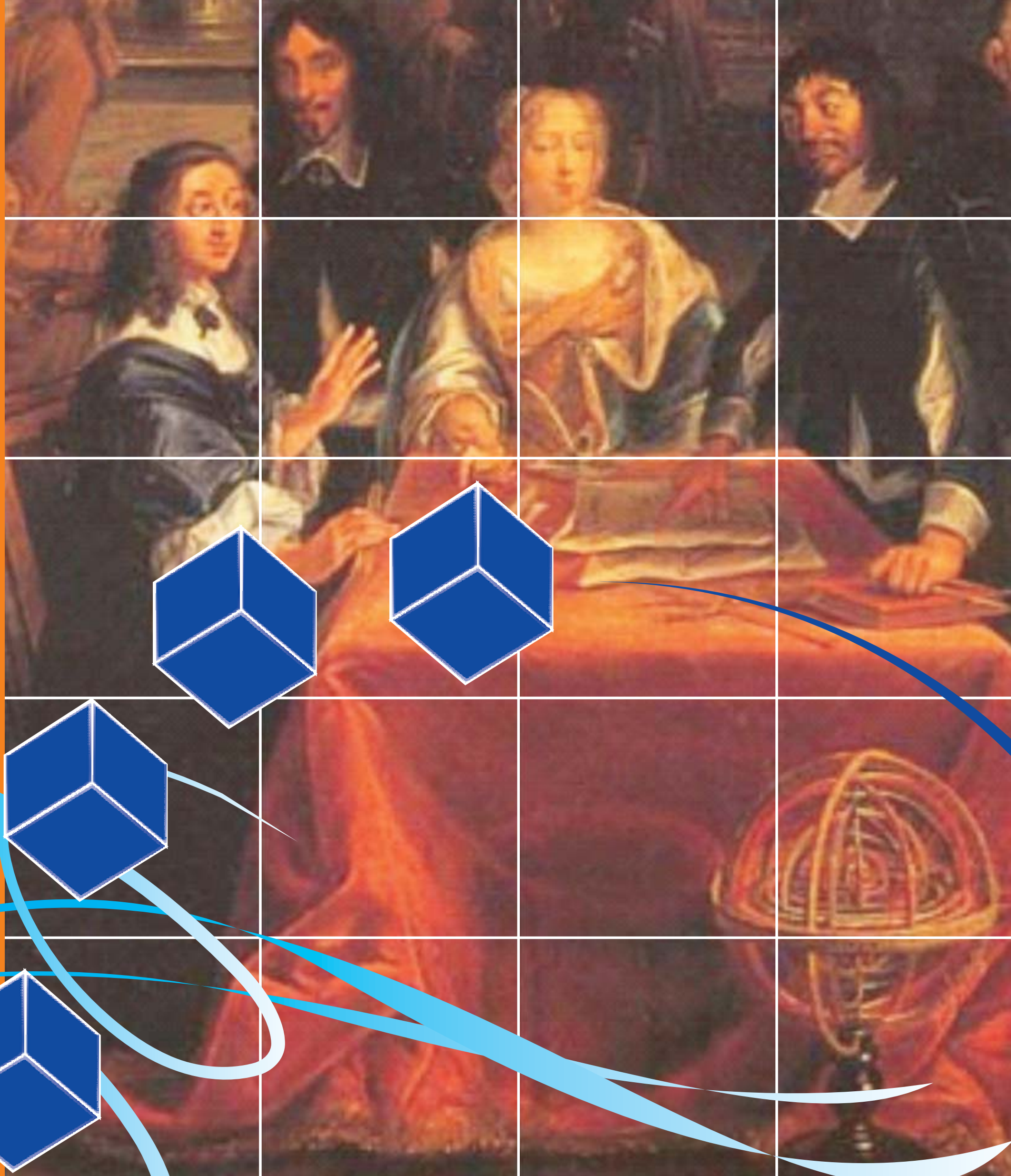
MATEMÁTICA

LICENCIATURA



Geometria Analítica Plana

Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

EDITORA UFMS

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

Módulo 1

COORDENADAS CARTESIANAS E ESTUDO DA RETA

Módulo 2

ESTUDO DAS CÔNICAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

Campo Grande, MS - 2008

EDITORA UFMS

Obra aprovada pelo Conselho Editorial da UFMS - Resolução nº 48/08

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Coordenadoria de Biblioteca Central – UFMS, Campo Grande, MS, Brasil)

C837g Costa, Heloisa Laura Queiroz Gonçalves da.
Geometria analítica plana : disciplina / Heloisa Laura Queiroz Gonçalves da Costa, Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli. – Campo Grande, MS : Ed. UFMS, 2008.
109 p. : il. ; 30 cm.

ISBN 978-85-7613-174-8
Material de apoio às atividades didáticas do curso de licenciatura em Matemática/CEAD/UFMS.

1. Geometria analítica plana. I. Mongelli, Magda Cristina Junqueira Godinho. II. Título.

CDD (22) 516.32

APRESENTAÇÃO

Este livro foi concebido para que você adquira os fundamentos necessários de Geometria Analítica Plana para os seus estudos posteriores, relativos à sua formação. O livro foi planejado para que você tenha uma formação de base sólida. Aconselhamos estudá-lo utilizando dois tipos de leitura: uma superficial ou de reconhecimento e outra profunda ou detalhada.

A leitura superficial deverá ser a da leitura das seções todas de uma vez e sem a preocupação de uma compreensão detalhada, mas apenas com o objetivo de que você tenha uma visão do conjunto das idéias em questão.

Tendo então obtido a idéia geral da unidade na qual está trabalhando, você deverá fazer leitura profunda ou detalhada, experimente reproduzir o conteúdo da unidade, em detalhes, mas não de forma decorada.

Faça isso e você não se arrependerá do trabalho realizado. Acreditamos que sob a orientação dessas duas abordagens seu aprendizado ocorrerá de forma maximizada.

O livro é composto de dois Módulos subdivididos em seções e subseções:

Módulo I - Coordenadas Cartesianas e estudo da reta;
- 1 - Introdução (Breve Histórico)
- 2 - Geometria Analítica no Cotidiano.
- 3 - Sistemas de Coordenadas
  - 3.1 - A reta Numerada
  - 3.2 - O Plano Cartesiano
  - 3.3 - Curiosidade
- 4 - Retas no Plano Cartesiano
- 5 - Interpretação Geométrica de uma Equação, uma Inequação ou de Sistemas Lineares em duas Variáveis

Módulo II - Estudo das Cônicas em Coordenadas Cartesianas
- 1 - Cônicas
  - 1.1 - Seções Cônicas
  - 1.2 - Circunferência
  - 1.3 - Elipse
  - 1.4 - Parábola
  - 1.5 - Hipérbole de duas Folhas

2 - Interpretação Geométrica de uma Equação, uma Inequação ou de Sistemas de Segundo Grau em duas Variáveis

3 - Curiosidades: Alguns Aparatos usados na Construção Manual de Cônicas

3.1 - Construindo Cônicas com Dobraduras de Papel

3.2 - Construindo Cônicas com Madeira, Lápis, Régua, Pregos e Barbante.

O estudo da Seção 3 (Sistemas de Coordenadas) do Módulo I é de fundamental importância para a compreensão das demais seções do texto. Nela estão os fundamentos matemáticos básicos que estruturam todas as demais idéias do livro e também da Geometria Analítica Plana.

Em cada Módulo, cada seção foi organizada de forma a apresentar as deduções de fórmulas e resultados da Geometria Analítica Plana, algumas delas baseadas em resultados conhecidos da Geometria Euclidiana elementar. No entanto, devido aos objetivos programáticos dessa disciplina, algumas demonstrações foram omitidas, sem prejuízos ao seu aprendizado, e serão estudadas em disciplinas localizadas em série posteriores do seu Curso de Licenciatura em Matemática.

Esperamos que você seja despertado para a importância das demonstrações de resultados que usualmente são simplesmente apresentados no Ensino Médio. Lembre sempre que sua formação, como futuro professor, deve ter dois aspectos; *saber fazer* e *saber ensinar*.

Esse texto possui vários exercícios resolvidos, de forma comentada, sobre os diferentes conteúdos abordados. A finalidade deles é apresentar um método de resolução, das diferentes questões que são propostas. Isso não impede que você desenvolva outras modalidades de resoluções. O importante é que o seu método seja logicamente consistente. Após a certeza da compreensão dos conceitos, sugerimos que você refaça os exercícios resolvidos apresentados sem olhar sua solução, para verificar se os conceitos e procedimentos foram assimilados, para então partir para resolução de exercícios propostos.

Algumas curiosidades são citadas no texto com intuito de complementar sua formação como professor de Matemática.

Sugerimos que você consulte algumas das referências sugeridas como leitura alternativa e fonte de exercícios complementares, referentes aos conteúdos em questão. Nessas referências você encontrará outras visões sobre os mesmos assuntos tratados neste texto e, em muitas delas, você encontrará informações sobre os vários desdobramentos desses conteúdos.

Desejamos a vocês sucesso em seus estudos.

Profª: MSc. Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa
(Coordenadora da disciplina)

Profª: MSc. Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

SUMÁRIO

MÓDULO 1

COORDENADAS CARTESIANAS E ESTUDO DA RETA

MÓDULO 2

ESTUDO DAS CÔNICAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

Sobre as Autoras

Heloisa Laura Queiroz Gonçalves da Costa é professora de dedicação exclusiva do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), e é atualmente coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática no campus de Campo Grande da UFMS. É Bacharel, Licenciada e Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Em Mato Grosso do Sul tem trabalhado com a capacitação de professores da Rede Municipal e Estadual oferecendo cursos, palestras e oficinas pedagógicas, relativas a Conteúdos e Metodologias para o Ensino de Matemática. Na Educação a Distância da UFMS trabalha desde 2001, atuando como professora da disciplina "Conteúdos e Metodologias da Matemática para as Séries Iniciais do Ensino Fundamental" para o Curso de Pedagogia – Modalidade a Distância nos pólos de Camapuã, São Gabriel do Oeste e Paranhos, todos no MS.

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli é professora do Departamento de Matemática da UFMS - CCET e mestre em Educação pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Desde a graduação trabalha com a capacitação de professores da Rede Municipal e Estadual do Mato Grosso do Sul oferecendo cursos relativos a Conteúdos e Metodologia de Matemática, palestras e oficinas pedagógicas. Na Educação a Distância trabalha deste 2001, atuando como professora da disciplina "Conteúdos e Metodologias para as Séries Iniciais do Ensino Fundamental" para o Curso de Pedagogia – Modalidade a Distância. Coordena os Curso de Licenciatura em Matemática – Modalidade a Distância nos Pólos de: Água Clara; Camapuã; Cruzeiro do Oeste; Igarapava; Rio Brilhante; São Gabriel do Oeste e Siqueira Campos.

Revisão: Sheila Mara Pessini Godinho

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Módulo 1

COORDENADAS CARTESIANAS E ESTUDO DA RETA

Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

1. INTRODUÇÃO (BREVE HISTÓRICO)

A Geometria Analítica, ou Geometria com coordenadas, integra a álgebra à geometria, possibilitando interpretações geométricas de fatos algébricos e o estudo algébrico de fatos geométricos. Historicamente, um dos seus criadores foi René Descartes (1596 - 1650), filósofo e matemático francês que em sua obra La Geométrie introduziu a noção de coordenadas no plano, ao estabelecer dois eixos fixos que se interceptam em um ponto chamado origem do sistema. Sua obra "Discours de la Méthode", publicada em 1637 em Leyden, na Holanda, continha um apêndice denominado La Géometrie, que apresentava as idéias fundamentais sobre a resolução dos problemas geométricos usando coordenadas (sistema cartesiano) e equações algébricas. Entretanto Descartes não tratou de quase nada do que se entende hoje por geometria analítica, não tendo deduzido sequer a equação de uma reta. Esse mérito do marco zero da geometria analítica deve ser creditado a Pierre de Fermat (1601 – 1665) que conclui em 1629 o manuscrito "Ad locos planos e et sólidos isagoge" (Introdução aos lugares planos e sólidos).

René Descartes
(1596-1650)

Pierre de Fermat
(1601-1665)

Fotos retiradas dos sites www.consciencia.org e www.paginas.terra.com.br

Existem algumas versões sobre o surgimento e desenvolvimento da Geometria Analítica Plana, no que diz respeito a seus criadores, datas e etc. Pesquise em livros didáticos e outras fontes essas origens, produzindo um texto seu e postem-no em MATERIAL DO ALUNO.

Cuidado com a idoneidade de suas fontes de pesquisa.

2. GEOMETRIA ANALÍTICA NO COTIDIANO

Apresentaremos a seguir algumas situações que ilustram o uso da geometria analítica como integrador da álgebra e geometria na resolução de problema.

No dia-a-dia, algumas atividades requerem seu uso mais intenso, outras menos, mas freqüentemente a usamos, ainda que sem perceber.

Usamo-la ao construir um gráfico, ao locar a construção do alicerce de uma casa, etc. Aviões e embarcações situam-se em suas rotas valendo-se de aparelhos denominados GPS que, por sua vez, utilizam coordenadas fornecidas por satélites. Entre nós, o GPS é utilizado em alguns veículos terrestres, as empresas de seguros dispõem de mecanismos para localizar veículos roubados. Em breve, todos carros contarão com GPS para o traçado de rotas, cálculo de distâncias, etc., ou seja, a geometria analítica será mais usada no dia-a-dia.

Em engenharia, para se definir vários pontos de construção de inclinações, na física, para verificar, por ex, a distância entre um avião e um provável ponto de colisão com algum obstáculo, e corrigir a rota. Na óptica, na confecção de relógios, faróis, e na transmissão de dados com antenas com formatos adequados para melhor recepção. Além disso, no dia a dia de muitos tem-se os videogame, também ricos em aplicações de geometria analítica, construindo ambientes em três dimensões.

3. SISTEMAS DE COORDENADAS

3.1 A RETA NUMERADA

3.1.1 COORDENADAS NA RETA

Você sabe o que é um axioma (também chamado no passado de postulado)?

Axioma é um princípio evidente por si mesmo, particularmente em matemática.

O matemático grego Euclídes definiu o axioma como uma noção comum, ou seja, uma afirmação geral aceita sem discussão.

AXIOMA DA "RÉGUA INFINITA"

Os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que à distância entre dois pontos quaisquer é definida como o valor absoluto (módulo) da diferença dos números reais a eles associados.

A correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números reais significa que:

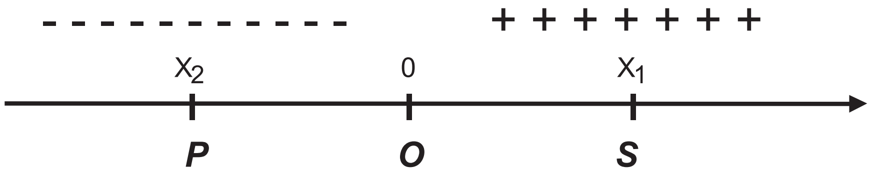
- A cada ponto da reta corresponde exatamente um número real.
- A cada número real corresponde exatamente um ponto da reta.

Uma correspondência biunívoca como descrita define um ***sistema de coordenadas***.

O número que corresponde a um dado ponto é chamado de ***coordenada*** desse ponto.

Para definirmos um sistema de coordenadas na reta é necessário:

- Tomar uma reta na qual se escolhe um sentido de percurso. Tem-se então a ***reta orientada.***
- Escolhermos um dos seus pontos como a origem do sistema. A este ponto, normalmente denotado pela letra ***O***, é associado o número zero, que será a sua coordenada. A reta orientada na qual se fixou um ponto origem ***O*** é chamada ***eixo***.
- Fixar uma unidade de medida de comprimento, e ainda teremos que, se o ponto ***S*** está à direita da origem, sua coordenada será $x_1 = OS$ (onde ***OS*** é a medida do segmento delimitado pelos pontos ***O*** e ***S***) e, portanto, positiva. Por outro lado, se o ponto ***P*** está à esquerda de ***O***, sua coordenada será dada por $x_2 = -OP$ (onde ***OP*** é a medida do segmento delimitado pelos pontos ***O*** e ***P***) logo, negativa.



3.1.2 DISTÂNCIA ENTRE PONTOS DA RETA

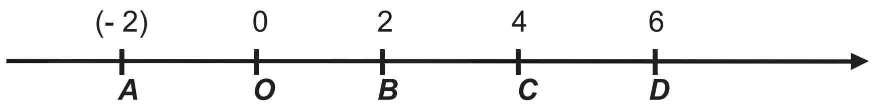
Feita a correspondência entre os números reais e os pontos da reta, temos que a distância entre dois pontos quaisquer ***P*** e ***S*** de coordenadas x_2 e x_1, respectivamente, é dada por:

$$OS = | x_2 - x_1 |$$

Observação: Fórmula dada independe da posição relativa dos pontos ***P*** e ***S*** , isto é, independe de quem está à direita ou à esquerda.

3.1.3 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Observe os pontos definidos na reta orientada na figura a seguir.



A partir das informações temos que:

- a coordenada do ponto A é (– 2)
- a coordenada do ponto O é 0
- a coordenada do ponto B é 2
- a coordenada do ponto C é 4
- a coordenada do ponto D é 6
- a distância entre os pontos A e B é 4
- a distância entre os pontos A e C é 6
- a distância entre os pontos B e D é 4

3.1.4 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Levando em conta a figura ilustrada no exercício resolvido apresentado, agora responda as seguintes perguntas:

- Qual a distância entre os pontos A e D?
- Se um ponto M na reta definida tem coordenada x e outro ponto N tem coordenada y, qual é a distância entre os pontos M e N?
- Quantos números reais existem? O que dizer da relação entre os números reais e os pontos de uma reta?

2) Considere um sistema de coordenadas na reta. Suponha que 3 é adicionado à coordenada de cada ponto sendo então obtido um novo número associado a cada ponto.

- Se P tem coordenada 5, qual será seu novo número?
- Se dois pontos da reta têm coordenadas a e b, quais serão seus novos números?
- Expresse matematicamente a correspondência que a cada ponto P de coordenada x associa o seu novo número.

- Cada ponto da reta corresponderá a um novo número? Cada novo número corresponderá a um ponto da reta?
- Sejam a e b os novos números de dois pontos P e Q de coordenadas x e y respectivamente. Mostre que a distância PQ é dada por $| a\text{-}b |$.
- Essa nova correspondência entre pontos e números satisfaz às três condições do Axioma da Régua? Pode cada novo número ser chamado de coordenada de um ponto?

3) Refaça o exercício anterior supondo que o novo número é obtido multiplicando-se por um número k , distinto de zero, a coordenada de cada ponto.

3.2 O PLANO CARTESIANO

3.2.1 COORDENADAS NO PLANO

Lembremos como funciona um sistema de coordenadas sobre uma reta:

"Uma vez estabelecido um sistema de coordenadas sobre uma reta, a cada ponto corresponde um único número e a cada número corresponde um único ponto".

Para definirmos um sistema de coordenadas num plano é necessário:

- Fixamos uma reta no plano e estabelecemos um sistema de coordenadas sobre ela com origem **O**. Esta reta será chamada ***eixo x*** ou ***eixo das abscissas***.
- Definimos outra reta, perpendicular ao eixo x, passando no ponto **O**. Fixamos sobre ela um sistema de coordenadas de tal modo que o ponto zero dela coincida com o ponto zero da reta anterior, o eixo x. Esta reta será chamada ***eixo y*** ou ***eixo das ordenadas***.

- Definimos então uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano P e os pares de números reais (x,y), A correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares de números reais significa que:

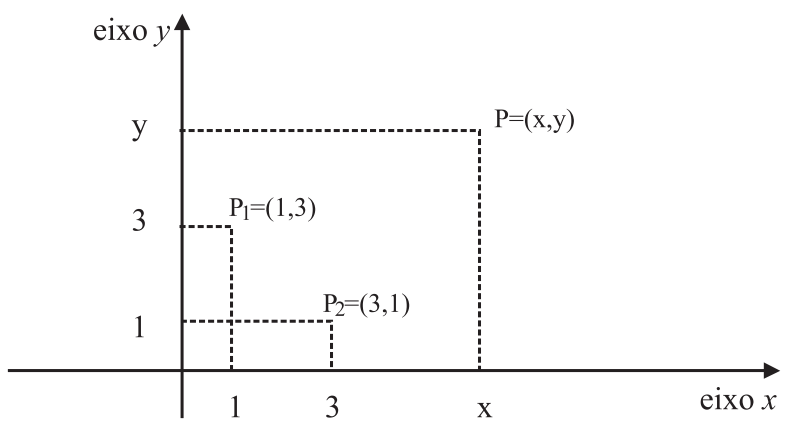
  - A cada ponto do plano corresponde exatamente um par ordenado de números reais.
  - A cada par ordenado de números reais corresponde exatamente um ponto do plano.

- Os números x e y são chamados ***coordenadas*** do ponto P.

Observação Importante: Observe que a ordem na qual as coordenadas são escritas é importante. O ponto de coordenadas P_1=(1,3) é diferente do ponto de coordenadas P_2=(3,1), mostrados na figura a diante. Assim, as coordenadas de um ponto formam um ***par ordenado*** de números reais. As coordenadas do ponto **O**, origem coincidente de cada um dos eixos e conseqüentemente origem do sistema de coordenadas cartesianas no plano, são (0,0).

Temos, ainda, que P = (x,y), onde:

- x é a coordenada no eixo *x* também chamada **abscissa** do ponto P.
- y é a coordenada no eixo *y* também chamada **ordenada** do ponto P.



- os eixos *x* e *y* definidos anteriormente são chamados ***eixos coordenados***.

- O conjunto de todos os pontos forma o ***plano cartesiano*** de origem **O** = (0,0).

Observação. O sistema definido aqui é o mais usual, por razões práticas de facilitação das contas. Ele é o chamado ***Sistema Cartesiano Ortogonal.***

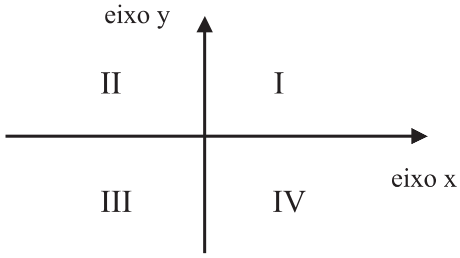
No século XVII, surgiram os primeiros ensaios sistemáticos sobre Geometria Analítica. Seus autores foram Pierre Fermat e René Descartes. Fermat, retomando a idéia dos construtores egípcios, se refere a um ponto do plano por meio de um par de retas perpendiculares entre si (que justifica o termo ortogonal). Este sistema, apesar de ter sido introduzido por Fermat, recebeu o nome de "Sistema Cartesiano " em homenagem a Descartes, que assinava o seu nome em latim: Cartesius.

Reflita a respeito dos seguintes questionamentos:

- Para estabelecer um sistema de coordenadas no plano, os eixos x e y precisam necessariamente ser perpendiculares?
- É necessário indicar a escala usada?

Pesquise em livros didáticos e outras fontes, responda aos questionamentos propostos produzindo um texto seu justificando suas respostas e postem-no em "MATERIAL DO ALUNO".

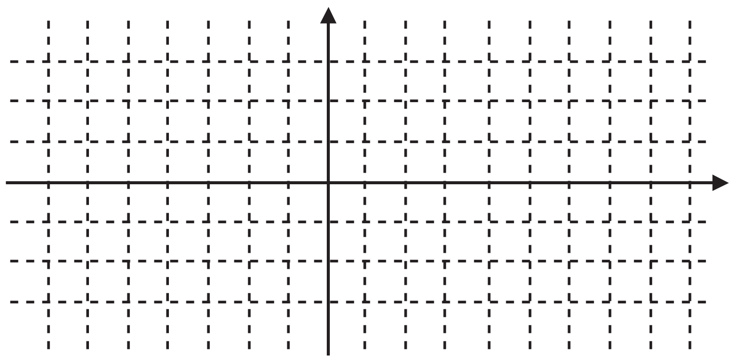
O eixo das abscissas e o eixo das ordenadas, usualmente colocados na posição indicada na figura anterior, dividem o plano em quatro regiões, denominadas ***quadrantes***, indicados no esquema abaixo pelos símbolos I, II, III, IV, determinando, respectivamente, o 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes do plano:



Observe que de acordo com a figura dada temos que:

- o primeiro quadrante é o conjunto de todos os pontos (x,y) do plano para os quais $x > 0$ e $y > 0$;
- o segundo quadrante é o conjunto de todos os pontos (x,y) do plano para os quais $x < 0$ e $y > 0$;
- o terceiro quadrante é o conjunto de todos os pontos (x,y) do plano para os quais $x < 0$ e $y < 0$;
- o quarto quadrante é o conjunto de todos os pontos (x,y) do plano para os quais $x > 0$ e $y < 0$;
- eixo x é o conjunto de todos os pontos $(x\ y)$ do plano para os quais y=0;
- eixo y é o conjunto de todos os pontos (x,y) do plano para os quais x=0.

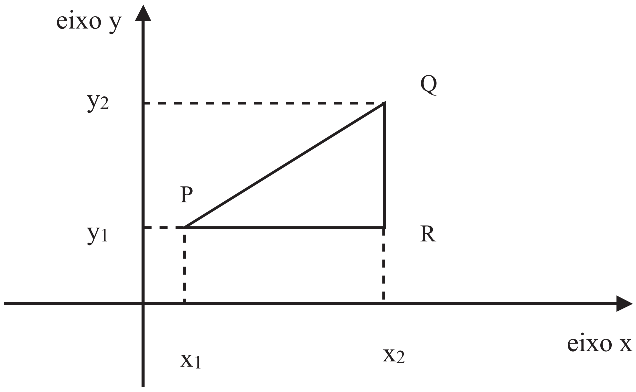
No sistema de coordenadas cartesianas, as distâncias são medidas a partir de retas paralelas aos eixos coordenados, numa malha quadriculada ou reticulada, como na figura a seguir:



3.2.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO PLANO

Feita a correspondência entre dois pares de números reais e dois pontos do plano, isto é dados $P = (x_1,y_1)$ e $Q = (x_2,y_2)$, deduziremos uma fórmula que determina a distância entre esses dois pontos dados.

Considere a ilustração a seguir onde os pontos P e Q dados têm coordenadas positivas.



Observa-se na figura, por construção, que ficam determinadas as coordenadas do ponto R = (x_2,y_1) e que o triângulo PRQ é retângulo em R.

Observa-se que os pontos P e R estão numa mesma reta e que Q e R estão em outra reta, perpendicular à primeira. Então, usando o conceito de distâncias entre pontos de uma mesma reta, temos que as distâncias entre os pontos dados são:

distância entre P e R = d(P,R) = $\boldsymbol{PR} = |x_2 - x_1|$

distância entre Q e R = d(Q,R) = $\boldsymbol{QR} = |y_2 - y_1|$

Então usando o Teorema de Pitágoras:

$(\boldsymbol{PQ})^2 = (\boldsymbol{PR})^2 + (\boldsymbol{QR})^2$

$(\boldsymbol{PQ})^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$

Ou ainda $(\boldsymbol{PQ})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

E finalmente tem-se a seguinte fórmula para distância entre dois pontos dados P e Q no plano:

$$d(P,Q) = \boldsymbol{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Reflita a respeito dos seguintes questionamentos:

- O resultado da distância entre os pontos terá a mesma fórmula caso os pontos não estejam nas condições dadas, isto é, se suas coordenadas não forem todas positivas?
- Como ficaria a fórmula dada para pontos em outros quadrantes?
- E se um ponto estivesse num quadrante e o outro em outro o que aconteceria com a fórmula dada para distância entre dois pontos?
- O que acontece quando $x_1 = x_2$ ou quando $y_1 = y_2$?

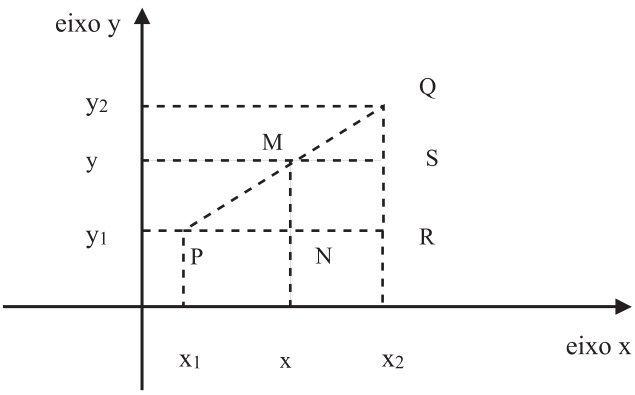
Responda aos questionamentos propostos produzindo um texto seu justificando suas respostas e postem-no em "MATERIAL DO ALUNO".

3.2.3 PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO DE RETA DEFINIDO POR DOIS PONTOS DO PLANO

Dado um segmento de reta PQ tal que $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ são pontos distintos, vamos determinar as coordenadas de M, ponto médio de PQ.

Considere:

a) um segmento com extremidades $P= (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$; o ponto $M = (x, y)$, ponto médio do segmento PQ.



Aplicando o Teorema de Tales (pesquise), temos, sendo definido M como ponto médio do segmento PQ , PM = MQ , logo:

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{RN} = 1 \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = 1 \Rightarrow x - x_1 = x_2 - x \Rightarrow 2x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{SR}{QS} = 1 \Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y} = 1 \Rightarrow y - y_1 = y_2 - y \Rightarrow 2y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Então, podemos concluir que dado um segmento de extremidades dadas pelos pontos do plano $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$

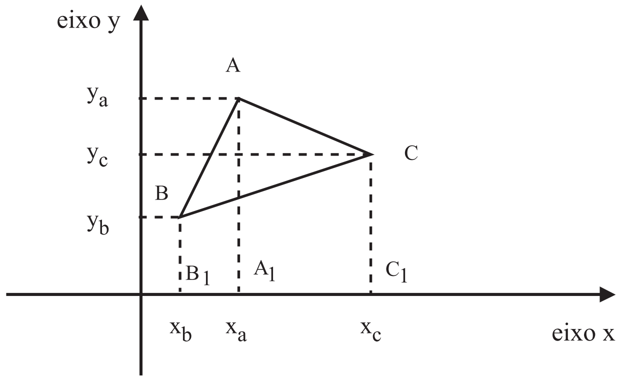
a) abscissa do ponto médio do segmento é a média aritmética das abscissas das extremidades: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

b) a ordenada do ponto médio do segmento é a média aritmética das ordenadas das extremidades: $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Isto é $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

3.2.4 ÁREA DE UM TRIÂNGULO COM VÉRTICES DADOS

Considere três pontos $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ não alinhados (não colineares). Vamos determinar a área do triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C dados, conforme a figura a seguir:



Inicialmente note que a área do triângulo ABC é igual à seguinte diferença:

(a soma das áreas dos trapézios ABB_1A_1 e AA_1C_1C) – (área do trapézio BB_1C_1C)

Separadamente temos:

Área do trapézio ABB_1A_1: $S_1 = \dfrac{(AA_1 + BB_1).A_1B_1}{2} = \dfrac{(y_a + y_b).(x_a - x_b)}{2}$

Área do trapézio AA_1C_1C: $S_2 = \dfrac{(AA_1 + CC_1).A_1C_1}{2} = \dfrac{(y_a + y_c).(x_c - x_a)}{2}$

Área do trapézio BB_1C_1C: $S_3 = \dfrac{(BB_1 + CC_1).B_1C_1}{2} = \dfrac{(y_b + y_c).(x_c - x_b)}{2}$

Logo a área do triângulo ABC $S_{ABC} = S_1 + S_2 - S_3$

Então:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.(x_a.y_b + x_b.y_c + x_c.y_a - x_c.y_b - x_b.y_a - x_a.y_c)$$

Lembrando do cálculo do determinante de uma matriz e observando-se que o valor entre parênteses na expressão anterior é o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$$

Então a área do triângulo ABC, com vértices $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$, será:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.|\Delta| \qquad \text{onde} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$$

Observação 1: Observe que se os pontos $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ estiverem alinhados a área do triangulo formado por eles será 0 (zero). Isto nos dá um eficiente mecanismo para definir se três pontos estão alinhados, isto é se são ***colineares***.

$$A = (x_a, y_a),\ B = (x_b, y_b) \text{ e } C = (x_c, y_c) \text{ são colineares} \iff \Delta = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Observação 2: Observe que se a figura da qual queremos determinar a área for um polígono com mais de três lados podemos usar a decomposição da figura em dois ou mais triângulos, cujos vértices são os pontos dados.

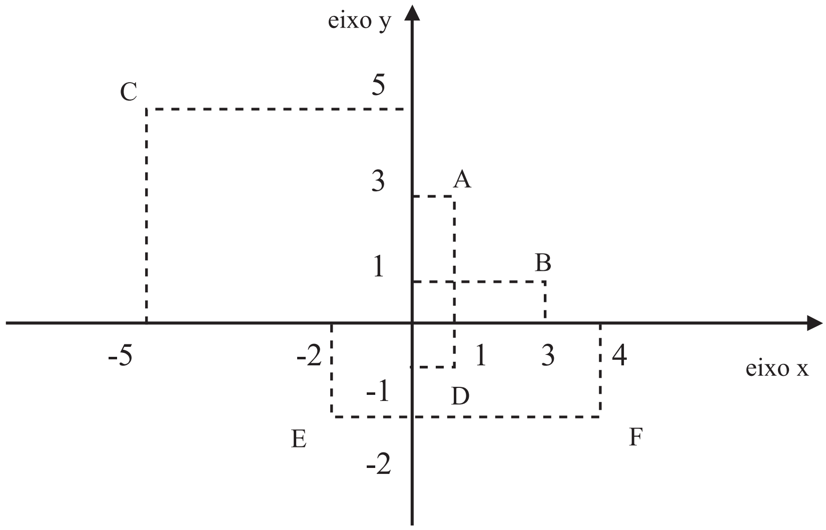
Reflita a respeito dos seguintes questionamentos:

- A fórmula da área de um triângulo cujos vértices são os pontos no primeiro quadrante será outra caso os pontos não estejam nas condições dadas, isto é, se suas coordenadas não forem todas positivas?
- Como ficaria a fórmula dada para pontos em outros quadrantes?
- E se cada ponto estivesse num quadrante diferente o que aconteceria com a fórmula dada para a área de um triângulo?

Responda aos questionamentos propostos produzindo um texto seu justificando suas respostas e postem-no em “MATERIAL DO ALUNO”.

3.2.5 EXERCÍCOS RESOLVIDOS

Considere o seguinte sistema cartesiano ortogonal:



1) Qual é a representação, em forma de par ordenado, dos pontos A, B, C, D, E e F representados no sistema cartesiano ilustrado e em que quadrante cada um deles está?

Resolução:

Como a projeção perpendicular do ponto A no eixo x é 1 , a abscissa do ponto A é 1 e a projeção perpendicular do ponto A no eixo y é 3, a ordenada do ponto A é 3 então temos que A = (abscissa de A,ordenada de A) = (x_A,y_A) = (1,3) sendo assim está no primeiro quadrante pois $x_A > 0$ e $y_A > 0$.

Analogamente determinam-se os pontos:

B = (x_B,y_B) = (3,1), sendo assim está no primeiro quadrante pois $x_B > 0$ e $y_B > 0$.

C = (x_C,y_C) = (–5,5), sendo assim está no segundo quadrante pois $x_C < 0$ e $y_C > 0$.

D= (x_D,y_D) = (1,–1), sendo assim está no quarto quadrante pois $x_D > 0$ e $y_D < 0$.

E = (x_E,y_E) = (–2, –2), sendo assim está no terceiro quadrante pois $x_E < 0$ e $y_E <0$.

F = (x_F,y_F) = (4, –2), sendo assim está no quarto quadrante pois $x_F > 0$ e $y_F < 0$.

2) Quais são as coordenadas do ponto médio do segmento CF?

Resolução:

Como C = (–5,5) e F = (4, –2) então $M = \left(\frac{x_C + x_F}{2}, \frac{y_C + y_F}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

3) Qual é a área do triângulo cujos vértices são A= (1, 2), B = (3, 4) e C = (9, 2)?

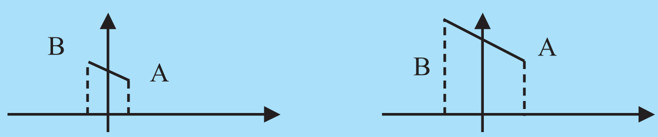
Resolução: $S_{ABC} = \frac{1}{2}.|\Delta|$ onde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ Então $S_{ABC} = \frac{1}{2}.|-16| = 8$

4) Determine se os pontos (2, 0), (1, 1), e (0, 2) são colineares?:

Resolução: Sim eles são colineares, pois o determinante a seguir é 0 (zero ou nulo)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Reflita a respeito do seguinte questionamento: Observe nos planos coordenados a seguir a representação de dois pontos A =(1,3) e B = (–1, 4), e um segmento de reta AB.



Por que os comprimentos dos segmentos AB nas duas figuras traçadas "parecem" diferentes? O que se pode concluir? Responda ao questionamento proposto produzindo um texto seu justificando suas respostas e postem-no em "MATERIAL DO ALUNO".

3.2.6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Construindo um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas represente os pontos de coordenadas dadas:

A = (0,3), B = (2,–1), C = (–1,2), D = (–3,0), E = (0,0), F = (–1, –3) e G = (2,3)

E os pontos médios dos segmentos AB, AC, AD, AE, AF e AG.

2) Calcule os valores de a e b para que o ponto $\boldsymbol{P}$, de coordenadas ($2a+4$, $3-2b$), esteja:

a) No primeiro quadrante.

b) No segundo quadrante.

c) No terceiro quadrante.

d) No quarto quadrante.

e) Sobre o eixo x.

f) Sobre o eixo y.

g) Coincidente com a origem do sistema cartesiano.

3) Determine a abscissa x_c do ponto C, vértice do triângulo ABC de área 10 e vértices são A= (1, 2), B = (3, 4) e C = (x_c, 2)?

4) Determine a área do quadrilátero cujos vértices são: A= (1, 2), B = (3, 4), C = (9, 2) e D = (2,–4)

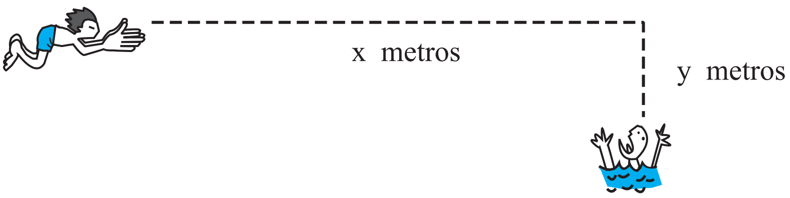
5) Determine a para que os pontos (a,0), (0,a) e (–1,3) sejam colineares.

6) Os vértices de um triângulo são A = (3,5), B = (2,3) e C = (–1, –1). Calcule a medida da altura relativa ao lado BC desse triângulo.

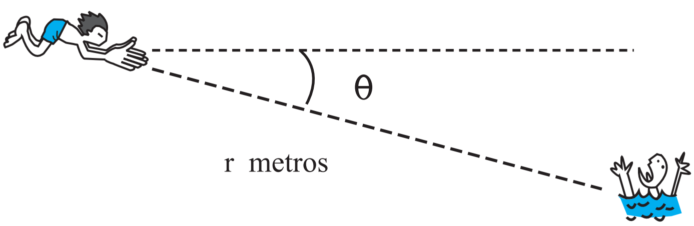
3.3 CURIOSIDADE

Como vimos, a idéia básica da Geometria Analítica é a representação de pontos de uma reta e do plano por meio de conjuntos de números reais denominados ***coordenadas*** . Um ponto qualquer do plano, como definimos, terá sua posição perfeitamente determinada por meio de um par ordenado de números reais que representam medidas das distâncias a dois eixos orientados, um deles vertical e o outro horizontal. (usando-se o sistema cartesiano ortogonal). Tal sistema é utilizado no cotidiano como por exemplo na localização do uma cidade em um mapa: O eixo y, " vertical ", nesse caso, é o meridiano que passa por Greenwich, e o eixo x, "horizontal", é o Equador ; as coordenadas, então, serão constituídas pelo par de números que definem a latitude e a longitude do lugar. Outro exemplo comum é o conhecido jogo "Batalha Naval". Mesmo na antiguidade, os egípcios já utilizavam tal sistema de referência nos seus projetos e construções de templos e pirâmides. Os agrimensores romanos, para seus cálculos, dividiam os campos por meio de linhas retas paralelas entre si, perpendiculares a uma linha de referência que denominavam " linae ordinatae " (linha ordenada).

Entretanto existem situações em que o uso do sistema de coordenadas cartesianas torna-se inadequado, por exemplo, seria estranho tentar socorrer um cidadão em situação de afogamento nadando utilizando coordenadas cartesianas: nadando x metros na direção leste e y metros na direção sul, como na ilustração a seguir.



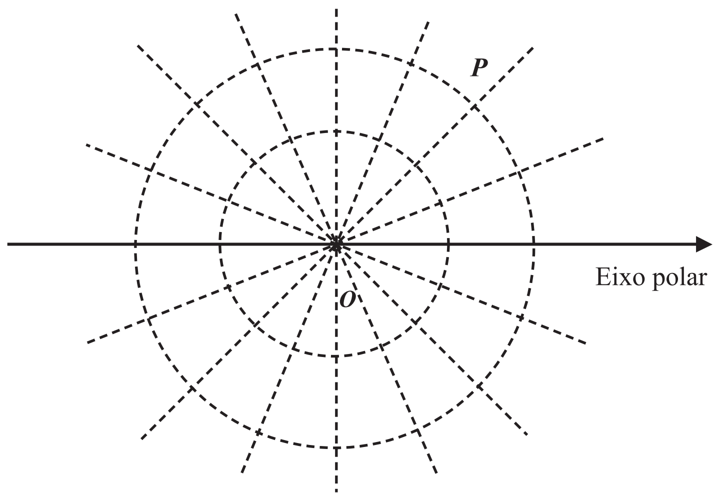
Seria muito mais sensato nadar em direção do afogado num ângulo q , determinado com a linha horizontal, e uma distancia r metros conhecida, como na figura a seguir.



A última ilustração descreve um sistema de coordenadas chamado: ***Sistema de Coordenadas Polares***.

No sistema de coordenadas polares, a localização de um ponto P, do plano, fica perfeitamente determinada se conhecermos a sua distância r a um ponto fixo O, chamado pólo ou origem do sistema, e a medida do ângulo q , que o segmento OP faz com uma reta fixa, chamada eixo polar. Neste caso, as coordenadas do ponto P serão dadas pelo par ordenado de números reais (r , θ).

Repare que diferentemente do sistema de coordenadas cartesianas, no qual as distâncias são medidas a partir de retas paralelas aos eixos coordenados, numa malha quadriculada, no sistema de coordenadas polares, a distância r é medida a partir de circunferências concêntricas, centradas no pólo (todos os pontos sobre cada uma dessas circunferências estão a mesma distância do pólo) e o ângulo θ, a partir de raios com origem no pólo (todos os pontos sobre cada um desses raios fazem o mesmo ângulo com o eixo polar). Veja a figura a seguir.



Outros exemplos de situações orientadas pelo ***Sistema de Coordenadas Polares*** são:

- na localização, por radares ou sonares, de navios em alto mar.
- na comunicação entre abelhas.

A respeito deste último exemplo, biólogos pesquisando o comportamento das abelhas detectaram que elas ao chegarem à colméia trazem informações a respeito de um novo campo com flores e numa "dança" se comunicam com as demais informando sobre o ângulo q com a direção do sol em que as outras devem voar e a energia necessária para chegar lá (que define a distância r a percorrer).

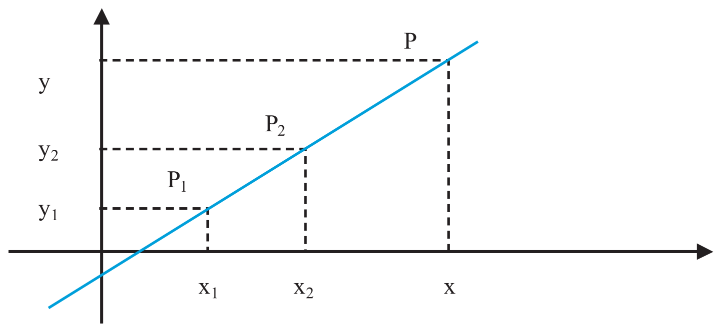
4 RETAS NO PLANO CARTESIANO

Uma reta pode ser representada por uma equação. Esta equação de uma reta pode ser escrita de várias formas: ***equação geral***, ***equação reduzida***, ***equação segmentária*** *e* ***equação paramétrica***.

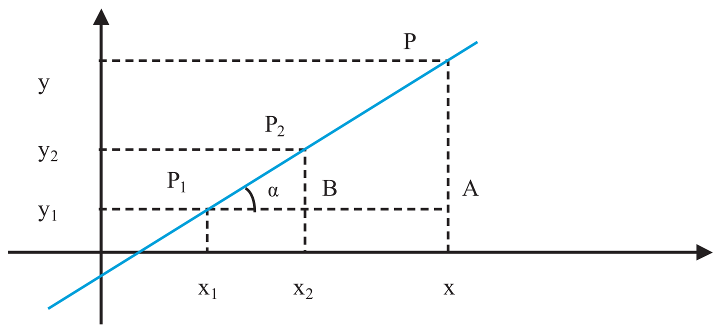
4.1 EQUAÇÃO GERAL DA RETA

De acordo com a Geometria Euclidiana, dados dois pontos P_1 e P_2, no plano cartesiano, existe uma única reta que passa por esses pontos. A Geometria Analítica descreve, através de uma equação, a relação que existe entre as coordenada x e y de um ponto qualquer $P = (x,y)$ que pertence àquela reta única que passa pelos pontos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$ dados.

Observe a figura a seguir que ilustra a citada reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 e o ponto P pertencente a essa reta.



Observe agora a seguinte figura onde são definidos dois triângulos retângulos semelhantes P_1BP_2 e P_2AP. (Caso de semelhança do tipo ângulo/ângulo - PESQUISE)



Então da semelhança dos triângulos P_1BP_2 e P_1AP temos a proporcionalidade de seus lados:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow (y_2 - y_1).(x - x_1) = (y - y_1).(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad x.(y_2 - y_1) - x_1.(y_2 - y_1) = y.(x_2 - x_1) - y_1.(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad x.(y_2 - y_1) + y.(x_1 - x_2) + x_2.y_1 - y_2.x_1 = 0$$

Chamando , e temos que se P = (x,y) pertence àquela reta única que passa pelos pontos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$ dados, então as coordenadas x e y do ponto P satisfazem a equação:

$$a.x + b.y + c = 0$$

tal equação é dita ***equação geral da reta*** que passa pelos pontos P_1 e P_2 dados.

Poderíamos também usar o fato que se os três pontos P, P_2 e P_1 estão alinhados então são colineares e, portanto como vimos na observação da seção 3.2.4.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x.y_2 + y.x_1 + x_2.y_1 - x_1.y_2 - x.y_1 - y.x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a.x + b.y + c = 0 \quad \text{onde } \; a = y_2 - y_1 \;,\; b = x_1 - .x_2 \; \text{ e } \; c = x_2.y_1 - y_2.x_1$$

4.2 EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

Equação reduzida da reta que passa pelos pontos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$ dados. Como já vimos da semelhança de triângulos temos:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1) \Rightarrow y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1) + y_1$$

Chamando $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $n = y_1 - m.x_1$, temos que se P = (x,y) pertence àquela reta única que passa pelos pontos

$P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$ dados, então as coordenadas x e y do ponto P satisfazem a equação:

$y - y_1 = m.(x - x_1) \Rightarrow y = m.x - m.x_1 + y_1 \Rightarrow y = m.x + (y_1 - m.x_1)$

Temos então: $y = m.x + n$

tal equação é dita ***equação reduzida da reta*** que passa pelos pontos P_1 e P_2 dados.

Observando-se e comparando-se as duas formas da equação da reta, a geral e a reduzida percebemos que podemos da equação geral obter a equação reduzida.
Se partirmos de $a.x + b.y + c = 0$ e "isolarmos" o y temos:

$y = \frac{(-a)}{b}.x + \frac{(-c)}{b}$ isto é, $m = \frac{(-a)}{b}$ e $n = \frac{(-c)}{b}$

4.2.1 COEFICIENTE ANGULAR E COEFICIENTE LINEAR DA RETA

Na equação reduzida da reta que passa pelos pontos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$, como vimos, $y = m.x+n$, determina-se a relação entre as coordenadas x e y de um ponto P qualquer que pertence a reta, aparecem dois elementos fundamentais:

a) coeficiente angular = m

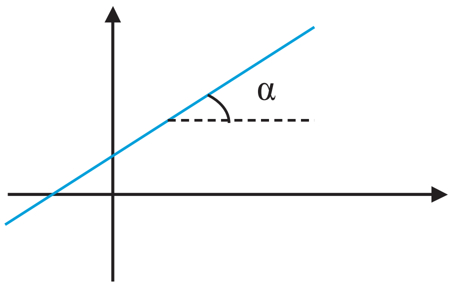
b) coeficiente linear = n

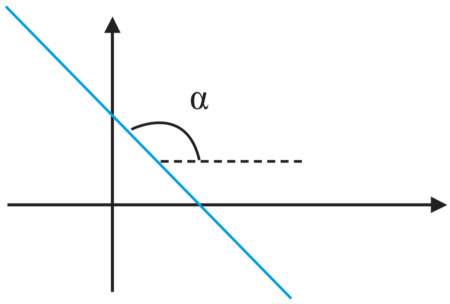
A seguir vamos discutir o que representa cada um deles:

a) Dados os pontos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$, o ***coeficiente angular da reta*** que passa por estes pontos é o número real m. Como vimos esse número m é a razão entre as medidas catetos, isto é, expressa a tangente trigonométrica do ângulo α de inclinação da reta em relação a uma direção paralela ao eixo x, tomado no sentido anti-horário, ou seja:

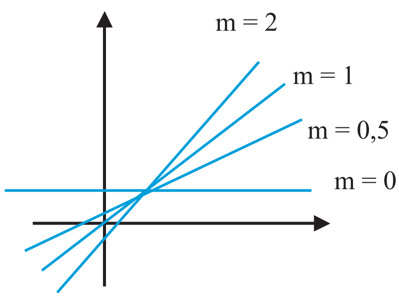
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{cateto.oposto.ao.angulo\alpha}{cateto.adjacente.ao.angulo\alpha} = tg\alpha$$

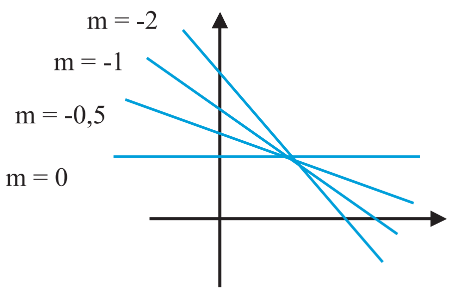
O fato do coeficiente angular ser positivo significa que o ângulo de inclinação da reta em relação a uma direção paralela ao eixo x é agudo (pois m > 0 significa que tg > 0 isto é é agudo). Por outro lado se o coeficiente angular for negativo significa que o ângulo de inclinação da reta em relação a uma direção paralela ao eixo x é obtuso (pois m < 0 significa que tg < 0 isto é é obtuso), veja ilustrações a seguir:



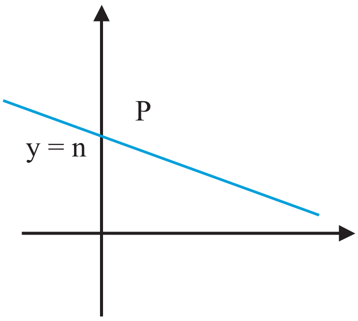


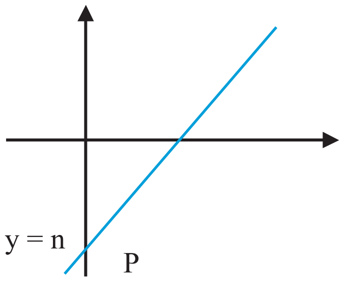
O fato do coeficiente angular ser maior que outro indica que a reta associada a este coeficiente cresce mais rapidamente que a outra reta. Se um coeficiente angular é negativo e o módulo deste é maior que o módulo de outro coeficiente, temos que a reta associada ao mesmo decresce mais rapidamente que a outra. Se o coeficiente é nulo temos uma reta horizontal, como nas ilustrações a seguir.





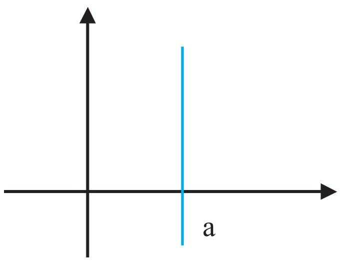
c) Dados os pontos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$, o ***coeficiente linear da reta*** que passa por estes pontos é o número real n. Como vimos na equação geral da reta y = m.x + n esse número n será determinado quando determinarmos o valor de y do ponto em que a abscissa é 0, isto é, o ponto P = (0,n). Graficamente esse ponto P representa o ponto de intercessão da reta com o eixo y.



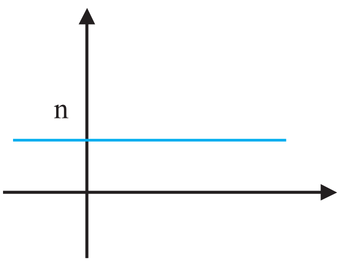


4.3 RETAS HORIZONTAIS E VERTICAIS

a) Se uma reta for vertical ela não possuirá coeficientes angular visto que não existe tg90º e, por conseguinte, não possuirá coeficiente linear e neste caso a equação da reta será indicada apenas por x = a, onde a é a abscissa do ponto onde a reta corta o eixo *x*, como ilustrado a seguir:



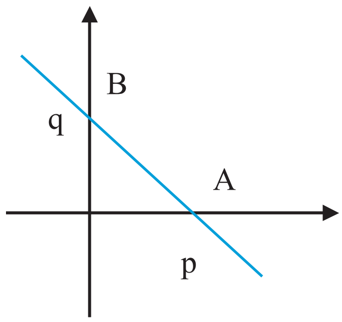
b) Se uma reta for horizontal, o seu coeficiente angular será nulo e a equação desta reta será dada por y = n, onde n é a ordenada do ponto onde está reta corta o eixo *y*, isto é, seu coeficiente linear.



4.4 EQUAÇÃO SEGMENTARIA DA RETA

A equação segmentaria da reta é uma forma diferente de apresentação da reta, isto é, do comportamento de qualquer ponto P=(x,y) pertencente àquela reta. Entretanto essa forma de equação só pode ser apresentada quando a reta em questão não passa pela origem do sistema O=(0,0).

Consideremos então uma reta que não passa pela origem e que intercepta os eixos *x* e y nos pontos A = (p,0) e B = (0,q), respectivamente, como ilustrado na figura a seguir:



Da dedução da equação geral da reta a.x +b.y +c = 0 e da equação reduzida partimos das relações

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)$$

Se nessa última substituirmos as coordenadas dos pontos de intersecção da reta com os eixos coordenados A = (p,0) e B = (0,q) nas coordenadas x_1, x_2, y_1 e y_2 teremos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{q - 0}{0 - p}.(x - p)$$

Isto é:

$$y = \frac{q}{(-p)}.(x - p) \Rightarrow (-p).y = q.x - p.q$$

Ou ainda:

$$q.x + p.y = p.q \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad \text{sendo que } p.q \neq 0$$

Esta última equação é dita ***equação segmentária da reta*** que intercepta os eixos coordenados nos pontos A e B dados.

Observe que partindo da equação geral da reta $a.x + b.y + c = 0$ (com $c \neq 0$) ou ainda $a.x + b.y = (-c)$ e dividirmos por $(-c)$ chegaremos a equação $\frac{a.x}{(-c)} + \frac{b.y}{(-c)} = 1$ equivalente à equação segmentária da reta $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ com $p = \frac{(-c)}{a}$ e $q = \frac{(-c)}{b}$.

4.5 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Quando temos as variáveis x e y escritas na forma das equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$, onde t é uma variável real e também conhecida como parâmetro, estamos definindo as equações paramétricas da reta. Imaginando t como tempo definido num intervalo dos números reais, essas equações descrevem o movimento de percurso de uma partícula.

Equações paramétricas de uma reta:

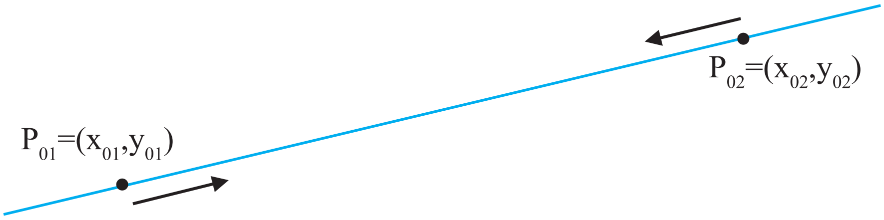
$$\begin{cases} x = x_0 + k_1.t \\ y = y_0 + k_2.t \end{cases} \quad \text{com } t \in \mathbf{R}$$

As equações paramétricas dadas definem um ponto de início do percurso (quando $t = 0$) $P_0 = (x_0, y_0)$ e conforme os valores de k_1 e k_2 qual o sentido e a velocidade de percurso.

Observe ainda que, uma mesma reta pode ter diversos pares de equações paramétricas, isto é, dois pares de equações paramétricas aparentemente diferentes podem estar descrevendo o mesmo conjunto de pontos (a mesma reta) diferenciando-se apenas quanto ao seu ponto de início e sua forma de percurso.

Equações Paramétricas 1: $\begin{cases} x = x_{01} + k_1.t \\ y = y_{01} + k_2.t \end{cases}$ com $t \in \mathbf{R}$ $P_{01}=(x_{01},y_{01})$

Equações Paramétricas 2: $\begin{cases} x = x_{02} - k_1.t \\ y = y_{02} - k_2.t \end{cases}$ com $t \in \mathbf{R}$ $P_{02}=(x_{02},y_{02})$



Para obter um par de equações paramétricas que representam uma reta basta partindo da equação geral da reta a.x + b.y + c = 0 reescrever a variável x em função de t, x = f(t) da forma $x = x_0 + k_1.t$ e substituir tal expressão na equação geral que a variável y fica, por sua vez, reescrita também em função de t, isto é $y = g(t) = y_0 + k_2.t$ com $t \in \mathbf{R}$

Para saber se dois pares de equações paramétricas representam a mesma reta basta verificar se dois pontos que satisfazem um par de equações paramétricas também satisfazem o outro par, visto que por dois pontos do plano passa uma única reta (axioma da geometria euclidiana). Veja tal fato ilustrado na seção de exemplos resolvidos.

4.6 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determine a equação geral, a equação reduzida, a equação segmentária e um par de equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A = (–1,–2) e B = (5, 2).

Resolução.

EQUAÇÃO GERAL

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow (y_2 - y_1).(x - x_1) = (y - y_1).(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow x.(y_2 - y_1) + y.(x_1 - x_2) + x_2.y_1 - y_2.x_1 = 0$$

Isto é, usando as coordenadas dos pontos dados:

$$\Rightarrow x.(2 - (-2)) + y.((-1)-5)+5.(-2)-2.(-1) = 0$$

$$\Rightarrow 4.x - 6.y - 8 = 0$$

Ou ainda: $2.x - 3.y - 4 = 0$

Poderíamos também ter usado o determinante nulo que determinaria a colinearidade dos pontos dados A e B com P = (x,y) genérico da reta.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x.(-2) + y.5 + (-1).2 - 5.(-2) - x.2 - y.(-1) = 0$$

$$\Rightarrow (-4).x + 6.y + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4.x - 6.y - 8 = 0$$

Ou ainda: $2.x - 3.y - 4 = 0$ (eq. geral da reta)

EQUAÇÃO REDUZIDA

A partir da equação geral $2.x - 3.y - 4 = 0$ "isolando-se" a variável y temos

$$y = \frac{2}{3}.x - \frac{4}{3} \quad \text{(eq. reduzida da reta)}$$

Onde o coeficiente angular é $m = \frac{2}{3}$ e o coeficiente linear é $n = -\frac{4}{3}$

EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA

A partir da equação geral $2.x - 3.y - 4 = 0$ temos $2.x - 3.y = 4$ e dividindo-se ambos os membros por 4 obtemos:

$$\frac{2}{4}.\, x - \frac{3}{4}.y = 1$$

Ou ainda:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{(-4)/3} = 1 \quad \text{(eq. segmentária da reta) onde } p = 2 \text{ e } q = \frac{(-4)}{3}$$

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

A partir da equação geral $2.x - 3.y - 4 = 0$ se reescrevermos a variável x em função de um novo parâmetro t como por exemplo $x = -1 + 6.t$ teremos que

$$2 . (-1 + 6.t) - 3.y - 4 = 0$$

ou seja $\quad y = -2 + 4.t$

Logo um par de equações paramétricas que define a reta que passa pelos pontos dados é:

$$\begin{cases} x = -1 + 6.t \\ y = -2 + 4.t \end{cases} \text{ com } t \in \mathbf{R}$$

2) Determine a equação reduzida da reta que tem:

a) m = 2 e n = - 1,

Resolução:

A reta é dada por y = 2x - 1.

b) m = 1 e n = 0,

Resolução:

A reta y = x tal reta é a bissetriz dos quadrantes 1 e 3

c) m = 0 e n = 5

Resolução:

A reta y = 5, tal reta é horizontal (paralela ao eixo x)

3) Verifique se os pares de equações paramétricas dadas representam a mesma reta.

Equações Paramétricas 1: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2.t \end{cases}$ com $t \in \mathbf{R}$ $\quad P_{01}=(1,1)$

Equações Paramétricas 2: $\begin{cases} x = 3 + 2.t \\ y = 5 + 4.t \end{cases}$ com $t \in \mathbf{R}$ $\quad P_{02}=(3,5)$

Observe que nesse caso P_{01} também satisfaz às equações paramétricas 2 (quando t = – 1) assim como P_{02} também satisfaz às equações paramétricas 1 (quando t = 2).

Sendo assim temos que os pontos P_{01} e P_{02} satisfazem tanto ao par de equações paramétricas 1 quanto ao de equações paramétricas 2, com isso concluímos que os pares de equações paramétricas 1 e 2 são duas formas diferentes de representar a mesma reta.

Observações.

Para escolher qual forma da equação da reta devemos optar basta observar os dados e escolher a equação de reta mais conveniente:

- Na Equação Geral $y - y_1 = m\ (x - x_1\ )$, precisamos de m (o coeficiente angular da reta) e de um ponto da reta.
- A Equação Reduzida pode ser obtida com o valor de m (o coeficiente angular da reta) e de n (coeficiente linear da reta).
- Para a Equação Segmentária necessitamos ter a equação de uma reta que não passe pela origem.

4.7 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Dados os pontos A = (2,1) e B = (3, 2) pertencentes a uma reta, determine:

a) sua equação geral

b) sua equação reduzida

c) sua equação segmentária

d) um par de equações paramétricas que a definem.

2) Dada a equação geral 2x + 3y +12 = 0 determine:

a) dois pontos da reta

b) sua equação reduzida

c) sua equação segmentária

d) um par de equações paramétricas que a definem.

3) Verifique se os pares de equações paramétricas dadas representam a mesma reta.

$$\text{Equações Paramétricas 1: } \begin{cases} x = 1 + 2.t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad \text{com } t \in \mathbf{R}$$

$$\text{Equações Paramétricas 2: } \begin{cases} x = 3 + 5.t \\ y = 5 + 3.t \end{cases} \quad \text{com } t \in \mathbf{R}$$

4) Determine os pontos em que a reta $x + 2y - 4 = 0$ intercepta os eixos coordenados.

5) Determine n para que o ponto $P = (n,n^2)$ pertença à reta $5x + y - 6 = 0$.

6) Determine a e b para que os pontos $P_1 = (2,5)$ e $P_2 = (1,3)$ pertençam à reta:

$$ax + by - 6 = 0.$$

4.8 POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Aqui verificaremos como determinar a posição relativa de duas retas isto é, se elas são paralelas distintas (ou apenas paralelas), paralelas coincidentes (ou apenas coincidentes) ou concorrentes.

Vejamos as seguintes definições:

• duas retas são ditas ***paralelas coincidentes*** (ou apenas coincidentes) ($r \equiv s$) quando todos os pontos que pertencem a uma delas também pertencem a outra, isto é, elas têm uma infinidade de pontos em comum (visto que toda reta é um conjunto infinito de pontos).

• duas retas são ditas ***paralelas distintas*** (ou apenas paralelas) ($r//s$) quando elas não tem nenhum ponto em comum.

• duas retas são ditas ***concorrentes*** ($r \times s$) quando elas tem apenas um ponto em comum. Tal ponto é dito ponto de interseção entre as retas.

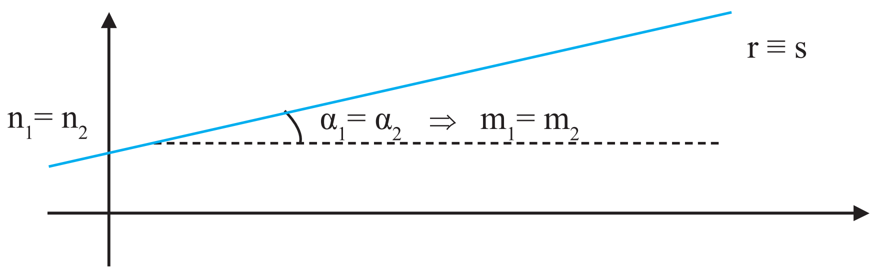
Vemos claramente que seria impossível testar todos os pontos do plano cartesiano para descobrir uma possível interseção entre duas retas, logo apresentaremos como determinar a posição relativa entre duas retas a partir das equações das retas em questão.

A) Se forem dadas às equações reduzidas das retas (r) e (s):

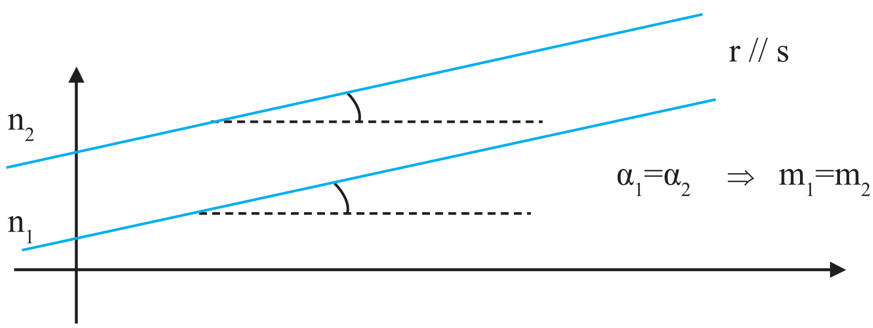
$$(r): y = m_1.x + n_1 \qquad (s): y = m_2.x + n_2$$

Teremos:

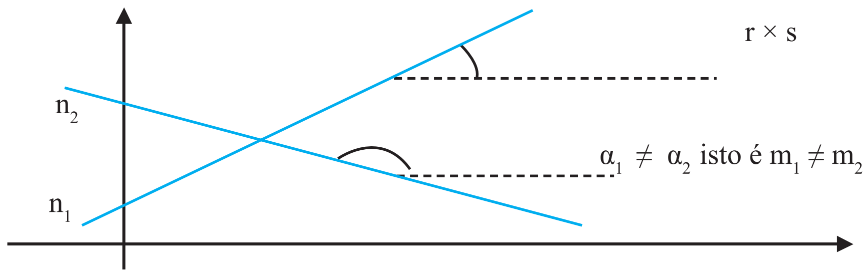
- as retas r e s serão paralelas coincidentes ($r \equiv s$) se seus coeficientes angulares forem iguais ($m_1 = m_2$ isto é $\alpha_1 = \alpha_2$) e seus coeficientes lineares também forem iguais ($n_1 = n_2$). Conforme figura a seguir:



- as retas r e s serão paralelas distintas (r//s) se seus coeficientes angulares forem iguais ($m_1 = m_2$ isto é $\alpha_1 = \alpha_2$) e seus coeficientes lineares forem diferentes ($n_1 \neq n_2$). Conforme figura a seguir:



- as retas r e s serão concorrentes r x s se seus coeficientes angulares forem diferentes ($m_1 \neq m_2$ isto é $\alpha_1 \neq \alpha_2$). Conforme figura a seguir:



B) Se forem dadas às equações gerais das retas (r) e (s):

(r): $a_1.x + b_1.y + c_1 = 0$ (s): $a_2.x + b_2.y + c_2 = 0$

Comparando-se com as equações reduzidas das respectivas retas:

$$m_1 = \frac{(-a_1)}{b_1} \quad e \quad n_1 = \frac{(-c_1)}{b_1} \qquad\qquad m_2 = \frac{(-a_2)}{b_2} \quad e \quad n_2 = \frac{(-c_2)}{b_2}$$

Então:

- as retas r e s serão ***paralelas coincidentes*** ($r \equiv s$) se seus coeficientes angulares forem iguais ($m_1 = m_2$), isto é $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ ou ainda $\frac{a_1}{a_2} =$ $\frac{b_1}{b_2}$ e seus coeficientes lineares também forem iguais ($n_1 = n_2$), isto é $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$ ou ainda $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Isto é:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- as retas r e s serão ***paralelas distintas*** (r//s) se seus coeficientes angulares forem iguais ($m_1 = m_2$), isto é $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ ou ainda $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ e seus coeficientes lineares também forem diferentes ($n_1 \neq n_2$), isto é $\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}$ ou ainda $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Isto é:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

- as retas r e s serão concorrentes ($r \times s$) se seus coeficientes angulares forem diferentes ($m_1 \neq m_2$), isto é $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ ou ainda $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Isto é:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

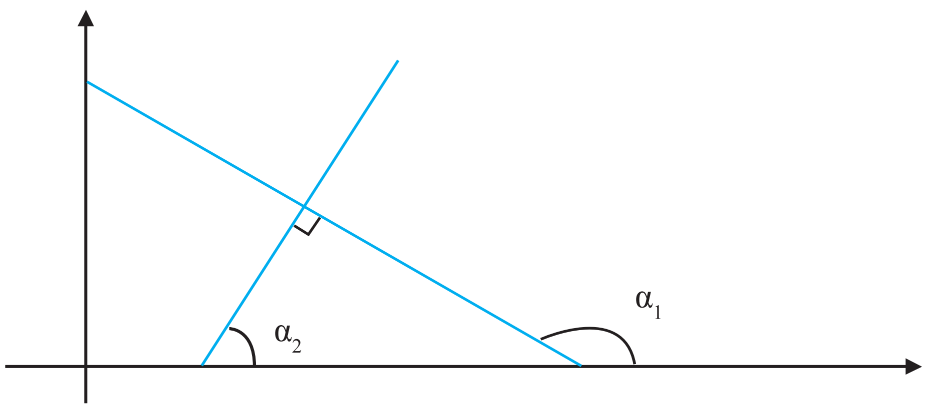
Observação: Se as retas forem dadas a partir de suas equações na forma segmentaria ou paramétrica a observação da posição relativa das duas retas torna-se bem mais difícil e menos direta. Portanto nesses casos sugere-se que as equações dadas sejam reescritas nas formas de equação geral ou reduzida.

4.9 ÂNGULO FORMADO ENTRE DUAS RETAS

Se as retas dadas forem concorrentes podemos ainda definir o ângulo entre as duas retas a partir das informações dadas sobre seus coeficientes angulares

A) Retas perpendiculares ($r \perp s$)

Se duas retas (r): $y = m_1.x + n_1$ e (s): $y = m_2.x + n_2$ são perpendiculares então sendo seus respectivos ângulos de inclinação α_1 e α_2 observe a figura:



Temos claramente pela figura que $\alpha_1 = 90^\circ + \alpha_2$

Logo $tg\ \alpha_1 = tg\ (90^\circ + \alpha_2)$

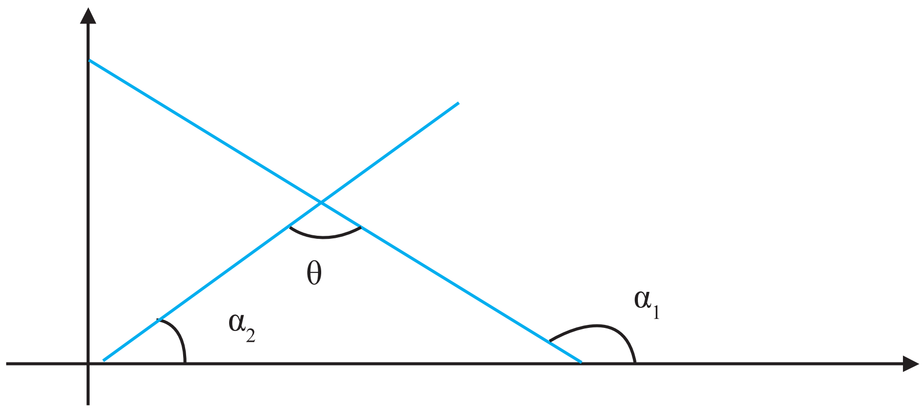
Da trigonometria temos que $= tg\ (90^\circ + \alpha_2) = -\ cotg\ \alpha_2 = -\dfrac{1}{tg\alpha_2}$

Então: $tg\ \alpha_1 = -\dfrac{1}{tg\alpha_2}$ Isto é $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

Ou ainda $m_1.m_2 = -1$

Logo $(r \perp s) \Leftrightarrow m_1.m_2 = -1$

B) **Retas formando um ângulo θ**



Observe que $\alpha_1 = \alpha_2 + \theta$ e, portanto $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ então $tg\ \theta = tg(\alpha_2 - \alpha_2)$

Usando a trigonometria temos que:

$$tg(\alpha_2 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1.tg\alpha_2}$$

Então para determinar o ângulo θ entre duas retas cujas equações reduzidas são:

(r): $y = m_1.x + n_1$ e (s): $y = m_2.x + n_2$ onde $m_1 = tg\ \alpha_1$ e $m_2 = tg\ \alpha_2$

Temos:

$$tg\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$$

Como os ângulos formados entre as retas são dois, um agudo e outro obtuso, devemos considerar na fórmula dada as duas possibilidades então temos que a tangente do ângulo θ entre as duas retas de equações reduzidas dadas é:

$$tg\theta = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$$

Existe uma fórmula de distância entre ponto e reta e entre retas paralelas. Desafiamos você, sem o uso dessas fórmulas, a encontrar a distância entre um ponto dado e uma reta conhecida e também entre duas retas paralelas. Sugestão: lembre que a distância entre um ponto e uma reta é tomada perpendicularmente a mesma. Pesquise em livros didáticos e outras fontes, resolvendo um exemplo sugerido por você e poste a resolução em MATERIAL DO ALUNO.

4.10 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Qual é a posição relativa entre as retas:

(r): $2x + 3y - 5 = 0$ e (s): $4x + 6y - 1 = 0$

Resolução:

Tomando os coeficientes das duas retas temos:

$$= \frac{2}{4} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-1}$$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ então as retas são paralelas distintas.

2) Determinar a para que as retas dadas sejam coincidentes:

(r): $2a + 8y + 6 = 0$ e (s): $2x + ay + (a - 1) = 0$

Resolução:

$\frac{a_1}{a_2} = \qquad = \frac{c_1}{c_2}$ para que sejam coincidentes.

Logo a = 4

3) Uma reta (s) forma um ângulo agudo, com $tg\theta = 3$, com a reta (r): $2x - y + 5 = 0$ e passa pelo ponto dado A = (2,– 1) determine a equação geral dessa reta (s).

Resolução:

Da reta r temos que $m_1 = 2$ logo da fórmula de ângulo entre retas

$$tg\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$$

Teremos $m_2 = -\frac{1}{7}$ ou $m_2 = -1$

Logo temos duas opções de retas (s) que satisfazem o enunciado:

$\frac{b_1}{b_2}$

(s): $x + 7y + 5 = 0$ ou (s): $x + y - 1 = 0$

4.11 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto A = (3, – 5) e é paralela à reta de equação (s): $x - 3y + 1 = 0$.

2) Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto A = (– 1,3) e é perpendicular à reta de equação (s): $x + 5y - 12 = 0$.

3) Determine a medida do ângulo agudo formado pelas retas de equações dadas por:

(s): $2x - y + 3 = 0$ e (r): $6x + 2y - 5 = 0$.

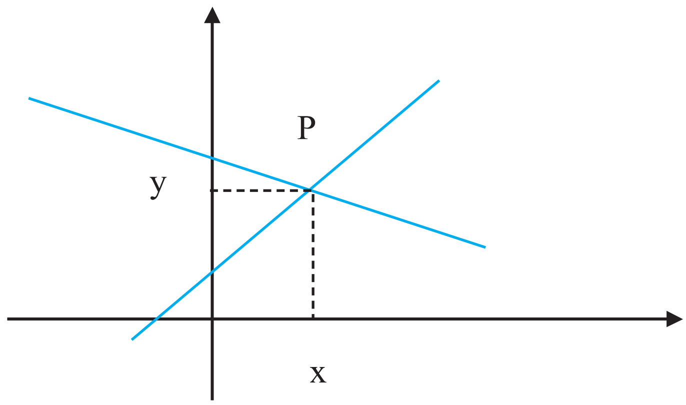
4) As retas (r) e (s) formam um ângulo cuja tangente é 2. Calcule a.

(s): $3ax - y + 2 = 0$ e (r): $ax + y - 1 = 0$.

5. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA EQUAÇÃO, UMA INEQUAÇÃO OU DE SISTEMAS LINEARES EM DUAS VARIÁVEIS

5.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM SISTEMA EQUAÇÕES LINEARES EM DUAS VARIÁVEIS

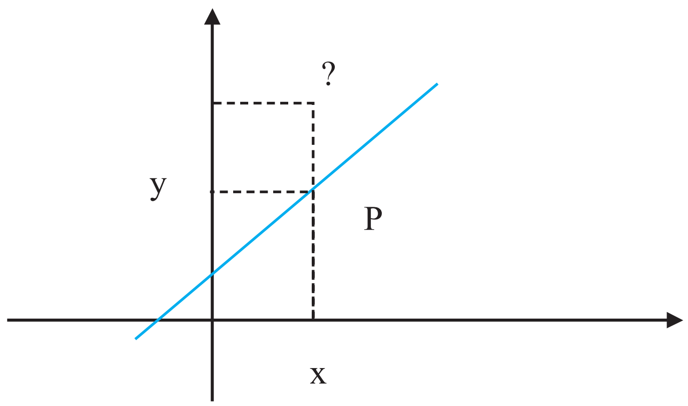
Vimos que a equação linear $a.x + b.y + c = 0$ é a equação geral de uma reta, isto é os pontos $P = (x,y)$ que satisfazem a equação dada são pontos da reta. Desta forma um sistema de duas ou mais equações lineares determina o ponto cujas coordenadas satisfazem todas as equações do sistema, isto é, geometricamente é o ponto de interseção das retas definidas pelas equações gerais dadas.



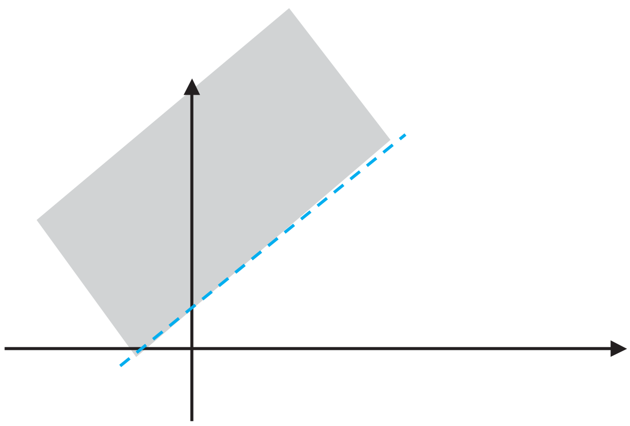
5.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA INEQUAÇÃO LINEAR EM DUAS VARIÁVEIS

Da equação reduzida de uma reta $y = m.x + n$ temos que se $P=(x,y)$ é um ponto genérico da reta então suas coordenadas satisfazem a equação reduzida dada, isto é sua ordenada (valor de y) é igual a $(m.x + n)$.

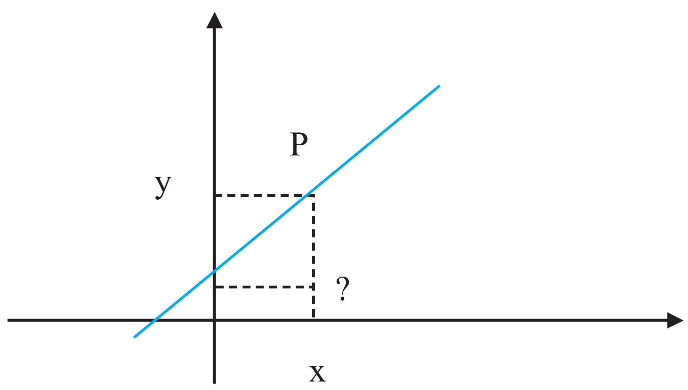
Então numa inequação da forma $y > m.x + n$ estamos procurando os pontos do plano cuja ordenada é maior que a ordenada do ponto P pertencente à reta para cada valor de abscissa (x) dado, como ilustrado na figura a seguir.



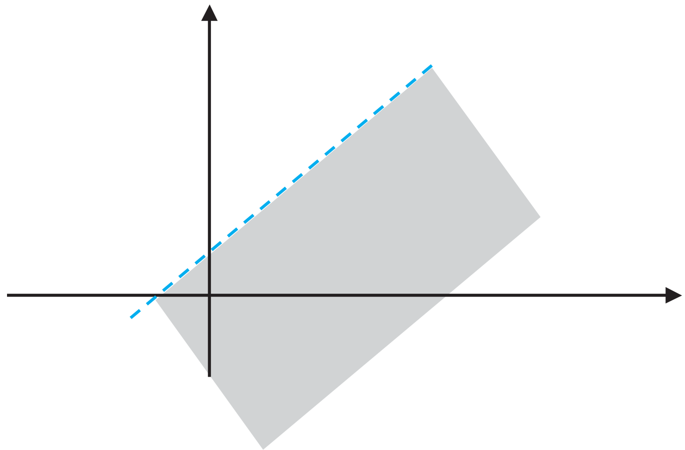
Vemos então que o conjunto solução da inequação y > m.x + n é o conjunto de todos os pontos do plano que estão no semi-plano acima da reta dada.



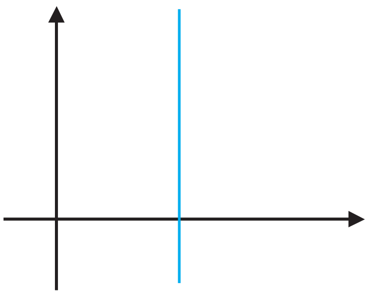
Então, analogamente numa inequação da forma y < m.x + n estamos procurando os pontos do plano cuja ordenada é menor que a ordenada do ponto P pertencente à reta para cada valor de abscissa (x) dado, como ilustrado na figura a seguir:



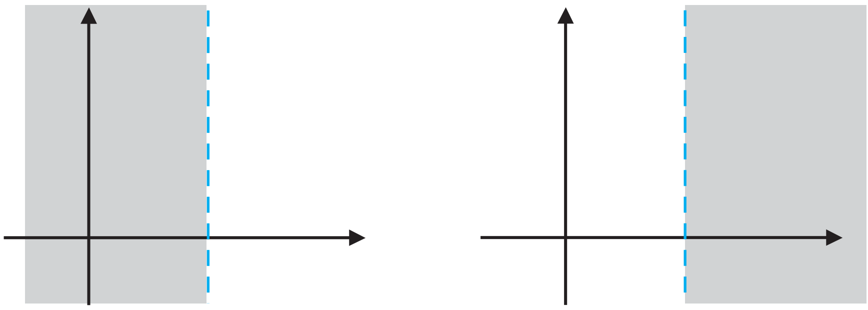
Vemos então que o conjunto solução da inequação $y < m.x + n$ é o conjunto de todos os pontos do plano que estão no semi-plano abaixo da reta dada.



Observação: Se a reta é vertical ela não pode ser escrita na forma reduzida, sua equação geral é: $ax + 0y + c = 0$ ou ainda $ax = -c$, isto é: $x = x_0$, como ilustrado a seguir:



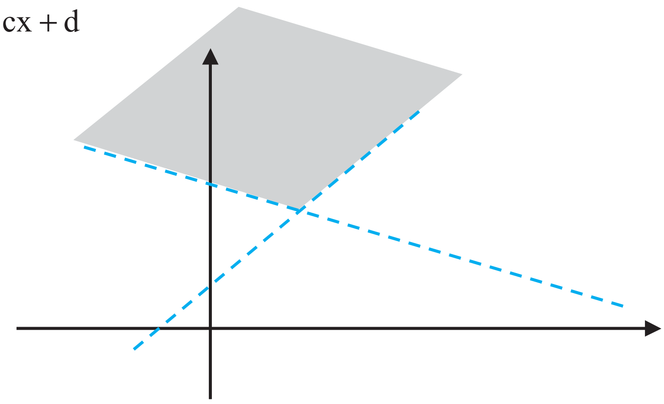
Então a inequação $x < x_0$ tem como interpretação geométrica o semi-plano a esquerda da reta de equação dada e analogamente a inequação $x > x_0$ tem como interpretação geométrica o semi-plano a direita da reta de equação dada, como na figura seguinte:



5.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM SISTEMA DE INEQUAÇÕES LINEARES EM DUAS VARIÁVEIS

Como ilustrado anteriormente, a solução de uma inequação linear é um semi-plano. Logo a solução de um sistema com duas ou mais inequações lineares é a interseção dos diversos semi-planos que são soluções das inequações dadas.

$$\begin{cases} y > ax + b \\ y > cx + d \end{cases}$$



Observação: Nos casos de inequações com os sinais $\leq$ ou $\geq$ a linha da reta ficaria contínua, isto é os pontos da reta também satisfariam a inequação.

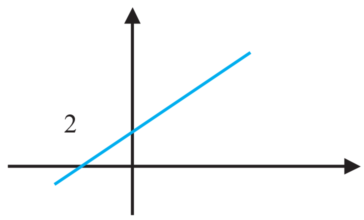
Existem alguns softwares gratuitos na internet que ilustram geometricamente a resolução de equações, inequações e sistemas de inequações, lineares ou não. Dentre eles citamos o Graphmatica e o Graphequation. Pesquise e tente fazer uma paisagem colorida utilizando um dos recursos citados e postem-na em MATERIAL DO ALUNO.

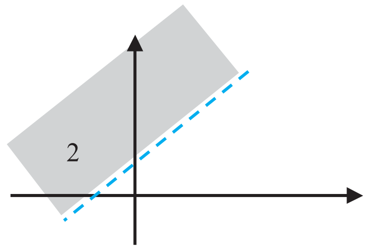
5.4 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Represente graficamente a inequação $y > x + 2$

Resolução:

Determinam-se primeiramente os pontos que satisfazem a equação $y = x + 2$ isto é os pontos da reta de equação $y = x + 2$ e nesse caso os pontos que satisfazem a inequação $y > x + 2$ estão acima da reta.



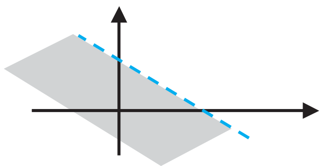


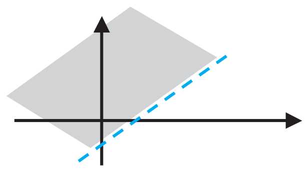
2) Represente graficamente o sistema de inequações

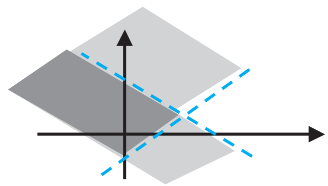
$$\begin{cases} x + y < 2 \\ x - y < 1 \end{cases}$$

Resolução:

Temos duas inequações: $y < -x + 2$ e $y > x - 1$ fazendo os procedimentos separadamente e depois juntando teremos:







5.5 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Represente graficamente as inequações:

a) $y < x + 2$

b) $2x - y < 1$

c) $x + y \leq 2$

d) $2y - x \geq 4$

2) Represente graficamente os sistemas de inequações

a) $\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y < 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y > 1 \\ 2x - y < 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y \leq 1 \\ 2x - y > 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y > 1 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y < 2 \\ y - x \leq 3 \end{cases}$

6. REFERÊNCIAS

• BOYER, C. B., **História da Matemática**, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1.974.

• IEZZI, Gelson e HAZZAN, Samuel **- Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica - vol. 7**, Editora Atual, 2005.

• IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, DEGENSZAJN, David e PÉRIGO, Roberto **- Matemática – volume único**, Editora Atual, 2002.

• LIMA, Elon Lages, - **Coordenadas no Plano (Coleção Professor de Matemática)**, SBM, 1992.

• LIMA, Elon Lages, CARVALHO Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César - **A Matemática do Ensino Médio Volume 2 (Coleção Professor de Matemática)**, SBM, 2000.

• LIMA, Elon Lages, CARVALHO Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César - **A Matemática do Ensino Médio, Volume 3 (Coleção Professor de Matemática)**, SBM, 2001.

• LINDQUIST, M. M and SHULTE A. P.- **Aprendendo e Ensinando Geometria**, Tradução: Domingues, H. H.,Editora Atual, São Paulo 1998.

• **Revista do Professor de Matemática**, IMPA-SBM, Rio de Janeiro.

MATEMÁTICA

Disciplina

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Módulo 2

ESTUDO DAS CÔNICAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

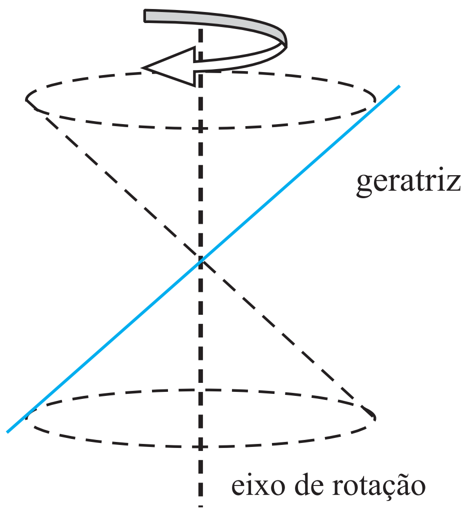
Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

LICENCIATURA

1. CÔNICAS

1.1 SECÇÕES CÔNICAS

O cone (superfície cônica) de revolução é a superfície formada quando uma reta, dita reta ***geratriz***, faz uma rotação de 360º em torno de outra reta, concorrente a ela, dita ***eixo de rotação***, como na figura ilustrada a seguir.



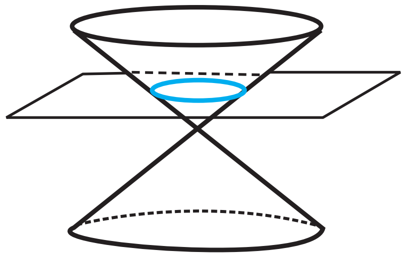
Existem algumas versões sobre aspectos históricos do início dos estudos das seções cônicas, seus criadores, datas e etc. Existe também uma diversidade de definições para elas, cuja equivalência é mostrada na Geometria Elementar. Pesquise em livros didáticos e outras fontes essas origens, produzindo um texto seu e postem-no em MATERIAL DO ALUNO.

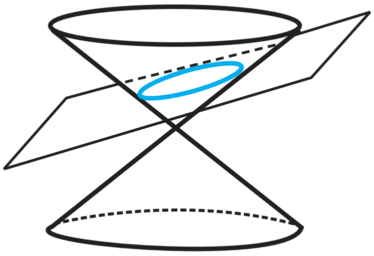
As ***seções cônicas*** são curvas obtidas pela interseção de um cone circular reto de duas folhas com um plano. Exposições gerais sobre as seções cônicas são conhecidas antes da época de Euclides (325 à 265 a.C.) e existe uma diversidade de definições para elas, cuja equivalência é mostrada na Geometria Elementar. Atualmente, as mais usuais referem-se à propriedade foco-diretriz dessas curvas, porém, em seu célebre tratado sobre as seções cônicas, Apolônio de Perga (262 a 190 a.C.) não mencionou essa propriedade e não existia um conceito numérico que correspondia ao que chamamos de excentricidade. Coube a Pierre de Fermat a descoberta de que as seções cônicas podem ser expressas por equações do segundo grau nas coordenadas (x,y).

Se o plano é perpendicular ao eixo a curva de interseção do plano com o cone é uma

Circunferência

Obs: Se passar pelo vértice do cone terá um ***ponto***



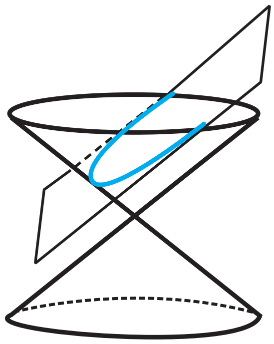


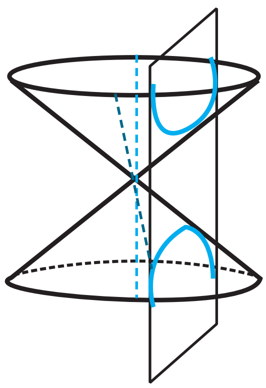
Se o plano é obliquo ao eixo, não paralelo à geratriz, a curva de interseção do plano com o cone é uma

Elípse

Se o plano é paralelo à reta geratriz do cone a curva de interseção do plano com o cone é uma

Parábola





Se o plano é paralelo ao eixo a curva de interseção do plano com o cone é uma

Hipérbole de dois ramos

Obs: Se passar pelo vértice do cone terá um ***par de retas***

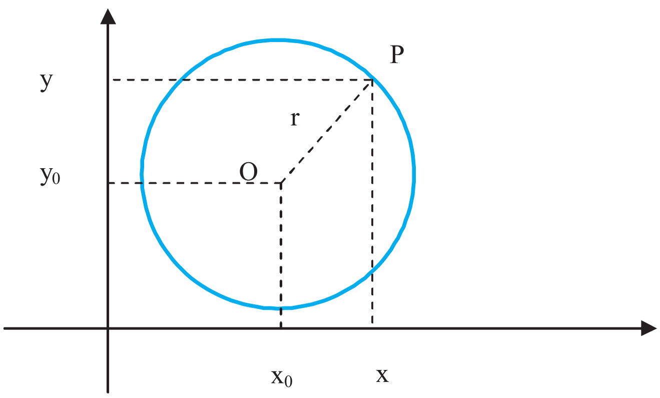
Neste trabalho, mostramos que uma seção cônica é uma curva cuja equação cartesiana é do segundo grau, e inversamente, toda curva cuja equação é do segundo grau é uma cônica.

Estudaremos a diante como descrever cada uma das cônicas num sistema de coordenadas cartesianas ortogonal.

1.2 CIRCUNFÊNCIA

Uma ***circunferência*** é definida como:

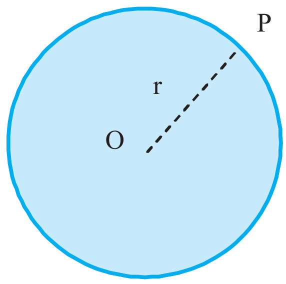
> "Um lugar geométrico de todos os pontos P=(x,y) do plano que estão localizados à mesma distância r, de um ponto dado $O=(x_0,y_0)$ do plano."



A distância r é dita ***raio da circunferência***

O ponto dado $O=(x_0,y_0)$ é dito ***centro da circunferência***:

Observação. Conforme a definição dada acima a circunferência é a linha composta pelos pontos eqüidistante a um ponto dado O. Cuidado com a confusão freqüente de chamar a circunferência de círculo. O círculo é a região plana delimitada pela linha da circunferência



1.2.1 EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Para determinar a equação de uma circunferência de centro no ponto $O=(x_0,y_0)$ e raio r vamos recorrer à definição dada: "A circunferência é o conjunto de todos os pontos cuja distância ao centro O é r". Então determinando a equação desta circunferência teremos:

Da fórmula da distância entre dois pontos do plano temos:

$$\text{Distância P à O} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

Então elevando ao quadrado ambos os membros da equação teremos a equação de uma circunferência centrada no ponto $O=(x_0, y_0)$ e raio r:

$$(\mathscr{C}) : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

1.2.2 EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA

Pode-se obter a partir da equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, pelo desenvolvimento dos produtos notáveis, para obter a equação geral da circunferência:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2.x.x_0 + x_0^2 + y^2 - 2.y.y_0 + y_0^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + (-2.x_0).x + (-2.y_0).y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$$

$$A.x^2 + B.y^2 + C.x.y + D.x + E.y + F = 0$$

onde $A = B = 1$, $C = 0$, $D = (-2.x_0)$, $E = (-2.y_0)$ e $F = (x_0^2 + y_0^2 - r^2)$

Temos ainda que se partirmos de uma equação do tipo:

$$N\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\} = N.r^2$$

Teremos:

$$N.A.x^2 + N.B.y^2 + N.C.x.y + N.D.x + N.E.y + N.F = 0$$

onde $A = B = 1$, $C = 0$, $D = (-2.x_0)$, $E = (-2.y_0)$ e $F = (x_0^2 + y_0^2 - r^2)$

Observação: Uma equação geral de segundo grau completa da forma:

$$A.x^2 + B.y^2 + C.x.y + D.x + E.y + F = 0$$

será equação de uma circunferência se A = B, não nulos, e C = 0

1.2.3 OBTENÇÃO DO CENTRO E DO RAIO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA A PARTIR DE SUA EQUAÇÃO GERAL

Dada a equação geral de uma circunferência $\mathscr{C}$, por exemplo,

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$$

Podemos determinar o centro e o raio de $\mathscr{C}$ completando os quadrados perfeitos (também chamado ***método de redução***.).

Esse método consiste em obter a forma ***reduzida*** a partir da ***equação geral***.

1º passo: Agrupamos os termos em x e os termos em y, isolando num dos membros da equação o termo independente:

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 10y) = - 18.$$

2º passo: Somamos a ambos os membros da igualdade um mesmo termo, de modo que o agrupamento em x se transforme num quadrado perfeito:

$$(x^2 + 6x +9) + (y^2 - 10y) = - 18 + 9.$$

3º passo: Somamos a ambos os membros da igualdade anterior um mesmo termo, de modo que o agrupamento em y se transforme em um quadrado perfeito:

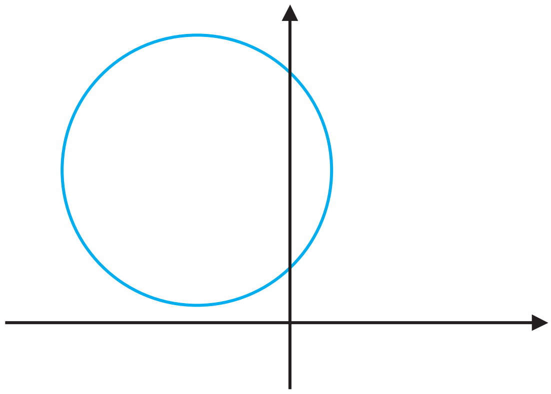
$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25) = - 18 + 9 + 25.$$

E assim, temos:

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 16.$$

Obtivemos assim a equação reduzida da circunferência $\mathscr{C}$.

Portanto seu centro e raio são, respectivamente, O = (– 3, 5) e r = 4.



1.2.4 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determine a equação reduzida e geral de uma circunferência de centro no ponto

C=(– 1, 3) e raio r = 5. Desenhe-a.

Resolução:

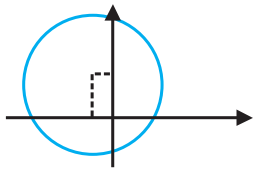
Da fórmula da equação reduzida de uma circunferência

$(x – x_0)^2 + (y – y_0)^2 = r^2$

Substituindo adequadamente os valores dados obtemos:

Equação reduzida: $(x +1)^2 + (y – 3)^2 = 25$

Equação geral: $x^2 + y^2 +2x – 6y – 15 = 0$



2) Dada a equação geral de uma circunferência determine sua equação reduzida, seu centro e raio.

$x^2 + y^2 – 4x + 6y +4 = 0$

Resolução:

Utilizando o ***método de redução***, completando-se os quadrados perfeitos, obtemos:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 4 - 9 + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

Logo comparando com a fórmula da equação reduzida da circunferência temos:

$$C = (2, -3) \quad \text{e raio } 3$$

3) Determine a equação da circunferência que contém pontos

$$A = (1,3),\ B = (0,2) \text{ e } C = (-1,0)$$

Resolução:

Da fórmula da equação reduzida de uma circunferência $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, e usando o fato de que os pontos pertencem à circunferência, então satisfazem sua equação:

$$(1 - x_0)^2 + (3 - y_0)^2 = r^2$$

$$(0 - x_0)^2 + (0 - y_0)^2 = r^2$$

$$(-1 - x_0)^2 + (0 - y_0)^2 = r^2$$

Resolvendo o sistema obtemos que $C = (x_0, y_0) = (1,1)$ e $r = 2$

1.2.5 EXERCÌCIOS PROPOSTOS

1) Escreva as equações reduzida e geral das circunferências de centro C e raio r dados. Desenhe-as:

a) $C = (1,7)$ e $r = 4$

b) $C = (0,2)$ e $r = \sqrt{7}$

c) $C = (4, -8)$ e $r = \sqrt{5}$

d) $C = (-1, -3)$ e $r = \frac{1}{2}$

2) Obtenha as coordenadas do centro e o raio da circunferência de equação geral dada por:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 12y - 44 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

3) Determine a equação reduzida da circunferência que tem centro no ponto $C = (3, -1)$ e que passa pelo ponto $P = (2,4)$.

4) Os pontos $A = (2,3)$ e $B = (4,1)$ são diametralmente opostos numa circunferência. Obtenha a equação geral desta circunferência.

5) Obtenha a equação reduzida de uma circunferência tem centro no ponto $C = (2,1)$ e é tangente à reta (t): $15x + 8y - 20 = 0$.

6) Uma circunferência inscrita num quadrado tem equação $x^2 + (y + 2)^2 = 9$. Determine a equação da circunferência circunscrita a esse quadrado.

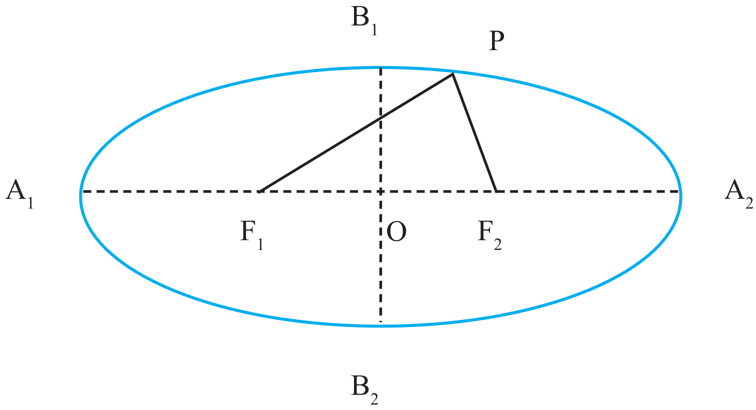
1.3 ELÍPSE

Dados os pontos F_1 e F_2 fixados no mesmo plano, distantes entre si uma medida dada 2c, e uma medida 2a maior que a distância entre os pontos fixados uma ***elipse*** é definida como:

> *"O lugar geométrico de todos os pontos P=(x,y) no mesmo plano dos pontos F_1 e F_2, tais que a soma das distâncias desses pontos a F_1 e F_2 seja sempre igual a 2a"*

Isto é:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$



O ponto dado $O=(x_0,y_0)$ é dito ***centro da elipse***:

Os pontos dados $F_1 = (x_1,y_1)$ e $F_2 = (x_2,y_2)$ são ditos ***focos da elipse***:

A distância $d(F_1, F_2)$ é dita ***distância focal* = 2c**

Observação. Como A_2 e A_2 são pontos da elipse temos que:

$$d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = 2a$$

$$d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = 2a$$

Isto é:

$$d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) + d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = 4a$$

$$d\,(A_1, F_1) + [d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2)] + [d(A_2, F_2) + d(F_1, F_2)] + d(A_2, F_2) = 4a$$

Como $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$ temos:

$$2\{\ d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) + d(A_2, F_2)\ \} = 4a$$

Logo:

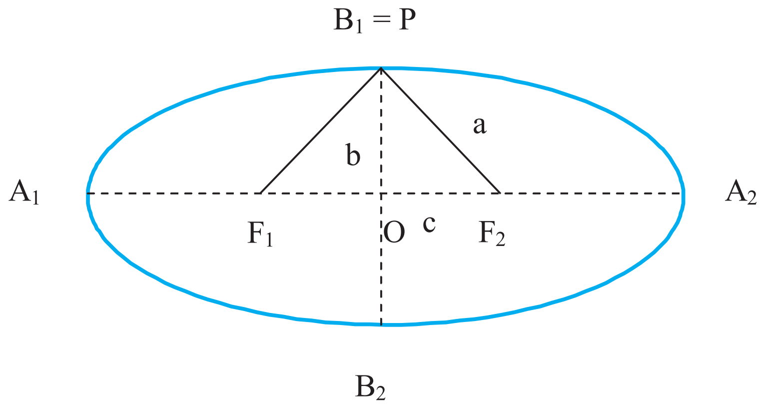
$$d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) + d(A_2, F_2) = 2a$$

Então teremos a distância correspondente ao tamanho do ***eixo maior da elipse* = 2a**

$$d(A_1,A_2) = d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) + d(A_2, F_2) = 2a$$

Além disso, sendo os pontos B_1 e B_2 pertencentes à elipse com distância 2b entre si, cujo segmento forma 90º com o eixo maior, chegaremos ao tamanho do ***eixo menor da elipse* = 2b.**

A partir das definições dadas e tomando o ponto $P = B_1$ observe outra propriedade da elipse:



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

E a medida da razão $\mathbf{e} = \dfrac{c}{a}$ será chamada de ***excentricidade da elipse*** tal medida nos dá o grau de "abaulamento" da elipse, isto é quão "arredondada" ou "alongada" ela é.

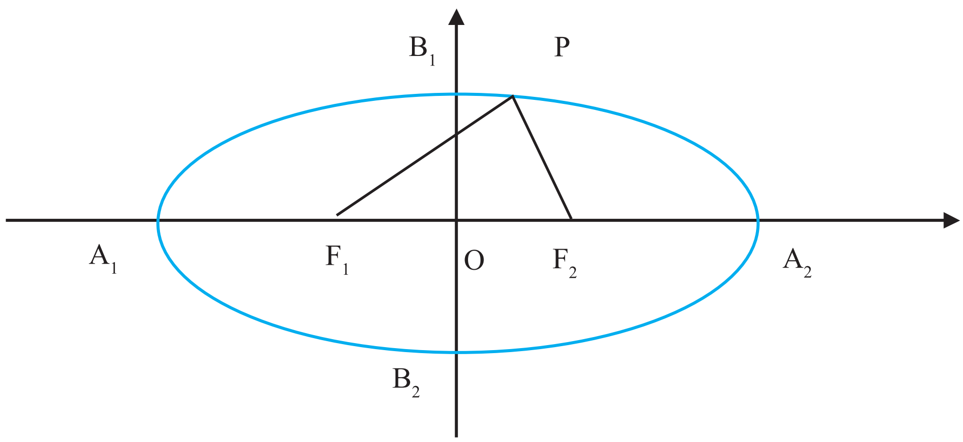
Observe ainda que se c = 0 a elipse degenerada será uma circunferência (por essa razão alguns autores não definem a circunferência como um tipo diferente de cônica, estudam-na sim como um caso particular de elipse).

São chamados ***elementos principais*** de uma elipse:

seu centro, os tamanhos dos seus eixos, a distância focal, as coordenadas dos pontos F_1, F_2, A_1, A_2, B_1, B_2 e sua excentricidade.

1.3.1 EQUAÇÃO REDUZIDA DA ELIPSE

Primeiramente vamos definir a equação de uma elipse, conforme na figura a seguir, de centro no ponto O=(0,0), focos nos pontos no eixo x dados por $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c,0)$, medida do maior eixo 2a, medida do menor eixo 2b e distância focal 2c vamos recorrer à definição dada: "A elipse é o lugar geométrico de todos os pontos P=(x,y) no mesmo plano dos pontos F_1 e F_2, tais que a soma das distâncias desses pontos a F_1 e F_2 seja sempre igual a 2a".



Então determinando a equação reduzida desta elipse teremos:

Da fórmula da distância entre dois pontos do plano temos:

$$d(P,F_1) = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2}$$

$$d(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 2a$$

Isto é:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+(y)^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação teremos:

$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+(y)^2} + (x - c)^2 + y^2$

$x^2 + 2.c.x + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2.c.x + c^2 + y^2$

$4a.\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4.c.x$

$a.\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - c.x$

Elevando ao quadrado, novamente, ambos os membros da equação teremos:

$$a^2.\{(x - c)^2 + y^2\} = (a^2 - c.x)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2c.x + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2c.a^2x + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2.(a^2 - c^2)$$

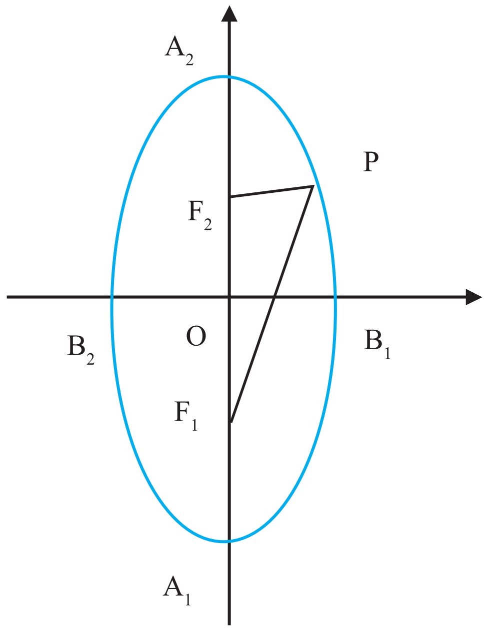
Mas sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, isto é, $b^2 = a^2 - c^2$, então:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2.b^2$$

Dividindo-se ambos os membros por $a^2.b^2$ obteremos a ***equação reduzida*** de uma elipse centrada no ponto O=(0,0), focos nos pontos localizados no eixo x dados cujas coordenadas são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c,0)$, medida do maior eixo 2a e medida do menor eixo 2b:

$$(\mathscr{E}) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

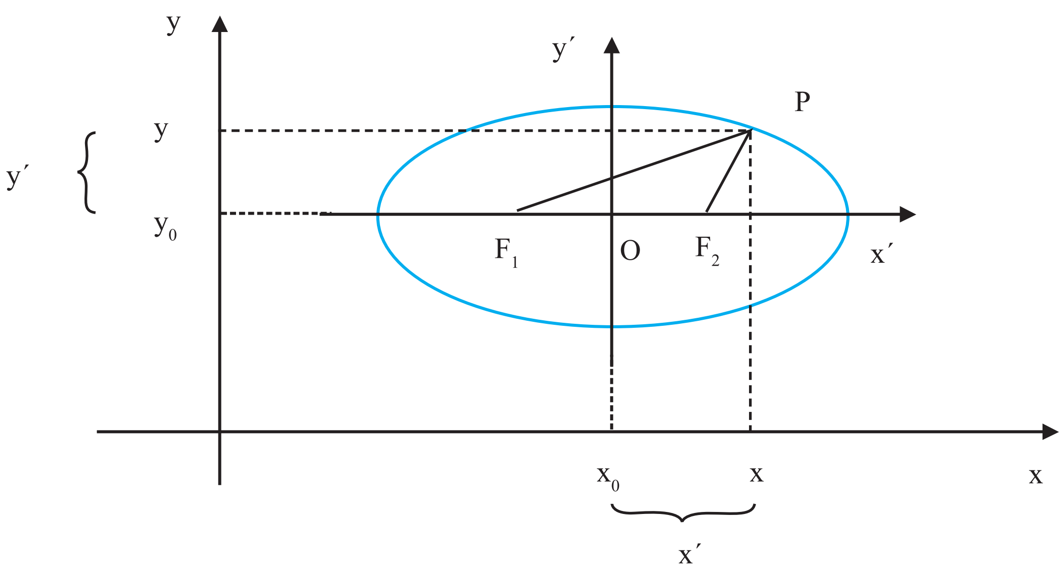
Analogamente chegaríamos à ***equação reduzida*** de uma elipse, conforme na figura a seguir, centrada no ponto O = (0,0), focos nos pontos localizados no eixo y dados por F_1=(0,–c) e F_2 = (0,c), medida do maior eixo 2a e medida do menor eixo 2b:



$$(\mathscr{E}) : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ainda por ***translação*** temos que, se a elipse está centrada no ponto O=(x_0,y_0) com focos em reta paralela ao eixo x, como na figura, teremos $x = x' + x_0$ e $y = y' + y_0$ isto é :

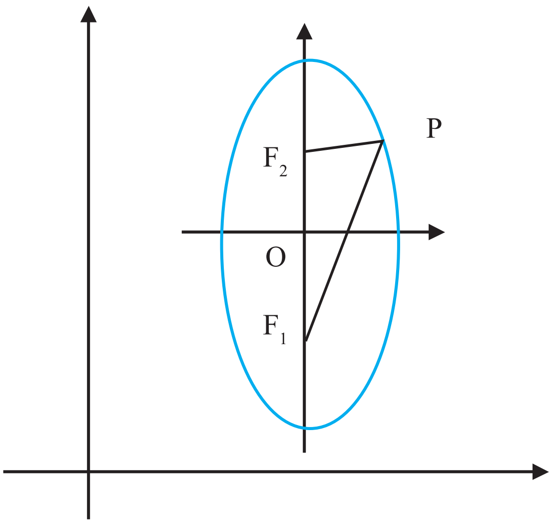
$$x' = x - x_0 \text{ e } y' = y - y_0$$



Substituindo tais valores na equação deduzida anteriormente para $O = (0,0)$ $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$ teremos que a ***equação reduzida*** da elipse centrada no ponto $O = (x_0,y_0)$ com focos em reta paralela ao eixo x:

$$(\mathscr{E}):\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Analogamente chegaríamos à ***equação reduzida*** de uma elipse, conforme na figura a seguir, centrada no ponto $O = (x_0,y_0)$, com focos em pontos localizados numa reta paralela ao eixo y.



$$(\mathscr{E}):\ \frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

Observação. As últimas duas equações dadas

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad \text{e} \quad \frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

se reduzem às primeiras quando $(x_0,y_0) = (0,0)$.

1.3.2 EQUAÇÃO GERAL DA ELIPSE

Pode-se obter a partir da equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, pelo desenvolvimento dos produtos notáveis, para obter a equação geral da elipse:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$$b^2.(x^2 - 2.x.x_0 + x_0^2)+ a^2.(y^2 - 2.y.y_0 + y_0^2) - a^2.b^2 = 0$$

$$b^2.x^2 + a^2.y^2 + (-2.x_0.b^2).x + (- 2.y_0.a^2).y + (b^2.x_0^2 + a^2.y_0^2 - a^2.b^2) = 0$$

$$A.x^2 + B.y^2 + C.x .y + D.x + E.y + F = 0$$

onde $A = b^2$, $B = a^2$, $C = 0$, $D = (-2.\ x_0.b^2)$, $E = (-2.\ y_0.a^2)$ e $F = (b^2.x_0^2 + a^2.y_0^2 - a^2.b^2)$

Temos ainda que se partirmos de uma equação do tipo:

$$N\{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}\}=N$$

Teremos:

$$N.A.x^2 + N.B.y^2 + N.C.x .y + N.D.x + N.E.y + N.F = 0$$

onde $A = b^2$, $B = a^2$, $C = 0$, $D = (-2.\ x_0.b^2)$, $E = (-2.\ y_0.a^2)$ e $F = (b^2.x_0^2 + a^2.y_0^2 - a^2.b^2)$

Observação. Uma equação geral de segundo grau completa da forma:

$$A.x^2 + B.y^2 + C.x.y + D.x + E.y + F = 0$$

será equação de uma elipse se $A \neq B$, não nulos, e $C = 0$

1.3.3 OBTENÇÃO DOS ELEMENTOS PRINCIPAIS DE UMA ELIPSE A PARTIR DE SUA EQUAÇÃO GERAL

Dada a equação geral de uma elipse, por exemplo,

$$4.x^2 + 9.y^2 - 16.x - 90y + 205 = 0$$

Podemos determinar os elementos principais de $\mathscr{E}$ completando os quadrados perfeitos (também chamado ***método de redução***).

Esse método consiste em obter a forma ***reduzida*** a partir da ***equação geral***.

1º passo: Agrupamos os termos em x e os termos em y, isolando num dos membros da equação o termo independente:

$$4.(x^2 - 4x) + 9.(y^2 - 10y) = -205.$$

2º passo: Somamos a ambos os membros da igualdade um mesmo termo, de modo que o agrupamento em x se transforme num quadrado perfeito:

$$4.(x^2 - 4x + 4) + 9.(y^2 - 10y) = -205 + 16.$$

3º passo: Somamos a ambos os membros da igualdade anterior um mesmo termo, de modo que o agrupamento em y se transforme em um quadrado perfeito:

$$4.(x^2 - 4x + 4) + 9.(y^2 - 10y + 25) = -205 + 16 + 225.$$

E assim, temos: $4.(x - 2)^2 + 9.(y - 5)^2 = 36.$

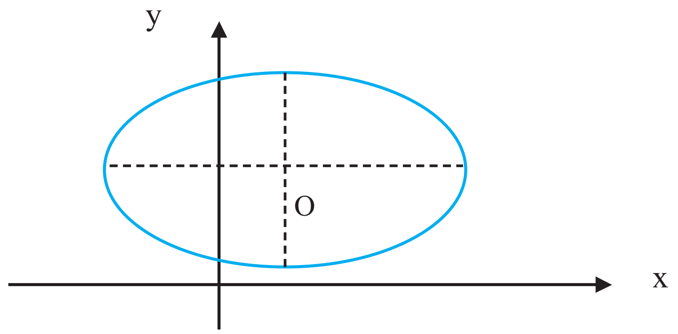
Obtivemos assim, dividindo-se ambos os membros por 36, a ***equação reduzida*** da elipse ($\mathscr{E}$): $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-5)^2}{4} = 1$ cujos elementos principais são:

Centro O = (2,5)

Eixo maior = 2.a = 2.3 = 6 e Eixo menor = 2.b = 2.2 = 4

Distância focal = 2.c = $2.\sqrt{5}$ (pois $c^2 = a^2 - b^2$) e Excentricidade e = $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

F_1= (2–$\sqrt{5}$,5), F_2= (2+$\sqrt{5}$,5), A_1= (–1,5), A_2= (5,5), B_1= (2,3) e B_1= (2,7)



1.3.4 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determine a equação reduzida e geral de uma elipse de semi-eixo menor b = 3 e com focos nos pontos F_1 = (–2,0) e F_2 = (2,0) , desenhe-a.

Resolução:

Como os focos são pontos pertencentes ao eixo x e distam 4 unidades entre si então seu centro é O = (0,0) e sua equação é da forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Como foi dado que b = 3 e sabendo que a distância focal é 2c = 4 temos que a = $\sqrt{13}$

Logo a equação da elipse é: $\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{y^2}{9}=1$

2) Determine as coordenadas dos focos da elipse de equação $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$

Resolução:

Reescrevendo a equação dada temos $25x^2 + 4y^2 = 100$.

Dividindo-se ambos os membros da equação dada por 100 obteremos:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$$

Daí temos que a = 2, b = 5 e O = (0,0), então c = $\sqrt{21}$

Além disso da equação vemos que os focos estão no eixo y.

Portanto os focos da elipse de equação dada são:

$$F_1 = (0, \sqrt{21}) \quad e \quad F_2 = (0, -\sqrt{21})$$

3) O ponto P = (0,1) pertence a uma elipse de focos F_1 = (– 1, 0) e F_2 = (1,0), então qual é a equação dessa elipse?

Resolução:

Temos que 2c = 2, a elipse tem maior eixo no eixo x e seu centro é O = (0,0).

Como P pertence a elipse então 2b = 2 daí a = $\sqrt{2}$, então a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$$

1.3.5 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Determine as medidas dos eixos e as coordenadas dos focos das elipses de equações, desenhe-as:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

b) $5x^2 + 6y^2 = 30$

c) $4x^2 + 3y^2 = 12$

d) $x^2 + \frac{y^2}{7} = 1$

2) Escreva a equação geral das elipses tais que :

a) $A_2 = (6, 0)$ e $B_1 = (0,4)$.

b) $A_2 = (0, 5)$ e $B_1 = (-1,0)$.

c) $A_1 = (-7, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{13},0)$.

d) $F_1 = (0,-\sqrt{5})$ e $B_2 = (2, 0)$

3) Os eixos de uma elipse medem 26 e 24. Qual é a distância focal dessa elipse?

4) Uma elipse de focos nos pontos $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4,0)$ tem excentricidade $e = \frac{2}{5}$. Determine sua equação geral.

5) O ponto $P = (2,1)$ pertence à elipse de equação $nx^2 + 2y^2 = 6$. Então determine n e calcule a distância focal dessa elipse.

6) O ponto $P = (-1,3)$ pertence a uma elipse cujos focos são $F_1 = (-3, 1)$ e $F_2 = (1,1)$, calcule a medida dos eixos, a excentricidade e a equação reduzida da elipse.

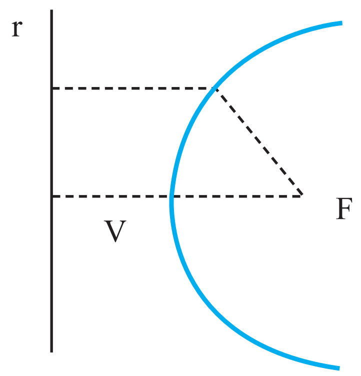
1.4 PARÁBOLA

Dada uma reta r e um ponto F, não pertencente a r, distantes entre si, uma medida conhecida 2p, uma ***parábola*** é definida como:

> *"O lugar geométrico de todos os pontos P=(x,y), no mesmo plano do ponto F e da reta r, eqüidistantes à reta dada e ao ponto F".*

Isto é:

$$d(P,F) = d(P,r)$$



A reta r é dita reta ***diretriz*** da parábola

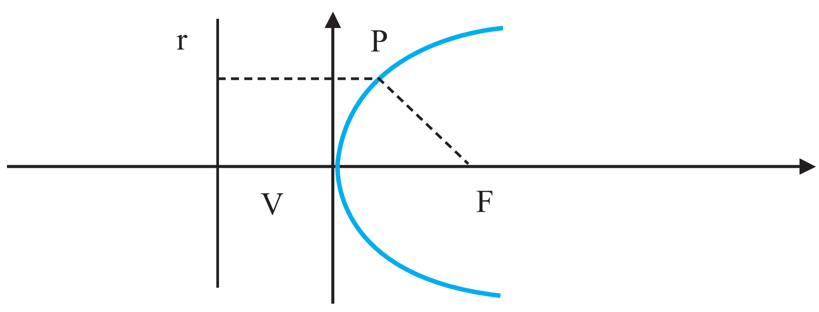
O ponto dado $F = (x_1,y_1)$ é dito ***fóco da elipse***:

O ponto dado $V= (x_0,y_0)$ é dito ***vértice da elipse*** (ponto mais próximo de r)

1.4.1 EQUAÇÃO REDUZIDA DA PARÁBOLA

Primeiramente vamos definir a equação de uma ***parábola***, conforme na figura a seguir, de vértice no ponto O=(0,0), foco num ponto no eixo x dado por F = (p, 0), distância à reta r (paralela ao eixo y) medindo 2p (p>0), vamos recorrer à definição dada:

> *"A parábola é o lugar geométrico de todos os pontos P=(x,y), no mesmo plano do ponto F e da reta r, eqüidistantes à reta dada e ao ponto F".*



Então determinando a equação reduzida desta parábola teremos:

Da fórmula da distância entre dois pontos do plano temos:

$$d(P,F) = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

Além disso, é fácil ver que a equação da reta diretriz, nesse caso, é $x = -p$ e, portanto:

$$d(P,r) = x + p$$

$$d(P,F) = d(P,r)$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = x + p$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação teremos:

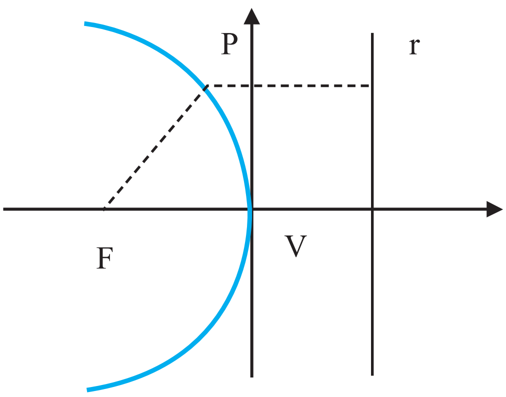
$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Portanto a ***equação reduzida*** da parábola de vértice no ponto O=(0,0), foco num ponto no eixo x será:

$$(\mathscr{P}): \quad y^2 = 4.p.x \quad \text{com } p>0$$

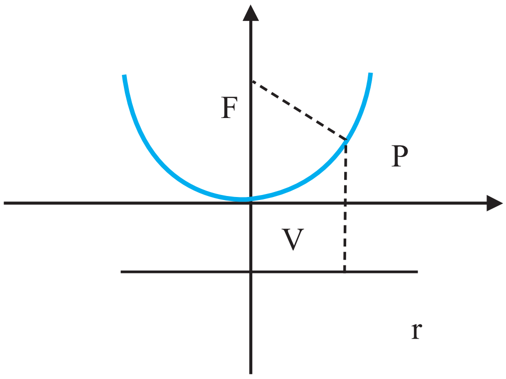
Analogamente teríamos as equações reduzidas nos casos ilustrados nas figuras seguintes:



Se o ponto F estivesse à esquerda do vértice, como na figura:

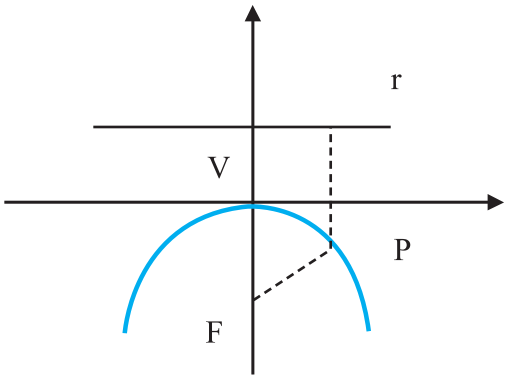
$$(\mathscr{P}): \quad y^2 = -4.p.x \quad \text{com } p>0$$

Ainda se os eixos x e y forem "invertidos" teremos os casos:



Se o ponto F estivesse acima do vértice, como na figura:

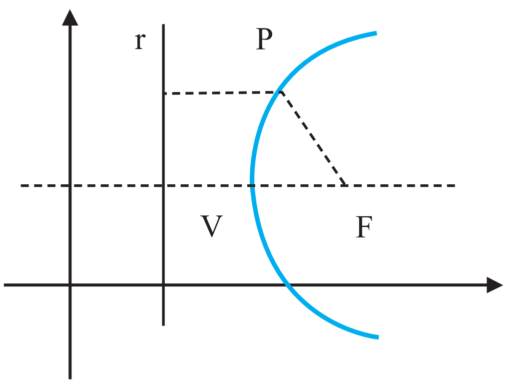
$(\mathscr{P})$: $x^2 = 4.p.y$ com $p>0$



Se o ponto F estivesse abaixo do vértice, como na figura:

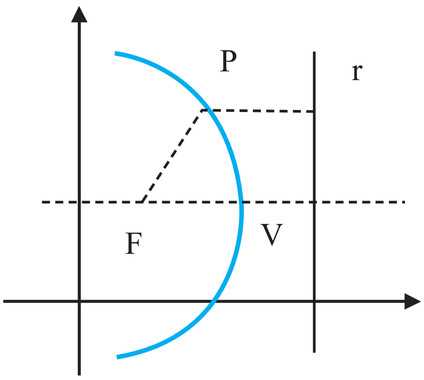
$(\mathscr{P})$: $x^2 = -4.p.y$ com $p>0$

Ainda por translações chegaremos às ***equações reduzidas*** nos vários casos ilustrados nos quais V= (x_0,y_o):



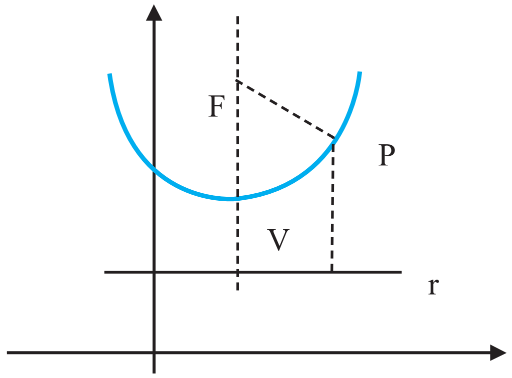
Se o ponto F estivesse à direita do vértice V= (x_0,y_o), como na figura:

$(\mathscr{P})$: $(y - y_0)^2 = 4.p.(x - x_0)$ com $p>0$



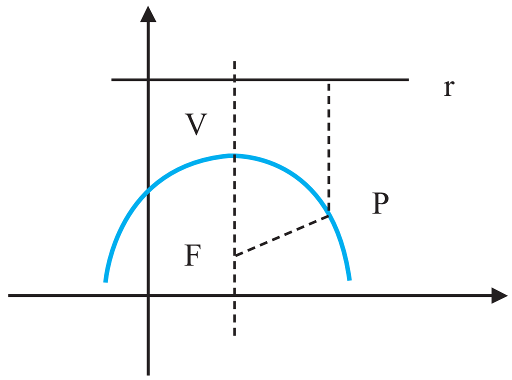
Se o ponto F estivesse à esquerda do vértice V= (x_0,y_o), como na figura:

$(\mathscr{P})$: $(y - y_0)^2 = -4.p.(x - x_0)$ com $p>0$



Se o ponto F estivesse acima do vértice $V=(x_0,y_0)$, como na figura:

$(\mathscr{P}): \ (x - x_0)^2 = 4.p.(y - y_0) \quad \text{com } p>0$



Se o ponto F estivesse abaixo do vértice $V=(x_0,y_0)$, como na figura:

$(\mathscr{P}): \ (x - x_0)^2 = -4.p.(y - y_0) \quad \text{com } p>0$

Observação. As últimas quatro equações dadas

$$(y - y_0)^2 = 4.p.(x - x_0) \qquad \text{e} \qquad (y - y_0)^2 = -4.p.(x - x_0)$$

$$(x - x_0)^2 = 4.p.(y - y_0) \qquad \text{e} \qquad (x - x_0)^2 = -4.p.(y - y_0)$$

se reduzem às primeiras quando $(x_0,y_0) = (0,0)$.

1.4.2 EQUAÇÃO GERAL DA PARÁBOLA

Pode-se obter a partir da equação $(y - y_0)^2 = 4.p.(x - x_0)$, pelo desenvolvimento do produto notável, para obter a ***equação geral*** da parábola:

$$(y - y_0)^2 = 4.p.(x - x_0)$$

$$y^2 - 2.y_0.y + y_0^2 = 4.p.x - 4.p.x_0$$

$$y^2 - 4.p.x - 2.y_0.y + (y_0^2 + 4.p.x_0) = 0$$

$$0.x^2 + y^2 - 4.p.x - 2.y_0.y + (y_0^2 + 4.p.x_0) = 0$$

$$A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$$

onde $A = 0$, $B = 1$, $C = -4.p$, $D = .-2.y_0$ e $E = (y_0^2 + 4.p.x_0)$

Analogamente realizamos os cálculos para as equações referentes aos outros casos:

$$(y - y_0)^2 = -4.p.(x - x_0)$$

$$y^2 - 2.y_0.y + y_0^2 = -4.p.x + 4.p.x_0$$

$$y^2 + 4.p.x - 2.y_0.y + (y_0^2 - 4.p.x_0) = 0$$

$$0.x^2 + y^2 + 4.p.x - 2.y_0.y + (y_0^2 - 4.p.x_0) = 0$$

$$A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$$

onde $A = 0$, $B = 1$, $C = +4.p$, $D = .-2.y_0$ e $E = (y_0^2 - 4.p.x_0)$

$$(x - x_0)^2 = 4.p.(y - y_0)$$

$$x^2 - 2.x_0.x + x_0^2 = 4.p.y - 4.p.y_0$$

$$x^2 - 4.p.y - 2.x_0.x + (x_0^2 + 4.p.y_0) = 0$$

$$x^2 + 0.y^2 - 2.x_0.x - 4.p.y + (x_0^2 + 4.p.y_0) = 0$$

$$A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$$

onde $A = 1$, $B = 0$, $C = -2.x_0$, $D = -4.p$ e $E = (y_0^2 + 4.p.x_0)$

$$(x - x_0)^2 = -4.p.(y - y_0)$$

$$x^2 - 2.x_0.x + x_0^2 = -4.p.y + 4.p.y_0$$

$$x^2 + 4.p.y - 2.x_0.x + (x_0^2 - 4.p.y_0) = 0$$

$$x^2 + 0.y^2 - 2.x_0.x + 4.p.y + (x_0^2 - 4.p.y_0) = 0$$

$$A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$$

onde $A = 1$, $B = 0$, $C = -2.x_0$, $D = +4.p$ e $E = (y_0^2 - 4.p.x_0)$

1.4.3 OBTENÇÃO DO VÉRTICE E DO FOCO DE UMA PARÁBOLA A PARTIR DE SUA EQUAÇÃO GERAL

Dada a equação geral de uma parábola, por exemplo,
$y^2 - 4.x - 10y + 53 = 0$.

Podemos determinar os elementos principais de $\mathscr{P}$ completando os quadrados perfeitos (também chamado ***método de redução***.).

Esse método consiste em obter a forma ***reduzida*** a partir da ***equação geral***.

1º passo: Agrupamos os termos em x e os termos em y, isolando num dos membros da equação o termo independente:

$$-4x + (y^2 - 10y) = -53.$$

2º passo: Somamos a ambos os membros da igualdade um mesmo termo, de modo que o agrupamento em y se transforme num quadrado perfeito:

$$-4x + (y^2 - 10y + 25) = -53 + 25.$$

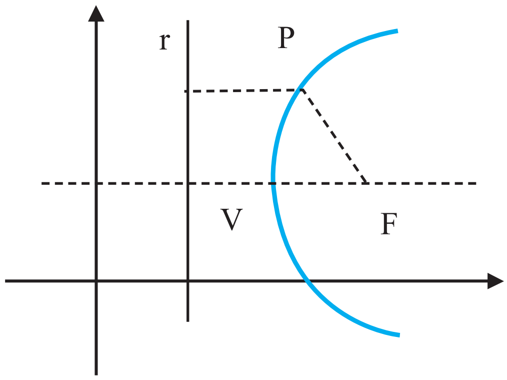
3º passo: Arrumamos os termos da equação isolando-se o quadrado perfeito em y:

E assim, temos: $(y - 5)^2 = -28 + 4.x$.

Obtivemos assim, colocando 4 em evidência no segundo termo, a ***equação reduzida*** da parábola ($\mathscr{P}$): $(y - 5)^2 = 4.(x - 7)$

Que é a equação reduzida de uma parábola cujos elementos principais são:

Vértice $V = (7,5)$
$p = 1$
Foco $F = (8,5)$
Reta diretriz: $x = 6$



1.4.4 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Obter a equação da parábola de foco F = (– 3,0) e vértice V = (0,0), a equação de sua reta diretriz e desenhe-a.

Resolução:

A distância entre P e V determina o valor de p, logo p = 3.

Então, como P e V estão no eixo x, a equação da parábola é da forma:

$$y^2 = -4.p.x$$

Logo a equação procurada é:

$$y^2 = -12.x$$

2) Determine as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz da parábola de equação $x^2 - 8y = 0$.

Resolução:

Reescrevendo a equação dada teremos: $x^2 = 8y$

Claramente essa equação é do tipo: $x^2 = 4.p.y$, logo p = 2.

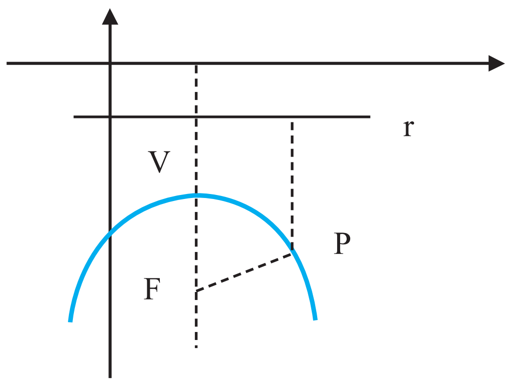
Pelo tipo de equação reconhecemos que a parábola tem vértice V = (0,0) e foco no eixo y, a saber: F = (0,2)

Além disso sua reta diretriz é dada pela equação: $y = -2$

3) Obtenha a equação e a representação gráfica da parábola de foco $F = (4, -5)$ e reta diretriz dada por $y = -1$.

Resolução:

Dados o foco e a diretriz conseguimos determinar a posição e equação da parábola:



Como o ponto F está abaixo do vértice $V=(4,-3)$ e $p = 2$ como na figura:

$$(\mathscr{P}) : \ (x-4)^2 = -8.(y+3)$$

4) Dada a equação geral $x^2 + 4x - 8y + 12 = 0$ obtenha as coordenadas do vértice e do foco da parábola representada pela equação dada.

Resolução:

Agrupando as parcelas em x teremos:

$$(x^2 + 4x) = 8y - 12$$

Completando os quadrados:

$$(x^2 + 4x + 4) = 8y - 12 + 4$$

$$(x + 2)^2 = 8y - 8$$

$$(x + 2)^2 = 8.(y - 1)$$

Então o vértice da parábola é $V = (-2,1)$, $p = 2$ e o foco é $F = (-2,3)$

1.4.5 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Determine o valor de p, as coordenadas do foco e do vértice e a equação da reta diretriz das parábolas dada

a) $x^2 = 6y$

b) $y^2 = -10x$

c) $x^2 + 6x - 12y + 21 = 0$

d) $y^2 + 8x - 10y + 25 = 0$

2) Determine a equação geral da parábola de foco F = (2,3) e vértice V = (5,3)

3) Determine a equação da parábola, sabendo-se que V = (–1, –3), seu foco está à esquerda de V numa reta paralela ao eixo x e o ponto P = (–2, –5) pertence á parábola.

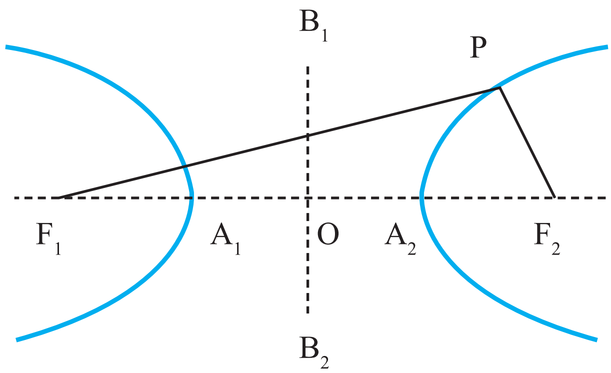
4) Determine o valor de p, as coordenadas do foco e a equação da parábola com vértice na origem com foco no eixo x à direita do vértice, sabendo-se que $M = (\frac{16}{3}, -4)$ pertence a ela.

1.5 HIPÉRBOLE DE DUAS FOLHAS

Dados os pontos F_1 e F_2 fixados no mesmo plano, distantes entre si uma medida dada 2c, e uma medida 2a maior que a distância entre os pontos fixados uma ***hipérbole*** é definida como:

> *"O lugar geométrico de todos os pontos P=(x,y) no mesmo plano dos pontos F_1 e F_2, tais que a diferença entre as distâncias desses pontos a F_1 e F_2 seja sempre igual a 2a".*

Isto é: $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$



O ponto dado $O=(x_0, y_0)$ é dito ***centro da hipérbole***

Os pontos dados $F_1 = (x_1, y_1)$ e $F_2 = (x_2, y_2)$ são ditos ***focos da hipérbole***

A distância $d(F_1, F_2)$ é dita ***distância focal* = 2c**

Observação: Como A_1 e A_2 são pontos da hipérbole temos que:

$$d(A_1, F_2) - d(A_1, F_1) = 2a$$

$$d(A_2, F_1) - d(A_2, F_2) = 2a$$

Isto é:

$$d(A_1, F_2) - d(A_1, F_1) = d(A_2, F_1) - d(A_2, F_2)$$

$$[d(A_1, A_2) + d(A_2, F_2)] - d(A_1, F_1) = [d(A_1, A_2) + d(A_1, F_1)] - d(A_2, F_2)$$

Então

$$d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$$

Logo temos:

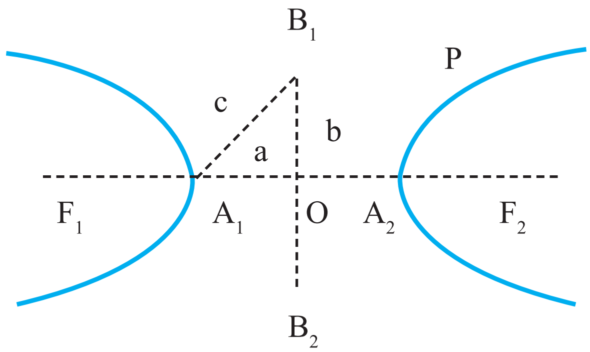
$$[d(A_1, A_2) + d(A_2, F_2)] - d(A_1, F_1) = 2a$$

Então: $d(A_1, A_2) = 2a$

essa será a distância correspondente ao tamanho do ***eixo real da hipérbole* = 2a.**

Além disso, sendo os pontos B_1 e B_2 pertencentes a uma reta passando pelo centro O da hipérbole com distância 2b entre si, chegaremos ao tamanho do ***eixo imaginário da hipérbole* = 2b.**

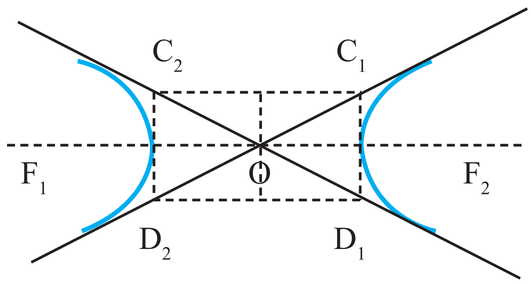
A partir das definições dadas e tomando o ponto $P = B_1$ observe outra propriedade da elipse:



Pelo Teorema de Pitágoras: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

E a medida da razão $\mathbf{e} = \dfrac{c}{a}$ será chamada de ***excentricidade da hipérbole*** tal medida nos dá o grau de "abaulamento" da hipérbole, isto é quão "achatada" ou "alargada" ela é. Além disso, como ilustrado na figura a seguir associada à hipérbole existe um par de retas, ditas retas assíntotas, das quais a hipérbole se aproxima se nunca atingir. Essas retas são as retas suporte das diagonais do retângulo auxiliar $C_1C_2D_1D_2$ cujos lados medem 2a e 2b.

São chamados ***elementos principais*** de uma hipérbole:

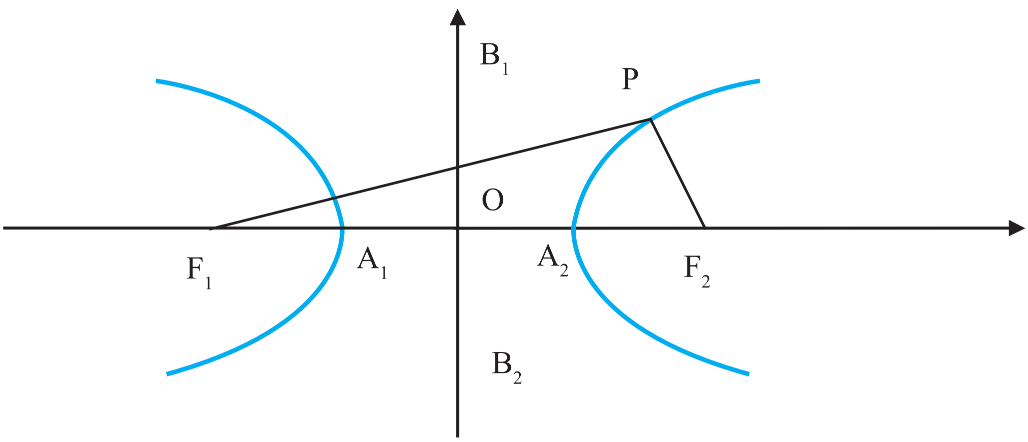


Seu centro, os tamanhos dos seus eixos real e imaginário, a distância focal, os pontos F_1, F_2, A_1, A_2, B_1, B_2, sua excentricidade e as equações das duas retas assíntotas (uma delas passa pelos pontos O e C_1 e a outra pelos pontos O e C_2)

1.5.1 EQUAÇÃO REDUZIDA DA HIPÉRBOLE

Primeiramente vamos definir a equação de uma hipérbole, conforme na figura a seguir, de centro no ponto O=(0,0), focos nos pontos no eixo x dados por $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c,0)$, medida do eixo real 2a, medida do eixo imaginário 2b e distância focal 2c vamos recorrer à definição dada:

> *"A hipérbole é o lugar geométrico de todos os pontos P=(x,y) no mesmo plano dos pontos F_1 e F_2, tais que a diferença entre distâncias desses pontos a F_1 e F_2 seja sempre igual a 2a".*



Então determinando a equação reduzida desta hipérbole teremos:

Da fórmula da distância entre dois pontos do plano temos:

$$d(P,F_1) = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2}$$

$$d(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 2a$$

Isto é:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação teremos:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2.c.x + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a.\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} + x^2 - 2.c.x + c^2 + y^2$$

$$4a.\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 4.c.x - 4a^2$$

$$a.\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = c.x - a^2$$

Elevando ao quadrado, novamente, ambos os membros da equação teremos:

$$a^2.\{(x - c)^2 + y^2 \} = (c.x - a^2)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2c.x + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2c.a^2x + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2).x^2 + a^2y^2 = a^2.(a^2 - c^2)$$

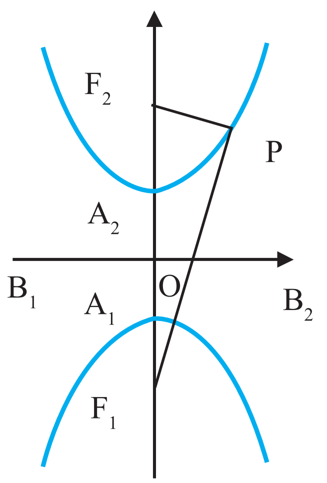
Mas sabemos que $c^2 = a^2 + b^2$, isto é, $(-b^2) = a^2 - c^2$, então:

$$(-b^2).x^2 + a^2y^2 = a^2.\ (-b^2)$$

Dividindo-se ambos os membros por a^2. $(-b^2)$ obteremos a ***equação reduzida*** de uma hipérbole centrada no ponto O=(0,0), focos nos pontos localizados no eixo x dados cujas coordenadas são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c,0)$, medida do eixo real 2a e medida do eixo imaginário 2b:

$$(\mathscr{H}): \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

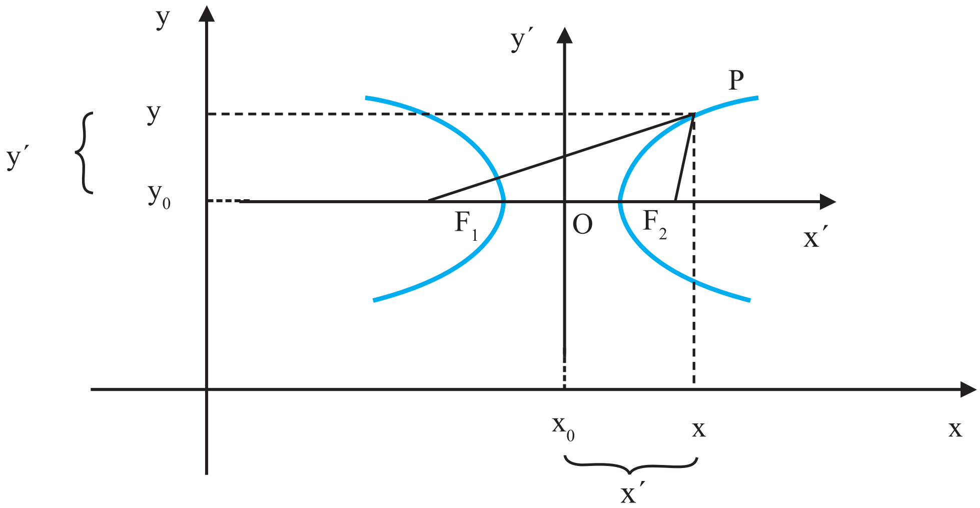
Analogamente chegaríamos à ***equação reduzida*** de uma hipérbole, conforme na figura a seguir, centrada no ponto O = (0,0), focos nos pontos localizados no eixo y dados por $F_1=(0,-c)$ e $F_2 = (0,c)$, medida do maior eixo 2a e medida do menor eixo 2b:



$$(\mathscr{H}): \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ainda por ***translação*** temos que, se a hipérbole está centrada no ponto $O=(x_0,y_0)$ com focos em reta paralela ao eixo x, como na figura, teremos $x = x' + x_0$ e $y = y' + y_0$ isto é :

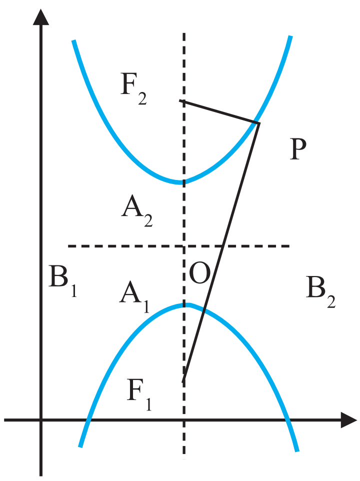
$$x' = x - x_0 \text{ e } y' = y - y_0$$



Substituindo tais valores na equação deduzida anteriormente para O=(0,0), $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=1$ teremos que a ***equação reduzida*** da hipérbole centrada no ponto O=(x_0,y_0) com focos em reta paralela ao eixo x:

$$(\mathscr{H}):\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Analogamente chegaríamos à ***equação reduzida*** de uma hipérbole, conforme na figura a seguir, centrada no ponto O = (x_0,y_0), com focos em pontos localizados numa reta paralela ao eixo y.



$$(\mathscr{H}):\ \frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Observação: As últimas duas equações dadas $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ e $\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$ se reduzem às primeiras quando (x_0,y_0) = (0,0).

1.5.2 EQUAÇÃO GERAL DA HIPÉRBOLE

Pode-se obter a partir da equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, pelo desenvolvimento dos produtos notáveis, para obter a equação geral da hipérbole:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$b^2.(x^2 - 2.x.x_0 + x_0^2) - a^2.(y^2 - 2.y.y_0 + y_0^2) - a^2.b^2 = 0$

$b^2.x^2 - a^2.y^2 + (-2.x_0.b^2).x + (2.y_0.a^2).y + (b^2.x_0^2 - a^2.y_0^2 - a^2.b^2) = 0$

$A.x^2 + B.y^2 + C.x\ .y + D.x + E.y + F = 0$

onde $A = b^2$, $B = -a^2$, $C = 0$, $D = (-2.\ x_0.b^2)$, $E = (2.\ y_0.a^2)$ e
$F = (b^2.x_0^2 - a^2.y_0^2 - a^2.b^2)$

Temos ainda que se partirmos de uma equação do tipo:

$$N\{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}\} = N$$

Teremos:

$$N.A.x^2 + N.B.y^2 + N.C.x\ .y + N.D.x + N.E.y + N.F = 0$$

onde $A = b^2$, $B = -a^2$, $C = 0$, $D = (-2.\ x_0.b^2)$, $E = (2.\ y_0.a^2)$ e
$F = (b^2.x_0^2 - a^2.y_0^2 - a^2.b^2)$

Observação: Uma equação geral de segundo grau completa da forma:

$$A.x^2 + B.y^2 + C.x.y + D.x + E.y + F = 0$$

será equação de uma hipérbole se $A.B < 0$ (A e B têm sinais contrários) e $C = 0$

1.5.3 OBTENÇÃO DOS ELEMENTOS PRINCIPAIS DE UMA HIPÉRBOLE A PARTIR DE UMA HIPÉRBOLE DE SUA EQUAÇÃO GERAL

Dada a equação geral de uma hipérbole, por exemplo, $4.x^2 - 9.y^2 - 16.x + 90y - 245 = 0$

Podemos determinar os elementos principais de $\mathscr{H}$ completando os quadrados perfeitos (também chamado ***método de redução***.).

Esse método consiste em obter a forma ***reduzida*** a partir da ***equação geral***.

1º passo: Agrupamos os termos em *x* e os termos em *y*, isolando num dos membros da equação o termo independente:

$$4.(x^2 - 4x) - 9.(y^2 - 10y) = 245.$$

2º passo: Somamos a ambos os membros da igualdade um mesmo termo, de modo que o agrupamento em *x* se transforme num quadrado perfeito:

$$4.(x^2 - 4x + 4) - 9.(y^2 - 10y) = 245 + 16.$$

3º passo: Somamos a ambos os membros da igualdade anterior um mesmo termo, de modo que o agrupamento em *y* se transforme em um quadrado perfeito:

$$4.(x^2 - 4x + 4) - 9.(y^2 - 10y + 25) = 245 + 16 - 225.$$

E assim, temos: $4.(x - 2)^2 - 9.(y - 5)^2 = 36.$

Obtivemos assim, dividindo-se ambos os membros por 36, a ***equação reduzida*** da elipse ($\mathscr{H}$): $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{4} = 1$ cujos elementos principais são:

Centro O = (2,5)

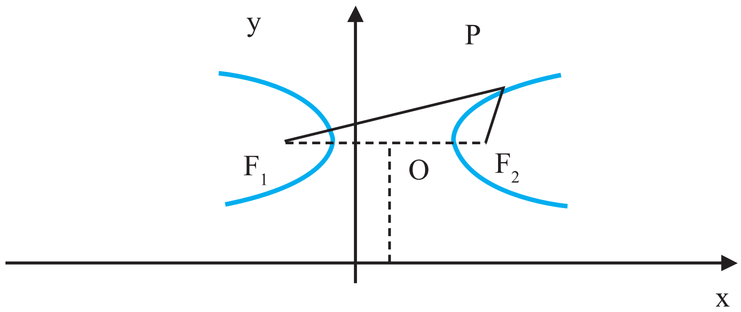
Eixo real = 2.a = 2.3 = 6 e Eixo imaginário = 2.b = 2.2 = 4

Distância focal = 2.c = $2.\sqrt{13}$ (pois $c^2 = a^2 + b^2$) e

Excentricidade e = $\frac{\sqrt{13}}{3}$

$F_1 = (2-\sqrt{13}, 5)$, $F_2 = (2+\sqrt{13}, 5)$, $A_1 = (-1,5)$, $A_2 = (5,5)$, $B_1 = (2,3)$ e $B_1 = (2,7)$

Equação das retas assíntotas: $3y = 2x + 11$ (passa por O e $C_1 = (5,7)$)
$3y = -2x + 19$ (passa por O e $C_2 = (-1,7)$)



1.5.4 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1 = (-3,0)$ e $F_2 = (3,0)$ cujo semi-eixo real é $a = 2$.

Resolução:
Dados os focos conclui-se que a hipérbole tem seu eixo real situado no eixo x, que a distância focal é $2c = 6$ e seu vértice é $V = (0,0)$.

Sendo assim como $c^2 = a^2 + b^2$ então $b = \sqrt{5}$

Logo a equação da hipérbole é: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

2) Obtenha as medidas dos eixos real e imaginário e as coordenadas dos focos da hipérbole dada por : $y^2 - 3x^2 = 9$.

Resolução:
Dividindo-se a equação dada por 9 obteremos a equação reduzida da hipérbole:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{3} = 1$$

Logo $a = 3$ e $b = \sqrt{3}$, portanto o eixo real é 6 e o eixo imaginário é

$2\sqrt{3}$

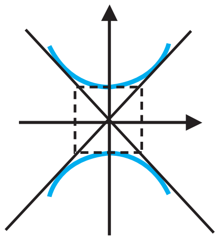
Além disso, como $c^2 = a^2 + b^2$ então $c = 2$ e portanto os focos são:

$$F_1 = (0, 2\sqrt{3}) \quad \text{e} \quad F_2 = (0, -2\sqrt{3})$$

3) Determine as equações das retas assíntotas da hipérbole:

Resolução:

Como explicitado na equação dada V = (0,0), a = 3 e b = 5, então a hipérbole ilustrada a seguir tem assíntotas dadas pelas equações:



(r_1): $y = \frac{3}{5}x$ e (r_2): $y = -\frac{3}{5}x$

1.5.5 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determine as medidas dos eixos real e imaginário e as coordenadas dos focos das hipérboles de equações:

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

b) $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{5} = 1$

c) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

d) $3y^2 - x^2 - 24x - 6y + 56 = 0$

2) Escreva a equação da hipérbole eqüilátera (quando a= b) cujos focos são $F_1 = (0, -3)$ e $F\ a_2 = (0, 3)$

3) Obtenha a equação geral da hipérbole que contem o ponto $P = (\sqrt{5}, 4)$ e cujos focos são os pontos $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$

4) Determine as equações das retas assíntotas da hipérbole $2x^2 - 3y^2 = 18$.

5) Os pontos $A_1 = (5,6)$ e $A_2 = (5,2)$ são extremidades do eixo real de uma hipérbole cuja distância focal é 6. Determine a equação dessa hipérbole.

6) A distância focal de uma hipérbole é 58 e seu eixo imaginário é 42, determine seu eixo real, seus focos e sua equação.

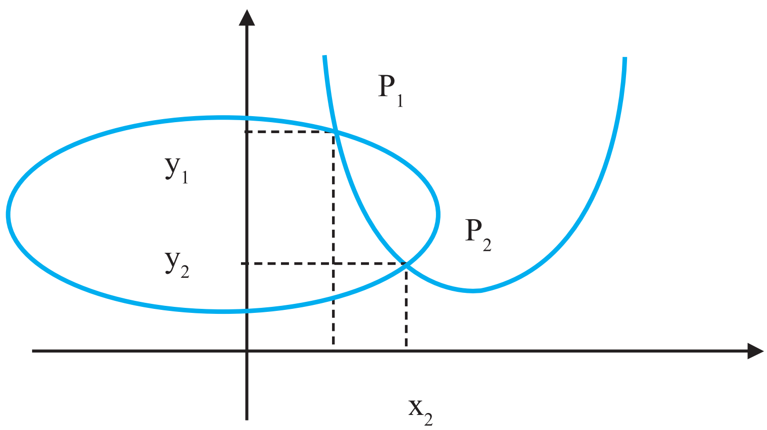
2. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA EQUAÇÃO, UMA INEQUAÇÃO OU DE SISTEMAS DE SEGUNDO GRAU EM DUAS VARIÁVEIS

2.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU EM DUAS VARIÁVEIS

Vimos que a equação de segundo grau em duas variáveis

$$A.x^2 + B.y^2 + C.x.y + D.x + E.y + F = 0$$

é a equação geral de uma cônica, isto é os pontos $P = (x,y)$ que satisfazem a equação dada são pontos da cônica. Desta forma um sistema de duas ou mais equações de segundo grau em duas variáveis determina o ponto cujas coordenadas satisfazem todas as equações do sistema, isto é, geometricamente é o ponto de interseção das cônicas definidas pelas equações gerais dadas.



2.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA INEQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU EM DUAS VARIÁVEIS

Da equação reduzida de uma cônica temos que se P=(x,y) é um ponto genérico da cônica então suas coordenadas satisfazem a equação reduzida dada.

Analisando cada uma das cônicas:

CIRCUNFERÊNCIA

Dada a equação reduzida de uma circunferência:

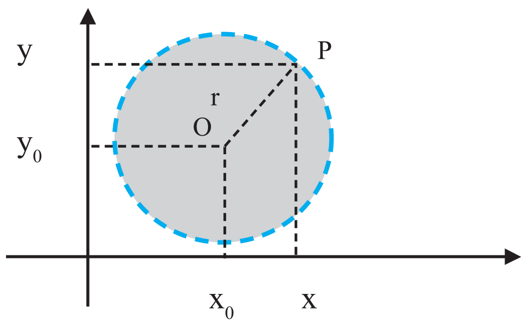
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Ela representa todos os pontos do plano pertencentes à circunferência, isto é, todos os pontos eqüidistantes de um ponto central.

Então a inequação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$

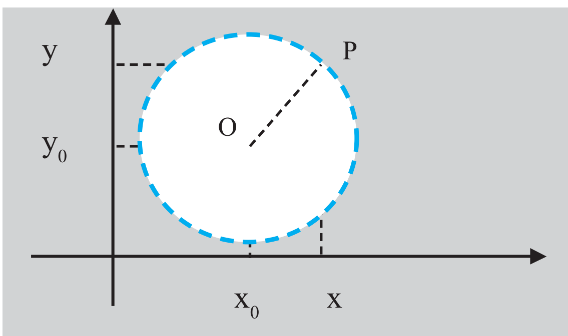
E sua representação será o interior da circunferência



Analogamente a inequação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$$

E sua representação será o exterior da circunferência



ELIPSE

Dada as equações reduzidas de uma elipse:

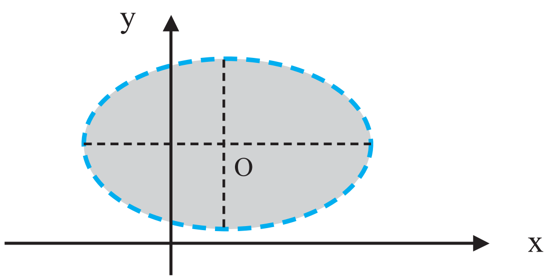
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad \frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

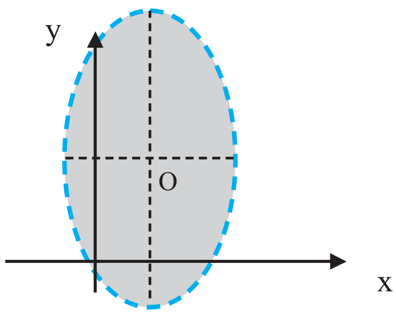
Ela representa todos os pontos do plano pertencentes à elipse, isto é, todos os pontos cuja soma das distâncias aos focos é fixa.

Então a inequação

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}<1 \qquad \frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}<1$$

E sua representação será o interior da elipse

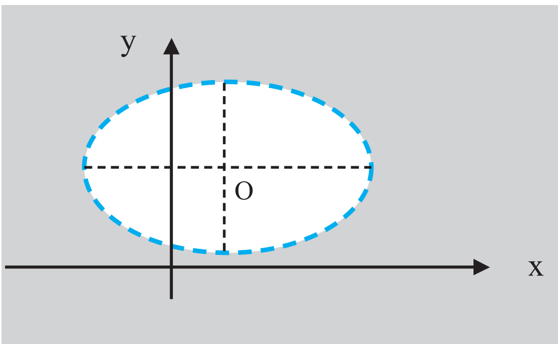


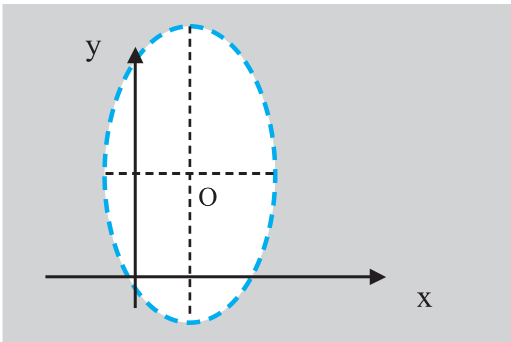


Analogamente a inequação

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}>1 \qquad \frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}>1$$

E sua representação será o exterior da elipse





PARÁBOLA

Dada as equações reduzidas de uma parábola:

$(y - y_0)^2 = 4.p.(x - x_0)$ $\quad$ $(y - y_0)^2 = - 4.p.(x - x_0)$

$(x - x_0)^2 = 4.p.(y - y_0)$ $\quad$ $(x - x_0)^2 = - 4.p.(y - y_0)$

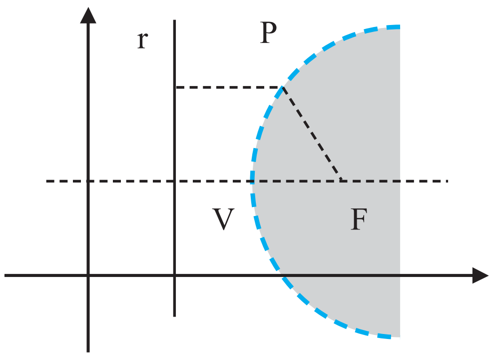
Ela representa todos os pontos do plano pertencentes à parábola, isto é, todos os pontos cuja soma das distâncias aos focos é fixa.

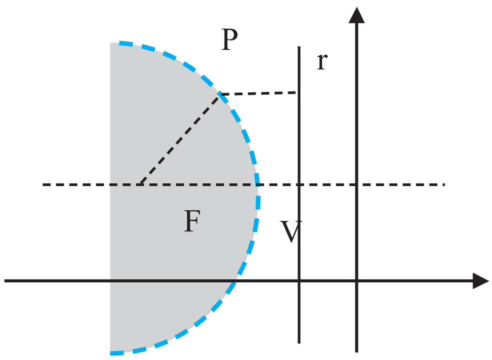
Então as inequações

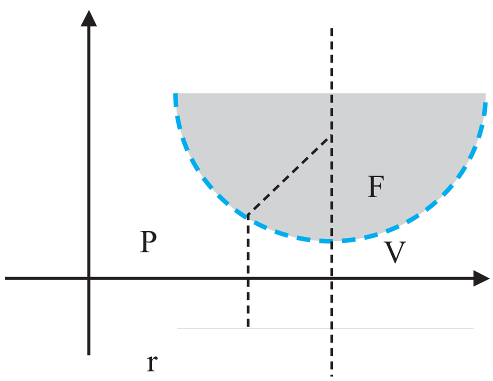
$(y - y_0)^2 < 4.p.(x - x_0)$ $\quad$ $(y - y_0)^2 < - 4.p.(x - x_0)$

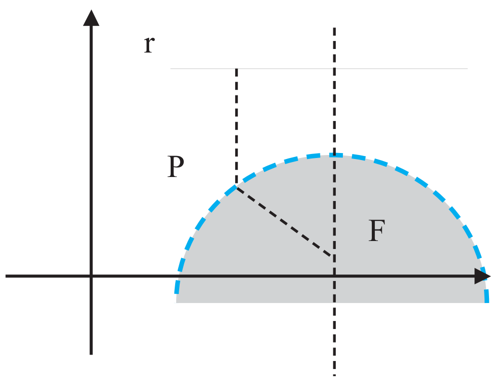
$(x - x_0)^2 < 4.p.(y - y_0)$ $\quad$ $(x - x_0)^2 < - 4.p.(y - y_0)$

E sua representação será o interior da parábola







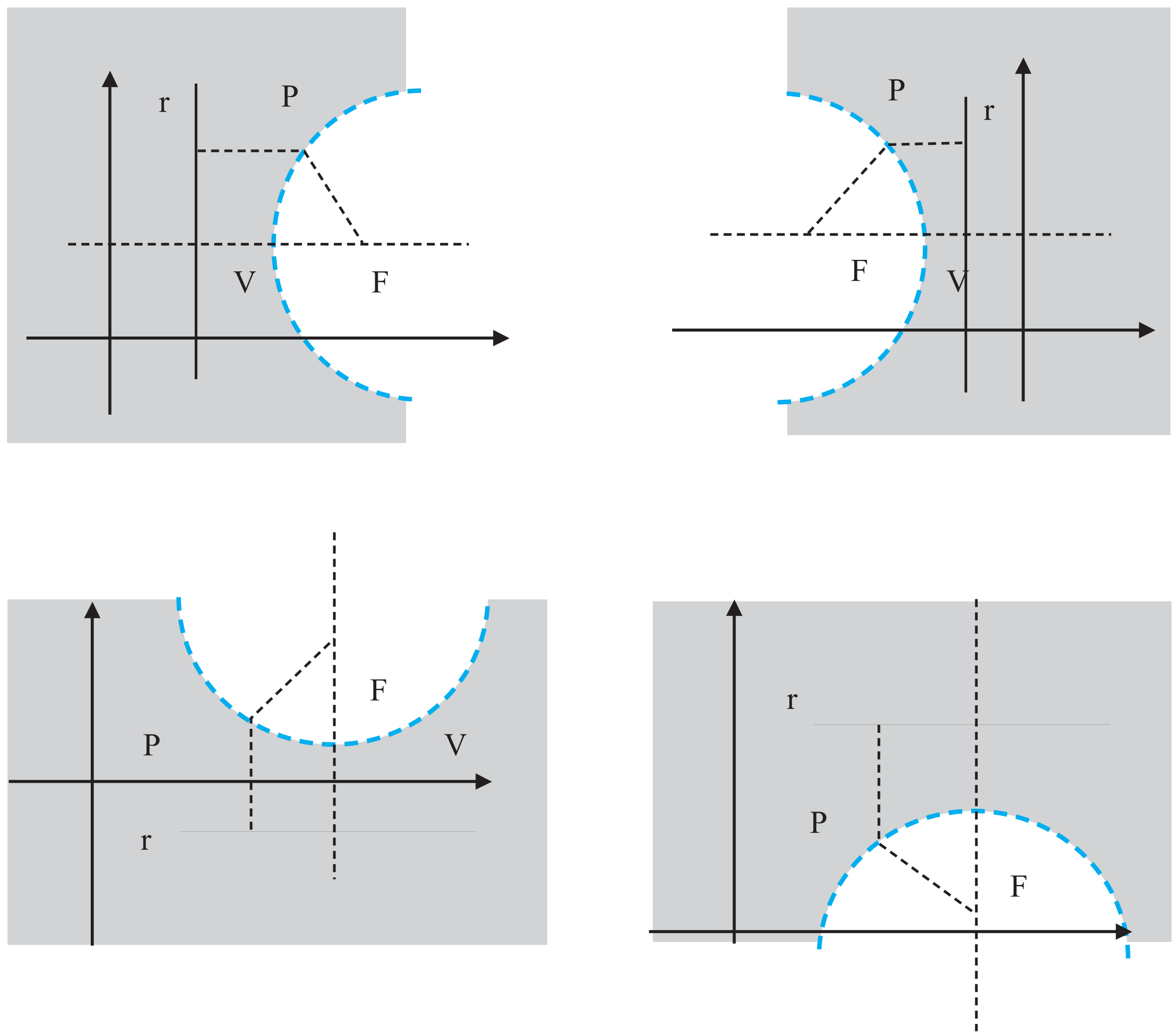


Então as inequações

$(y - y_0)^2 > 4.\ p.\ (x - x_0)$ $\quad$ $(y - y_0)^2 > -4.p.(x - x_0)$

$(x - x_0)^2 > 4.\ p.\ (y - y_0)$ $\quad$ $(x - x_0)^2 > -4.p.(y - y_0)$

E sua representação será o exterior da parábola



HIPÉRBOLE

Dada as equações reduzidas de uma hipérbole:

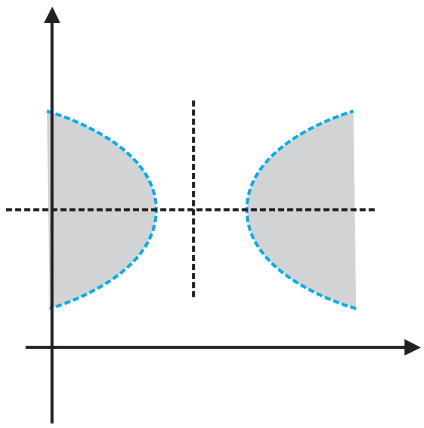
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

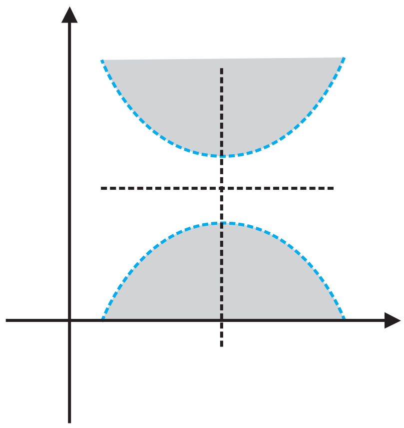
Ela representa todos os pontos do plano pertencentes à hipérbole, isto é, todos os pontos cuja diferença das distâncias aos focos é fixa.

Então as inequações

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} < 1 \qquad\qquad \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} < 1$$

E sua representação será o interior da hipérbole

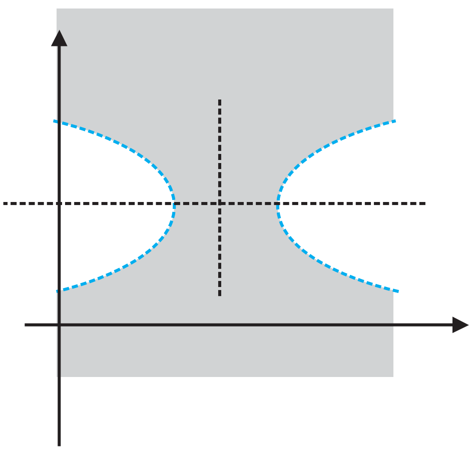


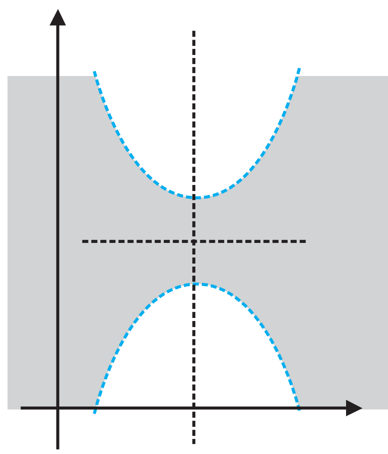


Então as inequações

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} > 1 \qquad\qquad \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} > 1$$

E sua representação será o exterior da hipérbole

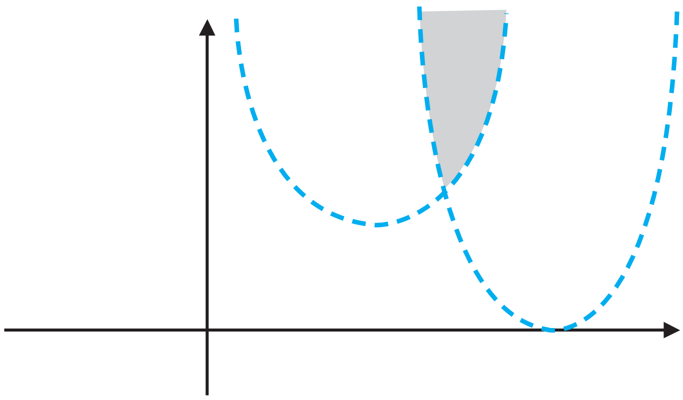




2.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM SISTEMA DE INEQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU EM DUAS VARIÁVEIS

Como ilustrado anteriormente a solução de uma inequação de segundo grau em duas variáveis é um semi-plano. Logo a solução de um sistema com duas ou mais inequações de segundo grau em duas variáveis é a interseção dos diversos semiplanos que são soluções das inequações dadas.

$$\begin{cases} A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + D_1x + E_1y + F_1 > 0 \\ A_2x^2 + B_2y^2 + C_2xy + D_2x + E_2y + F_2 > 0 \end{cases}$$



Observação: Nos casos de inequações com os sinais $\leq$ ou $\geq$ a linha da cônica ficaria contínua, isto é os pontos da cônica também satisfariam a inequação.

Foi usado o exemplo da parábola para ilustrar a representação gráfica da solução de um sistema de inequações de segundo grau em duas variáveis. Determine as representações gráficas quando a cônica é uma circunferência ou uma elipse ou uma hipérbole.

Existem alguns softwares gratuitos na internet que ilustram geometricamente a resolução de equações, inequações e sistemas de inequações, lineares ou não. Dentre eles citamos o Graphequation. Pesquise e tente fazer uma paisagem colorida utilizando o recurso citado e postem-na em MATERIAL DO ALUNO.

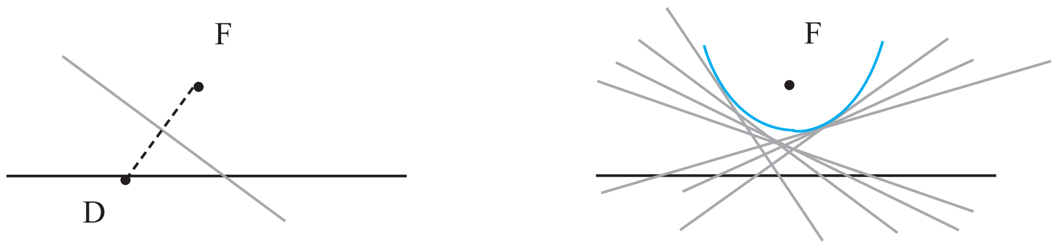
3 CURIOSIDADES: ALGUNS APARATOS USADOS NA CONSTRUÇÃO MANUAL DE CÔNICAS

3.1 CONSTRUINDO CÔNICAS COM DOBRADURAS DE PAPEL

É possível construir cônicas como parábolas, elipse e hipérboles por meio de dobraduras. Um método utilizado é conhecido como Método de Van Schooten.

Usando uma folha de papel-manteiga execute os seguintes procedimentos para cada uma das cônicas

3.1.1 CONSTRUINDO UMA PARÁBOLA



1. Desenhe uma reta horizontal d (diretriz da parábola), numa folha de papel-manteiga e marque, fora dessa reta, um ponto fixo F (foco da parábola).

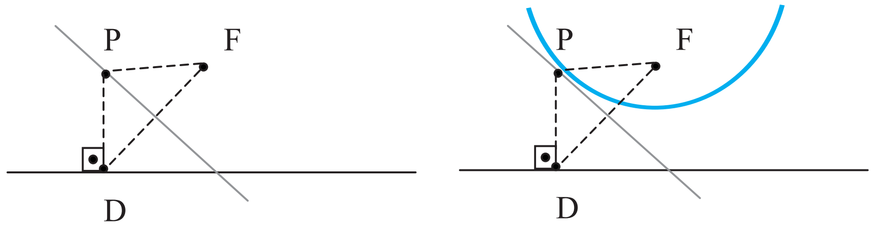
2. Selecione um ponto D sobre a reta e dobre o papel-manteiga de forma a fazer coincidir os pontos D e F. A figura abaixo, ilustra a construção de uma dobra. Ela coincide com a reta t tangente à parábola.

3. Repita essa operação para diferentes escolhas de pontos sobre a diretriz. Realizando esta operação um número suficiente de vezes, podemos observar que as dobras parecem tangenciar uma curva que é uma parábola.

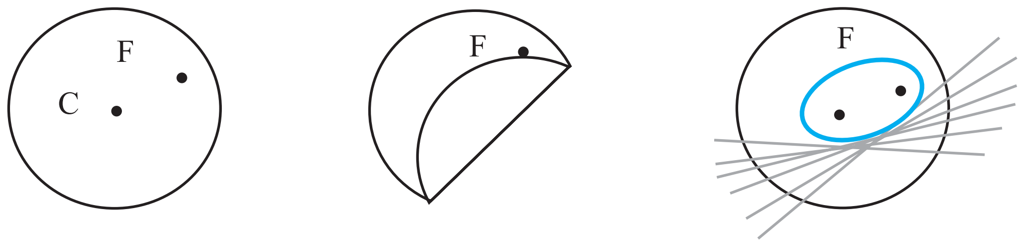
Como temos certeza que a tal curva tangenciada pelas dobras é realmente uma parábola?

Observe que na figura mais à esquerda a reta (dobra) é a reta mediatriz do segmento DF isto é o lugar geométrico de todos os pontos eqüidistantes dos pontos D e F. Tomemos um ponto P nesta reta tal que o segmento PD é perpendicular à reta dada, como ns figuras a seguir. Esse ponto P tem a propriedade de ser eqüidistante à reta e ao ponto F, logo satisfaz á definição de parábola:

"Parábola é o lugar geométrico de todos os pontos P=(x,y), no mesmo plano do ponto F e da reta r, eqüidistantes à reta dada e ao ponto F"



3.1.2 CONSTRUINDO UMA ELIPSE



1. Marque um ponto C mais ou menos no centro da folha de papel. Com o auxílio do compasso, desenhe uma circunferência de pelo menos 15 cm de raio, com centro em C e, a seguir, recorte a circunferência que você desenhou.

2. Marque outro ponto qualquer dentro do círculo, chamado de F.

3. Escolha um ponto D sobre a circunferência e dobre o círculo de tal maneira que o ponto D coincida com o ponto F, como mostra a figura. Tenha certeza de que a dobra seja bem marcada no papel e, então, desdobre o papel.

4. Repita essa operação para diferentes escolhas do ponto D. Quando tiver realizado esta operação um grande número de vezes, poderá observar que as dobras parecem tangenciar uma curva. Esta curva é uma elipse.

Como temos certeza que a tal curva tangenciada pelas dobras é realmente uma elipse?

Para provar que a curva traçada é de fato é uma elipse, precisamos mostrar que a soma CB + BF é constante.

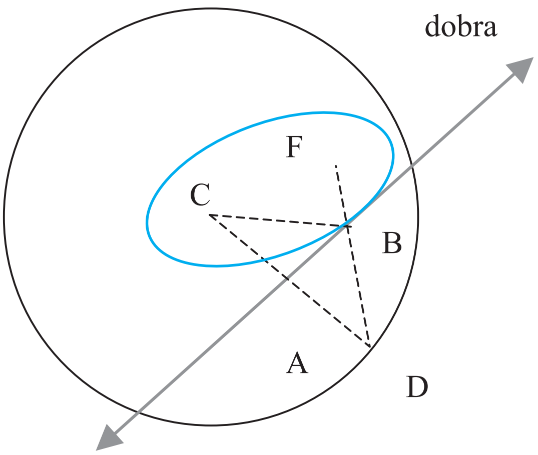
Como a reta BA é a mediatriz do segmento de reta FD, (pois os triângulos FBA e DAB são congruente- caso lado/ângulo/lado - de fato, estes triângulos são retângulos em A, têm o lado comum BA e, além disso, FA = AD) e portanto BF = BD.

Assim, CB + BF = CB + BD = CD que por sua vez é o raio da circunferência (que é constante, qualquer que seja o ponto D da circunferência).

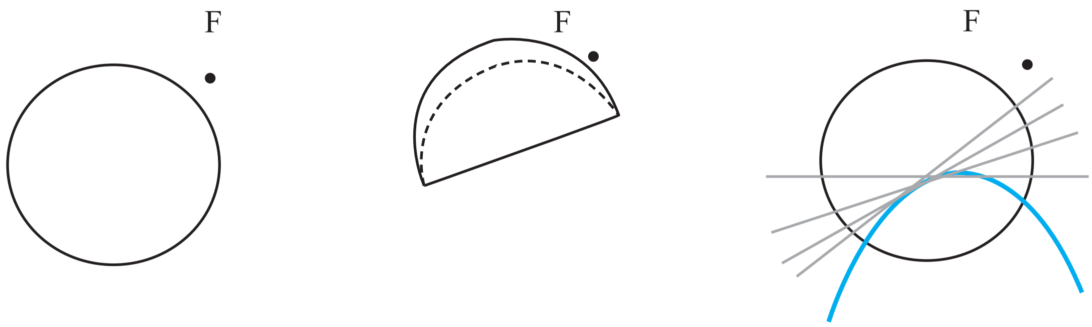
Isto então prova que B está sobre uma elipse de focos em C e F como queríamos demonstrar.

Repare ainda que o comprimento do eixo maior desta elipse (2a) é igual ao raio

da circunferência (basta observar as dobras correspondentes à extremidades do eixo maior da elipse).



3.1.3 CONSTRUINDO UMA HIPÉRBOLE



A sua construção é semelhante à da elipse e necessita também de papel manteiga e compasso.

1. Desenha-se um círculo num pedaço de papel manteiga.

2. Marque um ponto F no seu exterior e dobre o papel diversas vezes de tal modo que o ponto F coincida com pontos sobre o bordo do círculo.

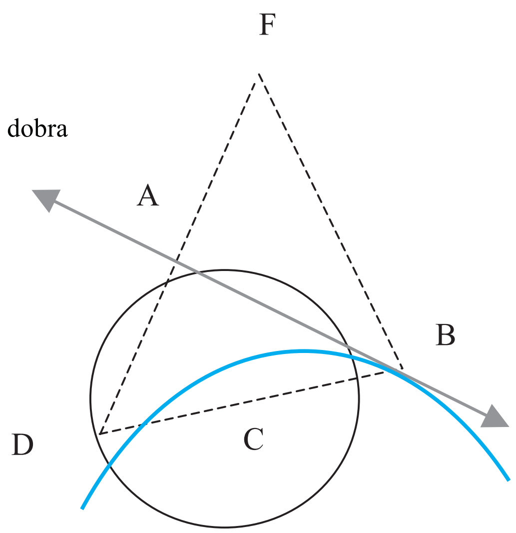
3. Após dobrar o papel um grande número de vezes, as dobras devem ter definido no papel a figura de uma hipérbole.

Como temos certeza que a tal curva tangenciada pelas dobras é realmente uma hipérbole?

Para provar que a curva traçada é de fato é uma hipérbole, precisamos mostrar que a diferença (BF – BC) é constante.

Como a reta BA é a mediatriz do segmento de reta FD, os triângulos FBA e DAB são congruentes e, portanto BF = BD.

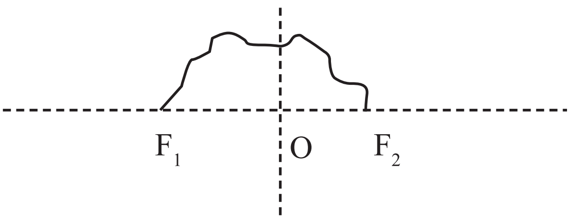
Assim, BF – BC = BD – BC = CD que por sua vez é o raio da circunferência (que é constante, qualquer que seja o ponto D da circunferência) o que prova que B está sobre uma hipérbole de focos em C e F, como queríamos demonstrar.

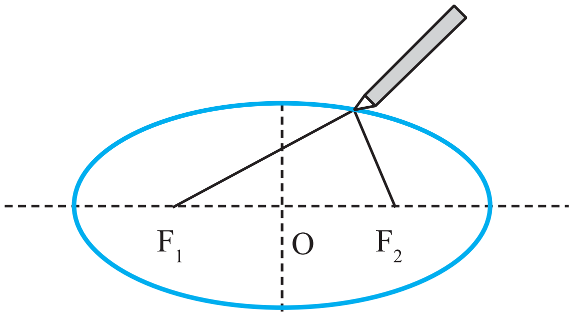


3.2 CONSTRUINDO CÔNICAS COM MADEIRA, LÁPIS, RÉGUA, PREGOS E BARBANTE

3.2.1 CONSTRUINDO UMA ELIPSE

Vamos precisar trabalhar numa prancheta de madeira, tesoura, barbante, lápis e pregos ou percevejos.





1. Fixe dois pregos na prancheta nos pontos F_1 e F_2.

2. Tome um pedaço de barbante cujo comprimento seja maior que a distância F_1F_2. A amarre suas pontas em F_1 e F_2 de modo que a parte livre do barbante ligando os dois pregos tenha comprimento = 2a.

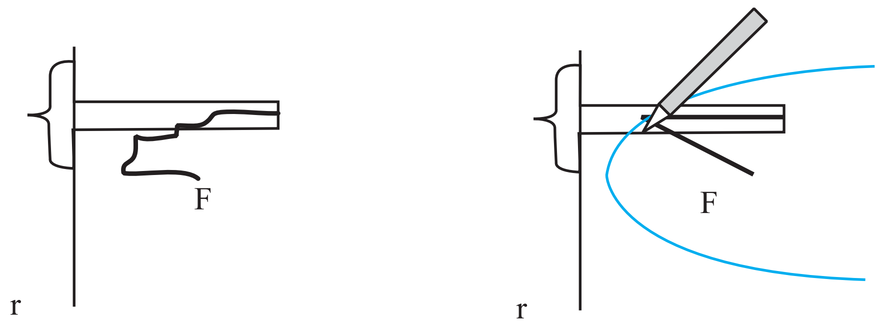
3. Trace uma curva com o lápis ao redor dos dois pregos mantendo o barbante esticado.

A curva traçada será uma elipse com focos F_1 e F_2, satisfazendo a equação $PF_1+PF_2=2a$ para todo ponto P da curva. (Da definição de elipse "A elipse é o lugar geométrico de todos os pontos P=(x,y) no mesmo plano dos pontos F_1 e F_2, tais que a soma das distâncias desses pontos a F_1 e F_2 seja sempre igual a 2a")

Observação: Se os pontos F_1 e F_2 coincidirem, a curva formada será uma circunferência.

3.2.2 CONSTRUINDO UMA PARÁBOLA

Vamos precisar trabalhar com uma prancheta de madeira, uma régua de madeira no formato de *T*, tesoura, barbante, lápis e pregos ou percevejos.



1. Fixe um prego num ponto F (foco da parábola) da prancheta.

2. Considere a lateral da prancheta como a reta diretriz r da parábola.

3. Corte um pedaço de barbante pouco maior que o comprimento da régua T.

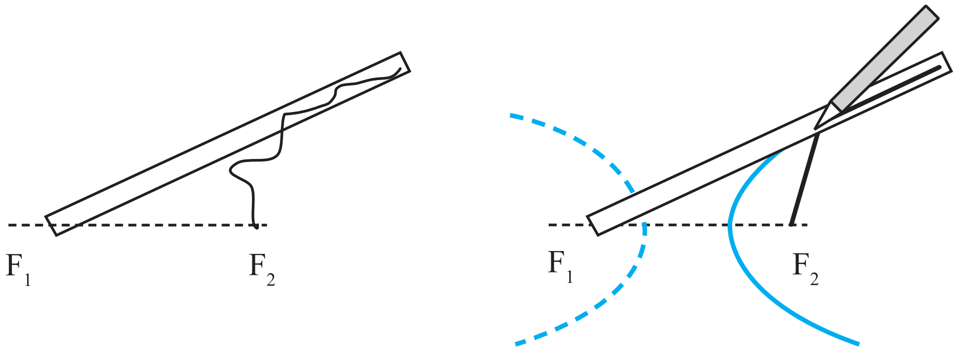
4. Prenda uma extremidade do barbante na extremidade do tronco da régua T e a outra no foco F, de modo que a parte livre do barbante tenha exatamente o comprimento da régua.

5. Trace uma curva deslizando a régua T ao longo da diretriz, enquanto mantém o barbante esticado com seu lápis e em contato com o tronco da régua T. A curva é parte de uma parábola com foco F e diretriz r.

Observe que a distância da ponta do lápis à diretriz é igual à distância ao ponto F. Portanto, a curva que o lápis descreve é uma parábola. (Da definição de parábola “Parábola é o lugar geométrico de todos os pontos P=(x,y), no mesmo plano do ponto F e da reta r, eqüidistantes à reta dada e ao ponto F”).

3.2.3 CONSTRUINDO UMA HIPÉRBOLE

Vamos precisar trabalhar numa prancheta de madeira, régua de madeira, tesoura, barbante, lápis e pregos ou percevejos.



Existem propriedades refletoras das cônicas que as tornam interessantes em aplicações no cotidiano, no que diz respeito a espelhos e lentes. Pesquise em livros didáticos e outras fontes essas propriedades e aplicações práticas, produzindo um texto seu e postem-no em MATERIAL DO ALUNO.

1. Prenda uma extremidade da régua simples de madeira sobre a prancheta com um prego no ponto F_1, de modo a permitir que ela gire em torno do prego.

2. Fixe um segundo prego na prancheta no ponto F_2.

3. Tome um pedaço de barbante com comprimento tal que $0 <$ (comprimento da régua) - (comprimento do barbante) $< F_1 F_2$

4. Mantenha o lápis em contato com a régua de modo a deixar o barbante esticado. Ao mesmo tempo gire a régua em torno de F_1.

A curva que o lápis descreve satisfaz, para todos os pontos P, a equação:

$PF_1 - PF_2 =$ (comprimento da régua) - (comprimento do barbante).

Portanto, a curva que o lápis descreve é uma hipérbole. (Da definição de hipérbole "A hipérbole é o lugar geométrico de todos os pontos P=(x,y) no mesmo plano dos pontos F_1 e F_2, tais que a diferença entre distâncias desses pontos a F_1 e F_2 seja sempre igual a 2a")

4. REFERÊNCIAS

• BOYER, C. B., **História da Matemática**, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1.974.

• IEZZI, Gelson e HAZZAN, Samuel - **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica - vol. 7**, Editora Atual, 2005.

• IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, DEGENSZAJN, David e PÉRIGO, Roberto - **Matemática – volume único**, Editora Atual, 2002.

• LIMA, Elon Lages, - **Coordenadas no Plano (Coleção Professor de Matemática)**, SBM, 1992.

• LIMA, Elon Lages, CARVALHO Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César - **A Matemática do Ensino Médio Volume 2 (Coleção Professor de Matemática)**, SBM, 2000.

• LIMA, Elon Lages, CARVALHO Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César - **A Matemática do Ensino Médio, Volume 3 (Coleção Professor de Matemática)**, SBM, 2001.

• LINDQUIST, M. M and SHULTE A. P.- **Aprendendo e Ensinando Geometria**, Tradução: Domingues, H. H.,Editora Atual, São Paulo 1998.

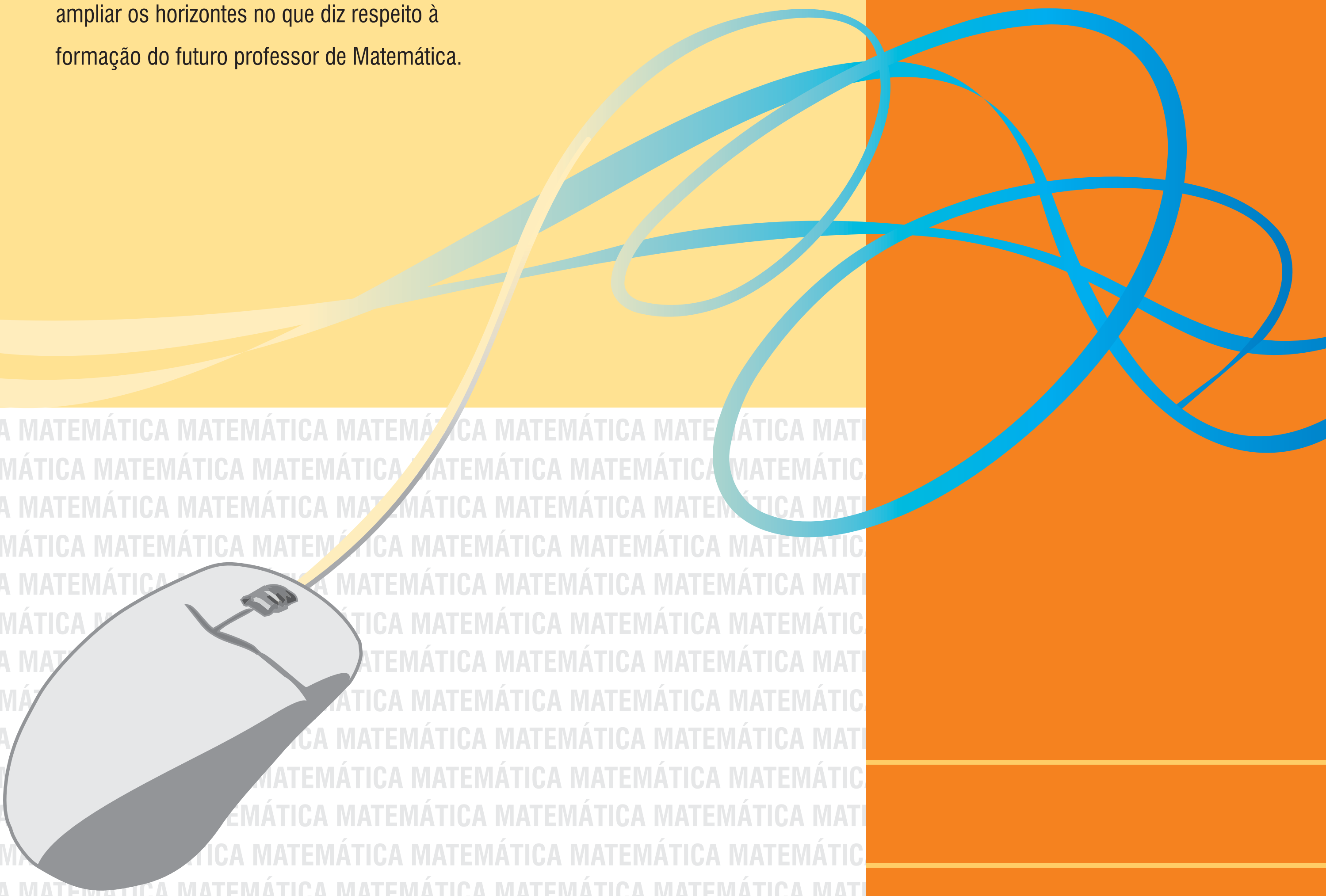
• **Revista do Professor de Matemática**, IMPA-SBM, Rio de Janeiro.

5. SITES

- http://www.somatematica.com.br
- http://www.edumatec.ufrgs.br
- http://www.sbem.com.br
- http://www.sbm.org.br

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA
Impressão e acabamento: Editora UFMS
Projeto gráfico: Lennon Godoi e Marília Leite
Editoração eletrônica: Marcelo Brown

Nesse volume é abordado o estudo da Geometria Analítica Plana, ferramenta essa que nos permite descrever algebricamente elementos da Geometria Euclidiana como o ponto, o plano, a reta e as cônicas. Estudaremos nesse material as diferentes formas da equação de uma reta e de cônicas no plano cartesiano. Apresentaremos também a representação geométrica da solução de uma equação, uma inequação ou um sistema linear ou de segundo grau a duas variáveis. Algumas curiosidades são apresentadas para ampliar os horizontes no que diz respeito à formação do futuro professor de Matemática.



UFMS
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

ead
Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

ISBN 978-85-7613-174-8
9 788576 131748