}$ da corda solta, esse outro som que surge combina com o primeiro também de forma agradável ao ouvido humano.

Utilizando essa ideia e não importando qual nota representava a corda solta em uma experiência como da Figura 7, se a corda tivesse 12 unidades de medida, quando tocada com 9 unidades produzia um som, com 8 unidades outro som e com 6 unidades o mesmo som da corda solta, porém mais agudo. Os quatro sons combinavam harmoniosamente e posteriormente foram chamados de quarta, quinta e oitava por causa da quantidade de tons entre um som e outro. Tom musical é um intervalo entre duas notas, por exemplo, entre a nota Dó e nota Ré existe um tom, entre as notas Dó e Mi existem dois tons.

Figura 7 – Intervalos e suas razões



Fonte: Dados primários da pesquisa

Utilizando essa forma de encontrar as notas para formar uma escala musical, isto é, uma sequência de sons, e considerando a nota fundamental a corda solta e sua oitava a metade da corda, pois esses sons são interpretados pelo ouvido humano como o mesmo som, um mais agudo e outro mais grave, as demais notas foram “procuradas” ou encontradas dentro dessa oitava. Logo se a nota estivesse acima da oitava inicial utilizava-se o dobro do valor daquela corda para voltar para a oitava inicial. Veja com números considerando a corda solta a nota Dó:

$$\text{Sol} = \frac{2}{3} \text{ Dó.}$$

Ré = $\frac{2}{3}$ Sol = $\frac{4}{9}$ Dó que é menor do que metade da corda, isto é, passou da primeira oitava, logo se multiplica por dois e obtemos a nota Ré na primeira oitava com tamanho $\frac{8}{9}$ Dó.

Multiplicando-se a nota Ré por $\frac{2}{3}$ temos a nota Lá, Lá = $\frac{2}{3}$ Ré = $\frac{16}{27}$ Dó. Da mesma forma para achar a próxima quinta que é a nota Mi multiplicamos o Lá por $\frac{2}{3}$.

Assim, Mi = $\frac{2}{3}$ Lá = $\frac{32}{81}$ Dó que é menor do que metade da corda, e como passou da oitava então se multiplica por 2 para obtermos a nota Mi na primeira oitava com tamanho $\frac{64}{81}$ Dó.

A nota Si, por sua vez é $\frac{2}{3}$ Mi = $\frac{128}{243}$ Dó. Assim formou-se uma escala com as seguintes razões.

Quadro 2 – Escala diatônica

Nota	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Comprimento da corda	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Fonte: Dados primários da pesquisa

4.5 SUGESTÃO DE ATIVIDADE - AULA1 – APRESENTANDO A RELAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA

Na primeira aula deve-se buscar a aproximação dos alunos com a Matemática e sua relação com a música, destacando o fato de que a Matemática está presente nos mais diferentes setores da vida. Na ocasião, deve-se iniciar uma conversa com os alunos, pedindo que reflitam e debatam sobre os seguintes questionamentos:

- Em que atividades do cotidiano a Matemática está presente?
- Você sabia que a Matemática também está presente na música?

A partir desses dois questionamentos e dependendo do debate em sala de aula, podem ser proferidos outros questionamento relacionados ao assunto, tendo em vista levantar a curiosidade do aluno.

Após esse debate inicial o professor deve apresentar o vídeo a ser visto em sala de aula “Donald no país da Matemática” e a partir disso novas reflexões e debates devem ser realizados com os alunos, com indagações como:

- Qual a relação entre Matemática e música que pode ser observada no vídeo?
- Qual sua opinião em relação ao assunto?

A partir disso, o professor pode informar aos alunos os assuntos a serem abordados nas próximas aulas, levantando o interesse dos alunos sobre essa relação e os deixando curiosos para que, com isso, possa tornar as aulas seguintes mais produtivas.

4.6 RAZÃO E PROPORÇÃO NA MÚSICA

De acordo com Barnabé (2011), o conceito de razão possui origem grega, estando explícita numa das obras mais conhecidas da Matemática: “Os Elementos de Euclides”, seu estudo é considerado fundamental, fazendo parte do currículo escolar do Ensino Fundamental e Médio. Sobre as origens da razão, Fossa (2011, p.3) elucida:

[...] a noção de razão está presente no próprio conceito grego de número (arithmós), pois isso é concebido como uma coleção de unidades. Isso tem várias consequências. Visto, por exemplo, que a unidade não tem partes, ela não pode ser partida e, assim, o conceito de fração não faz sentido. Dessa maneira, na matemática teórica, as razões fizeram o papel de frações e, na matemática prática, o conceito de razão foi concretizado pelos sistemas de mensuração, pois nesse contexto não há, aparentemente, problema com a existência de submúltiplos, nem a escolha de unidades menores.

Nesse contexto, é possível dizer que razão está relacionada à mensurações. Por sua vez, o conceito de proporção, de acordo com Abdounur (1999), consiste em uma proporção lógica que envolve duas razões, sendo possível atribuir a elas um valor falso ou verdadeiro, para com isso, reduzir os vários casos de proporcionalidade a um elemento representante da classe de equivalência definida por todas as razões que são proporcionais, considerando iguais as diversas proposições que são proporcionais, mas não iguais.

As relações entre a música e as razões e proporções na Matemática foram estabelecidas, inicialmente, por Pitágoras, que as associou aos intervalos musicais referentes às consonâncias perfeitas – oitava, quinta e quarta – às relações simples $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ que correspondem às razões de uma corda que fornece as notas mais agudas dos intervalos referidos, quando se produz a nota mais grave pela corda inteira. (ABDOUNUR, 1999).

Para as notas musicais, Abdounur (1999) destaca a seguinte relação com as razões e proporções:

<i>dó</i>	<i>ré</i>	<i>mi</i>	<i>fá</i>	<i>sol</i>	<i>la</i>	<i>si</i>	<i>dó</i>
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

Nesse contexto, se tendo noção acerca das razões e proporções e sua relação com a Matemática, no tópico a seguir sugere-se atividades a serem utilizadas em sala de aula.

4.7 SUGESTÃO DE ATIVIDADE - AULA 2 – RAZÕES E PROPORÇÕES NA MÚSICA

Sugere-se que a aula seja iniciada com a retomada da relação entre música e Matemática abordada na aula anterior, destacando assunto da aula 2, razão e proporção. O professor precisa retomar os conceitos e aspectos inerente às razões e às proporções, lembrando o aluno sobre este conteúdo.

Pitágoras precisa ser mencionado durante essa aula, destacando sua importante contribuição não só para a Matemática quanto para a música. Após isso, deve mencionar sobre as escalas musicais, utilizando-se de algum instrumento musical ou de um aparelho de som, o importante é que os alunos possam ter noção acerca das escalas conseguindo identificar os diferentes sons produzidos.

Nesse momento para cada som escutado, o professor já poderá mencionar sua relação com as razões, informando como são representadas, conforme demonstrado no decorrer deste estudo. Nesse instante deve aproveitar para abordar os intervalos de oitava, quinta e quarta. Destaca-se que a reflexão e debate com os alunos deve ser sempre promovido pelo professor.

Após essa parte teórica, com a explicação dos fatos, bem como demonstração das escalas e intervalos pelo professor, sendo os alunos capazes de identificar suas diferenças, parte-se para a atividade prática.

Sugere-se que a sala seja dividida em três grupos referentes a intervalos musicais, assim, um grupo representa o intervalo de oitava, o outro de quinta e o

terceiro de quarta. Os seguintes materiais precisam ser distribuídos entre os alunos: barbante, copo cilíndrico, água, régua, caneta e palito de churrasco.

Primeiramente, os alunos precisam calcular o comprimento da circunferência do copo, utilizando, para tanto, o barbante e a régua, os alunos podem passar o barbante ao redor do copo e em seguida medi-lo com o auxílio da régua. Feito isso, precisam calcular o volume do copo a partir da seguinte fórmula:

Volume = área da base multiplicada pela altura (h). Sabendo que a área da base é um círculo assim, área da base = πr^2 , portanto $V = \pi r^2 \cdot h$.

Feito o cálculo, deve ser pedido que os alunos marquem os copos com as seguintes razões: 8/9, 4/5, 3/4, 2/3, 3/5, 8/15 e $\frac{1}{2}$, sendo considerada uma razão em cada copo. Assim, deve-se proceder com a multiplicação entre o volume do copo e a razão marcada, obtendo-se, com isso, o volume em cm^3 ou ml.

Com a altura marcada, deve-se pedir que o aluno preencha o copo com água até a marcação realizada, com o auxílio do palito de churrasco os alunos precisarão bater nos copos para, com isso, testar os diferentes sons obtidos a partir da Matemática.

A reflexão nesse momento deve ser estimulada, sendo possível aumentar o entusiasmo dos alunos, organizando-os em escalas musicais a partir das razões marcadas em seus copos, fazendo-os tocar uma simples melodia: “Havia um pastorzinho” - Dó, Ré, Mi, Fá, Fá, Fá. Do, Ré, Do, Ré, Ré, Ré. Do, Sol, Fá, Mi, Mi, Mi. Do, Ré, Mi, Fá, Fá, Fá.

Espera-se com essa atividade o entusiasmo dos alunos ao perceber na prática a relação entre música e Matemática, devendo-se finalizar com uma reflexão, adiantando o assunto da próxima aula, progressões geométricas e a música.

Nesse sentido, apresentamos no Quadro 2 uma escala musical chamada de escala diatônica, da mesma forma que foi possível fazer com o volume do copo, podemos dividir o comprimento da corda de um violão em frações.

Quadro 3 – razões entre os comprimentos da corda

<i>dó</i>	<i>ré</i>	<i>mi</i>	<i>fá</i>	<i>sol</i>	<i>la</i>	<i>si</i>	<i>dó</i>
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

Fonte: Dados primários da pesquisa

Se dividirmos uma nota pela medida da corda anterior obtemos o valor de 8/9 em quase todos os casos, exceto das notas Mi para Fá e Si para o Dó que nesse caso a razão é de, $\frac{243}{256}$ como no Quadro 3 a seguir:

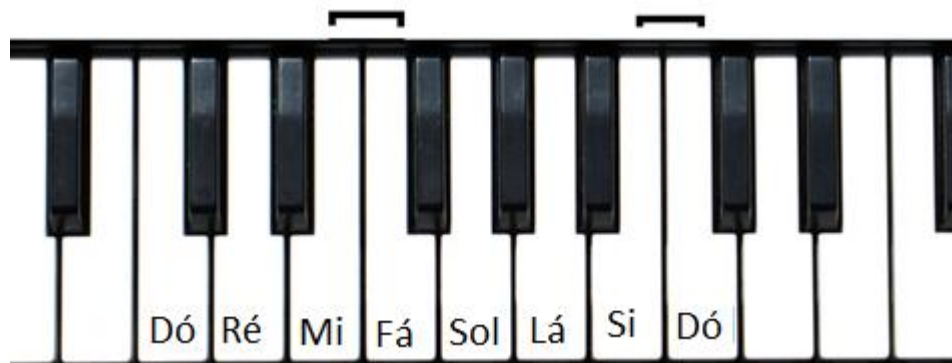
Quadro 4 Escala diatônica - divisão do comprimento de cordas

	Do	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Do
Razão a partir de Do	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
Razão intervalar resultante		$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{243}{256}$

Fonte: Dados primários da pesquisa

É fácil identificar esses intervalos observando um teclado de um piano, a sequência da nota MI para Fá e Si para Dó é exatamente a sequência de teclas brancas que não possuem uma tecla preta entre elas.

Figura 8 - Sequência de notas no piano

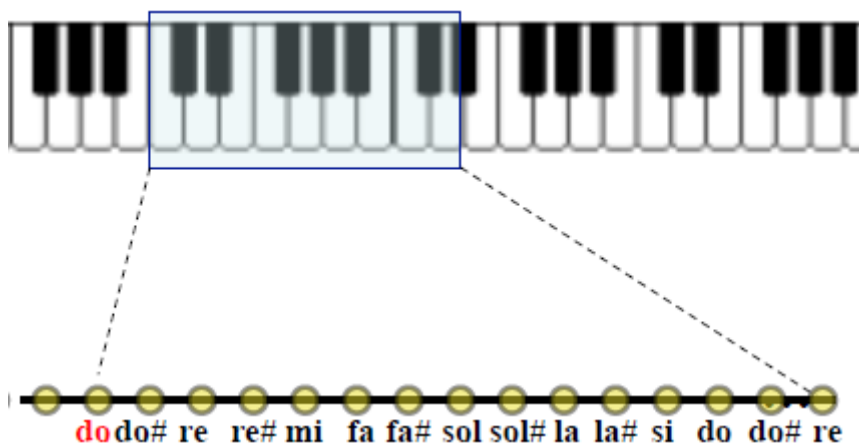


Fonte: Dados primários da pesquisa

4.8 CICLO DAS QUINTAS

O processo que leva a construção das quintas que foi chamado de ciclo das quintas consiste em encontrar as notas musicais multiplicando-se o tamanho da corda que produz som de uma determinada nota por $\frac{2}{3}$. Esse processo do ciclo das quintas gera doze sons diferentes que chamamos de escala cromática, na Figura 9 em que temos a imagem de um teclado entre algumas teclas brancas temos teclas pretas que são chamadas de sustenido (#) ou bemol (b), dessa forma temos as notas Dó, Dó #, Ré, Ré#, Mi, Fá , Fá #, Sol, Sol #, Lá, Lá # e Si, como na Figura 10.

Figura 09 - Ciclo das quintas



Fonte: Dados primários da pesquisa

A experiência e descoberta de Pitágoras foi fundamental para o desenvolvimento da escala temperada:

O experimento de pitágoras contribui na ideia de temperamento na medida em que propicia a construção de uma escala que não se “fecha” resultando na coma pitagórica². As diversas tentativas de distribuir tal diferença culminam com a repartição logaritmicamente equivalente, correspondente ao temperamento igual. (ABDOUNUR 1999, p. 201).

² A coma pitagórica é o nome dado para a diferença existente na escala pitagórica quando tomados os intervalos supracitados.

Nesse ponto surge um problema matemático, o problema consiste na escala que não se “fecha”, ou seja, dessa forma de construir a escala utilizando o ciclo das quintas descoberta por Pitágoras o valor do intervalo entre o Sol sustenido e o Fá não é igual aos demais.

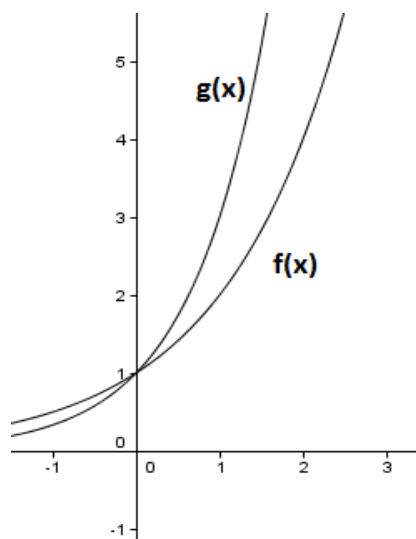
Então, ao fazer o percurso das quintas, em algum momento, esse percurso encontrará uma nova nota equivalente à nota inicial do processo, fechando um ciclo, e finalmente encontrando todas as notas musicais e suas respectivas frequências?

A resposta para essa pergunta é não. Isso não acontece para a escala pitagórica (ABDOUNUR 1999, p.12). Matematicamente percebemos que a resposta é não, pois se os intervalos de quintas são construídos com uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$, portanto, depois de percorrer n quintas puras, a nota alcançada corresponderá a uma fração $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ de forma que percorrendo m oitavas temos $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ com valores naturais para m e n diferentes de zero é impossível mostrar que $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^m$. O valor que mais se aproxima é o de $n = 12$ e $m = 7$, na qual temos aproximadamente 0,0077073 para o ciclo de quintas e para o ciclo de oitavas temos 0,0078125.

Uma demonstração que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \neq \left(\frac{1}{2}\right)^m$ para m e n pertencentes ao conjunto dos números naturais sem o zero é simples observe:

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \neq \left(\frac{1}{2}\right)^m \rightarrow 2^{n+m} \neq 3^n$, o primeiro membro da equação é sempre par e o segundo sempre ímpar, ou ainda, analisando os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3^x$ (Figura 10) com x pertencente ao conjunto dos números reais temos que o único ponto de intersecção dos gráficos é o zero e não nos interessa.

Figura 10 – Gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3^x$



Fonte: Dados primários da pesquisa

Assim, conclui-se que, partindo-se da nota dó e utilizando o percurso de quintas (na nomenclatura moderna temos dó, sol, ré, lá, mi, si, fá#, dó#, sol#, ré#, lá#, fá, dó), o ciclo não se fecha, existindo essa pequena diferença entre 12 quintas puras e 7 oitavas naturais, cujo valor é de aproximadamente 1,01364326#1 chamada de coma pitagórico (ABDOUNUR, 1999).

Dessa maneira, durante um longo período da história desde os pitagóricos VI a. C. até o século XVIII, no período de Leonhard Euler (1707 – 1783), Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783) e Daniel Bernoulli (1700 – 1782) as escala musicais apresentavam certo “problema” dificultando a mudança de tonalidade de uma música.

Diante da necessidade de se construir uma escala que se “fecha”, ou seja, uma escala temperada:

Euler afirma que nós devemos distinguir cuidadosamente as razões que nossos ouvidos realmente percebem daquelas referentes aos sons expressos por números. O matemático suíço elucidou a frase mencionada quando afirmou que no temperamento igual, a escala não possuía consonâncias exatamente puras, uma vez que embora o ouvido escutasse o intervalo de quinta de razão 3 para 2, seu valor matemático real era igualmente temperado soava no ar como $2^{7/12}$. (ABDOUNUR 1999, p. 34).

Para resolver esse problema do temperamento, que consistia em encontrar intervalos iguais para cada semitom, ou seja, que o intervalo da nota Mi para nota Fá seja igual ao intervalo da nota Fá para Fá#, foi necessário o desenvolvimento do conceito de números irracionais pois era preciso interpolar 12 meios geométricos entre os números 1 e 2. De forma que pudesse ser construída uma progressão geométrica com 13 termos sendo o primeiro 1 e o último termo 2.

4.9 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E A ESCALA TEMPERADA

Conceituando progressões geométricas, Maia (2012) afirma ser uma sequência na forma $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, que qualquer termo, a partir do segundo pode ser determinado pela fórmula $a_n = a_{n-1} \cdot q$, com $n \in N$, $n \geq 2$, sendo q uma constante denominada razão, havendo como propriedade em que cada termo, a partir do segundo, é produto do anterior, por uma constante q .

Aplicar as relações entre progressões geométricas e a música no Ensino Médio atende às determinações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, que dispõe a Matemática além da transmissão do ensino técnico:

A Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 1999, p. 252).

Orienta-se, ainda, relações pedagógicas referentes à construção de conceitos sobre conteúdo das progressões, destacando-se a necessidade de não transmitir aos alunos apenas cálculos e regras difíceis de memorizar, mas conteúdos que possam levantar seu interesse e motivá-los no aprendizado:

As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas (“determine a soma...”, “calcule o quinto termo...”). (BRASIL, 2006, p. 75).

Na relação entre música e progressões geométricas, Ribeiro (2011) cita que os intervalos de frequência de cada nota de uma escala temperada ou escala cromática, podem ser calculados através das fórmulas referentes às progressões geométricas, considerando que esse intervalo é igual entre elas, dessa forma, se desejar saber o valor certo de intervalo basta que esse valor seja multiplicado sucessivas vezes até chegar à nota esperada. O autor destaca que a relação entre as notas e suas respectivas frequências é exponencial, crescendo de maneira inversa, assim, quanto maior for a corda, menor será a frequência emitida por ela. Destaca-se Bach e sua sistematização dos acordes, seja no piano no cravo ou no órgão, dividindo os sons da escala temperada em doze partes iguais: DÓ, DÓ#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI.

4.10 SUGESTÃO DE ATIVIDADE – AULA 3 - ATIVIDADE SOBRE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E A ESCALA TEMPERADA

É importante que o professor inicie a aula retomando o que foi visto na aula anterior acerca das razões e proporções na música, destacando que assim como elas, as progressões geométricas também são fundamentais, havendo uma relação entre elas. Já que o cálculo da razão de uma progressão geométrica é resultado de uma divisão.

Relembrar as progressões geométricas e seus cálculos é fundamental para o entendimento das atividades referentes à música, assim, a aula deve após a explicação inicial retomar esse conteúdo, com atividades práticas.

A primeira atividade sugerida para as progressões geométricas e a música, é o cálculo da escala temperada. É importante que nesse momento o professor explique aos alunos o que vem a ser a escala temperada, com exemplos práticos, despertando no aluno o interesse pelo assunto.

Atividade 1 – Escala Temperada

Depois de discutir com os alunos alguns conceitos sobre as progressões geométricas principalmente a maneira de interpolar meios geométricos, propõe-se aos alunos o seguinte problema. “Sabendo que para encontrar duas notas musicais

com mesmo som uma mais grave e outra mais aguda temos que dobrar a sua frequência, portanto, como interpolar doze meios geométricos entre os termos de uma progressão geométrica de modo que o primeiro termo tenha tamanho 1 e o último termo tenha tamanho 2.”

Resolução:

$$a_1 = 1, a_{13} = 2, q = ?$$

$$(1, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, 2)$$

$$a_{13} = a_1 \cdot q^{12} \quad \rightarrow \quad 2 = 1 \cdot q^{12} \quad \rightarrow \quad q = 2^{\frac{1}{12}}$$

Portanto cada termo da progressão geométrica e consequentemente da escala temperada será formado como no quadro 3.

Quadro 5 – notas musicais e termos da progressão geométrica

Nota	Dó	Dó#	Ré	Ré#	Mi	Fá	Fá#	Sol	Sol#	Lá	Lá#	Si	Dó
Termo	1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	2

Fonte: própria

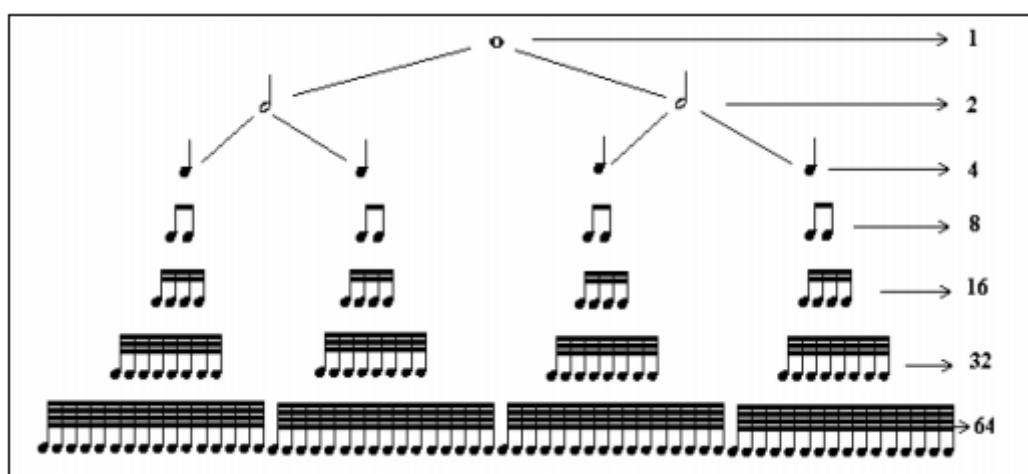
Após o cálculo da frequência, indica-se que a escala musical obtida seja tocada para os alunos, possibilitando um maior entendimento.

Simonato e Dias (2005), relacionando as progressões geométricas e a música, citam que as progressões geométricas com intervalos iguais a $2^{\frac{n}{12}}$ é utilizada como base para confecção de todos os instrumentos de corda. Nesse contexto, é possível dizer que as progressões geométricas possuem total relação com a música, fazendo parte, principalmente, das escalas temperadas, podendo sua aplicação em sala de aula chamar a atenção dos alunos para o assunto.

Atividade 2

Na atividade seguinte, propõe-se que o professor a partir da Figura 11 a seguir, peça para os alunos que calculem a razão entre as notas e classifiquem a PG, devendo em seguida tocá-las ou demonstrar aos alunos por meio de um equipamento de áudio.

Figura 11 – Notas musicais e PG crescente



Fonte: Camargos (2010)

Vale destacar que o uso de slides e de instrumento de áudio para essa aula é fundamental, visando demonstrar aos alunos a relação entre progressões geométricas e a música.

4.11 AULA 4 – NÚMEROS PRIMOS E A MÚSICA

A abordagem acerca dos números primos na literatura é pequena, notando-se pouca atenção a esse conteúdo matemático, bem como de conhecimento, fazendo com que a importância desses números não seja compreendida por alunos, havendo, de acordo com Spenthof e Souza (2013), uma carência em relação ao estudo desses números, que estão, inclusive, presentes na música.

Definindo os números primos, Spenthof e Souza (2013) afirmam ser “um número inteiro n ($n > 1$), possuindo somente dois divisores positivos, a saber, 1 e n é chamado primo. Se $n > 1$ não é primo, dizemos que n é composto”. A grandiosidade

desses números foi trazida pela primeira vez pelos Livros VII, VIII e IX da obra os Elementos de Euclides, citado por Boyer (1996, p. 79):

O Livro IX, o último dos três sobre Teoria dos Números, contém vários teoremas interessantes. Desses, o mais célebre é a Proposição 20: 'Números primos são mais do que qualquer quantidade fixada de números primos.' Isto é, Euclides dá aqui a prova elementar bem conhecida do fato de que há infinitos números primos. A prova é indireta, pois mostra-se que a hipótese de haver somente um número finito de primos leva a uma contradição.

Após a teoria de Euclides, inúmeros outros matemáticos trouxeram teorias sobre os números primos, como Euler e Gauss, surgindo a partir de então inúmeras propriedades e curiosidades a respeito desse conteúdo matemático.

Sauty (2007) destaca que os matemáticos durante séculos escutavam os primos e só ouviam ruídos desorganizados, soando como notas aleatórias rabiscadas anarquicamente sobre a pauta matemática, sem tom discernível. Até que Riemann descobriu uma nova forma de escutá-los, através de ondas senoides que criou a partir dos zeros de sua paisagem zeta, que revelaram uma estrutura harmônica.

Na opinião de Chaves (2013), a riqueza dos números primos está nos enigmas que o envolvem, a partir de seus simples conceitos, resultados fascinantes podem ser gerados.

4.12 SUGESTÃO DE ATIVIDADES

Dada a complexidade e os enigmas que envolvem os números primos na música, não sugere-se aqui atividades práticas a serem realizadas em sala de aula, todavia, sugere-se que durante a aula seja passado para os alunos o vídeo "A música dos números primos", que possui em torno de 74 minutos, devendo o professor programar sua aula para esse tempo de vídeo. Assim, deve ser preparada uma aula de dois tempos de 50 min.

Inicialmente, é importante que o professor relembre o conteúdo dos números primos e destaque que durante toda a história se mostrou como um número enigmático introduzindo o que o filme irá demonstrar.

Após a execução do filme, o professor deve gerar um debate, colocando no quadro questionamentos aos alunos, fazendo-os refletir sobre a grandiosidade

desses números, verificando suas opiniões e enriquecendo os discursos com seu conhecimento.

4.13 AULA 5 – LOGARÍTMOS NA MÚSICA

De acordo com Pereira (2013), os logaritmos foram criados com o intuito de facilitar cálculos complexos, a partir da criação da tábua de logaritmos foi possível reduzir multiplicações a adições e divisões a subtrações. Deve-se destacar, com base em Oliveira (2005), que os logaritmos tiveram sua concepção fundamentada na comparação de dois pontos em movimento que geram uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, fator que demonstra a ligação entre esses conteúdos matemáticos.

Vasconcelos (2011) define logaritmos como: Sendo a e b números positivos, com $b \neq 1$, chamamos de logaritmos de a na base b o expoente real x ao qual se eleva para obter a , ou seja: $\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a, a > 0, b > 0 \text{ e } b \neq 1$.

No que diz respeito ao uso dos logaritmos na música, Rodrigues (1998, p. 23) elucida o temperamento igual, segundo o autor, o intervalo de oitava que foi dividido em doze partes iguais pode ser representado de forma mais simples se apresentado da seguinte maneira: $Dó = 1$, $Ré = \frac{2}{12} \log 2$, $Mi = \frac{4}{12} \log 2$, $Fá = \frac{5}{12} \log 2$, $Sol = \frac{7}{12} \log 2$, $Lá = \frac{9}{12} \log 2$, $Si = \frac{11}{12} \log 2$, $Dó = \log 2$.

Miorim e Miguel (2002, p. 134), acerca da presença dos logaritmos na música, citam que: “Os logaritmos estão envolvidos na definição e na expressão ou quantificação do que em Acústica se denomina nível de intensidade sonora (b)”. Assim, o cálculo da intensidade pode ser feito por meio de logaritmos.

Ribeiro (2011) informa que os logaritmos são utilizados também na construção de instrumentos musicais, citando como exemplo o piano de cauda, o xilofone, a lira e a harpa. Nesse contexto, os logaritmos influenciam fortemente na música, possuindo relações diretas com os conteúdos matemáticos já citados durante este estudo.

4.14 ATIVIDADE 3

A aula deve ser iniciada com uma abordagem sobre a música e a Matemática, considerando os conteúdos que já foram vistos, trazendo a misticidade que envolve a Matemática e como ela está presente nas mais diferentes esferas do dia a dia. É importante que o professor busque promover o diálogo com os alunos, verificando suas opiniões a todo o momento.

A atividade sugerida é a construção de uma flauta em sala de aula, com as etapas sugeridas por Ribeiro (2011, p. 33):

1ª Etapa: Inicie as atividades pedindo para os alunos que pesquisem sobre o tema matemática e música em que envolva funções exponenciais e logarítmicas.

2ª Etapa: Dividir a sala em dois grupos, ensinar os nomes das sete notas musicais, e suas respectivas alterações, ou seja, dó, dó#, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol, sol#, lá, lá#, si.

3ª Etapa: Ensinar para os alunos a fórmula em que relaciona o tamanho dos tubos de PVC com a frequência de cada nota que é dada por $A_n = A_1 \cdot \frac{1}{(2^{1/2})^n}$, onde

A_n é o tubo de ordem n e $A_1 = 0,618$.

4ª Etapa: Com a ajuda de uma calculadora científica peça aos alunos para construir um quadro com as notas e os respectivos comprimentos dos tubos.

5ª Etapa: Montar a flauta assim como a figura apresentada, cada grupo irá confeccionar uma flauta, logo após será feita uma comparação entre as duas para analisarmos o resultado. Ao final da tarefa proposta é possível mostrar para cada aluno que enquanto a altura do som aumenta, o comprimento dos tubos diminui numa progressão geométrica de razão de uma nota para outra. Utilizando se dos mesmos conceitos, podemos também trabalhar com pedaços de ferro de diversos tamanhos e construirmos, por exemplo, uma lira ou também simular instrumentos como xilofone, e também determinar o tamanho de uma corda de uma guitarra, violão, baixo etc.

6ª Etapa: Finalize as atividades pedindo para os alunos apresentarem os resultados obtidos para classe, depois de orientados, os alunos poderão apresentar para outras turmas do colégio.

Observe a figura

Figura 12 – Flauta Pan e Xilofone



Fonte: Dados primários da pesquisa

A aula deve ser finalizada com uma reflexão entre professor e alunos acerca da importância da Matemática para a música, fazendo uma revisão geral acerca do que foi visto durante as aulas e o que mais chamou sua atenção.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi feito um estudo acerca das relações entre música e Matemática, sendo possível perceber as dificuldades que envolvem esse campo do ensino e como pode ser aplicado em sala de aula para motivação da aprendizagem dos alunos.

Durante o estudo foi possível constatar que a música auxilia no desenvolvimento motor, linguístico e afetivo de todos os indivíduos, podendo ser utilizada para o desenvolvimento físico, mental, social, emocional e espiritual dos adolescentes. Além disso, mostramos que sua utilização em sala de aula de forma não-arbitrária, relacionando seus aspectos aos conteúdos, pode envolver os alunos, auxiliando-os no seu desenvolvimento socioafetivo, bem como na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Foi possível perceber que a música é dividida em melodia, harmonia e ritmo e cada uma dessas partes tem intrinsecamente uma relação direta ou indireta com a matemática, muito embora, o músico não necessariamente tenha que saber matemática para tocar determinado instrumento, pois pode o fazê-lo de forma empírica. Entretanto, conhecendo conceitos matemáticos será mais fácil tornar-se um músico profissional.

Na parte de melodia e harmonia, verificou-se a divisão da escala em doze partes iguais formando uma progressão geométrica, que só foi possível, segundo a história da matemática, depois do desenvolvimento de conteúdos matemáticos. Posteriormente, foi trabalhado da música, a parte rítmica onde foram expostas as formas de leitura de uma partitura, as fórmulas de compasso que trabalham os conceitos de somas de frações e a contagem dos tempos musicais, sem a qual não é possível formar uma música.

Frente a quantidade de trabalhos acadêmicos no que concerne a relação matemática e música, é possível perceber que existem poucos trabalhos, principalmente os que estão relacionados com a sala de aula. Assim, podemos verificar certa carência de pesquisas sobre matemática e música na sala de aula que trabalham o ritmo, que é uma parte da música, com os conceitos de frações, razão e proporção.

Como uma perspectiva futura, um caminho que se pode explorar é o ligado a conteúdos associados ao desenvolvimento da escala temperada, juntamente com as

doze formas de apresentação da obra “O Cravo Bem Temperado” de Johann Sebastian Bach.

Finalmente, é possível concluir, com o que foi desenvolvido neste trabalho, que aliar música e Matemática pode ser uma importante estratégia para motivação do aluno nas aulas de Matemática, bem como utilizar esta aliança para ensinar tópicos importantes como razão, proporção, progressão geométrica, dentre outros conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. Tradução da 1ª Ed. Brasileira coordenada e revista por Anfredo Bossi, revisão da tradução e tradução dos novos textos por Ivone Castilho Benedetti. 4ªed. São Paulo: Martins.
- ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**: pensamento analógico na construção de significados. São Paulo, SP: Escrituras, 1999.
- ARAUJO, E.S. **Matemática e Infância no “Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil”**: um olhar a partir da teoria histórico-cultural. Zetetiké: Revista de Educação Matemática, Campinas, v.18,n.33, jan-jun. 2010. Disponível em: <http://www.fe.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2802/2466>>. Acesso em: 06 set. 2014.
- BANDEIRA, D.A **Material didático**: conceitos, classificação geral e aspectos da elabora. Ed.Curitiba: IESDE, <Disponível em:
- BARNABÉ, Fernando Moreira. A melodia das razões e proporções: a música sob o olhar interdisciplinar do professor de matemática. 2011.68f. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.
- BATTRO, A. M. **O Pensamento de Jean Piaget**. Rio de Janeiro: Forense, 1969.
- BEYER, Ester. **A educação Musical sob a perspectiva de constituição teórica**: uma análise histórica, fundamento da educação musical. Série: Fundamentos. Associação Brasileira da Educação Musical. Porto Alegre, nº 01, maio, 1993. Blucher, 1996.
- BONA, Paschoal. **Método Musical**. São Paulo: Augusto, 2002.
- BOYER, Carl B. **História da matemática**, 2a. ed. - São Paulo: Edgard
- BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática** - Brasília: MEC / SEF, 1998.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: história. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. brasileira. Volume IX – Natal: Editora da SBHMAT, 2002.
- CÂMARA, Maria Lúcia Botelho. **Interdisciplinaridade e formação de professores na UCG**: uma experiência em construção. Dissertação (mestrado). Faculdade de Educação, Universidade de Brasília. 1999.
- CARAÇA, Bento de Jesus, **Conceitos Fundamentais da Matemática**, Lisboa: Gradiva, 3ed, 2000.
- CHATEAUBRIAND – Pr, 2001. 40f. Monografia (Especialização em Psicopedagogia). Centro Técnico-Educacional Superior do Oeste Paranaense – CTESOP/CAEDRHS.

CHIARELLI, L. K. M.; BARRETO, S. DE J. **A importância da musicalização na educação infantil e no ensino fundamental:** a música como meio de desenvolver a inteligência e a integração do ser. Revista Recre@rte. n. 3, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas: UNICAMP, 2004.

FARIA, Márcia Nunes. **A música, fator importante na aprendizagem.** Assis FAZENDA, Ivani. Didática e Interdisciplinaridade. Campinas, SP: Papirus, v.1, 9ed, 1998.

FERNANDES, Domingos. **Avaliar para aprender:** fundamentos e políticas. São Paulo: UNESP, 2009.

FERREIRA, D. L. DE A.; GOES, T. A.; PARANGABA, C. DE O.; SILVA, M. DA R.; FERRO, O. M. DOS R. **A Influência Da Linguagem Musical Na Educação Infantil.** In: jornada do HISTEDBR, 7, 2007, Campo Grande. Anais da VII Jornada do HISTEDBR – História, Sociedade e Educação no Brasil, Campo Grande, 2007.

FORQUIN, Jean-Claude. **Escola e cultura:** as bases sociais e epistemológicas do conhecimento escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

FOSSA, John A. **Razão e proporção:** a herança antiga. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática. Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática. Vol. 11. Nº23, paginas 1-6. Publicação oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática. Número 1, volume 1.2011.

FREIRE, F.M.P; PRADO, M.E.B.B. **Projeto pedagógico:** pano de fundo para escolha de software educacional. In: VALENTE, J.A (Org). o computador na sociedade. Campinas: Nield-Unicampo, 1999.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia Saberes Necessários à Prática Educativa.** São Paulo: Paz e Terra.

GAGNÉ, R.M. **Como se realiza a aprendizagem.** Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1971.

GALLO, Silvio. Transversalidade e educação: pensando uma educação não disciplinas. In: ALVES, N. (Org). O sentido da escola. Rio de Janeiro: DP&A, Editora, 1999.

GÓES, R. S. **A música e suas possibilidades no desenvolvimento da criança e do aprimoramento do código linguístico.** Revista do Centro de Educação a Distância - CEAD/UDESC. v.2, n. 1, 2009.

LOZANOV, Georgi. **Suggestology and Outlines of Suggestopedy.** Londres: Gordon and Breach Science Publishers, 1978.

LIMA, S.V. **Da importância da Música no desenvolvimento infantil.** Artigonal, diretório de artigos gratuitos, 2010.

LOZANOV, Georgi. *Suggestology and Outlines of Suggestopedy*. Londres:
LÜCK, H. **Pedagogia interdisciplinar: fundamentos teórico-metodológicos**.
Petrópolis: MARTINS, Silva Juscelino. **Artigo - A utilização da música como recurso didático para o ensino de Geografia**, 2008.

MARTINS, R. **Educação musical: conceitos e preconceitos**. Rio de Janeiro:
FUNARTE, Instituto Nacional de Música, 1985.

MIGUEL, Antonio e MIORIM, Maria Ângela. **Os logaritmos na cultura escolar**
NAPOLITANO, Marcos. *História & música – história cultural da música popular* /
Marcos Napolitano. – Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

NUNES, Benedito. **Introdução à filosofia da arte**. 3ed. São Paulo: Ática, 1991.

OLINDA, Silvia Rita Magalhães de. **A educação no Brasil no período colonial: um olhar sobre as origens para compreender o presente**. Sitientibus, Feira de Santana, n. 29, 2003.

PATTO, M. H. S. **A produção do fracasso escolar: histórias de submissão e rebeldia**. São Paulo: T.A. Queiroz, 1993.

PERROTTA, Roberto Camillo; PERROTTA, Suzete Geraldi Montenegro.
Articulação entre matemática, música e física. Monografia, Abril, 2004.

RIBEIRO, Marcos Elias. *A matemática da música*. Monografia
RODRIGUES, José Francisco, **A Matemática e a Música**. Colóquio/Ciências, revista de cultura científica 23 (1998).

SANTOS, J.E.; SATO, M. **A contribuição da Educação Ambiental à Esperança de Pandora**. São Carlos, Editora RiMa, 2001.

SCHAFER, Murray. **O Ouvido Pensante**. São Paulo: UNESP, 1991.

SCHOPENHAUER, Arthur. **O mundo como vontade e Representação** – III pt. Trad. Wolfgang Leo Maar e Maria Lúcia Mello e oliveira Cacciola. São Paulo: Nova Cultural, 2000. (Os Pensadores).

SEKEFF, M. L. **Da música** – seus recursos. 2 ed. Ver e ampliada São Paulo. Editora UNESP, 2007.

SILVA, M. Sala de aula interativa. **A interação no processo de ensino-aprendizagem em Matemática**. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

SNYDERS, G. **A escola pode ensinar as alegrias da música?** São Paulo: Cortez, 1990.

SOUZA, Luciano. **Artigo Música e Educação Formal - Uma Reflexão Sobre A Implementação dos Referenciais e Parâmetros Curriculares Nacionais**, 2009.

UNESCO, Banco Mundial. Fundação Maurício Sirotsky Sobrinho. **A Criança descobrindo, interpretando e agindo sobre o mundo**. Brasília, 2005.

VASCONCELOS, Cláudia Cristina. **Ensino-Aprendizagem da Matemática**: Velhos problemas, Novos desafios. Disponível em: http://www.ipv.pt/millennium/20_ect6.htm. Acesso: novembro/2014.

VYGOTSKY , L.S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.