UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

HUDSON NOGUEIRA CUNHA

A MATEMÁTICA FINANCEIRA FUNDAMENTAL NO COTIDIANO

CAMPO GRANDE - MS
MAIO DE 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

HUDSON NOGUEIRA CUNHA

A MATEMÁTICA FINANCEIRA FUNDAMENTAL NO COTIDIANO

ORIENTADOR: Prof. Dr. JAIR DA SILVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática – INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

CAMPO GRANDE – MS
MAIO DE 2013

A MATEMÁTICA FINANCEIRA FUNDAMENTAL NO COTIDIANO

HUDSON NOGUEIRA CUNHA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jair da Silva – UFMS

Profa. Dra. Rúbia Mara de Oliveira Santos - UFMS

Profa. Dra. Maristela Missio – UEMS

CAMPO GRANDE – MS

MAIO DE 2013

MENSAGEM

O que irá valer o meu conhecimento se ele morrer comigo?

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado a minha linda esposa Denise Borges dos Santos e meu sábio filho Daniel Borges Nogueira.

AGRADECIMENTOS

A Javé, o Deus de Israel e meu Deus.

A meu filho Daniel Borges Nogueira que compartilhou seu tempo no computador para que eu realizasse este trabalho.

A minha esposa Denise Borges dos Santos, que me incentivou e teve tanta paciência com as minhas pesquisas e estudos, durante estes dois anos de curso no programa PROFMAT, e que com muito amor me ajudou neste trabalho.

Ao Érico Bragato, meu irmão em Cristo, que me ajudou com algumas fórmulas.

Ao professor Jair da Silva.

Ao professor Claudemir Aniz.

A professora Élvia Mureb Sallum.

A professora Rubia Mara de Oliveira Santos.

A professora Elisabete Sousa Freitas.

Ao professor Edson Rodrigues Carvalho.

Ao professor Tsuguio Tokuda.

Ao professor Antonio Padua Machado.

Ao professor Celso Cardoso.

A professora Sônia Regina Di Giacomo.

A professora Magda Cristina Junqueira Godinho Mongeli.

Ao professor José Luiz Magalhães de Freitas.

A professora Maura Cristina Candolo Marques.

Ao professor Augusto César Morgado.

RESUMO

Este trabalho trata do dinheiro como objeto de estudo, visto que este é o principal objeto de estudo da matemática financeira. Neste encontra-se um pouco de história referente à matemática financeira, alguns conceitos econômicos e referências a investimentos, bem como a teoria de progressão aritmética e geométrica essenciais para o estudo de matemática financeira. O conteúdo de matemática financeira é somente o necessário para resolver os problemas propostos. Uma parte deste é repleto de problemas criados a partir de dados reais referentes a: juros do cheque especial, financiamento de casa, financiamento de carro, aposentadoria e investimentos. O professor do ensino médio pode encontrar aqui problemas aplicáveis em sala de aula para alunos do ensino médio criando uma oportunidade de trabalhar com todos os conceitos e ideias apresentadas nesse trabalho. Além de ser um trabalho de caráter científico, ele tem um cunho social principalmente para o professor que se interessar verdadeiramente no seu conteúdo, pois os problemas e soluções aqui apresentados são simplesmente o vivenciado por milhares de brasileiros atualmente.

Palavras-chaves: Matemática financeira, juros do cheque especial, financiamento de casa, financiamento de carro, investimento.

ABSTRACT

This work deals with the money as the object of study, since this is the main object of study of financial mathematics. This is a bit of history related to financial mathematics, some economic concepts and references to investments, as well as the theory of arithmetic progression and geometric essential for the study of financial mathematics. The content of financial mathematics is only necessary to solve the problems posed. Part of this is fraught with problems created from actual data regarding: interest on overdraft, home finance, car finance, retirement and investments. The high school teacher can find problems in the classroom apply to high school students by creating an opportunity to work with all the concepts and ideas presented in this work. Besides being a work of scientific character, he has a social nature primarily for the teacher who is genuinely interested in your content, as problems and solutions presented here are simply experienced by thousands of Brazilians today.

Keywords: Financial mathematics, interest on overdraft, home finance, car finance, investment.

Sumário

INTRODUÇÃO

O foco principal deste trabalho é a elaboração de um material de matemática financeira para o aluno do ensino médio, que está nos últimos anos de sua vida escolar, bem como servir os professores com informações atuais e conceitos de matemática financeira usados no mercado financeiro atual. Também é um dos objetivos deste trabalho servir como um despertamento para educação financeira do aluno do ensino médio, então a linguagem dele será a mais simples e clara possível.

Encontra-se no capítulo 1 alguns conceitos históricos e conceitos atuais que servem como um despertar para educação financeira, pois nele trata-se de ideias como o ciclo da pobreza e o ciclo da riqueza, um pouco da história do dinheiro, economia e classe social.

O segundo e o terceiro capítulos são destinados a conceituações matemáticas referentes progressão aritmética, progressão geométrica e matemática financeira. Para a leitura do mesmo, no entanto somente é necessário o domínio de conceitos matemáticos aprendidos no ensino fundamental, pois o mesmo traz conceitos que são tratados no 1° ano do ensino médio.

O capítulo 3 é destinado a conceitos fundamentais da matemática financeira, são eles: juros simples e compostos, a fórmula das taxas equivalentes, a diferença entre taxas efetivas e taxas nominais, fórmula para descobrir o preço de uma prestação e os sistemas de amortizações SAC (Sistema de Amortização Continuada) e a tabela Price.

O quarto capítulo, traz alguns exemplos/simulações com dados coletados em concessionárias de carro, bancos entre outros, os exemplos foram elaborados com os dados próximos da realidade, além disso, este capítulo traz comparações que cada cidadão com diploma do ensino médio poderia saber em relação à compra de um carro, casa, ao usar o limite do cheque especial ou fazer um empréstimo consignado, e também sobre aposentadoria e alguns tipos de investimentos.

Para tratar dos assuntos do quarto capítulo simulamos a compra de uma casa e faz-se as comparações entre os sistemas de amortizações SAC (Sistema de Amortização Continuada) e Price, utilizando um gráfico, gráfico este que é passo a passo ensinado neste trabalho. É feita uma simulação da compra de um carro utilizando algumas linhas de crédito praticadas no mercado atual, e comparando a um sistema de aquisição de carro por meio de um consórcio e a compra do bem à vista. Foi abordado o cálculo do juro e a cobrança do IOF (Imposto sobre Operações Financeiras) de uma conta corrente que possui cheque especial, mais conhecido como limite da conta corrente. A aposentadoria feita pela previdência social do Brasil foi comparada a uma aposentadoria privada e uma poupança. Por fim será que é possível uma pessoa assalariada conseguir poupar um milhão de reais?

O quinto capítulo traz ao professor do ensino médio e ao aluno a oportunidade de trabalhar com todos os conceitos apresentados, consolidando e fixando o conhecimento. Assim é feito um fechamento deste trabalho, com problemas para serem trabalhados em sala de aula.

CAPÍTULO 1. HISTÓRIAS E ATUALIDADES SOBRE: O DINHEIRO O EMPRÉSTIMO, A RIQUEZA E APOBREZA E CLASSE A1

Qual é outro objeto de estudo na matemática financeira, senão o dinheiro? ´´justamente, um instrumento um meio. Um meio no qual se podem converter os bens dos homens e, mesmo, as relações humanas e, inversamente, um meio que pode ser convertido nesses bens e relações.``[2]

O dinheiro por si só não é uma riqueza, pois não basta ter o dinheiro se você não encontrar quem lhe oferte o que você procura, se é que você procura algo que pode ser trocado por dinheiro. O dinheiro é objeto de desejo de muitos e objeto de estudo de poucos, a matemática financeira é a parte da matemática que trata um pouco sobre este assunto.

O dinheiro é utilizado como facilitador de troca, e mede com muito mais rigor e clareza o valor de cada bem ou serviço. Sendo assim indispensável nos dias de hoje.

É muito interessante saber o que é possível fazer com este meio de troca, e como é possível coloca-lo para trabalhar por você, e a matemática financeira nos ajuda a cumprir esta tarefa.

1.1 TIPOS DE MOEDA DE TROCA

É claro que o dinheiro nem sempre assumiu as formas de hoje: papel moeda, moeda, e nos tempos atuais, dinheiro eletrônico através de cartões e internet. Hoje é possível passar um bom período de tempo sem mesmo tocar em uma nota ou moeda, assim o dinheiro eletrônico (virtual), cada vez mais, ganha espaço em nosso mundo.

Durante os tempos tivemos algumas formas de dinheiro, a saber: boi, sal, pedras, conchas, entre outros. Observe que alguns tipos tinham valor real, como o boi e o sal, mas o que dizer de pedras e conchas?

> [...] em vários grupos sociais históricos, constata-se a utilização de simples pedras de formatos variados, mas sem nenhum valor especifico para o homem; ou então conchas ou penas de animais. A utilização do ouro e da prata como formas de dinheiro marcou o abandono, por um longo período, do uso de objetos de utilidade máxima (como o boi), ou totalmente inúteis (como a pedra)...[2]

Como vimos o ouro e a prata marcou o abandono do uso de objetos de utilidade máxima (como o boi) e de objetos inúteis (como pedras).

Hoje temos o dinheiro representado em folha de papel (inútil) e dinheiro eletrônico, aquele que nem se vê, então o ouro e a prata são substituídos por objetos inúteis novamente.

1.2 O VALOR DO DINHEIRO

O dinheiro só vale porque é conveniente que valha.

> O importante a ressaltar é que o valor do dinheiro, em si, especialmente agora que se abandonou o uso de metais preciosos, é uma ficção. Mais acima, disse que o dinheiro mais comum atualmente, o papel moeda, é um objeto absolutamente sem valor para o homem, não passando de um pedaço de papel impresso. [2]

Caso não fosse convencionado que valha, poderíamos até, voltar ao escambo.

É necessário que o dinheiro seja um objeto para facilitar trocas. Como já foi dito o papel moeda, por si só não tem valor, é necessário que exista algo, para que possa ser trocado a fim daquele papel moeda se transformar em algo util.

1.3 O CRÉDITO OU EMPRÉSTIMO

Alguém que precise de certa quantia em dinheiro pode fazer um empréstimo, assim ela deve achar outro que possua a quantia e confie a ela a quantia desejada. Dando-lhe um crédito.

> Atribui-se a origem etimológica da palavra crédito ao termo latino credo (acredito, confio); o crédito é, portanto, fundamentalmente, uma manifestação de confiança entre duas pessoas: basicamente, é o emprestador que confia na volta do capital cedido ao tomador. Além do fator confiança, muitos autores costumam afirmar que o essencial para a conceituação de crédito é a noção de troca de bens por certo tempo, de tal forma que, se as ideias de ‘’troca’’ e de ‘’tempo’’ não estiverem presentes, não se tem a figura do crédito. No entanto, o necessário é, na verdade, vincular a noção de crédito à noção de troca de bens durante certo tempo, mediante remuneração (juro). [2]

Assim alguém que empresta um dinheiro espera pelo menos a quantia emprestada de volta sem depreciação, ou seja, pelo menos com certo rendimento para suprir o tempo que este ficou sem o capital. O juro é este rendimento, que deve ser cobrado conforme o tempo e o capital emprestado. Hoje o mercado tem suas taxas e valores bem definidos.

1.4 CICLO DA POBREZA E CICLO DA RIQUEZA

Ao falarmos de crédito podemos falar em ciclo da pobreza e ciclo da riqueza.

- **Ciclo da pobreza – os gastos que geram gastos**

O ciclo da pobreza geralmente começa ao se pegar um dinheiro emprestado (crédito), para que este seja gasto com algo que vai trazer outros gastos. Quando alguém toma um empréstimo, por certo período de tempo, ele terá que arcar com a devolução deste dinheiro e mais os juros, ou seja, os rendimentos do dinheiro para o emprestador.

Nos dias de hoje se este tomador, obtêm um empréstimo para a compra de um carro por exemplo, ele não está comprando só o carro, ele terá que arcar com despesas como: gasolina, manutenções (revisões, óleo, pneus), seguro, entre outros.

O mesmo acontece ao se tomar um grande empréstimo para se comprar uma casa, terá que pagar um juro realmente considerável, e é natural que, uma casa gere despesas como água, luz, internet, manutenções.

Assim todo gasto pode ser analisado de maneira mais inteligente, e sempre que possível, verificar se é melhor pagar algo à vista ou com juros.

- **Ciclo da riqueza – os gastos que geram lucro**

Suponha alguém que deseja abrir seu próprio negocio, ou simplesmente quer comprar algo para revender, e este deve pegar um empréstimo. Assim é necessário analisar valores de compra e venda para que o mesmo tenha lucro (lucro é a diferença entre os gastos e os ganhos). Se o lucro ocorrer dizemos que este entrou no ciclo da riqueza. Neste caso o empréstimo foi utilizado para gerar dinheiro. No outro caso além de pagar os juros, teve que arcar com despesas geradas pela compra.

1.5 A CLASSE SOCIAL A1

É difícil encontrar alguém que não queira ser milionário, ou ter uma ótima condição financeira. Em um país com desigualdade financeira como o nosso. Esse desejo deixa de ser uma ambição e passa a ser uma meta para algumas pessoas. Segundo a página de CAPEGEMINI, [11]:

> Por ser um país extremamente desigual, o Brasil tem muitos milionários, no entanto, para ser considerado da classe social mais alta no País, o salário mensal da família precisa estar acima dos R$ 14,5 mil. De acordo com Marcelo Neri, economista-chefe

> de Políticas Sociais da FGV, é esta a "renda mínima" de alguém pertencente à classe A1. Em 2003, a classe dos mais ricos representava apenas 1,7% da sociedade brasileira. Dados mostrados por Neri mostram que, hoje, o número gira em torno de 3%. Em 2014, o número estará em 3,6%. Em dez anos, o crescimento da classe A1 será e 38,85%, enquanto a diminuição da classe E, que consiste em famílias que ganham até R$ 770 por mês, irá diminuir 43%. "Acredito que em 2014 estaremos falando sobre a nova classe A do mesmo jeito que falamos da nova classe C agora", comenta Neri. Para exemplificar, Neri usa a venda de carros importados, que subiu de 47 mil veículos em 2003 para 578 mil em 2011. Ele afirma que, quanto mais pessoas na classe média, maior a tendência de mobilidade. Dados mostram que de 100 pessoas que ascenderam de classe, 8 subiram mais uma depois de um ano. Talvez, pondera Neri, assim a concentração de renda diminua. [11].

A probabilidade de estar inserido na classe A1 é baixa, mas se a estabilidade financeira atual for utilizada, é possível melhorar a qualidade de vida, e quem sabe como o texto acima diz, criar a nova classe A, assim como existe hoje a nova classe C.

CAPÍTULO 2. PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Definiremos progressões aritméticas e geométricas, visto que seus conceitos são fundamentais para o estudo da matemática financeira. Serão apresentados neste capítulo somente os conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Este capítulo traz definições, teoremas e alguns exemplos copiados na integra (ou com pequenas modificações), do livro: A Matemática do Ensino Médio. [3]

2.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

A progressão aritmética, já era conhecida e era inspiração para problemas há muito tempo. O papiro de Rhind (papiro de Rhind é um documento egípcio que data 1950 a.C.) já faz menção a problemas envolvendo progressões aritméticas. É claro que esta linguagem de hoje não era utilizada, mas a ideia de progressão aritmética já era conhecida pelos egípcios para a solução de alguns problemas, como: "Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores". [1]

Um personagem central no estudo de progressão aritmética foi Friedrich Gauss (1777-1855), que segundo a história o seu professor propôs aos alunos a soma de 1 até 100 e rapidamente Gauss com dez anos de idade fez o somatório de maneira bem elegante. [1]

O estudo de progressão aritmética evoluiu muito e suas aplicações alcançam varias áreas, uma delas é a matemática financeira. Abaixo temos a definição de sequência para posterior definição de progressão aritmética.

Definição 2.1: Uma sequência de n elementos é escrita na forma $(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_3},\ \dots, \boldsymbol{a_n})$, para representar uma sequência infinita usaremos $(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_3},\ \dots, \boldsymbol{a_n}, \dots)$, tais que o termo $\boldsymbol{a_i}$ representa um número real, para todo $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{N}$.

Exemplo 2.1: A copa do mundo é realizada de 4 em 4 anos, sabendo que em 1994 teve copa do mundo, cuja qual o Brasil foi campeão, determine os anos que tiveram e vão ter copa até 2020.

Solução: A reposta é simples, 1994, 1998, 2002, 2006, 2010, 2014, 2018, são os anos procurados, escrevendo como na definição temos:

$(1994, 1998, 2002, 2006, 2010, 2014, 2018)$. ■

Definição 2.2: Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r.

Observe no exemplo 2.2.1 que a diferença entre qualquer termo e o anterior dá sempre 4. Também que $1998 = 1994 + 1 \times 4$, e que, $2002 = 1994 + 2 \times 4$, e assim por diante. Cada número da sequência é chamado de termo, logo o número de termos é 7 e a razão $r = 4$.

Representamos uma sequência por $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots, a_n, \dots)$, e se esta sequência for uma progressão aritmética temos que $a_n = a_1 + (n-1)r$. É claro que $n \in N$ e $r \in R$.

Teorema 2.1: $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots, a_n \dots)$, é uma progressão aritmética de razão r, se e somente se, $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Prova: $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots, a_n \dots)$, é uma progressão aritmética de razão r,

$$\Leftrightarrow$$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = r$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_{1=}a_1 + 0r$$

$$a_{2=}a_1 + 1r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

$$\dots$$

$$a_{n-1} = a_1 + (n-2)r$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \ \blacksquare$$

Note que para descobrir o 5º termo de uma progressão aritmética, dado que é conhecido o 3º termo, basta fazer $a_5 = a_3 + 2r$. Da mesma forma, para descobrir o 7º termo dado que é conhecido o 4º termo, basta fazer $a_7 = a_4 + 3r$. Vamos a um exemplo.

Exemplo 2.2: Em uma progressão aritmética o 10º termo vale 1024, e o 18º vale 1068, quanto vale o 15º termo?

Solução: Temos que descobrir a razão. Sabemos que $a_{10} = 1024$ e $a_{18} = 1072$, então

$$a_{18} = a_{10} + 8r$$

$$1072 = 1024 + 8r$$

$$\frac{1072 - 1024}{8} = r$$

$$\frac{48}{8} = r$$

$$r = 6$$

Logo $a_{15} = a_{10} + 5r = 1024 + 5 \times 6 = 1024 + 30 = 1054$, ou seja, o 15º vale 1054. ■

Exemplo 2.3: O preço de um bem novo é R$15.000,00, a cada ano de uso o seu valor diminui R$1.000,00, qual será o seu valor logo após 4 anos e uso?

Solução: É fácil ver que será R$11.000,00. Mas em notação dada por uma progressão aritmética, podemos dizer que $a_1 = 15.000$ e depois de quatro anos de uso chegaremos em $a_5 = 11.000$, podemos ver por este exemplo que ora é melhor começar a sequência por a_1, ora por a_0. Começando por $a_0 = 15.000$, temos que, logo após 1 ano de uso o preço do bem será $a_1 = 14.000$, e assim sucessivamente até, $a_4 = 11.000$. Outro modo é que $r = a_1 - a_0 = -1.000$, assim:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = (a_0 + r) + (nr - r) = a_0 + nr$$

portanto,

$$a_n = a_0 + nr.$$

Daí

$$a_4 = a_0 + 4(-1.000)$$

$$a_4 = 15.000 - 4.000$$

$$a_4 = 11.000$$

Logo o valor do bem logo após 4 anos será de R$11.000,00. ■

2.1.1 FÓRMULA DA SOMA DOS n PRIMEIROS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Teorema 2.2: A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Prova: Temos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma de trás para frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$.

Daí,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Observe que, ao passar e um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \blacksquare$$

Exemplo 2.4: Qual é a soma dos primeiros 15 números ímpares?

Solução: Escrevendo (1, 3, 5, ...), uma sequência de números ímpares cujo $a_1 = 1$ e $r = 2$, podemos determinar a_{15}, veja:

$$a_{15} = 1 + 14 \times 2$$

$$a_{15} = 29$$

Assim podemos determinar S_{15}, veja:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_{15} = \frac{(1 + 29)15}{2}$$

$$S_{15} = 225. \blacksquare$$

2.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

A tábua de Louvre (300 a.c.) da Babilônia apresenta problemas e soluções envolvendo progressões geométricas. Um destes problemas é o resultado da soma $1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9$. A progressão geométrica é essencial no estudo de matemática financeira, visto que faz parte de quase toda sua teoria.

Definição 2.3: Uma progressão geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de razão e é representado pela letra q.

Exemplo 2.5: A população de um país é hoje igual a P_0 e cresce 2% ao ano. Qual será a população deste país daqui n anos?

Solução: Podemos representar o crescimento da população por uma sequência (P_0, $1.02P_0 \cdot$, $1.02^2P_0 \cdot, \dots,$ 1.02^nP_0), ou seja, a população atual é P_0, no ano seguinte teremos P_0 mais 0,02 vezes P_0, totalizando $1{,}02P_0$, e assim sucessivamente, até o $n - ésimo$ mês. ■

Observe que a razão entre qualquer termo e o termo anterior é $q = 1{,}02$, logo a sequência acima é uma progressão geométrica.

Em uma progressão geométrica cada termo é igual ao termo anterior multiplicado pela razão q. Mas podemos pensar que a razão $q = 1 + i$, onde i é a taxa de crescimento dos termos. Assim no exemplo acima temos que 1,02 é a razão, e 0,02 é a taxa de crescimento.

Exemplo 2.6: As sequências $(2,6,18,54,\dots)$ e $(128,32,8,2,\dots)$, são progressões geométricas cujas razões valem respectivamente $q_1 = 3$ e $q_2 = \frac{1}{4}$. Suas taxas de crescimento são respectivamente $i_1 = 2$ e $i_2 = -\frac{3}{4} = -75\%$, pois $q = 1 + i$. ■

Teorema 2.3:$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, é uma progressão geométrica de razão q, se e somente se, $a_n = a_1q^{n-1}$.

Prova:$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, é uma progressão geométrica de razão q,

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_{1=}a_1$$

$$a_{2=}a_1q$$

$$a_3 = a_1\mathrm{q}^2$$

$$\dots$$

$$a_{n-1} = a_1q^{n-2}$$

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$ ■

Observe que para passar de um termo a outro de uma progressão geométrica, basta multiplicar um termo pela razão q, para avançar dois termos, então basta multiplicar pela razão q, duas vezes, e assim por diante.

Exemplo 2.7: Em uma progressão geométrica o 5º termo vale 5 e o 8º vale 135. Quanto vale o 7º termo desta progressão?

Solução: O nosso problema se resume em encontrar a razão. Para passar de a_5 para a_6, basta multiplicar a_5 pela razão q, assim $a_6 = a_5 q$, para descobrir a_7, basta multiplicar esta última equação pela razão q, assim $a_7 = a_5 q^2$, com raciocínio semelhante, temos que $a_8 = a_5 q^3$. Daí

$$a_8 = a_5 q^3$$
$$135 = 5q^3$$
$$\frac{135}{5} = q^3$$
$$27 = q^3$$
$$q = 3$$

Logo

$$a_8 = a_7 q$$
$$a_7 = \frac{a_8}{q}$$
$$a_7 = \frac{135}{3}$$
$$a_7 = 45. \blacksquare$$

2.2.1 FÓRMULA DA SOMA DOS n PRIMEIROS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Vamos apresentar a fórmula da soma dos primeiros termos de uma progressão geométrica.

Teorema 2.4: A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ é

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Prova: Seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$.

Multiplicando por q, obtemos:

$$\mathrm{q}S_{\boldsymbol{n}} = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1}.$$

Subtraindo, $S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$, isto é, $S_n(1 - q) = a_1 - a_1 q^n$ e finalmente,

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}. \blacksquare$$

Exemplo 2.8: Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Como o tabuleiro tem 64 casas, o número de grãos pedido pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica (1, 2, 4, 8,...). O valor desta soma é?

Solução: $S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$, ou seja, 18.446.744.073.709.551.615 grãos de trigo.

Se 1 grama de trigo equivale a 1.000 grãos, então 1 kg de trigo equivale a 1.000.000 de grãos. Pela proporção abaixo:

$$\frac{1\,kg}{x} = \frac{1.000.000 grãos}{18.446.744.073.709.551.615 grãos}$$

Aproximadamente 18.446.744.073.709kg, ou melhor, aproximadamente 18.446.744.073 toneladas. ■

Teorema 2.5: Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$.

Solução: Como nesse caso $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ temos

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \times \frac{1-0}{1-q}$$

isto é,

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q},$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q},$$

que é um limite finito e já é uma fórmula para somar infinitos termos. ■

Exemplo 2.9: Determine o limite da soma $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \cdots$ quando o n tende ao infinito.

Solução: Intuitivamente daria $0{,}333 \ldots = \frac{1}{3}$. Mas abordando o problema no ponto de vista que (0,3; 0,03; 0,003;...) é uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{10} < 1$, temos que:

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$S_n = 0,3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}},$$

e se n tende ao infinito o teorema acima garante que o resultado é um número finito, assim:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 0,3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = 0,3 \times \frac{1 - 0}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 0,3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0,3}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Para simplificar este exemplo acima poderíamos simplesmente utilizar a fórmula

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} \Leftrightarrow S_\infty = \frac{0,3}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0,3}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \blacksquare$$

CAPÍTULO 3. MATEMÁTICA FINANCEIRA

Uma quantia em dinheiro hoje, provavelmente não terá o mesmo valor após certo período de tempo, a matemática financeira estuda a variação do dinheiro deslocado no tempo, tanto um valor no futuro, quanto um valor atual ou valor no passado, sempre dependendo de taxas e inflações.

Trabalhando bem com esta área é possível emprestar, investir, comprar e vender com muita segurança e assumindo somente os riscos necessários. Os dominadores da matemática financeira na prática (fora do lápis e papel) são os bancos, seguidos pelos investidores. É preciso cultivar mais e mais a educação financeira nas escolas.

Neste capítulo, estudaremos os conceitos matemáticos fundamentais e por abranger exemplos práticos contribuem para uma boa iniciação no mundo do investimento e economia.

3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS NO ESTUDO DE JURO

Vamos supor um capital C também chamado de valor principal, aplicado por certo período de tempo, e após este período, este capital C rende certo valor J, este J tem o nome de juro. A soma $C + J$ é chamada de montante, sendo que montante será representado por M. A razão $i = \frac{J}{C}$ é a taxa de crescimento do capital no período, logo o juro será $J = iC$.

Existem dois tipos de juros: os simples e os compostos, o simples é dado pela fórmula $J = Cit$, sendo t o número de períodos (tempo). Os juros compostos veremos no exemplo 3.1.2 e no teorema 3.1.1.

Exemplo 3.1: Dado um capital de R$100,00, qual será o juros cobrado em um empréstimo, sabendo que a taxa é de 3% ao mês, e que o empréstimo seja devolvido em um mês.

Solução: $J = Cit$ assim, $J = 100 \times \frac{3}{100} \times 1 = 103$, ou seja, R$ 103,00. ■

Exemplo 3.2: Vamos supor um empréstimo de R$1000,00 a uma taxa de 10% ao mês, que será pago em 2 meses. Assim $1000 \times (1 + 0{,}10) = 1100$, ou seja, R$1100,00 seria o valor a ser pago em 1 mês, mas aplicando novamente a taxa de 10% sobre os R$1100,00, conseguimos $1000 \times (1 + 0{,}10) \times (1 + 0{,}10) = 1000 \times (1 + 0{,}10) = 1210$, ou seja, R$1210,00, esses juros assim calculados são chamados de juros compostos. ■

A rigor, dado um capital C, aplicado a uma taxa de $i\%$ a certo período, teremos então um montante $M_1 = C + Ci = C(1+i)$, se aplicarmos novamente $i\%$ sobre M_1, depois do mesmo período anterior, teremos então um montante $M_2 = M_1 + M_1 i = M_1(1+i) = C(1+i) \times (1+i) = C(1+i)^2$, o juro assim calculado é chamado de juro composto.

É esperado que alguém acredite que 10% de taxa ao mês irá gerar 20% de taxa em dois meses, mas pelo exemplo acima vemos que gerou 21%.

Com base no exemplo acima podemos formular o seguinte teorema.

Teorema 3.1: No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $M_n = C_0(1+i)^n$.

Prova: Se C é o capital e i é a taxa então o montante gerado imediatamente após um período é $M_1 = C + Ci = C(1+i)$, imediatamente após o segundo período temos $M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$, assim sucessivamente podemos concluir que imediatamente após o n períodos teremos $M_n = C(1+i)^n \cdot$. ■

Exemplo 3.3: Considerando novamente um capital de R$1.000,00 emprestado a uma taxa de 10% a.m. que será pago em 60 dias, basta fazer: $M = 1000(1+0{,}10)^2 = 1210$, ou seja, R$ 1210,00. ■

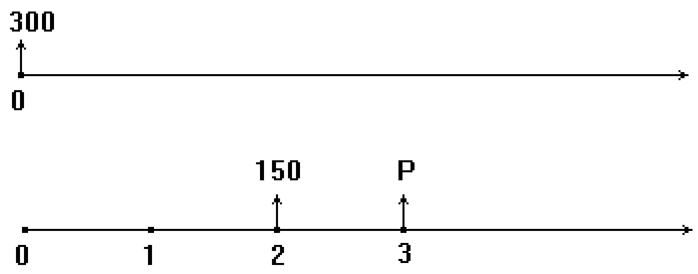
Pelo teorema acima podemos concluir que um capital $C_0 \cdot$, passará a ser $C_0(1+i)^n$, depois de n períodos aplicado a uma taxa de $i\%$ por período. Em outras palavras um valor atual A passa a ser um valor futuro $F = A(1+i)^n$, aplicado a uma taxa de $i\%$ a um certo período, depois de n períodos.

Assim para obter o valor futuro depois de n períodos, basta multiplicar o valor atual por $(1+i)^n$. Para obter o valor atual, basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$.

Segundo Augusto César Morgado [3] o exemplo a seguir é, pode-se dizer, um resumo de todos os problemas de Matemática Financeira.

Exemplo 3.4: Pedro tomou um empréstimo de R$300,00, a juros de 15% ao mês. Dois meses após, Pedro pagou R$150,00 e, um mês após esse pagamento, Pedro liquidou seu débito. Qual o valor deste último pagamento.

Solução: Os esquemas de pagamento abaixo são equivalentes. Logo, R$300,00 na época zero, têm o mesmo valor de R$150,00 dividido por $(1+i)^2$, mais um pagamento igual a P dividido por $(1+i)^3$·. Veja:

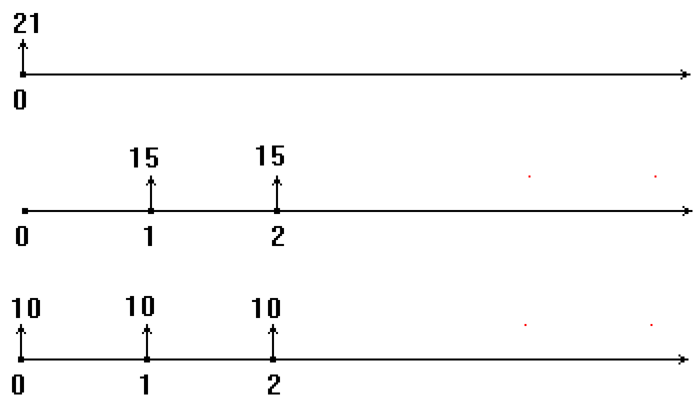


Igualando os valores, na mesma época (zero, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos:

$$300 = \frac{150}{(1+0{,}15)^2} + \frac{P}{(1+0{,}15)^3},$$

resolvendo esta equação, $P = 283{,}76$, logo o último pagamento deve ser de R$283,76. ■

Exemplo 3.5: Um cliente tem três opções de pagamento na compra de um produto.
i) à vista, com 30% de desconto;
ii) em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra;
iii) em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.
Qual a melhor opção para este cliente, sabendo que o dinheiro rende para ele 25% ao mês, ou seja, ele consegue aumentar seu capital em 25% ao mês.
Solução: Fixando o preço do bem em R$30,00, temos os três esquemas abaixo.



Comparando os valores, por exemplo, na época zero, obtemos:

i) O valor atual na época zero é R$21,00;

ii) O valor atual na época zero é $\frac{15}{1+0,25} + \frac{15}{(1+0,25)^2}$ = 21,6, ou seja, R$21,60;

iii) O valor atual na época zero é $10 + \frac{10}{1+0,25} + \frac{10}{(1+0,25)^2} = 24{,}4$, ou seja, R$24,40.

Logo a melhor alternativa é a primeira e a pior é a terceira em três prestações. ■

3.1.1 FÓRMULA DAS TAXAS EQUIVALENTES

No mercado financeiro é necessário o conhecimento de equivalência de taxas, por exemplo, uma taxa efetiva de 12% a.a., não equivale a 1% a.m., a menos que 12% a.a. seja uma taxa nominal.

Teorema 3.2: Se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = nt$, então $1 + I = (1 + i)^n$.

Prova. Seja C_0 o valor inicial da grandeza. Após um período de tempo T, o valor da grandeza será $C_0(1 + I)^1$. Como um período de tempo T equivale a n períodos de tempo iguais a t, o valor da grandeza será também igual a $C_0(1 + i)^n$. Logo, $C_0(1 + I)^1 = C_0(1 + i)^n$ e $1 + I = (1 + i)^n$. ■

Exemplo 3.6: Se certo capital for investido a uma taxa de 1% a.m. então o rendimento anual é de 12%?

Solução: Na prática um investimento rende conforme o juro composto.

Não é necessário fazer sempre a observação que $T = 1$ ano, $n = 12$ e $t = 1$mês. Assim:

$$1 + I = (1 + i)^n$$
$$1 + I = (1 + 0{,}01)^{12}$$
$$I = 1{,}12682503 - 1$$
$$I = 0{,}12682503$$

Ou seja, 12,682503% é a taxa anual.

3.1.2 TAXAS EFETIVAS E TAXAS NOMINAIS

Ao fazer os cálculos, devemos trabalhar com taxas efetivas, por isso devemos estar atentos se as taxas são efetivas ou nominais.

Uma taxa de $i\%$ a.a. com *capitalização mensal* (nominal), significa uma taxa efetiva de $\frac{i}{12}\%$ a.m., assim uma taxa de 144% a.a. capitalizada mensalmente (nominal), significa uma taxa efetiva de 12% a.m. Utilizando a fórmula de equivalência de taxas, concluímos que 12% ao mês é equivalente a 289,5% a.a.

Exemplo 3.7: Suponha um capital C, investido a uma taxa de 24% ao ano com capitalização semestral.

a) Qual é a taxa efetiva semestral?

b) Qual é a taxa efetiva anual?

Solução:

Item a: Se 24% a.a. é capitalizado semestralmente, então, a taxa efetiva semestral é de 12%.

Item b: Se $i = 12\%$ ao semestre, então 25,44% é a taxa efetiva anual equivalente, pois:

$$1 + I = (1 + i)^n$$

$$1 + I = (1 + 0{,}12)^2$$

$$I = 1{,}2544 - 1$$

$$I = 0{,}2544. \blacksquare$$

Neste trabalho quando não for feito referência à taxa efetiva ou nominal, será considerada taxa efetiva.

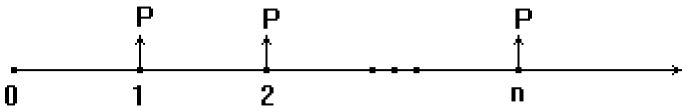
3.1.3 PRESTAÇÃO FIXA

Quanto será que fica uma parcela de um bem de R$40.000,00 a uma taxa de 1,4% a.m.? É o que veremos com a fórmula abaixo, ela pode nos fornecer o valor da parcela em função do valor do bem, da taxa, e da quantidade de parcelas. Se as parcelas estiverem em iguais espaços de tempo a série de pagamentos é dita uniforme. Um conjunto de parcelas ou pagamentos ou termos pode ser chamado de série ou anuidade, observando que anuidade nada tem haver com ano.

Teorema 3.3: O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a:

$$A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Prova. Considere o esquema abaixo:



O valor da soma dos pagamentos calculados no tempo (ou época) zero é:

$$A = \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

que é a soma de n termos de uma progressão geométrica. Temos:

$$A = \frac{P}{1+i} \times \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}} = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Bastando agora isolar a variável P para obter o valor da prestação, veja:

$$P = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}} \blacksquare$$

Exemplo 3.8: Suponha a venda de um bem no valor de R$100.000,00 a uma taxa nominal de 12% a.a., ou seja, é uma taxa efetiva de 1% a.m., paga em 300 prestações mensais, com a 1ª parcela a ser paga um mês após a compra. Qual o valor da prestação?

Solução: Basta utilizar a fórmula $\mathrm{P} = \frac{\mathrm{Ai}}{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}\cdot\cdot$, com $A = 100.000,\ i = 0{,}01\ e\ n = 300$, logo $P = \frac{1000.000 \times 0{,}01}{1-(1+0{,}01)^{-300}} = 1053{,}22$, ou seja, R$1.053,22. ■

Observe que esta fórmula do teorema acima pode ser utilizada para saber o valor de um bem na época zero, em outras palavras, o valor do bem avista, veja o exemplo:

Exemplo 3.9: Vamos supor a compra de um bem cujas parcelas mensais ficaram em R$800,00, sabendo que a taxa da compra foi 1,85% a.m., durante 30 meses, com a 1ª parcela a ser paga um mês após a compra. Qual o valor do bem à vista?

Solução: Se $P = 800,\ i = 0{,}0185,\ n = 30,$ então:

$$\mathrm{A} = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A = 800 \times \frac{1-(1+0{,}0185)^{-30}}{0{,}0185}$$

$$A = 18.292{,}28$$

Logo o valor do bem à vista era de R$ 18.292,28. ■

Analisando a fórmula A $= P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ percebemos que se $n \to \infty$ então $A = \frac{P}{i} \leftrightarrow P = Ai$, que é justamente a chamada renda perpétua, esta última equação pode ser utilizada para calcular o valor de um aluguel de casa.

Exemplo 3.10: Se a inflação está em torno de 0,5% a.m., então o dinheiro vale no mínimo 0,5% a.m. Se o valor estipulado para venda de uma casa é R$100.000,00, por quanto se deve alugar este imóvel, se o proprietário não quer perder dinheiro em relação à inflação?
Solução: Como o dinheiro vale 0,5% a.m. então o proprietário deve cobrar ao menos 0,5% a.m. Fazendo as contas fica: $P = Ai \leftrightarrow P = 100.000 \times 0{,}5\% = 500$, ou seja, R$500,00 no mínimo (fora gastos com IPTU, manutenções, etc...). ■

Outro exemplo que não podemos deixar de analisar é o da compra com entrada, observe que até agora só analisamos compra sem entrada.

O vendedor pode calcular o valor da parcela utilizando o método da prestação fixa e pedir que a primeira seja paga no ato da compra, feito isto, o comprador estará pagando mais juros do que a taxa informada, quando o correto seria abater o valor da entrada no bem e calcular as prestações somente com o saldo devedor. Veja:

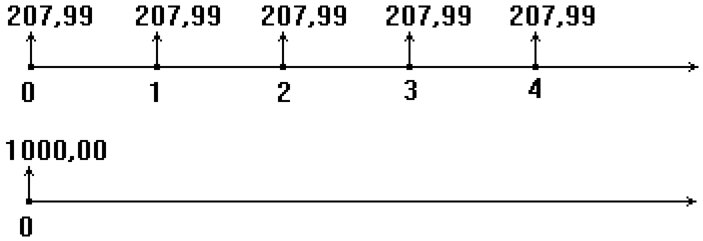
Exemplo 3.11: Um bem de R$1000,00, e vendido em 5 prestações a uma taxa de 2% a.m., com a primeira prestação antecipada (a entrada é a primeira prestação), determine o valor das prestações.
Solução: A fórmula acima dá o valor de uma prestação para uma compra sem entrada, assim devemos imaginar que a compra está sendo feita um mês antes, logo o valor atual $A = 1000$ deve ser deslocado um mês ao passado, como a taxa é de 2% ao mês basta fazer $A' = \frac{1000}{(1+0{,}02)^1} = 980{,}39$, (observe que não é dar 2% de desconto). Logo

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{A'i}}{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}$$

$$\mathrm{P} = \frac{980{,}39 \times 0{,}02}{1-(1+0{,}02)^{-5}}$$

$$P = 207{,}99$$

Logo o cliente deve dar uma entrada de R$207,99 mais 4 parcelas no mesmo valor.■ Este método utilizado acima é correto, o errado seria utilizar a fórmula com $A = 1000$, pois esta fórmula nos dá o valor de uma prestação sem o pagamento da entrada. Veja o esquema abaixo:



Podemos igualar os valores na época zero e descobrir a verdadeira taxa cobrada, veja:

$$1000 = 207{,}99 + \frac{207{,}99}{1+i} + \frac{207{,}99}{(1+i)^2} + \frac{207{,}99}{(1+i)^3} + \frac{207{,}99}{(1+i)^4}$$

Por inspeção temos que $i = 2\%$ ■

Assim o comprador e o vendedor devem estar atentos na seguinte questão. O vendedor pode vender o produto em 5 prestações sendo a primeira no ato da compra, fazendo o cálculo errado.

$$P = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$P = \frac{1000 \times 0{,}02}{1-(1+0{,}02)^{-5}}$$

$$p = 212{,}16$$

Este cálculo acima está errado, pois R$ 212,16 seria o valor das 5 prestações sendo a primeira prestação a ser paga um mês após a compra. Se de fato ocorresse à situação descrita acima o juros seria na realidade de 3,042% pois:

$$1000 = 212{,}16 + \frac{212{,}16}{(1+i)} + \frac{212{,}16}{(1+i)^2} + \frac{212{,}16}{(1+i)^3} + \frac{212{,}16}{(1+i)^4}$$

Por inspeção temos que: $i = 3{,}042\%$.

3.1.4 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONTINUADA (SAC) E TABELA PRICE

Quando se paga uma prestação, uma parte do dinheiro é sempre destinada a abater o saldo devedor, e a outra parte é destinada ao pagamento do juro, é o que veremos com o Sistema de Amortização Constante (SAC), e o Sistema Francês de Amortização criado pelo economista Richard Price (Tabela Price). Algumas diferenças entre os dois sistemas é:

I) no SAC o valor da amortização é constante, e na Tabela Price a amortização é crescente;

II) no SAC o valor da prestação é decrescente, e na Tabela Price o valor da prestação é constante.

III) na tabela SAC, a sequência de saldo devedor, a sequência de valores das parcelas, e a sequência dos juros formam progressões aritméticas.

Vamos construir cada tabela com os exemplos abaixo.

Exemplo 3.12: Uma dívida de R$100,00 é paga, com juros de 10% ao mês, e em 5 meses. Faça a planilha de amortização pelo sistema SAC e Tabela Price.

Solução: SAC

Como as amortizações são iguais, cada amortização será $\frac{100}{5} = 20$, ou seja, R$20,00. Seja k o número da parcela, J_k, A_k, P_k e D_k, são respectivamente o juro, a amortização, a prestação e o saldo devedor da k-ésima parcela, assim:

SAC				
K	J_k	A_k	P_k	D_k
0	...	...	...	R$100,00
1		R$ 20,00		R$80,00
2		R$ 20,00		R$60,00
3		R$ 20,00		R$40,00
4		R$ 20,00		R$20,00
5		R$ 20,00		R$0,00

Como os juros são de 10% ao mês, temos que fazer 10% do saldo devedor anterior, assim:

SAC				
K	J_k	A_k	P_k	D_k
0	...	...	...	R$100,00
1	R$10,00	R$ 20,00		R$80,00
2		R$ 20,00		R$60,00
3		R$ 20,00		R$40,00
4		R$ 20,00		R$20,00
5		R$ 20,00		R$0,00

Logo a primeira parcela, é a soma do juro do primeiro mês, com o valor da amortização, que dá R$30,00, assim:

SAC				
K	J_k	A_k	P_k	D_k
0	...	...	...	R$100,00
1	R$10,00	R$ 20,00	R$30,00	R$80,00
2		R$ 20,00		R$60,00
3		R$ 20,00		R$40,00
4		R$ 20,00		R$20,00
5		R$ 20,00		R$0,00

Com raciocínio análogo em cada linha, obtemos:

SAC				
K	J_k	A_k	P_k	D_k
0	...	...	...	R$100,00
1	R$10,00	R$ 20,00	R$30,00	R$80,00
2	R$8,00	R$ 20,00	R$28,00	R$60,00
3	R$6,00	R$ 20,00	R$26,00	R$40,00
4	R$4,00	R$ 20,00	R$24,00	R$20,00
5	R$2,00	R$ 20,00	R$22,00	R$0,00

Tabela Price

Utilizando a fórmula da prestação fixa $P = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$, obtemos o valor da prestação, o sistema Price.

$$P = \frac{100 \times 0{,}10}{1 - (1 + 0{,}10)^{-5}}$$

$$P = 26{,}37,$$

ou seja, R$26,37.

Como o sistema Tabela Price tem prestação fixa, obtemos:

Price				
K	Jk	Ak	Pk	Dk
0	...	...	...	R$ 100,00
1			R$ 26,37	
2			R$ 26,37	
3			R$ 26,37	
4			R$ 26,37	
5			R$ 26,37	

Agora podemos calcular os juros de 10% sobre D_k, e descobrir qual será o valor da amortização, fazendo a diferença entre o valor da parcela e os juros, e em seguida descobrir o novo saldo devedor, fazendo a diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização, assim:

Price				
K	J_k	A_k	P_k	D_k
0	...	...	...	R$ 100,00
1	R$ 10,00	R$ 16,37	R$ 26,37	R$ 83,63
2			R$ 26,37	
3			R$ 26,37	
4			R$ 26,37	
5			R$ 26,37	

Com raciocínio análogo, podemos completar as outras linhas, e fica:

Price				
K	J_k	A_k	P_k	D_k
0	...	...	...	R$ 100,00
1	R$ 10,00	R$ 16,37	R$ 26,38	R$ 83,63
2	R$ 8,36	R$ 18,02	R$ 26,38	R$ 65,61
3	R$6,56	R$ 19,82	R$ 26,38	R$ 45,79
4	R$ 4,58	R$ 21,80	R$ 26,38	R$ 23,99
5	R$ 2,40	R$ 23,98	R$ 26,38	R$ 0,01

Observe que neste sistema, nem sempre o saldo devedor atinge o valor R$0,00, ora da zero, ora mais, ora menos, depende sempre de quantas casas decimais foram utilizadas.

Teorema 3.4: No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:

$$A_k = \frac{D_0}{n}, \quad D_k = \frac{n-k}{n} \times D_0 \cdot, \quad J_k = iD_{k-1} \cdot, \quad P_k = A_k + J_k.$$

Prova: Se a dívida D_0 é amortizada em n quotas iguais, cada cota será igual a

$$A_k = \frac{D_0}{n}.$$

O estado da dívida (saldo devedor), após k amortizações, é

$$D_k = D_0 - k \times \frac{D_0}{n} = \frac{n-k}{n} \times D_0.$$

As duas últimas fórmulas são obvias. ■

Teorema 3.5: No sistema Price de amortização, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:

$$P_k = \frac{iD_0}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$D_k = D_0 \times \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$J_k = iD_{k-1}$$

$$A_k = P_k - J_k$$

Prova: A primeira fórmula é simplesmente a fórmula do teorema da prestação fixa, e as duas últimas fórmulas são óbvias. Quanto à segunda fórmula, observe que D_k é a dívida que pode ser liquidada antecipadamente, referente a $n-k$ parcelas restantes. Sabemos por um teorema anterior que $A = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, basta substituir $A = D_k$ e $P = P_k$, para concluir a segunda fórmula. Veja:

$$A = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$D_k = P_k \times \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

$$D_k = \frac{iD_0}{1-(1+i)^{-n}} \times \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

$$D_k = D_0 \times \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}. \blacksquare$$

CAPÍTULO 4. MATEMÁTICA FINANCEIRA COTIDIANA –PROBLEMAS REAIS COM DADOS ATUAIS

Trata-se neste capítulo de temas como: sistemas de amortizações, SAC (Sistema de Amortização Continuada) ou Price, juros do cheque especial, cálculo de aposentadoria, financiamento de carro, consórcio e por fim, será que um assalariado consegue juntar um milhão de reais?

Os dados aqui apresentados foram retirados de concessionárias, sítios de bancos e simulações bancárias. Podem ser encaradas como mera suposições.

4.1 FINANCIAMENTO DE CASA

Assim como outras linhas de financiamento o comprometimento máximo da renda deve ser por volta de 30%. Se o contratante tiver outro financiamento será levado em conta.

Em geral os bancos permitem o financiamento de até 80% do valor do imóvel, mas é possível encontrar bancos que financiam 90% e até 100% do valor. No programa de financiamento de casa, minha casa minha vida da Caixa Econômica Federal é possível financiar em alguns casos até 100% do valor do imóvel.

Além de não comprometer 30% da sua renda, outras condições para financiamento do imóvel são: ter no mínimo 18 anos, os bancos também impõe um limite de idade para o final do contrato que é por volta de 80 anos, assim se você tiver 70 anos e quiser fazer um financiamento de 20 anos, provavelmente será negado, os bancos não facilitam financiamentos de casas ´´velhas`` ou em local de difícil acesso, pois no caso de inadimplência do comprador a dificuldade do banco revender ou leiloar a casa será maior.

4.1.1 TIPOS DE LINHA DE CRÉDITO

Para imóveis até R$ 500 mil algumas opções atuais de financiamentos são através:

- Sistema Financeiro de Habitação (SFH) usa recursos da poupança e do fundo de garantia por tempo de serviço (FGTS), neste caso os bancos estão obrigados a trabalhar com juros máximos de 12% ao ano mais taxa referencial (TR).
- No Sistema Financeiro Imobiliário (SFI), os bancos têm plena liberdade para estipular prazos, juros, pois usam recursos próprios.

4.1.2 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÕES

Atualmente o SAC está sendo mais utilizado em relação ao sistema Price. Mas em ambos os casos durante o financiamento, o imóvel fica alienado ao banco, o imóvel só será realmente seu quando a última parcela for quitada.

Em financiamentos de casa o comprador arca com despesas extras antes do início do financiamento como a avaliação do imóvel pelo banco, gastos no cartório, taxas do mediador das partes interessadas e prefeitura. É acrescentado no valor das parcelas, despesas do banco e seguros obrigatórios.

Para uma primeira comparação entre o SAC e o Price: Supondo um financiamento simbólico de R$20.000,00, a uma taxa efetiva de 1%a.m., com financiamento em 6 parcelas. Pelo sistema de amortização SAC e pelo sistema de amortização Price, temos as seguintes tabelas:

Tabela – sistema de amortização Price

Construindo a tabela Price com os dados acima, obtemos:

Price				
Parcelas	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor
0	...	...	...	R$ 20.000,00
1	R$ 200,00	R$ 3.250,97	R$ 3.450,97	R$ 16.749,03
2	R$ 167,49	R$ 3.283,48	R$ 3.450,97	R$ 13.465,56
3	R$ 134,66	R$ 3.316,31	R$ 3.450,97	R$ 10.149,24
4	R$ 101,49	R$ 3.349,47	R$ 3.450,97	R$ 6.799,77
5	R$ 68,00	R$ 3.382,97	R$ 3.450,97	R$ 3.416,80
6	R$ 34,17	R$ 3.416,80	R$ 3.450,97	R$ 0,00

Tabela – SAC

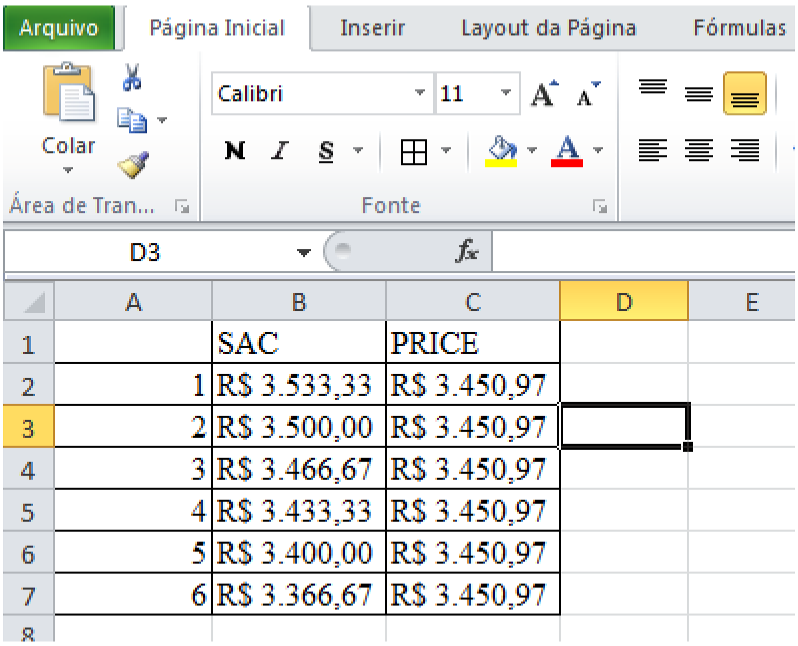
Construindo a tabela SAC com os dados acima, obtemos:

SAC				
Parcelas	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor
0	...	...	...	R$ 20.000,00
1	R$ 200,00	R$ 3.333,33	R$ 3.533,33	R$ 16.666,67
2	R$ 166,67	R$ 3.333,33	R$ 3.500,00	R$ 13.333,33
3	R$ 133,33	R$ 3.333,33	R$ 3.466,67	R$ 10.000,00
4	R$ 100,00	R$ 3.333,33	R$ 3.433,33	R$ 6.666,67
5	R$ 66,67	R$ 3.333,33	R$ 3.400,00	R$ 3.333,33
6	R$ 33,33	R$ 3.333,33	R$ 3.366,67	R$ 0,00

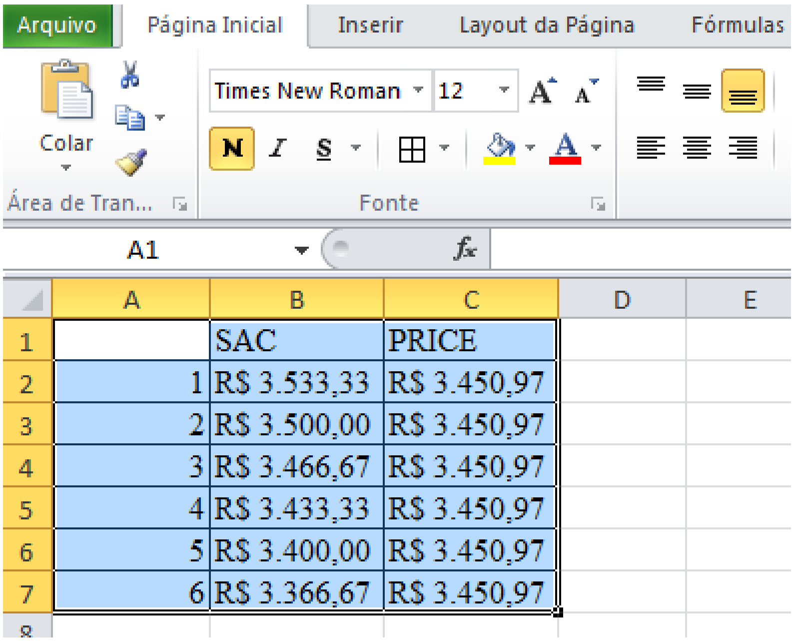
Feito isto é interessante construir um gráfico comparando a evolução do financiamento em relação às parcelas e em relação ao saldo devedor. Faremos isto com o Microsoft Excel da seguinte forma:

- **GRÁFICO REFERENTE À EVOLUÇÃO DAS PARCELAS**

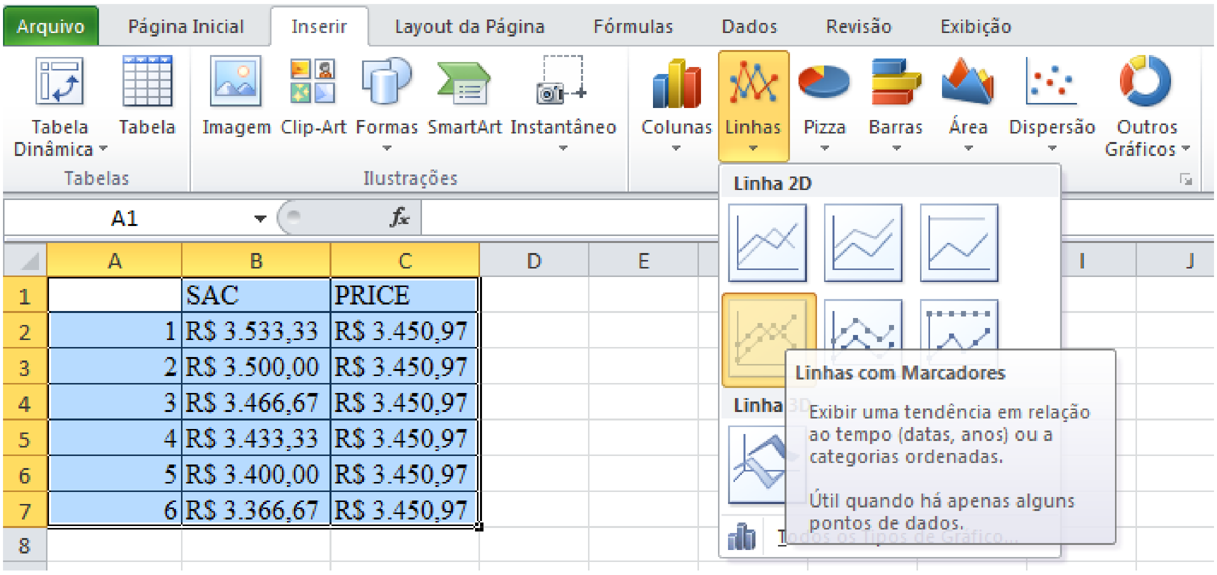
1º passo: Faça uma tabela como no modelo abaixo.



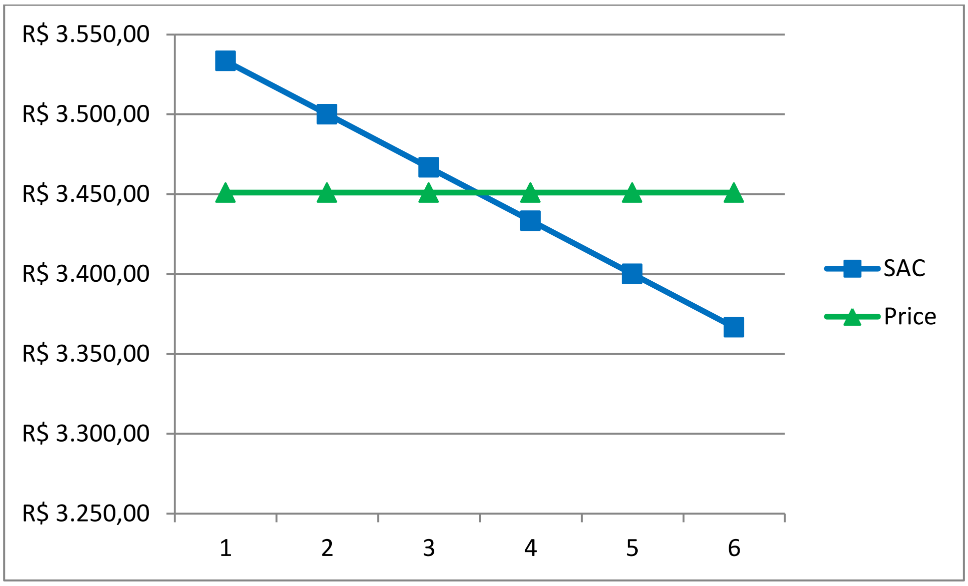
2º Passo: Selecione a tabela.



3º Passo: Clique em: inserir > linhas > linhas com marcadores



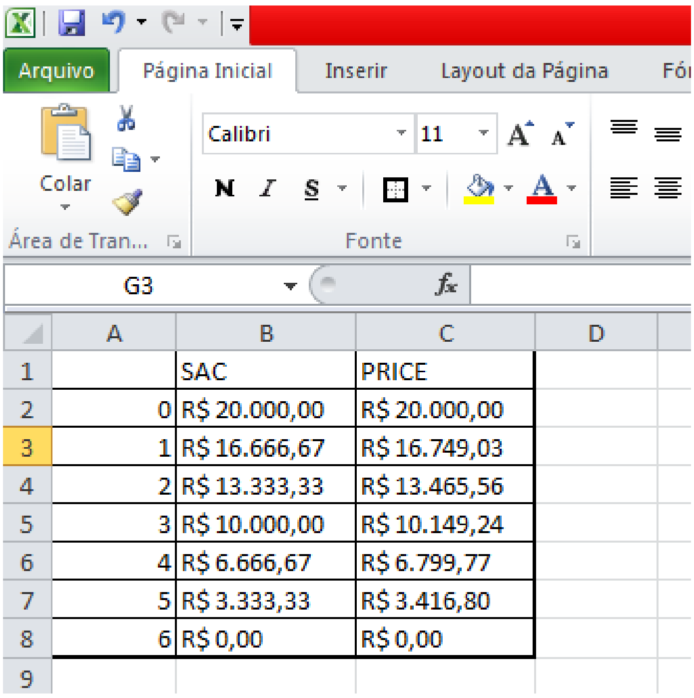
O gráfico abaixo representa a evolução das parcelas da tabela SAC e Price



Mas será que o gráfico que representa SAC sempre cruza o gráfico que representa o Price na metade do plano de financiamento? A resposta é não, veremos uma simulação que mostra isto.

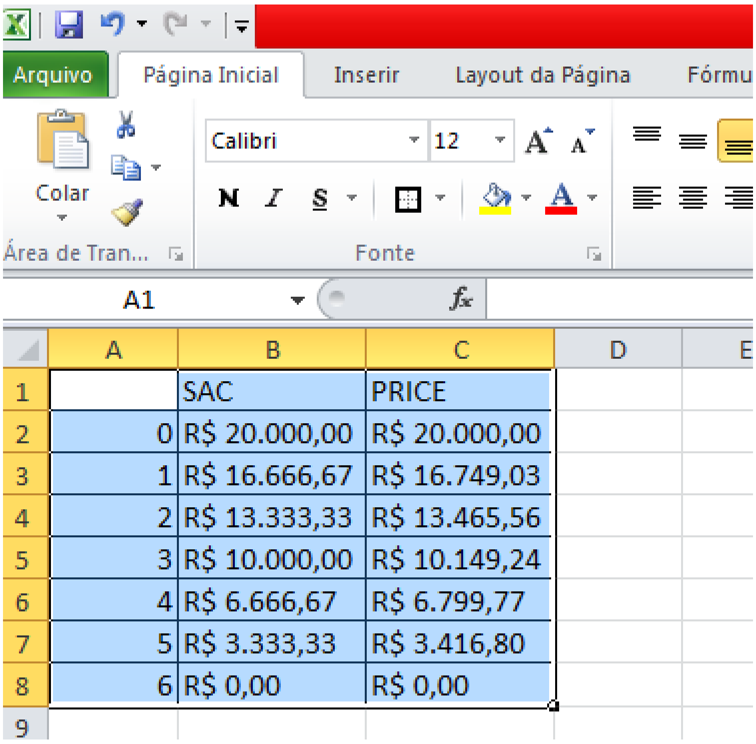
- **GRÁFICO REFERENTE À EVOLUÇÃO DO SALDO DEVEDOR**

1º passo: Faça uma tabela como no modelo abaixo.



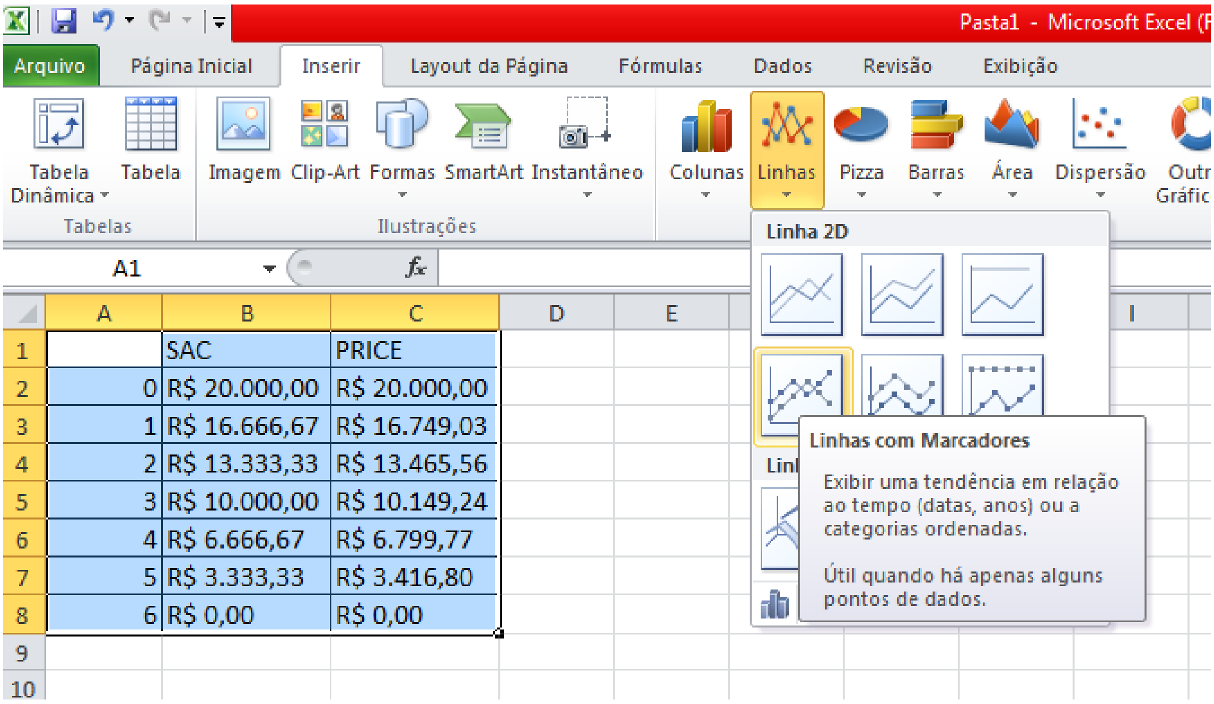
	A	B	C	D
1		SAC	PRICE	
2	0	R$ 20.000,00	R$ 20.000,00	
3	1	R$ 16.666,67	R$ 16.749,03	
4	2	R$ 13.333,33	R$ 13.465,56	
5	3	R$ 10.000,00	R$ 10.149,24	
6	4	R$ 6.666,67	R$ 6.799,77	
7	5	R$ 3.333,33	R$ 3.416,80	
8	6	R$ 0,00	R$ 0,00	
9				

2º Passo: Selecione a tabela.



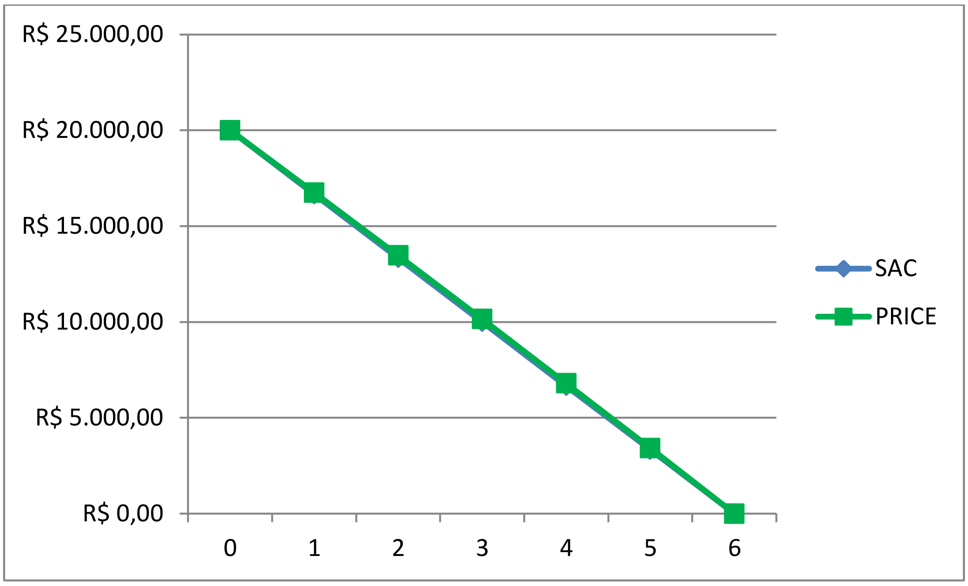
	A	B	C
1		SAC	PRICE
2	0	R$ 20.000,00	R$ 20.000,00
3	1	R$ 16.666,67	R$ 16.749,03
4	2	R$ 13.333,33	R$ 13.465,56
5	3	R$ 10.000,00	R$ 10.149,24
6	4	R$ 6.666,67	R$ 6.799,77
7	5	R$ 3.333,33	R$ 3.416,80
8	6	R$ 0,00	R$ 0,00

3º Passo: Clique em: inserir > linhas > linhas com marcadores



	A	B	C
1		SAC	PRICE
2	0	R$ 20.000,00	R$ 20.000,00
3	1	R$ 16.666,67	R$ 16.749,03
4	2	R$ 13.333,33	R$ 13.465,56
5	3	R$ 10.000,00	R$ 10.149,24
6	4	R$ 6.666,67	R$ 6.799,77
7	5	R$ 3.333,33	R$ 3.416,80
8	6	R$ 0,00	R$ 0,00

O gráfico abaixo representa a evolução dos saldos devedores no sistema SAC e Price



Observe que o gráficos das evoluções dos saldo devedores do SAC e Price se confundem neste caso, pois os valores dos saldos devedores são muito próximos. Mas veremos na simulação abaixo uma melhor visualização desta diferença.

Vamos ao nosso exemplo real, e supor um financiamento de R$ 84.400,00 durante 300 meses, a uma taxa de 7,9347% ao ano, isto equivale a uma taxa mensal de 0,6383306%, e compara-los na tabela e no gráfico.

SAC – R$ 84.400,00

SAC				
Parcelas	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor
0	...	...	...	R$ 84.400,00
1	R$ 538,75	R$ 281,33	R$ 820,08	R$ 84.118,67
2	R$ 536,96	R$ 281,33	R$ 818,29	R$ 83.837,34
3	R$ 535,16	R$ 281,33	R$ 816,49	R$ 83.556,01
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
299	R$ 3,60	R$ 281,33	R$ 284,93	R$ 283,13
300	R$ 1,81	R$ 281,33	R$ 283,14	R$ 0,00

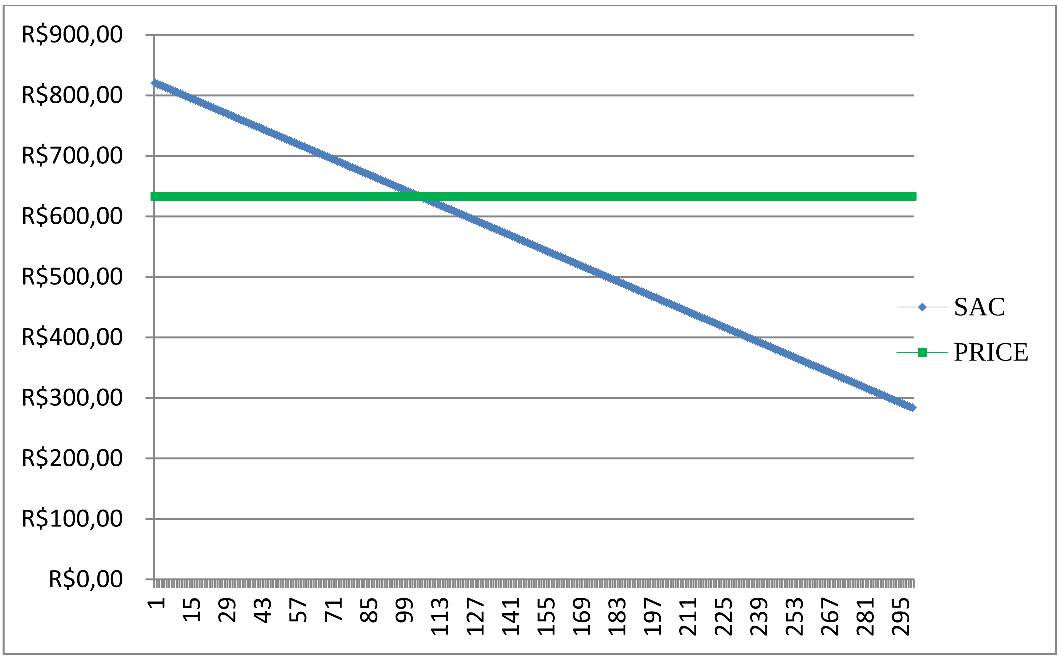
Nesta opção a primeira parcela será R$ 820,08 e a última é R$283,14, é importante lembrar que na realidade devem ser acrescidos nos valor de todas as prestações dois valores adicionais, são eles: seguro obrigatório e taxas bancárias.

Price – R$ 84.400,00

Tabela Price				
Parcelas	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor
0	...	...	...	R$ 84.400,00
1	R$ 538,75	R$ 93,77	R$ 632,52	R$ 84.306,23
2	R$ 538,15	R$ 94,36	R$ 632,52	R$ 84.211,87
3	R$ 537,55	R$ 94,97	R$ 632,52	R$ 84.116,90
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
299	R$ 8,00	R$ 624,52	R$ 632,52	R$ 628,50
300	R$ 4,01	R$ 628,50	R$ 632,52	R$ 0,00

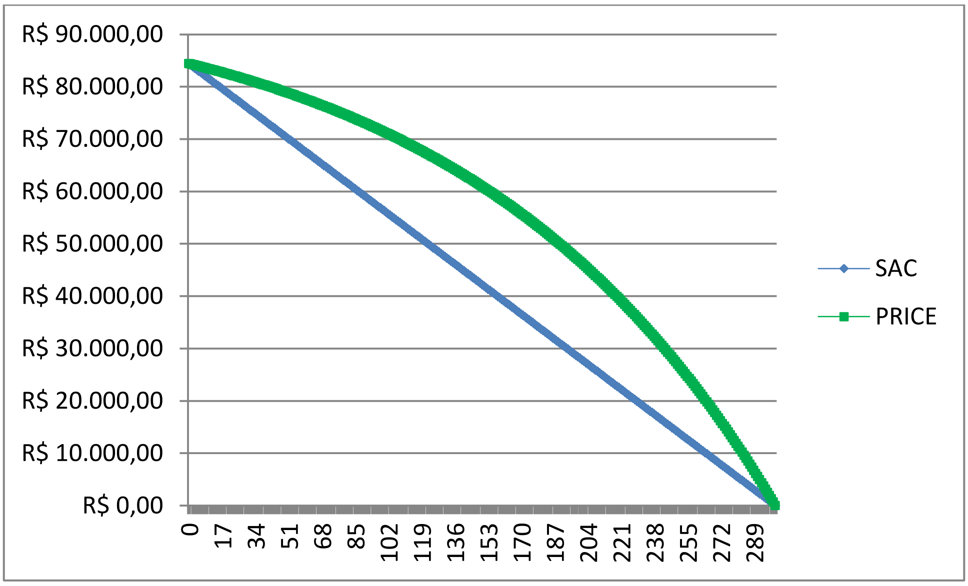
Nesta opção temos as parcelas num valor constante, e que na prática também deve ser cobrado junto com a parcela o valor do seguro obrigatório e taxas bancarias.

Gráfico comparando os parcelas nos dois planos



Podemos observar que próximo ao 100º mês a prestação pelo sistema SAC fica mais em conta que a prestação do sistema Price, e a prestação no sistema SAC diminuem constantemente.

Gráfico comparando os saldos devedores nos dois planos



Observe que neste gráfico fica claro que os saldos devedores no sistema SAC diminuem constantemente e no sistema Price o saldo devedor diminui lentamente no começo e ganha velocidade no final.

4.1.3 COMENTÁRIOS FINAIS

No sistema SAC é necessário mais esforço no começo, porém tem uma folga no futuro, no sistema PRICE as prestações são constantes. No sistema SAC os saldos devedores diminuem constantemente e no sistema Price os saldos devedores diminuem lentamente no começo e ganham velocidade no final, embora os dois sistemas tenham o mesmo valor principal R$84.400,00 e taxa 0,6383306% ao mês.

4.2 O QUE É MELHOR? FINANCIAR UM CARRO ZERO, FAZER UM CONSÓRCIO, POUPAR E COMPRAR À VISTA, OU FAZER UM EMPRÉSTIMO CONSIGNADO?

Vamos fazer comparações para poder julgar a melhor opção para a compra de um bem, neste caso um carro. Na realidade é a necessidade de cada pessoa é que mais importa. A abordagem matemática será feita, mostrando as opções disponíveis no mercado financeiro.

Existem algumas opções para se comprar um carro. O mercado de crédito oferece algumas opções para compra de automóveis, são elas: leasing, financiamento, consórcio, ou à vista, uma outra alternativa é o empréstimo consignado que serve para qualquer finalidade.

Para utilizar o **financiamento**, basta fazer o orçamento na concessionária, geralmente são oferecidas duas opções: financiar com a própria montadora ou através de bancos parceiros da concessionária, ou finalmente ir em busca das melhores taxas em diferentes bancos.

No **financiamento** bancário, o bem fica alienado ao banco que emprestar o dinheiro, assim o banco tem uma segurança maior caso as parcelas não sejam quitadas pelo comprador.

Se o comprador quiser antecipar as parcelas, ele terá uma redução proporcional aos juros restantes.

O **leasing** é um tipo de aluguel e pode ser comparado ao financiamento, pois você tem a opção de ficar com o bem ao final do contrato, mas têm algumas condições: varia de 24 a 72 meses, se você quiser ficar com o bem ao final do contrato você deve pagar uma taxa residual, você também tem a opção de pagar parcelas antecipadas, o bem fica no nome do banco até o pagamento do último valor, assim no caso de inadimplência o bem é rapidamente tomado pelo banco, esta modalidade não é muito utilizada para comprar um carro.

O **consórcio** pode durar até 80 meses a retirada do bem está sujeita ao lance ou ao sorteio, o lance é um valor que você quer eliminar nas parcelas seguintes, quem dá o maior lance é contemplado com o carro.

Finalmente, o **empréstimo consignado**, que é um benefício tanto para funcionário público quanto para funcionário de empresa privada, desde que a empresa privada tenha um convênio com o banco, para poder fazer o desconto do valor emprestado diretamente na folha de pagamento, assim a inadimplência é menor, logo o banco trabalha com uma taxa mais baixa do que outros financiamentos.

O termo **CET**, representa o custo efetivo total, é o somatório de todos os tributos tarifas, seguros ou quaisquer despesas que possam ser cobradas dos clientes além dos juros do financiamento.

Nas contas que seguem iremos omitir o valor do **IOF** (imposto sobre operações financeiras). Logo vamos utilizar um CET, que ira representar a taxa do financiamento mais uma taxa representado o financiamento do IOF.

4.2.1 COMPARAÇÕES DAS LINHAS DE CRÉDITO

O que é melhor? Financiar um carro popular no valor de R$ 25.190,00 mais TAC (tarifa de abertura de cadastro) de R$ 600,00 com um CET de 1,57% a.m. (taxa do financiamento incluindo o IOF), fazer um consórcio, comprar a vista ou fazer um empréstimo consignado?

Os valores e taxas foram uma simulação feita em uma concessionária de carros novos de Campo Grande em 18/01/2013, cuja qual deu duas opções de adquirir o mesmo veículo.

1º Financiamento

Utilizando a fórmula da prestação fixa dependendo da taxa e do tempo, com o valor atual $A = 25190 + 600 = 25790$ a taxa $i = 0{,}0157$ e $n = 60$, a prestação fica em:

$$p = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$p = \frac{25790x0,0157}{1-(1+0,0157)^{-60}}$$

$$p \cong 666,73$$

Assim nesta forma, sairíamos da concessionaria de carro novo, porém com uma dívida de 60 parcelas de R$ 666,73.

4.2.2 DEPOSITANDO NA POUPANÇA O VALOR DA PARCELA DE UM FINANCIAMENTO

Segundo a página do Banco Central do Brasil o rendimento da poupança no dia 20/01/2013 era de 0,4134% a.m. vamos supor que a poupança tenha esta taxa pelos próximos 60 meses (lembrando que o rendimento máximo da poupança é de 0,5% a.m.).

Supondo que você deposite R$ 666,73 na poupança todo mês. Assim em um mês teremos $666{,}73 \times 1{,}004134 = 669{,}49$, ou seja, R$ 669,49. Porém vamos acrescentar mais R$ 666,73 daí $669{,}49 + 666{,}73 = 1336{,}22$, e assim por diante.

Mês	valor poupado	Mês	valor poupado	Mês	valor poupado
1	R$ 666,73	21	R$ 14.595,59	41	R$ 29.722,45
2	R$ 1.336,22	22	R$ 15.322,65	42	R$ 30.512,05
3	R$ 2.008,47	23	R$ 16.052,73	43	R$ 31.304,92
4	R$ 2.683,50	24	R$ 16.785,82	44	R$ 32.101,06
5	R$ 3.361,33	25	R$ 17.521,94	45	R$ 32.900,50
6	R$ 4.041,95	26	R$ 18.261,11	46	R$ 33.703,24
7	R$ 4.725,39	27	R$ 19.003,33	47	R$ 34.509,30
8	R$ 5.411,66	28	R$ 19.748,62	48	R$ 35.318,69
9	R$ 6.100,76	29	R$ 20.496,99	49	R$ 36.131,43
10	R$ 6.792,71	30	R$ 21.248,45	50	R$ 36.947,52
11	R$ 7.487,52	31	R$ 22.003,03	51	R$ 37.767,00
12	R$ 8.185,20	32	R$ 22.760,72	52	R$ 38.589,85
13	R$ 8.885,77	33	R$ 23.521,54	53	R$ 39.416,11
14	R$ 9.589,23	34	R$ 24.285,51	54	R$ 40.245,79
15	R$ 10.295,61	5	R$ 25.052,63	55	R$ 41.078,90
16	R$ 11.004,90	36	R$ 25.822,93	56	R$ 41.915,45
17	R$ 11.717,12	37	R$ 26.596,41	57	R$ 42.755,46
18	R$ 12.432,29	38	R$ 27.373,09	58	R$ 43.598,94
19	R$ 13.150,42	39	R$ 28.152,98	59	R$ 44.445,90
20	R$ 13.871,51	40	R$ 28.936,10	60	R$ 45.296,37

Podemos observar que entre o 35º e 36º mês já teríamos a quantia desejada, é esperado que este carro saia de linha e o modelo substituto custe por volta de 12% a mais (comparando o valor de uma carro similar a três anos atrás), assim o carro que custava R$25.100,00 hoje daqui a três anos custará por volta de R$28.000,00, logo o correto seria esperar a quantia até o 40º mês aproximadamente.

Observe a quantidade de dinheiro que é economizado, aproximadamente 20 parcelas de 666,73, com certeza mais do que R$13.300,00.

Esta opção pode ser indicada para quem quer um segundo carro na garagem, ou não tem pressa de pegar o carro.

4.2.3 CONSÓRCIO

O consórcio é uma questão de sorte. Vamos a sua tabela de investimento para uma carta de crédito no valor de R$ 25.100,00, em um consórcio na mesma concessionária. Neste plano teríamos que pagar R$ 505,77.

Mês	Pago	Mês	Pago	Mês	Pago
1	R$ 505,77	21	R$ 10.621,17	41	R$ 20.736,57
2	R$ 1.011,54	22	R$ 11.126,94	42	R$ 21.242,34
3	R$ 1.517,31	23	R$ 11.632,71	43	R$ 21.748,11
4	R$ 2.023,08	24	R$ 12.138,48	44	R$ 22.253,88
5	R$ 2.528,85	25	R$ 12.644,25	45	R$ 22.759,65
6	R$ 3.034,62	26	R$ 13.150,02	46	R$ 23.265,42
7	R$ 3.540,39	27	R$ 13.655,79	47	R$ 23.771,19
8	R$ 4.046,16	28	R$ 14.161,56	48	R$ 24.276,96
9	R$ 4.551,93	29	R$ 14.667,33	49	R$ 24.782,73
10	R$ 5.057,70	30	R$ 15.173,10	50	R$ 25.288,50
11	R$ 5.563,47	31	R$ 15.678,87	51	R$ 25.794,27
12	R$ 6.069,24	2	R$ 16.184,64	52	R$ 26.300,04
13	R$ 6.575,01	33	R$ 16.690,41	53	R$ 26.805,81
14	R$ 7.080,78	34	R$ 17.196,18	54	R$ 27.311,58
15	R$ 7.586,55	35	R$ 17.701,95	55	R$ 27.817,35
16	R$ 8.092,32	36	R$ 18.207,7	56	R$ 28.323,12
17	R$ 8.598,09	37	R$ 18.713,49	57	R$ 28.828,89
18	R$ 9.103,86	38	R$ 19.219,26	58	R$ 29.334,66
19	R$ 9.609,63	39	R$ 19.725,03	59	R$ 29.840,43
20	R$ 10.115,40	40	R$ 20.230,80	60	R$ 30.346,20

Observe que nesta opção, você não sabe quando vai pegar a carta de crédito, você pode chegar no 50º mês, ´´já ter pagado o valor do carro`` e ainda não ter sido contemplado, e assim como no financiamento é esperado que este carro saísse de linha e o modelo substituto custe por volta de 12% a mais. Mas se você investir R$505,77 na poupança?

4.2.4 DEPOSITANDO NA POUPANÇA O VALOR DA PARCELA DE UM CONSÓRCIO

Considerando a mesma taxa da tabela anterior.

Mês	Pago	Mês	Pago	Mês	Pago
1	R$ 505,77	21	R$ 11.113,57	41	R$ 22.633,74
2	R$ 1.015,63	22	R$ 11.667,29	42	R$ 23.235,08
3	R$ 1.527,60	23	R$ 12.223,29	43	R$ 23.838,90
4	R$ 2.041,68	24	R$ 12.781,59	44	R$ 24.445,22
5	R$ 2.557,89	25	R$ 13.342,20	45	R$ 25.054,05
6	R$ 3.076,24	26	R$ 13.905,13	46	R$ 25.665,39
7	R$3.596,7	27	R$ 14.470,38	47	R$ 26.279,26
8	R$4.119,3	28	R$ 15.037,97	48	R$ 26.895,67
9	R$ 4.644,16	29	R$ 15.607,91	49	R$ 27.514,63
10	R$ 5.171,13	30	R$ 16.180,20	50	R$ 28.136,15
11	R$ 5.700,28	31	R$ 16.754,86	51	R$ 28.760,23
12	R$ 6.231,62	32	R$ 17.331,89	52	R$ 29.386,90
13	R$ 6.765,15	33	R$ 17.911,31	53	R$30.016,1
14	R$ 7.300,88	34	R$ 18.493,13	54	R$ 30.648,01
15	R$ 7.838,84	35	R$ 19.077,35	55	R$ 31.282,48
16	R$ 8.379,01	36	R$ 19.663,99	56	R$ 31.919,57
17	R$ 8.921,42	37	R$ 20.253,05	57	R$ 32.559,29
18	R$ 9.466,07	38	R$ 20.844,54	58	R$ 33.201,66
19	R$ 10.012,98	39	R$ 21.438,48	59	R$ 33.846,69
20	R$ 10.562,14	40	R$ 22.034,88	60	R$ 34.494,38

Assim pegando o valor da parcela do consórcio e depositando na poupança, no 50º mês você com certeza teria por volta de R$28.000,00 (preço do carro daqui a três anos), pagaria o carro à vista e não sobraria divida alguma. Assim teria uma economia de 10 parcelas de R$505,00.

4.2.5 O EMPRÉSTIMO CONSIGNADO

Nesta opção o principal valor a ser comparado é o valor da parcela do empréstimo com o valor da parcela do financiamento, a simulação de um empréstimo consignado no valor de R$ 25.190,00 a uma taxa de 1,77% a.m., foi feita na página do Banco do Brasil.

É esperado que esta parcela seja mais alta do que o financiamento a uma taxa de 1,57, veja:

$$p = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$p = \frac{25190x0,0177}{1-(1+0,0177)^{-60}}$$

$$p = 684,87$$

Logo, neste caso, não é conveniente.

Devemos sempre comparar as taxas, porém é geralmente mais fácil comparar os valores das prestações, pois no financiamento, nem sempre é informado a CET, e há uma diferença de valores, pois no financiamento deve-se pagar a TAC.

4.2.6 COMENTÁRIOS FINAIS

O cálculo mostra que é melhor economizar e comprar a vista. Mas como já foi dito a necessidade e as condições de cada um devem ser consideradas, todos os dados e variáveis de cada comprador devem ser calculadas.

É interessante chamar a atenção em relação ao consórcio, visto que este pode ser até considerado um jogo dado que por vezes é necessário esperar pela sorte.

De fato juntar o dinheiro é a melhor opção, desde que não sejam consideradas outras variáveis.

4.3 JUROS DO CHEQUE ESPECIAL, O QUE É COBRADO E COMO É CALCULADO, O QUE É O IOF

O cheque especial ou limite é um valor agregado ao saldo da conta corrente, se um correntista tem R$1000,00 de saldo mais R$ 850,00 de cheque especial então ele tem um saldo disponível de R$1850,00, mas a utilização destes R$850,00 não é gratuita, a saber, ele tem um dos juros mais altos do mercado, podendo chegar a quase 12% ao mês.

Segundo o Banco do Brasil, ´´o cheque especial é um crédito rotativo, ou seja, é um dinheiro que está disponível, cujo mesmo ao ser pago estará novamente liberado, e os encargos financeiros sobre ele será cobrada e apresentada na conta vinculada ao crédito concedido``.

Segundo a página do banco Ítau [8]:

> ´´Os juros remuneratórios são aplicados mensalmente sobre a soma dos saldos devedores apurados em cada dia útil do mês, dividido pelo número de dias úteis daquele mês – finais de semana e feriados não são considerados para o cálculo dos encargos. Sobre o resultado obtido, é aplicada a taxa de juros efetiva, que corresponde à taxa informada dividida por trinta e multiplicada pelo número de dias corridos do respectivo mês.
> A cobrança ocorre na data de vencimento escolhida por você. Caso a data prevista não caia num dia útil, o débito acontecerá no dia útil seguinte.
> Atenção: o uso do cheque especial está sujeito ainda à cobrança do Imposto sobre Operações Financeiras – IOF. ``[8]

Mas o que é IOF (imposto sobre operações financeiras)? Como é cobrado no cheque especial?

No cheque especial, o IOF é calculado sobre os saldos devedores diários. Suponha que você ficou devedor no cheque especial por 3 dias úteis, R$ 5.000,00 no primeiro, R$ 6.000 no segundo e R$ 9.000 no terceiro. A primeira parte do IOF a pagar, é a soma desses saldos devedores R$ 20.000, vezes 0,000082, o que resulta em R$ 1,64. Relativamente pouco não é? Porém existe outra conta a se fazer, que é referente o IOF adicional de 0,38%, um pouco salgada, próximo a taxa mensal da poupança.

Esta taxa é calculada sobre o somatório dos acréscimos diários do saldo devedor. Considerando os dados acima temos que: no primeiro dia houve um saque de R$5.000,00 no segundo houve um acréscimo de R$1.000,00 e no terceiro houve um acréscimo de R$3.000,00, totalizando R$ 9.000,00, e $9000 \times 0{,}0038 = 34{,}20$, ou seja, R$34,20 de IOF adicional, e pior que isto, é intercalar um saldo devedor com um saldo positivo. Os acréscimos diários seriam: R$5.000,00 no primeiro dia, R$6.000,00 no terceiro dia, mais

R$9.000,00 no quinto dia, totalizando um acréscimo de R$20.000,00, logo o IOF adicional será de $0{,}0038 \times 20000 = 76$, que dá um IOF adicional de R$ 76,00.

Considere o seguinte extrato bancário, cuja taxa do cheque especial é de 4,27%.

Extrato

DATA MOV.	NR. DOC.	HISTÓRICO	VALOR	SALDO
	000000	SALDO ANTERIOR	0,00	396,92 D
03/12/2012	031116	DEP D LOT	843,00 C	446,08 C
03/12/2012	900001	DEB.JUROS	10,73 D	435,35 C
03/12/2012	000000	DEB.IOF	1,78 D	433,57 C
03/12/2012	012121	PREST HAB	833,57 D	400,00 D
14/12/2012	141539	DEP D LOT	410,00 C	10,00 C
14/12/2012	000000	DEB CES TA	15,00 D	5,00 D

Vamos colocar estes os dados principais do extrato na planilha abaixo.

Dez. de 2012								
Data	Dia	Crédito	Débito	Saldo	Saldo devedor em dia útil	Saldo devedor diário	Acréscimo no saldo devedor	Dias úteis
1	Sábado			R$ 0,00			0,00	
2	Domingo			R$ 0,00			0,00	
3	Segunda			-R$ 400,00	-R$ 400,00	-R$ 400,00	400,00	1
4	Terça			-R$ 400,00	-R$ 400,00	-R$ 400,00	0,00	2
5	Quarta			-R$ 400,00	-R$ 400,00	-R$ 400,00	0,00	3
6	Quinta			-R$ 400,00	-R$ 400,00	-R$ 400,00	0,00	4
7	Sexta			-R$ 400,00	-R$ 400,00	-R$ 400,00	0,00	5
8	Sábado			-R$ 400,00		-R$ 400,00	0,00	
9	Domingo			-R$ 400,00		-R$ 400,00	0,00	
10	Segunda			-R$ 400,00	-R$ 400,00	-R$ 400,00	0,00	6
11	Terça			-R$ 400,00	-R$ 400,00	-R$ 400,00	0,00	7
12	Quarta			-R$ 400,00	-R$ 400,00	-R$ 400,00	0,00	8
13	Quinta			-R$ 400,00	-R$ 400,00	-R$ 400,00	0,00	9
14	Sexta	R$ 410,00	R$ 15,00	-R$ 5,00	-R$ 5,00	-R$ 5,00	0,00	10
15	Sábado			-R$ 5,00		-R$ 5,00	0,00	
16	Domingo			-R$ 5,00		-R$ 5,00	0,00	
17	Segunda			-R$ 5,00	-R$ 5,00	-R$ 5,00	0,00	11
18	Terça			-R$ 5,00	-R$ 5,00	-R$ 5,00	0,00	12

19	Quarta			-R$ 5,00	-R$ 5,00	-R$ 5,00	0,00	13
20	Quinta			-R$ 5,00	-R$ 5,00	-R$ 5,00	0,00	14
21	Sexta			-R$ 5,00	-R$ 5,00	-R$ 5,00	0,00	15
22	Sábado			-R$ 5,00		-R$ 5,00	0,00	
23	Domingo			-R$ 5,00		-R$ 5,00	0,00	
24	Segunda			-R$ 5,00	-R$ 5,00	-R$ 5,00	0,00	16
25	Terça			-R$ 5,00		-R$ 5,00	0,00	
26	Quarta			-R$ 5,00	-R$ 5,00	-R$ 5,00	0,00	17
27	Quinta			-R$ 5,00	-R$ 5,00	R$ 5,00	0,00	18
28	Sexta			-R$ 5,00	-R$ 5,00	-R$ 5,00	0,00	19
29	Sábado			-R$ 5,00		-R$ 5,00	0,00	
30	Domingo			-R$ 5,00		-R$ 5,00	0,00	
31	Feriado			-R$ 5,00		-R$ 5,00	0,00	
				Total	R$ 3650,00	R$ 4470,00	R$ 400,00	

Para descobrir o juro do cheque especial segundo informação acima retirada do banco Itaú, basta fazer $\frac{3650}{19} \times \frac{0{,}0427}{30} \times 31 \cong 8{,}47$, e neste caso dá aproximadamente R$8,47.

Agora o cálculo do IOF é feita em duas etapas a primeira é calcular 0,0082% em cima do somatório do saldo devedor (incluindo sábado, domingo e feriado) que dá $4470 \times 0{,}000082 = 0{,}36736$, ou seja, R$ 0,36. A segunda etapa é calcular em cima do acréscimo do saldo devedor, logo o único dia que vamos considerar é 03/12/2012, pois no restante não houve acréscimo no saldo devedor, e no dia 2 de dezembro o saldo era positivo. Assim ficam $400 \times 0{,}000038 = 0{,}0152$, isto é R$ 0,01, totalizando um IOF de 0,01+0,36 igual a R$0,37. Segundo o site da receita federal [18] o IOF diário para pessoa física é de 0,0082%.

4.3.1 COMENTÁRIOS FINAIS

O juro do cheque especial é caro, e também tem o IOF que pode se tornar o grande vilão da história. Especialistas dizem que é bom não utilizar este crédito, porém se for necessário, é importante utilizar com inteligência e conhecimento. As dicas são: utilizar os menores valores possíveis pelo menor tempo possível, não ficar oscilando a conta em saldo positivo e saldo negativo.

4.4 APOSENTADORIA PÚBLICA, PRIVADA OU É MELHOR UMA POUPANÇA

Estudaremos um pouco sobre o sistema de aposentadoria mais utilizada no Brasil, a aposentadoria por tempo de contribuição. Bem como faremos comparações com a aposentadoria privada oferecida pelos bancos.

4.4.1 APOSENTADORIA PELO INSS (INSTITUTO NACIONAL DO SEGURO SOCIAL), POR TEMPO DE CONTRIBUIÇÃO

Segundo o site da Previdência Social do Brasil, [16].

> ´´A aposentadoria por tempo de contribuição pode ser integral ou proporcional. Para ter direito à aposentadoria integral, o trabalhador homem deve comprovar pelo menos 35 anos de contribuição e a trabalhadora mulher, 30 anos. Para requerer a aposentadoria proporcional, o trabalhador tem que combinar dois requisitos: tempo de contribuição e idade mínima.
>
> Os homens podem requerer aposentadoria proporcional aos 53 anos de idade e 30 anos de contribuição.
>
> As mulheres têm direito à proporcional aos 48 anos de idade e 25 de contribuição.
>
> Para ter direito à aposentadoria integral ou proporcional, é necessário também o cumprimento do período de carência, que corresponde ao número mínimo de contribuições mensais indispensáveis para que o segurado faça jus ao benefício. Os inscritos a partir de 25 de julho de 1991 devem ter, pelo menos, 180 contribuições mensais.``[14]

A aposentadoria por tempo de contribuição é irreversível e irrenunciável: depois que receber o primeiro pagamento, sacar o PIS ou o Fundo de Garantia (o que ocorrer primeiro), o segurado não poderá desistir do benefício. O trabalhador não precisa sair do emprego para requerer a aposentadoria.

Segundo o sítio do Portal do Brasil. [12]

> ’’O valor mensal é calculado, na maioria dos casos, em função do salário de benefício, que corresponde à média de 80% dos maiores salários de contribuição recolhidos a partir de julho de 1994. Depois, sobre a média obtida é aplicado o fator previdenciário, que leva em consideração a idade, a expectativa de vida e o tempo de contribuição do segurado no momento da aposentadoria. Na maioria das vezes, também é exigido um período mínimo de contribuição, sem interrupções, denominado período de carência’’. [12]

O teto da previdência social (salário máximo), está em torno de R$4.200,00, ou seja ninguém recebe um benefício maior do que R$4.200,00. Mesmo que você receba mais do que R$4.200,00 a contribuição será feita em cima deste valor.

Segundo o sítio da Previdência Social [16]:

> ´´A partir de determinados parâmetros básicos, o cálculo da aposentadoria de cada segurado será determinado de acordo com a seguinte equação:
> Sb = M x f
> Sendo:
> Sb = salário de benefício.
> M = média dos 80% maiores salários-de-contribuição do segurado, apurados entre julho de 1994 e o momento da aposentadoria, corrigidos monetariamente.
> $$f = \frac{Tc \times a}{Es} \times \left(1 + \frac{Id + Tc \times a}{100}\right)$$
> Onde:
> f = fator previdenciário;
> Tc = tempo de contribuição de cada segurado;
> a = alíquota de contribuição do segurado = 0,31, constante, que corresponde a 20% das contribuições patronais, mais até 11% das contribuições do empregado)
> Es = expectativa de sobrevida do segurado na data da aposentadoria, fornecida pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, considerando-se a média única nacional para ambos os sexos; Id = idade do segurado na data da aposentadoria``[16]

Considere um trabalhador com $M = R\$2.000{,}00$ (média dos 80% maiores salários-de-contribuição do segurado, apurados entre julho de 1994 e o momento da aposentadoria, corrigidos monetariamente), com $Tc = 35\,anos$ (tempo de contribuição do segurado), segundo Portal G1 [15], a expectativa de sobrevida é de aproximadamente 74 anos, logo $Es = 74$ e o trabalhador do nosso exemplo tem 55 anos, assim:

$$f = \frac{Tc \times a}{Es} \times \left(1 + \frac{Id + Tc \times a}{100}\right)$$
$$f = \frac{35 \times 0{,}31}{74} \times \left(1 + \frac{55 + 35 \times 0{,}31}{100}\right)$$
$$f = \frac{10{,}85}{19} \times 1{,}7085$$
$$f = 0{,}947090789$$

daí

$$Sb = M \times f$$
$$Sb = 2000 \times 0{,}947090789$$
$$Sb = 1894{,}18$$

Neste exemplo acima podemos supor que este trabalhador contribuiu com 11% do seu salário todo mês. Vamos fazer uma comparação com a previdência privada.

4.4.2 INVESTINDO R$220,00 POR MÊS NUMA PREVIDÊNCIA PRIVADA DURANTE OS MESMOS 35 ANOS DE CONTRIBUIÇÃO

Vamos supor um investimento mensal de R$220,00 por mês em um banco particular, simulando no site do Banco do Brasil temos:

Supondo depositar os mesmos R$220,00 por mês durante 35 anos, teríamos uma aposentadoria vitalícia de R$2472,40 por mês, supondo uma estimativa de rentabilidade em torno de 8% ao ano.

4.4.3 DEPOSITANDO R$220,00 NA POUPANÇA TODO MÊS DURANTE 35 ANOS

Basta observar a tabela abaixo, supondo que a poupança renda aproximadamente 0,4134% a.m.:

Mês	valor
1	R$ 220,00
2	R$ 440,91
3	R$ 662,73

4	R$ 885,47
5	R$ 1.109,13
6	R$ 1.333,72
7	R$ 1.559,23
8	R$ 1.785,68
.	.
.	.
.	.
415	R$ 241.629,51
416	R$ 242.848,40
417	R$ 244.072,34
418	R$ 245.301,33
419	R$ 246.535,41
420	R$ 247.774,59

Podemos conseguir o valor no 420º mês da seguinte forma:

$$S_{420} = 220 \times 1,004134^{420} + 220 \times 1,004134^{419} + ... + 220 \times 1,004134^{1} + 220)$$

$$S_{420} = 220\left(1,004134^{420} + 1,004134^{419} + ... + 1,004134^{1} + 1\right)$$

$$S_{420} = 220\left(1 \times \frac{1,004134^{420} - 1}{1,004134 - 1}\right)$$

$$S_{420} = 247774,58$$

Este dinheiro poderia acabar em 15 anos supondo um gasto mensal de R$2.000,00. Pois num primeiro momento (primeiro mês) terá R$247.774,58. No segundo mês terá $(247.774{,}58 - 2000) \times 1{,}004134 = 246.790{,}61$, ou seja R$246.790,61, fazendo raciocínio análogo para os outros meses teremos:

Mês	Valor
1	R$ 247.774,58
2	R$ 246.790,61
3	R$ 245.802,58

4	R$ 244.810,46
5	R$ 243.814,23
...	...
170	R$ 7.820,21
171	R$ 5.844,27
172	R$ 3.860,17
173	R$ 1.867,86
174	-R$ 132,69

Como podemos ver no 174º, ou seja, 14,5 anos o dinheiro acabaria.

4.4.4 COMENTÁRIOS FINAIS

Para um trabalhador assalariado não existe a opção ´´não participar da previdência social`` visto que o desconto é obrigatório na folha de pagamento. Para alguém que quer ter uma aposentadoria, com um salário um pouco melhor ou com um valor maior do que o teto da previdência social é aconselhável uma previdência privada, embora todos os riscos devessem ser analisados (por exemplo: quanto o dinheiro poderá render? o banco falir...). Por fim o dinheiro na poupança, não é conveniente, pois a partir do momento que parar de depositar e começar a fazer saques e mais saques a tendência é que acabe rápido, neste exemplo acima ele acabaria em torno de 15 anos.

4.5 ALCANÇANDO O 1º MILHÃO

Este é um número que vem perdendo seu valor de ano em ano, se alguém almeja o montante de R$1.000.000,00, ao final de 35 anos por exemplo, na verdade quando estes zeros saírem no extrato eles não valerão mais 1 milhão, supondo que a inflação seja por volta de 4% ao ano em 35 anos será aproximadamente 294% ou seja R$253.807,10 (basta trazer o montante de 1 milhão para o valor presente a uma taxa de 2,94), então se alguém quer ter 1 milhão daqui 35 anos e ter o mesmo poder de compra deste 1 milhão hoje, é necessário juntar na realidade R$3.940.000,00. Porém é preferível ter ´´253 mil reais`` daqui 35 anos do que nada poupado.

4.5.1 TIPOS DE INVESTIMENTOS

Algumas opções de investimentos são: Poupança, Certificado de Depósito Bancário (**CDB**), fundo de renda fixa entre outros como, tesouro direto, planos de aposentadorias, bolsa de valores, empresas privadas, entre outras, para esta questão é necessária um tempo direcionado ao estudo de investimento. Neste tópico vamos tratar de poupança e CDB.

Ao se fazer um investimento é necessário compará-los a outros investimentos e analisar os riscos. Não que você vai perder todo o seu valor principal mas pode amargar algumas perdas. Por exemplo o FGC (Fundo Garantidor de Crédito), garante até R$70.000,00 de devolução em relação ao valor que tiver na poupança, caso um banco quebre.

Segue alguns termos e seus significados:

A **SELIC** (Sistema Especial de Liquidação e de Custódia), é a taxa que o governo paga para quem empresta dinheiro para o banco, hoje está em 7,25% a.a.

O **CDI** (Certificado de Depósito Interbancário), este termo é usado para mostrar o empréstimo de dinheiro entre os bancos, e neste caso eles cobram entre eles uma taxa próxima da SELIC, quando há pouco dinheiro no mercado a taxa de CDI é maior do que a Selic, quando há muito dinheiro no mercado a taxa do CDI é menor do que a SELIC.

Qual é o imposto de renda cobrado para quem faz um CDB?

Tempo	Taxa
até 180	22,50%
entre 181 e 360	20%
entre 361 e 720	17,50%
mais de 720 dias	15%

Então, um fator a ser analisado é: Quanto tempo vou deixar o dinheiro ´´parado``? por exemplo, na poupança você não irá perder dinheiro, retirando o dinheiro a qualquer tempo, porem se você deixar o seu dinheiro em um fundo de renda fixa por menos de 180 dias é possível que seu dinheiro renda menos do que a poupança, dependendo do capital.

Quem quer aplicar em fundo de renda fixa na verdade está emprestando dinheiro ao banco, o ideal é que você cumpra os prazos estabelecidos. Hoje em dia é possível aplicar em fundos de renda fixa a partir de R$50,00, segundo sítio da Caixa Econômica Federal. [10]

4.5.2 UMA ESTRATÉGIA PARA CHEGAR AO 1º MILHÃO

A meta aqui é chegar ao 1º milhão, existem muitas estratégias, mas em todas elas é necessário economizar e muito trabalho. Um plano razoável para atingir nossa meta, e economizar R$ 20.000,00 e depois começar a investir em fundo de renda fixa ou CDB. Para conseguir R$20.000,00, propomos economizar R$500,00 por mês a princípio em uma poupança, pois com valores pequenos não é interessante abrir uma conta corrente ter gastos mensais com tarifas de conta corrente de R$15,00 aproximadamente, para ter um rendimento aproximado de10% ao final de um ano, logo teríamos prejuízos.

Observe que a poupança segundo Portal do Brasil: [13]

> Quanto às regras de remuneração da poupança, continua valendo o que estava definido na medida provisória. Sempre que a taxa básica de juros, a Selic, estiver em 8,5% ao ano ou abaixo desse patamar, o rendimento da poupança é 70% da Selic mais a Taxa Referencial (TR). Quando a Selic for superior a 8,5%, vale a regra antiga de reajuste pela TR mais 0,5%. Atualmente, a Selic está em 8% ao ano.[13]

Investindo apenas na poupança, com uma taxa aproximada de 0,4134%a.m. demoraria 539 meses, ou seja, 44 anos.

4.5.3 NA POUPANÇA COM RENDIMENTO DE 0.4134% AO MÊS:

Teremos R$12.590,00 em 2 anos

No final do mês	Poupado	No final do mês	Poupado
1	R$ 502,07	21	R$ 10.947,89
2	R$ 1.004,14	22	R$ 11.493,15
3	R$ 1.508,29	23	R$ 12.040,67
4	R$ 2.014,53	24	R$ 12.590,44
5	R$ 2.522,86	25	R$ 13.142,49
6	R$ 3.033,29	26	R$ 13.696,82
7	R$ 3.545,83	27	R$ 14.253,44
8	R$ 4.060,48	28	R$ 14.812,37
9	R$ 4.577,27	29	R$ 15.373,60
10	R$ 5.096,19	30	R$ 15.937,16
11	R$ 5.617,26	31	R$ 16.503,04
12	R$ 6.140,48	32	R$ 17.071,26
13	R$ 6.665,87	33	R$ 17.641,84
14	R$ 7.193,42	34	R$ 18.214,77
15	R$ 7.723,16	35	R$ 18.790,07
16	R$ 8.255,09	36	R$19.367,75
17	R$ 8.789,22	37	R$ 19.947,81
18	R$ 9.325,55	38	R$ 20.530,28
19	R$ 9.864,10	39	R$ 21.115,15
20	R$ 10.404,88	40	R$ 21.702,44

É de extrema importância que neste 1º período de 24 meses de investimento, o investidor fique atento ao mercado financeiro e aprendendo mais sobre, taxas da SELIC, taxa do CDI, taxas de administração de bancos, empresas especializadas em investimentos, mais sobre CDB, fundos de rendas fixas, LTN (Letras do Tesouro Nacional), poupança, entre outras formas de investimento. Principalmente estudar matemática financeira para saber calcular valor presente, valor futuro, juros, equivalência de taxas em períodos.

Vamos supor uma aplicação de R$ 10.000,00 em um CDB, e que ao final de 720 dias, ou seja 2 anos (logo teremos que descontar 15% de Imposto de Renda, sobre o rendimento) este dinheiro seja resgatado com juro.

Supondo que o dinheiro renderá 100% do CDI, ou seja a mesma taxa do CDI, e que a taxa do CDI era de 11% a.a. e que o dinheiro resgatado será aplicado de novo, enquanto isso a cada mês será feito um novo CDB de R$ 500,00 para um período de 720 dias.

É lógico que este cálculo é simbólico, pois o mercado financeiro não fica parado, porém serve para demonstrar que é possível conseguir o valor nominal de R$1.000.000,00, relativamente rápido.

Instituições financeiras orientam os investidores a investirem em locais diferentes , sempre visando um lucro e uma segurança maior com o dinheiro, por exemplo a poupança é ´´100% segura`` até R$ 70.000,00 visto que FGC apenas ressarce até R$70.000,00.

Assim no início do 21º mês

Mês	Capital
21	R$ 10.500,00

Passado 2 anos, ao final do 44º mês teremos:

Mês	Capital
44	R$ 12.559,31

Mas no início do mês 22 o investidor tem mais R$ 500,00 que foi poupado, com este valor, faz-se mais um CDB, para dois anos, e ao final destes dois anos teremos: $500 \times 1{,}11^2 - 15{,}5\% \times (500 \times 1{,}11^2 - 500)$, totalizando R$ 598,06, e assim aplicando cada retorno e somado com os R$500,00 de cada mês, obtemos, o valor nominal de R$ 1.147.753,67, no último ciclo de 24 meses , totalizando 404 meses, ou seja 33,6 anos.

Observe que as contas foram feitas utilizando o sistema mais simples de investimento que supera as taxas da poupança, mas existem outros, possibilitando o 1 milhão mais rápido, é necessário empenho, perseverança, estudo e economia.

Veja a tabela referente as contas acima:

Mês	Investe	Retorno	Investimento do mês	Ciclo dos 24 meses
21	R$10.500,00	R$ 0,00	R$ 10.500,00	1
22	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	2
23	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	3
24	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	4

25	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	5
26	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	6
27	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	7
28	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	8
29	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	9
30	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	10
31	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	11
32	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	12
33	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	13
34	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	14
35	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	15
36	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	16
37	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	17
38	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	18
39	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	19
40	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	20
41	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	21
42	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	22
43	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	23
44	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 500,00	24
45	R$ 500,00	R$ 12.559,31	R$ 13.059,31	1
46	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	2
47	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	3
48	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	4
49	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	5
50	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	6
51	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	7
52	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	8
53	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	9
54	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	10
55	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	11
56	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	12
57	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	13
58	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	14
59	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	15
60	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	16
61	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	17
62	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	18
63	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	19
64	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	20

65	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	21
66	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	22
67	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	23
68	R$ 500,00	R$ 598,06	R$ 1.098,06	24
69	R$ 500,00	R$ 15.620,56	R$ 16.120,56	1
70	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	2
71	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	3
72	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	4
73	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	5
74	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	6
75	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	7
76	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	8
77	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	9
78	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	10
79	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	11
80	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	12
81	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	13
82	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	14
83	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	15
84	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	16
85	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	17
86	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	18
87	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	19
88	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	20
89	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	21
90	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	22
91	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	23
92	R$ 500,00	R$ 1.313,42	R$ 1.813,42	24
93	R$ 500,00	R$ 19.282,19	R$ 19.782,19	1
94	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	2
95	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	3
96	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	4
97	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	5
98	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	6
99	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	7
100	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	8
101	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	9
102	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	10
103	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	11
104	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	12

105	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	13
106	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	14
107	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	15
108	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	16
109	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	17
110	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	18
111	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	19
112	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	20
113	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	21
114	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	22
115	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	23
116	R$ 500,00	R$ 2.169,08	R$ 2.669,08	24
117	R$ 500,00	R$ 23.661,97	R$ 24.161,97	1
118	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	2
119	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	3
120	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	4
121	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	5
122	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	6
123	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	7
124	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	8
125	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	9
126	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	10
127	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	11
128	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	12
129	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	13
130	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	14
131	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	15
132	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	16
133	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	17
134	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	18
135	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	19
136	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	20
137	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	21
138	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	22
139	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	23
140	R$ 500,00	R$ 3.192,55	R$ 3.692,55	24
141	R$ 500,00	R$ 28.900,72	R$ 29.400,72	1
142	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	2
143	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	3
144	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	4

145	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	5
146	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	6
147	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	7
148	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	8
149	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	9
150	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	10
151	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	11
152	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	12
153	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	13
154	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	14
155	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	15
156	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	16
157	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	17
158	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	18
159	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	19
160	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	20
161	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	21
162	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	22
163	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	23
164	R$ 500,00	R$ 4.416,74	R$ 4.916,74	24
165	R$ 500,00	R$ 35.166,92	R$ 35.666,92	1
166	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	2
167	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	3
168	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	4
169	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	5
170	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	6
171	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	7
172	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	8
173	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	9
174	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	10
175	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	11
176	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	12
177	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	13
178	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	14
179	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	15
180	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	16
181	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	17
182	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	18
183	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	19
184	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	20

185	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	21
186	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	22
187	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	23
188	R$ 500,00	R$ 5.881,04	R$ 6.381,04	24
189	R$ 500,00	R$ 42.662,08	R$ 43.162,08	1
190	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	2
191	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	3
192	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	4
193	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	5
194	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	6
195	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	7
196	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	8
197	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	9
198	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	10
199	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	11
200	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	12
201	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	13
202	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	14
203	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	15
204	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	16
205	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	17
206	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	18
207	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	19
208	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	20
209	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	21
210	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	22
211	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	23
212	R$ 500,00	R$ 7.632,52	R$ 8.132,52	24
213	R$ 500,00	R$ 51.627,22	R$ 52.127,22	1
214	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	2
215	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	3
216	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	4
217	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	5
218	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	6
219	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	7
220	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	8
221	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	9
222	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	10
223	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	11
224	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	12

225	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	13
226	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	14
227	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	15
228	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	16
229	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	17
230	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	18
231	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	19
232	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	20
233	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	21
234	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	22
235	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	23
236	R$ 500,00	R$ 9.727,50	R$ 10.227,50	24
237	R$ 500,00	R$ 62.350,64	R$ 62.850,64	1
238	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	2
239	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	3
240	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	4
241	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	5
242	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	6
243	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	7
244	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	8
245	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	9
246	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	10
247	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	11
248	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	12
249	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	13
250	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	14
251	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	15
252	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	16
253	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	17
254	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	18
255	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	19
256	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	20
257	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	21
258	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	22
259	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	23
260	R$ 500,00	R$ 12.233,37	R$ 12.733,37	24
261	R$ 500,00	R$ 75.177,20	R$ 75.677,20	1
262	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	2
263	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	3
264	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	4

265	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	5
266	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	6
267	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	7
268	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	8
269	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	9
270	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	10
271	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	11
272	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	12
273	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	13
274	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	14
275	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	15
276	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	16
277	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	17
278	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	18
279	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	19
280	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	20
281	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	21
282	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	22
283	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	23
284	R$ 500,00	R$ 15.230,69	R$ 15.730,69	24
285	R$ 500,00	R$ 90.519,35	R$ 91.019,35	1
286	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	2
287	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	3
288	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	4
289	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	5
290	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	6
291	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	7
292	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	8
293	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	9
294	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	10
295	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	11
296	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	12
297	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	13
298	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	14
299	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	15
300	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	16
301	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	17
302	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	18
303	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	19
304	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	20

305	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	21
306	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	22
307	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	23
308	R$ 500,00	R$ 18.815,87	R$ 19.315,87	24
309	R$ 500,00	R$ 108.870,47	R$ 109.370,47	1
310	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	2
311	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	3
312	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	4
313	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	5
314	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	6
315	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	7
316	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	8
317	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	9
318	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	10
319	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	11
320	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	12
321	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	13
322	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	14
323	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	15
324	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	16
325	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	17
326	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	18
327	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	19
328	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	20
329	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	21
330	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	22
331	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	23
332	R$ 500,00	R$ 23.104,18	R$ 23.604,18	24
333	R$ 500,00	R$ 130.820,70	R$ 131.320,70	1
334	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	2
335	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	3
336	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	4
337	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	5
338	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	6
339	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	7
340	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	8
341	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	9
342	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	10
343	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	11
344	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	12

345	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	13
346	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	14
347	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	15
348	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	16
349	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	17
350	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	18
351	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	19
352	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	20
353	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	21
354	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	22
355	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	23
356	R$ 500,00	R$ 28.233,54	R$ 28.733,54	24
357	R$ 500,00	R$ 157.075,91	R$ 157.575,91	1
358	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	2
359	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	3
360	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	4
361	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	5
362	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	6
363	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	7
364	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	8
365	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	9
366	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	10
367	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	11
368	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	12
369	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	13
370	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	14
371	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	15
372	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	16
373	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	17
374	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	18
375	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	19
376	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	20
377	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	21
378	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	22
379	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	23
380	R$ 500,00	R$ 34.368,89	R$ 34.868,89	24
381	R$ 500,00	R$ 188.480,40	R$ 188.980,40	1
382	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	2
383	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	3
384	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	4

385	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	5
386	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	6
387	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	7
388	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	8
389	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	9
390	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	10
391	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	11
392	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	12
393	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	13
394	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	14
395	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	15
396	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	16
397	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	17
398	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	18
399	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	19
400	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	20
401	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	21
402	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	22
403	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	23
404	R$ 500,00	R$ 41.707,53	R$ 42.207,53	24

Podemos ver que o somatório dos retornos no último ciclo de 24 meses é de R$1.147.753,67■

Como já foi dito, não é a única opção ficar fazendo este ciclo de 24 meses, é possível investir em algo que o retorno é maior, porém devem-se assumir os riscos de um investimento, a priori quanto maior o rendimento mais chance de perder dinheiro.

4.5.4 COMENTÁRIOS FINAIS

Chegar ao primeiro milhão é possível para muitos, porém não faz parte da nossa cultura, este trabalho mostra que é possível. Não precisa ser nenhum gênio da matemática para guardar um pouco de dinheiro todo mês, é necessário fazer um controle mais detalhado dos gastos mensais e colocar o investimento de x reais como uma despesa mensal.

CAPÍTULO 5. PROBLEMAS APLICÁVEIS NO ENSINO MÉDIO

Será apresentado neste capítulo, problemas aplicáveis em sala de aula referentes a: sistemas de amortizações de financiamento, financiamento de carro, aposentadoria, juro do cheque especial, investimento em CDB e juro simples.

5.1 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÕES DE FINANCIAMENTOS COM O SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONTINUADA (SAC) E A TABELA PRICE

5.1.1 INTRODUÇÃO:

Os sistemas de amortizações SAC (Sistema de Amortização Continuada) e a tabela PRICE são utilizadas em financiamentos de casas. Neste problema abaixo vamos construir cada tabela simulando um financiamento, verificar algumas particularidades do SAC como progressão aritmética nos valores dos juros e no saldo devedor e fazer algumas comparações direcionadas pelo problema proposto fazendo gráficos e cálculos. Também será simulado a cobrança de um seguro e taxas bancárias a serem acrescidas nas parcelas.

5.1.2 CONTEÚDO

Matemática financeira – Sistemas de amortizações

5.1.3 OBJETIVOS

O objetivo principal desta atividade será fixar o conteúdo de matemática financeira montando uma tabela com os sistemas de amortizações, SAC e PRICE. Fazer comparações e verificar certas equivalências entre as duas.

5.1.4 DURAÇÃO

Duas aulas simples geminadas.

5.1.5 PÚBLICO-ALVO

1º ano do Ensino Médio

5.1.6 PRÉ-REQUISITOS

Progressão aritmética, juros simples, compostos, valor presente e valor futuro, interpretação de gráficos.

5.1.7 PROBLEMA TABELA SAC E PRICE:

1) Supor a compra de um bem no valor de R$10.000,00, utilizando o sistema de amortização continuada (SAC) e a tabela Price

a) Elaborar a tabela SAC e PRICE, de um financiamento de R$10.000,00, sem entrada, a uma taxa de 6% ao ano, com duração de 5 meses;

b) Fazer um único gráfico, representando o sistema SAC e PRICE;

c) Verificar na tabela SAC que as parcelas formam uma progressão aritmética decrescente, determinando a razão (provavelmente a razão será uma aproximação);

d) Se o contratante pretende quitar o saldo devedor após o pagamento da primeira parcela, então é melhor ele escolher o sistema SAC ou PRICE para o seu financiamento?

e) Refaça as tabelas do item a acrescentando uma coluna extra (coluna extra com o titulo: prestação real) somando os custos de R$ 10,00 de seguro obrigatório e R$ 15,00 de custo da administração fornecidos pelo banco, pois, geralmente ao fazer o financiamento de uma casa é cobrado uma tarifa em cada parcela, referente ao seguro do financiamento e referente a administração do banco.

5.1.8 MATERIAL NECESSÁRIO

- Calculadora cientifica, lápis e papel;
- Podendo ser adaptado para trabalhar no Microsoft Excel, ou outro editor de planilhas, para tanto será necessário conhecimento de comandos do editor.

.

5.1.9 SOLUÇÃO:

Item a) Se a taxa efetiva é de 6% ao ano então fazendo a equivalência de taxas temos que a taxa mensal é de aproximadamente 0,4867551% a.m. pois,

$$1+0,06=(1+i)^{12}$$
$$1,06^{\frac{1}{12}}=1+i$$
$$1,004867551-1=i$$
$$0,004867551=i$$

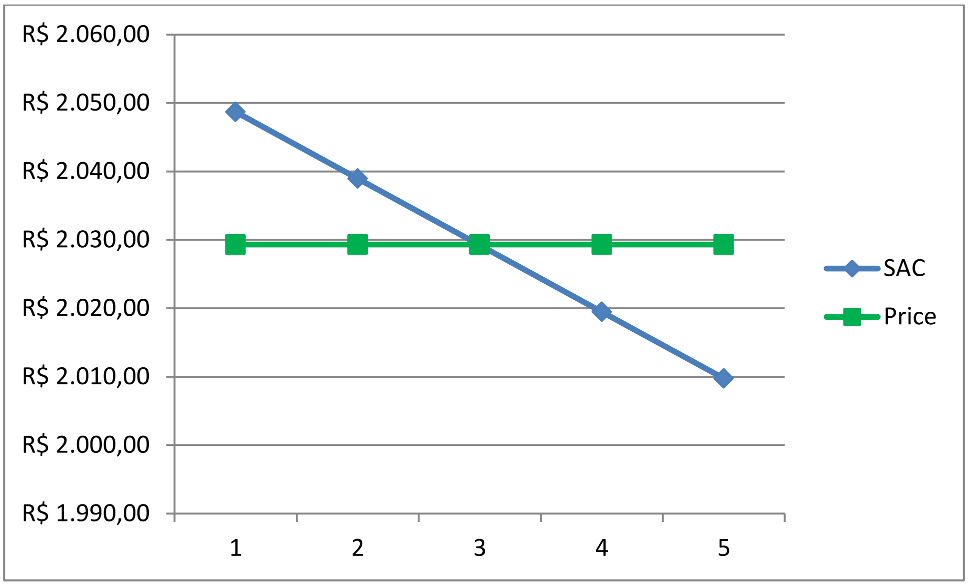
Logo, a tabela SAC fica:

Tabela SAC				
Parcelas	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor
0	...	...	...	R$ 10.000,00
1	R$ 48,68	R$ 2.000,00	R$ 2.048,68	R$ 8.000,00
2	R$ 38,94	R$ 2.000,00	R$ 2.038,94	R$ 6.000,00
3	R$ 29,21	R$ 2.000,00	R$ 2.029,21	R$ 4.000,00
4	R$ 19,47	R$ 2.000,00	R$ 2.019,47	R$ 2.000,00
5	R$ 9,74	R$ 2.000,00	R$ 2.009,74	R$ 0,00

A tabela PRICE fica:

Tabela price				
Parcelas	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor
0	...	...	...	R$ 10.000,00
1	R$ 48,68	R$ 1.980,62	R$ 2.029,30	R$ 8.019,38
2	R$ 39,03	R$ 1.990,27	R$ 2.029,30	R$ 6.029,11
3	R$ 29,35	R$ 1.999,95	R$ 2.029,30	R$ 4.029,16
4	R$ 19,61	R$ 2.009,69	R$ 2.029,30	R$ 2.019,47
5	R$ 9,83	R$ 2.019,47	R$ 2.029,30	R$ 0,00

Item b) Utilizando as informações das tabelas acima, podemos fazer:



Item c) De fato a sequência (2.048,68 ; 2.038,94 ; 2.029,21 ; 2.019,47 ; 2.009,74), forma uma PA de razão aproximada a 9,74, pois:

$$2048,68 - 2038,94 = 9,74$$
$$2038,94 - 2029,21 = 9,73$$
$$2029,21 - 2019,47 = 9,74$$
$$2019,47 - 2009,74 = 9,73$$

Item d) Basta observar que se ele escolher o sistema SAC ele estará pagando R$10.000,00 no tempo zero. Veja:

$$A = \frac{2048,68}{(1+0,004867551)^1} + \frac{8000,00}{(1+0,004867551)^1} = 10.000,00$$

Se ele escolher o sistema PRICE ele também estará pagando R$10.000,00 no tempo zero. Veja:

$$A = \frac{2029,30}{(1+0,004867551)^1} + \frac{8019,38}{(1+0,004867551)^1} = 10.000,00$$

Item e) Somando R$10,00 de seguro e R$15,00 de taxa de administração em cada parcela na tabela SAC teremos:

Tabela SAC					
Parcelas	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor	Prestação real
0	...	...	...	R$ 10.000,00	...
1	R$ 48,68	R$ 2.000,00	R$ 2.048,68	R$ 8.000,00	R$ 2.073,68
2	R$ 38,94	R$ 2.000,00	R$ 2.038,94	R$ 6.000,00	R$ 2.063,94
3	R$ 29,21	R$ 2.000,00	R$ 2.029,21	R$ 4.000,00	R$ 2.054,21
4	R$ 19,47	R$ 2.000,00	R$ 2.019,47	R$ 2.000,00	R$ 2.044,47
5	R$ 9,74	R$ 2.000,00	R$ 2.009,74	R$ 0,00	R$ 2.034,74

Somando R$10,00 de seguro e R$15,00 de taxa de administração em cada parcela na tabela PRICE teremos:

Tabela PRICE					
Parcelas	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor	Prestação real
0	...	...	...	R$ 10.000,00	...
1	R$ 48,68	R$ 1.980,62	R$ 2.029,30	R$ 8.019,38	R$ 2.054,30
2	R$ 39,03	R$ 1.990,27	R$ 2.029,30	R$ 6.029,11	R$ 2.054,30
3	R$ 29,35	R$ 1.999,95	R$ 2.029,30	R$ 4.029,16	R$ 2.054,30
4	R$ 19,61	R$ 2.009,69	R$ 2.029,30	R$ 2.019,47	R$ 2.054,30
5	R$ 9,83	R$ 2.019,47	R$ 2.029,30	R$ 0,00	R$ 2.054,30

5.1.10 COMENTÁRIOS FINAIS

Neste problema acima utilizamos valores simbólicos, pois no caso de financiamento de casas os valores são altos e não convém num primeiro momento, é importante notar que o item f serve para conseguir o valor real da parcela em um financiamento, pois os bancos sempre cobram seguros e taxas de administração.

O professor pode propor aos alunos após este estudo o seguinte desafio: fazer a simulação de compra de casa em algum banco, e fazer a conferência dos valores.

5.2 FINANCIAMENTO DE CARRO

5.2.1 INTRODUÇÃO

O financiamento de carro é uma opção de compra que o brasileiro acostumou-se a fazer. Infelizmente na maioria das vezes ele nem sabe que está pagando a TAC (tarifa de abertura de crédito) e o IOF, geralmente acrescentado no valor do bem. Neste problema será possível efetuar todas as contas detalhadamente. O método de cálculo do IOF aqui apresentado é a utilização de cada parcela no valor presente, a saber, existe outras formas para o cálculo, vamos utilizar a forma de cálculo no valor presente pois estamos considerando somente a utilização de lápis, papel e uma calculadora cientifica.

5.2.2 CONTEÚDO

Matemática financeira

5.2.3 OBJETIVOS

O objetivo principal desta atividade é fixar o conteúdo de matemática financeira e capacitar o aluno a detalhar, montar, fazer, ensinar, como é elaborada a parcela de um financiamento de carro. Bem como mostrar o que está embutido no valor da parcela.

5.2.4 DURAÇÃO

Duas aulas simples geminadas.

5.2.5 PÚBLICO-ALVO

1º ano do Ensino Médio

5.2.6 PRÉ-REQUISITOS

Porcentagem, fórmula da prestação fixa.

5.2.7 PROBLEMA DO FINANCIAMENTO:

1) Suponha o financiamento de um carro de R$30.000,00, sem entrada, a uma taxa de 1,57% a.m. mais taxa de abertura de crédito (TAC) de R$1.000,00, em 6 parcelas. Sendo a data da assinatura do contrato em 01/02/2013.

a) Determine o valor p da parcela sem o IOF;

b) Faça uma tabela com as colunas representando respectivamente: o número de parcelas, data do vencimento, dias corridos de um mês a outro, dias acumulados, valor da parcela e valor presente de cada parcela no tempo zero;

c) Utilize a tabela anterior e calcule o IOF, $p \times (0{,}0038 + 0{,}000041 \times mínimo\{dias\ acumulados, 365\})$, determine o IOF total.

d) Calcule o valor real da parcela, assim deve-se incluir o valor do IOF, no financiamento.

5.2.8 MATERIAL NECESSÁRIO

- Lápis, papel, calendário;
- Calculadora cientifica.

5.2.9 SOLUÇÃO:

Item a) Basta utilizar a fórmula da prestação, com $A = 31.000$ (somatório do valor do carro com a TAC), $i = 0{,}0157$ e $n = 6$, assim:

$$p = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$p = \frac{31000 \times 0,0157}{1-(1+0,0157)^{-6}}$$

$$p = \frac{486,70}{1-0,910766997}$$

$$p = \frac{486,70}{0,089233003}$$

$$p = 5454,26$$

Logo a parcela sem o IOF é R$5.454,26

Item b)

Número de parcela	Vencimento	Dias corridos	Dias acumulados	Valor da parcela	Valor presente
0	01/02/2013	...	...	...	
1	01/03/2013	28	28	R$ 5.454,26	R$ 5.369,95
2	01/04/2013	31	59	R$ 5.454,26	R$ 5.286,95
3	01/05/2013	30	89	R$ 5.454,26	R$ 5.205,22
4	01/06/2013	31	120	R$ 5.454,26	R$ 5.124,77
5	01/07/2013	30	150	R$ 5.454,26	R$ 5.045,55
6	01/08/2013	31	181	R$ 5.454,26	R$ 4.967,56

Item c)

Número de parcelas	Vencimento	Dias corridos	Dias acumulados	Valor da parcela	Valor presente	IOF
0	01/02/2013	...	...	...		
1	01/03/2013	28	28	R$ 5.454,26	R$ 5.369,95	R$ 26,57
2	01/04/2013	31	59	R$ 5.454,26	R$ 5.286,95	R$ 32,88
3	01/05/2013	30	89	R$ 5.454,26	R$ 5.205,22	R$ 38,77
4	01/06/2013	31	120	R$ 5.454,26	R$ 5.124,77	R$ 44,69
5	01/07/2013	30	150	R$ 5.454,26	R$ 5.045,55	R$ 50,20
6	01/08/2013	31	181	R$ 5.454,26	R$ 4.967,56	R$ 55,74
						R$ 248,86

Item d) Para calcular o valor real devemos incluir R$248,86 reais no financiamento, assim A passa a ser R$31.248,86, logo,

$$p = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$p = \frac{31248,86 \times 0,0157}{1-(1+0,0157)^{-6}}$$

$$p = \frac{490,60}{1-0,910766997}$$

$$p = \frac{490,60}{0,089233003}$$

$$p = 5498,04$$

5.2.10 COMENTÁRIOS FINAIS

Podemos propor como tarefa a mesma atividade trocando alguns valores, a fim de fixar o conteúdo pois o cálculo do IOF, é algo que com certeza os alunos do ensino médio não estão familiarizados.

Também propomos ao final desta atividade separar a turma em grupos e propor um desafio real: fazer uma simulação de compra de um carro em alguma concessionária, e verificar se os valores cobrados.

5.3 CÁLCULO DO SALÁRIO DO BENEFICIO

5.3.1 INTRODUÇÃO

O cálculo do salário do benéfico, ou seja, o salário da aposentadoria, deveria ser de grande interesse para o trabalhador brasileiro, visto que o seu futuro pode depender dele.

Neste tópico tratamos somente da aposentadoria por tempo de contribuição, existem outras modalidades de aposentadoria, que podem e devem ser pesquisadas na página da previdência social do Brasil. O problema proposto abaixo, serve como um modelo, ou melhor, um exemplo para possíveis casos reais.

5.3.2 CONTEÚDO

Porcentagem

5.3.3 OBJETIVOS

Capacitar o leitor a calcular o salário do beneficio, da aposentadoria por tempo de serviço. Bem como divulgar como é feito o cálculo pela previdência social, e mostrar ao leitor o que ele pode estar fazendo para ter o valor benefício, um pouco mais alto.

5.3.4 DURAÇÃO

Duas aulas simples geminadas.

5.3.5 PÚBLICO ALVO

1º ano do Ensino Médio.

5.3.6 PRÉ-REQUISITOS

Aritmética básica e álgebra.

5.3.7 PROBLEMA - SALÁRIO DO BENEFICIO:

1) Supondo que a média dos 80% maiores salários de contribuição de um trabalhador seja de R$ 2.000,00 e que este trabalhador teve 35 anos de contribuição e a expectativa de vida no Brasil é de 74 anos, e a idade dele é 60 anos.
a) Determine o fator previdenciário, em seguida o salário do benefício.
b) O que este trabalhador precisa fazer para melhorar o salário do beneficio? Faça uma sugestão para que este trabalhador tenha uma fator previdenciário maior do que ou igual a 1 (um)

5.3.8 MATERIAL NECESSÁRIO

- Lápis e papel;
- Calculadora.

5.3.9 O EXPERIMENTO

É interessante refazer os cálculos com dados reais fornecido pela previdência, para um segurado que está se aposentando por tempo de contribuição.

5.3.10 SOLUÇÃO:

Item a) Basta utilizar a fórmula do fator previdenciário $f = \frac{Tc \times a}{Es} \times \left(1 + \frac{Id + Tc \times a}{100}\right)$ com $Tc = 35\ anos,\ a = 0{,}31,\ Es = 8\ e\ Id =\ 60$, assim:

$$f = \frac{35 \times 0{,}31}{19} \times \left(1 + \frac{55 + 35 \times 0{,}31}{100}\right)$$

$$f = 0{,}947091$$

Como $M = R\$2.000{,}00$, segue que o $Sb = 2000 \times 0{,}947091 = 1.894{,}18$, logo o salário do benefício será de R$ 1.894,18.

Item b) Uma sugestão para que $f \geq 1$, é que trabalhe (contribua) mais um ano, assim a $Id = 56$, $Es = 18$, e o tempo de contribuição será de $36\ anos$, assim o $f = 1{,}036392$

5.3.11 COMENTÁRIOS FINAIS

Podemos propor como tarefa a mesma atividade trocando alguns valores, a fim de fixar o conteúdo pois o cálculo do fator previdenciário, é algo que com certeza os alunos do ensino médio também não estão familiarizados.

É interessante propor aos alunos do ensino médio uma pesquisa direcionada como por exemplo: a aposentadoria por tempo de contribuição, em relação aos professores do ensino médio e do ensino fundamental (pois o professor tem alguns benefícios), e a diferença entre o tempo de contribuição do homem e da mulher.

5.4 JUROS DO CHEQUE ESPECIAL

5.4.1 INTRODUÇÃO

Neste problema vamos utilizar o método fornecido por um banco privado. Não necessariamente os outros bancos são da mesma forma.

5.4.2 CONTEÚDO

Porcentagem, juros simples, IOF

5.4.3 OBJETIVOS

Fixar o conceito de matemática financeira. Ensinar o aluno do ensino médio como é feito o juros do cheque especial. Também servir de exemplos para correntistas interessados em conhecer este cálculo.

5.4.4 DURAÇÃO

Duas aulas simples geminadas.

5.4.5 PÚBLICO-ALVO

1º ano do Ensino Médio.

5.4.6 PRÉ-REQUISITOS

Ensino fundamental

5.4.7 PROBLEMA – CALCULAR O JUROS DO CHEQUE ESPECIAL E IOF:

Considere a tabela abaixo representando um extrato bancário, fique atento aos dias uteis no mês em questão, sabendo que neste mês não houve greve, ou problemas que influencie nos dias uteis. A taxa de juros do cheque especial neste banco é de 4,27% a.m.

Data		Crédito	Débito	Saldo
01/04/2013	Segunda			R$ 1.000,00
02/04/2013	Terça		R$ 500,00	R$ 500,00
03/04/2013	Quarta		R$ 500,00	R$ 0,00
04/04/2013	Quinta		R$ 100,00	-R$ 100,00
05/04/2013	Sexta		R$ 100,00	-R$ 200,00
06/04/2013	Sábado			
07/04/2013	Domingo			
08/04/2013	Segunda		R$ 100,00	-R$ 300,00
09/04/2013	Terça		R$ 100,00	-R$ 400,00
10/04/2013	Quarta		R$ 100,00	-R$ 500,00
11/04/2013	Quinta	R$ 500,00		R$ 0,00
12/04/2013	Sexta			
13/04/2013	Sábado			
14/04/2013	Domingo			
15/04/2013	Segunda			R$ 0,00
16/04/2013	Terça			R$ 0,00
17/04/2013	Quarta			R$ 0,00
18/04/2013	Quinta			R$ 0,00
19/04/2013	Sexta			R$ 0,00
20/04/2013	Sábado			
21/04/2013	Domingo			
22/04/2013	Segunda			R$ 0,00
23/04/2013	Terça			R$ 0,00
24/04/2013	Quarta			R$ 0,00
25/04/2013	Quinta			R$ 0,00
26/04/2013	Sexta			R$ 0,00
27/04/2013	Sábado			
28/04/2013	Domingo			
29/04/2013	Segunda		R$ 200,00	-R$ 200,00
30/04/2013	Terça	R$ 200,00		R$ 0,00

a) Calcule o juros do cheque especial, em seguida o IOF;

5.4.8 MATERIAL NECESSÁRIO

- Lápis e papel
- Calculadora

5.4.9 SOLUÇÃO:

Item a) Criando quatro colunas adicionais,(saldo devedor em dia útil, saldo devedor diário, acréscimo no saldo devedor em relação ao dia anterior e dias uteis) na tabela acima, fica:

Abril								
Data	Dia	Crédito	Débito	Saldo	Saldo devedor em dia útil	Saldo devedor diário	Acréscimo no saldo devedor	Dias
1	seg.			R$ 1.000,00	R$ 0,00		R$ 0,00	1
2	ter		R$500,00	R$ 500,00	R$ 0,00		R$ 0,00	2
3	que		R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 0,00		R$ 0,00	3
4	que		R$ 100,00	-R$ 100,00	-R$ 100,00	-R$ 100,00	R$ 100,00	4
5	sex		R$ 100,00	-R$ 200,00	-R$ 200,00	-R$ 200,00	R$ 100,00	5
6	sáb			-R$ 200,00		-R$ 200,00	R$ 0,00	
7	dom			-R$ 200,00		-R$ 200,00	R$ 0,00	
8	seg.		R$ 100,00	-R$ 300,00	-R$ 300,00	-R$ 300,00	R$ 100,00	6
9	ter		R$ 100,00	-R$ 400,00	-R$ 400,00	-R$ 400,00	R$ 100,00	7
10	que		R$ 100,00	-R$ 500,00	-R$ 500,00	-R$ 500,00	R$ 100,00	8
11	que	R$500,00		R$ 0,00				9
12	sex			R$ 0,00				10
13	sab.			R$ 0,00				
14	dom			R$ 0,00				
15	seg.			R$ 0,00				11
16	ter			R$ 0,00				12
17	que			R$ 0,00				13
18	que			R$ 0,00				14
19	sex			R$ 0,00				15
20	sab.			R$ 0,00				
21	dom			R$ 0,00				
22	seg.			R$ 0,00				16
23	ter			R$ 0,00				17
24	que			R$ 0,00				18
25	que			R$ 0,00				19

26	sex			R$ 0,00				20
27	sab.			R$ 0,00				
28	dom			R$ 0,00				
29	seg.		R$ 200,00	-R$ 200,00	-R$ 200,00	-R$ 200,00	R$ 0,00	21
30	ter	R$ 200,00		R$ 0,00				22
				Total	R$ 1.700,00	R$ 2.100,00	R$ 500,00	

Fazendo $\frac{1700}{22} = 77{,}27$ de média por dia, e $77{,}27 \times 4{,}27\% = 3{,}29$ será o juros do cheque especial.

Agora fazendo o cálculo do IOF em duas parcelas temos IOF$=0{,}0038 \times 500 + 0{,}000082 \times 2100 = 2{,}07$

5.4.10 COMENTÁRIOS FINAIS

O intuito desta atividade é o de introduzir aos alunos ‘’futuros correntistas’’ conhecimentos sobre como funciona o juro do cheque especial. É importante lembrar que o cheque especial é um crédito muito caro, apesar de que o juro do cartão de crédito geralmente é maior, e deve ser usado por um curto período de tempo e em extrema necessidade.

Podemos propor uma atividade com o mesmo extrato apresentado no problema, porém mudando o valor da taxa de juros do cheque especial.

5.5 PROBLEMA DO CDB

5.5.1 INTRODUÇÃO

Por meio do problema a seguir, iremos aprender um pouco mais sobre esta forma de investimento que é o CDB (Certificado de Deposito Bancário). CDB é um titulo ‘’comprado’’ no banco que irá ter um certo rendimento após um determinado período de tempo. Este rendimento será calculado sobre o CDI (Certificado de Deposito Interbancário). A taxa de um CDI é taxa de empréstimo realizada entre os bancos, quando um banco empresta dinheiro a outro banco. Por conta disto, geralmente o CDB rende menos do que o CDI.

5.5.2 CONTEÚDO

Porcentagem, juros simples e compostos

5.5.3 OBJETIVOS

Fixar os conceitos de matemática financeira. Capacitar o aluno a manipular tais cálculos. Começar uma educação financeira e dar ideias de investimentos. Incentivar a economia e dar uma opção melhor do que a poupança para o investimento.

5.5.4 DURAÇÃO

Duas aulas simples geminadas.

5.5.5 PÚBLICO-ALVO

1º ano do Ensino Médio

5.5.6 PRÉ-REQUISITOS

Ensino fundamental

5.5.7 PROBLEMA – QUANTO POSSO GANHAR COM O CDB:

1) Suponha que você tenha R$10.000,00 para investir em um CDB em um determinado banco e que este CDB vai render em torno de 95% do CDI, sabendo que o CDI esperado é de 12% a.a., e que não temos taxas de administração do banco.

a) Suponha o resgate deste dinheiro em quatro épocas diferentes, sendo elas: 180 dias, 360 dias , 720 dias e 1080 dias.

b) É possível uma poupança superar o CDB em um determinado período, supondo que a poupança está rendendo mensalmente 0,5%a.m.?

5.5.8 MATERIAL NECESSÁRIO

- Lápis, papel
- Calculadora Cientifica

5.5.10 SOLUÇÃO:

Item a)

CDB
95% do CDI
Taxa do CDI é 12%a.a.

Para 180 dias				
Capital	12% a.a.	95% de 12%	IR p/ 180 dias	Montante líquido
R$ 10.000,00	R$ 583,01	R$ 553,85	R$ 124,62	R$ 10.429,24

Para 360 dias				
Capital	12% a.a.	95% de 12%	IR p/ 360 dias	Montante líquido
R$ 10.000,00	R$1.200,00	R$ 1.140,00	R$ 228,00	R$ 10.912,00

Para 720 dias				
Capital	12% a.a.	95% de 12%	IR p/ 720 dias	Montante líquido
R$ 10.000,00	R$2.544,00	R$ 2.416,80	R$ 422,94	R$ 11.993,86

Para 1080 dias				
Capital	12% a.a.	95% de 12%	IR p/ 1080 dias	Montante líquido
R$ 10.000,00	R$4.049,28	R$ 3.846,82	R$ 577,02	R$ 13.269,79

Item b)

Se o rendimento mensal da poupança é de 0,5% a.m. então pela equivalência de taxas temos que $i = 6\%\ a.a.$, pois $1 + I = (1 + 0{,}5\%)^{12} \leftrightarrow I \cong 6{,}17\%\ a.a$

Basta agora comparar as taxas efetivas anuais em cada caso abaixo:

Para 180 dias, temos:

$$10429{,}24 = 10000(1+i)^{1/2}$$

$$\frac{10429{,}24}{10000} = (1+i)^{1/2}$$

$$1{,}042924^2 = 1 + i$$

$$1{,}08769047 - 1 = i$$

$$0{,}08769047 = i$$

Para 360 dias, temos:

$$10912{,}00 = 10000(1+i)^1$$

$$\frac{10912{,}00}{10000} = (1+i)^1$$

$$1{,}0912^1 = 1 + i$$

$$1{,}0912 - 1 = i$$

$$0{,}0912 = i$$

Para 720 dias, temos:

$$11993{,}86 = 10000(1+i)^2$$

$$\frac{11993{,}86}{10000} = (1+i)^2$$

$$1{,}199386^{1/2} = 1 + i$$

$$1{,}095164828 - 1 = i$$

$$0{,}095164828 = i$$

Para 1080 dias, temos:

$$13269{,}79 = 10000(1+i)^3$$

$$\frac{1{,}326979}{10000} = (1+i)^3$$

$$1{,}326979^{1/3} = 1+i$$

$$1{,}098891169 - 1 = i$$

$$0{,}098891169 = i$$

Todas estas taxas são maiores do que a taxa anual da poupança.

5.5.11 COMENTÁRIOS FINAIS

Ao final desta atividade propomos como tarefa, a mesma atividade só que mudando o valor aplicado e a porcentagem com que ele irá render. Assim estará fixando o cálculo e aprendendo mais sobre investimento.

O professor pode propor uma pesquisa direcionada referente as formas de investimento disponíveis no mercado financeiro nos dias atuais. Por exemplo: o que é uma poupança? Como é seu rendimento? O que é fundo de renda fixa? Será que a renda é realmente fixa? Quanto o banco cobra para tais transações?

5.6 JUROS SIMPLES

5.6.1 INTRODUÇÃO

Neste problema abaixo, podemos ver a diferença de juros simples e compostos, e como os bancos cobram um boleto que atrasou um certo período de tempo.

5.6.2 CONTEÚDO

Juros simples e juros compostos

5.6.3 OBJETIVOS

Fixar os conceitos de matemática financeira. Mostrar a diferença de aplicação do juros simples e compostos, suas diferenças em períodos menores do que 1, a igualdade em períodos igual a 1, e que em períodos maiores do que 1 o juros compostos superam os simples.

5.6.4 DURAÇÃO

Duas aulas simples geminadas.

5.6.5 PÚBLICO-ALVO

1º ano do Ensino Médio

5.6.6 PRÉ-REQUISITOS

Ensino fundamental, juros simples e juros compostos

5.6.7 PROBLEMA – OS JUROS SIMPLES E COMPOSTOS EM UM BOLETO ATRASADO

1)Na prática não existe investimento capitalizado em juros simples, há de ressalvar que em períodos igual a 1 o juros compostos e juros simples igualam seus rendimentos, e em períodos menores do que 1 o juros simples supera o juros compostos. Se você atrasar uma conta por 6 dias, e este boleto tem taxa de 10% a.m. por atraso, então o banco, cobra 0,333...% ($\frac{10\%}{30}$) ao dia e não faz a equivalência de taxas resultando em 0.3182058% ao dia.

a)Suponha que você tenha um boleto de R$100,00 e atrasou o pagamento por 6 dias, calcule o valor (montante) a ser pago utilizando juros simples de 0,333...% ao dia e depois calcule o valor (montante) a ser pago utilizando juros compostos.

5.6.8 MATERIAL NECESSÁRIO

- Lápis e papel
- Calculadora cientifica

5.6.9 O EXPERIMENTO

Verificar quais foram os juros cobrados em um boleto bancário que foi pago com atraso

5.6.10 SOLUÇÃO:

Item a)

Juros simples

$$M = c + j$$

$$M = c + cit$$

$$M = 100 + 100 \times \frac{0,10}{30} \times 6$$

$$M = 102$$

Logo o valor a ser pago utilizando juros simples é de R$102,00.

Juros compostos

$$M = C(1+i)^t$$

$$M = 100(1 + 0,003182058)^6$$

$$M = 101,92$$

Logo o valor a ser pago utilizando juros compostos, é de 101,92, é claro que foi feita a equivalência de taxa de mês para dia.

5.6.11 COMENTÁRIOS FINAIS

Ao final desta atividade propomos como tarefa, a mesma atividade só que mudando o valor do boleto e a porcentagem dos juros cobrados.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi direcionado aos alunos e professores do ensino médio, visando um estudo profundo e usual referente a matemática financeira nos dias atuais, visto que os livros didáticos raramente abordam os problemas aqui apresentados.

Os problemas e temas foram escolhidos por fazerem parte do cotidiano, por serem considerados intrigantes e curiosos, a saber eles são: cálculo dos juros do cheque especial, o cálculo do IOF do financiamento de um carro, financiamento de carro, consórcio, financiamento de casa pelo sistema SAC (Sistema de Amortização Continuada) e sistema Price, cálculo do beneficio da aposentadoria, e por fim uma estratégia para juntar R$1.000.000,00.

Realizamos pesquisas de campo em concessionárias de carros e bancos da cidade de Campo Grande e também em sítios de alta credibilidade como: Banco Central do Brasil, Caixa Econômica Federal, Banco do Brasil, Banco Ítau, e Previdência Social do Brasil entre outros.

Fizemos uma revisão no conteúdo de progressão aritmética, progressão geométrica e matemática financeira, que foi cuidadosamente escolhido de maneira que não ultrapassasse a necessidade para resolver os problemas propostos. Observamos que é possível com algumas definições e teoremas construir uma bela e útil matemática para auxiliar na tomada de decisões no cotidiano.

Os dados dos problemas reais aqui apresentados foram retirados de contratos de financiamentos, simulações em sites bancários, e até mesmo em escritórios de contabilidade, tudo isto para trazer um estimulo a mais no estudo de progressões aritméticas, geométricas e matemática financeira.

No último capítulo propomos problemas aplicáveis em sala de aula. Eles estão apresentados de maneira um pouco mais didática, visando a fixação e aprendizagem do conteúdo de progressões aritméticas, geométricas e matemática financeira pelo aluno do ensino médio, mas de maneira nenhuma são problemas que fogem da realidade, novamente visando o interesse e a integração do aluno com o conteúdo.

Esperamos ter contribuído de alguma forma a todos aqueles que dispuseram de tempo e paciência para a leitura desse trabalho.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYER, Carl B. **História da Matemática.** 2ª ed. São Paulo, Edgar Blucher: 2003

[2] COELHO, Sílvio Teixeira. **Matemática Financeira e Analise de Investimento.** São Paulo: Ed. Nacional: 1996

[3] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio,** Coleção do Professor de Matemática. 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006, 2 v.

[4] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo.** 5ª ed. São Paulo, LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.: 2001

[5] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. **Matemática Ciência e Aplicações, 1.** 6ª ed. São Paulo: Ed. Saraiva: 2010

[6] PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva.** 1ª ed. São Paulo: Ed. Moderna:2009

[7] LIMA, Elon Lages. **Logaritmos.** 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009

[8] BANCO ITAÚ, **Como identifico e calculo no extrato o valor cobrado pelo uso do meu limite?** Disponível em < http://www.itau.com.br/conta-corrente/cheque-especial/ajuda/ > Acesso em 21/01/2013

[9] BANCO DO BRASIL, **Simulação de planos Brasilprev.** Disponível em <http://www.brasilprev.com.br/realizeseusprojetosdevida/> Acesso em 13/03/2013

[10] CAIXA ECONÔMICA FEDERAL, **Fundo de renda fixa.** Disponível em <http://www11.caixa.gov.br/portal/public/investidor/investidor/invista/tipos_de_investimento/fundos_de_investimento> Acesso em 13/03/2013

[11] CAPEGEMINI, **Número de milionários cresce 6,2% no país.** Disponível em <http://www.capgemini.com.br/portal/home.jsp?hl=pt&id=1042> Acesso em 26/02/2013

[12]ITAÚ, **Juro do cheque especial.** Disponível em < http://www.itau.com.br/conta-corrente/cheque-especial/ajuda/> Acesso em 21/01/2013

[13] PORTAL BRASIL, **Tipos de previdência.** Disponível em <http://www.brasil.gov.br/sobre/economia/previdencia > Acesso em 13/03/2013

[14] PORTAL BRASIL – POUPANÇA, **Poupança tem novas regras de remuneração.** Disponível em <http://www.brasil.gov.br/noticias/arquivos/2012/08/08/poupanca-tem-novas-regras-de-remuneracao> Acesso em 13/03/2013

[15] PORTAL G1, **Revisão na expectativa de vida vai mudar valores de novas aposentadorias.** Disponível em <http://g1.globo.com/economia/seu-dinheiro/noticia/2012/11/revisao-na-expectativa-de-vida-vai-mudar-valor-de-novas-aposentadorias.html>Acesso em 13/03/2013

[16] PREVIDÊNCIA SOCIAL DO BRASIL, **O que é a aposentadoria por tempo de contribuição?** Disponível em <http://www.previdencia.gov.br/conteudoDinamico.php?id=1296> Acesso em 30/03/2013

[17] PREVIDENCIA SOCIAL (ARQUIVO EM PDF), **Fator previdenciário.** Disponível em <http://www.previdencia.gov.br/arquivos/office/3_081014-104625-913.pdf> Acesso em 30/03/2013

[18] RECEITA FEDERAL, **Alíquotas do imposto sobre Operações de Crédito, Câmbio e Seguros – IOF.** Disponível em <http://www.receita.fazenda.gov.br/aliquotas/impcresegcamb.htm> Acesso em 30/03/2013

[19] BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Taxas.** Disponível em <http://www.bcb.gov.br/pt-br/paginas/default.aspx> Acesso em 30/03/2013