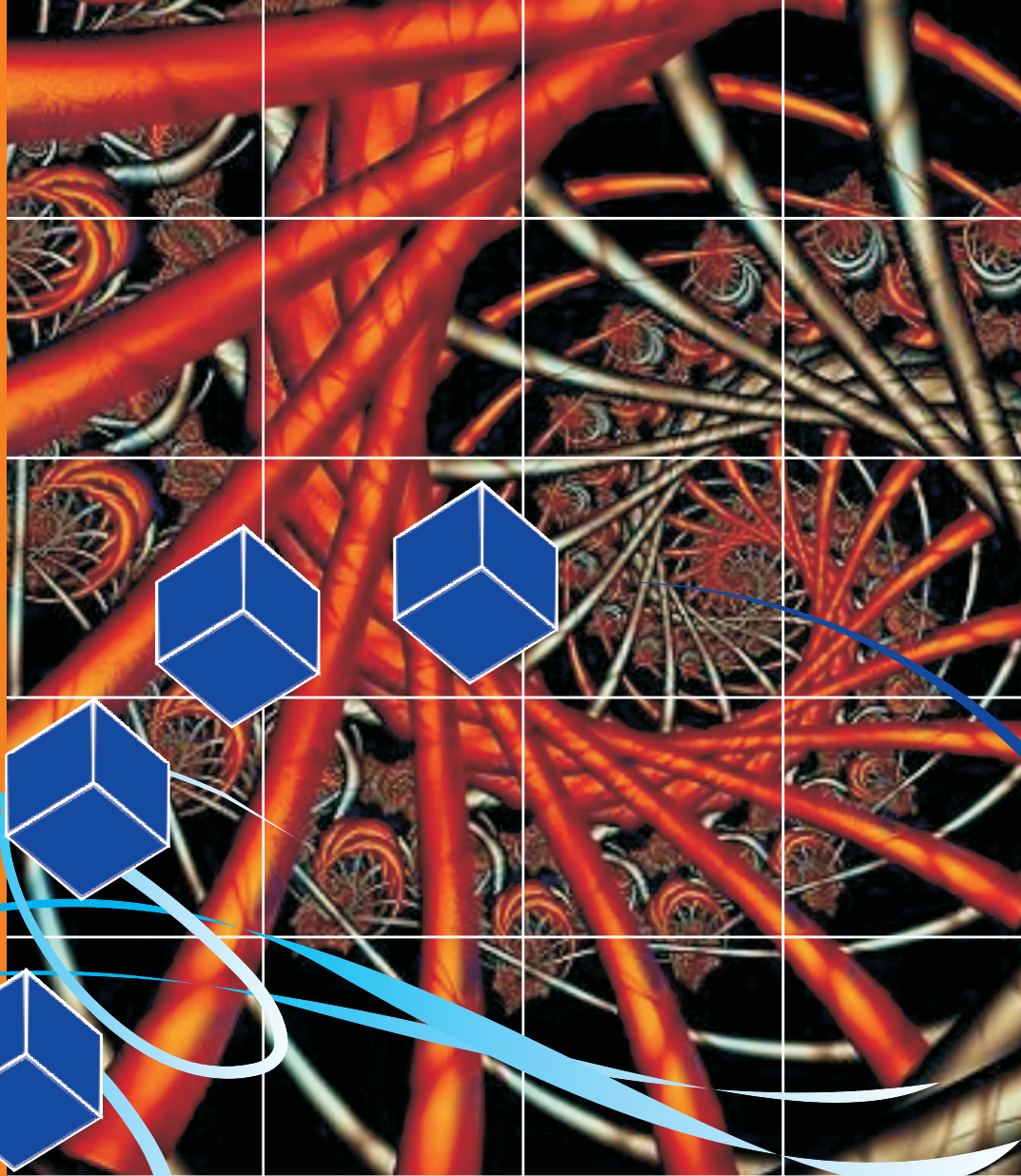


WATÉRIÁTICA

LICENCIATURA



Desenho Geométrico

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Henrique Mongelli





Disciplina

DESENHO GEOMÉTRICO

ORGANIZADORA

Prof^a. Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

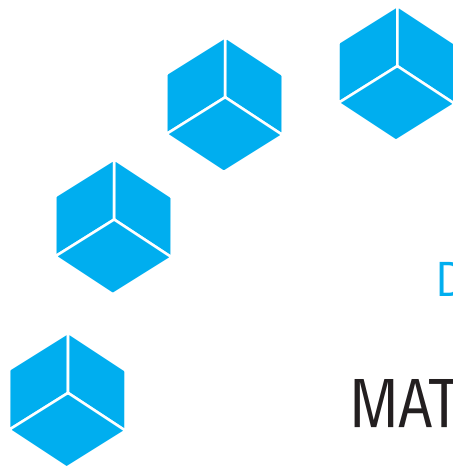
CAMPO GRANDE, MS - 2008



Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons - Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional.

MATEMÁTICA

LICENCIATURA



Disciplina

MATEMÁTICA

Módulo 1

DESENHO GEOMÉTRICO

Henrique Mongelli

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

APRESENTAÇÃO - CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

A partir do século V aC, os matemáticos gregos desenvolveram uma parte da Matemática, intimamente ligada à Geometria, conhecida como Construções Geométricas com Régua e Compasso. Os problemas de construções geométricas são muito interessantes e importantes.

Os gregos antigos propuseram e resolveram muitos problemas de construção difíceis, mas não conseguiram resolver, ou melhor, não conseguiram provar que não tinham solução três problemas conhecidos, respectivamente, como a triseção de um ângulo, a duplicação de um cubo, a quadratura de um círculo, usando apenas régua e compasso.

Além de lápis e papel, na resolução de problemas de construções geométricas, são utilizados dois instrumentos para desenhar figuras: um compasso e uma régua (sem escala). O compasso será utilizado para desenhar circunferências e a régua, para traçar retas. Para simplificar as construções, é comum desenharmos arcos de circunferência em vez de circunferências, além de segmentos de retas e semiretas em vez de retas. Entretanto, há situações em que essa prática pode ocultar soluções válidas de um problema, sendo necessária a devida atenção para evitar isso. Assim, procuramos usar circunferências e retas nos traçados.

Tratamos inicialmente em nosso texto, os conceitos básicos do desenho geométrico, as construções elementares, as expressões algébricas e por fim as construções aproximadas. O objetivo do material é ser útil a alunos de graduação em Matemática ou áreas afins, como também aos demais professores de Matemática, contribuindo para a descoberta e compreensão de outras interações da Geometria com as demais áreas do conhecimento. Ainda espera-se que proporcione ao leitor maior facilidade para organizar o raciocínio e construir argumentações lógicas.

BONS ESTUDOS!!!

Henrique Mongelli

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

SUMÁRIO

MÓDULO 1 DESENHO GEOMÉTRICO

CAPÍTULO I

1	O Desenho Geométrico nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática	13
---	--	----

CAPÍTULO II

2	Materiais Básicos no Desenho Geométrico	16
---	---	----

	Linhas Convencionais Utilizadas no Desenho Geométrico	18
--	---	----

CAPÍTULO III

3	Conceitos Básicos	20
---	-------------------	----

	Os Lugares Geométricos	20
--	------------------------	----

CAPÍTULO IV

4	Ponto, Reta e Plano	22
---	---------------------	----

	Posições Relativas de duas Retas num Plano	27
--	--	----

	Ângulos	29
--	---------	----

	Medida de um Ângulo	29
--	---------------------	----

	Classificação dos Ângulos	31
--	---------------------------	----

	Adição e Subtração de Ângulos com o compasso	35
	Circunferência, Círculo e Arco	35
	CAPÍTULO V	
5	Construções Geométricas de Segmentos	38
	CAPÍTULO VI	
6	Construções Geométricas de Ângulos	41
	CAPÍTULO VII	
7	Mediatriz	48
	CAPÍTULO VIII	
8	Perpendiculares	51
	CAPÍTULO IX	
9	Paralelas	56
	Aplicações - Divisão de Segmentos em partes iguais	59
	Teorema de Tales	59
	Aplicações - Divisão de Segmentos em partes desiguais	61
	Razão de dois Segmentos	61
	Segmentos Proporcionais	61
	A 4ª proporcional de três segmentos	63
	A 3ª proporcional de dois segmentos	64
	Segmento Áureo	66
	CAPÍTULO X	
10	Bissetriz	68
	Divisão da Circunferência em Arcos iguais e Formação de Polígonos Regulares	76
	CAPÍTULO XI	
11	Construções Geométricas de Polígonos	83
	Construção de Quadrados	83
	Construção de Retângulos	86
	Construção de Losangos	88
	Construção de Trapézios	89
	Construção de Triângulos	90

CAPÍTULO XII

12	Construção de Baricentro, Incentro, Circuncentro, Ortocentro de um Triângulo	95
-----------	--	----

CAPÍTULO XIII

13	Processos Aproximados	98
-----------	-----------------------	----

	Retificação da Circunferência	98
	Processo de Arquimedes	99
	Desretificação de Circunferências	101
	Retificação de Arcos de Circunferências	103

CAPÍTULO XIV

14	Arco Capaz	104
-----------	------------	-----

	Construção do Arco Capaz com Régua e Compasso	105
	Lista de Exercícios	106

CAPÍTULO XV

15	Tangentes	109
-----------	-----------	-----

	Traçado das Tangentes a uma Circunferência	109
	Traçado das Tangentes a duas Circunferências	112

CAPÍTULO XVI

16	Expressões Algébricas	114
-----------	-----------------------	-----

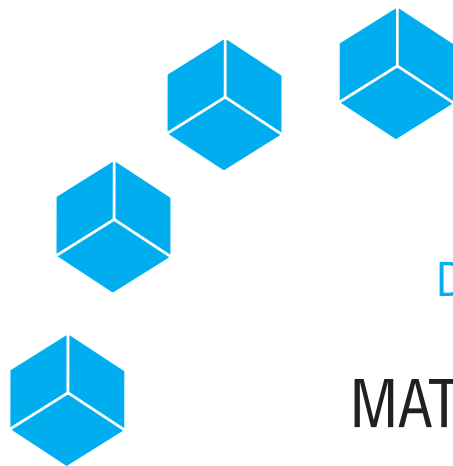
	Média Geométrica ou Média Proporcional	114
	Segmentos Construtíveis	115

	Referências	122
--	-------------	-----

	Endereços Eletrônicos	123
--	-----------------------	-----

MATEMÁTICA

LICENCIATURA



Disciplina

MATEMÁTICA

Módulo 1

DESENHO GEOMÉTRICO

Henrique Mongelli

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

Capítulo I

O DESENHO GEOMÉTRICO NOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA

Oficialmente, o ensino do Desenho Geométrico permaneceu nos currículos escolares, – de 1931 a 1971. No Brasil, na reforma de 1961 o Desenho Geométrico não integrou todas as opções propostas pelo CFE, e com a promulgação da LDBEN nº 5692/71 a disciplina deixou de ser obrigatória. Havia um núcleo de disciplinas obrigatórias e outros núcleos de disciplinas optativas, às quais poderiam integrar a parte diversificada do currículo. As escolas tinham a liberdade de construir a sua grade curricular apenas dentro da parte diversificada. Deste modo, após a promulgação da referida lei, muitas escolas aboliram o ensino das construções geométricas, ensinadas na disciplina Desenho Geométrico. Apesar das construções geométricas estarem presentes em alguns livros de Matemática, as escolas que mantêm o Desenho Geométrico como disciplina obrigatória continuam com um ensino diferenciado em relação às outras instituições de ensino que não o fazem.

A defesa do ensino das construções geométricas aconteceu em 1981, com a realização do II Congresso Nacional de Desenho, reunindo 400 participantes em Florianópolis¹. Muitas discussões e debates propuseram o retorno, obrigatório, do ensino do Desenho ao ensino básico. A partir daí, algumas editoras lançaram coleções de Desenho Geométrico, para serem utilizadas de 5ª a 8ª série do primeiro grau, o que nos aponta uma revalorização das construções geométricas e/ou a sua assunção pelas escolas de uma forma explícita. No entanto, oficialmente as construções geométricas continuavam ausentes dos currículos escolares, uma vez que o Desenho Geométrico deixara de ser uma disciplina obrigatória.

1 Esse evento acontece 17 anos após a realização do I Congresso Nacional de Desenho.

Os PCN de Matemática, para o 3o e 4o ciclos do ensino fundamental - 1998, propõem a inclusão de vários tópicos da geometria fazendo uso da régua e compasso. Demonstra-se uma real preocupação com o ensino das construções geométricas neste nível de ensino, salientando o seu valor, não só no estudo da geometria, mas associadas a outros conteúdos nas aulas de Matemática. Já para o 3º ciclo – 5a e 6a séries do ensino fundamental – é valorizado que o aluno esteja apto a resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução. Para o 4º ciclo – 7a e 8a séries do ensino fundamental – é necessário destacar alguns objetivos específicos, nos PCN de matemática:

Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;

produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;

ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

Os PCN de Matemática destacam o trabalho com o espaço e forma e a exploração de situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. Ressaltam ainda a importância do ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes.

Alguns estudos mais recentes no Brasil apontam a importância do ensino das construções geométricas (Liblik & Pinheiro, 1996; Zuin, 1997; Dias, 1998; Zuin, 2000). Imenes & Lellis e Gelson Iezzi, já incorporaram as construções geométricas em suas coleções de matemática no final da década de 90.

Atualmente, percebemos que alguns autores de livros didáticos de Matemática já incluíram as construções geométricas em suas coleções. Estas aparecem como atividades complementares, ou mesmo

como capítulos inteiros dedicados a conteúdos específicos dentro do Desenho Geométrico.

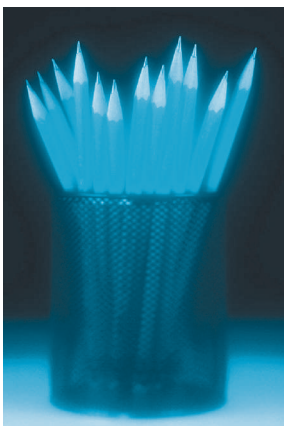
Acreditamos que o desenho geométrico constitui uma ferramenta importante para a compreensão da geometria, pois disponibiliza técnicas construtivas que demonstram as propriedades geométricas e a correta utilização e manuseio dos equipamentos, como os esquadros, o compasso. Sendo assim, esta disciplina fará parte de sua formação acadêmica e profissional.

Capítulo II

MATERIAIS BÁSICOS NO DESENHO GEOMÉTRICO



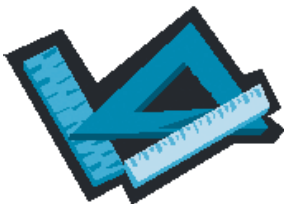
Para trabalhar com desenho geométrico precisamos dos seguintes materiais: lápis, borracha, papel, régua não graduada ou graduada, esquadros, compassos, entre outros.



O **lápis** é um instrumento indispensável no desenho geométrico deve ser preto e de boa qualidade.. Um lápis do tipo B é classificado como um lápis mole, e um lápis do tipo H é classificado como um lápis duro.

A **borracha**, utilizada para a pagar os traços e linhas de desenho, deve ser branca, de boa qualidade e principalmente macia. Ela deve estar sempre limpa.

O **papel** deve ser branco e sua qualidade e dimensões dependem da natureza e objetivo do desenho.

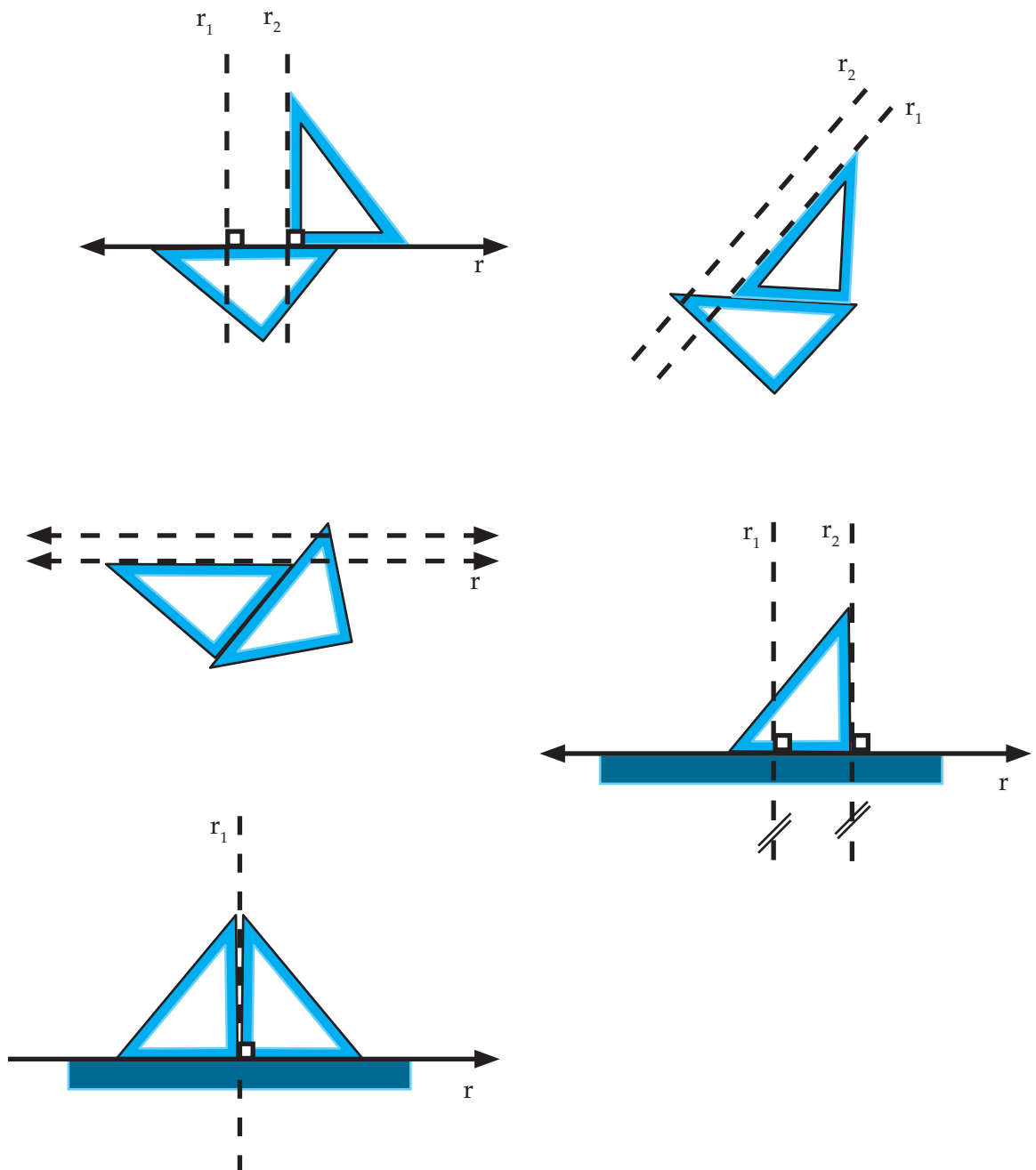


A **régua** necessita ser perfeita, com graduação bem clara dos milímetros e centímetros, pois qualquer imperfeição no bordo de uma régua prejudicará o traçado. Ela serve para a medida e traçado de retas sobre planos.

O **esquadro** é utilizado no traçado de perpendiculares, de paralelas, de verticais ou inclinadas conforme for o caso e, normalmente, é utilizado com o auxílio da régua. Existem dois tipos de esquadro: esquadros de 30° (ou de 60°) e de 60°.

Instruções para o uso do esquadro

O esquadro deve ser utilizado juntamente com a régua, ou com outro esquadro, para obtermos um traçado perfeito. A mão esquerda segura firmemente a régua e o esquadro, simultaneamente sobre a folha de papel, enquanto que com a mão direita traçam as retas desejadas (paralelas ou perpendiculares). Na figura a seguir temos representado várias posições para o traçado de paralelas e perpendiculares a uma reta dada qualquer, ou mesmo para o traçado de retas.





O **compasso** é utilizado principalmente para descrever circunferências e arcos de circunferências e deve ser de boa qualidade. Ele serve também como auxiliar no transporte de medidas e aberturas.

Linhas convencionais utilizadas no desenho geométrico

Em desenho geométrico, nas construções de figuras geométricas planas, quer sejam traçadas a mão livre, ou com o auxílio de instrumentos, necessitamos traçar linhas convencionais, como por exemplo: linha fina de traço contínuo; linha de traço interrompido; linha de traço misto ou linha de eixos e linha dos resultados. Estas linhas por sua vez ainda dependem da espessura.

Linha fina de traço contínuo



Esta linha em desenho geométrico constitui a **linha dos dados do problema**.

Linha de traço interrompido



Esta linha em desenho geométrico é **utilizada como auxiliar de construção**. Sua função principal é indicar as diversas operações auxiliares efetuadas que conduzem à solução do problema.

Linha de traço misto ou linha de eixo



Esta linha em desenho geométrico é utilizada na representação de eixos de simetria ou em linhas que necessitam ser destacadas no exercício.

A espessura dessas linhas deve ser o mais fino possível.

Linha dos resultados



Esta linha em desenho geométrico é utilizada na representação da

resposta do problema estudado e é a linha de maior espessura, pois quando olhamos para a solução do exercício sabemos que aquele traçado forte indica a solução do problema.

A espessura desta linha deve ser mais grossa do que as feitas nas linhas anteriores.

Observação. Outros autores podem adotar outras linhas convencionais, mas durante o nosso curso utilizaremos as linhas acima de acordo com a função definida para cada uma delas.

CONCEITOS BÁSICOS

Os conceitos vistos nesta seção servem como base para o entendimento do conteúdo da disciplina. Um estudo mais aprofundado e completo de geometria com definições, postulados, axiomas, teoremas, provas será visto na disciplina Geometria.

Os lugares geométricos

Para poder fazer as construções o conceito de lugar geométrico é fundamental. Assim,

... um lugar geométrico consiste no conjunto de pontos do espaço que gozam de uma determinada propriedade matemática qualquer. Podem ser lugares geométricos curvas, superfícies e outras variedades quaisquer. Um exemplo simples de lugar geométrico é a circunferência, que é o lugar geométrico de todos os pontos que guardam a mesma distância de um ponto chamado centro. Outro exemplo, particularmente importante em Astronomia, é a elipse, que é o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias somadas aos dois focos é constante.

Retirado do site "http://pt.wikipedia.org/wiki/Lugar_geom%C3%A9trico"

Abaixo apresentamos alguns lugares geométricos importantes.

1. Lugar geométrico dos pontos que distam d de um ponto fixo O .

Neste caso, temos uma circunferência de centro O e raio d .

2. Lugar geométrico dos pontos que distam d de uma reta \bar{r}

Neste caso, temos um par de retas paralelas à reta r e distantes d de \bar{r}

3. Lugar geométrico dos pontos eqüidistantes do ponto A e do ponto B.

Neste caso, temos uma reta, denominada mediatriz de \overline{AB} .

4. Lugar geométrico dos pontos eqüidistantes das retas concorrentes \bar{r} e \bar{s} .

Neste caso, temos as quatro bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s.

5. Lugar geométrico dos pontos eqüidistantes das retas paralelas \bar{r} e \bar{s} .

Neste caso, temos a reta paralela e eqüidistante de \bar{r} e \bar{s} .

6. Lugar geométrico dos pontos que enxergam \overline{AB} sob ângulo $\hat{\alpha}$, isto é, lugar geométrico dos pontos O tais que o ângulo OAB meça $\hat{\alpha}$

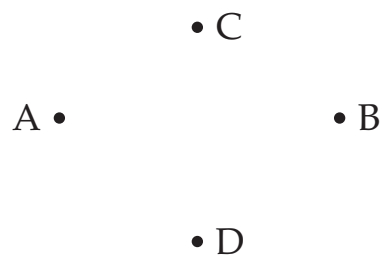
Neste caso, temos o par de arcos capazes de $\hat{\alpha}$ construídos sobre \overline{AB} .

Capítulo IV

PONTO, RETA E PLANO

Os três conceitos primitivos da geometria são: ponto, reta e plano. Estes são conceitos que aceitamos sem definição. São conceitos intuitivos.

Os vértices da caixa de leite ou da caixa de sapato são representações do ponto. O ponto não se define, mas temos uma idéia do que seja. O ponto é representado por uma letra maiúscula do alfabeto. Por exemplo: ponto A, ponto B, ou como na ilustração a seguir.



A reta, o segmento de reta e a semi-reta são conjuntos de pontos. Podemos dizer que a **reta** é uma figura formada por infinitos pontos, não tem começo, nem fim e nem espessura. A reta é representada por uma letra minúscula do alfabeto. Podemos ter uma idéia de reta quando imaginamos um barbante bem esticado sendo estendido nos dois sentidos. Graficamente, uma reta pode ser representada da seguinte forma:



Vamos tomar alguns pontos pertencentes a esta reta. Sejam eles os pontos A, B, C e D. Neste caso, dizemos que esses pontos são colineares, pois todos pertencem a uma mesma reta, como podemos observar na próxima figura.



Dados dois pontos distintos A e B, **existe uma única reta** que os contém.



Reta \overline{AB}

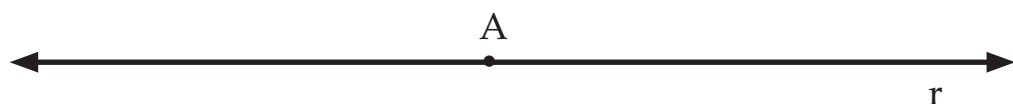
Em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos. Dois pontos quaisquer sempre são colineares pois sempre existe uma reta definida pelos dois pontos. Dois pontos distintos, A e B, pertencentes à reta r, nomeiam esta reta.



Reta r ou reta \overline{AB}

Podemos dizer que, na representação da reta \overline{AB} , a parte da reta limitada pelos pontos distintos A e B recebe o nome de **segmento de reta**. O segmento de reta \overline{AB} contém todos os pontos da reta compreendidos entre A e B e mais os extremos A e B. Os pontos A e B pertencem ao segmento e são chamados de extremidades do segmento \overline{AB} . As arestas da caixa de leite ou da caixa de sapato são representações de segmentos de reta.

Um ponto A de uma reta r divide-a em duas **semi-retas**. Podemos dizer que o ponto A é a origem de cada uma das semi-retas obtidas.

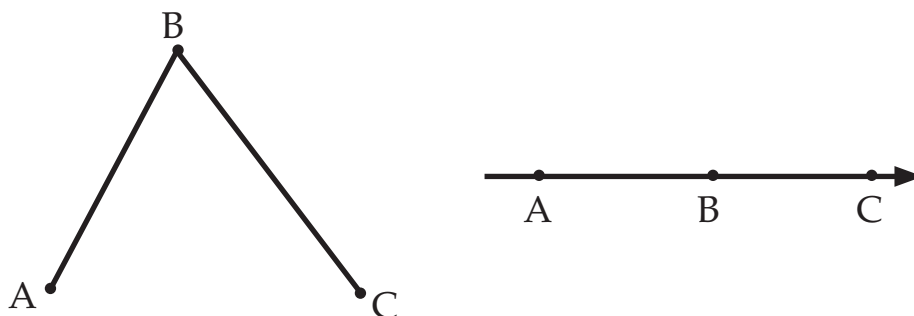


Consideremos a reta r e os pontos A, B e C da reta, como ilustrado na figura a seguir.



Os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} são colineares, pois estão sobre uma mesma reta.

Vamos analisar as duas situações apresentadas nas figuras a seguir.



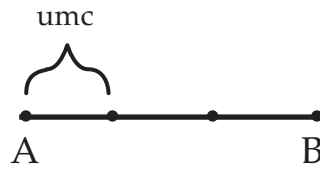
Podemos dizer que

- os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} têm pelo menos um extremo comum e são ditos **segmentos consecutivos**.
- os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} têm apenas um extremo comum e são ditos **segmentos adjacentes**.
- os segmentos consecutivos podem ter, além de um extremo comum, outros pontos comuns.
 - segmentos colineares podem ser consecutivos.
 - segmentos adjacentes podem ser consecutivos.
 - dois segmentos podem ser, ao mesmo tempo, colineares consecutivos e adjacentes.

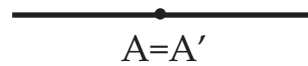
Postulado da Distância. A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem coincidentes.

Este número é chamado de **distância entre os dois pontos**. Se os pontos forem coincidentes esta distância é nula.

A **medida de um segmento** de reta é a distância entre os pontos A e B. Denotamos por $\overline{AB} = 4 \text{ umc}$. Utilizamos a sigla *umc* como unidade de medida de comprimento.



$$\text{Med}(\overline{AB}) = 4 \text{ umc}$$



$$\text{Med}(\overline{AA'}) = 0 \text{ umc}$$

Dois segmentos são ditos congruentes quando possuem medidas iguais, utilizando uma mesma unidade de medida padrão.

Notação: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$



Teorema. Seja \overline{AB} uma semi-reta e seja x um número positivo. Então existe um único ponto P em \overline{AB} tal que $\overline{AP} = x$.

Um ponto C é um **ponto médio de um segmento** \overline{AB} se C está localizado entre A e B , e $\overline{AC} = \overline{CB}$.



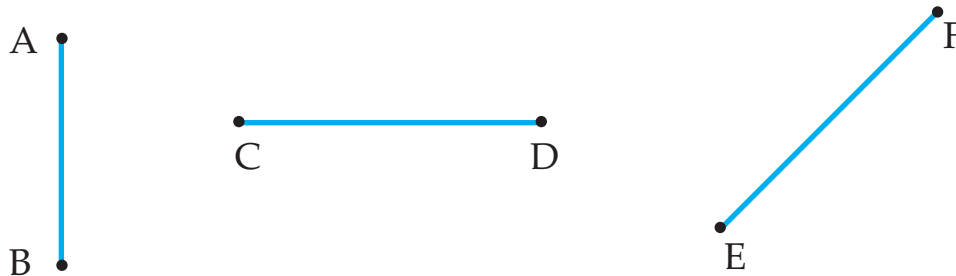
Teorema. Todo segmento tem um único ponto médio.



Veja a demonstração deste teorema no livro **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas** – Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz – páginas 19 e 20.

Um segmento pode estar numa destas posições

- segmento na posição **vertical**, exemplo \overline{AB} .
- segmento na posição **horizontal**, exemplo \overline{CD} .
- segmento na posição **inclinada**, exemplo \overline{EF} .



Devemos notar que estas posições precisam de um referencial e, no nosso caso, este referencial são as bordas do papel.

Dois segmentos podem ser

- paralelos**, exemplo na Figura 1.
- perpendiculares**, exemplo na Figura 2.
- convergentes**, exemplo na Figura 3.
- divergentes**, exemplo na Figura 4.



Fig. 1

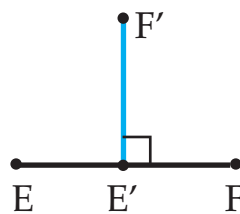


Fig. 2

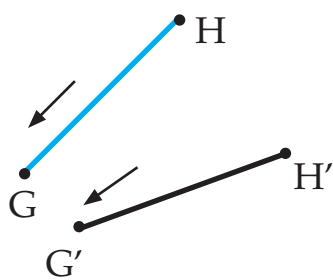


Fig. 3

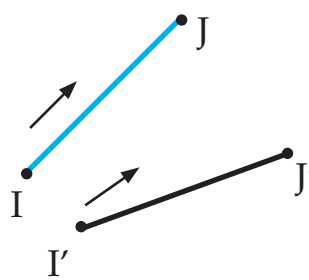


Fig. 4

As definições formais destas posições relativas estão na Capítulo III.

Um **plano** tem infinitos pontos e é indicado por letras minúsculas do alfabeto grego: α (alfa), β (beta), γ (gama), etc. Podemos ter uma idéia de plano quando imaginamos o tampo de uma mesa que estende-se em todas as direções. Graficamente, um plano pode ser representado como mostrado na figura a seguir.



Num plano existem infinitas retas. Vamos tomar alguns pontos do plano e algumas retas do plano, conforme as Figuras 1 e 2, respectivamente.

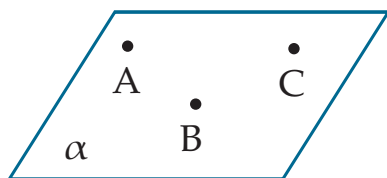


Fig. 1

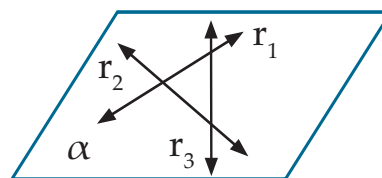


Fig. 2

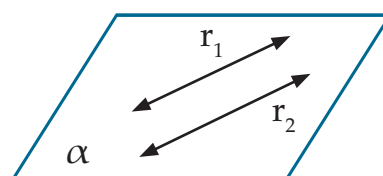
Podemos dizer que

- Os pontos A, B e C pertencem ao plano α . Dizemos que eles são **coplanares**.
- As retas r_1 , r_2 e r_3 estão contidas no plano α . Elas são algumas das infinitas retas desse plano. Dizemos que essas retas são **coplanares**.

Posições relativas de duas retas num plano

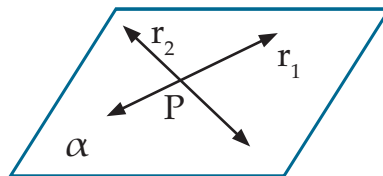
Retas paralelas

Duas retas que estão contidas num mesmo plano são ditas **paralelas** quando não têm pontos em comum. Duas retas paralelas nunca se cortam. Normalmente, indica-se $r_1 // r_2$.



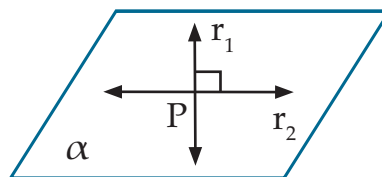
Retas concorrentes

Duas retas que estão contidas num mesmo plano são ditas concorrentes (ou secantes) quando tem um único ponto em comum. Normalmente, indica-se $r_1 \times r_2$.



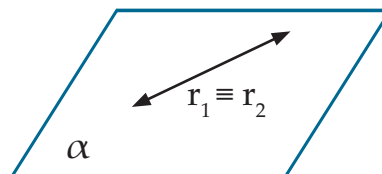
Retas perpendiculares

Duas retas que estão contidas num mesmo plano são ditas perpendiculares quando são concorrentes e formam um ângulo de 90°. Normalmente, indica-se: $r_1 \perp r_2$.



Retas coincidentes

Duas retas que estão contidas num mesmo plano são ditas coincidentes quando tem todos os pontos em comum. Normalmente, indica-se $r_1 \equiv r_2$.



Estas definições podem ser estendidas a segmentos e semi-retas, considerando as retas que contém estes entes geométricos. Por exemplo, dois segmentos são paralelos se as retas que os contém são paralelas.

Ângulos

Ângulo é uma figura geométrica formada por duas semi-retas de mesma origem.

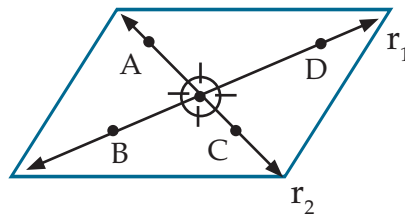
Podemos ter uma idéia de ângulo observando um relógio.

O relógio da figura marca 9:04h.



Conforme as horas passam, esses ponteiros movimentam-se, formando uma abertura entre eles. Esta abertura nos dá a idéia de ângulo.

Duas retas r_1 e r_2 que se cortam em um ponto O , dividem um plano em quatro regiões. Cada uma dessas regiões recebe o nome de **ângulo**.



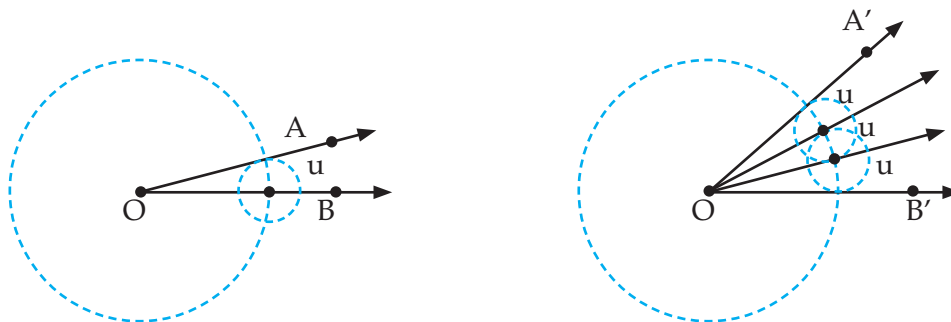
No ângulo representado na figura, temos que

- o ponto O é chamado de vértice do ângulo.
- as semi-retas \overline{OA} e \overline{OB} são chamadas de lados do ângulo.
- indicamos o ângulo O por $\hat{A}OB$. O símbolo indica a abertura do ângulo que estamos considerando.
- a cada ângulo $\hat{A}OB$ corresponde um número real entre 0 e 180.
- um ângulo é medido pela sua abertura. Quanto maior for a abertura de um ângulo, maior será a sua medida.

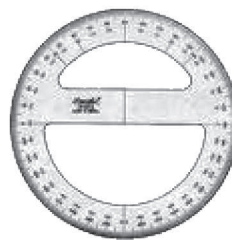
Vamos estudar mais detalhadamente a medida de um ângulo.

Medida de um ângulo

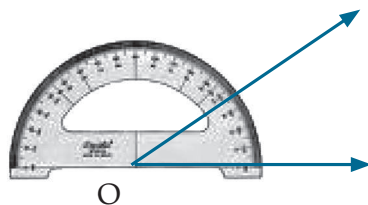
Precisamos escolher uma unidade de medida padrão. Escolhemos então um ângulo cuja abertura será considerada a nossa unidade de medida e medimos um ângulo verificando “quantas vezes” essa unidade cabe na abertura do ângulo que se quer medir.



O transferidor é um instrumento que serve para medir ângulos. Existem vários tipos de transferidor. Ele pode ser dividido em 180 ou 360 partes congruentes e em ambos cada divisão corresponde a 1° (1 grau). O grau é a unidade de medida dos ângulos. Veja estes dois exemplos de transferidores na próxima figura.

Transferidor de 180° Transferidor de 360°

Para usar o transferidor deve-se fazer a base do transferidor coincidir com um dos lados do ângulo e o centro deve estar sobre o vértice O do ângulo a ser medido. Já o outro lado do ângulo vai coincidir com uma das graduações do transferidor, que nos dará a medida do ângulo.



Medimos os ângulos em graus, mas existem os submúltiplos do grau.

$$1 \text{ grau} = 60 \text{ minutos de grau } (1^\circ = 60')$$

$$1 \text{ minuto de grau} = 60 \text{ segundos de grau } (1' = 60'')$$

Existem ângulos que medem, por exemplo, $15^\circ 30' 17''$.

Além de graus, um ângulo pode ser medido em radianos ou grau. Conforme as informações a seguir.

A medida em radiano de um ângulo é o comprimento do arco cortado pelo ângulo, dividido pelo raio do círculo. O SI (Sistema Internacional) utiliza o radiano como a unidade derivada para ângulos. Devido ao seu relacionamento com o comprimento do arco, radianos são uma unidade especial.

A medida em graus de um ângulo é o comprimento de um arco, dividido pela circunferência de um círculo e multiplicada por 360. O símbolo de grau é um pequeno círculo sobrescrito $^{\circ}$. 2π radianos é igual a 360° (um círculo completo), então um radiano é aproximadamente 57° e um grau é $\pi/180$ radianos.

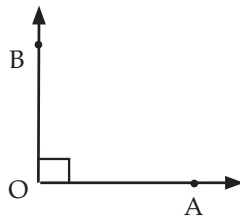
O círculo completo ou volta completa representa o número ou a fração de voltas completas. Por exemplo, $\pi/2$ radianos = 90° = $1/4$ de um círculo completo.

Site: <http://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%82angulo>

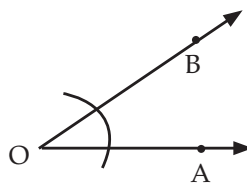
Classificação dos ângulos

Os ângulos podem ser classificados de acordo com as suas medidas.

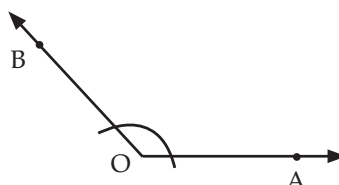
Ângulo reto é o ângulo cuja medida é igual a 90° .



Ângulo agudo é o ângulo cuja medida é menor do que 90° .



Ângulo obtuso é o ângulo cuja medida é maior do que 90° .



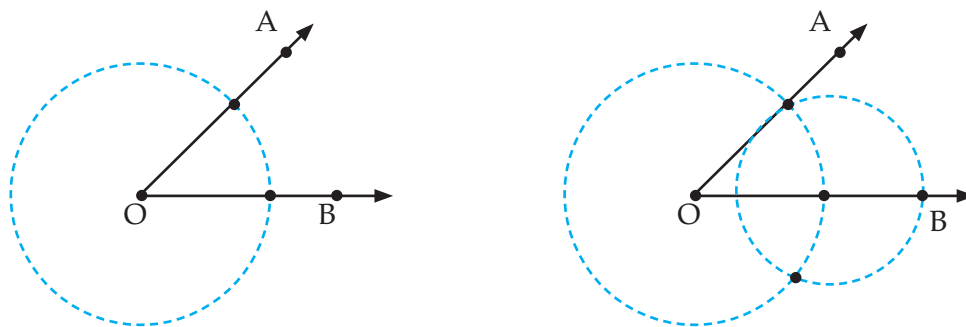
Ângulo raso é o ângulo cuja medida é igual a 180° .



Ângulos Congruentes

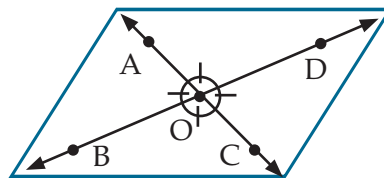
Dois **ângulos** são **congruentes** quando possuem a mesma medida. Dizemos que os ângulos $\hat{A}OB$ e $\hat{A}OB$ são congruentes.

Notação $\hat{A}OB \cong \hat{A}OB$.



Ângulos Opostos pelo Vértice

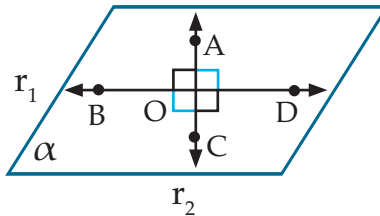
Dois ângulos convexos¹ são **opostos pelo vértice** quando os lados de um são as semi-retas opostas dos lados do outro. Por exemplo, como podemos observar na figura a seguir, ângulos $\hat{A}OB$ e $\hat{D}OC$ são opostos pelo vértice e os ângulos $\hat{A}OD$ e $\hat{B}OC$ também são.



Teorema. Dois ângulos opostos pelo vértice são **congruentes**.

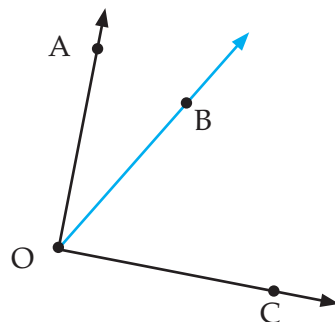
¹ Um ângulo é convexo quando sua medida é menor que 180 graus.

Quando as quatro regiões do plano são iguais, dizemos que cada ângulo obtido é um **ângulo reto** (90°).



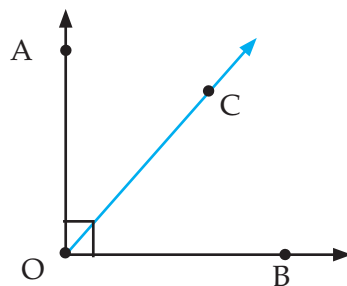
Ângulos consecutivos são dois ângulos que possuem o mesmo vértice, um lado comum e os outros dois lados situados em semi-planos opostos em relação ao lado comum.

Ângulos adjacentes. Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, não têm pontos internos comuns. Na figura em anexo, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são ângulos adjacentes.



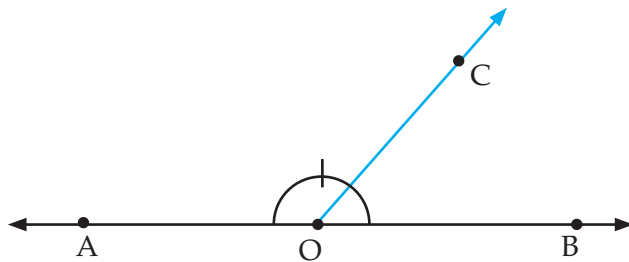
Ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes.

Ângulos complementares são dois ângulos cuja soma de suas medidas é 90° .



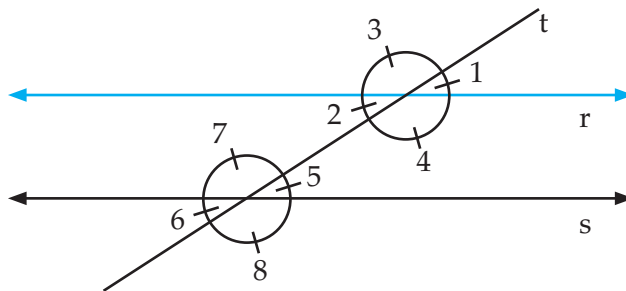
$$m A\hat{O}B = m A\hat{O}C + m C\hat{O}B = 90^\circ$$

Ângulos suplementares são dois ângulos cuja soma de suas medidas é igual a 180° ou meia volta, ou de dois retos.



$$m \hat{A}OB = m \hat{A}OC + m \hat{C}OB = 180^\circ$$

Propriedade. Duas retas r e s paralelas cortadas por uma transversal t determinam pares de ângulos que são suplementares ou congruentes.

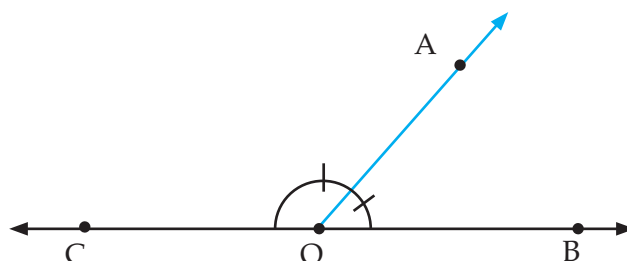


Observando a figura anterior temos que:

- formam-se 4 ângulos externos e 4 ângulos internos;
- os ângulos 1, 2, 5 e 6 são congruentes;
- os ângulos 3, 4, 7 e 8 também são congruentes;
- os ângulos 1 e 3 ou 6 e 8 são externos adjacentes; os ângulos 2 e 4 ou 5 e 7 são internos adjacentes.
- os ângulos 1 e 5 ou 4 e 8 ou 3 e 7 ou 2 e 6 são ângulos correspondentes.

Par linear

Se \overline{AB} e \overline{AC} são semi-retas opostas e \overline{AD} é uma outra semi-reta então $\hat{B}OA$ e $\hat{A}OC$ formam um **par linear**.

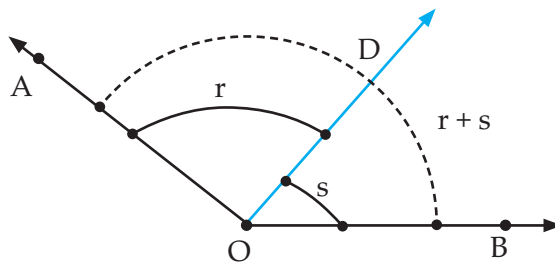


Se dois ângulos formam um par linear, então são suplementares. Se dois ângulos de um par linear são congruentes, então cada um deles é um ângulo reto.

Adição e subtração de ângulos com o compasso

1. Postulado da Adição de ângulos.

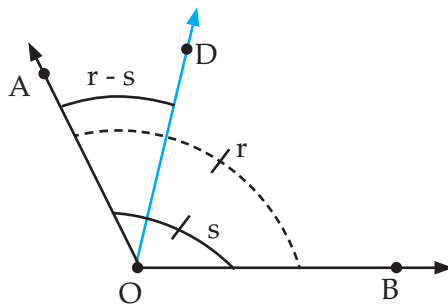
Se D é um ponto interior do ângulo $A\hat{O}B$, então $m A\hat{O}B = m A\hat{O}D + m D\hat{O}B$.



$$\begin{aligned} r &= m A\hat{O}D \\ s &= m D\hat{O}B \\ r + s &= m A\hat{O}B \end{aligned}$$

2. Postulado da Subtração de Ângulos.

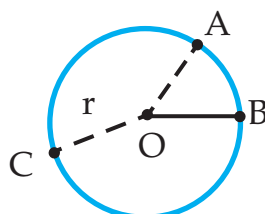
Se D é um ponto interior do ângulo $A\hat{O}B$, então $m A\hat{O}D = m A\hat{O}B - m B\hat{O}D$.



$$\begin{aligned} r &= m A\hat{O}B \\ s &= m B\hat{O}D \\ r - s &= m A\hat{O}D \end{aligned}$$

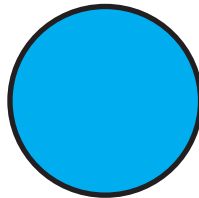
Circunferência, círculo e arco

Circunferência é a figura formada pelos pontos de um plano que estão a uma distância constante de um ponto fixo desse plano.



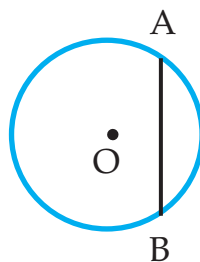
O ponto fixo O é o **centro** da circunferência. A distância do centro aos pontos da circunferência é chamada de **raio** (r). Os raios de uma circunferência são todas iguais.

Círculo é quando consideramos a circunferência e sua região interna.



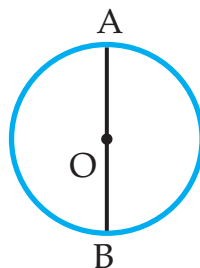
Observação. Dois círculos (ou duas circunferências) são **congruentes** quando têm raios iguais.

Corda é o segmento que liga dois pontos quaisquer A e B da circunferência, como podemos ver na figura.



O segmento \overline{AB} é chamado de **corda** da circunferência.

Quando esta corda é aquela que passa pelo centro da circunferência, a chamamos de **diâmetro**.



Observações.

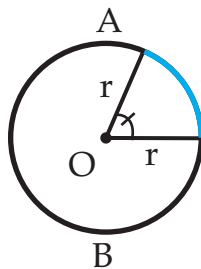
- Em uma circunferência, qualquer diâmetro é maior que uma corda que não contenha o centro.
- Em uma circunferência, um diâmetro perpendicular a uma **corda**,

divide-a ao meio.

- O diâmetro divide a circunferência em duas partes iguais, denominadas semi-circunferências. Equivalentemente, o diâmetro divide o círculo em duas partes iguais, denominadas em semi-círculos.

Consideremos uma circunferência de centro O e um ângulo $A\hat{O}B$ qualquer de vértice O . Um ângulo central de uma circunferência é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência. Como podemos observá-lo na figura a seguir.

A intersecção de uma circunferência com um ângulo central qualquer é denominada de **arco de circunferência**. O conjunto formado pelos pontos A , B e por todos os pontos da circunferência que estão no interior do ângulo $A\hat{O}B$ chama-se **arco menor** \widehat{AB} ; o conjunto formado pelos pontos A , B e por todos os pontos da circunferência que estão no exterior do ângulo $A\hat{O}B$ chama-se **arco maior** \widehat{AB} . Na figura a seguir temos representados estes dois arcos.



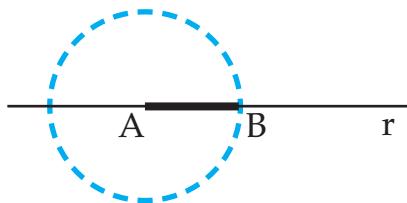
Observações.

- A notação \widehat{AB} não deixa claro se estamos nos referindo ao arco maior ou ao arco menor, assim, quando escrevermos simplesmente \widehat{AB} , em geral estamos nos referindo ao **arco menor**.
- A **medida em graus de um arco menor** é a medida do ângulo central correspondente, e a **medida em graus de um arco maior** é a diferença entre 360° e a medida do arco menor correspondente.
- Numa circunferência, a soma da medida em graus do arco menor com o a medida em graus do arco maior correspondente é igual a 360° .

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DE SEGMENTOS

Situação-problema 1. Como construir um segmento?

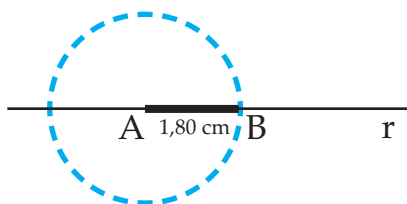
Sobre a reta suporte r marcamos o ponto A , origem do segmento. Com centro em A e abertura qualquer marcamos o ponto B , extremidade do segmento. A medida de A até B é a medida do segmento \overline{AB} .



Resposta. Segmento \overline{AB}

Situação problema 2. Como construir um segmento de 1,8 centímetros?

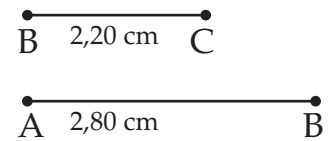
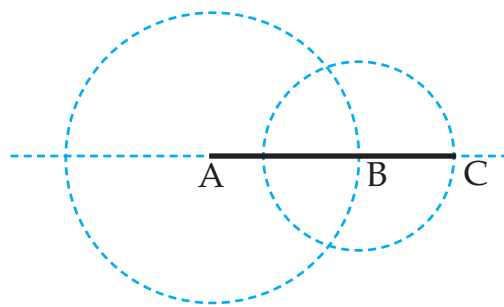
Centramos, a ponta seca do compasso em zero na régua graduada e medimos um centímetro e oito milímetros. Sobre uma reta suporte r marcamos o ponto A , a origem do segmento, e por este ponto transportamos a medida de 1,80 cm, com o uso do compasso, obtendo o ponto B , a extremidade do segmento pedido.



Resposta. Segmento $\overline{AB} = 1,80\text{cm}$.

Situação problema 3. Construir o segmento $\overline{AB} + \overline{BC}$, onde $\overline{AB} = 2,8$ cm e $\overline{BC} = 2,2$ cm.

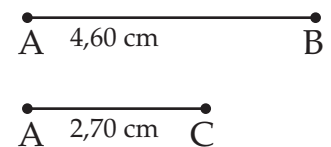
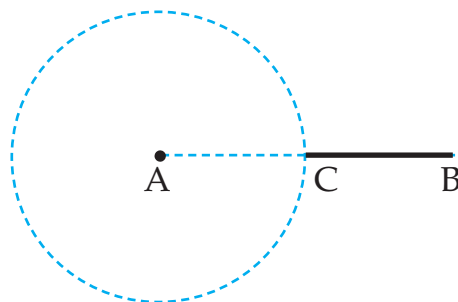
Traçamos a reta suporte do segmento $\overline{AB} + \overline{BC}$ e marcamos o ponto A, a origem desse segmento. Centramos a ponta seca do compasso em A e raio $\overline{AB} = 2,8$ cm, obtemos o ponto B que é a extremidade do segmento \overline{AB} . Da mesma maneira construímos o ponto C, a partir da origem B. O segmento $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = 5,0$ cm, como pode ser visto na figura a seguir.



Resposta. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = 5$ cm.

Situação problema 4. Construir o segmento $\overline{AB} - \overline{AC}$, onde $\overline{AB} = 4,6$ cm e $\overline{AC} = 2,7$ cm.

Traçamos a reta suporte do segmento $\overline{AB} - \overline{AC}$ e marcamos o ponto A, a origem desse segmento. Centramos a ponta seca do compasso em A e raio $\overline{AB} = 4,6$ cm, obtemos o ponto B, a extremidade do segmento \overline{AB} . Da mesma maneira construímos o ponto C, a partir da origem A e obtemos o segmento $\overline{AC} = 2,7$ cm, pertencente ao segmento \overline{AB} . O segmento $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB} = 1,9$ cm pode ser visto na figura a seguir.



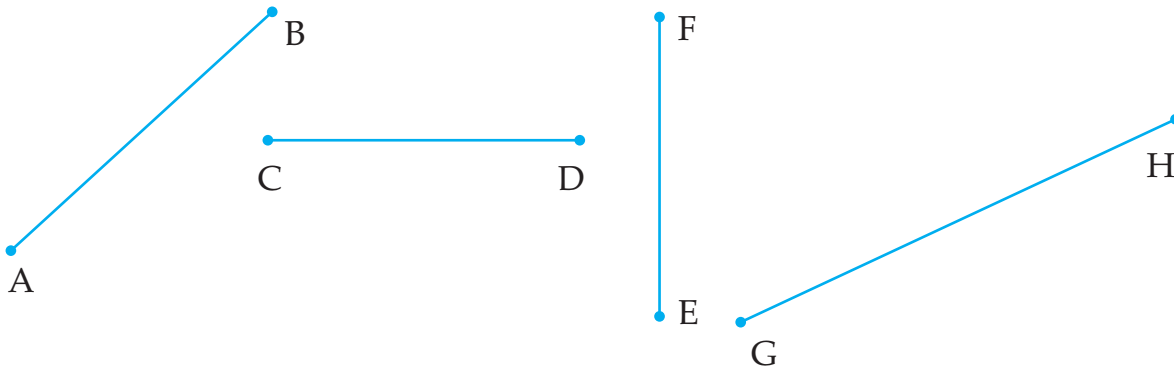
Resposta. $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB} = 1,9$ cm.

As situações-problema 5, 6 e 7 serão deixadas como exercícios.

Situação-problema 5. Construa um segmento de 3,5 centímetros?

Situação-problema 6. Construir o segmento $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ conhecendo-se suas medidas.

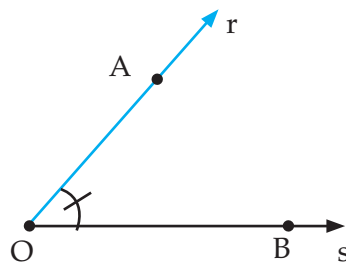
Situação-problema 7. Meça os segmentos dados. E depois construa os segmentos $\overline{GH} - \overline{CD}$ e $\overline{AB} + \overline{CD} - \overline{EF}$.



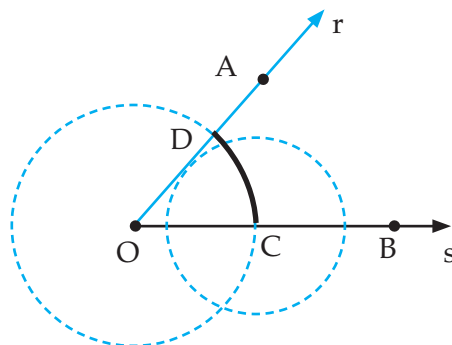
Capítulo VI

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DE ÂNGULOS

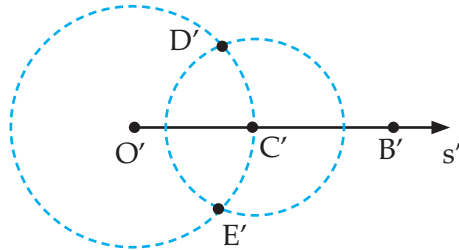
Situação-problema 1. Como construir um ângulo igual ao ângulo $A\hat{O}B$ dado, com o auxílio do compasso.



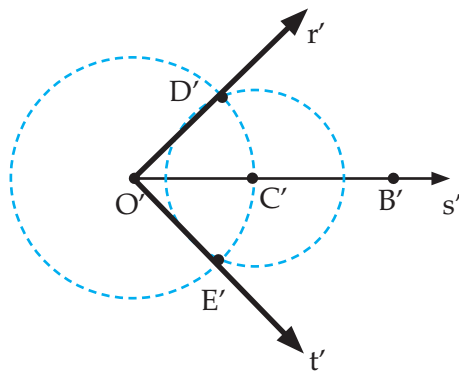
Consideremos o ângulo dado $A\hat{O}B$, para construirmos um ângulo congruente a este, com auxílio do compasso, traçamos uma circunferência de centro em O no ângulo dado $A\hat{O}B$ e obtemos os pontos C e D nas semi-retas s e r respectivamente. Para construirmos a resposta, inicialmente traçamos uma semi-reta s' de origem O' . Com centro em O' e abertura \overline{OC} (ou \overline{OD}) marcamos o ponto C' na semi-reta s' .



Centrando o compasso em C e abertura \overline{CD} copiamos a abertura do ângulo $\hat{A}OB$. Devemos, agora, transportar esta medida, centramos o compasso em C' e com abertura igual ao segmento \overline{CD} obtemos os pontos D' e E' .

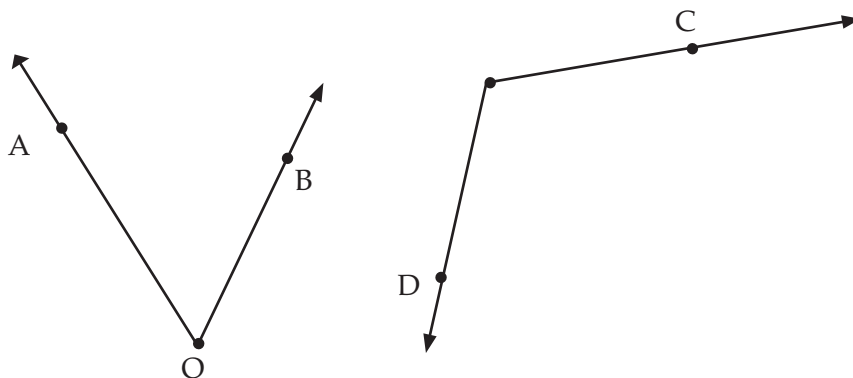


Finalmente traçamos as semi-retas $\overline{O'D'}$ e $\overline{O'E'}$ soluções deste problema.

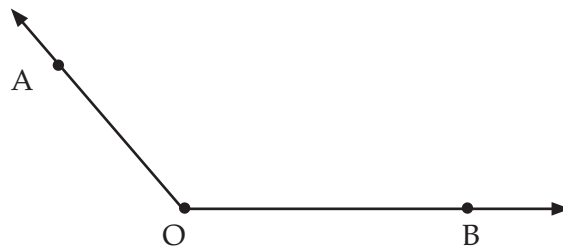


Observação. O problema admite duas soluções e é importante não esquecer disto. Na maioria das vezes em que temos que transportar um ângulo, já sabemos a posição em que ele deverá ser construído. Nesses casos, não é necessário construir os dois.

Situação-problema 2. Dado os ângulos $\hat{A}OB$ e $\hat{C}OD$, construir ângulos iguais aos dados, com auxílio do compasso.

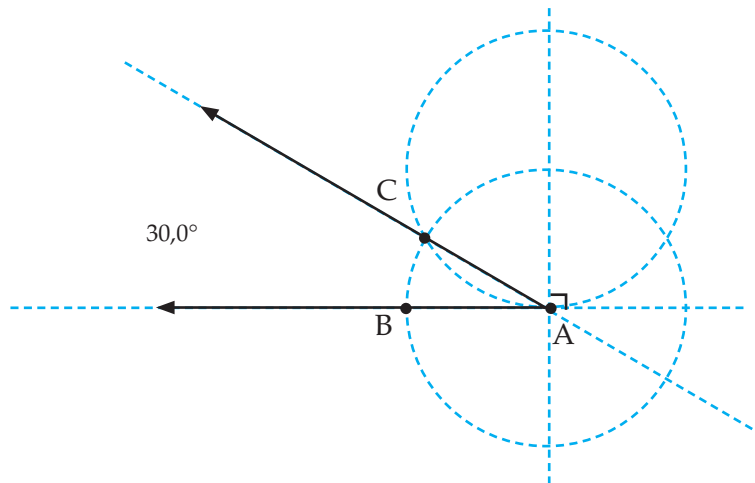


Situação-problema 3. Dado o ângulo $A\hat{O}B$, construir o ângulo $A'\hat{O}'B'$ igual ao ângulo dado, com auxílio do transferidor.



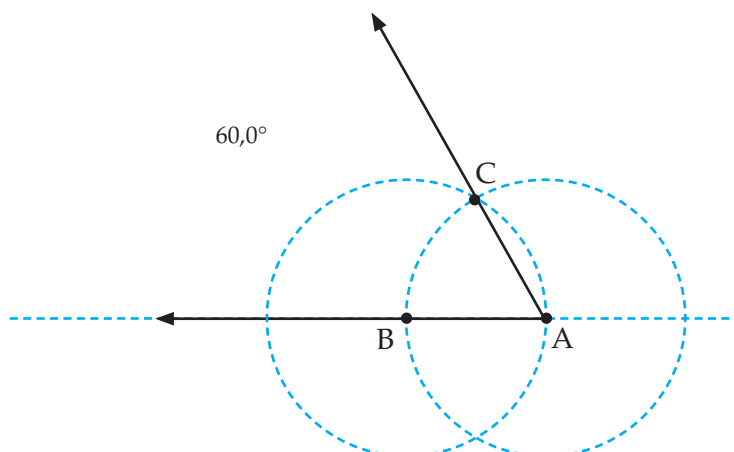
Deixamos as situações-problema 2 e 3 como exercício.

Situação-problema 4. Construa um ângulo de $30,0^\circ$, com auxílio do compasso.



Na figura da situação-problema 4, marque os outros ângulos que têm a mesma medida do ângulo construído e descreva os passos de resolução.

Situação-problema 5. Construa um ângulo de $60,0^\circ$, com auxílio do compasso.



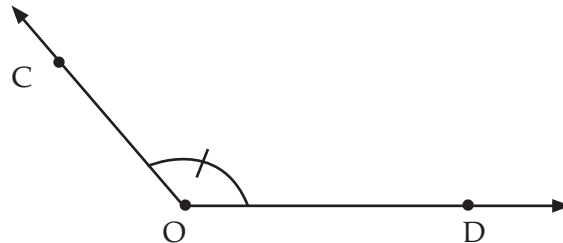
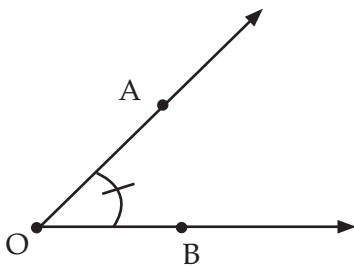
Na figura da situação-problema 5 discuta a construção deste ângulo.

Situação-problema 6. Construa um ângulo de 45° , com auxílio do compasso.

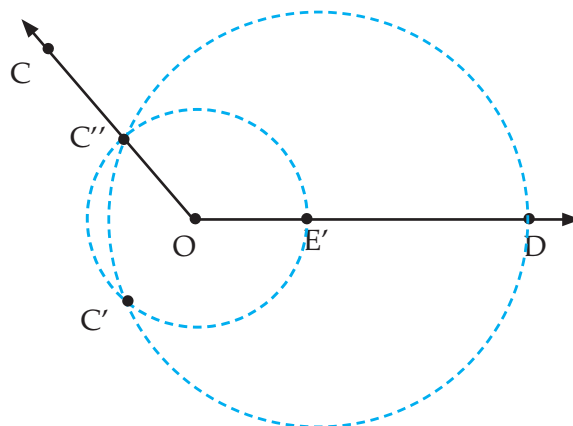
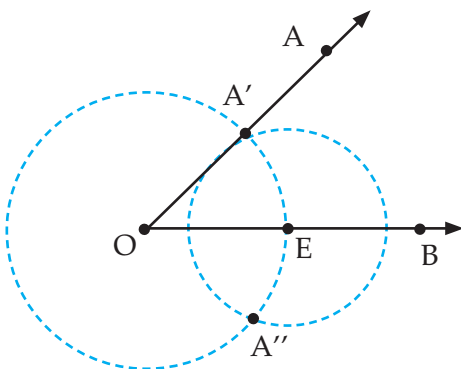
Situação-problema 7. Construa um ângulo de 125° e transporte-o, com auxílio do compasso.

Deixamos as situações-problema 6 e 7 como exercício.

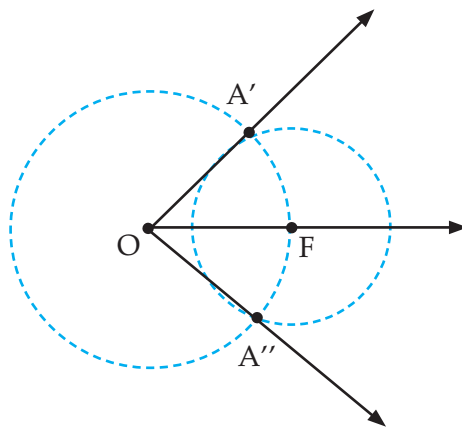
Situação-problema 8. Dados os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, faça a adição destes ângulos.



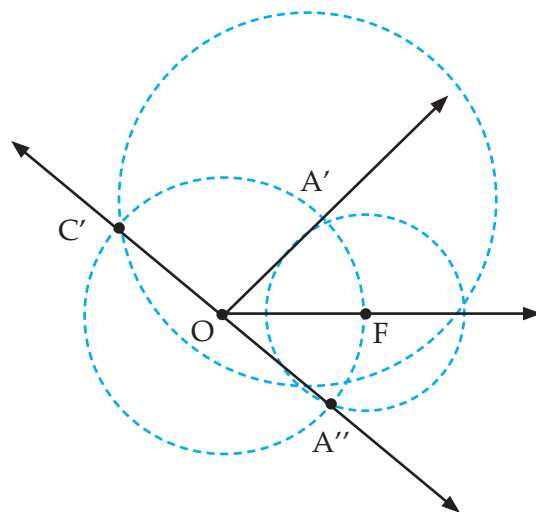
Consideremos os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ dados. Construímos uma circunferência de centro em O e raio qualquer sobre o ângulo $A\hat{O}B$ cortando \overline{AO} no ponto A' e uma outra de centro em E e raio \overline{EA} . O segmento \overline{EA} é medida do ângulo $A\hat{O}B$. Da mesma forma, traçamos uma circunferência de centro em O e raio qualquer sobre o ângulo $C\hat{O}D$ cortando \overline{OC} no ponto C' e uma outra de centro E' e raio $\overline{E'C'}$. O segmento $\overline{E'C'}$ é a medida do ângulo $C\hat{O}D$. Como podemos observar na figura a seguir.



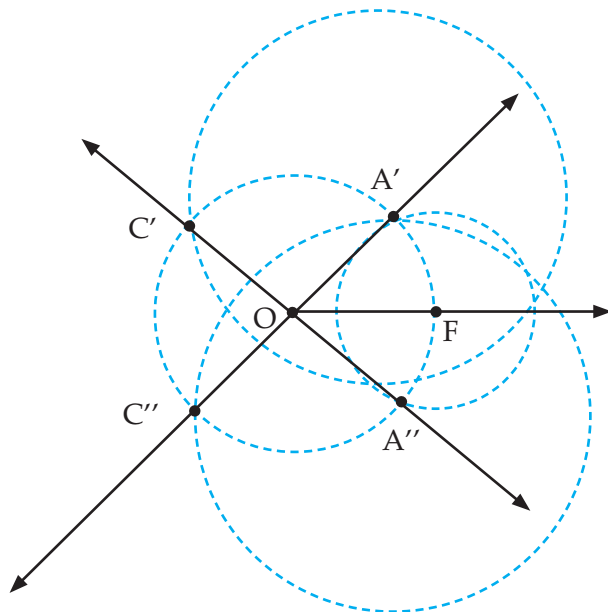
Para adicionarmos estes ângulos, traçamos uma semi-reta de origem O e construímos uma circunferência de centro em O e raio qualquer obtendo o ponto F interseção da semi-reta construída com esta última circunferência construída. Copiamos a medida do ângulo $A\hat{O}B$ (centrando o compasso em E e raio $\overline{E'A'}$) e transportamos essa medida para a nova semi-reta O obtendo os pontos A' e A'' interseção deste transporte com a circunferência feita inicialmente. Finalizamos marcando as semi-retas $\overline{A'O}$ e $\overline{A''O}$, como podemos observar na figura a seguir.



Adicionando o ângulo $C\hat{O}D$ ao ângulo $A'\hat{O}F$. Copiamos a medida do ângulo $C\hat{O}D$ (centrando o compasso em E' e raio $\overline{E'C'}$) e transportamos essa medida para a nova semi-reta O obtendo o ponto C' interseção deste transporte com a primeira circunferência feita na semi-reta de origem O . Finalizando temos a semi-reta $\overline{OC'}$, como podemos observar na figura a seguir.

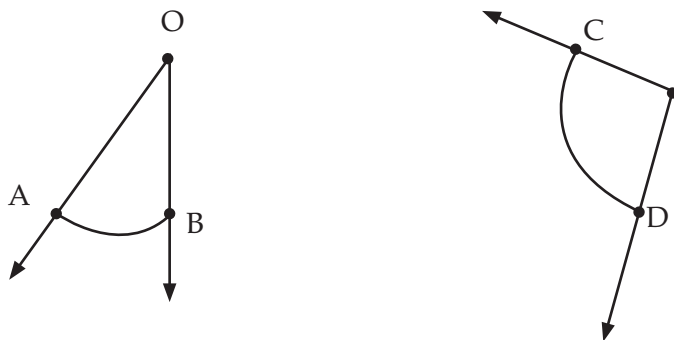


Mas ainda não acabamos, transportamos a medida do ângulo $C\hat{O}D$ para semi-reta O , centrado o compasso em A'' e raio $\overline{E'C'}$ do ângulo $C\hat{O}D$, obtendo o ponto C'' e traçamos a semi-reta $\overline{OC''}$.

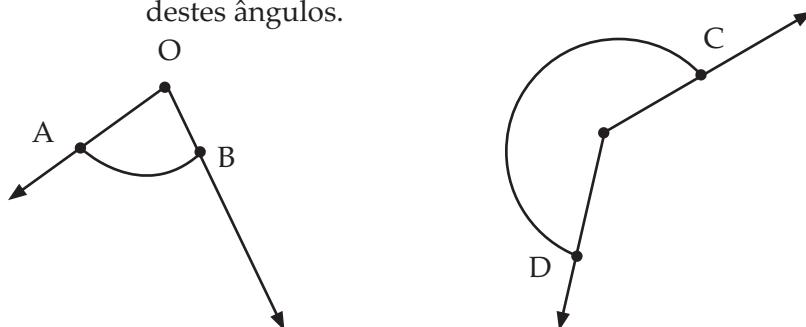


Resposta. Ângulos $C'\hat{O}E$ e $C''\hat{O}E$.

Situação-problema 9. Dados os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, faça a adição destes ângulos.

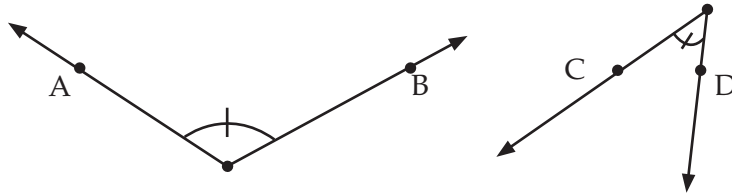


Situação-problema 10. Dados os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, faça a adição destes ângulos.



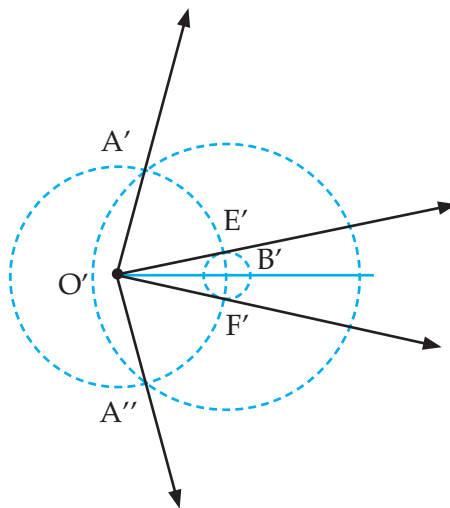
Deixaremos as situações-problema 9 e 10 como exercícios.

Situação-problema 11. Dados os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, faça a subtração destes ângulos.



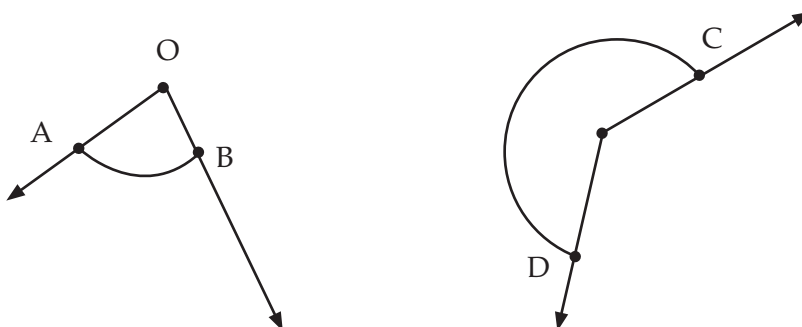
Subtração. Do ângulo $A\hat{O}B$ retiraremos o ângulo $C\hat{O}D$ e obtemos os ângulos $A'\hat{O}'E'$ e $A''\hat{O}'F'$.

Na figura, temos os passos necessários para a resolução deste exercício. Escreva estes passos.



Resposta. Ângulos $A'\hat{O}'E'$ e $A''\hat{O}'F'$.

Situação-problema 12. Dados os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, faça a subtração destes ângulos.



Deixaremos como exercício.

Capítulo VII

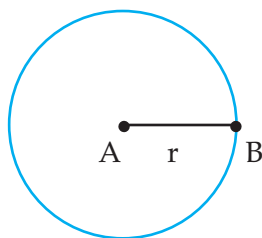
MEDIATRIZ

Algumas vezes precisamos dividir um segmento de reta ao meio. Podemos fazer isso utilizando o conceito de mediatriz. Dado um segmento de reta de extremidades A e B , a mediatriz deste segmento é a reta que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a ele. Como propriedade, temos que a mediatriz de um segmento dado é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B , e reciprocamente, todo ponto equidistante dos extremos de um segmento pertence à mediatriz desse segmento. Portanto para encontrar o ponto que divide um segmento, determinamos sua mediatriz.

Situação-problema 1. Como se divide um segmento ao meio, ou dado um segmento AB , construir a sua mediatriz.

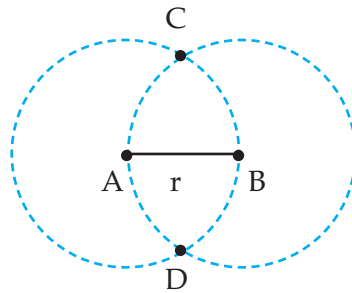
Como a mediatriz é uma reta e precisamos traçá-la, são necessários dois pontos. Lembremos que dois pontos determinam uma única reta. Como então determiná-los?

Recordemos que uma **circunferência** é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância (raio) de um ponto dado (centro).



Se tomarmos como centro de uma circunferência o ponto A e um raio conveniente r , teremos todos os pontos que estão à distância r de A . Ao repetirmos este raciocínio com o ponto B , obteremos o conjunto de

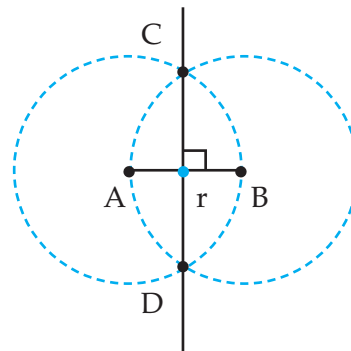
pontos que estão à distância r de B.



O que serão os pontos de intersecção destas duas circunferências?

Como tomamos um raio r conveniente, e veremos “o que significa” esta conveniência, as circunferências encontrar-se-ão em dois pontos P e Q . Ao ligarmos estes dois pontos por uma reta teremos a mediatriz, pois esta reta contém dois pontos (P e Q) que equidistam de A e B e todos os demais (infinitos) pontos. Os passos para a construção da mediatriz podem ser vistos na Figura 1.

$r =$ reta mediatriz do segmento \overline{AB} .



Construção. Dado o segmento \overline{AB} , construir sua mediatriz. (Consideremos um segmento horizontal, o procedimento é análogo para qualquer posição do segmento).

Procedimento

1. Centrar o compasso em A e com uma abertura um pouco maior que a metade traçar um arco acima e um abaixo do segmento.
2. Com a mesma abertura e centro do compasso em B , traçar um arco acima e um abaixo do segmento.
3. Nomear como C e D os pontos de intersecção desses arcos.
4. Traçar a reta r que passa por C e D .

Figura 1. Passos para a construção da mediatriz.

Pelo procedimento, vemos que a abertura conveniente deve ser um pouco maior que a metade do segmento. Pode parecer contraditório, uma vez que não sabemos onde fica a metade, pois é isso que a mediatriz nos dá, mas temos uma noção de onde fica a metade e esta noção nos é suficiente. A abertura poderia ser muito maior que o segmento, mas isto faria com que os pontos, que determinam a mediatriz, ficassem muito distantes e o traçado da reta ficaria prejudicado. O raio dos arcos não pode ser menor que a metade do comprimento do segmento, pois, neste caso, os arcos não se intersectariam. Não é necessário construir inteiramente as circunferências, basta construir os quatro arcos que geram os pontos da mediatriz.



Para pensar. O que ocorreria se tivéssemos muita sorte e a abertura fosse exatamente a metade do comprimento do segmento?

Capítulo VIII

PERPENDICULARES

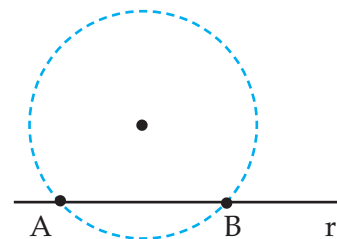
Uma das construções elementares mais simples de obter é o traçado de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado não pertencente à reta dada. A sua construção vem da construção da mediatriz.

Situação-problema 1. Dada uma reta r e ponto P , fora dela, trace uma perpendicular à reta, passando pelo ponto.

Primeiro Modo.

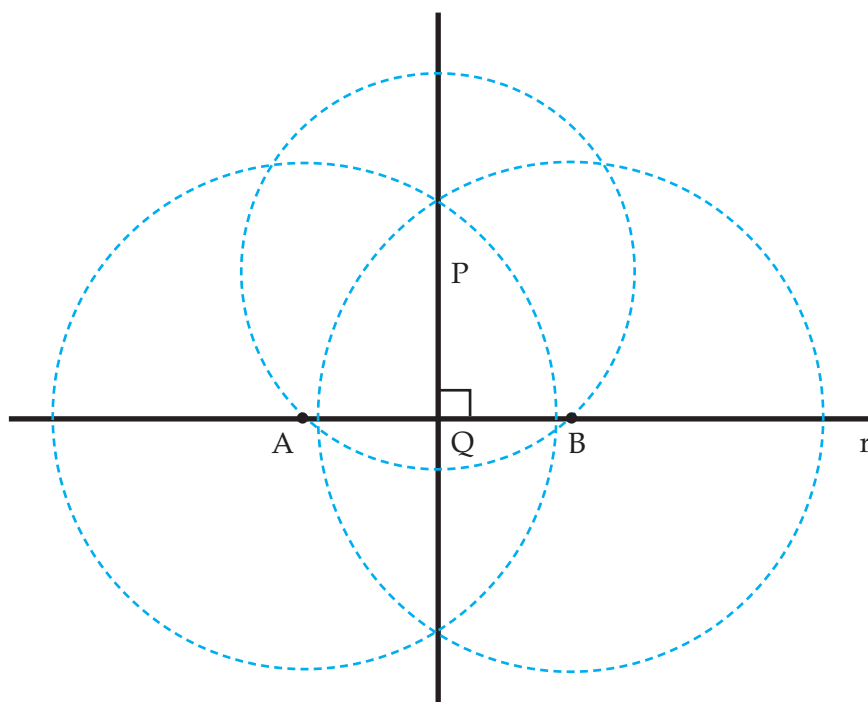
Denominamos r a reta dada e P o ponto dado, P não pertence à r ($P \notin r$). A reta perpendicular a r que passa por P é construída como se segue.

Traçamos uma circunferência com centro em P e raio um pouco maior que à distância de P a r , de forma a intersectar r em dois pontos, que denominaremos A e B .



De acordo com a construção, o ponto P está à mesma distância de A e B . A reta perpendicular a r que passa por P e cujos pontos equidistam dos pontos A e B construídos é a mediatriz do segmento \overline{AB} ,

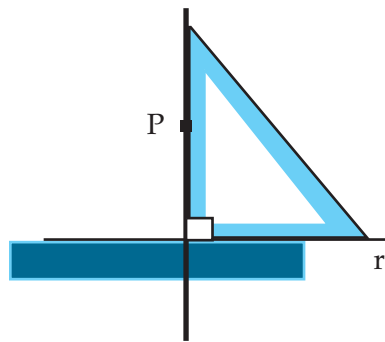
contido na reta r . Para poder traçar a reta resposta, precisamos de mais um ponto, além do ponto P , e este ponto é determinado com parte do procedimento de construção da mediatriz. Traçamos uma circunferência de centro em A e abertura um pouco maior que a metade. Do mesmo modo traçamos uma circunferência com centro em B e mesma abertura de forma a interceptar a primeira circunferência, obtendo o ponto Q , no semi-plano oposto àquele que contém P . Então traçamos a reta que passa por P e Q , que é a nossa resposta.



A figura mostra os passos para a construção de uma reta perpendicular à reta dada r , passando pelo ponto P não pertencente à r . O ponto Q pode ser denominado projeção (ortogonal) do ponto P sobre a reta r .

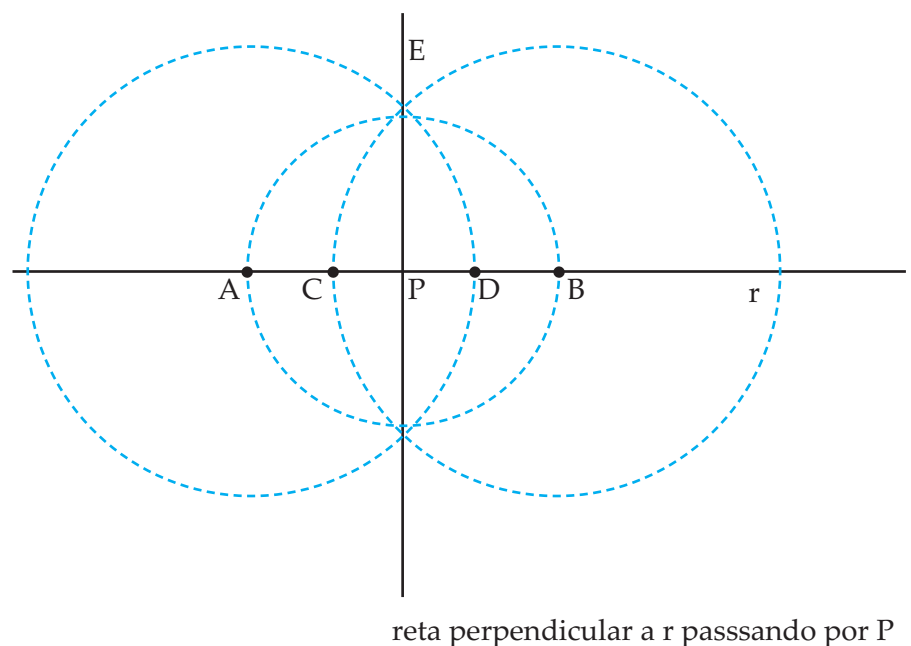
Segundo Modo.

Para traçarmos uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto P fora da reta, podemos utilizar régua e esquadro. Apoiamos sobre a reta r a régua e o esquadro, de forma que o esquadro passe pelo ponto P , como podemos ver na figura, e traçamos a reta solução.



Situação-problema 2. Dada uma reta r e ponto P , nela contido, traçar por P uma perpendicular a r . Denominamos r a reta dada e P o ponto dado, P pertence à r ($P \in r$). A reta perpendicular a r que passa por P é construída como se segue.

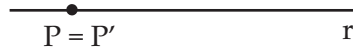
Traçamos uma circunferência com centro do compasso em P e de raio qualquer, de forma a intersectar r em dois pontos, que denominaremos A e B . Em seguida, construímos a mediatriz do segmento AB , que é justamente a reta perpendicular procurada.



reta perpendicular a r passando por P

A figura anterior mostra os passos para a construção de uma reta perpendicular à reta r passando pelo ponto P pertencente à reta.

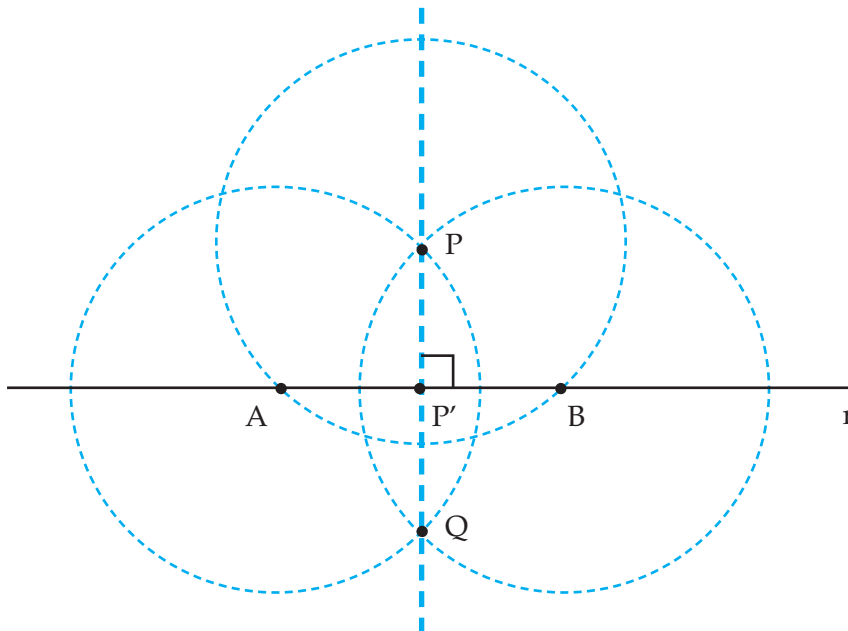
Situação-problema 3. Determinar o simétrico do ponto P em relação à reta r dada.



Definimos o simétrico do ponto P em relação à reta dada r como sendo o ponto de Q , pertencente à reta perpendicular PP' (P' é a projeção ortogonal de P sobre a reta r), tal que $QP' = PP'$. Se P pertencer a r , então ele é o seu próprio simétrico.

Caso 1. $P \notin r$.

Denominamos r a reta dada e P o ponto dado, P não pertence à r ($P \notin r$). A simétrico de P em relação à reta dada r é construído como a seguir.



Resposta. Ponto Q é o simétrico de P em relação a reta r .

Discuta as operações realizadas e suas justificativas.

Caso 2. $P \in r$.

Denominamos r a reta dada e P o ponto dado, P pertence à r ($P \in r$). A reta perpendicular a r que passa por P é construída como a seguir.



APLICAÇÃO. Qual deve ser a posição da bailarina para ficar equidistante dos dois meninos?

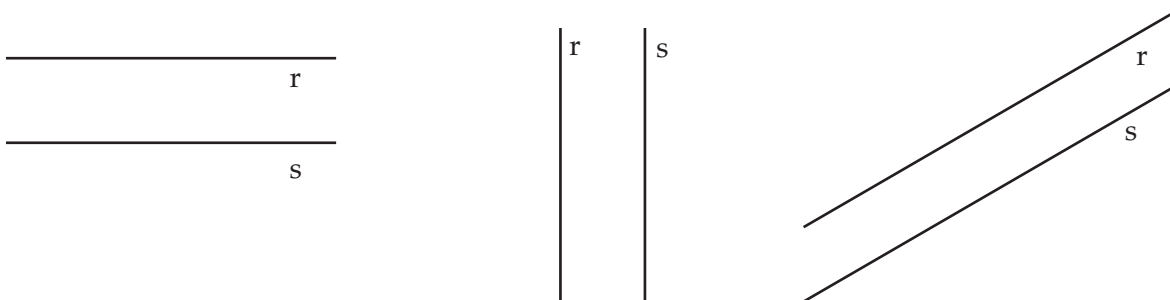


Capítulo IX

PARALELAS

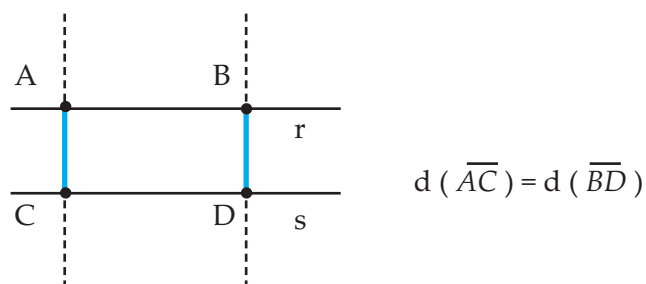
Duas retas que estão contidas num mesmo plano são ditas **paralelas** quando não têm pontos em comum.

Duas retas paralelas nunca se cortam. Normalmente, indica-se $r // s$. Nas figuras a seguir, apresentamos retas paralelas em diferentes posições: na horizontal, na vertical e inclinadas.



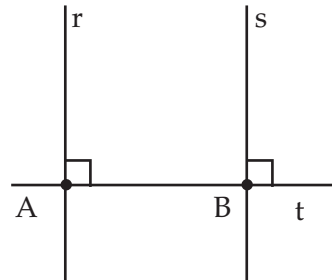
À **distância de um ponto a uma reta** correspondem à medida do segmento perpendicular à reta cujas extremidades são o ponto dado e o pé da perpendicular.

À **distância entre duas retas paralelas r e s** é à distância de qualquer ponto de uma delas à outra.



A **distância entre r e s** é igual à distância do ponto A ao ponto C, ou à distância do ponto B ao ponto D, ou seja, $d(\overline{AC}) = d(\overline{BD})$.

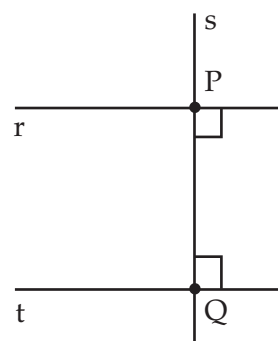
Teorema. Duas retas distintas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.



Veja a demonstração deste teorema no livro **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas** – Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz – páginas 55 e 56.

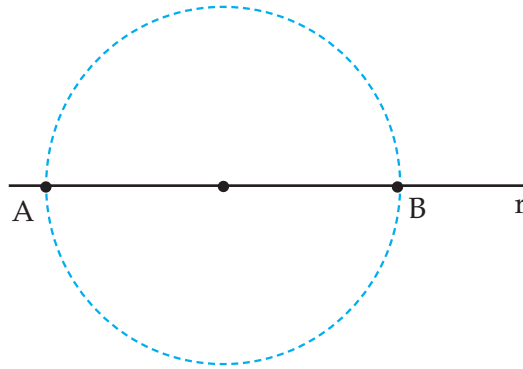
Teorema. Por um ponto não pertencente a uma reta dada passa uma única reta paralela à ela.

Consideremos a reta t e um ponto P ($P \notin t$). Seja s a reta passando por P e perpendicular a t , e seja r a reta passando por P e perpendicular a s . Pelo teorema acima, $t \parallel r$.

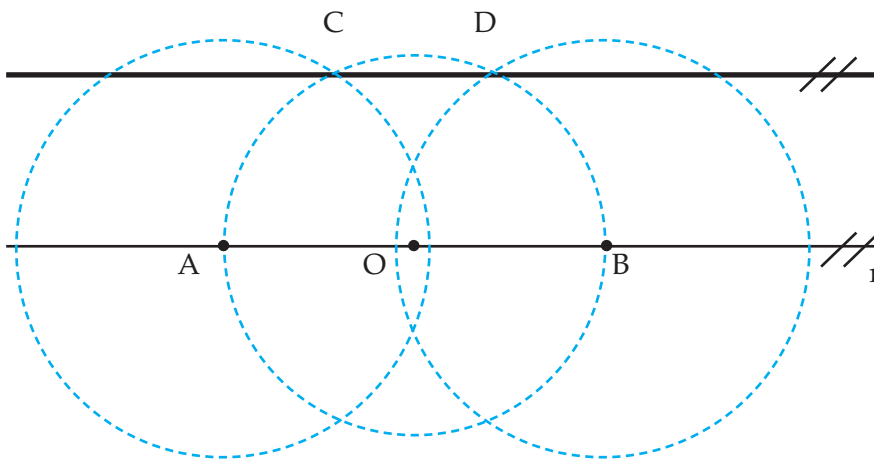


Situação-problema 1. Traçar uma reta paralela a uma reta dada com o auxílio do compasso e da régua.

Dada a reta r , vamos marcar um ponto O qualquer sobre esta reta. Centrando o compasso em O e com uma abertura qualquer, traçamos uma circunferência, obtendo assim os pontos A e B , sobre a reta r .



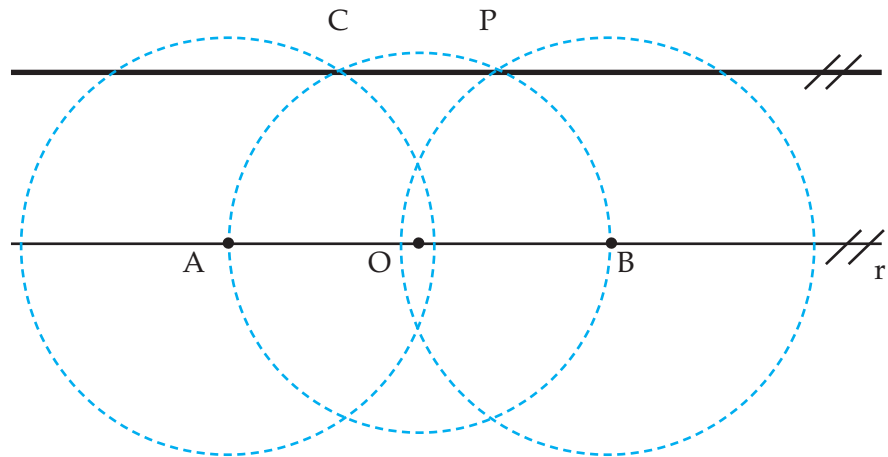
Para finalizar, centramos o compasso em A e com uma abertura qualquer para o raio, marcamos o ponto C, da mesma maneira centramos o compasso em B e com a mesma abertura marcamos o ponto D, e em seguida traçamos a reta \overline{CD} (aquela que passa pelos pontos C e D).



Observação. \parallel símbolo de que dois objetos (retas) são paralelos.

Situação-problema 2. Dados uma reta r e um ponto P não pertencente à reta, trace uma paralela a r , de modo que ela passe pelo ponto dado.

A resposta é obtida da seguinte forma: centrando o compasso em um ponto O qualquer da reta r e traçando uma circunferência que passe pelo ponto P dado, determinamos os pontos A e B na reta dada. Agora, com abertura do compasso correspondente ao comprimento de \overline{BP} , centramos o compasso em A e obtemos o ponto C . Finalmente, traçamos a reta \overline{CP} paralela à reta r dada, passando por P .



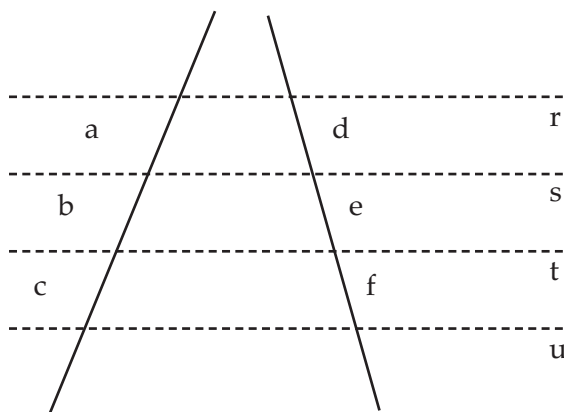
Resposta. Reta \overline{CP} , passando por P paralela a reta r dada.

Aplicações

Divisão de segmentos em partes iguais

Teorema de Tales

Um feixe de retas paralelas determina sobre duas ou mais transversais quaisquer segmentos de uma proporcional aos segmentos correspondentes.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{IJ}}{\overline{JK}} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

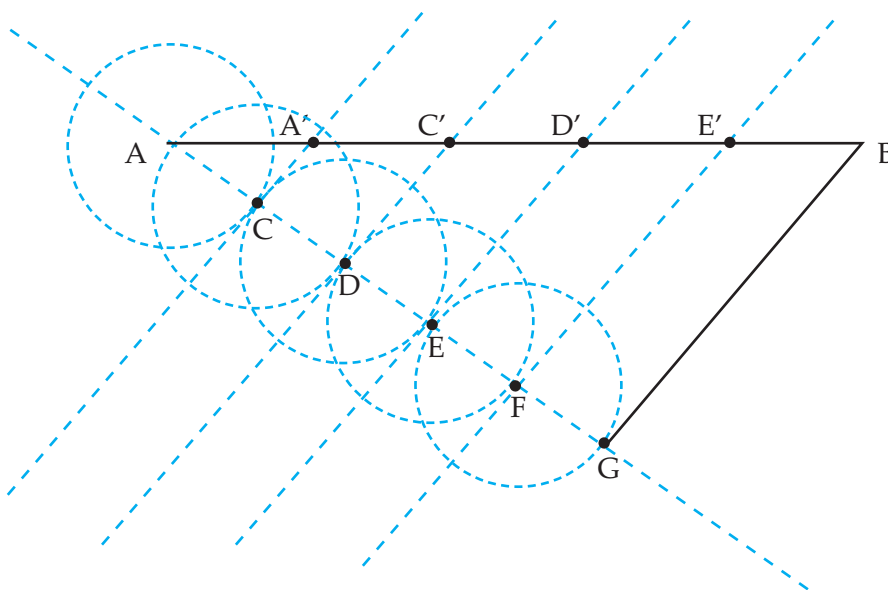
O teorema de Tales garante que os segmentos a, b e c são proporcionais aos segmentos d, e e f, desde que as retas r, s, t e u sejam paralelas.



Estude este conceito no livro **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas** – Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz – páginas 62 até 69.

Situação-problema 1. Dividir um segmento de reta em cinco partes iguais.

Traçamos por A uma reta r qualquer, formando um ângulo com o segmento em questão. Com centro do compasso em A e com uma medida qualquer construímos o ponto C sobre a reta r. Os pontos D, E, F e G são obtidos repetindo-se a medida do raio da circunferência de centro em A. Em seguida, unimos os pontos G e B e traçamos por F, E, D e C as paralelas à \overline{GB} , usando régua e compasso ou régua e esquadro. Finalmente, pelo Teorema de Tales garantimos que o segmento \overline{AB} ficou dividido em 5 partes iguais e são elas: $\overline{AA'} = \overline{A'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'B}$.



Resposta. $\overline{AA'} = \overline{A'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'B}$

Deixaremos as situações-problema 2, e 3 como exercícios.

Situação-problema 2. Dividir um segmento de reta $\overline{AB} = 4,5$ cm em cinco partes iguais.

Situação-problema 3. Dividir um segmento de reta $\overline{AB} = 7$ cm em duas partes iguais.

Aplicações

Divisão de segmentos em partes desiguais

Razão de dois segmentos

Razão de dois segmentos é o número que exprime a medida de um desses segmentos quando se toma o outro como unidade.

Podemos também defini-lo da seguinte forma.

Razão de dois segmentos é o quociente exato da divisão dos números que exprimem as medidas desses segmentos, em relação à mesma unidade.

Por exemplo. Vamos supor que segmento \overline{AB} equivalha a 4 vezes a unidade e que \overline{CD} equivalha a 2 vezes a unidade. Esta unidade é dada e qualquer. Escolhendo \overline{CD} como unidade, pela definição, a

razão entre as medidas desses segmentos é $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{4}{2}$.

Segmentos proporcionais

Os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são ditos **proporcionais** aos segmentos \overline{EF}

e \overline{GH} quando é verificada a relação $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$, ou qualquer outra equivalente a ela.

Por exemplo, tomemos uma unidade qualquer dada e consideremos os quatro segmentos $\overline{AB} = 8$ vezes a unidade, $\overline{CD} = 4$ vezes a unidade, $\overline{EF} = 6$ vezes a unidade e $\overline{GH} = 3$ vezes a unidade. Temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{6}{3} = 2$$

Os segmentos considerados são proporcionais, porque podemos formar com eles uma proporção, como podemos ver a seguir.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = 2 \text{ ou ainda } \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = 2$$

Observação. Uma proporção é dita contínua quando tem os meios iguais. Veja um exemplo.

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

Situação-problema 1. Dividir um segmento de reta \overline{AB} na razão $2/3$.

Como estamos dividindo o segmento na razão $2/3$, iremos dividir o segmento em 5 ($2+3$) partes iguais, e tomaremos uma medida correspondente a duas partes e outra medida correspondente a três partes. Utilizando o procedimento do Teorema de Tales, dividimos o segmento em cinco partes iguais e marcamos o ponto C que separa as divisões do segmento em 2 e 3 partes, respectivamente.

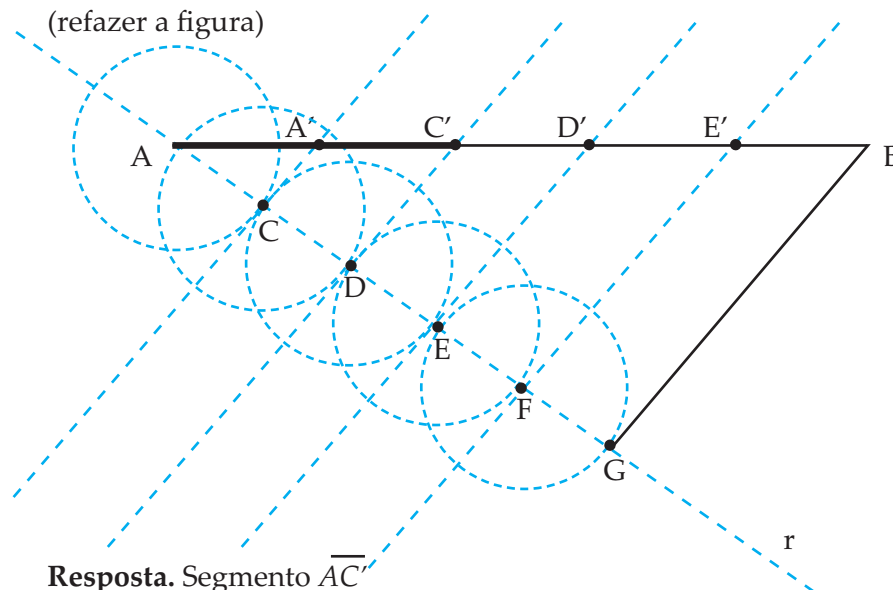
Traçamos por A uma reta r qualquer, formando um ângulo com o segmento em questão.

Centramos o compasso em A e com uma medida qualquer construímos o ponto C. Os pontos D, E, F e G são obtidos repetindo-se a medida do raio da circunferência de centro em A. Em seguida unimos o ponto G ao B e traçamos por F, E, D e C as paralelas à \overline{GB} .

Finalmente o segmento $\overline{AC'}$ é a resposta pedida, uma vez que

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DG}} = \frac{2}{3}$$

(refazer a figura)



A 4ª proporcional de três segmentos

A 4ª **proporcional de três segmentos** é um quarto segmento que forma uma proporção com esses três segmentos. Ou seja, o segmento $\overline{AE} = x$ é a quarta proporcional entre os segmentos $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e

$$\overline{CD} = c \text{ quando é válida a relação } \frac{\overline{AB}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DG}} = \frac{2}{3}, \text{ ou}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

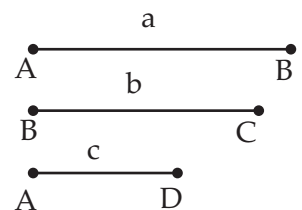
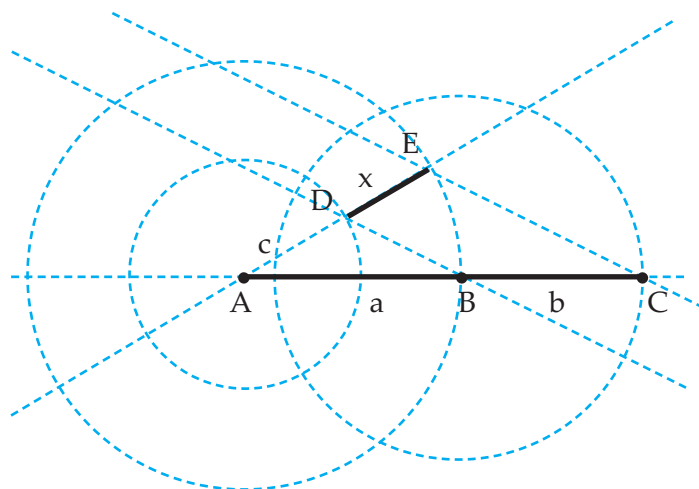
Situação-problema 1. Dados três segmentos obter o quarto.

Consideremos uma unidade de medida qualquer e sejam os segmentos dados $\overline{AB} = a$ vezes a unidade, $\overline{BC} = b$ vezes a unidade e $\overline{AD} = c$ vezes a unidade. Procuramos pelo segmento $\overline{DE} = x$, tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Para isso, inicialmente traçamos a reta suporte dos

segmentos $\overline{AB} + \overline{BC} = a + b = \overline{AC}$. Pelo ponto A e ângulo qualquer traçamos a reta suporte do segmento \overline{AD} e marcamos sobre esta reta a medida c do segmento \overline{AD} . Unimos os pontos B e D e traçamos o segmento \overline{BD} . Pelo ponto C, construímos uma reta paralela ao segmento \overline{BD} , que intercepta a reta suporte do segmento \overline{AD} no ponto E. O segmento \overline{DE} tem medida x, que é a resposta do problema, como podemos observar na figura a seguir. A solução é obtida aplicando-se o Teorema de Tales.



Resposta. Segmento $\overline{DE} = x$ é a 4ª proporcional de três segmentos dados.

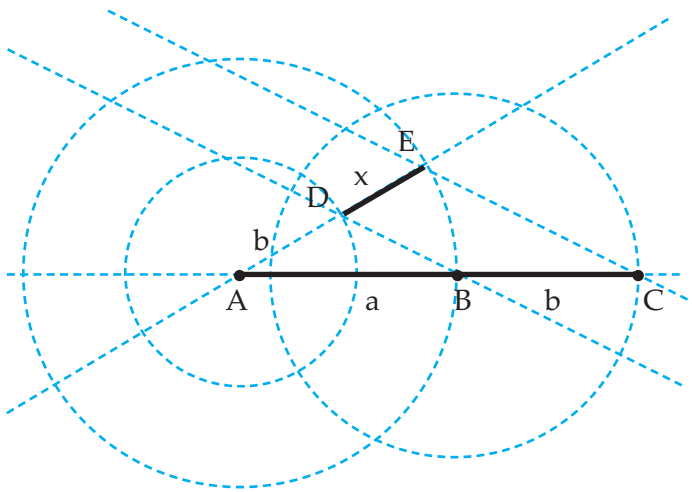
Situação-problema 2. Dados três segmentos obter

$$\overline{DE} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB}} \quad \text{ou, simplesmente, } x = \frac{b \cdot c}{a} .$$

Consideremos uma unidade de medida qualquer e sejam os segmentos dados $\overline{AB} = a$ vezes a unidades, $\overline{BC} = b$ vezes a unidade, $\overline{CD} = c$ vezes a unidade. Estamos procurando o segmento $\overline{DE} = x$.

Temos que $x = \frac{b \cdot c}{a}$ ou $\frac{x}{c} = \frac{b}{a}$. Construímos um ângulo

qualquer de vértice A e transportamos sobre um de seus lados a medida do segmento a e depois a medida do segmento c na extremidade do segmento a. Sobre o outro lado transportamos a medida do segmento b e obtemos o ponto D sobre este lado do ângulo. Traçamos o segmento \overline{BD} e depois pelo ponto C construímos uma reta \overline{CE} paralela ao segmento \overline{BD} , onde obtemos o ponto E e traçamos o segmento $\overline{DE} = x$, resposta do problema, como podemos observar na figura a seguir.



A justificativa pode ser feita pelo Teorema de Tales

Resposta. Segmento $\overline{DE} = x$.

3ª proporcional de dois segmentos

A **3ª proporcional de dois segmentos** é o segmento que forma com esses dois outros uma proporção contínua, na qual os meios iguais são ocupados por um dos segmentos dados. Na proporção

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AE}}$$

Se $\overline{BC} = \overline{CD} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AE}}$ onde AE será uma terceira

proporcional a \overline{AB} e \overline{CD} . O segmento \overline{AE} é considerado uma média proporcional entre \overline{AB} e \overline{AE} , obtendo $\overline{CD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AE}$

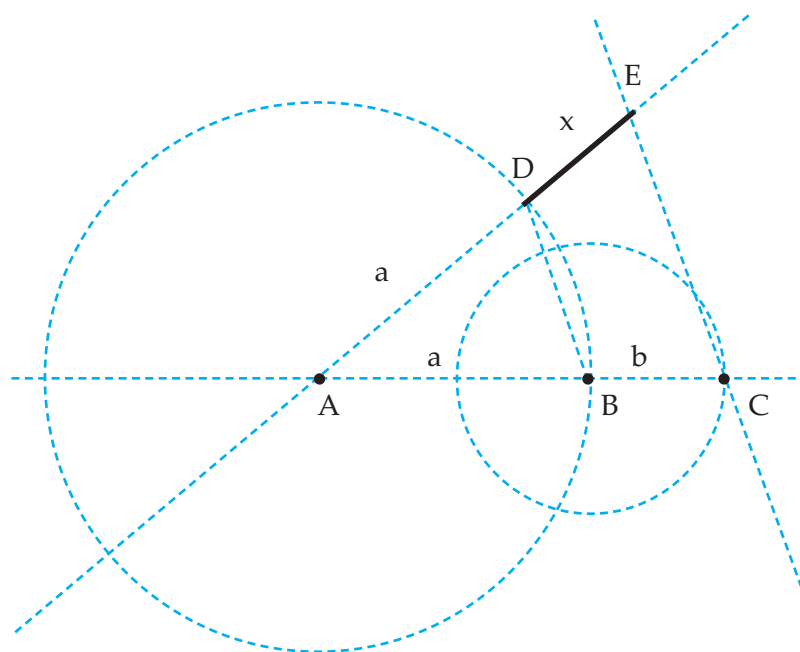
Situação-problema 1. Dados dois segmentos, obter $DE = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}}$

ou, simplesmente, $x = \frac{b^2}{a}$.

Consideremos uma unidade de medida qualquer e sejam os segmentos dados $\overline{AB} = a$ vezes a unidades, $\overline{BC} = b$ vezes a unidade.

Estamos procurando o segmento $\overline{DE} = x$. Temos que $x = \frac{b^2}{a}$ ou $\frac{x}{b} = \frac{b}{a}$.

Construímos um ângulo qualquer de vértice A e transportamos sobre um de seus lados a medida do segmento a e depois a medida do segmento b na extremidade do segmento a . Sobre o outro lado transportamos a medida do segmento a e obtemos o ponto D sobre este lado do ângulo. Traçamos o segmento \overline{BD} e depois pelo ponto C construímos uma reta \overline{CE} paralela ao segmento \overline{BD} , onde obtemos o ponto E e traçamos o segmento $\overline{DE} = x$, resposta do problema, como podemos observar na figura a seguir.



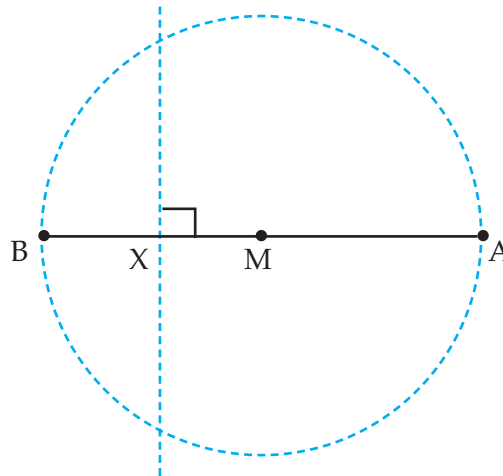
Resposta. Segmento $\overline{DE} = x$.

Situação-problema 2. Achar a terceira proporcional entre dois segmentos dados.

Deixaremos esta situação-problema como exercício.

Segmento áureo

\overline{AX} chama-se **segmento áureo** de \overline{AB} se, e somente se, $\overline{AX}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{XB}$.



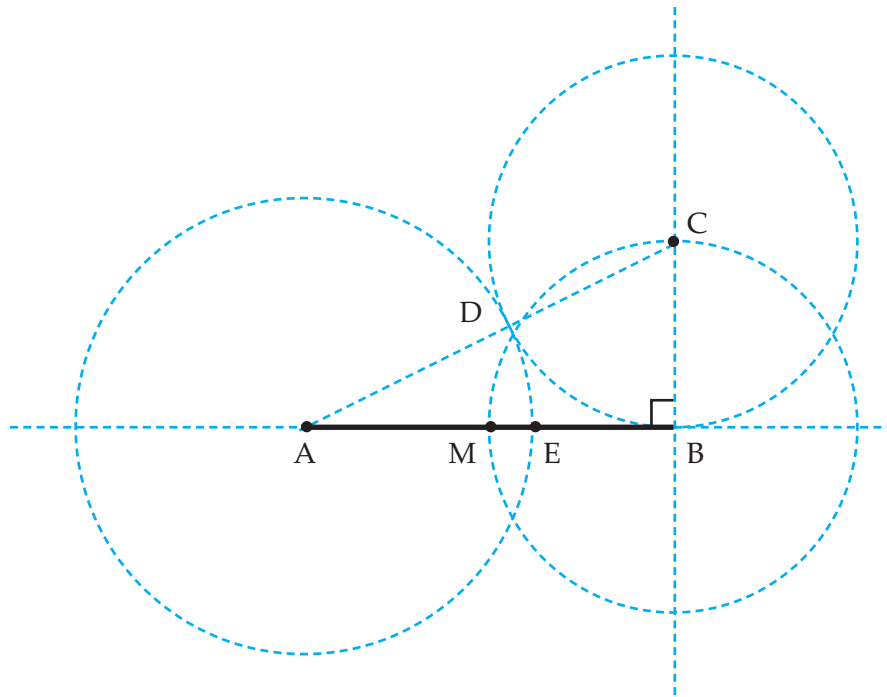
Dividir um segmento em média e extrema razão é decompor o segmento dado em dois outros, de modo que o maior deles seja média proporcional entre o menor e o segmento dado.

Situação-problema 1. Divisão de um segmento em média e extrema razão.

Tracemos a reta suporte do segmento \overline{AB} e marcamos sobre esta a medida deste segmento. E seja M o ponto médio do segmento \overline{AB} . Traçamos uma reta perpendicular ao segmento \overline{AB} pelo ponto B e construímos uma circunferência de centro em B e raio \overline{BM} , obtendo o ponto C na reta perpendicular que passa por B e construímos uma outra circunferência de centro C e raio \overline{CB} . Traçamos o segmento e marcamos o ponto D, intersecção do segmento \overline{AC} com a circunferência de raio \overline{CB} . Traçamos a circunferência de centro A e raio \overline{AD} obtendo o ponto E na intersecção do segmento \overline{AB} com essa circunferência.

Ter-se a proporção $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$.

O ponto E divide o segmento \overline{AB} em média e extrema razão.



Resposta. O ponto E divide o segmento \overline{AB} em média e extrema razão.

No Capítulo 6 vimos como traçar uma reta que divide um segmento em duas partes de mesmo comprimento.

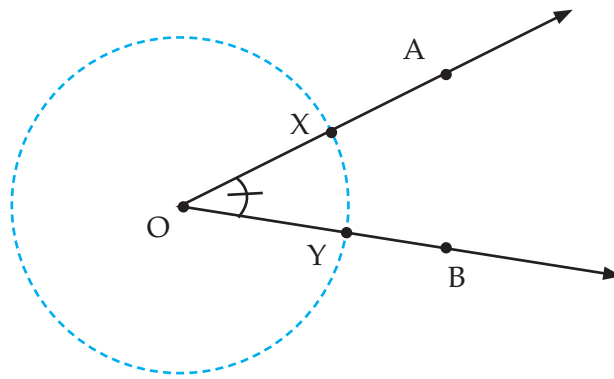
Como faríamos para traçar uma semi-reta que divide um ângulo dado em dois ângulos de mesma medida?

Estamos procurando uma **bissetriz** que é o conjunto dos pontos que equidistam dos lados de um ângulo dado.

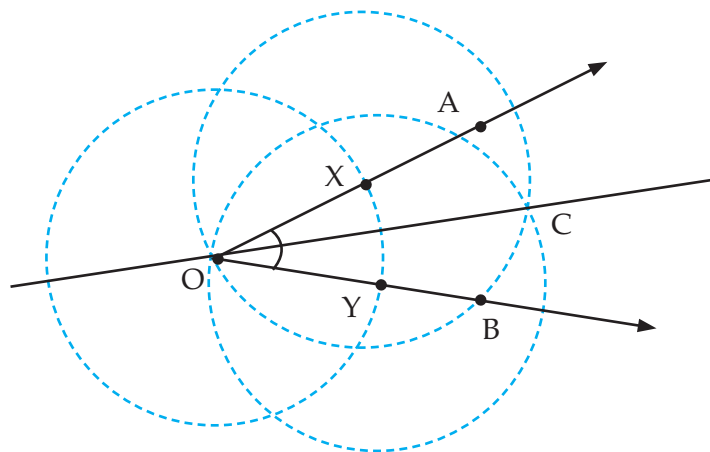
Situação-problema 1. Achar a bissetriz de um ângulo dado.

Para construirmos a bissetriz, utilizamos um raciocínio muito parecido com aquele usado para o traçado da mediatriz. Como estamos procurando uma semi-reta, novamente precisamos de dois pontos para traçá-la. O ponto de origem da bissetriz é justamente o vértice do ângulo, que denominaremos O , e está à mesma distância (nula) dos lados do ângulo.

O segundo ponto que precisamos determinar é um ponto que equidista de ambos os lados do ângulo. Primeiramente precisamos marcar dois pontos, um em cada lado do ângulo que servirão como referência para a distância da bissetriz aos lados. Estes pontos estarão à mesma distância da origem. Para determinar estes dois pontos de referência, escolhemos uma abertura qualquer do compasso e traçamos um arco que intersecta os lados do ângulo, obtendo os pontos X e Y .



Com centro em X e um raio r conveniente (\overline{XO}), obtemos uma circunferência. Repetimos a construção com centro em Y e obtemos uma segunda circunferência. Estas duas circunferências se interseccionam em dois pontos, se ambos forem internos ao ângulo, escolhemos o mais distante do vértice; se um for interno e o outro externo, escolhemos o ponto interno. O ponto escolhido será denominado C . Este ponto encontra-se à mesma distância de X e Y . Assim, ao construirmos a semi-reta de origem O contendo C , estaremos obtendo a bissetriz do ângulo. A construção da bissetriz pode ser acompanhada na Figura 2.



A abertura para o primeiro traçado deve marcar dois pontos nos lados que não estejam a uma grande distância do vértice do ângulo. A abertura para marcar o ponto interno é aproximadamente igual à distância entre os pontos X e Y . Como no caso da mediatriz, a conveniência das aberturas é que vai facilitar ou dificultar os traçados das demais componentes. À medida que se vai exercitando, tem-se mais habilidade em escolher a abertura conveniente para os traçados.

Construção. Dado o ângulo , construir sua bissetriz.

Procedimento

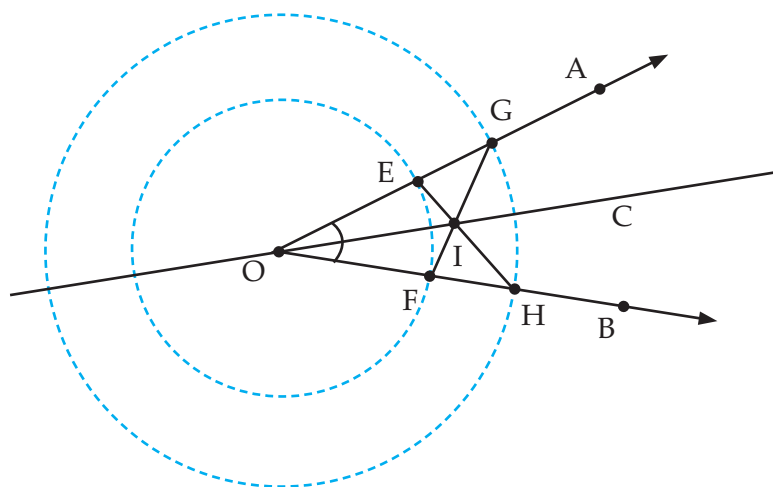
1. Centrar o compasso em O e com uma conveniente qualquer traçar um arco de circunferência que corta os lados do ângulo em dois pontos, digamos X e Y.
2. Centrar o compasso em X e com uma abertura conveniente traçar um arco na parte interna do ângulo, do lado mais distante do vértice.
3. Com a mesma abertura e centro do compasso em B, traçar um arco na parte interna do ângulo de modo a intersectar o arco traçado no passo 2.
4. O ponto de intersecção destes dois ponto é o ponto C.
5. Traçar a semi-reta \overline{OC} .

Figura 2. Passos para a construção da bissetriz.

Situação-problema 2. Achar a bissetriz de um ângulo dado, utilizando somente régua.

Denominamos $A\hat{O}B$ o ângulo dado e queremos construir a bissetriz desse ângulo. Segue sua construção.

Primeiro devemos marcar um ponto E na semi-reta \overline{AO} e traçar uma circunferência de raio \overline{OE} , obtendo o ponto F na semi-reta \overline{OB} . Da mesma maneira marcamos outro ponto, no caso G, sobre a semi-reta \overline{OA} e traçamos uma nova circunferência de raio \overline{OG} , obtendo agora o ponto H. Vamos unir com segmentos de reta os pontos \overline{EH} e \overline{GF} , obtendo assim o ponto I (intersecção desses dois segmentos) e para finalizar traçamos a bissetriz \overline{OI} do ângulo dado.



Resposta. A bissetriz é pedida é \overline{OI} .

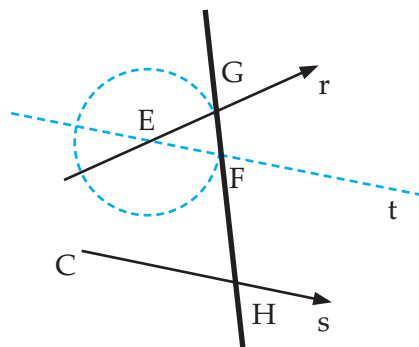


Justifique porque o procedimento acima esta correto, discutindo com seus colegas no FÓRUM e ainda poste sua contribuição no MATERIAL DO ALUNO ou a envie através do seu Pólo para o tutor responsável.

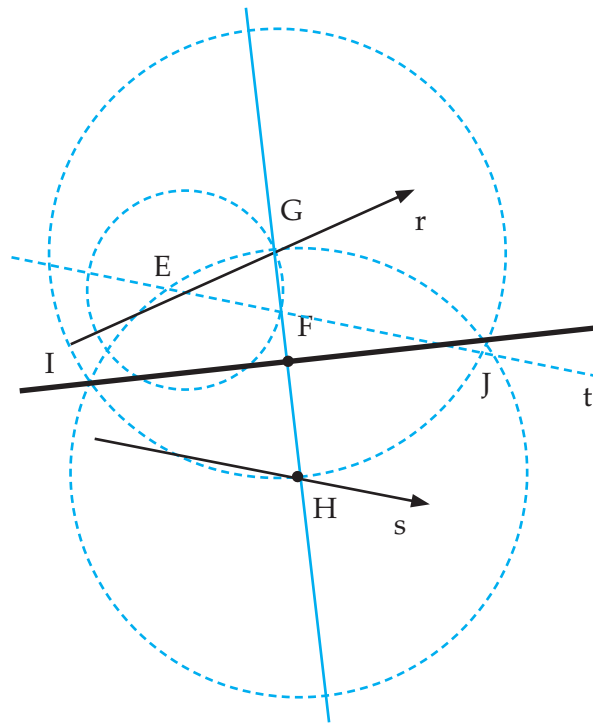
Situação-problema 3. Achar a bissetriz de um ângulo sem recorrer ao vértice.

Queremos construir a bissetriz de um ângulo, sem conhecer seu vértice ou recorrer a ele. A construção é feita como se segue.

Consideremos as semi-retas r e s de um ângulo do qual não se conhece o vértice. Seja E um ponto qualquer na semi-reta dada r . Traçamos uma reta t , passando por E e paralela à semi-reta dada s . Centrando o compasso no ponto E e raio qualquer, traçamos a circunferência de centro E que corta a semi-reta r no ponto G e a reta t no ponto F . Obtemos a reta \overline{GF} que corta a semi-reta s no ponto H . Estes passos estão representados na próxima figura. A mediatriz do segmento \overline{GH} conterá a bissetriz procurada.



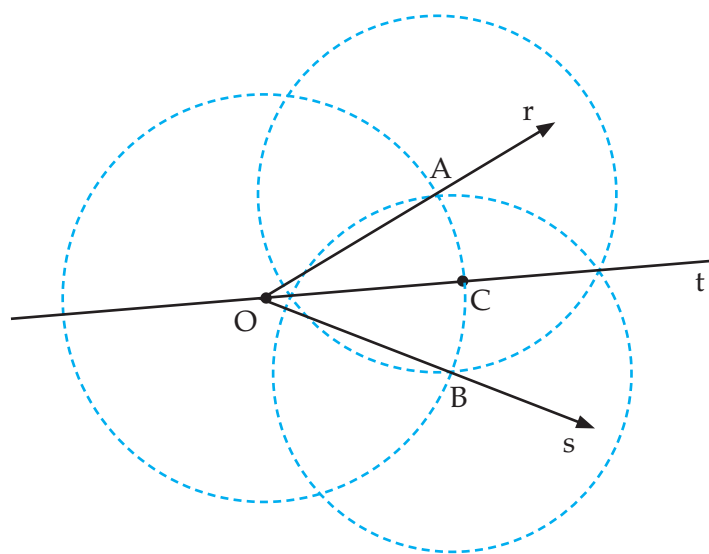
Porquê? Procure justificar sua resposta.



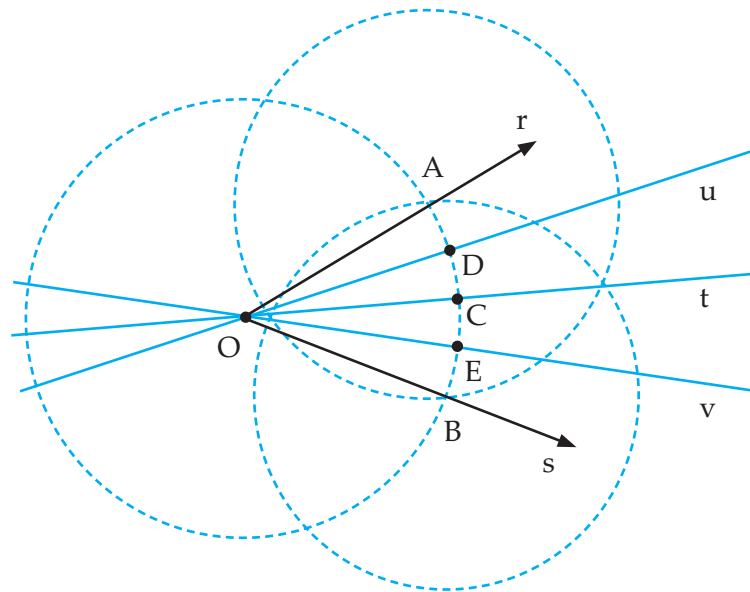
Resposta. A bissetriz do ângulo dado é \overline{IJ} .

Situação-problema 4. Dividir um ângulo qualquer em um número de partes iguais que sejam potências de 2 (2,4,8, etc.).

Vamos considerar que o ângulo dado será dividido em 4 partes iguais. Consideremos um ponto A na semi-reta r e traçamos uma circunferência de centro O e raio \overline{AO} , onde obtemos o ponto B na semi-reta s e traçamos a bissetriz t do ângulo $A\hat{O}B$.



Da mesma forma obtemos as bissetrizes u e v , dos ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$, respectivamente, como podemos observar na próxima figura.



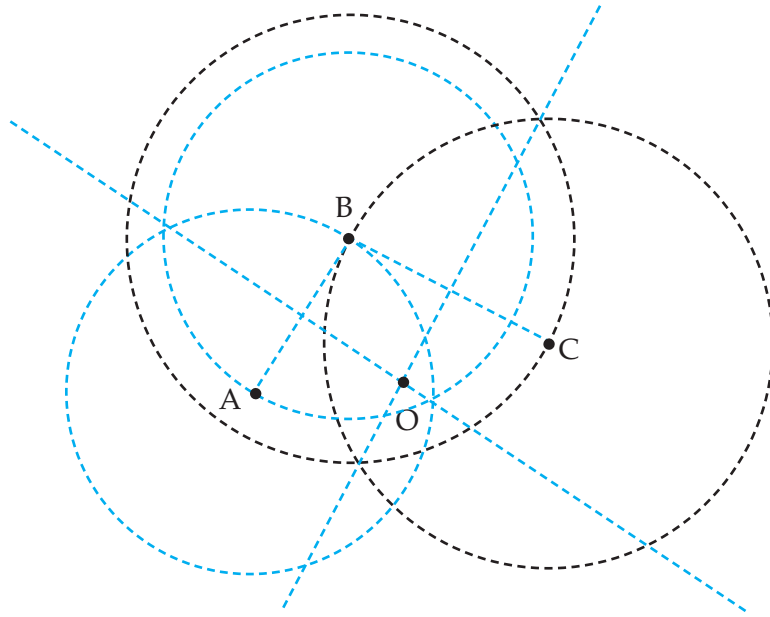
Resposta. Portanto, o ângulo $A\hat{O}B$ ficou dividido em 4 partes iguais. São elas: $A\hat{O}D$, $D\hat{O}C$, $C\hat{O}E$ e $E\hat{O}B$.



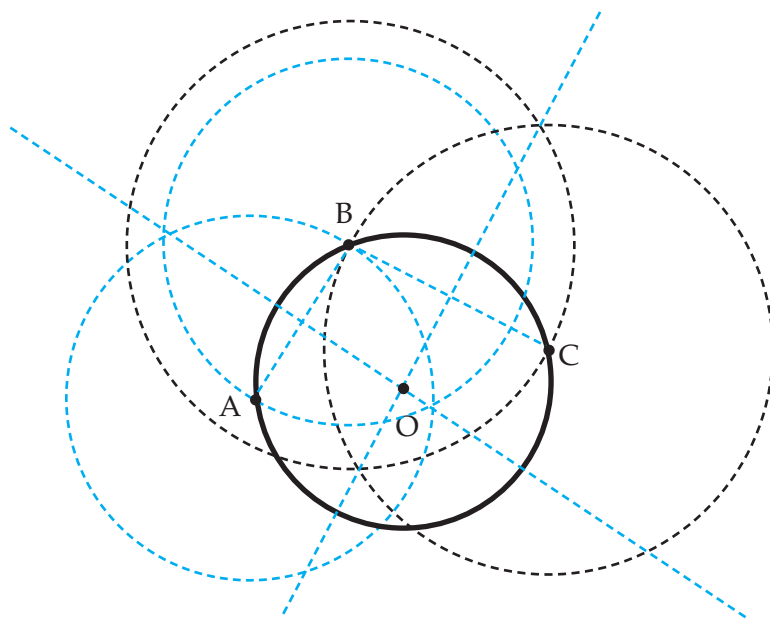
Tarefa: Faça a mesma atividade anterior, mas agora divida o ângulo dado em 8 partes iguais. Poste sua contribuição no Material do Aluno ou a envie através do seu Pólo para o tutor responsável.

Situação-problema 5. Por três pontos dados, não colineares, passar uma circunferência.

Consideremos os três pontos dados A , B e C , como representados na figura acima. Traçamos os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} e suas mediatrizes r e s , respectivamente. As mediatrizes r e s encontram-se no ponto O . Como este ponto eqüidista de A , B e C , ele é o centro da circunferência procurada.



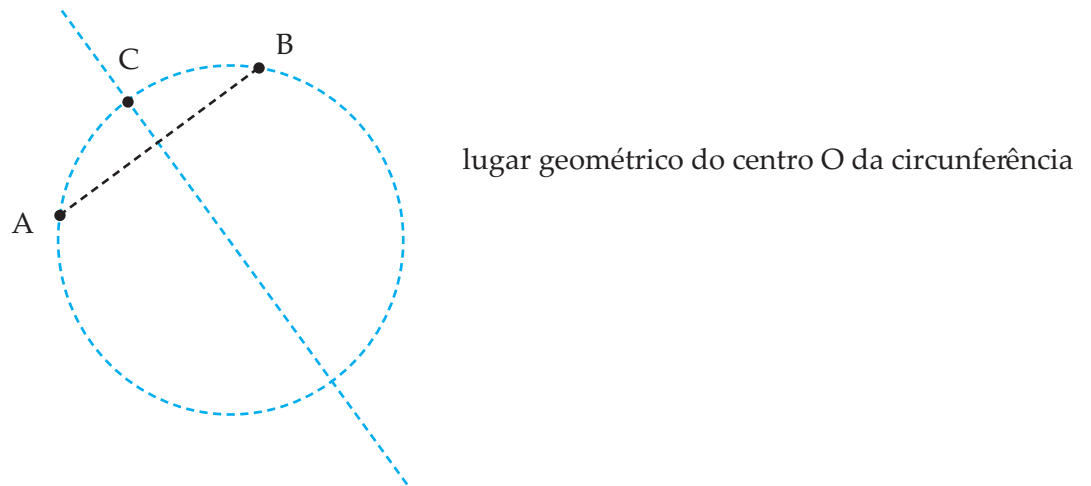
Para finalizar traçamos a circunferência de centro O , passando pelos pontos A , B e C , como podemos observar na figura seguinte.



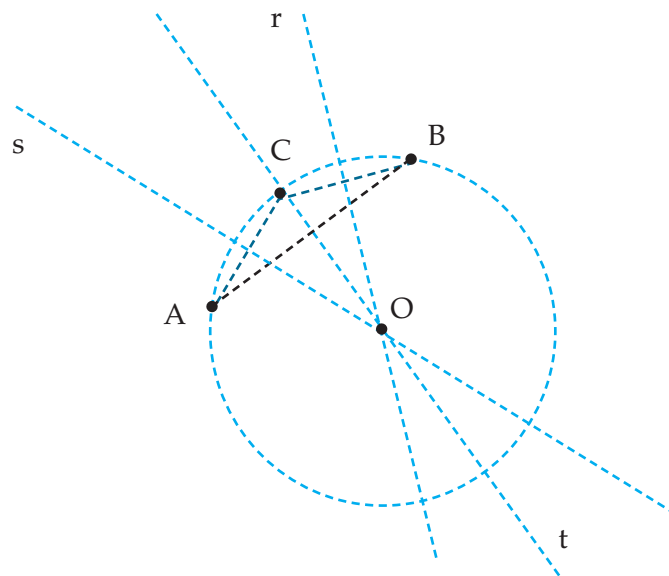
Resposta. Circunferência ABC .

Situação-problema 6. Achar o diâmetro de uma circunferência de centro desconhecido.

Consideremos a circunferência dada e tomemos dois pontos distintos A e B desta circunferência. Tracemos o segmento \overline{AB} e tomemos a sua mediatriz r . Essa mediatriz é o lugar geométrico do centro da circunferência e ela a corta em dois pontos, um deles. Chamemos de C .



Recaímos na situação-problema 5, e como solução temos o segmento \overline{CO} , diâmetro da circunferência.



Resposta. Segmento \overline{CO} , diâmetro da circunferência.



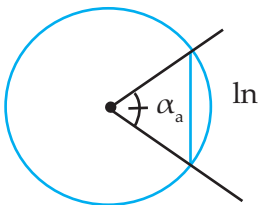
APLICAÇÃO. Recuperar o raio de um arco de centro inacessível. Poste sua contribuição no MATERIAL DO ALUNO ou a envie através do seu Pólo para o tutor responsável.

Divisão da circunferência em arcos iguais e formação de polígonos regulares

Precisamos de algumas definições iniciais.

Polígono regular é aquele que possui todos os lados e todos os ângulos (internos), respectivamente, congruentes entre si.

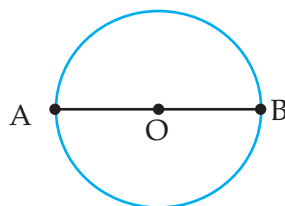
Polígono regular inscrito é o polígono que tem todos os vértices sobre uma circunferência. No caso, a circunferência é circunscrita ao polígono.



Consideremos um polígono regular inscrito numa circunferência e designando o seu lado por ln (onde n é o número de lados) e por α_a o **ângulo central** cuja corda é ln , temos $\alpha_a = 360^\circ/n$.

Situação-problema 1. Dada uma circunferência dividi-la em 2 partes iguais (semicircunferências).

Consideremos a circunferência dada, com centro O , e tomemos um ponto A qualquer desta circunferência. Tracemos a reta \overline{AC} . Esta reta corta a circunferência no ponto B . Assim, o segmento \overline{AB} divide a circunferência dada em duas partes iguais.

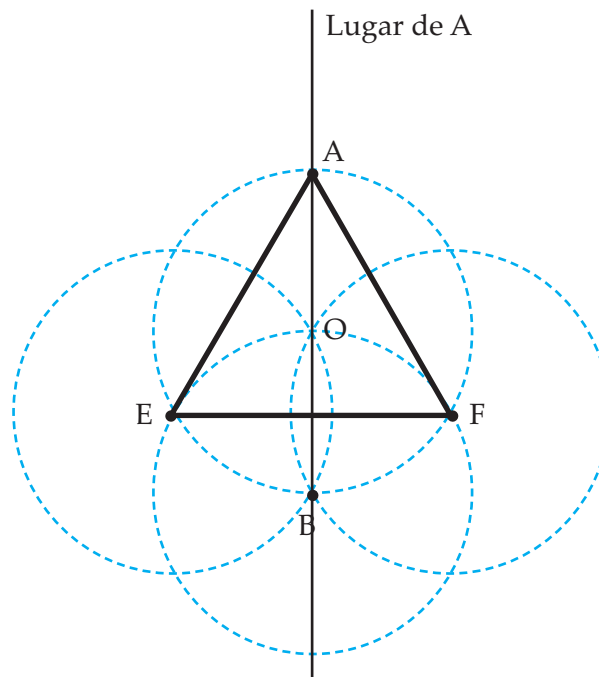


Resposta. Semi-circunferências \overline{AB} e \overline{BA} .

Situação-problema 2. Dada uma circunferência dividi-la em 3, 6, 12, ... partes iguais e inscrever o polígono regular correspondente.

- Vamos dividi-la inicialmente em 3 partes iguais.

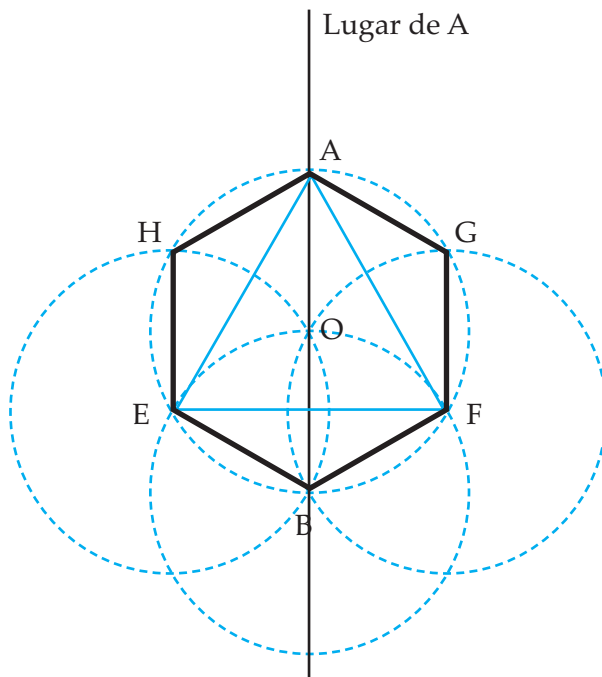
Consideremos a circunferência dada, de centro O , e tomemos um ponto A qualquer desta circunferência. Tracemos o arco \widehat{EOF} , onde \overline{EF} será o lado do triângulo equilátero inscrito. Vamos buscar o lugar geométrico do ponto A . Centramos o compasso no ponto E e raio \overline{EO} , traçamos a circunferência de centro E . da mesma maneira construímos a circunferência \overline{FO} de centro em F . No ponto de interseção destas duas circunferências teremos o lugar do ponto A . Traçando a reta \overline{OB} , obtemos o ponto A no cruzamento desta reta com a circunferência dada e como queremos também o polígono inscrito de 3 lados nessa circunferência, unimos os segmentos \overline{EA} e \overline{AF} , obtendo assim o triângulo equilátero AEF e os arcos \widehat{EA} , \widehat{AF} e \widehat{FE} dividem a circunferência em 3 partes iguais.



Resposta. Arcos \widehat{AE} , \widehat{EF} e \widehat{FA} e polígono AEF .

- Vamos dividi-la em 6 partes iguais.

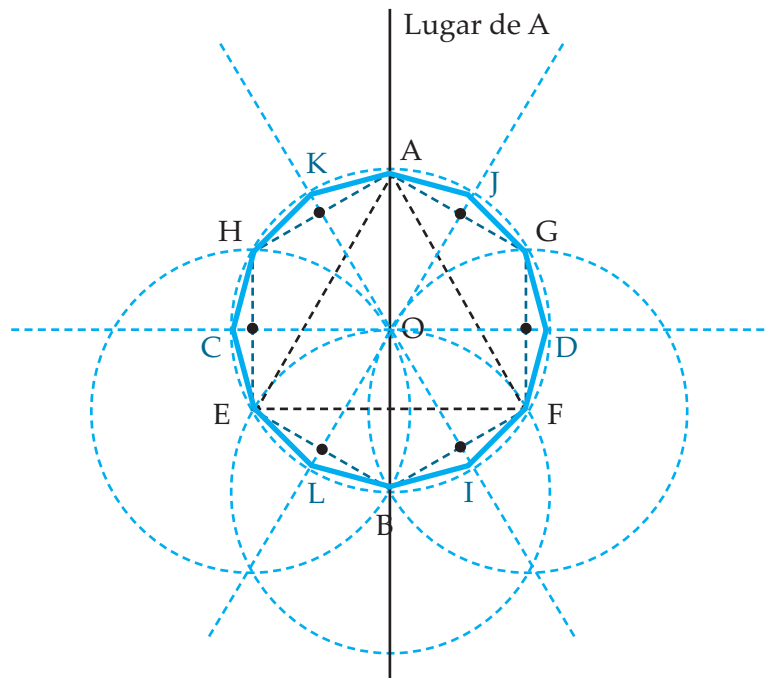
Consideremos a circunferência dada e tracemos os passos para a divisão em 3 partes iguais. Dando continuidade, traçamos os segmentos \overline{BE} , \overline{BF} , \overline{EH} , \overline{HA} , \overline{AG} e \overline{GF} e assim teremos a circunferência dividida em 6 partes (arcos) iguais e como polígono temos o hexágono regular (em verde) inscrito na circunferência.



Resposta. Arcos \widehat{AH} , \widehat{HE} , \widehat{EB} , \widehat{BF} , \widehat{FG} e \widehat{GA} polígono AHEBFGA.

- Vamos dividi-la em 12 partes iguais.

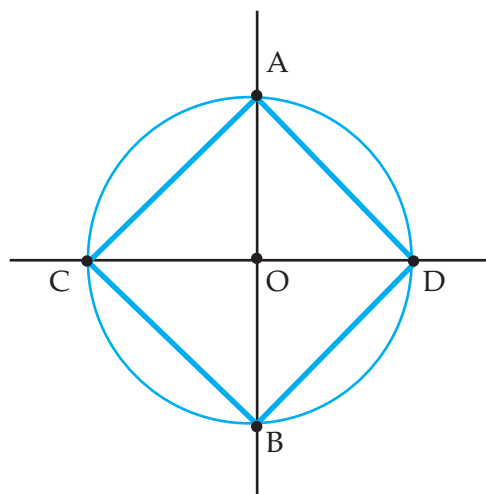
Partindo da resolução anterior, traçamos a mediatriz de cada corda, obtendo os novos pontos C, D, L, I, J e K. Temos então a circunferência dividida em 12 partes (arcos) iguais e com o polígono inscrito na circunferência o dodecágono regular (em azul).



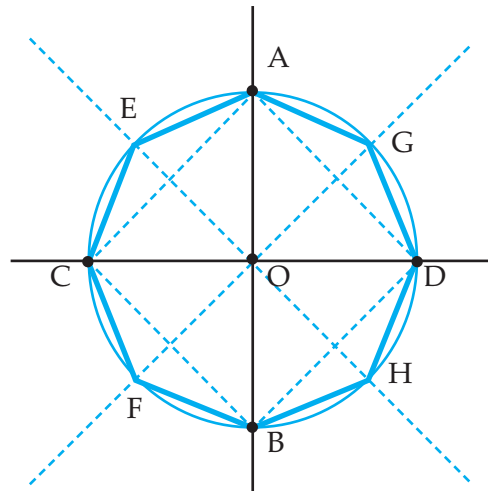
Resposta. Arcos $\widehat{AK}, \widehat{KH}, \widehat{HC}, \widehat{CE}, \widehat{EL}, \widehat{LB}, \widehat{BI}, \widehat{IF}, \widehat{FD}, \widehat{DG}, \widehat{GJ}, \widehat{JA}$ e o polígono AKHCELBIFDGJA.

Situação-problema 3. Dada uma circunferência, dividi-la em 4, 8, 16, ... partes iguais e inscrever o polígono regular correspondente.

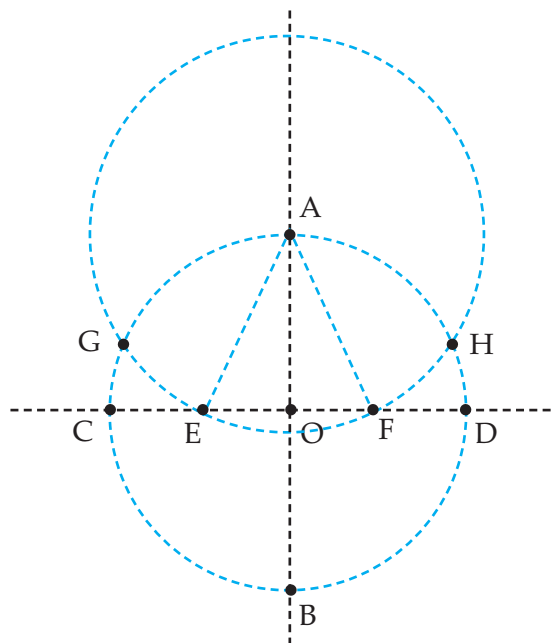
Discuta como podemos obter o resultado apresentado na figura, no caso o quadrado como polígono inscrito na circunferência.



Discuta como estender a idéia para outros números de lados que sejam potências de 2

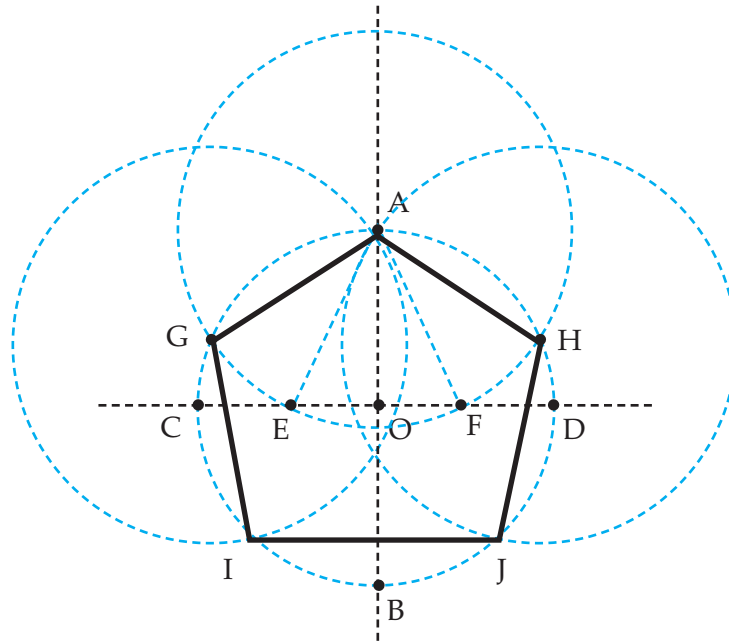


Situação-problema 4. Dada uma circunferência dividi-la em 5, 10, ... partes iguais e inscrever o polígono regular correspondente. Dada uma circunferência de centro O , vamos dividi-la inicialmente em 5 partes iguais. Para isso, traçamos dois diâmetros perpendiculares \overline{AB} e \overline{CD} , como feito nos exercícios anteriores. Traçamos o ponto médio dos segmentos \overline{CO} e \overline{DO} , obtendo os pontos E e F , respectivamente, sobre o segmento \overline{CD} . Com centro em A e raio \overline{AE} , traçamos a circunferência que corta a circunferência dada em dois pontos G e H , como podemos observar na figura a seguir.



GA ou AH é a corda correspondente à quinta parte da circunferência ou o lado do pentágono regular inscrito. Para terminarmos de desenhar o polígono de 5 lados, devemos traçar a circunferência

de centro em G e raio \overline{GA} , obtendo o ponto I e do mesmo modo, construímos uma circunferência de centro em H e raio \overline{AH} , obtendo o ponto J.



Resposta. Arcos \widehat{AG} , \widehat{GI} , \widehat{IJ} , \widehat{JH} , \widehat{HA} e polígono AGIJH.

- Vamos dividi-la em 10 partes iguais.

O icosagono regular inscrito ou polígono regular de 10 lados é obtido tomando-se como lado do decágono regular a distância \overline{OF} . Verifique a validade desta afirmação e procure justificar porque \overline{OF} é o lado do decágono regular inscrito na circunferência.



Situação-problema 5. Dada uma circunferência dividi-la em 7 e 14 partes iguais e inscrever o polígono regular correspondente (heptágono regular, tetradecágono, respectivamente).

Situação-problema 6. Dada uma circunferência qualquer divida-la em 9 partes iguais e inscrever o polígono regular correspondente (eneágono regular).

Situação-problema 7. Dada uma circunferência dividi-la em 11 partes iguais e inscrever o polígono regular correspondente (tridecágono regular).



Estas atividades podem ser resolvidas em grupos (no máximo 5 alunos) e postem sua contribuição no MATERIAL DO ALUNO ou a envie através do seu Pólo para o tutor responsável.

Será que vocês já conseguem discutir a divisão da circunferência em um número qualquer de partes iguais (Método Geral de Rinaldini)? Pesquisem sobre esta tarefa nos livros didáticos ou na Internet e a discuta com os colegas.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DE POLÍGONOS

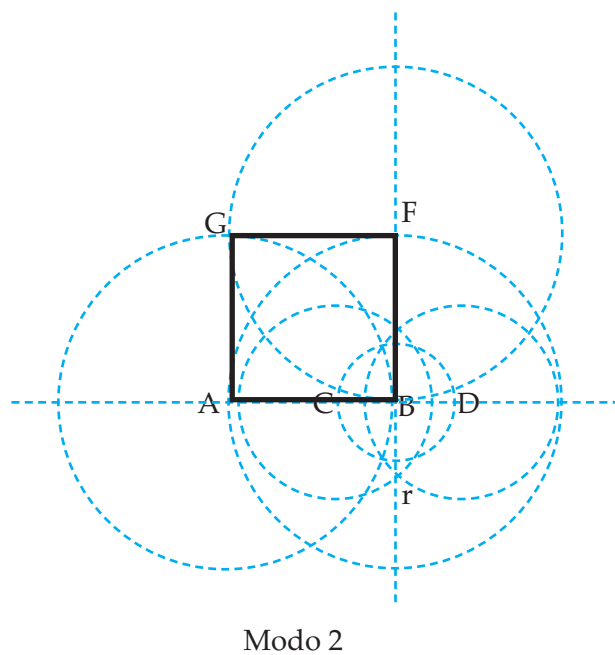
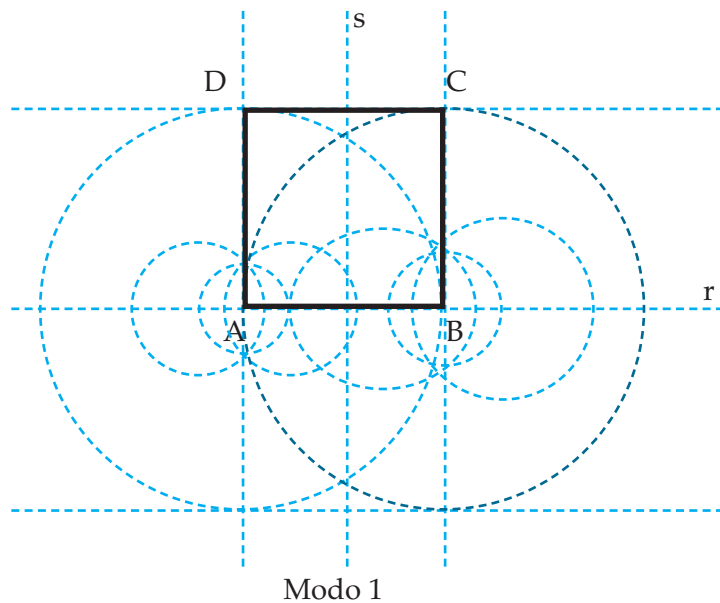
Na disciplina Instrumentação para a Pesquisa e Prática de Ensino de Matemática I, vocês estudaram os polígonos e conceitos importantes da geometria. Para a construção de polígonos utilizando os materiais básicos de desenho, é necessária a revisão dos conceitos estudados e as definições da disciplina mencionada, que são fundamentais para o êxito na resolução das situações-problema propostas e para suas justificativas.

Construção de quadrados

Situação-problema 1. Construir um quadrado, com régua e compasso.

Escreva os passos do **Modo 1**.

Modo 2. Traçamos a reta suporte do segmento \overline{AB} . Com centro em A e raio \overline{AB} , traçamos uma circunferência, que é o lugar geométrico do vértice G. Analogamente, traçamos a circunferência com centro em B e raio \overline{AB} , e determinamos o lugar geométrico do vértice F. Pelo ponto B traçamos uma perpendicular a \overline{AB} , esta reta também o lugar geométrico do vértice F, pois os lados adjacentes do quadrado formam um ângulo reto. Na intersecção destes dois lugares geométricos, obtemos o ponto F. Com centro em F e abertura igual ao comprimento de \overline{AB} , obtemos o segundo lugar geométrico do ponto G. Assim, na intersecção dos lugares geométricos de G, obtemos este vértice. Ligando todos os pontos construídos, obtemos o quadrado ABFG.



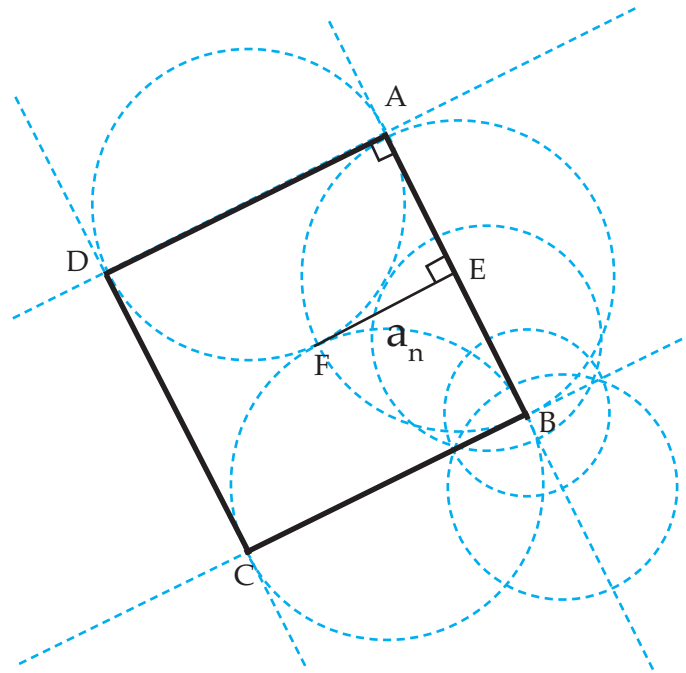
Resposta. Quadrado ABCD.

Situação-problema 2. Construir um quadrado, com régua e compasso, conhecendo-se o apótema.

Apótema de um polígono regular é designação dada à linha que, partindo do centro geométrico da figura é perpendicular a um de seus lados.

Traçamos a reta \overline{AB} perpendicular ao apótema \overline{EF} dado, passando pelo ponto E. Esta reta é o lugar geométrico de um dos lados do

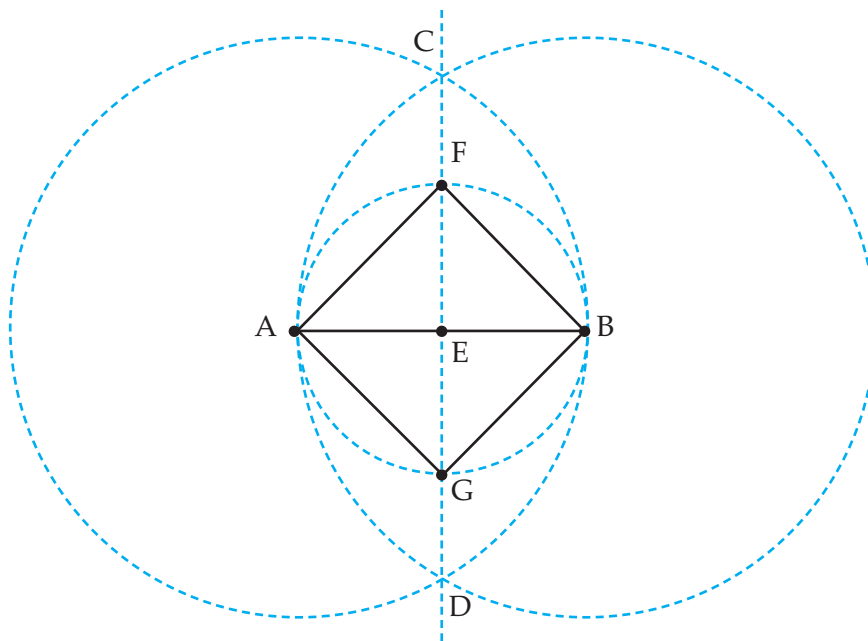
quadrado. Como a apótema do quadrado tem comprimento igual à metade do comprimento de seus lados, traçamos a circunferência com centro em E e raio \overline{EF} , obtendo os pontos A e B na interseção desta circunferência com a reta \overline{AB} . O comprimento \overline{AB} de corresponde à medida do lado do quadrado. Agora, aplicamos o procedimento da situação problema anterior e chegamos ao quadrado ABCD.



Resposta. Quadrado ABCD.

Situação-problema 3. Construir um quadrado, com régua e compasso, conhecendo-se uma de suas diagonais.

Dado o segmento \overline{AB} , correspondente a uma das diagonais do quadrado que se deseja construir. Como as diagonais de um quadrado são perpendiculares e interceptam-se no centro geométrico, construímos o lugar geométrico da segunda diagonal que é a mediatriz do segmento \overline{AB} . O ponto médio de \overline{AB} é o ponto E (que é o centro geométrico do quadrado resposta). Com centro em E e abertura igual a \overline{AE} , traçamos uma circunferência que intercepta a mediatriz construída nos pontos F e G, que são os dois outros vértices do quadrado. Assim obtemos o quadrado AGBF.



Resposta. Quadrado AGBF.

Situação-problema 4. Construir um quadrado, com régua e compasso, conhecendo-se a mediana.

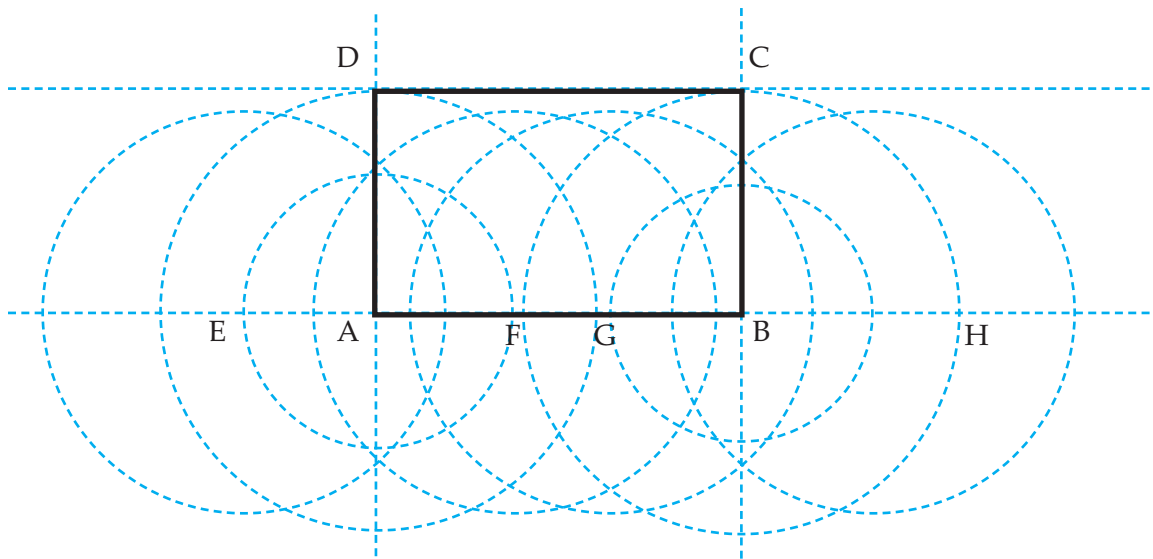
Situação-problema 5. Construir um quadrado, com régua e compasso, tomando-se BA um de seus lados e BA inclinado em relação à borda do papel.

Resolva os exercícios 4 e 5 e dê suas justificativas.

Construção de retângulos

Situação-problema 1. Construir um retângulo, com régua e compasso, dados os comprimentos de dois de seus lados.

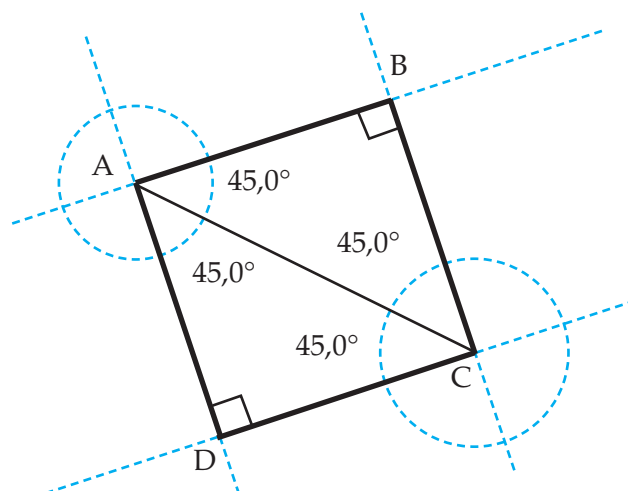
Consideremos o segmento \overline{AB} um dos lados do retângulo a ser construído, e a circunferência com centro em A e raio qualquer. Construímos uma perpendicular a \overline{AB} , passando por A e outra passando por B . Estas duas perpendiculares são os lugares geométricos dos outros dois vértices do retângulo. Com abertura igual à medida do segundo lado, centramos o compasso em A e marcamos o vértice D e com centro em B e mesma abertura, marcamos o vértice C . Finalizamos traçando o retângulo $ABCD$.



Resposta. Retângulo ABCD.

Situação-problema 2. Construir um retângulo, com régua e compasso, conhecendo-se sua diagonal.

Seja \overline{AC} a diagonal dada. Sabemos que a diagonal do retângulo divide cada um dos ângulos em dois ângulos de medida 45° . Basta, então, construir dois ângulos adjacentes, medindo 45° cada um com \overline{AC} como lado comum e com vértice A. Ao traçar os lados dos ângulos construídos, obtemos os lugares geométricos de outros dois vértices do retângulo. Por C, traçamos perpendiculares aos lados construídos dos ângulos e, assim, obtemos os vértices B e D. Finalizamos traçando o retângulo ABCD.



Resposta. Retângulo ABCD.

Situação-problema 3. Construir um retângulo, com régua e compasso, conhecendo-se sua diagonal e o lado maior.

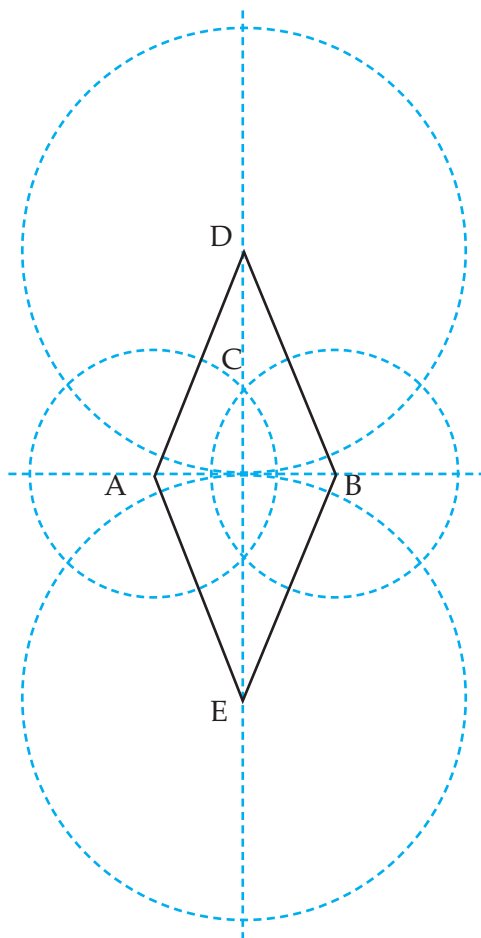
Situação-problema 4. Construir um retângulo, com régua e compasso, conhecendo-se as duas medianas.

Resolva os exercícios 3 e 4 e dê suas justificativas.

Construção de losangos

Situação-problema 1. Construir um losango qualquer com régua e compasso.

Discuta os passos para a construção do losango e dê suas justificativas. Construa outros tipos de losango? Justifique sua construção.



Resposta. Losango AEBD.

Situação-problema 2. Construir um losango, com régua e compasso, sabendo-se que a diagonal maior mede 5cm e a diagonal menor mede 4cm.

Situação-problema 3. Construir um losango, com régua e compasso, sabendo-se a medida do lado e um ângulo agudo.

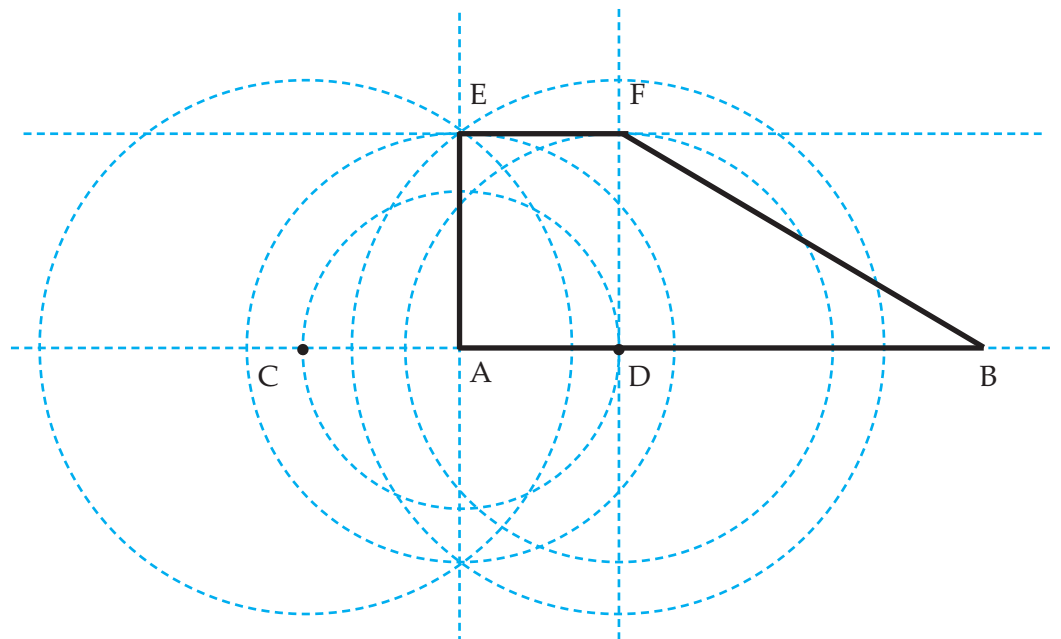
Situação-problema 4. Construir um losango, com régua e compasso, conhecendo-se a linha mediana e o ângulo formado por elas (64°).

Resolva os exercícios 1, 2, 3 e 4 e dê suas justificativas.

Construção de trapézios

Situação-problema 1. Construir um trapézio retângulo, com régua e compasso, conhecendo as medidas dos seus lados paralelos.

Seja o segmento \overline{AB} correspondente ao lado maior do trapézio. Traçamos uma perpendicular a \overline{AB} , passando por A e a circunferência com centro em A e raio qualquer obtendo os pontos C e D (interseção desta circunferência com a reta que passa por) Construimos também duas circunferências de mesmo raio, uma passando pelo ponto C e outra pelo ponto D, Obtendo a reta \overline{EA} e marcamos o ponto E. Da mesma maneira como a última construção, construímos a reta perpendicular a \overline{FD} e marcamos o ponto F. Este ponto é obtido construindo a reta \overline{EF} paralela a reta que passa por \overline{AB} . Finalizamos traçando os segmentos \overline{AE} , \overline{EF} e \overline{FB} , obtendo o trapézio retângulo ABFE.



Resposta. Trapézio ABFE.

Situação-problema 2. Construir um trapézio isóscele.

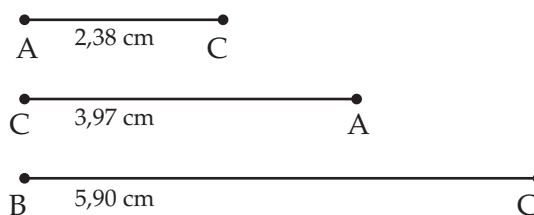
Situação-problema 3. Construir um trapézio escaleno, e lado maior medindo 6cm.

Situação-problema 4. Construir um trapézio, em que a diagonal maior mede 5cm.

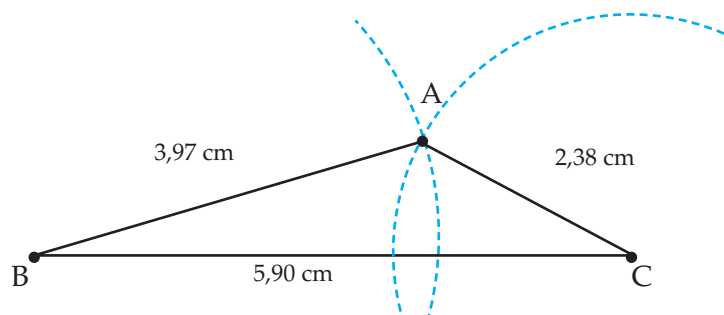
Resolva os exercícios 2, 3 e 4 e dê suas justificativas.

Construção de triângulos

Situação-problema 1. Dados três lados construir um triângulo.



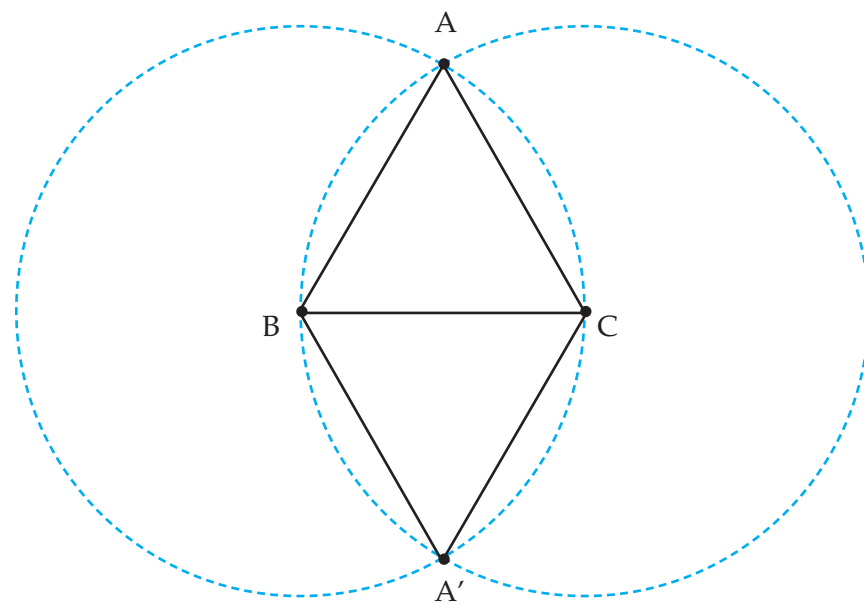
Traçamos o segmento $\overline{BC} = 5,90\text{cm}$. Com centro em B e medida igual ao comprimento do segmento \overline{BA} , construímos o arco correspondente ao lugar geométrico do vértice A. Com centro em C e abertura igual à medida do segmento \overline{AC} , construímos o arco que corresponde a um segundo lugar geométrico do vértice A. A intersecção destes dois pontos corresponde ao vértice A. Traçando os lados, obtemos o triângulo ABC.



Resposta. Triângulo ABC.

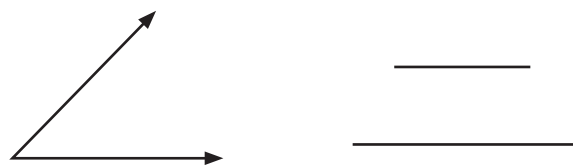
Situação-problema 2. Construir um triângulo eqüilátero conhecendo-se o lado.

Traçamos o segmento \overline{BC} , com medida igual ao lado do triângulo desejado. Com centro em B e raio \overline{BC} , construímos a circunferência que é o lugar geométrico do vértice A. Analogamente, centrado o compasso em C e raio \overline{BC} , construímos uma segunda circunferência, também lugar geométrico do vértice A do triângulo. No ponto de encontro da primeira circunferência com a segunda marcamos o ponto A, vértice do triângulo eqüilátero. Traçamos os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} , obtemos assim o triângulo eqüilátero ABC.



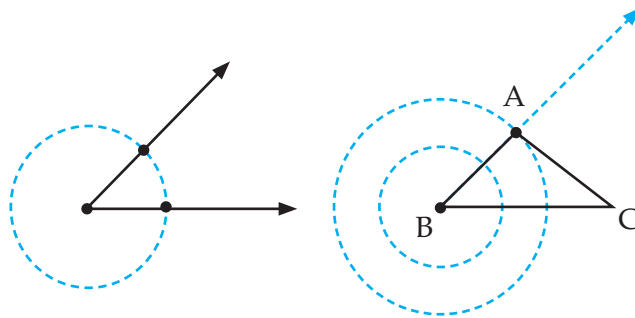
Resposta. Triângulos ABC e A'BC.

Situação-problema 3. Construir um triângulo conhecendo-se dois lados do triângulo e o ângulo formado entre eles.



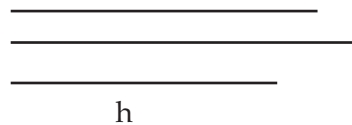
Traçamos o segmento \overline{BC} (maior segmento dado). Copiamos o ângulo de forma que B seja o vértice do ângulo e o segmento \overline{BC} esteja em um de seus lados. Temos, então, o lugar geométrico do vértice A. Com centro do compasso em B e abertura com medida igual à do menor segmento dado, marcamos, sobre o segundo lado do ângulo,

o vértice A. Ligando os pontos A e C, obtemos o triângulo pedido ABC.

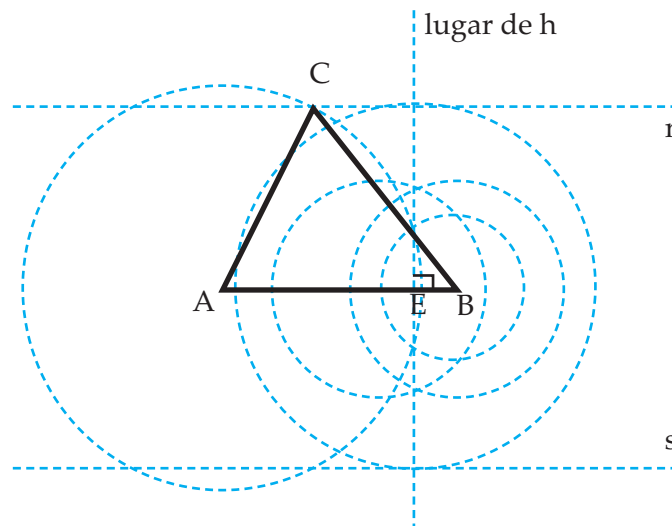


Resposta. Triângulo ABC.

Situação-problema 4. Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e a altura relativa ao maior lado.

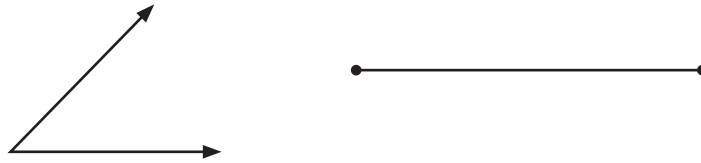


Traçamos o segmento \overline{AB} (maior segmento dado). Com centro em A e abertura igual à medida do segundo segmento, traçamos uma circunferência, que é o lugar geométrico do vértice C. Traçamos uma perpendicular a \overline{AB} passando por algum ponto de \overline{AB} (no caso o ponto E). Com centro em E e abertura do compasso com medida igual à medida da altura, marcamos dois pontos sobre a perpendicular. Por estes dois pontos, construímos as retas r e s paralelas a \overline{AB} . A intersecção da reta r com a circunferência do lugar geométrico do vértice C corresponde ao vértice C procurado. Traçamos os segmentos \overline{AC} e \overline{CB} , obtemos assim o triângulo pedido ABC.

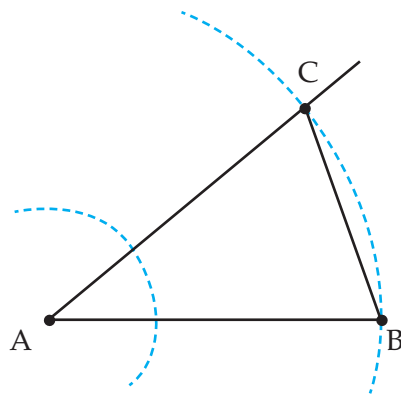


Resposta. Triângulo ABC.

Situação-problema 5. Construir um triângulo isósceles conhecendo-se os lados iguais e o ângulo formado por eles.



Discuta os passos realizados na construção desse triângulo isósceles.



Resposta. Triângulo ABC.

Situação-problema 6. Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a medida da altura e da sua base.

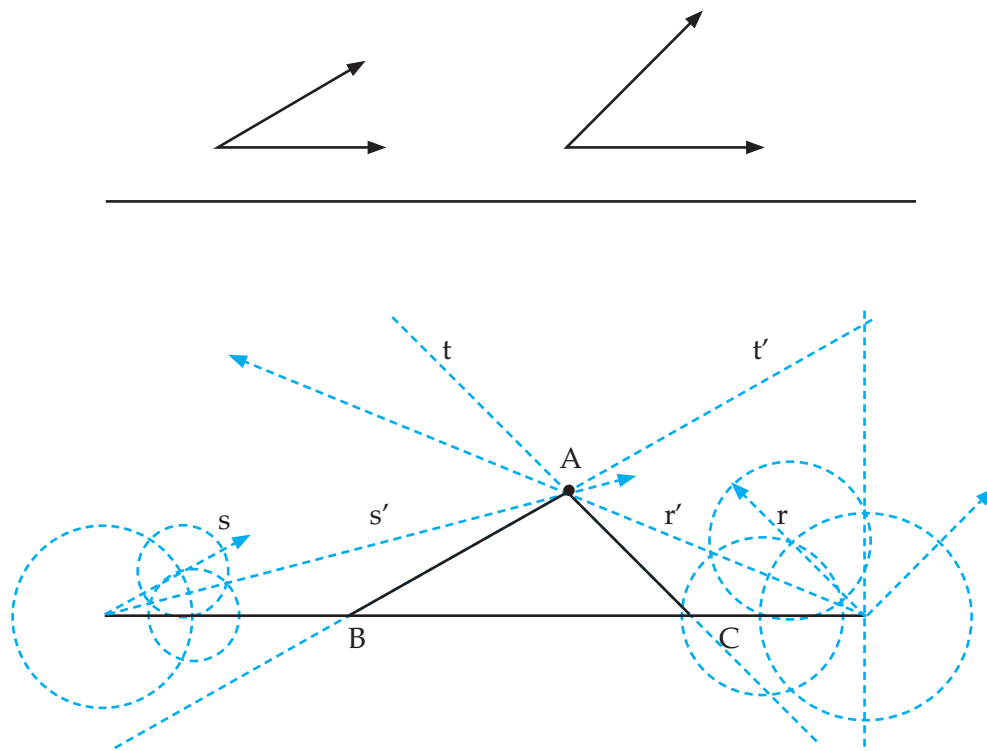
Situação-problema 7. Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a base e um dos lados iguais.

Situação-problema 8. Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a sua hipotenusa.

Situação-problema 9. Construir um triângulo retângulo conhecendo-se os dois catetos.

Situação-problema 10. Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a sua hipotenusa e um ângulo agudo.

Situação-problema 11. Construir um triângulo conhecendo-se o seu perímetro e dois ângulos.



Deixaremos como exercícios as situações-problema 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11.

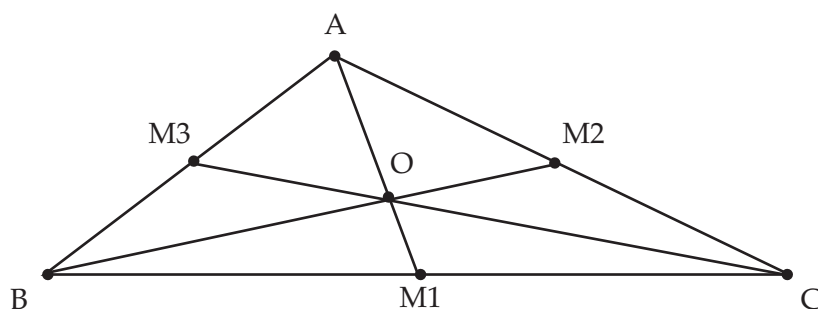
Capítulo XII

CONSTRUÇÃO DE BARICENTRO, INCENTRO, CIRCUNCENTRO, ORTOCENTRO DE UM TRIÂNGULO

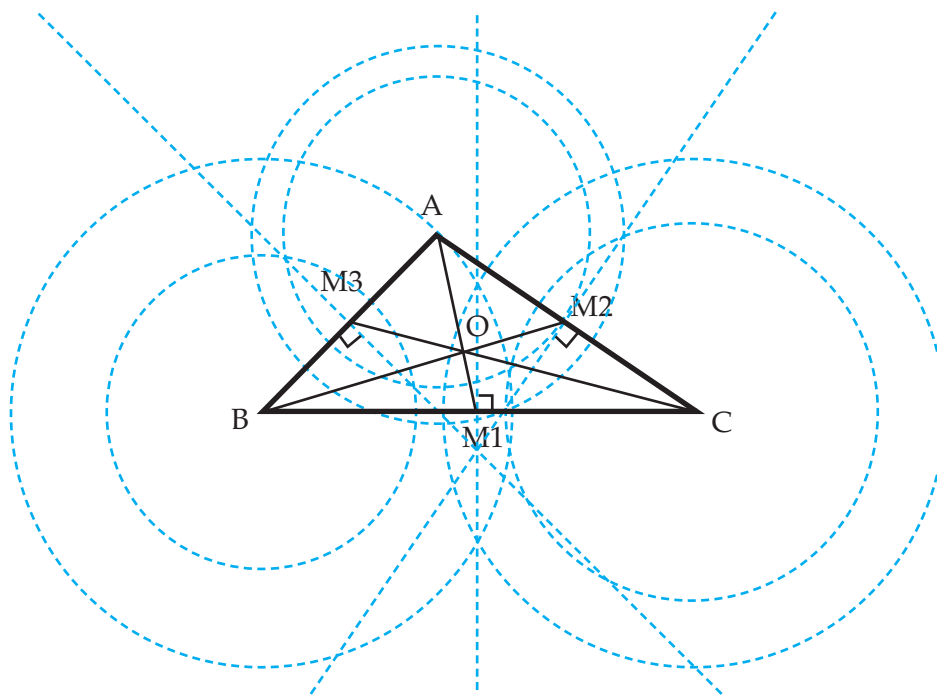
Situação-problema 12. Construir as mediatrizes do triângulo ABC dado e denotar o seu baricentro.

As medianas cruzam-se em um ponto chamado **baricentro**.

Mediana é o segmento ligando um vértice ao ponto médio do lado oposto.



Construímos os pontos médios dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} . Para isto, basta traçar as mediatrizes de cada um dos lados e marcar os pontos de intersecção de cada mediatriz com o segmento – isto é o ponto médio. Para cada ponto médio traçar o segmento que o une ao vértice oposto a ele. A intersecção destes segmentos é o baricentro do triângulo dado.

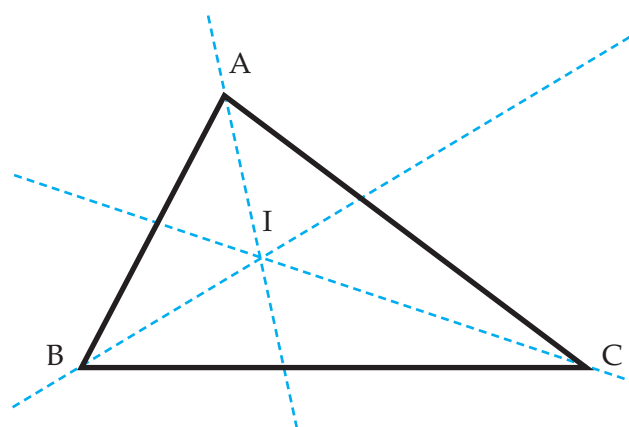


Resposta. $\overline{AM1}$, $\overline{BM2}$ e $\overline{CM3}$ mediatrizes dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} respectivamente.

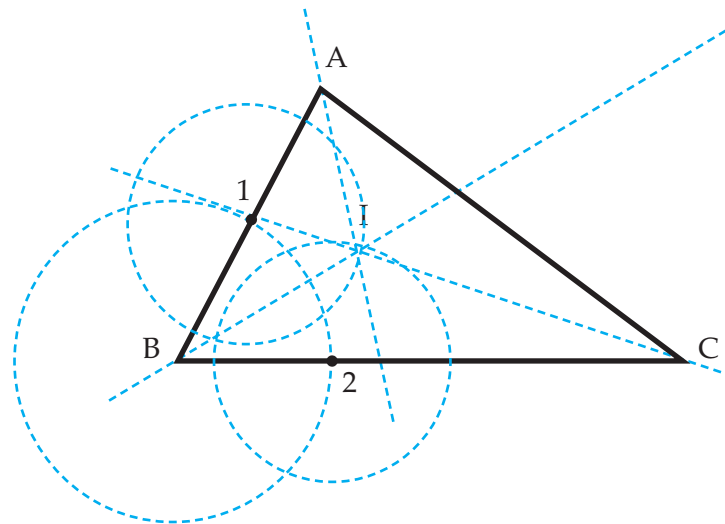
Situação-problema 13. Construir as bissetrizes do triângulo ABC dado e denotar o seu incentro.

As bissetrizes cruzam-se em um ponto chamado **incentro**.

A **bissetriz de um ângulo** o divide em duas partes congruentes.



Construímos as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}BC$, $\hat{B}CA$ e $\hat{C}AB$. A intersecção das bissetrizes nos dá o incentro do triângulo.



Resposta. Ponto I encontro das três bissetrizes do triângulo ABC dado.

Situação-problema 14. Encontrar o circuncentro do triângulo ABC dado.

As **mediatrizes** são as retas que passam pelos pontos médio dos lados de um triângulo ABC dado.

O encontro das mediatrizes de um triângulo definem um ponto chamado **circuncentro**.

Situação-problema 15. Construir o ortocentro do triângulo ABC dado.

As três alturas de um triângulo ABC encontram-se num ponto chamado de **ortocentro**.

A **altura** é a segmento perpendicular que parte de um dos vértices do triângulo ABC à reta suporte do lado oposto.

Deixaremos as situações-problema 14 e 15 como exercícios. Em ambos os casos, o ponto procurado pode se situar no interior do triângulo ABC ou no exterior dele. Faça a construção para os dois casos.

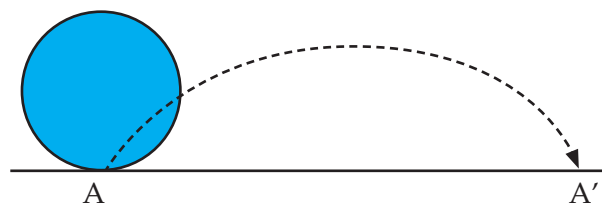
PROCESSOS APROXIMADOS

Um processo é chamado **aproximado** quando existe nele um erro teórico. Um determinado processo é considerado **conveniente** quando o erro teórico é tão pequeno que pode ser considerado desprezível.

Retificação da circunferência

Retificar uma circunferência nada mais é do que fazer com que toda a sua linha, que é curva, torne-se reta. Este problema gráfico, a retificação da circunferência, tem solução aproximada e trata-se de obter um segmento $\overline{AA'}$ de comprimento igual ao da circunferência dada

Vamos tentar exemplificar esta idéia. Temos um círculo que será rolado sobre um plano reto, conforme podemos observar na seguinte figura.



Pergunta-se: O tamanho da linha da circunferência, é igual ao tamanho da linha reta?

Sim. E este processo se chama retificação da circunferência.

Lembremos que o **comprimento C de uma circunferência** de raio r é dado por: $C = 2 \pi r$ ou $C = d \pi$, onde d é o diâmetro desta circunferência e $d = 2r$.

Exemplo. Calcular o comprimento de uma circunferência cujo raio tem 22mm.

$$C = 2 \pi r$$

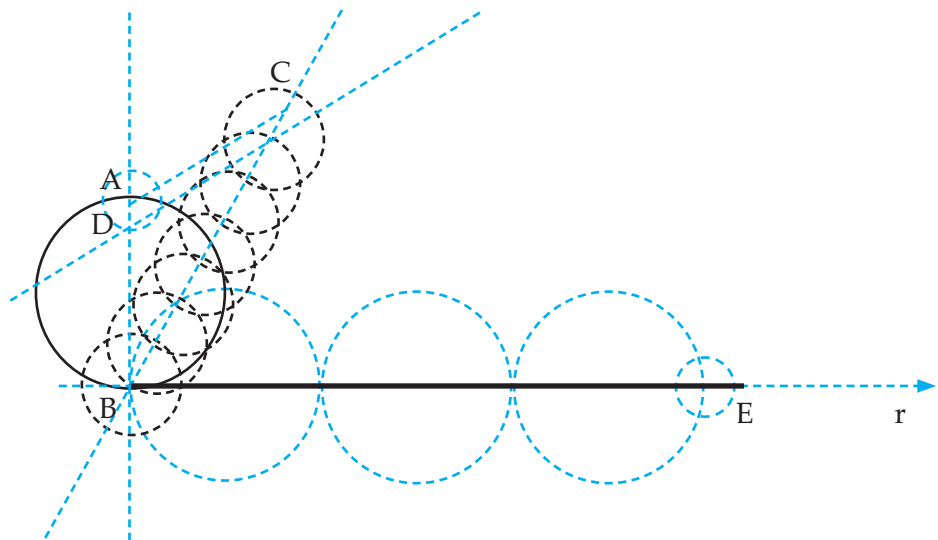
$$C = 2 \pi 22 = 44 \pi, \text{ mas } \pi \sim 3,14$$

$$C \sim 44 \cdot 3,14 \sim 138,16 \text{ mm.}$$

Processo de arquimedes

Toma-se 3 vezes o diâmetro (d) da circunferência mais $1/7$ do diâmetro, isto é, $7/7+7/7+7/7+1/7=22/7=3,1428\dots$

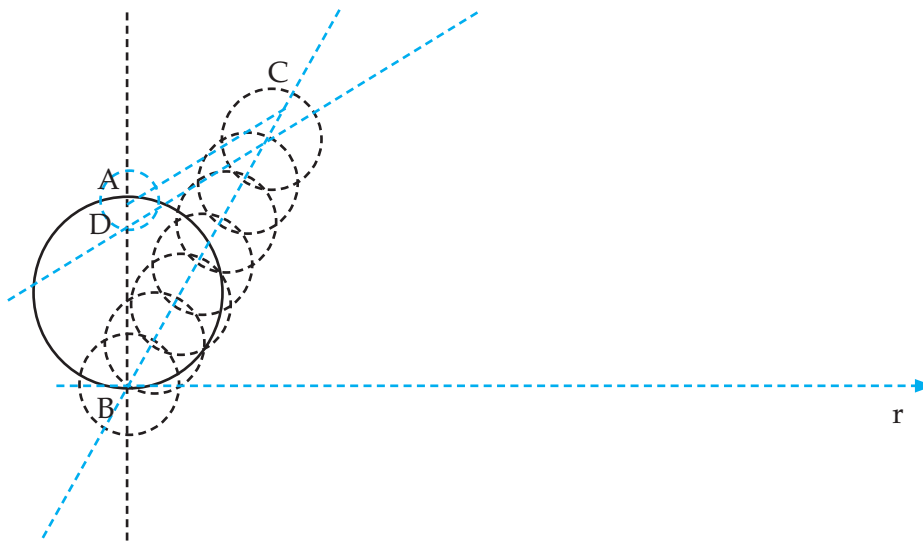
Este número (3,1428...) é um valor aproximado para π . Portanto, conhecendo-se o diâmetro, pode-se facilmente determinar o comprimento da circunferência, que é aproximadamente, o triplo e mais um sétimo do diâmetro, o que nos permite obter um segmento de reta cujo comprimento seja igual ao comprimento da circunferência dada.



Para conhecer o grande geômetra: Arquimedes de Siracusa leia: História da Matemática, de Carl B. Boyer, Editora Edgard Blükler.

Situação-problema 1. Dada uma circunferência vamos retificá-la pelo processo de Arquimedes.

Consideremos a circunferência dada e seu diâmetro \overline{AB} . Como queremos retificar a circunferência dada pelo processo de Arquimedes, precisamos de 3 vezes a medida do diâmetro mais $1/7$ deste. Para encontrarmos $1/7$ do diâmetro, basta fazermos como na situação-problema 11, isto é, dividir o diâmetro em sete partes iguais e tomar uma delas. Não vamos repetir o processo, mas ele pode ser observado na figura abaixo, e a medida de $1/7$ do diâmetro da circunferência dada esta representada no segmento \overline{AD} .



Sobre a reta suporte r , traçamos agora 3 vezes a medida do diâmetro da circunferência dada e acrescentamos mais a medida do segmento \overline{AD} , obtendo, desta forma, o segmento \overline{BE} , que é a resposta pedida.

Como a construção é aproximada, podemos calcular o erro teórico e cometido na retificação da circunferência dada.

$$\begin{aligned}\overline{BE}_{\text{teórico}} &= 2 \pi r = \pi d \approx 3,1416 d \\ \overline{BE}_{\text{obtido}} &= 3 d + 1/7 d = 22/7 d \approx 3,1429 d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e_t &= \overline{BE}_{\text{teórico}} - \overline{BE}_{\text{obtido}} \\ e_t &\approx -0,0013 d \text{ (O menos neste resultado significa erro por excesso).}\end{aligned}$$

Situação-problema 2. Dada uma circunferência de raio $r = 25$ mm, pede-se:

a) Retifique essa circunferência pelo método de Arquimedes.

b) Calcule o comprimento da circunferência pela fórmula $C = 2 \pi r$ e compare com o resultado gráfico para verificar a precisão de seu traçado.

Deixado como exercício.

Observação. Existem outros processos com erro teórico menor do que o de Arquimedes, mas estes têm um número maior de operações gráficas e isso resulta em um erro gráfico final maior.



Existem outros processos de retificação de uma circunferência, como o processo de Specht ou de Kochansky. Pesquise nos livros didáticos ou na Internet sobre esses outros processos e faça uma situação-problema para cada caso. Esta atividade pode ser resolvida em grupo (no máximo 5 alunos) Cada grupo deve postar sua contribuição no MATERIAL DO ALUNO ou a envie através do seu Pólo para o tutor responsável.

Desretificação de circunferências

Trata-se de obter o diâmetro d de uma circunferência, dado o seu comprimento \overline{AB} .

$$\text{Se } \overline{AB} = 22/7 d \Rightarrow d \approx 7/22 \overline{AB} .$$

Arquimedes

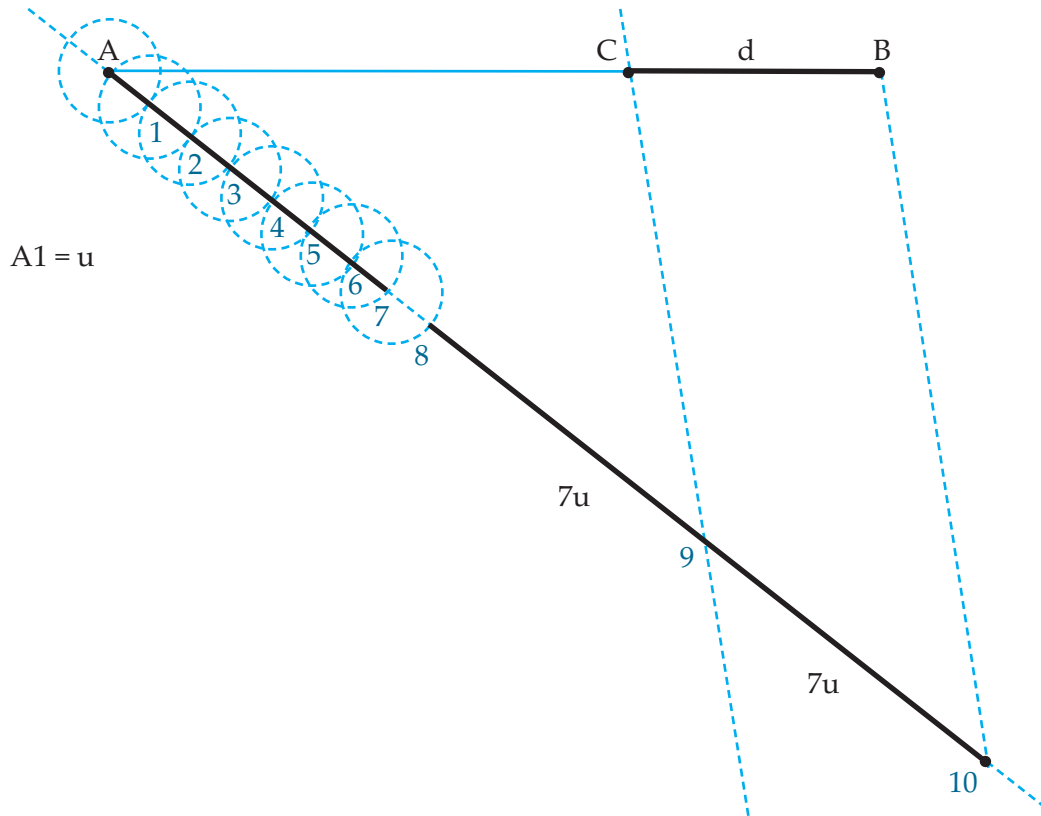
Uma maneira para se obter $d(d_{\text{teórico}}) \approx (d'_{\text{teórico}})$ será mostrada na próxima figura.

$$d'_{\text{teórico}} = 1/\pi \cdot \overline{AB}$$

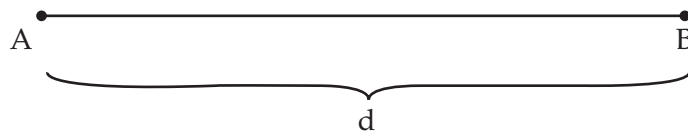
$$d_{\text{obtido}} = 7/22 \cdot \overline{AB}$$

$$e_t = d' - d \approx (0,31831-0,31818) \cdot \overline{AB}$$

$$e_t \approx 0,00013 \cdot \overline{AB}$$



Situação-problema 1. Obtenha graficamente o diâmetro de uma circunferência cujo comprimento C é dado.

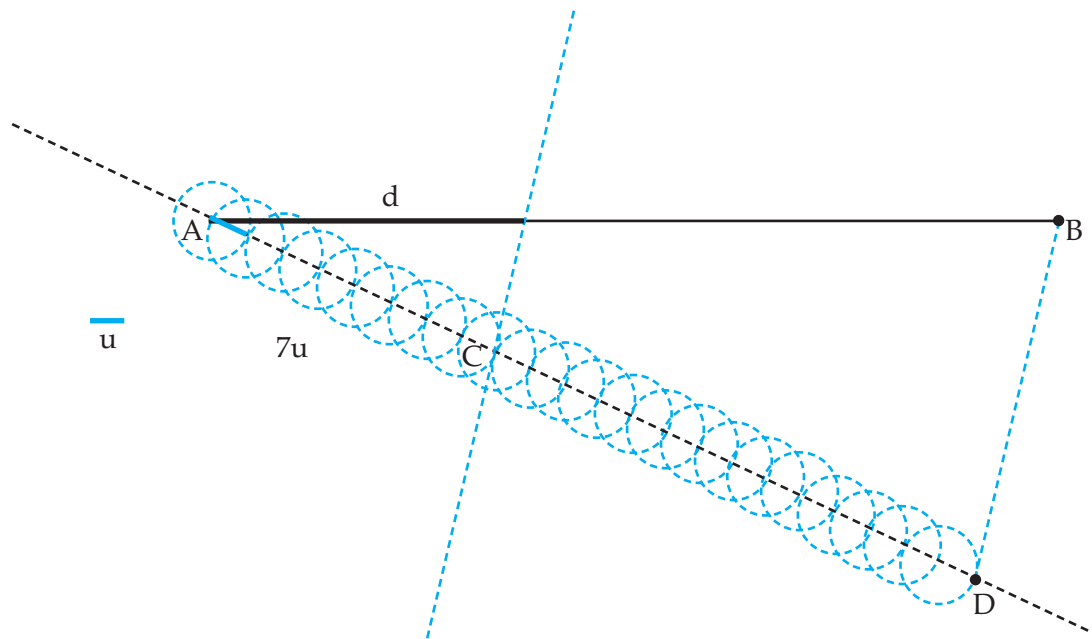


Seja $\overline{AB} = d$, o comprimento da circunferência procurada. Devemos encontrar o seu diâmetro d' , onde:

$$d' \approx \frac{7}{22} \overline{AB}$$

$$d'/7 \approx d/22.$$

Dividindo \overline{AB} em 22 partes iguais e tomando 7 dessas partes, teremos:



Resposta. Medida d .

Situação-problema 2. O comprimento de uma circunferência é 107 mm. Encontre graficamente a medida do diâmetro. Resolva e descreva os passos realizados na resolução desta atividade.

Retificação de arcos de circunferências

Retificar um arco de circunferência é construir um segmento de reta cujo comprimento é igual ao comprimento do arco.

Temos três casos para analisar, $0^\circ < \text{AB} < 90^\circ$, $90^\circ < \text{AB} < 180^\circ$ e $180^\circ < \text{AB} < 360^\circ$.



Pesquise nos livros da biblioteca do Pólo e/ou na Internet a descrição dos procedimentos para retificação destes arcos.

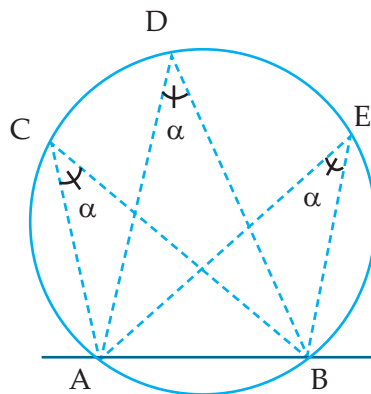
Pesquise nos livros da biblioteca do Pólo e/ou na Internet outros métodos aproximados para outros problemas de construção geométrica.

Capítulo XIV

ARCO CAPAZ

Arco Capaz é o lugar geométrico dos pontos que vêem dois pontos fixos (ou um segmento) sob um mesmo ângulo.

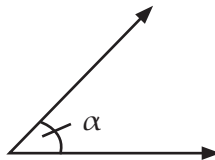
Sejam A e B dois pontos fixos. Traçando por eles um círculo, observe o arco AB maior. Esse arco inscreve um número infinito de ângulos de mesma medida, como podemos observar na figura a seguir



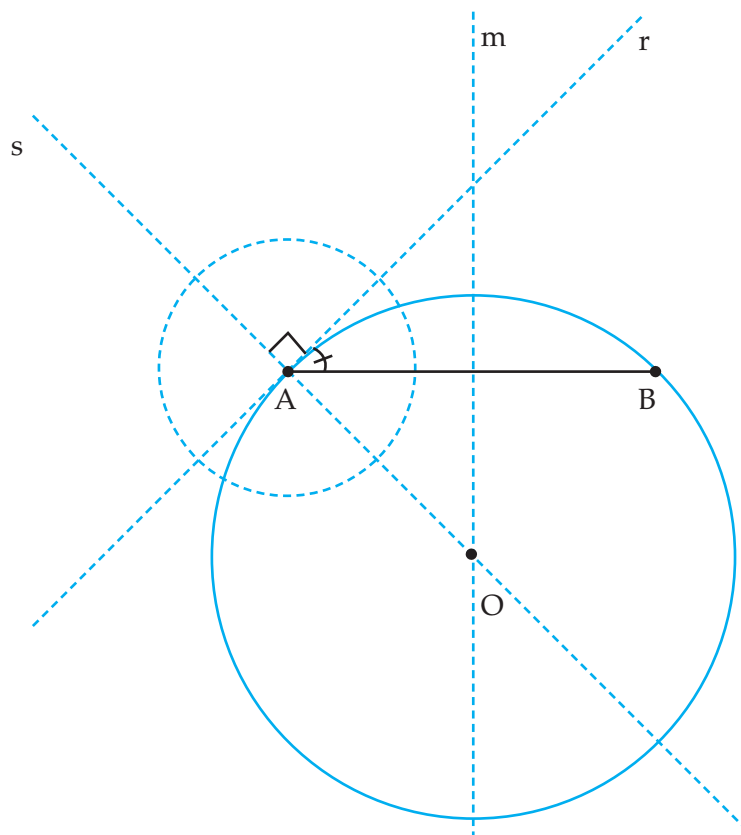
Nela estão representados apenas três deles: $\hat{A}CB$, $\hat{A}DB$ e $\hat{A}EB$. Todos eles são congruentes e possuem a mesma medida α . De qualquer ponto do arco maior AB, os pontos fixos A e B podem ser vistos sob o mesmo ângulo α .

Construção do arco capaz com régua e compasso

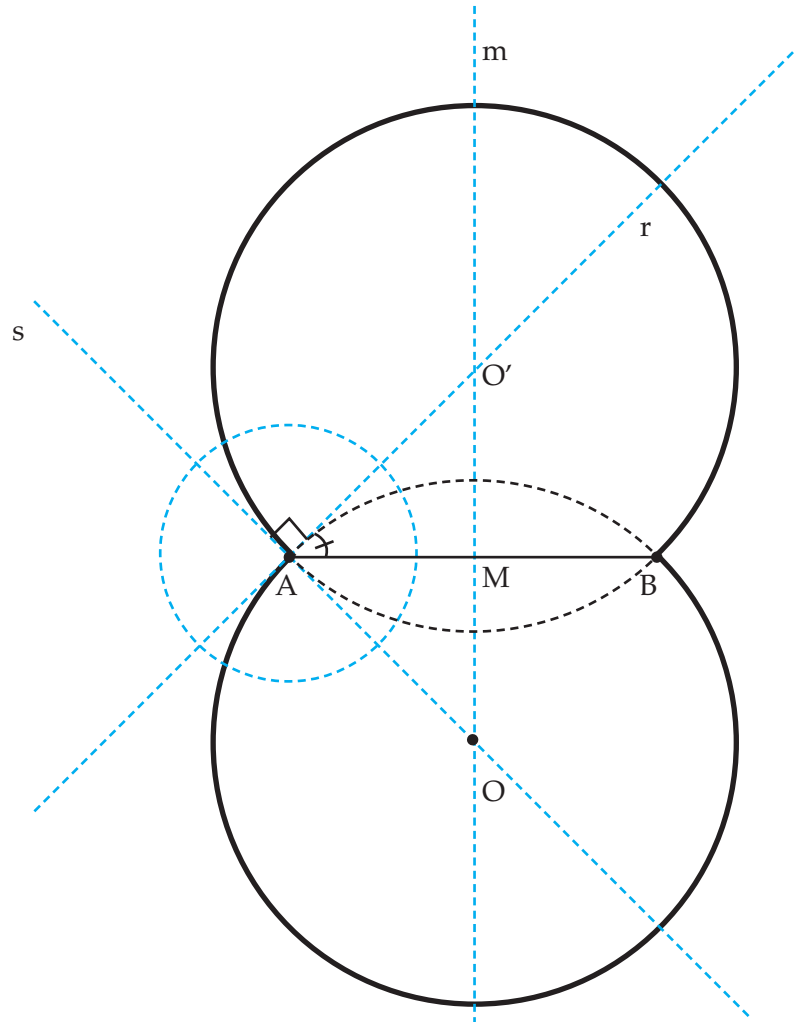
Situação-problema 1. Dado um segmento \overline{AB} e um ângulo α , construir um arco capaz que enxerga o segmento \overline{AB} segundo o ângulo dado.



Consideremos um segmento de reta \overline{AB} e um ângulo α . Traçamos pelo ponto fixo A uma reta r que forma com o segmento \overline{AB} um ângulo congruente a α . Pelo mesmo ponto A, construímos a reta s perpendicular à reta r. Determinamos o ponto médio do segmento \overline{AB} e por ele traçamos sua mediatriz m. Construímos o ponto O formado pela interseção entre a reta s e a mediatriz m. Com o compasso centrado no ponto O e abertura \overline{OA} , traçamos o arco de circunferência localizado abaixo do segmento \overline{AB} . O arco maior que aparece na figura é o arco capaz.



Na figura anterior temos desenhado um arco capaz. Na verdade temos dois arcos capazes e para determiná-lo basta que encontremos O' , simétrico de O em relação ao segmento de reta \overline{AB} . O' encontra-se na reta mediatriz do segmento \overline{AB} .



Na figura temos representado os dois arcos capazes procurados.

Lista de exercícios

Situação-problema 1. Dado um segmento \overline{AB} e um ângulo obtuso α , construir o par de arcos capazes que enxergam o segmento \overline{AB} segundo o ângulo dado.

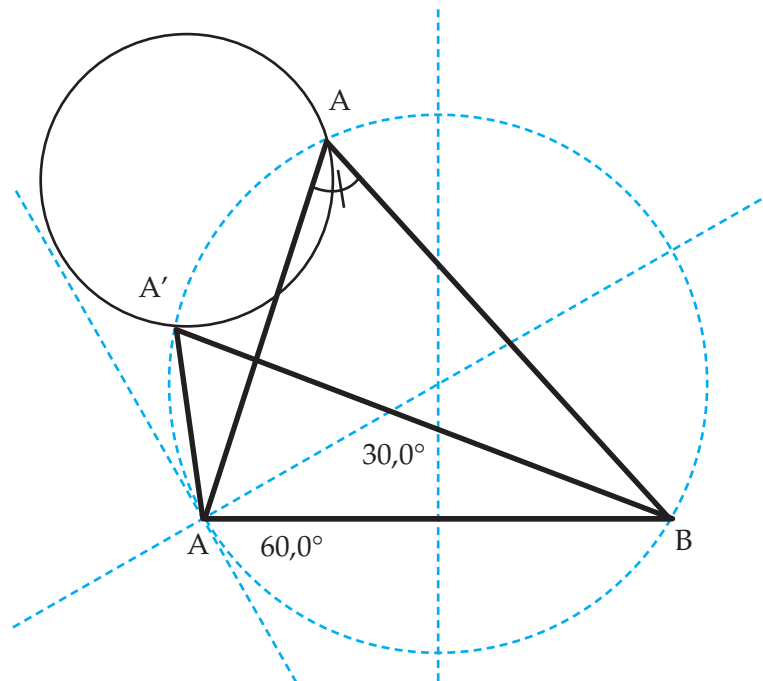
Situação-problema 2. Dado um segmento \overline{AB} e um ângulo reto α , construir um arco capaz que enxerga o segmento \overline{AB} segundo o ângulo dado.

Observação. Neste caso, o ângulo central mede 180° , portanto os pontos A, O e B estão alinhados: O coincide com M, ponto médio de . Nessas condições, é o diâmetro de um círculo. Então, o par de arcos capazes do ângulo reto é a própria circunferência.

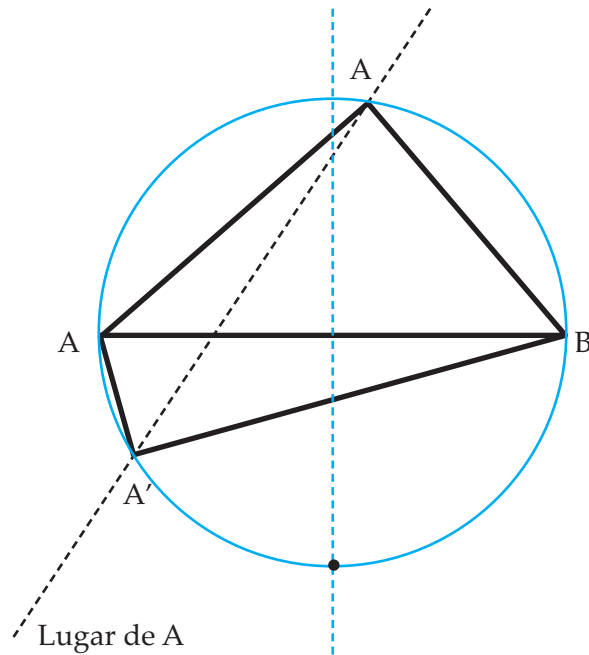
Situação-problema 3. Dado um segmento \overline{AB} (perpendicular em relação a borda do papel) e um ângulo de 45° , construir o par de arcos capazes que enxergam o segmento \overline{AB} segundo o ângulo dado.

Situação-problema 4. Dado um segmento \overline{AB} (inclinado em relação a borda do papel) e um ângulo de 120° , construir o par de arcos capazes que enxergam o segmento \overline{AB} segundo o ângulo dado.

Situação-problema 5. São dados dois pontos B e C e uma circunferência. Construa um triângulo ABC, sabendo que A pertence à circunferência e o ângulo A mede 60° . Discuta e descreva os passos realizados na resolução desta atividade.



Situação-problema 6. São dados dois pontos B e C e uma reta r, construa um triângulo ABC retângulo, sabendo que A é o vértice do ângulo reto e pertence a r. Discuta e descreva os passos realizados na resolução desta atividade.



Situação-problema 7. São dados dois pontos B e C e um segmento \overline{AB} . Determine um ponto A equidistantes de B e C, sabendo-se que A enxerga \overline{AB} segundo um ângulo de 45° . Discuta e descreva os passos realizados na resolução desta atividade. Esse problema poderia ter 4 soluções?

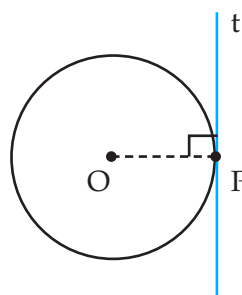
Situação-problema 8. Construa um triângulo ABC, sendo dados os vértices B e C, o lado b e a medida do ângulo A é 30° . Resolva, discuta e descreva os passos realizados na resolução desta atividade.

Traçado das tangentes a uma circunferência

Definimos a **reta tangente a uma circunferência** como sendo uma reta que a intercepta em apenas um ponto. Dizemos que a reta e a circunferência são tangentes e seu ponto de encontro é chamado de **ponto de tangência**.

Condição Indispensável. Quando a reta é tangente à circunferência, ela forma com o raio, no ponto P de tangência, um ângulo reto.

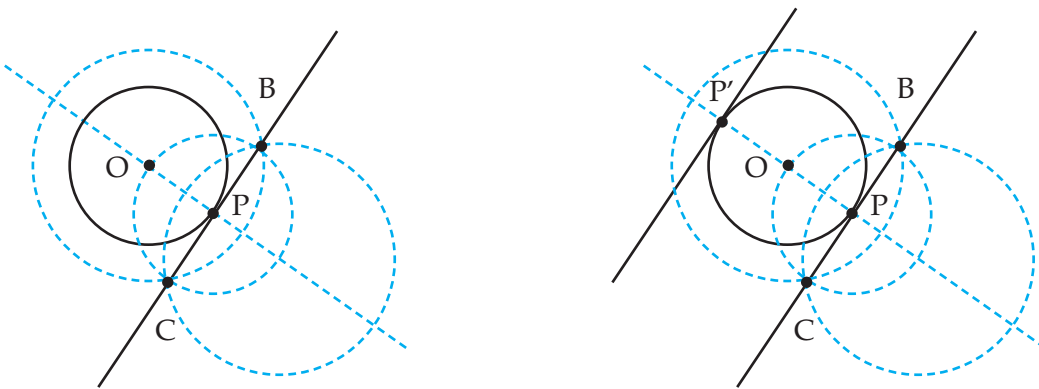
Esta situação pode ser vista na da figura a seguir.



Situação-problema 1. Construir uma reta tangente a uma circunferência dada.

Consideremos a circunferência dada com centro O e traçamos a reta que passa por O e corta a circunferência nos pontos P e P'. Temos duas respostas para esta situação. Basta traçarmos a reta \overline{BC} que

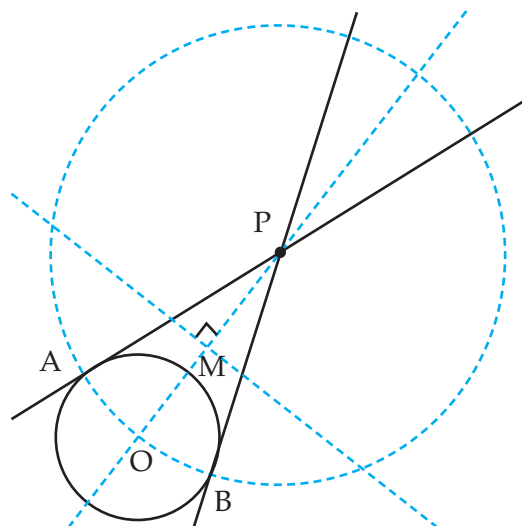
passa por P e é perpendicular à reta que passa por O . Analogamente, construímos a reta tangente à circunferência dada que passa por P' . A construção da reta \overline{BC} tangente à circunferência dada que passa pelo ponto P é como feita em construções anteriores. Nas figuras, temos a reta tangente à circunferência dada que passa por P e na outra temos as retas tangentes à circunferência que passa pelos pontos P e P' .



Resposta. Retas P e P' .

Situação-problema 2. Construir duas retas tangentes a uma circunferência dada que passam por um ponto fora dela.

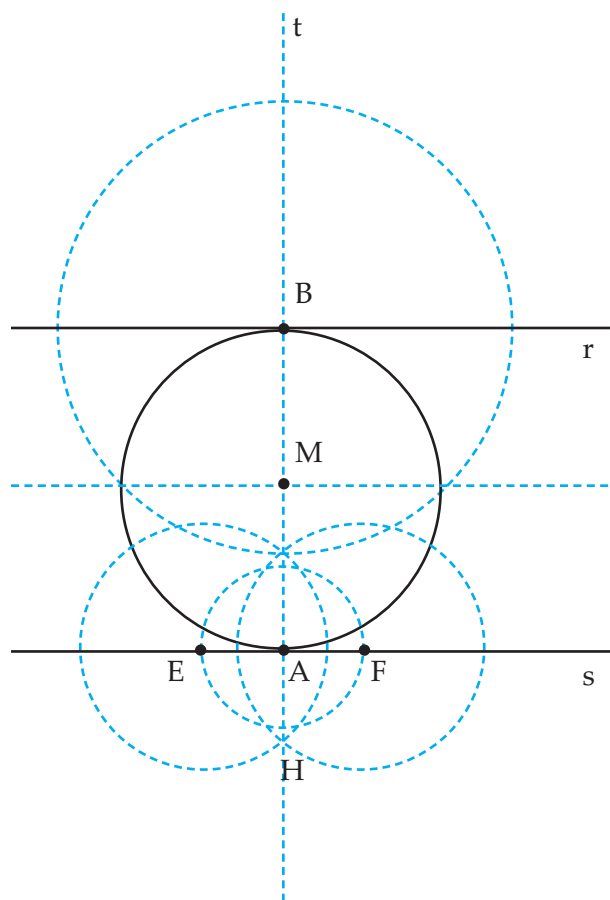
Consideremos a circunferência de centro O dada e o ponto P dado fora dela. Traçamos a reta \overline{OP} e construímos a circunferência de centro em P e raio \overline{PO} . Esta circunferência intercepta a circunferência dada nos pontos A e B . Traçamos a reta \overline{AP} e \overline{BP} tangentes à circunferência dada.



Resposta. Retas \overline{AP} e $\overline{AP'}$ tangentes à circunferência dada.

Situação-problema 3. Traçar uma circunferência tangente a duas retas paralelas dadas.

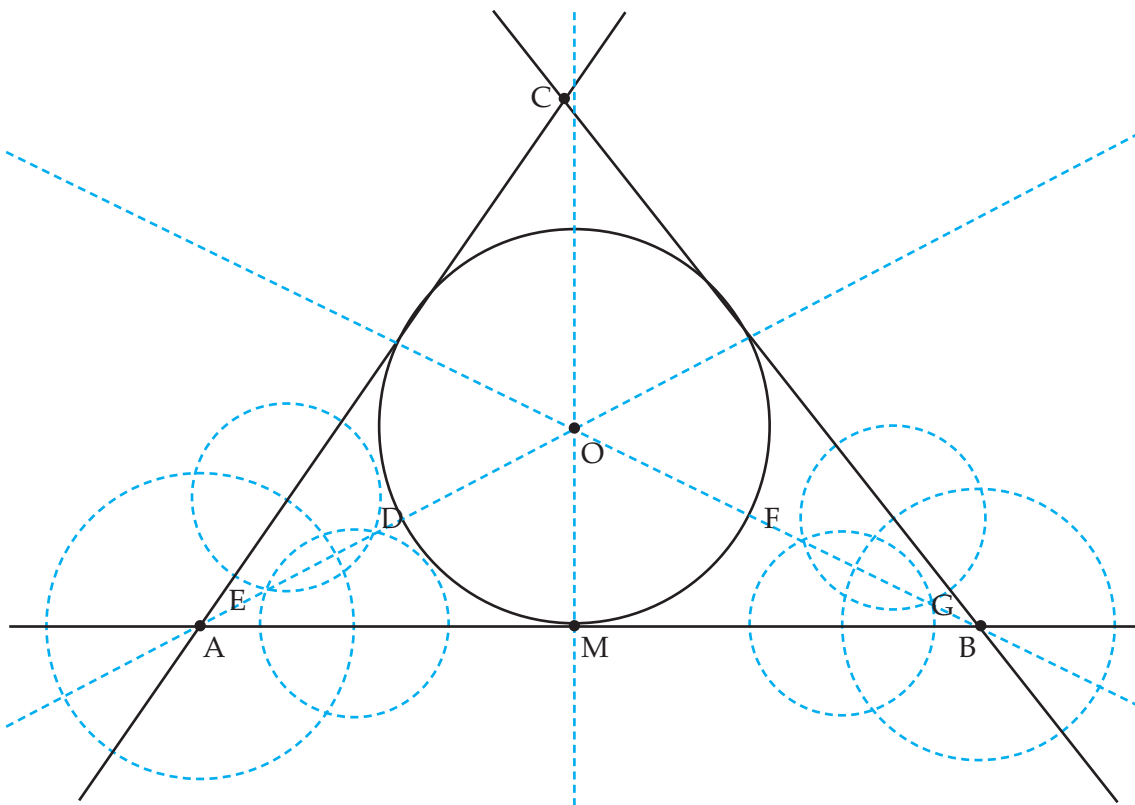
Consideremos as retas paralelas r e s dadas. Marcamos um ponto A qualquer sobre a reta s . Construimos, como em exercícios anteriores, a reta \overline{AB} que passa por A e é perpendicular a reta s . O ponto B é obtido da intersecção da reta r com a reta \overline{AB} . Traçamos o ponto M , médio de AB e por ele traçamos a circunferência pedida de raio AM .



Resposta. Circunferência de raio \overline{AM} .

Situação-problema 4. Dadas três retas que se cortam, traçar uma circunferência tangente a estas.

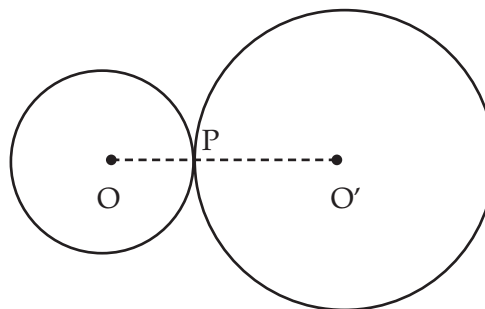
Consideremos as retas \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} que se cortam. Construimos as bissetrizes dos ângulos \widehat{CAB} e \widehat{ABC} obtendo as retas \overline{AD} e \overline{BF} suportes do ponto O , centro da circunferência pedida. Marcamos o ponto M médio do segmento \overline{AB} e traçamos a circunferência pedida de raio \overline{OM} .



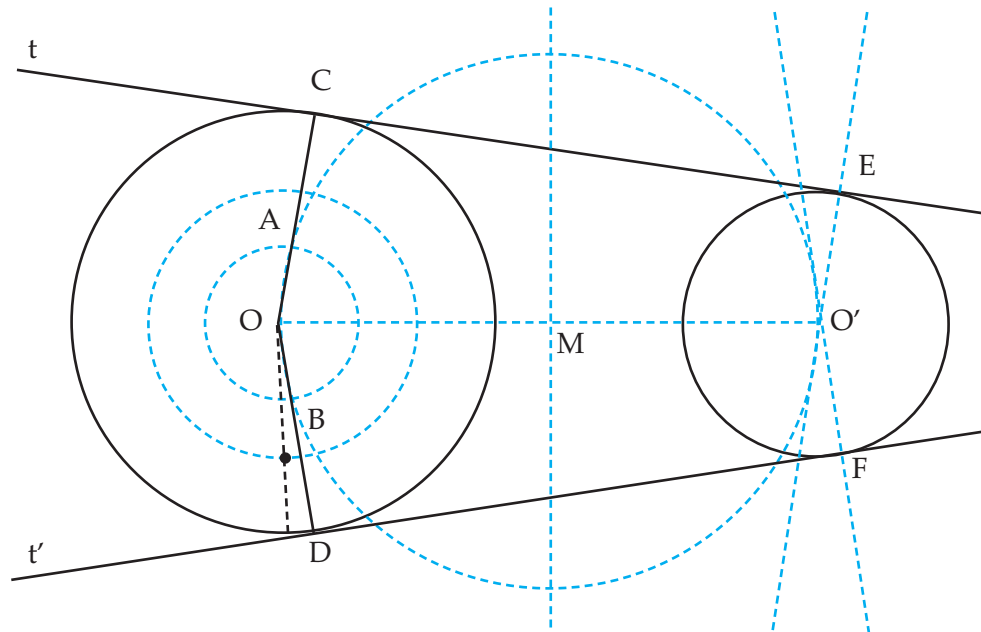
Resposta. Circunferência de raio \overline{OM} .

Traçado das tangentes a duas circunferências

Quando duas circunferências se tocam em apenas um ponto, dizemos que essas **circunferências são tangentes** nesse ponto e esse ponto P está no segmento que une os dois centros, como podemos observar na figura a seguir.



Situação-problema 1. Tangência Exterior. Traçar duas retas tangentes a duas circunferências dadas de raios desiguais.



Respostas. Retas t e t' .

Situação-problema 2. Tangência Interior. Traçar duas retas tangentes a duas circunferências dadas de raios desiguais.

Situação-problema 3. Dada uma circunferência e um ponto de tangência, traçar outra circunferência tangente à primeira.

Situação-problema 4. Construir uma seqüência de circunferências tangentes entre si, de modo que, os centros fiquem alinhados e depois de forma que fiquem desalinhados.

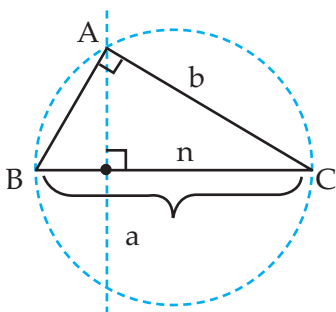
Média geométrica ou média proporcional

Observe a proporção

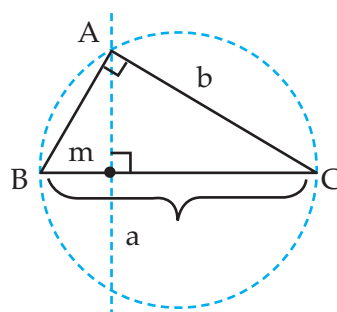
$$\mathbf{a : x = x : b} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = a \cdot b \Rightarrow \sqrt{a \cdot b}$$

temos que x é a **média geométrica ou média proporcional** de a e b .

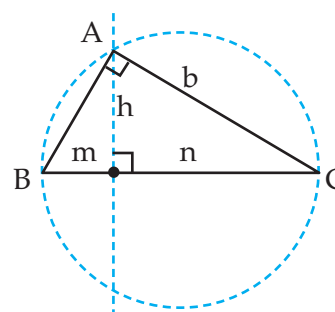
Observe as relações métricas no triângulo retângulo, em cada caso.



$$b^2 = a \cdot n$$



$$c^2 = a \cdot m$$



$$h^2 = m \cdot n$$

Nos três casos

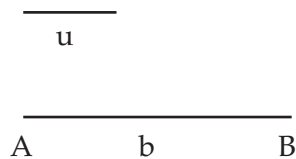
- cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela: $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$.
- a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos: $h^2 = m \cdot n$.

Segmentos construtíveis

São aqueles que podem ser obtidos, a partir de segmentos dados, por meio de construções com régua e compasso.

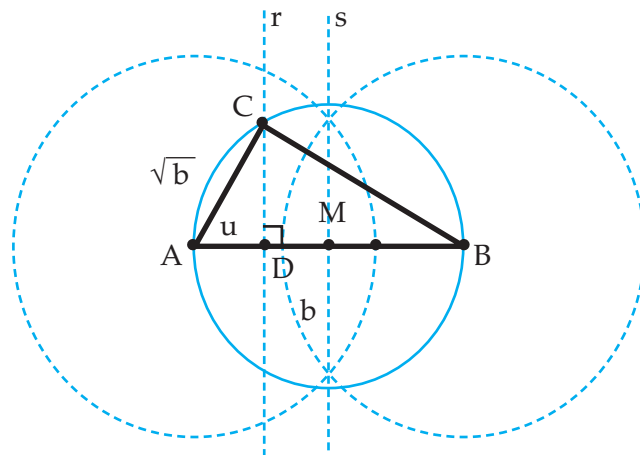
Situação-problema 1. Construir o segmento $c = \sqrt{b}$, conhecendo-se o segmento b .

Observação. Neste caso, estamos usando as letras minúsculas c e b para a representação de um segmento.



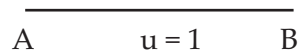
Consideremos o segmento $b = \overline{AB}$ dado e um segmento auxiliar u dado.

Construímos o segmento $b = \overline{AB}$ dado e traçamos seu ponto médio M . Construímos a circunferência de centro M e raio \overline{AM} . Esta circunferência é o lugar geométrico do Vértice C , formando o ângulo \widehat{ACB} reto em C do triângulo ABC e tendo como hipotenusa o segmento \overline{AB} . Este ponto C enxerga o segmento \overline{AB} sob o ângulo de 90° . Construímos o segmento de medida u sobre o segmento \overline{AB} tendo como origem o ponto A e traçamos a reta s perpendicular ao segmento u na extremidade deste. Esta reta s corta a circunferência de centro M e raio \overline{AM} no ponto C . O segmento $\overline{AC} = \sqrt{b}$, como podemos observar na figura a seguir.

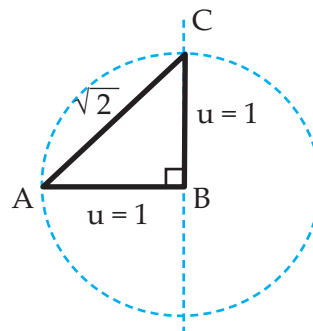


Podemos justificar esta construção observando que no triângulo retângulo ABC em A, vale $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AD}}$, pela semelhança do triângulo CAB com o triângulo DAC. Logo $\overline{AC} = \sqrt{b}$.

Situação-problema 2. Construir o segmento $c = \sqrt{2}$ (outra forma).

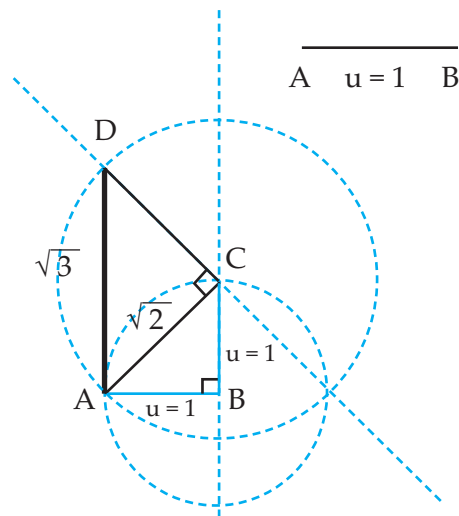


Consideremos o segmento unitário u dado. Construimos um triângulo isósceles ABC de lado $\overline{AB} = u$. A hipotenusa desse triângulo ABC é o lado $\overline{AC} = \sqrt{2}$, concluído pelo teorema de Pitágoras.



Resposta. Segmento \overline{AC} .

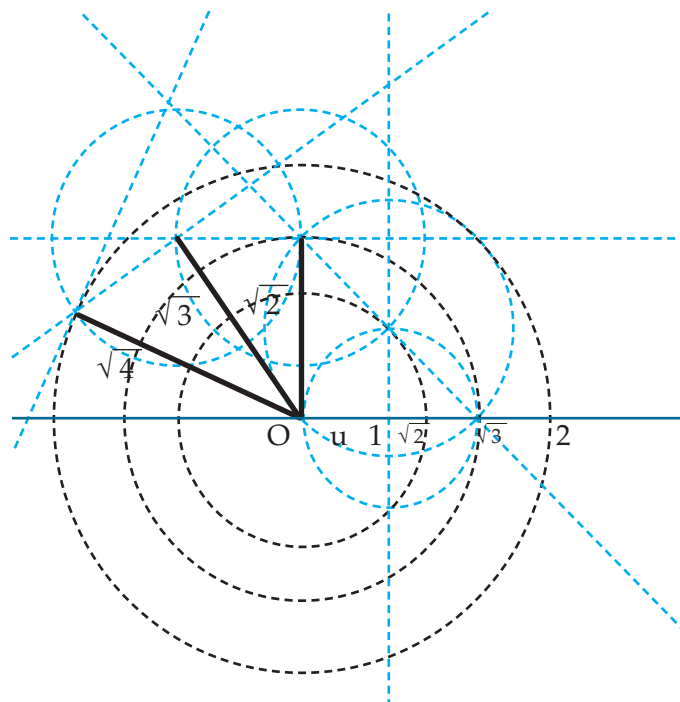
Situação-problema 3. Como construir o segmento $c = \sqrt{3}$?
 Discuta os passos realizados na construção desse segmento. Por que construímos um triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{2}$ e 1?



Resposta. Segmento \overline{AD} .

Situação-problema 4. Como construir o segmento $c = \sqrt{n}$ e o segmento $d = a\sqrt{n}$, onde n é um número natural e a é dado?

Observação 1. Estas construções nos permitem localizar, sobre a reta, os pontos correspondentes aos números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ sendo apenas necessário que associemos a coordenada 0 ao ponto A , e a coordenada 1 ao ponto B e teremos a construções dos seguintes segmentos.



Observação 2. Nem todos os segmentos são construtíveis. Como exemplo podemos citar alguns problemas famosos da Matemática.

- A Duplicação do Cubo.

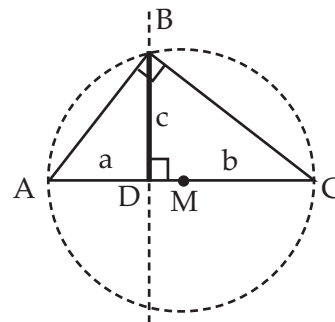
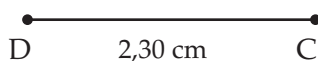
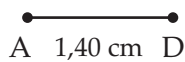
O problema consiste em se determinar a medida do cubo cujo volume é igual ao dobro do volume de um cubo de aresta a dado. Esta nova aresta deve medir $\sqrt[3]{2}$.

- A Trissecção do Ângulo.
- A Quadratura do Círculo.

Situação-problema 5. Construir o segmento $c = \sqrt{a \cdot b}$, com $a = 1,40$ cm e $b = 2,30$ cm.

1º Modo.

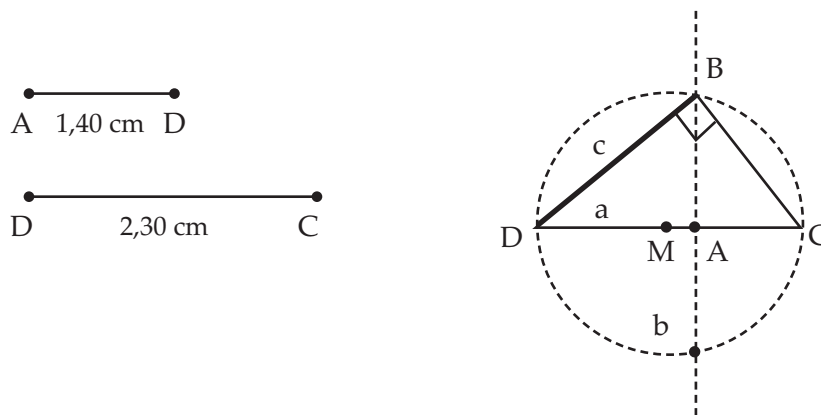
Traçamos os segmentos $a = 1,40$ cm e $b = 2,30$ cm, sobre uma mesma reta suporte. Encontramos o ponto M médio do segmento \overline{AC} e por M traçamos uma circunferência de raio \overline{AM} . Traçamos uma reta perpendicular ao segmento \overline{AD} pelo ponto D e no encontro dessa reta com a circunferência temos o ponto B. O segmento c procurado está representado na figura a seguir e $c = 1,80$ cm.



Resposta. $\overline{BD} = c = 1,80$ cm.

2º Modo.

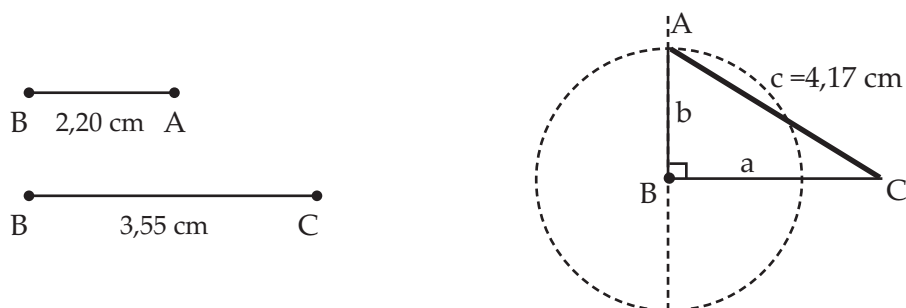
Traçamos o segmento $\overline{DC} = b = 2,30$ cm e sobre ele marcamos o ponto A com $\overline{DA} = a = 1,40$ cm. Encontramos o ponto M médio do segmento \overline{DC} e por M traçamos uma circunferência de raio \overline{DM} . Traçamos uma reta perpendicular ao segmento \overline{DA} pelo ponto D e no encontro dessa reta com a circunferência temos o ponto B. O segmento c procurado está representado na figura a seguir e $c = 1,80$ cm.



Resposta. $\overline{BD} = c = 1,80\text{cm}$.

Situação-problema 6. Construir o segmento $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, com $a = 1,40\text{ cm}$ e $b = 2,30\text{cm}$.

Traçamos o segmento $\overline{BC} = b = 3,55\text{cm}$ e traçamos uma reta perpendicular ao segmento \overline{BC} pelo ponto B. Marcamos a medida do segmento b sobre a reta, obtendo o ponto A. Traçamos o segmento $\overline{AC} = c = 4,17\text{cm}$. Observe que o triângulo é reto em B e pelo teorema de Pitágoras $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. O segmento c procurado está representado na figura a seguir e $c = 4,17\text{cm}$.

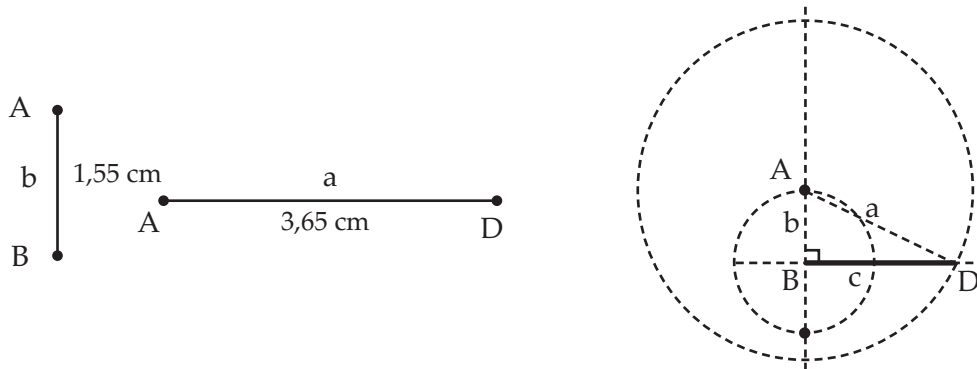


Resposta. $\overline{AC} = c = 4,17\text{cm}$.

Situação-problema 7. Construir o segmento $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$), com $a = 3,65\text{ cm}$ e $b = 1,55\text{cm}$.

Traçamos uma reta suporte e sobre ela marcamos o B. Por B traçamos uma reta perpendicular à reta suporte construída. Construímos o triângulo retângulo em B tendo como cateto $\overline{AB} = 1,55\text{cm}$ e hipotenusa o segmento $\overline{AD} = a = 3,65\text{cm}$. Traçamos uma circunferência centrado o compasso em A e raio $\overline{AD} = a = 3,65\text{cm}$ e obtemos o ponto D no encontro dessa circunferência com a reta suporte construída e obtemos $\overline{BD} = c = 3,31\text{cm}$. O segmento c procurado está

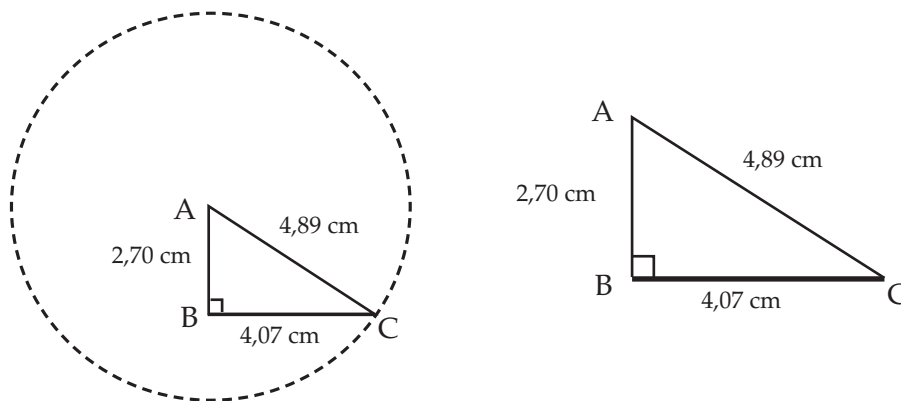
representado na figura a seguir.



Resposta. $\overline{BD} = c = 3,31\text{cm}$.

Situação-problema 7. Construir o segmento $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a < b$), com $a = 2,70\text{cm}$ e $b = 4,07\text{cm}$.

Traçamos uma reta suporte e sobre ela marcamos o ponto B. Por B traçamos uma reta perpendicular a reta suporte construída. Construímos o triângulo retângulo em B tendo como cateto $\overline{BA} = 2,70\text{cm}$ e hipotenusa o segmento $\overline{AC} = b = 2,70\text{cm}$. Traçamos uma circunferência centrado o compasso em A e raio $\overline{AC} = b = 2,70\text{cm}$ e obtemos o ponto C no encontro dessa circunferência com a reta suporte construída e obtemos $\overline{BC} = c = 4,07\text{cm}$. O segmento c procurado está representado na figura a seguir.

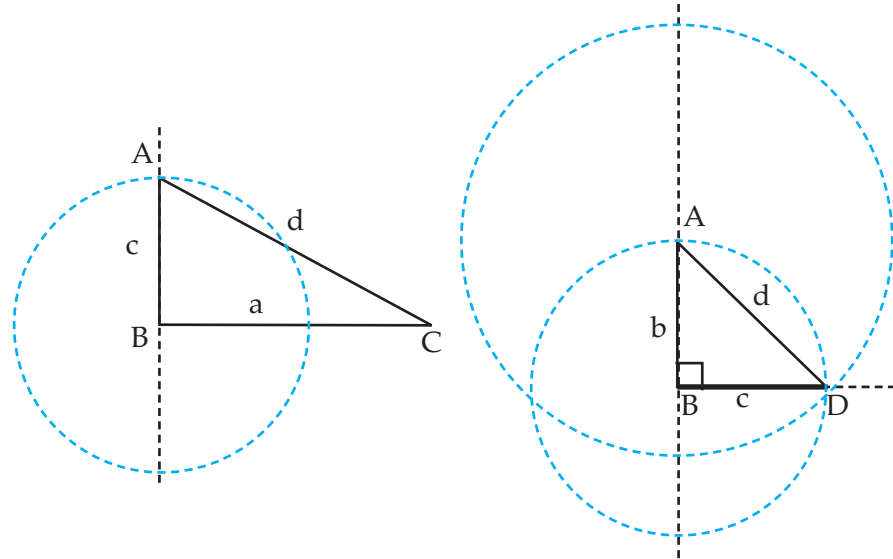


Resposta. $\overline{BC} = c = 4,07\text{cm}$.

Situação-problema 8. Construir o segmento $c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, conhecendo-se o valor de a, b e c.

Construímos inicialmente o segmento $d = \sqrt{a^2 + c^2}$ ($a > c$), como feito no exercício 6. Construímos o segmento $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ a partir da construção do triângulo retângulo em B de cateto b e hipotenusa d. Na intersecção da reta suporte com a circunferência de centro em A

e raio $\overline{AD} = d$, obtemos então o ponto D. Traçamos o segmento \overline{BD} resposta do problema. O segmento c procurado está representado na figura a seguir.



Resposta. $\overline{BD} = c = 3,25\text{cm}$.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag & MELLO, Elizabeth Gervazoni S. Iniciação à demonstração: apreendendo conceitos geométricos. REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 23, Caxambu, 2000. Anais... (CD-Rom), 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática - 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Disponível em: <http://www.sinepe-sc.org.br/5a8mtm.htm>.

Acesso em: 24 mar. 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997. v.1.

CUNHA, Gregorio Nazianzeno de Mello. **Desenho Geométrico e elementar**. 3. ed. Rio de Janeiro: Educadora, 1942.

DIAS, Mônica Souto da Silva. **A Importância do Desenho na construção dos conceitos geométricos**. 1998a. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.

_____. A importância do desenho na construção dos conceitos geométricos. In In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 1998, São Leopoldo, RS. **Anais...** São Leopoldo, UNISINOS/SBEM, 1998b. v. 2, p. 399.

IMENES, Luiz Márcio & LELLIS, Marcelo. **Matemática**. São Paulo: Scipione, 1998. 4v.

LIBLIK, Maria Petraitis & PINHEIRO, Marta. Sobre a contribuição do ensino do desenho geométrico nas artes e na matemática: a importância da integração curricular. In: **Anais da 48ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência** (CD Rom). PUC-SP, 1996.

LIMA, Edison R. **Desenho para o concurso de habilitação**. (Problemas de Desenho Geométrico e projetivo para o concurso de habilitação às escolas de Engenharia, Arquitetura, Urbanismo, Politécnica e Belas Artes), São Paulo: Cia Ed. Nacional, 1956. 445p.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, SBEM, n.4., p.3-3. set./1995.

MIGUEL, Antonio. BRITO, Arlete J. A história da matemática na formação do professor de matemática. In: **Caderno CEDES: História e Educação Matemática**. São Paulo: Papyrus, 1996. p.47 - 61.

MIGUEL, Antonio. FIORENTINI, Dario & MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? In: **Pró-Posições**, v. 3., n. 1(7), p. 39-54, 1992.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998. 121p.

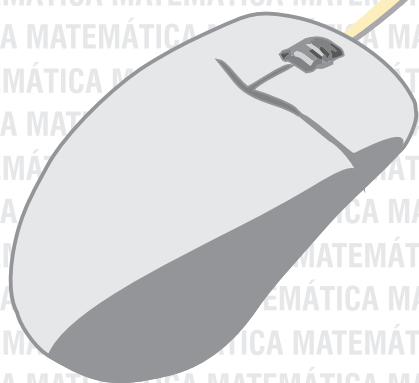
Endereços Eletrônicos

http://pt.wikipedia.org/wiki/Lugar_geom%C3%A9trico

<http://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%82angulo>

Este livro aborda os conceitos de desenho geométrico, procuramos fazê-la mais simplificada possível e pelos processos mais acessíveis, para o entendimento e assimilação das técnicas empregadas em Desenho Geométrico.

Esperamos, assim, contribuir para facilitar a aprendizagem do Desenho Geométrico, que é muito importante por ser usado no estudo da Matemática e ser indispensável nas construções elementares, utilizadas no Desenho Técnico, no Desenho Industrial e em qualquer projeto de Arquitetura.



Universidade Federal
de Mato Grosso do Sul



Coordenadoria de Educação
Aberta e a Distância



UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

ISBN 978-85-7613-185-4



9 788576 131854