

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL**

MARCOS PINHEIRO MATOS

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

**CAMPO GRANDE - MS
DEZEMBRO DE 2014**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL**

MARCOS PINHEIRO MATOS

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

ORIENTADOR: Prof. Dr. CLAUDEMIR ANIZ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática – INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

**CAMPO GRANDE – MS
DEZEMBRO DE 2014**

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

MARCOS PINHEIRO MATOS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudemir Aniz – UFMS

Profa. Dra. Janete de Paula Ferrareze Silva – UFMS

Profa. Dr. Vando Narciso – UEMS

CAMPO GRANDE – MS

DEZEMBRO DE 2014

RESUMO

O trabalho apresenta um estudo sobre funções exponenciais e logarítmicas, iniciamos com um breve histórico sobre a origem dos logaritmos e, logo em seguida, foi realizado um estudo sobre o desenvolvimento de potências com expoentes reais. Sobre a função exponencial, apresentamos suas propriedades e caracterização, registrando também a definição de função inversa. Depois, segue o estudo sobre a função logarítmica, das propriedades e caracterização. Em seguida, realizamos um estudo sobre a origem e utilização da tábua de logaritmos. Como aprofundamento do assunto, dedicamos uma parte ao cálculo das funções exponenciais e logarítmicas, usando como ferramenta a fórmula de Taylor, a qual fez o uso das derivadas. Para finalizar este estudo, foram destacadas algumas aplicações sobre as funções exponenciais e logarítmicas.

Palavras-chave: Exponencial. Logaritmo.

ABSTRACT

The paper presents a study of exponential and logarithmic functions. We begin with a brief history of the origin of logarithms. Soon after, a study was conducted on the development of powers with real exponents. About the exponential function, we present their properties and characterization, also recording the definition of inverse function. Then follows a study on the logarithmic function of the properties and characteristics. Then we conducted a study of the origin and use of the board of logarithms. As a matter of deepening, we dedicate a part the calculation of exponential and logarithmic functions, using as a tool Taylor's formula, which made the use of derivatives. Finally this study were highlighted some applications of exponential and logarithmic functions.

Keywords: Exponential. Logarithm.

“Deus fez os números inteiros, tudo o resto é obra do homem”.

Leopold Kronecker

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tornar possível a realização deste sonho e por permitir mais uma importante etapa da minha vida profissional.

A minha Família, em especial a minha esposa Kawita Melo Kmniecik Matos pelo apoio, dedicação e palavras de incentivo, aos meus filhos João Victor e Gabrielly por estarem presentes nessa caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Claudemir Aniz, pela paciência, disponibilidade e que sempre não mediu esforços à pesquisa a material bibliográfico. Obrigado pela sinceridade na orientação, pela qualidade das discussões e pelo empenho quanto ao alcance dos objetivos traçados.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Aos professores da UFMS – Campo Grande, pela dedicação nas aulas e pelas palavras de incentivo, aos colegas do Mestrado, em especial ao Eder Regiolli e a Viviam Amorim.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I: A ORIGEM DOS LOGARITMOS.....	3
CAPÍTULO II: FUNÇÃO EXPONENCIAL.....	8
2.1 Potência de Expoente Inteiro.....	8
2.2 Potência de Expoente Racional.....	9
2.3 Potência de Expoente Real.....	11
2.4 Função Exponencial.....	12
2.5 Caracterização de uma Função Exponencial.....	15
2.6 Função Inversa.....	17
CAPÍTULO III: LOGARITMOS.....	19
3.1 Função Logarítmica.....	19
3.2 Caracterização da Função Logarítmica.....	21
3.3 Tábua de Logaritmos.....	27
3.4 O Número “e”.....	30
CAPÍTULO IV: CÁLCULO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA.....	33
4.1 Derivada da Função Exponencial e Logarítmica.....	33
4.2 Fórmula de Taylor.....	36
4.3 A Irrracionalidade e a Transcendência do e	44
CAPÍTULO V: APLICAÇÕES.....	47
5.1 Lei do Resfriamento de Newton.....	47
5.2 Juros Contínuos	48
5.3 Datação por Carbono Radioativo.....	50
5.4 Terremotos.....	52
CONCLUSÃO.....	54
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	55

INTRODUÇÃO

A proposta deste trabalho é fazer um estudo sobre funções exponenciais e logarítmicas, sendo que, uma parte dele foi dedicado ao estudo de cálculo dessas funções. Para desenvolvê-lo, duas ideias básicas foram necessárias: a primeira diz respeito ao tratamento da Matemática e das Ciências Exatas, isto é, como a utilização de teorias; e, a segunda, refere-se à ênfase na origem e aplicabilidade do conteúdo. Para concretizá-lo, assim está organizado.

No primeiro capítulo, faremos um breve histórico sobre a origem dos logaritmos que contribuíram para o desenvolvimento da matemática, citando alguns dos iniciadores desse processo como: Jost Burgi, John Napier e outros responsáveis pelos importantes avanços, os quais buscam o fortalecimento, análise das técnicas de cálculos e aprofundamento sobre o estudo dos crescimentos exponenciais e logaritmos.

Já no segundo, definimos potências com expoente inteiro e suas propriedades, potências com expoente racional e real. Logo em seguida, realizamos um estudo sobre a função exponencial, sua definição, propriedades, representação gráfica e a caracterização de uma função exponencial. E, explicitamos, ainda, a definição de função inversa.

No próximo capítulo, apresentamos o estudo sobre função logarítmica, destacando as propriedades dos logaritmos, a caracterização dessa função e sua representação gráfica. Logo em seguida, explicitamos a representação dos logaritmos decimais em sua representação em “tábuas”, a partir de sua origem, passando por seu uso efetivo quanto ao como eram feitos os cálculos com esse instrumento. E, apresentamos ainda, uma base especial do sistema de numeração logarítmica, o número e .

O penúltimo foi dedicado ao cálculo das funções exponenciais e logarítmicas, usando como ferramenta a fórmula de Taylor, para uma aproximação local de função por um polinômio de ordem n , a qual fez o uso das derivadas. Depois, realizamos um estudo sobre o número e , demonstrando sua irracionalidade e comentando sobre sua transcendência.

Para finalizar, neste quinto e último capítulo, serão abordadas as aplicações clássicas que envolvem funções exponenciais e logarítmicas, associando a teoria com a prática.

CAPÍTULO I

A ORIGEM DOS LOGARÍTMOS

Neste capítulo, sobre a origem dos logarítmos, fundamentamos o trabalho nas contribuições de autores que já escreveram acerca do assunto. Dentre eles, destacamos os estudos de Geraldo Ávila e Elon Lima.

Há tempos era algo muito dispendioso realizar operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, porque não podíamos contar com o auxílio de calculadoras. No tempo do desenvolvimento da Astronomia e da Navegação, final do século XVI, era um problema essencial, já que não se podia determinar um método que permitisse fazer as operacionalizações aritméticas com maior agilidade.

Diante dessas dificuldades, muitos estudiosos da época foram em busca de caminhos onde se pudessem achar soluções, destacando-se o teólogo e matemático escocês John Napier (1550-1617) e o matemático e inventor suíço Jost Bürgi (1552 – 1632) que publicaram as tabelas logarítmicas, que posteriormente receberam a denominação “Tábuas de Logarítmos” – consideradas como uma das grandes descobertas científicas daquele século.



John Napier



Jost Bürgi

A influência de John Napier no desenvolvimento dos Logarítmos¹ foi mais difundida que a de Jost Bürgi, tornando-se mais conhecido. Dos nomes que fizeram história vale evidenciar esses dois estudiosos, entretanto, queremos destacar o nome de John Napier.

Esse matemático nasceu na Escócia, pertencente a uma família abastada e com certo prestígio. Foi educado na Escócia e teve um grande interesse por estudar

¹ Logos – Grego(=razão) e ARITHMOS (=número)

Teologia e Aritmética. Com o tempo viu-se voltado para os estudos de literatura clássica e matemática. Abandona seus estudos na Escócia e vai em busca do novo, na Europa, tendo realizado as primeiras tentativas com referência ao desenvolvimento da base dois para a contagem. Estudou com profundidade os princípios que fundamentam a notação dos números e a história da notação arábica descobrindo suas raízes na Índia.

Ao voltar à Escócia engaja-se na polêmica da reforma protestante e, por volta de 1590, já havia conseguido um sólido e completo conhecimento da correspondência entre as progressões aritméticas e geométricas, o que lhe serviu como base, a fim de que desenvolvesse o conceito de logarítmo.

John Napier tinha no estudo da Matemática um passatempo, o que lhe auferiu a fama de inventor, pois era autor de inúmeros inventos, verdadeiros engenhos, alguns de natureza bélica, com o destino de conter a invasão de Filipe II, mas não foram construídos. De suas invenções, ainda hoje, existem artifícios para o ensino do Matemático e um deles é conhecido por “Napier’s bonés” ou “Ossos de Napier” que são utilizados para a divisão e a multiplicação de maneira mecânica.

Várias outras contribuições são legados de John Napier, tais como as expressões exponenciais para funções trigonométricas e a introdução da notação decimal para frações, além de outras como a trigonometria esférica. No entanto, a sua contribuição mais importante foi a criação dos Logaritmos, publicada em um tratado no ano de 1614, tendo abrangido a descrição do referido método juntamente com um conjunto de tabelas e regras. A intenção do cientista Napier era oferecer uma grande ajuda aos astrônomos, livrando – os assim de erros de cálculos com grandes números.

Uma particularidade que, embora estivesse inserido no trabalho de Napier em suas aplicações de logaritmos o número “ e ”, do logaritmo natural, só foi estudado com maior profundidade cerca de um século depois, quando Leonhard Euler utilizou a letra “ e ” para representá-lo e deu o nome ao logaritmo que tem este número como base, de neperiano em homenagem a seu descobridor.

John Napier dedicou-se a estudar os Logarítmos durante vinte anos e só seus resultados em seu livro “Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio”, em 1614, que significa “Uma Descrição da



Maravilhosa Regra dos Logaritmos.”

Napier juntou-se ao inglês Henry Briggs (1561-1631), após a aplicação da primeira tábua de Logaritmos e apresentou uma nova tábua, possibilitando uma melhor interpretação, contendo os denominados Logaritmos Decimais.

Segundo Carl Boyer (1996), essa tábua foi publicada por Briggs em “Logarithmorum Chilias”, no ano de 1617.



Henry Briggs

Os trabalhos de Napier e Bürgi foram produzidos independentemente um do outro, uma vez que o primeiro publicou as suas tábuas, em 1614, em Edimburgo, e o segundo foi em 1620, em Praga.

Interessante ressaltar que os Logaritmos foram ficando cada vez melhor, auxiliando nos problemas matemáticos.

Sabe-se que o objetivo dos cientistas era descobrir uma maneira de “facilitar os laboriosos cálculos trigonométricos da Astronomia e da Navegação”, como assinala Geraldo Ávila (RPM 26). A ideia fundamental era a substituição da operação mais complicada – multiplicação e divisão por operações de adição e subtração, consideradas mais simples.

Lembra-nos, ainda, Geraldo Ávila, em seu artigo (RPM 26) que:

Os primeiros logaritmos neperianos tinham sérios inconvenientes e foram logo modificados por ele mesmo e por Henry Briggs (1561-1631), um dos primeiros e mais ardentes entusiastas, do trabalho de Napier. O resultado foi o aparecimento dos Logaritmos de Briggs, ou Logaritmos Decimais. Briggs publicou sua primeira tábua em 1617; e depois, em versão bem mais ampliada, em 1624.

Cabe mencionar que a invenção dos Logaritmos causou um impacto determinante no desenvolvimento científico e tecnológico, tanto que o astrônomo Kepler (1571-1630) saudou a invenção como um alívio e uma benção ao astrônomo, pois aumentaria consideravelmente sua capacidade de computação. Com o uso incessante dessa nova invenção, Kepler descobriu sua 3ª lei planetária.

Depois da invenção da Tábua de Logaritmos e com o estudo e o empenho dos estudiosos vimos que houve uma melhora considerável na construção de caminhos para busca de soluções mais rápidas e eficientes dos problemas.

Após a invenção de John Napier (ou Neper) e Joost Bürgi, o novo instrumento de cálculos foi sendo aperfeiçoado, tendo acréscimos inseridos por outros estudiosos como Henry Briggs que construiu uma extensa tabela de logaritmos decimais e em 1624, publicou sua *Arithmética Logarithmica*, uma tabela dos logaritmos dos primeiros 20000 números inteiros e dos números de 90.000 a 100.000, cada logaritmo calculado com quatorze casas decimais. O espaço entre 20000 e 90000 deixado por Briggs foi preenchido por Adrian Vlacq, matemático Holandês que, em 1628, publicou uma tabela dos logaritmos dos primeiros 100 000 números inteiros, servindo de modelo para todas as tabelas que foram publicadas desde a época até meados do século XX.

Martha Salermo Monteiro – IME – USP, faz-nos uma colocação de que acredita-se que Napier e Burgi tiveram utilização seria extremamente importante para que a ciência se desenvolvesse, facilitando cálculos utilizados nas grandes navegações, nos estudos desenvolvidos pelos astrônomos e na engenharia e em outros segmentos e profissões. As tabelas de Logaritmos foram utilizadas por vários séculos, sendo finalmente substituídas, já em época mais recente, por calculadoras e computadores, por volta dos anos 60.

Interessante evidenciar que a invenção de Napier e Burgi se espalhou rapidamente pelo mundo, por meio de seu uso por matemáticos italianos, franceses, alemães e até mesmo chineses, no século XVII.

É importante notar que, mesmo que os logaritmos venham do resultado da relação inversa da potencialização, nessa época de seu surgimento ainda não se usava expoentes em Matemática. Há, porém, uma afirmação de que existem dois pais para a invenção: Napier que construiu sua tabela a partir de noções geométricas e Burgi que criou a sua a partir das noções algébricas. Existem também os precursores, dos quais evidenciamos Stifel, que a história referencia como o pai do embrião da do logaritmo. Ao publicar o mais importante tratado de álgebra da Alemanha, no século XVI, faz aparecer pela primeira vez o triângulo dos coeficientes do binômio, até os de ordem 17, incluindo a fórmula recorrente entre eles hoje conhecida como Relação de Stifel.

De acordo com o que vimos, os Logaritmos foram inventados como instrumento auxiliar dos cálculos aritméticos, transformando produtos em soma,

quocientes em diferenças e sua utilidade até bem recentemente foi incontestável, tendo prestado serviços reconhecidos e elogiados por muitos.

Para Elon Lages Lima (IMPA – RJ – RPM 18):

Além de seu emprego generalizado para tornar possíveis operações aritméticas complicadas, as funções logarítmicas, juntamente com suas inversas, as exponenciais, revelaram-se possuidoras de notáveis propriedades que os qualificavam como modelos ideais para certos fenômenos de variação, nos quais a grandeza estudada aumenta (ou diminui) com taxa de variação proporcional à quantidade daquela grandeza existente no momento dado.

Ainda há um enorme interesse das funções exponenciais e logarítmicas na Matemática, nas Ciências e na Tecnologia, por conseguinte, mesmo com o advento e uso universal das calculadoras e a consequente perda de interesse nos logaritmos como instrumento de cálculo aritmético, lembramos Elon Lages Lima de que a importância científica dos mesmos não diminuiu na atualidade, podendo afirmar sem perigo de erro que, enquanto houver Ciência, haverá aplicações das funções logarítmicas e exponenciais. O estudante moderno, pós-moderno deve levar em consideração, sem preconceito nenhum os logaritmos em qualquer base, evidenciando com grande destaque os logaritmos naturais, aqueles que têm por base o número " e ". Esse número tem uma importância fundamental que decorre sua particularidade de aparecer em vários lugares ao mesmo tempo, por isso deve ser apresentado ao aluno de Matemática ainda cedo, assim que lhe for apresentados os logaritmos, a fim de que ele os utilize sem qualquer estranheza e sem dificuldades.

Cabe acentuar que a notação que usamos hoje para os Logaritmos foi estabelecida por Leonhard Euler, responsável também por notar a relação dos logaritmos com a função exponencial, já no século XVIII.

CAPÍTULO II

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste capítulo do trabalho, referimo-nos à função exponencial. Destacamos como referência: Geraldo Ávila, Elon Lima, Roberto Luiz Dante e Gelson Iezzi.

2.1 POTÊNCIA DE EXPOENTE INTEIRO

Seja $a \neq 0$ um número real e n um número inteiro. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que

$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ a, & \text{se } n = 1 \\ a \cdot a^{n-1}, & \text{se } n > 1 \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{se } n < 0 \end{cases}.$$

Propriedades das potências

Sejam $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, sendo $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então valem as seguintes propriedades:

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

(5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Lema 2.1: Se $a > 1$ então $a^{n+1} > a^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Se $a > 1$ então, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n , obteremos $a^{n+1} > a^n$.

■

Como consequência do lema 2.1, temos

$$a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < \dots < a^n < a^{n+1} < \dots.$$

Em particular $a^{-n} < 1 < a^n$, para $n \in \mathbb{N}$ e $a^k < a^m$ para $k, m \in \mathbb{Z}$ com $k < m$. De fato $a^k < a^m$ e $k < m < 0 \Rightarrow -k > -m > 0 \Rightarrow a^{-m} < a^{-k} \Rightarrow \frac{1}{a^{-m}} > \frac{1}{a^{-k}} \Rightarrow a^m > a^k$

Lema 2.2: Se $0 < a < 1$ então $a^{n+1} < a^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Se $0 < a < 1$, então multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n teremos $a^{n+1} < a^n$. ■

Como consequência do lema 2.2,

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > \dots > a^n > a^{n+1} > \dots$$

Em particular $a^n < 1 < a^{-n}$, para $n \in \mathbb{N}$ e $a^k > a^m$ para $k, m \in \mathbb{Z}$ e $k < m$.

Lema 2.3: Se $a > 1$, a sequência formada pelas potências a^n , $n \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente, isto é, fixado um número real $c > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} > c$.

Demonstração: Escrevendo a expressão $a = 1 + d$, com $d > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, temos $a^n > 1 + nd$. Logo, dado $c > 0$ se tomarmos $n_0 > (c - 1)/d$, teremos $1 + n_0 d > c$ e, com maior razão, $a^{n_0} > c$. ■

Lema 2.4: Se $0 < a < 1$ então as potências de a^n decrescem abaixo de qualquer cota positiva. Ou seja, fixado $c > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} < c$.

Demonstração: Escrevendo $b = 1/a$, teremos $b > 1$. Do Lema 2.3 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b^{n_0} > 1/c$, ou seja, $\frac{1}{a^{n_0}} > \frac{1}{c}$, donde $a^{n_0} < c$. ■

2.2 POTÊNCIA DE UM EXPOENTE RACIONAL.

Dado um número real $a > 0$ e um número inteiro $q > 0$ o símbolo $\sqrt[q]{a}$ é a solução positiva da equação $x^q = a$.

Seja $a \in \mathbb{R}^+$ onde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ e $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$ defini-se potência de base a e expoente r por:

$$a^r = \sqrt[q]{a^p}.$$

Propriedade 2.5: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ sendo $r, s \in \mathbb{Q}$.

Demonstração: Sejam $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{u}{v}$ números racionais com $q > 0$ e $v > 0$. Por definição:

$$(a^r)^q = (\sqrt[q]{a^p})^q = a^p \text{ e } (a^s)^v = a^u.$$

Logo

$$(a^r \cdot a^s)^{qv} = (a^r)^{qv} \cdot (a^s)^{qv} = a^{rqv} \cdot a^{sqv} = a^{pv} \cdot a^{uq} = a^{pv+uq}.$$

Vemos que $a^r \cdot a^s$ é o número cuja qv -ésima potência vale a^{pv+uq} . Isto quer dizer que:

$$a^r \cdot a^s = a^{(pv+uq)/qv}$$

Como

$$\frac{pv+uq}{qv} = \frac{p}{q} + \frac{u}{v} = r + s,$$

temos

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

■

Propriedade 2.6: Se $a > 1$ e $r < s$ com $r, s \in \mathbb{Q}$, então $a^r < a^s$.

Demonstração: Sejam $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{m}{n}$ números racionais com $q > 0$ e $n > 0$. Temos que, $r < s$ se e somente se $pn < qm$. Por definição $(a^r)^{n \cdot q} = a^{pn}$ e $(a^s)^{n \cdot q} = a^{qm}$. Como $pn < qm$ e $pn, qm \in \mathbb{Z}$ temos que $a^{pn} < a^{qm}$, ou seja, $(a^r)^{n \cdot q} < (a^s)^{n \cdot q}$. Portanto $a^r < a^s$.

■

Propriedade 2.7: Se $0 < a < 1$ e $r < s$ com $r, s \in \mathbb{Q}$, então $a^r > a^s$.

Demonstração: Sejam $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{m}{n}$, números racionais com $q > 0$ e $n > 0$. Temos que, $r < s$ se e somente se $pn < qm$. Por definição $(a^r)^{n \cdot q} = a^{pn}$ e $(a^s)^{n \cdot q} = a^{qm}$.

Como $pn < qm$ e $pn, qm \in \mathbb{Z}$ temos que $a^{pn} > a^{qm}$, ou seja, $(a^r)^{n.q} > (a^s)^{n.q}$.
Portanto $a^r > a^s$. ■

Lema 2.8: Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo não degenerado de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r , com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração: Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota pré-fixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < \alpha < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n$$

Na última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \text{ e conseqüentemente } 0 < a^M (a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo, se $m \in \mathbb{N}$ é tal que $\frac{m}{n} \leq M$ então

$$0 < a^{\frac{m}{n}} (a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências

$$a^0 = 1, a^{1/n}, a^{2/n}, \dots, a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$. ■

2.3 POTÊNCIA DE EXPOENTE REAL

Seja $a \neq 1$ um número real positivo. A função exponencial de base a , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ indicada por $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2) $a^1 = a$

3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

A propriedade 3 impõe que a função exponencial deve ser crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Portanto existe uma única maneira de definir $f(x) = a^x$, quando x for irracional.

De fato, para fixar raciocínio consideremos o caso $a > 1$.

Neste caso a^x tem as seguintes propriedades, se $r < x < s$, com $r, s \in \mathbb{Q}$ então $a^r < a^x < a^s$.

Seja a^x um número real cujas aproximações por falta são a^r , com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são a^s , com $x < s$, $s \in \mathbb{Q}$.

O número a^x é o único número que satisfaz tal propriedade. De fato, se existissem dois números reais diferentes $A_1 < A_2$ satisfazendo a mesma propriedade de a^x então para $r < x < s$, r e $s \in \mathbb{Q}$ teríamos $a^r < A_1 < A_2 < a^s$.

Mas isto implicaria que o intervalo A_1 e A_2 não conteria nenhuma potência de a com expoente racional contrariando o *Lema 2.8*.

2.4 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dado um número real a , com $a > 0$ e $a \neq 1$, chamamos de função exponencial de base a a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$. Como consequência das considerações da seção anterior:

i) $f(0) = a^0 = 1$

ii) f é crescente se $a > 1$, ou seja, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

iii) f é decrescente se $0 < a < 1$, ou seja, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Uma função exponencial tem as seguintes propriedades.

Propriedade 2.9: A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

Demonstração: Com efeito, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$, com $r \in \mathbb{Q}$.

■

Propriedade 2.10: A função exponencial é contínua.

Demonstração: Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseja, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0 . Dito de outro modo: o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0} .

Em símbolos: $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$

Esta afirmação pode ser provada assim: escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} |a^h - 1|$. Ora, pode-se mostrar que a^h pode ser tornado tão próximo de 1 quanto desejemos, desde que tomemos h suficientemente pequeno. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0} |a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos. Isto implica que $\lim_{x \rightarrow x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$

■

Propriedade 2.11: A função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.

Demonstração: Esta afirmação quer dizer que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. Para prová-la, escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n} , com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$, de modo que $|b - a^{r_n}| < 1/n$.

Portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = b$. Para fixar as ideias, supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \dots < a^{r_n} < \dots < b.$$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então a monotonicidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots < s$.

Assim, r_n é uma sequência monótona, limitada superiormente por s . A completude de $\mathbb{R}$ garante então que os elementos da sequência r_n são valores aproximados por falta de um número real x , ou seja, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. A função exponencial sendo contínua garante que $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = b$ como queríamos demonstrar.

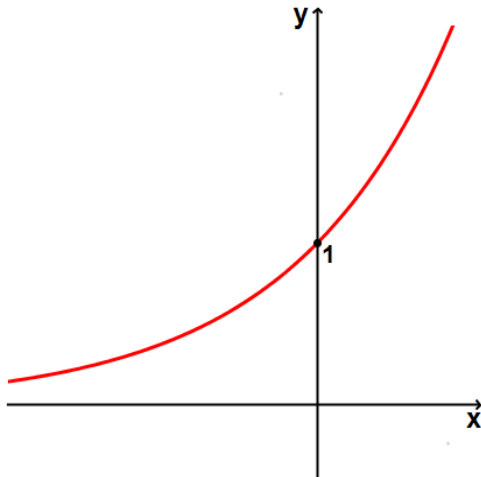
■

Gráficos

Com relação ao gráfico da função $f(x) = a^x$, podemos dizer que:

- i) a curva está toda acima do eixo dos x , pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- ii) corta o eixo y no ponto de ordenada 1.
- iii) se $a > 1$ é uma função crescente e se $0 < a < 1$ é uma função decrescente.

$$a > 1$$

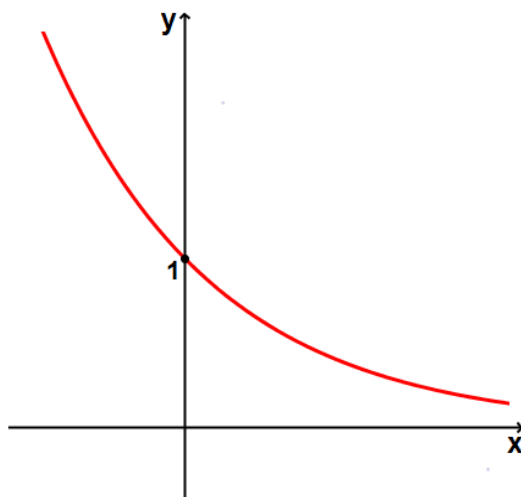


Crescente

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

$$0 < a < 1$$



Decrescente

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

2.5 CARACTERIZAÇÃO DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Teorema 2.12: *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função crescente ou decrescente. São equivalentes as afirmações:*

- i) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
- ii) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ onde $a = f(1)$;
- iii) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Provaremos as implicações $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

a) $(i) \Rightarrow (ii)$

Observa-se que a hipótese (i) acarreta que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito $nr = m$, assim pode-se escrever $f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$, logo

$$f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$$

Assim, se pusermos $f(1) = a$, tem-se $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Para completar a demonstração de que $(i) \Rightarrow (ii)$ suponhamos, a fim de fixar as ideias que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Vamos admitir, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$, então em todo intervalo $\mathbb{R}^+$ existe uma potência a^r com r racional tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$, concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa prova que $(i) \Rightarrow (ii)$.

b) $(ii) \Rightarrow (iii)$

Tem-se $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$.

c) $(iii) \Rightarrow (i)$

$$f(nx) = f(\overbrace{x+\dots+x}^{n \text{ vezes}}) = \overbrace{f(x) \cdot f(x) \dots f(x)}^{n \text{ vezes}} = f(x)^n$$

■

Assim se caracteriza a função exponencial, segundo LIMA;
As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante os oito anos da escola e, com menos exclusividade, porém ainda com grande destaque, nos três anos finais. Por sua vez, as funções quadráticas e exponenciais aparecem nesses três últimos anos, embora tenham, principalmente as últimas, importância considerável na universidade, bem como nas aplicações de Matemática em atividades científicas ou profissionais. (LIMA, 2001, V. 1. p, 183).

Uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$ então g é crescente e $0 < a < 1$, então g é decrescente.

Se a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de tipo exponencial de base a , então para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h \text{ e } \frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^h - 1 .$$

Dependente apenas de h , mas não de x .

O próximo teorema caracteriza uma função do tipo exponencial.

Teorema 2.13: *Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função crescente ou decrescente, tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)] / g(x)$ dependa apenas de h , mas não de x . Então se $b = g(0)$ e $a = g(1) / g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que $\varphi(h) = g(x+h) / g(x)$ independente de x . Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = g(x) / b$, onde $b = g(0)$, f continua crescente ou decrescente, com $f(x+h) / f(x)$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = f(x+h) / f(x)$ obteremos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Observa-se que a função crescente ou decrescente f cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja que $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Pelo teorema anterior, $f(x) = a^x$, logo $g(x) = b.f(x) = b.a^x$

■

2.6 Função Inversa

Diz-se que a função $g: Y \rightarrow X$ é a inversa da função $f: X \rightarrow Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g .

Quando g é a inversa de f , tem-se $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$.

Lema 2.14: *Se a função $f: X \rightarrow Y$ possui uma inversa então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre X e Y .*

Demonstração: Existe uma função $g: Y \rightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. A função f é injetiva, pois

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por sua vez, a igualdade de $f(g(y)) = y$, valendo para todo $y \in Y$, implica que f é sobrejetiva pois, dado $y \in Y$ arbitrário, tomamos $x = g(y) \in X$ e temos $f(x) = y$.

■

Lema 2.15: *Se $f: X \rightarrow Y$ é uma correspondência biunívoca entre X e Y então f possui uma inversa $g: Y \rightarrow X$.*

Demonstração: Para definir g , notamos que, sendo f sobrejetiva, para todo $y \in Y$ existe algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Além disso, como f é injetiva, este x é único. Pomos então $g(y) = x$. Assim $g: Y \rightarrow X$ é a função que associa a cada $y \in Y$ o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. É imediato que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

■

Quando $g: Y \rightarrow X$ é a função inversa de $f: X \rightarrow Y$, escreve-se $g = f^{-1}$.

Prova-se que uma função contínua $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, só pode ser injetiva se for monótona (crescente ou decrescente).

Portanto, afim de que uma função contínua $f: I \rightarrow J$ (I, J intervalos de $\mathbb{R}$) possua uma inversa, é necessário que f seja crescente, ou decrescente, além de sobrejetiva.

Lema 2.16: A inversa de uma função crescente $f: X \rightarrow Y$ é crescente.

Demonstração: Seja $g: Y \rightarrow X$, a inversa de f , isto é, $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Provemos que g é crescente. De fato, se $y_1 < y_2$ então $f(g(y_1)) < f(g(y_2))$. Como f é crescente, logo $g(y_1) < g(y_2)$. Ou seja, g é crescente.

■

Lema 2.17: A inversa de uma função decrescente é decrescente.

Demonstração: Seja $g: Y \rightarrow X$, a inversa de f , isto é, $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Provemos que g é decrescente. De fato, se $y_1 < y_2$, então $f(g(y_1)) > f(g(y_2))$. Como f é decrescente, então $g(y_1) > g(y_2)$. Ou seja, g é decrescente.

■

Antes de falar sobre o gráfico da função inversa, relembremos a noção de simetria em relação a uma reta.

Dois pontos P, Q no plano dizem-se *simétricos* em relação a uma reta r nesse plano quando r é a mediatriz do segmento PQ . Duas figuras dizem-se simétricas em relação à reta r quando cada ponto de umas delas é o simétrico de um ponto da outra em relação a essa reta.

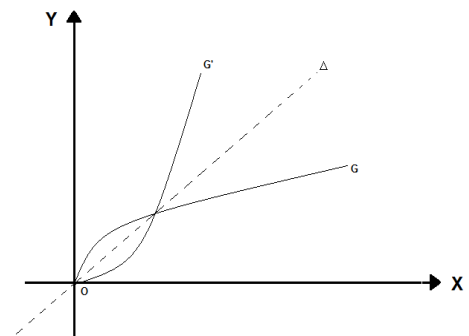
Chama-se diagonal do plano $\mathbb{R}^2$ a reta Δ formada pelos pontos (x, x) que tem abscissa e ordenada iguais.

O simétrico do ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ em relação à diagonal Δ é o ponto $Q = (y, x)$. Com efeito, o segmento PQ é uma diagonal do quadrado cujos os vértices $(x, y), (x, x), (y, y)$ e (y, x) , quando Δ é o prolongamento da outra diagonal.

Se X, Y são conjuntos de números reais e $f^{-1}: Y \rightarrow X$ é a inversa da função $f: X \rightarrow Y$ então o gráfico G' da função f^{-1} é o simétrico do gráfico G da função f em relação à diagonal $\Delta \subset \mathbb{R}^2$.

Com efeito, temos

$$(x, y) \in G \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in G'.$$



LOGARITMOS

Neste capítulo do trabalho, referimo-nos à função Logarítmica. Destacamos como referência os estudos: Geraldo Ávila, Elon Lima, Roberto Luiz Dante, Renato Fraenkel e Gelson Iezzi.

3.1 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Teorema 3.1: *Sejam $a > 0$, $a \neq 1$ e $\beta > 0$ dois reais quaisquer. Então existe um único γ real tal que $a^\gamma = \beta$.*

Demonstração: Pela propriedade 2.11 a função exponencial $f(x) = a^x$, é sobrejetora, portanto dado $\beta \in \mathbb{R}^+$ existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $a^\gamma = \beta$. Como a função f é injetora este γ é único. ■

Definição 3.2: *O único real γ tal que $a^\gamma = \beta$ chama-se logaritmo de β na base a e indica-se por $\gamma = \log_a \beta$.*

Em outras palavras, $\gamma = \log_a \beta$ se, e somente se, $a^\gamma = \beta$.

Propriedades imediatas

$$i) \log_a a = 1, \quad ii) \log_a 1 = 0, \quad iii) \log_a a^\gamma = \gamma \quad iv) a^{\log_a b} = b.$$

Seja $a > 0$ e $a \neq 1$, a função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$, $x > 0$ chama-se função logarítmica de base a . A função logarítmica é a inversa da função exponencial.

Propriedade 3.3: *O logaritmo do produto de dois números é igual à soma dos logaritmos desses números,*

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

Demonstração: Considerando $\log_a(x \cdot y) = \alpha$, $\log_a x = \beta$ e $\log_a y = \gamma$, temos:

$$a^\alpha = x \cdot y, \quad a^\beta = x \quad \text{e} \quad a^\gamma = y.$$

$$a^\alpha = a^\beta \cdot a^\gamma \Rightarrow a^\alpha = a^{\beta+\gamma}.$$

Como a função exponencial é injetora, então $\alpha = \beta + \gamma$, isto é,

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

■

Propriedade 3.4: O logaritmo do quociente de dois números é igual à diferença dos logaritmos desses números,

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y.$$

Demonstração: Considerando $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \alpha$; $\log_a x = \beta$; $\log_a y = \gamma$, temos:

$$a^\alpha = \frac{x}{y}; a^\beta = x; a^\gamma = y$$

$$a^\alpha = \frac{a^\beta}{a^\gamma} \Rightarrow a^\alpha = a^{\beta-\gamma}.$$

Como a função exponencial é injetora, então $\alpha = \beta - \gamma$, isto é,

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y.$$

■

Propriedade 3.5: O logaritmo de potência de base $a > 0$ e $a \neq 1$ é igual ao produto do expoente da potência pelo logaritmo da base da potência,

$$\log_a(x^\gamma) = \gamma \cdot \log_a x.$$

Sendo γ é um número real.

Demonstração: Considerando $\log_a(x^\gamma) = \alpha$ e $\log_a x = \beta$ temos:

$$a^\alpha = x^\gamma; a^\beta = x$$

$$a^\alpha = (a^\beta)^\gamma \Rightarrow a^\alpha = a^{\beta \cdot \gamma}.$$

Como a função exponencial é injetora, então $\alpha = \beta \cdot \gamma$, isto é,

$$\log_a(x^\gamma) = \gamma \cdot \log_a x.$$

■

Propriedade 3.6: A mudança de base, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, em que c é real, positivo e diferente de 1.

Demonstração: Considerando $\log_a b = \alpha$; $\log_c b = \beta$; $\log_c a = \gamma$, temos:

$$a^\alpha = b; c^\beta = b; c^\gamma = a.$$

Dáí:

$$a^\alpha = c^\beta \text{ e } c^\gamma = a \\ (c^\gamma)^\alpha = c^\beta.$$

Como a função exponencial é injetora, logo

$$\gamma \cdot \alpha = \beta \text{ e } \alpha = \frac{\beta}{\gamma} \text{ (com } \gamma \neq 0) \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

■

Propriedade 3.7: A função logarítmica $f(x) = \log_a x$, $x > 0$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Demonstração: A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é a inversa da função exponencial $g(x) = a^x$. Como a função exponencial é crescente de $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, o resultado segue como consequências dos lemas 2.16 e 2.17.

■

3.2 CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Uma função real $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, chama-se função logarítmica ou um sistema de logaritmos quando se tem as seguintes propriedades:

A) L é uma função crescente, isto é, $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$;

B) $L(xy) = L(x) + L(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, o número $L(x)$ chama-se o logaritmo de x .

Segue agora uma lista de propriedades das funções logarítmicas, isto é, propriedades que são consequências de A) e B) acima enunciados.

Propriedade 3.8: Uma função logarítmica $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes tem logaritmos diferentes.

Demonstração: Com efeito, se $x, y \in \mathbb{R}^+$ são diferentes, então ou $x < y$ ou $y < x$.

No primeiro caso, resulta de A) que $L(x) < L(y)$. No segundo caso tem-se $L(x) > L(y)$. Em qualquer caso, de $x \neq y$ conclui-se que $L(x) \neq L(y)$.

■

Propriedade 3.9: $L(1) = 0$.

Demonstração: $L(1) = L(1.1) = L(1) + L(1)$, então $L(1) = 0$. ■

Propriedade 3.10: Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.

Demonstração: Com efeito, sendo L crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta em $L(x) < L(1) < L(y)$, isto é, $L(x) < 0 < L(y)$. ■

Propriedade 3.11: Para todo $x > 0$, tem-se $L(1/x) = -L(x)$.

Demonstração: Com efeito, de $x \cdot (1/x) = 1$ resulta em $L(x) + L(1/x) = L(1) = 0$ donde $L(1/x) = -L(x)$. ■

Propriedade 3.12: Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, vale $L(x/y) = L(x) - L(y)$.

Demonstração: $L(x/y) = L(x \cdot (1/y)) = L(x) + L(1/y) = L(x) - L(y)$. ■

Propriedade 3.13: Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = p/q$ tem-se

$$L(x^r) = r \cdot L(x).$$

Demonstração: Façamos em duas etapas:

Em primeiro lugar, observar-se que a propriedade B) $L(xy) = L(x) + L(y)$ se estende para todo o produto de um número qualquer fatores. Por exemplo,

$$L(x \cdot y \cdot z) = L((xy) \cdot z) = L(xy) + L(z) = L(x) + L(y) + L(z),$$

e assim por diante:

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n) = L(x_1) + L(x_2) + \dots + L(x_n).$$

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$ então

$$L(x^n) = L(x \cdot x \dots x) = L(x) + L(x) + \dots + L(x)$$

$$L(x^n) = n \cdot L(x).$$

Portanto, a propriedade 3.13 vale quando $r = n$ é um número natural.

Ela também vale quando $r = 0$, pois, para todo número $x \in \mathbb{R}^+$ tem-se que $x^0 = 1$, logo $L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x)$.

Consideremos agora o caso em que $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$, isto é, onde r é um inteiro negativo. Então, para todo $x > 0$ temos $x^n \cdot x^{-n} = 1$. Logo

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0.$$

E daí

$$L(x^{-n}) = -L(x^n) = -nL(x).$$

Finalmente, o caso geral, em que $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ temos

$$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p.$$

Logo $q \cdot L(x^r) = L[(x^r)^q] = p \cdot L(x)$, em virtude do que já foi provado. Da igualdade que $q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x)$, resulta que $L(x^r) = (p/q) \cdot L(x)$ ou seja $L(x^r) = rL(x)$.

■

Propriedade 3.14: *Uma função logarítmica $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.*

Demonstração: A afirmação acima significa que, dados arbitrariamente números reais α e β , é sempre possível achar números positivos x e y tais que $L(x) < \alpha$ e $L(y) > \beta$. Suponhamos que nos seja dado um número real β e que se propõe a achar um número $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > \beta$. Procederemos da seguinte maneira: tomamos um número natural n tão grande que $n > \beta/L(2)$. Como $L(2)$ é positivo (Propriedade 3.10), temos $n \cdot L(2) > \beta$. Usando a Propriedade 3.13, vemos que $n \cdot L(2) = L(2^n)$. Portanto $L(2^n) > \beta$. Agora é só escolher $x = 2^n$. Temos $L(x) > \beta$. Isso mostra que L é ilimitada superiormente.

Para provar que L também é ilimitada inferiormente, basta lembrar que $L(1/x) = -L(x)$. Dado qualquer número real α , como vimos acima, podemos achar $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > -\alpha$. Então, pondo $y = 1/x$, teremos $L(y) = -L(x) < \alpha$.

■

Teorema 3.15: *Se $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função logarítmica e c é uma constante positiva arbitrária, então a função $M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $M(x) = c \cdot L(x)$ também é uma função logarítmica.*

Demonstração: Vamos provar que a função M satisfaz as propriedades A) e B).

A) $x < y \Rightarrow L(x) < L(y) \Rightarrow c.L(x) < c.L(y)$, logo

$$M(x) < M(y).$$

B) $M(x.y) = c.L(x.y) = c.(L(x) + L(y)) = c.L(x) + c.L(y)$, logo

$$M(x.y) = M(x) + M(y).$$

■

Teorema 3.16: Dadas as funções logarítmicas $L, M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c.L(x)$ para todo $x > 0$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que exista um número $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Provaremos, neste caso, que $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$. Em primeiro lugar, de $L(a) = M(a)$ concluímos que $L(a^r) = M(a^r)$ para todo r racional. Com efeito, $L(a^r) = r.L(a) = r.M(a) = M(a^r)$. Suponhamos, por absurdo, que existisse algum $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Para fixar ideias, digamos que fosse $L(b) < M(b)$. Escolhamos um número natural n tão grande que

$$n.[M(b) - L(b)] > L(a).$$

Então

$$L(a^{1/n}) = \frac{L(a)}{n} < M(b) - L(b).$$

Por simplicidade, escrevamos $c = L(a^{1/n})$. Os números $c, 2c, 3c, \dots$ dividem $\mathbb{R}^+$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c . Como $c < M(b) - L(b)$, pelo menos um desses números, digamos $m.c$, pertence ao interior do intervalo $(L(b), M(b))$, ou seja, $L(b) < m.c < M(b)$. Ora,

$$m.c = m.L(a^{1/n}) = L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}).$$

Então

$$L(b) < L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}) < M(b).$$

Como L é crescente, a primeira das desigualdades acima implica $b < a^{m/n}$. Por outro lado, como M também é crescente, a segunda desigualdade implica $a^{m/n} < b$. Esta contradição mostra que b não existe. Logo deve-se ter $M(x) = L(x)$ para todo $x > 0$. O caso geral reduz-se ao caso particular acima. Dadas L e M , funções logarítmicas arbitrárias, temos $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$, pois $2 > 1$ $L(1) = M(1) = 0$. Seja

$c = M(2)/L(2)$. Consideremos a função logarítmica $N: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $N(x) = c \cdot L(x)$. Como $N(2) = c \cdot L(2) = [M(2)/L(2)] \cdot L(2) = M(2)$, segue-se do que se provou acima que $N(x) = M(x)$ para todo $x > 0$, assim, $M(x) = c \cdot L(x)$ como queríamos demonstrar. ■

Teorema 3.17: *Toda função logarítmica L é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c , existe sempre um (único) número real positivo x tal que $L(x) = c$.*

Dada uma função logarítmica $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, existe um único número $a > 0$ tal que $L(a) = 1$. Este número é chamado de base do sistema de logaritmos L . Para explicitar a base muitas vezes se escreve $L_a(x)$ em vez de $L(x)$.

Se L_a e L_b , são funções logarítmicas, com $L_a(a) = L_b(b) = 1$ (ou seja, de bases a e b respectivamente), então temos a existência de uma constante $c > 0$ tal que $L_b(x) = c \cdot L_a(x)$ para todo $x > 0$. Assim, para $x = a$, temos $L_b(a) = c$. Portanto temos $L_b(x) = L_b(a) \cdot L_a(x)$ para todo $x > 0$. Esta é a fórmula de mudança de base de logaritmos.

Resultados análogos podem ser obtidos supondo $L(x)$ decrescente ao invés de crescente.

Teorema 3.18: *Seja $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva, tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração: Para fixar as ideias, vamos supor que f é crescente. O caso f decrescente é análogo. Como f é crescente e satisfaz $f(xy) = f(x) + f(y)$, temos que f é uma função logarítmica. A função $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \log_b x$ com $b > 1$ satisfaz as condições A) e B) da definição de função logarítmica. Pelo teorema 3.16, existe $c > 0$ tal que $f(x) = c \cdot g(x)$ para todo $x > 0$. Pelo teorema 3.17, a função g é sobrejetiva, assim, dado $c > 0$ existe $a \in \mathbb{R}^+$, com $a > 1$ (propriedade 3.10) tal que $g(a) = \frac{1}{c}$. Portanto,

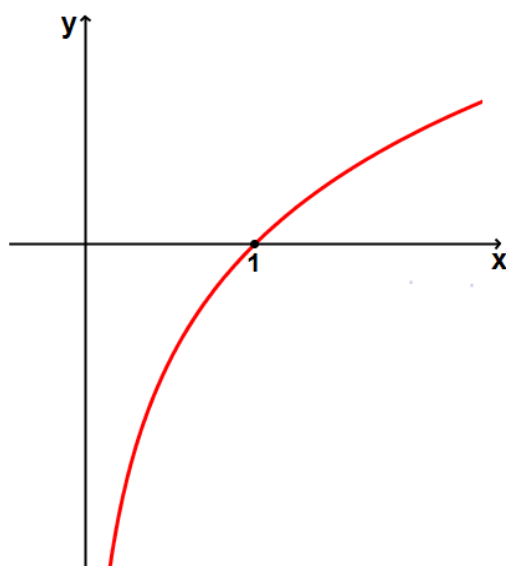
$$f(x) = c \cdot \log_b x = \frac{1}{g(a)} \cdot \log_b x = \log_a b \cdot \log_b x = \log_a x.$$

Gráficos da Função Logarítmica.

$L(x)$ de base b

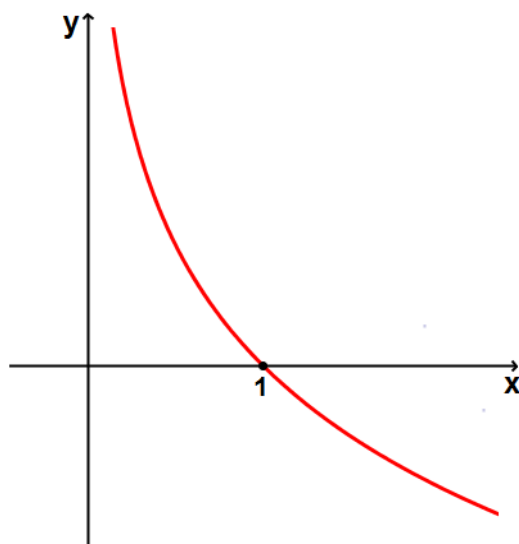
Crescente

$$b > 1$$



Decrescente

$$0 < b < 1$$



3.3 TÁBUA DE LOGARITMOS

As primeiras tábuas de logaritmos foram festejadas como um enorme avanço da ciência, pois possibilitavam uma rapidez no cálculo, a qual, até pouco tempo, seria considerada inacreditável.

A tábua de logaritmos é uma tabela de duas colunas de números com a seguinte propriedade: multiplicar dois números na coluna da esquerda é o mesmo que somar os números correspondentes na coluna da direita. Dessa forma, é possível substituir uma multiplicação por uma soma (que é uma operação muito mais rápida) e uma divisão por uma subtração.

Veja pequena parte de uma tabela de logaritmos:

NÚMEROS	LOGARITMOS
...	...
36	1,5563
37	1,5682
38	1,5798
...	...
64	1,8062
65	1,8129
66	1,8195
...	...
2404	3,3809
2405	3,3811
2406	3,3813

Para exemplificar, consideremos a multiplicação de 37 por 65. Para não fazer a conta diretamente, podemos procurar os logaritmos desses números na coluna da direita e somá-los: $1,5682 + 1,8129 = 3,3811$. Em seguida, basta procurar o número correspondente a esse resultado na coluna da esquerda.

Assim, concluímos que:

$$37 \cdot 65 = 2405.$$

Se consideramos ainda que, com os logaritmos, foi possível calcular potências e extrair raízes de qualquer índice fazendo apenas multiplicações e divisões, podemos entender por que essa invenção foi, de fato, revolucionária.

As tabelas e as máquinas científicas

Antigamente, publicavam-se imensas tabelas de logaritmos. Nas mais simples, os logaritmos eram dados com 4 casas decimais e nas maiores, com até 14 casas decimais. Com o aparecimento das calculadoras eletrônicas, as tabelas

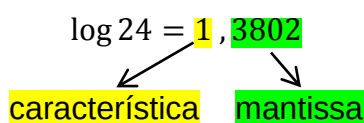
perderam sua função. As calculadoras científicas fornecem os logaritmos dos números instantaneamente, basta apertar a tecla LOG que elas possuem. Conhecendo um logaritmo, as calculadoras científicas também nos dizem a que número ele corresponde.

No entanto, são poucas as pessoas que possuem essas máquinas. Em geral, usamos no nosso dia-a-dia a calculadora simples, que possui apenas as quatro operações, a raiz quadrada e uma memória. Por isso, para as nossas aplicações precisaremos consultar uma tabela.

A consulta à tabela que vamos fornecer é fácil. Mas antes de lidar com ela, devemos aprender mais algumas coisas.

Característica e mantissa

O logaritmo de um número é constituído de duas partes: uma antes da vírgula e outra depois da vírgula. A primeira chama-se característica e a segunda chama-se mantissa. Veja isso no exemplo:

$$\log 24 = 1,3802$$


A característica situa o número dado entre duas potências consecutivas de 10. Logaritmos de números entre 1 e 10 possuem característica 0; logaritmos de números entre 10 e 100 possuem característica 1; logaritmos de números entre 100 e 1000 possuem característica 2, e assim por diante.

NÚMEROS	CARACTERÍSTICA DO LOGARITMO
entre 1 e 10	0
entre 10 e 100	1
entre 100 e 1000	2
entre 1000 e 10000	3

Veja agora a propriedade da mantissa nos exemplos a seguir:

$$\begin{array}{ll} \log 2,4 = 0,3802 & \log 240 = 2,3802 \\ \log 24 = 1,3802 & \log 2400 = 3,3802 \end{array}$$

TABELA DE MANTISSAS										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962

Observe como encontramos os logaritmos dos números consultando a tabela.

a) Para números de 1 a 99, a mantissa está na primeira coluna, e a característica será 0, se o número estiver entre 1 e 9, e será 1 se o número estiver entre 10 e 100.

	0			0	
5	6990	$\rightarrow \log 7 = 0,8451$	40	6021	$\rightarrow \log 43 = 1,6335$
6	7782		41	6128	
7	8451		42	6232	
8	9031		43	6335	
9	9542		44	6435	

b) Para números entre 100 e 1000 procure a mantissa da seguinte forma: localize os dois primeiros algarismos na coluna da esquerda e o último algarismo na linha que está acima da tabela. Na interseção está a mantissa; assim, a característica será 2. Veja como localizamos o logaritmo de 267.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
								↓		
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757

$$\log 267 = 2,4265$$

Com a tabela também podemos descobrir um número quando o seu logaritmo é conhecido. Suponha, por exemplo, que em certo problema encontramos o logaritmo de um certo número igual a 1,4669. Que número será esse?

A mantissa 4669 está inclusive na parte da tabela que acabamos de mostrar. À esquerda dessa mantissa, vemos na primeira coluna o número 29 e acima dela o número 3. Formamos então o número 293. Como a característica do logaritmo é 1, esse número está entre 10 e 99. Logo, o número procurado é 29,3.

3.4 O NÚMERO “e”

Os números mais frequentemente usados como base de um sistema de logaritmos são 10, que é a base do nosso sistema de numeração, e o número e .

Teorema 3.19: A sequência de termo geral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é convergente.

Demonstração: i) Vamos provar que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ para todo $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Daí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Como para $2^n \leq (n+1)!$ Para todo $n \geq 1$, resulta que $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \geq 1$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

e como

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2$$

resulta

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3 \text{ para todo } n \geq 1.$$

ii) Agora vamos provar que a sequência $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente.

Sejam $n \geq 1$ e $m \geq 1$ tais que $n < m$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{n!} \quad (1)$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{m(m-1)}{m^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{m!}{m^m} \cdot \frac{1}{m!} \quad (2)$$

de $n < m$ resulta

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n} &< 1 - \frac{1}{m} \\ 1 - \frac{2}{n} &< 1 - \frac{2}{m} \\ &\vdots \\ 1 - \frac{n-1}{n} &< 1 - \frac{m-1}{m}. \end{aligned}$$

Temos que

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{n^2} < \frac{m(m-1)}{m^2}.$$

Observe que: $\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} = \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right)$

Assim

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} < \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3}.$$

Utilizando essas desigualdades em (1) e (2) obteremos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \text{ se } n < m.$$

Logo a sequência é crescente.

Como toda sequência monótona e limitada é convergente, a sequência a_n converge. Seu limite será chamado de e .

Atribuindo valores para n , obteremos $e = 2,71828182 \dots$

$n = 10$	$a_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,59374246$
$n = 100$	$a_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,704813829$
$n = 1.000$	$a_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,716923932$
$n = 10.000$	$a_{10000} = \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2,718145927$

Agora vamos provar que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Sejam $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq x < n + 1$. Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \\ 1 + \frac{1}{n} &\geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Como $n \leq x < n + 1$, temos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Ou seja

$$\begin{aligned} n &\leq x < n + 1 \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n} &> \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} = e$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Mostra-se também que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{c}{x}\right)^x = e^c$ para $c > 0$ um número real.

CAPÍTULO IV

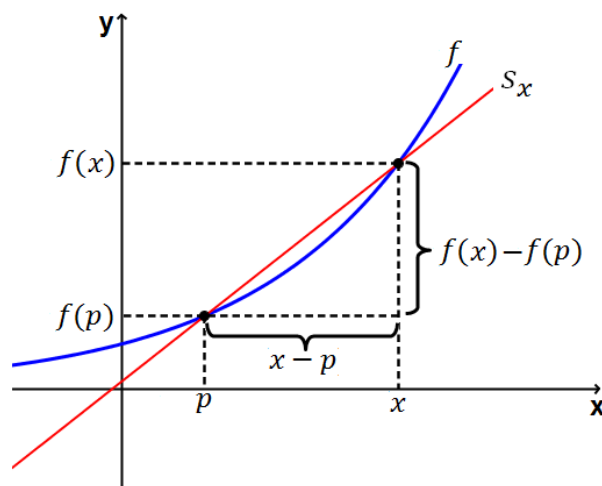
CÁLCULO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA.

Neste capítulo, dedicamos um estudo ao cálculo das funções Exponenciais e Logarítmica. Destacamos como referencia os estudos: Hamilton Luiz Guidorizzi, Elon Lima e Djairo Guedes de Figueiredo.

4.1 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Definição 4.1: Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$



quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$.

Assim

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p , então diremos que f é derivável ou diferenciável em p .

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Assim

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \text{ ou } f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

A reta da equação

$$y - f(p) = f'(p)(x - p)$$

é, por definição, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Assim, a derivada de f , em p , é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p .

Lema 4.2: $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$.

Demonstração: *i)* provemos que $\lim_{h \rightarrow 0^+} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$.

Fazendo $h = \frac{1}{x}$ ($h \rightarrow 0^+ \Rightarrow x \rightarrow +\infty$) vem

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

ii) provemos que $\lim_{h \rightarrow 0^-} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$

Fazendo $h = \frac{1}{x}$ ($h \rightarrow 0^- \Rightarrow x \rightarrow -\infty$) vem

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

■

Lema 4.3: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

Fazendo $u = e^h - 1$ ou $h = \ln(1 + u)$ vem

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{\ln(1 + u)} = \frac{1}{\ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}}$$

($h \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$); assim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

■

Lema 4.4: Seja $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$.

Demonstração: Dada a função $f(x) = e^x$, calculemos a sua derivada.

Temos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

$$f'(x) = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, temos que

$$f'(x) = e^x.$$

■

Para o caso de uma função $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

Lema 4.5: Se $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Demonstração: Dada a função $f(x) = \ln x$, temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

Fazendo $\left(u = \frac{h}{x}\right)$ teremos

$$f'(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{xu}}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x}.$$

■

Para o caso de uma função $g(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

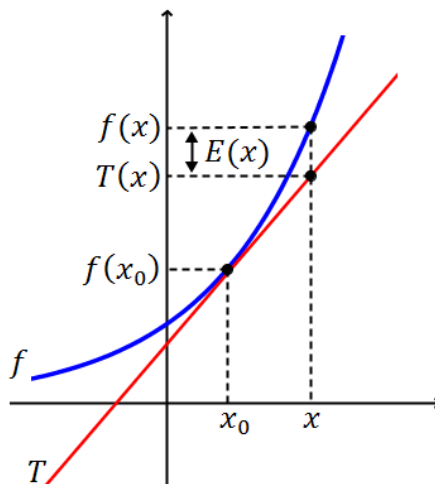
4.2 FÓRMULA DE TAYLOR

Aproximação local de uma função diferenciável por uma função afim.

Seja f uma função derivável em x_0 e seja T dada por

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

O gráfico de T é reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$.



Para $x \in D_f$, seja $E(x)$ o erro que se comete na aproximação de $f(x)$ por $T(x)$:

$$f(x) = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}{T(x)} + E(x), \quad x \in D_f.$$

Observe que, para $x \neq x_0$.

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Daí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0,$$

ou seja quando: $x \rightarrow x_0$, o erro $E(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x - x_0)$.

A função

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é a única função afim que goza da propriedade de que o erro de $E(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x - x_0)$. De fato, se $S(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ for uma função afim passando por $(x_0, f(x_0))$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + E_1(x), \quad x \in D_f,$$

onde $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_1(x)}{x - x_0} = 0$, então necessariamente $m = f'(x_0)$.

Segue que, se f for derivável em x_0 .

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é a função afim que melhor aproxima localmente a f em volta de x_0 .

A função T acima é uma função polinomial de grau no máximo 1; será do grau 1 se $f'(x_0) \neq 0$. Assim, T é o polinômio de grau no máximo 1 que melhor aproxima localmente a f em volta de x_0 .

Observe que os valores de f e T em x_0 são iguais, bem como os de suas derivadas:

$$f(x_0) = T(x_0) \text{ e } f'(x_0) = T'(x_0).$$

O polinômio

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

denomina-se polinômio de *Taylor* de ordem 1 de f em volta de x_0 .

O próximo teorema fornece-nos uma expressão para o erro $E(x)$, que aparece em termos da derivada 2ª de f . Para a demonstração do próximo teorema será usado o teorema de Cauchy, enunciado a seguir.

Teorema de Cauchy: Se f e g forem contínuas em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existirá pelo menos um c em $]a, b[$ tal que

$$[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c) ,$$

ou

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} , \text{ se } g(b) \neq g(a) \text{ e } g'(c) \neq 0.$$

Teorema 4.6: Seja f derivável até a 2ª ordem no intervalo I e sejam $x, x_0 \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2}_{E(x)}.$$

Demonstração:

$$E(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)].$$

Assim,

$$E(x_0) = 0 \text{ e } E'(x_0) = 0 .$$

Observe que $E'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, pois $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ são constantes.

Seja $h(x) = (x - x_0)^2$; segue que

$$h(x_0) = 0 \text{ e } h'(x_0) = 0.$$

Temos

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E(x) - E(x_0)}{h(x) - h(x_0)}.$$

Pelo teorema de Cauchy, existe $\bar{x}_1$ no intervalo de extremos x_0 e x tal que

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E'(\bar{x}_1)}{h'(\bar{x}_1)}.$$

Tendo em vista $E'(x_0) = h'(x_0) = 0$

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E'(\bar{x}_1) - E'(x_0)}{h'(\bar{x}_1) - h'(x_0)}.$$

Novamente, pelo teorema de Cauchy, existe $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e $\bar{x}_1$ tal que

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E''(\bar{x})}{h''(\bar{x})}$$

Como $E''(x) = f''(x)$ e $h''(x) = 2$, temos

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{f''(\bar{x})}{2}.$$

Portanto

$$E(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2} (x - x_0)^2,$$

para algum $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 .

■

Polinômio de Taylor de ordem 2

O polinômio de Taylor de ordem 1, de f em volta de x_0 , tem em comum com f o valor em x_0 e o valor da derivada em x_0 .

Suponhamos que f tenha derivadas até a 2ª ordem no intervalo I e seja $x_0 \in I$. Vamos procurar o polinômio P , de grau no máximo 2, que tenha em comum com f o valor em x_0 , o valor da derivada 1ª em x_0 e o valor da derivada 2ª em x_0 . Queremos, então, determinar P , de grau no máximo 2 tal que

$$f(x_0) = P(x_0), f'(x_0) = P'(x_0) \text{ e } f''(x_0) = P''(x_0).$$

Podemos procurar P da forma

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2$$

Como $P(x_0) = A_0$, devemos ter $A_0 = f(x_0)$.

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) .$$

e

$$P'(x) = 2A_2.$$

Daí, $P'(x_0) = A_1$ e $P''(x_0) = 2A_2$. Segue que devemos ter

$$A_1 = f'(x_0) \text{ e } 2A_2 = f''(x_0) \text{ ou } A_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$$

O polinômio de Taylor, de ordem 2, de f em volta de x_0 é

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 .$$

O próximo teorema fornece-nos uma expressão para o erro $E(x) = f(x) - P(x)$ em termos da derivada de 3ª ordem de f .

Teorema 4.7: Seja f derivável até a 3ª ordem no intervalo I e sejam x_0, x em I .

Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ entre x e x_0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \underbrace{\frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3}_{E(x)} .$$

Exemplo 4.8: Vamos calcular um valor aproximado para $\ln 1,05$ avaliando o erro.

Solução: Seja $f(x) = \ln x$. Vamos utilizar o polinômio de Taylor de ordem 2 em volta de $x_0 = 1$.

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2}(x - 1)^2.$$

De $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, segue que $f'(1) = 1$ e $f''(1) = -1$. Assim

$$P(x) = 0 + (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2,$$

ou

$$P(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$

Teremos

$$\ln 1,05 \cong P(1,05),$$

mas

$$P(1,05) = 0,04875.$$

Logo

$$\ln 1,05 \cong 0,04875$$

Avaliação do erro

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, assim $|f'''(x)| \leq 2$ para $x \geq 1$. De acordo com o Teorema anterior.

Como $|f(x) - P(x)| \leq \frac{2}{3!} |x - 1|^3$, para $x \geq 1$,

segue que $|f(1,05) - P(1,05)| \leq \frac{1}{3} \cdot 0,05^3$

ou

$$|f(1,05) - P(1,05)| \leq 0,00004167$$

Assim, o módulo do erro cometido na aproximação

$$\ln 1,05 \cong 0,04875$$

É inferior a 10^{-4} (observe: $0,00004166 = 4,16 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$).

Como, para $x > 1$, $E(x) = \frac{f'''(\bar{x})}{3!} (x - 1)^3 > 0$, segue que 0,04875 é uma aproximação por falta de $\ln 1,05$.

Polinômio de Taylor de ordem n

Seja f derivável até a ordem n no intervalo I e seja $x_0 \in I$. O polinômio

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Chama-se polinômio de Taylor de ordem n de f em volta de x_0 .

Fórmula de Taylor com resto de Lagrange: Seja f derivável até a ordem $n + 1$ no intervalo I e sejam $x, x_0 \in I$. Então existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

onde

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Exemplo 4.9: Vamos calcular o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em volta de $x_0 = 0$.

Solução: $P(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - 0)^n$.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = 1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f^n(x) = e^x \Rightarrow f^n(0) = 1.$$

Portanto

$$P(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Exemplo 4.10: Vamos calcular o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = \ln x$ em volta de $x_0 = 1$.

Solução: $P(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2}(x - 1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x - 1)^n$.

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^n(1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

O polinômio de Taylor para $f(x) = \ln x$ no ponto $x = 1$ é

$$P(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot (x-1)^n}{n}.$$

Lema 4.11: Seja f derivável até a ordem $n + 1$ no intervalo I e seja $x_0 \in I$. Suponha que existe $M > 0$ tal que, para todo x em I .

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M$$

Então, para todo x em I .

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

onde $P(x)$ é o polinômio de Taylor, de ordem n , de f em volta de x_0 .

Demonstração: Segue o teorema de Taylor com resto de Lagrange que, para todo x em I existe $\bar{x}$ entre x e x_0 tal que

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} \right| |x - x_0|^{n+1}.$$

Como para todo x em I , $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, resulta

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

■

Lema 4.12: Para todo x em $[0,1]$ tem-se

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right) \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Demonstração: Pelo exemplo 4.9

$$P(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

Para x em $[0,1]$, $0 < e^x = f^{(n+1)}(x) \leq e < 3$

De acordo com a formula de Taylor com resto de Lagrange, para todo x em $[0,1]$, existe $\bar{x}$ entre 0 e x tal que

$$e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Assim, para todo x em $[0,1]$ (tendo em vista a desigualdade acima)

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right) \right| < \frac{3}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Exemplo 4.13: Calculemos e com erro, em módulo, inferior a 10^{-5} .

Solução: Para $x = 1$

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right| < \frac{3}{(n+1)!}$$

precisamos determinar n de modo que

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}.$$

Por tentativas, chega-se a $n = 8 \left(\frac{3}{9!} < 10^{-5} \right)$.

Assim,

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!},$$

com erro inferior a 10^{-5} .

Observação: Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(n+1)!} = 0$, segue do teorema do confronto, que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$

Lema 4.14: O $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ onde $a > 0$ é um real fixo.

Lema 4.15: Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right] = e^x$$

Demonstração: Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $\bar{x}$ entre 0 e x tal que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Se $x > 0$, $e^{\bar{x}} < e^x$, pois $\bar{x} \in]0, x[$. Logo

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right) \right| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right] = e^x.$$

Se $x < 0$, $e^{\bar{x}} < e^0 = 1$ pois $\bar{x} \in]0, x[$, logo

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right) \right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

De $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right) = e^x.$$

Fica provado, assim, que, para todo x ,

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right).$$

■

Esta igualdade é usualmente escrita na forma

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots .$$

Teorema 4.16: O polinômio de Taylor de $f(x) = \ln x$ em volta de $x_0 = 1$ converge para $\ln x$ para todo $0 < x \leq 2$, ou seja,

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x - 1)^n}{n} + \cdots$$

4.3 A Irrracionalidade e a Transcendência do e

A série de Taylor para a função e^x , pelo capítulo anterior, converge para todo valor real de x ,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Portanto, sendo $e = e^1$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots . \quad (1)$$

Outro resultado conhecido é o valor da série geométrica. Sabemos que se $|x| < 1$ então

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots . \quad (2)$$

A seguir a prova de que número e é irracional é então feita por contradição.

Teorema 4.17: O número e é irracional.

Demonstração: Suponha que e fosse racional, ou seja, $e = \frac{p}{q}$ onde $p, q \in \mathbb{N}$ e

$(p, q) = 1$. Pela equação (2) vemos que, como $q \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q+1} \right)^k &= \frac{\frac{1}{q+1}}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{\frac{1}{q+1}}{\frac{q+1-1}{q+1}} = \frac{1}{q} \\ \left(\frac{1}{q+1} \right)^k &> \prod_{i=1}^k \frac{1}{q+i} = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (q+i)} \end{aligned}$$

Sempre que $k > 1$, assim,

$$\frac{1}{q} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q+1} \right)^k > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^k (q+i)}$$

Multiplicando por $\frac{1}{q!}$, teremos:

$$\frac{1}{q!q} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q! \prod_{i=1}^k (q+i)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q+k)!}$$

e portanto:

$$\frac{1}{q!q} + \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} > e$$

Por outro lado,

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!}$$

Então obteremos,

$$0 < e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!q}$$

ou ainda,

$$0 < p(q-1)! - \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} < \frac{1}{q}$$

Que é o mesmo que:

$$0 < p(q-1)! - \sum_{k=0}^q \left(\prod_{i=k+1}^q i \right) < \frac{1}{q} \leq 1$$

A essa equação é obviamente um absurdo pois esse número que se encontraria no intervalo (0, 1) é claramente um inteiro. Já que a nossa única hipótese foi que e seria um número racional, fica provado que isso não pode ser verdade, isto é, e é irracional.

■

A solução da equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, onde os coeficientes a_i com $i = 1, 2, \dots, n$ são racionais. Essas soluções são chamadas de números algébricos.

Os Números Transcendentes são aqueles que não podem ser raízes de polinômios de coeficientes racionais, ou seja, os números que não são algébricos são chamados de transcendental, um termo cunhado por Euler para descrever

números como o e , que pareciam transcender (ir além) os métodos algébricos. Em contraste com os Números Irracionais, cuja descoberta surgiu de um problema na geometria, os primeiros números transcendentais, foram criados com o objetivo de mostrar que tais números existiam. Quando este objetivo foi alcançado, a atenção se voltou para o e , que já era conhecido e já tinham demonstrado sua irracionalidade. Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) provou que e não pode ser solução de uma equação quadrática com coeficientes inteiros, o que não foi suficiente para mostrar que era transcendente, ou seja, provar que e não é solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes racionais.

“A Transcendência de e foi um desafio aos matemáticos até o século XIX. Em 1873, o matemático francês C. Hermite marcou época ao demonstrar a transcendência de e , em uma série de notas publicadas no Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. A demonstração original de Hermite sofreu simplificações sucessivas por matemáticos famosos como Jordan (1882), Markhoff (1883), Rouché (1883), Weierstrass (1885), Hilbert (1893). Hurwitz (1893) e Veblen (1904), entre outros.” (Figueiredo, 2002).

APLICAÇÕES

Neste capítulo, dedicamos um estudo de algumas aplicações clássicas que envolvem funções exponenciais e logarítmicas. Destacamos como referência dos estudos: Elon Lima, e Boyce e DiPrima, e Gelson Iezzi.

5.1 Lei do Resfriamento de Newton

Um corpo está contido num ambiente de temperatura constante. Decorrido o tempo (em minutos), seja $D(t)$ a diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente. Segundo a Lei do Resfriamento de Newton, $D(t)$ é uma função decrescente de t , com a propriedade de que um decréscimo relativo

$$\frac{D(t) - D(t+h)}{D(t)}$$

no intervalo $[t, t+h]$ de tempo depende apenas da duração h desse intervalo (mas não do momento em que essa observação se iniciou). Isto posto, responda à seguinte pergunta: Num certo dia, a temperatura ambiente era de 30° . A água, que fervia a 100° numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo ficou com a temperatura de 60° . Qual era a temperatura da água 15 minutos após apagado o fogo?

SOLUÇÃO: Pela Lei do Resfriamento de Newton, a função $D(t)$, em que t é o momento em que o fogo foi apagado, cumpre as hipóteses do Teorema de Caracterização das funções de tipo exponencial. Logo existe uma constante a , com $0 < a < 1$, tal que $D(t) = D_0 a^t$, onde $D_0 = D(0)$. Temos $D_0 = 100 - 30 = 70$. Logo $D(t) = 70a^t$. O problema nos diz que $D(5) = 60 - 30 = 30$. Portanto $70a^5 = 30$ e daí vem $a^5 = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$. Segue-se que $a^{15} = (a^5)^3 = \left(\frac{3}{7}\right)^3$ e que $D(15) = 70a^{15} = 70\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \left(\frac{270}{49}\right) \cong 5,5$. Portanto, 15 minutos após o fogo ser apagado, a temperatura da água é de aproximadamente $30 + 5,5 = 35,5$ graus.

Alternativamente, pode-se usar a informação sobre o decréscimo relativo constante de $D(t)$ diretamente. Temos $D(0) = 70$ e $D(5) = 40$. Portanto

$$\frac{D(0)-D(0+5)}{D(0)} = \frac{D(0)-D(5)}{D(0)} = \frac{70-40}{70} = \frac{3}{7},$$

e, assim, $D(5) = \frac{3}{7}D(0)$ Pela propriedade mencionada,

$$\frac{D(5)-D(5+5)}{D(5)} = \frac{D(5)-D(10)}{D(5)} = \frac{3}{7},$$

o que nos conduz a $D(10) = \frac{3}{7}D(5) = \left(\frac{3}{7}\right)^2 D(0)$. Em seguida usamos novamente a mesma informação, obtendo

$$\frac{D(10)-D(15)}{D(10)} = \frac{D(0)-D(5)}{D(0)} = \frac{3}{7},$$

o que nos conduz a $D(15) = \left(\frac{3}{7}\right)^3 \cdot D(0)$, o resultado segue.

Esse exemplo foi uma questão retirada do PROFMAT – Exame de Qualificação 2012-1.

5.2 Juros Contínuos

Os logaritmos naturais e a função e^x surgem espontaneamente em certas questões onde o aumento ou a diminuição de uma grandeza se faz proporcionalmente ao valor da grandeza num dado instante.

Um capital c , empregado a uma taxa de k por cento ao ano, apresentara no fim de um ano o montante:

$$M = c + \frac{ck}{100}, \text{ onde } \frac{k}{100} = \alpha. \text{ Então}$$

$$M = c + c\alpha$$

$$M = c(1 + \alpha).$$

Para um novo montante após dois anos aplicando a uma mesma taxa teremos:

$$M_2 = c(1 + \alpha) + c(1 + \alpha)\alpha$$

$$M_2 = (1 + \alpha) \cdot (c + c\alpha)$$

$$M_2 = (1 + \alpha) \cdot c(1 + \alpha)$$

$$M_2 = c(1 + \alpha)^2.$$

Aplicando para 3 anos teremos:

$$M_3 = c(1 + \alpha)^2 + c(1 + \alpha)^2\alpha$$

$$M_3 = (1 + \alpha)^2 \cdot (c + c\alpha)$$

$$M_3 = (1 + \alpha)^2 \cdot c(1 + \alpha)$$

$$M_3 = c(1 + \alpha)^3.$$

Portanto para m anos teremos $M_m = c(1 + \alpha)^m$.

Admitindo uma fração $1/n$ de ano, o capital c , empregado à mesma taxa de juros, deverá render $\alpha c/n$ de juros, de modo que, decorrida a fração $1/n$ de anos, o capital c transforma-se em:

$$M_m = c(1 + \alpha)^m.$$

$$c_1 = c + \frac{c\alpha}{n}$$

$$c_1 = c\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)$$

Submetendo este novo capital c_1 e esperando mais $1/n$ de ano, temos:

$$c_2 = c\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^2.$$

Prosseguindo assim, vemos que, se dividimos o ano em n partes iguais e, depois de decorrido cada um desses períodos de $1/n$ de ano, capitalizarmos os juros rendidos, reinvestindo sucessivamente à mesma taxa, quando chegar o fim do ano, em vez de $c(1 + \alpha)$, obteremos um capital maior, ou seja, possuiremos

$$c\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

Uma pessoa atenciosa desejará que seus juros sejam capitalizados a cada instante.

Fazendo uma previsão aplicaremos o limite tendendo ao infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} c \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{\alpha}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} c \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{\alpha}}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^\alpha = c(e)^\alpha.$$

Criando uma situação hipotética de um capital de R\$ 1,00 empregado a juros contínuos de 100% ao ano, no final de um ano será transformado em e reais.

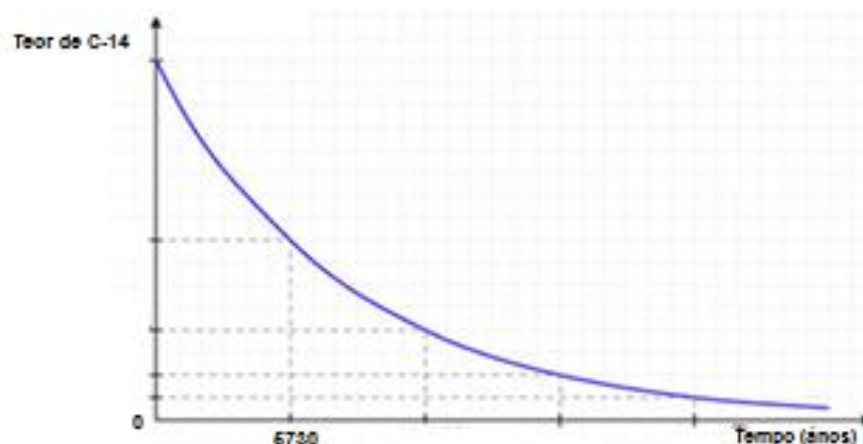
Se a taxa de juros é referida a anos ($k\%$ ao ano, $\alpha = \frac{k}{100}$), então um capital c empregado a essa taxa será transformado, depois de t anos, em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \left(1 + \frac{\alpha t}{n}\right)^n = ce^{\alpha t}.$$

5.3 Datação Por Carbono Radioativo

Uma ferramenta importante em pesquisa arqueológica é a datação por carbono radioativo. Essa é uma ferramenta para determinar a idade de determinados restos de madeiras e plantas, e, portanto, de ossos de animais ou homens, ou de artefatos encontrados enterrados nos mesmos níveis.

O procedimento foi desenvolvido pelo químico americano Willard Libby (1908-1980) no início da década de 1950, pelo qual recebeu o premio Nobel de química em 1960. A datação por carbono radioativo é baseada no fato de que algumas madeiras ou plantas contém quantidades residuais de carbono-14, um isótopo radioativo de carbono. Esse isótopo é acumulado durante a vida da planta e começa a decair na sua morte. Como a meia vida do carbono é longa (aproximadamente 5730 anos), podem ser medidas quantidades remanescentes de carbono-14 após muitos milhares de anos. Libby mostrou que, mesmo que a fração da quantidade original de carbono-14 ainda presente seja muito pequena, então através de medidas adequadas feitas em laboratório, a proporção da quantidade original de carbono-14 que permanece pode ser determinada precisamente. Em outras palavras se $Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 no instante t e se Q_0 é a quantidade original, então $Q(t) / Q_0$ pode ser determinada, pelo menos se essa quantidade não for pequena demais. Técnicas atuais de medida permitem a utilização desse método para períodos de tempo até em torno de 50.000 anos, após o qual a quantidade de carbono-14 remanescente é aproximadamente 0,00236 da quantidade local.



Exemplo 5.1: Suponha que são descobertos certos restos de plantas nos quais a quantidade residual atual de carbono 14 é 20% da quantidade original. Determine a idade desses restos.

Solução: Seja a equação $Q(t) = Q_0 e^{-rt}$, primeiramente calcula-se a constante de decaimento r para o carbono-14.

Como certo elemento radioativo tem meia-vida igual a t_0 unidades de tempo, chega-se a uma definição que uma unidade de massa desse elemento se reduz metade no tempo t_0 . Assim

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{-r \cdot 5730}$$

Utilizando o logaritmo em ambos os membros:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{-r \cdot 5730}$$

$$\ln 1 - \ln 2 = -r \cdot 5730 \cdot \ln e$$

Como $\ln 1 = 0$ e $\ln e = 1$, teremos:

$$-\ln 2 = -r \cdot 5730$$

$$r = \frac{\ln 2}{5730}$$

$$r = 0,00012097$$

Como $Q(t) = 0,2 \cdot Q_0$

$$0,2Q_0 = Q_0 e^{-0,00012097t}$$

$$\ln 0,2 = \ln e^{-0,00012097t}$$

$$-1,609437912 = -0,00012097t \ln e$$

$$t = \frac{-1,609437912}{-0,00012097}$$

$$t \cong 13.309 \text{ anos.}$$

5.4 Terremotos

Uma onda sísmica é uma onda que se propaga através da terra, geralmente como consequência de um sismo, ou devido a uma explosão. Estas ondas são estudadas pelos sismólogos e medidas por sismógrafos.

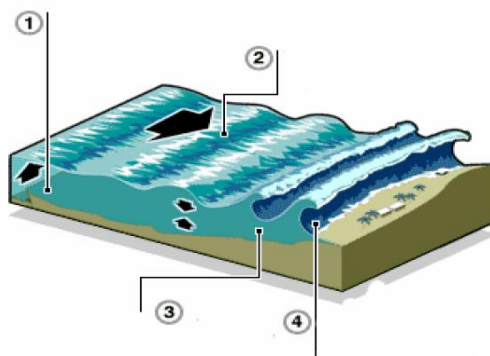
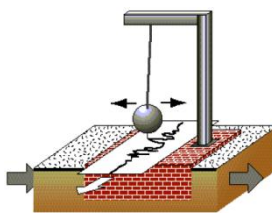


Figura 1: Como se forma um Tsunami. Fonte: http://www.cientic.com/tema_geologicos.html Acesso em: 18/11/2006.

1. A ruptura causada pelo tremor no leito do mar empurra a água para cima, dando início à onda.
2. A onda gigante se move nas profundezas do oceano em velocidade altíssima.
3. Ao se aproximar da terra, a onda perde velocidade, mais fica mais alta.
4. Ela então avança por terra, destruindo tudo em seu caminho.

Os sismógrafos têm como princípio básico um pêndulo cuja oscilação é diretamente proporcional à do abalo que ocorreu. O registro dessas oscilações fornece dados que caracterizam a intensidade do fenômeno ocorrido.

Fig. 2: Sismógrafo



Fonte: <http://www.if.ufrgs.br>

Trata-se de uma escala construída a partir de logaritmos decimais e as variações se dão através de potências de base dez. Terremotos que atingem até a magnitude 2 são considerados microterremotos e praticamente não são sentidos. A partir das magnitudes entre 4 e 5 na escala Richter, um tremor já é suficientemente forte e libera tanta energia mecânica que pode ser detectado por instrumentos instalados em vários locais do planeta.

Uma das formas de medição dos abalos é calculada através da fórmula:

$$M_L = \log A - \log A_0.$$

Nessa fórmula, temos que:

A = amplitude máxima das ondas sísmicas P (pressão máxima) e S (superficial), medidas a 100 km do epicentro do sismo.

A_0 = uma amplitude de onda usada como referência.

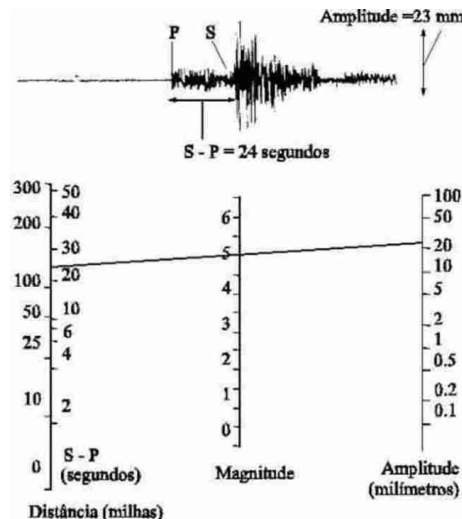


Figura 4: No gráfico à distância do foco do sismo, em termos de tempo entre as chegadas de onda P e S , é de 24s. A máxima amplitude é de 23mm. Fonte: http://pt.Wikipedia.org/wiki/Escala_de_Richter Acesso em : 18/11/2006.

A tabela abaixo mostra a magnitude de um terremoto de acordo com a energia liberada.

A escala Richter e seus efeitos								
0 a 1,9	2 a 2,9	3 a 3,9	4 a 4,9	5 a 5,9	6 a 6,9	7 a 7,9	8 a 8,9	9 ou mais
Tremor detectado apenas por um sismógrafo.	Oscilações de objetos suspensos.	Vibração parecida com a passagem de um caminhão.	Vidros quebrados, queda de pequenos objetos.	Móveis são deslocados, fendas nas paredes.	Danos nas construções, destruição das casas frágeis.	Danos maiores, fissuras no subsolo, canos se rompem.	Pontes destruídas, maioria das construções desaba.	Destruição quase total das construções, tremor de terra visível a olho nu.

Veja um exemplo:

Em 1986, um terremoto em João Câmara (RN) atingiu 5 graus na escala Richter. Já o terremoto causado por um tsunami na Ásia atingiu 9 graus.

$$M_1 - M_2 = \log A_1 - \log A_2$$

$$5 - 9 = \log \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \Rightarrow -4 = \log \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \Rightarrow 10^{-4} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{1}{10\,000} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_2 = 10\,000 A_1.$$

Ou seja, as ondas do terremoto da devastação na Ásia foram 10 000 vezes mais amplas do que as ondas do terremoto em João Câmara.

CONCLUSÃO

Neste presente trabalho, foi realizado um estudo das funções exponenciais e logarítmicas, devido à necessidade de se ter um material de apoio para enriquecer e dinamizar as aulas com os conceitos, definições e caracterizações, considerando a abordagem desse tema as suas aplicações em diferentes contextos e do uso da tábua de logaritmos.

Ao realizar esse estudo sobre as funções exponenciais e logarítmicas, foi percebido o quanto esse assunto contribuiu para a formação intelectual, uma vez que possibilita ter mais acesso a novos conhecimentos nas diversas situações, em que podemos aplicá-las. Exemplos como nos juros contínuos, na datação por carbono radioativo, para o registro de cálculos de índice de terremotos por um sismógrafo.

Durante o quarto capítulo, foi realizado um estudo de cálculo das funções exponencial e logarítmica utilizando como ferramenta a fórmula de Taylor, logo em seguida, foi abordado um estudo sobre o número e , momento de grande importância na construção de argumentos para enriquecimento dos estudos, o qual soou como algo inusitado.

Portanto, é fato que a invenção dos logaritmos teve um impacto no desenvolvimento científico e tecnológico. Sua aprendizagem faz com que se abram novos horizontes, possibilitando uma visão de que ainda podemos aplicar sempre os conceitos e definições tanto em situações elementares como complexas, garantindo a compreensão da Matemática como Ciência, presente e necessária na sociedade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] AVILA, Geraldo. **Como se Constrói uma Tábua de Logaritmos**. Revista do Professor de Matemática - RPM, número 26. São Paulo.
- [2] AVILA, Geraldo. **Números Muito Grande**. Revista do Professor de Matemática - RPM, número 25. São Paulo.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 2001.
- [4] DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática**. São Paulo, Ática, 2009.
- [5] DIPRIMA, Boyce e. **Equações Diferenciais Elementares e problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro. LTC, 2002.
- [6] FIGUEIREDO, Djairo G. **Números Irracionais e Transcendentes**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.
- [7] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Números Irracionais e Transcendentes**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 3ª edição, 2002.
- [8] FRAENKEL, Renato. **Logaritmos - Um Curso Alternativo**. Revista do Professor de Matemática - RPM, número 04. São Paulo.
- [9] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1 . Rio de Janeiro. LTC, 2001.
- [10] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. MURAKAMI, Carlos – **Fundamentos de matemática elementar – logaritmos**. 8. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [11] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. MURAKAMI, Carlos – **Matemática: ciência e aplicação**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2006.

[12] LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2009.

[13] LIMA, Elon Lages. **Sobre a evolução de algumas ideias matemáticas**. Revista do Professor de Matemática - RPM, número 06. Rio de Janeiro.

[14] LIMA, Elon Lages. **Sistemas de Logaritmos**. Revista do Professor de Matemática - RPM, número 18. Rio de Janeiro.

[15] LIMA, Elon Lages. **Crescimento Linear e Crescimento Exponencial**. Revista do Professor de Matemática - RPM, número 33. Rio de Janeiro.

[16] LIMA, Elon Lages. **Como Reconhecer uma função de Tipo Exponencial**. Revista do Professor de Matemática - RPM, número 58. Rio de Janeiro.

[17] LIMA, Elon Lages. **Crescimento Exponencial? O que é isto?** Revista do Professor de Matemática - RPM, número 62. Rio de Janeiro.

[18] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. SBM. Rio de Janeiro, 2013.

[19] LIMA, Elon Lages. **A Matemática do ensino Médio**, Vol 01, 9 ed. Rio de Janeiro, SBM, 2006.