MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Cálculo Diferencial e Integral I

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Henrique Mongelli

EDITORA UFMS

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

ORGANIZADORA
Profª. Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

Campo Grande, MS - 2009

EDITORA UFMS

INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral I está fundamentado em um conjunto de operações envolvendo quatro operadores: limite, diferencial, derivada, e integral. Através do limite se chega na diferencial e na derivada. A integral é uma operação sobre a diferencial; o resultado mais simples de uma integral é uma diferença, cuja aplicação é fundamental nas Ciências Exatas.

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo da Matemática diferente dos outros que você aprendeu
até aqui, pois ele é dinâmico: estuda os movimentos, as variações, as quantidades que mudam, tendendo a outras quantidades. As ideias principais que formam a base do Cálculo foram acontecendo através de vários séculos.

È importante ressaltar, de início, que o programa da disciplina é bastante extenso e, portanto, será imprescindível que dediquem algumas horas por semana para estudar Cálculo, refletindo sobre os conceitos apresentados e resolvendo os problemas propostos. No livro texto apresentamos exercícios resolvidos e exercícios a serem resolvidos. Procurem resolver todos os exercícios propostos e não deixem de consultar outra bibliografia.

Sobre os Autores

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli é professora do Departamento de Matemática da UFMS - CCET e mestre em Educação pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Desde a graduação trabalha com a capacitação de professores da Rede Municipal e Estadual do Mato Grosso do Sul oferecendo cursos relativos a Conteúdos e Metodologia de Matemática, palestras e oficinas pedagógicas.
Na Educação a Distância trabalha deste 2001, atuando como professora da disciplina "Conteúdos e Metodologias para as Séries Iniciais do Ensino Fundamental" para o Curso de Pedagogia – Modalidade a Distância. Coordena os Curso de Licenciatura em Matemática – Modalidade a Distância nos Pólos de: Água Clara; Camapuã; Cruzeiro do Oeste; Igarapava; Rio Brilhante; São Gabriel do Oeste e Siqueira Campos.

Henrique Mongelli possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (1989), mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade de São Paulo (1995) e doutorado em Ciências da Computação pela Universidade de São Paulo (2000). Atualmente é professor associado da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Tem experiência na área de Ciência da Computação, com ênfase em Teoria da Computação, atuando principalmente na área de algoritmos paralelos e distribuídos.

Revisão: Sheila Mara Pessini Godinho

SUMÁRIO

MÓDULO 1

LIMITE E CONTINUIDADE

MÓDULO 2

DERIVADA

MÓDULO 3

INTEGRAL

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Módulo 1

LIMITE E CONTINUIDADE

Henrique Mongelli
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

Capítulo I

INTRODUÇÃO: UM POUCO DE HISTÓRIA

No início do desenvolvimento do Cálculo, a maior parte das funções que se utilizavam eram funções contínuas, sendo assim não havia a necessidade de se estudar, a fundo o conceito de continuidade. Porém, certos problemas físicos que surgiram o com o tempo, levaram a considerar certos tipos de funções descontínuas. Em 1821, Augustin – Louis Cauchy formulou a Teoria dos Limites e da Continuidade, com base nas propriedades dos números reais, usando desigualdades, uma definição matemática satisfatória. O termo limite, no sentido moderno, é produto dos séculos XVIII e XIX, originário da Europa. A definição moderna tem menos de 150 anos. A primeira vez em que a idéia de limite apareceu foi na discussão dos quatro paradoxos de Zeno.

O conceito de limite é o conceito mais fundamental do Cálculo, uma vez que utilizamos esse conceito para definir derivada, continuidade, integral, convergência e divergência. A sistematização lógica do Cálculo pressupõe então o conceito de limite. Portanto, em termos do desenvolvimento ordenado e lógico do cálculo, limites devem vir primeiro. Porém, o registro histórico é justamente o oposto. Por vários séculos, as noções de limite eram confusas, com idéias vagas e algumas vezes filosóficas sobre o infinito (números infinitamente grandes e infinitamente pequenos e outras entidades matemáticas) e com intuição geométrica subjetiva e indefinida.

Os conceitos de "Limite", de "Derivada" e de "Integral" são os nossos principais objetos de estudo. Como veremos mais adiante, derivada e integral, são formas de limite.

Limite e Continuidade

Noção intuitiva de limite

Para iniciarmos o **Cálculo Diferencial** é necessário que seja apresentado o conceito de Limite de uma função. Nosso objetivo então é desenvolver uma linguagem que nos permita descrever o comportamento dos valores de uma função f nas proximidades de um ponto P.

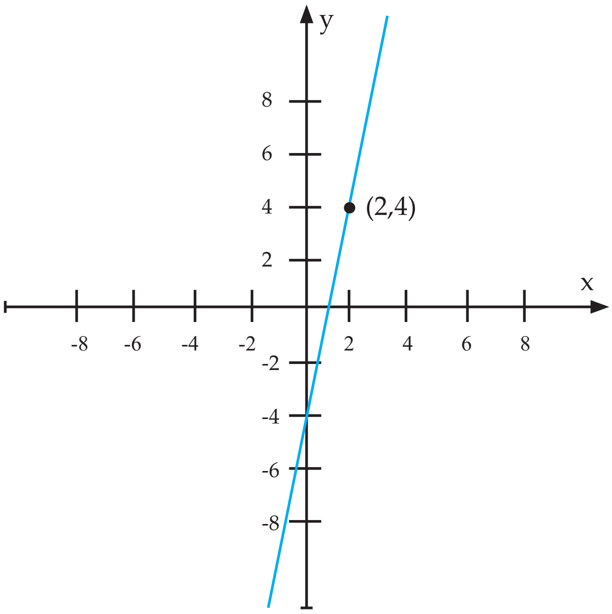
Noção intuitiva. Exemplo 1.

Observe as sucessões numéricas na tabela a seguir.

Sucessões numéricas		Dizemos que:
1, 2, 3, 4, 5, ...	Os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um limite	$x \to +\infty$ (x tende ao infinito)
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$	Os números aproximam-se cada vez mais de 1, sem nunca atingir esse valor	$x \to 1$ (x tende a um)
1, 0, -1, -2, -3, ...	Os termos tornam-se cada vez menores sem atingir um limite	$x \to -\infty$ (x tende a menos infinito)
$1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{6}{7}, 7, \ldots$	Os termos oscilam sem tender a um limite	

Noção intuitiva. Exemplo 2.

Vamos, através de um segundo exemplo, dar uma idéia intuitiva do que significa o limite de uma função. Consideremos então a função $y = 4x - 4$.



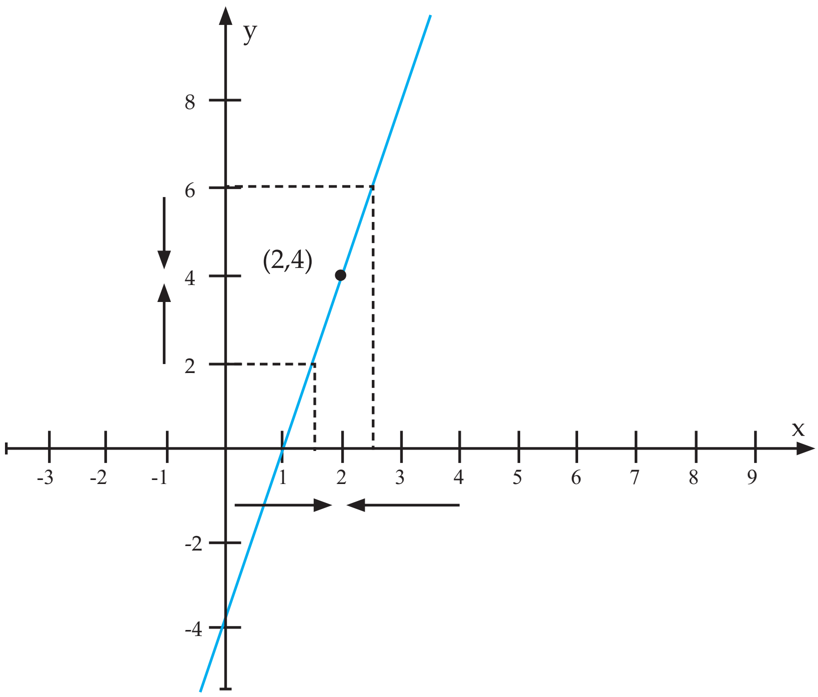
Vamos estudar o que acontece nas proximidades de $x = 2$. Observando o gráfico anterior:

- O que acontece com y quando x se aproxima de 2?

Sabemos que quando x é exatamente igual a 2, y vale exatamente 4.

Mas não foi isso que perguntamos, queremos saber o que acontece com y nas proximidades de 2.

Se formamos valores de x bem próximos de 2, teremos valores de y bem próximos de 4. Concorda? Observe o gráfico e a tabela a seguir.



Podemos montar a seguinte tabela.

Atribuímos valores para x na função y = 4x -4 que se aproximem de 2, pela esquerda (valores menores que 2) e pela sua direita (valores maiores que 2) e calculamos o valor correspondente de y:

x	y = 4x -4
1,5	y = 4 (1,5) – 4= 6 - 4 = 2
1,9	y = 4 (1,9) -4 = 7,6 – 4 = 3,6
1,99	y = 4 (1,99) -4 = 7,96 – 4 = 3,96
1,999	y = 4 (1,999)-4 = 7,996 – 4=3,996
2	y = 4 (2) - 4 = 8 – 4 = 4

x	y = 4x - 4
2,5	y = 4 (2,5) - 4 = 10 – 4 = 6
2,1	y = 4 (2,1) - 4 = 8,4 – 4 = 4,4
2,01	y = 4 (2,01)-4 =8,01–4 = 4,01
2,001	y =4(2,001)-4=8,001–4= 4,001
2	y = 4 (2) - 4 = 8 – 4 = 4

Podemos dizer que f (x) aproxima-se de 4 quando x aproxima-se de 2, ou melhor f (x) toma valores tão próximos de 4 quando quisermos usar valores de x bem próximos de 2.

Se quisermos $3,6 < y < 4,4$, basta que tomemos $\Rightarrow 1,9 < x < 2,1$, ou seja,

$$3,6 < y < 4,4 \Rightarrow 3,6 < 4x - 4 < 4,4 \Rightarrow 7,6 < 4x < 8,4 \Rightarrow 7,6/4 < x < 8,4/4 \Rightarrow 1,9 < x < 2,1,$$

0u seja: $2 - 0,1 < f(x) < 2 + 0,1$ quando $2 - 0,05 < x < 2 + 0,05$

Note que "não interessa o que acontece com f no ponto 2", mas "apenas nas proximidades do ponto 2", pela direita e pela esquerda de 2.

Diz-se que o LIMITE de f (x) é 4 quando x tende a 2 e usa- se a notação

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4,$$

$$\lim_{x \to 2} 4x - 4 = 4,$$

ou seja,

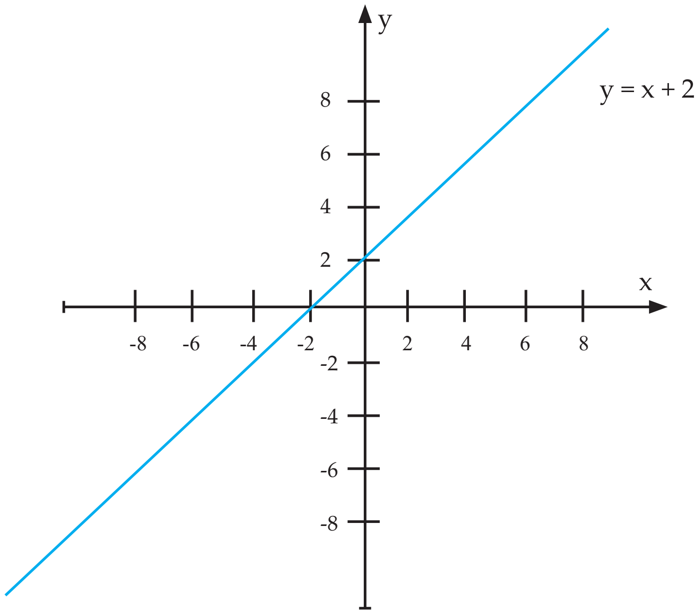
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 4x - 4 = 4.\,2 - 4 = 8 - 4 = 4$$

Pausa para verificação dos seus conhecimentos

A partir do estudo até agora, responda:

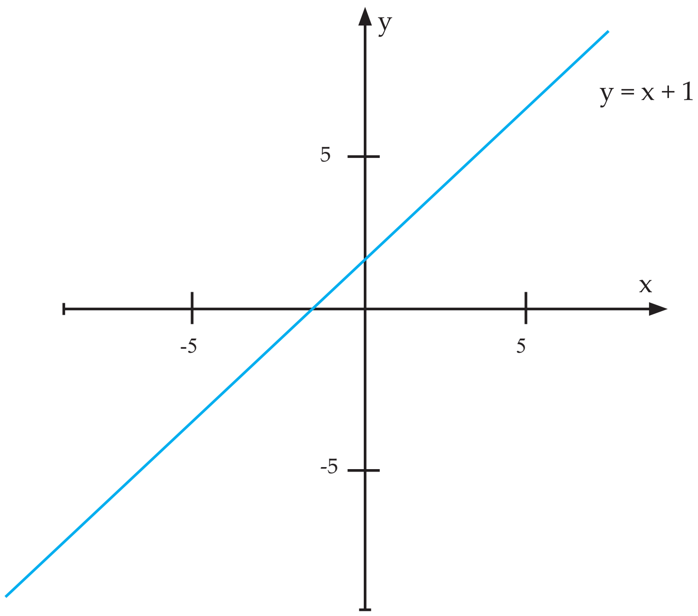
1) Quando x aproxima-se de 0, y aproxima-se de___. Assim,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(x+2) =$$



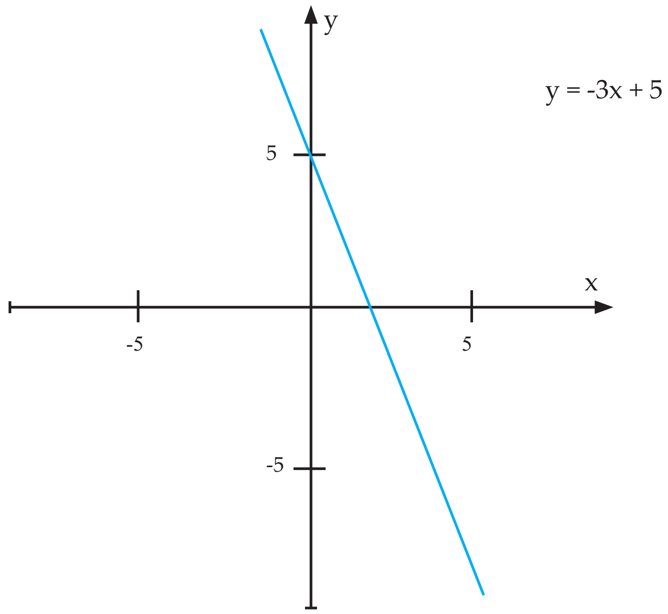
2) Quando x aproxima-se de 0, y aproxima-se de___. Assim,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(x+1) =$$



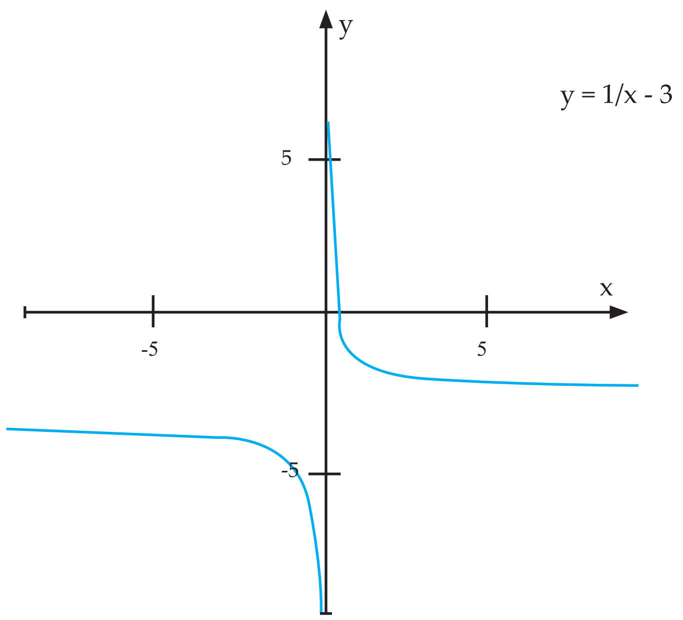
3) Quando x aproxima-se de 0, y aproxima-se de____. Assim,

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(-3x+5) =$

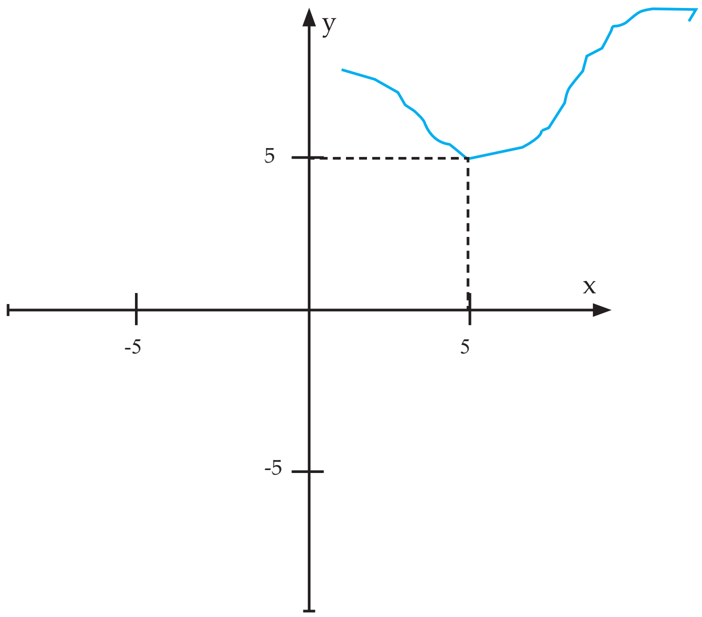


4) Quando x aproxima-se de 1, y aproxima-se de____. Assim,

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x-3} =$



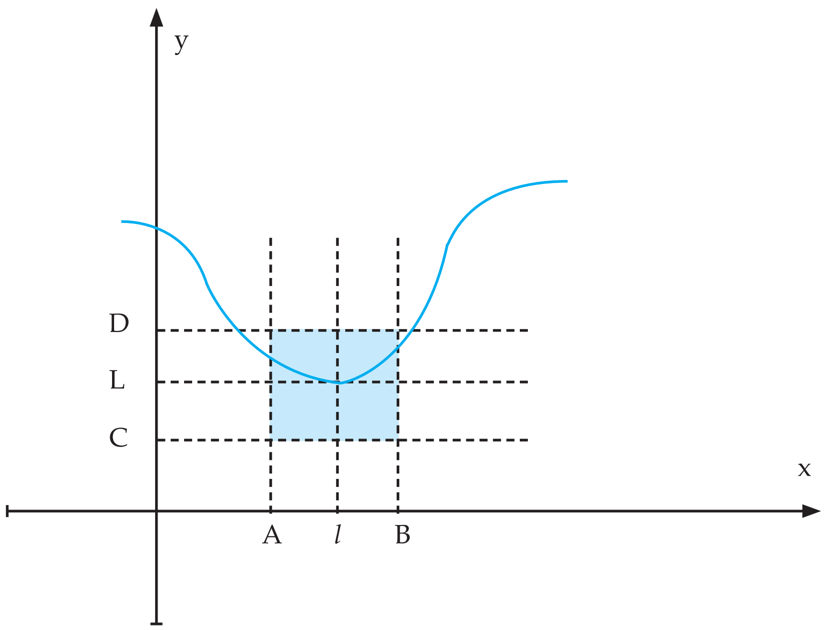
5) Quando x aproxima-se de 5, y aproxima-se de___. Assim, $\lim_{x \to 5} f(x) =$



Definição de limite

Podemos então dizer que

Para que o número L seja o limite de f(x), quando x aproxima-se *l*, é necessário que a vizinhança aberta CD de L escolhida, corresponda uma vizinhança aberta AB de *l* tal que, para $x \neq l$ em AB, o gráfico de f esteja no retângulo pintado da figura.



Assim, quando x se aproxima de *l*, y se aproxima de L, isto é,
$\lim_{x \to l} f(x) = L$

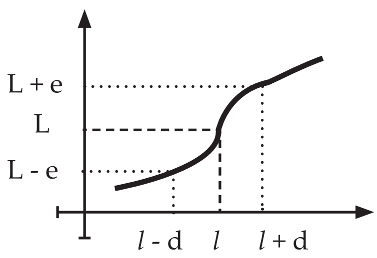
A sentença $\lim_{x \to l} f(x) = L$ é lida da seguinte forma:

Limite de f(x) quando x tende a *l* (x→*l*) é igual a L.

Deve-se lembrar que L é um número real.

Definição formal de limite

Seja f uma função definida em]a,b[, com a possível exceção de $l \in]a,b[$. Seja $L \in R$, diz-se que o limite de f, para x tendendo a *l*, é L e indica-se $\lim_{x \to l} f(x) = L$



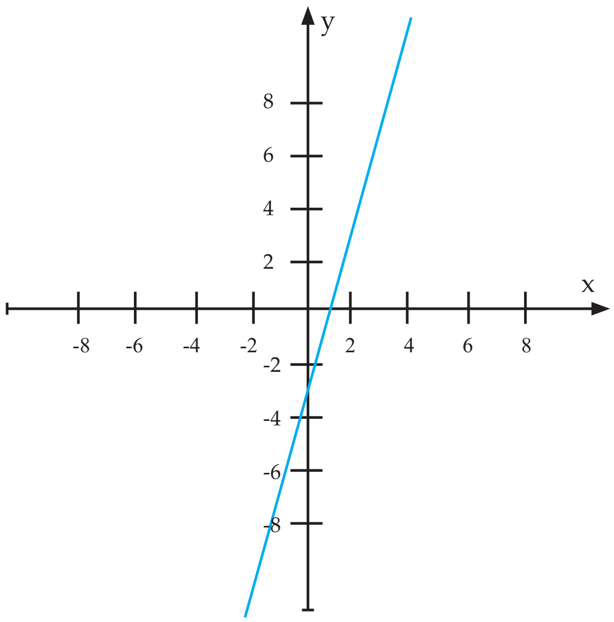
Se a seguinte condição for verificada:

Dado $\varepsilon > 0$ tal que para todo x pertencente ao domínio da função f(x), $0 < |x - 1| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Observe as discussões sobre as funções a seguir

1. Consideremos a função f(x) = 2x – 3 no ponto x = 1.

Observe o gráfico da função f(x) = 2x – 3.



Temos que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 2x - 3 = 2 . 1 - 3 = 2 - 3 = -1$, logo quando x se aproxima de 1, y tende a -1.

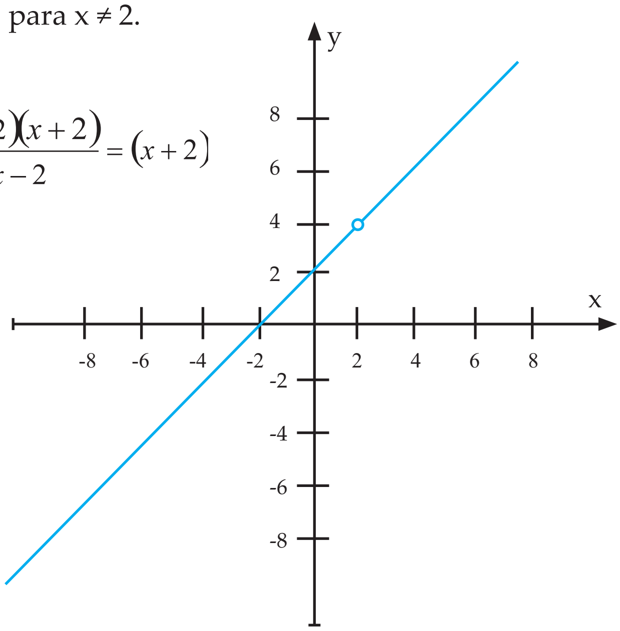
2. Consideremos a função f(x) = $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Vamos inicialmente analisar a função dada. Ela está definida para qualquer valor de x real? Não, pois como a função dada é uma função racional, temos que dar a condição de existência desta função, que no caso é (x -2) ≠ 0 (denominador diferente de zero).

Assim, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, para x ≠ 2.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = (x+2)$$

x	f(x)
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4



Observe no gráfico acima que o ponto (2,4) não faz parte do gráfico da função f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$, pois ela não está definida para x = 2. Entretanto quando x aproxima-se de 2, f(x) aproxima-se de 4. Neste exemplo, observamos que apesar da função não estar definida para x=2, o limite existe e vale 4.

3. Consideremos a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, x \neq 1 \\ 2,\ se\ x = 1 \end{cases}$

A função f(x) considerada é formada por duas sentenças. A primeira está definida para qualquer valor de x diferente de 1 e a segunda está definida para x exatamente igual a 1. Mas cuidado!!! Devemos lembrar que não nos interessa saber o comportamento da função no ponto x =1, mas sim nas proximidades do ponto 1.

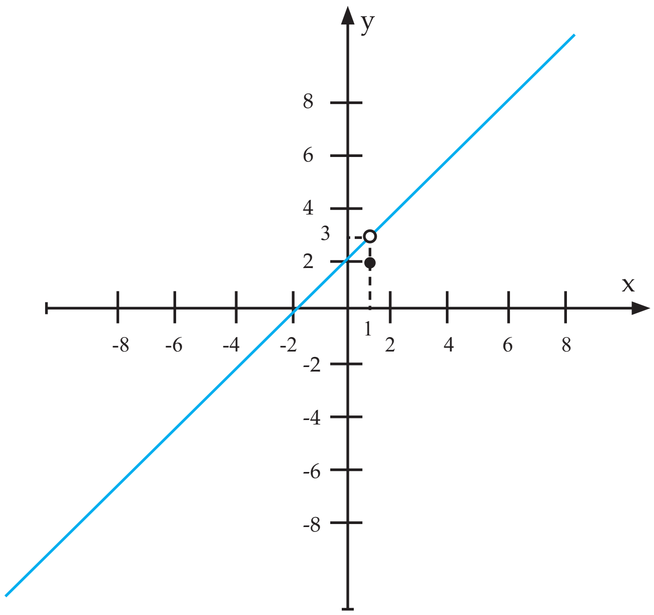
Como $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, temos: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, x \neq 1 \\ 2,\ se\ x = 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to l} f(x) = 3$, isto é, quando x se aproxima de 1, f(x) se aproxima de 3.

Temos que tomar cuidado, pois embora para x = 1 tenhamos f(x) = 2, procuramos o comportamento de y quando x→ 1 e no caso y→ 3, . Logo, o limite de f(x) é 3.

Escrevemos $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} (x+2) = 1 + 2 = 3$

Observe o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, x \neq 1 \\ 2,\ se\ x = 1 \end{cases}$



Ao analisar o comportamento desta função nas vizinhanças do ponto x = 1, ponto este que não pertence ao domínio de f, constatamos que esta função aproxima-se rapidamente do valor L = 3, quando os valores de x aproximam-se de x = 1, tanto por valores de x < 1 (à esquerda de 1) como por valores x > 1 (à direita de 1).

Propriedades dos limites de funções

Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então:

a) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$

O limite da soma é a soma dos limites.
O limite da diferença é a diferença dos limites.

b) $\lim_{x \to a} [\, c.\, f(x) \,] = c\, .\, \lim_{x \to a} f(x) = c\, .\, L$ (c é uma constante qualquer)

O limite do produto de um escalar por uma função é o escalar vezes o limite da função.

c) $\lim_{x \to a} [f(x)\, .\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x)\, .\, \lim_{x \to a} g(x) = L\, .\, M$

O limite do produto é o produto dos limites.

d) Se $\lim_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$

O limite do quociente é o quociente dos limites, desde que o denominador não seja zero.

e) $\lim_{x \to a} c = c$ (c é uma constante qualquer)

O limite de uma constante é a própria constante.

f) $\lim_{x \to a} x = a$

O limite de x quando $x \to a$ é exatamente a.

g) $\lim_{x \to a} [f(x)^n] = [\lim_{x \to a} f(x)]^n = L^n$ (n inteiro e positivo)

h) $$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = L \quad \begin{cases} \text{Se } L > 0 \text{ e n inteiro positivo} \\ \text{ou} \\ \text{Se } L \leq 0 \text{ e n inteiro positivo impar} \end{cases}$$

i) $\lim_{x \to a} |f(x)| = \left| \lim_{x \to a} f(x) \right| = |L|$

O limite do módulo é o módulo do limite.

Exemplos.

1. $\lim_{x \to 3} 2 \, . \, x = 2 \lim_{x \to 3} x = 2 \, . \, 3 = 6$ (usando as propriedades)

ou

$\lim_{x \to 3} 2 \, . \, x = 2 \, . \, 3 = 6$ (direto)

2. $\lim_{x \to 2} (x + 2) = \lim_{x \to 2} (x) + \lim_{x \to 2} 2 = 2 + 2 = 4$ (usando as propriedades)

ou

$\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$ (direto)

3. $\lim_{x \to 1} (-2x - 3) = \lim_{x \to 1} (-2x) - \lim_{x \to 1} 3 = -2 \lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 3 = (-2 \, . \, 1) - 3 = -5$

(usando as propriedades)

ou

$\lim_{x \to 1} (-2x - 3) = -2 \, . \, (1) - 3 = -5$ (direto)

4. $\lim_{x \to 5} 2/5 = 2/5$ (função constante)

5. $\lim_{x \to -3} (x) (2x - 3) = \lim_{x \to -3} (x) \, . \, \lim_{x \to -3} (2x - 3) = (-3) \, . \, [2.(-3).-3] =$

$-3 \, . \, [-6.-3] = -3 \, . \, (-9) = 27$ (usando as propriedades)

ou

$\lim_{x \to -3} (x) (2x - 3) = (-3) [2.(-3).-3] = -3 \, . \, (-9) = 27$ (direto)

6. $\lim_{x \to 1} (x) / (x + 2) = \lim_{x \to 1} (x) / \lim_{x \to 1} (x + 2) = 1 / (1 + 2) = 1/3$

(usando as propriedades)

ou

$\lim_{x \to 1} (x) / (x + 2) = 1 / (1 + 2) = 1/3$ (direto)

7. $\lim_{x \to a} x^3 = \lim_{x \to a} x \;.\; \lim_{x \to a} x \;.\; \lim_{x \to a} x = a \,.\, a \,.\, a = a^3$

8. $\lim_{x \to 2} (x + 1)^2 = \lim_{x \to 2} (x + 1)(x + 1) = \lim_{x \to 2} (x + 1) \,.\, \lim_{x \to 2} (x + 1) =$

$(2 + 1).(2 + 1) = 3 \,.\, 3 = 9$ (usando as propriedades)

ou

$\lim_{x \to 2} (x + 1)^2 = [\lim_{x \to 2} (x + 1)]^2 = [-2 + 1]^2 = [-3]^2 = 9$ (direto)

9. $\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

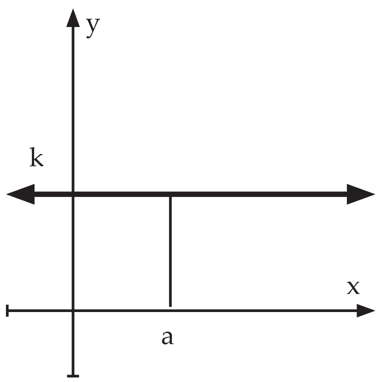
10. $\lim_{x \to c} \sqrt{5} = \sqrt{5}$

Exemplos.

Exemplo 1. Para a função constante f (x) = k, mostre que $\forall$ a, a $\in$ R,

$\lim_{x \to a} f(x) = k$

O gráfico da função f(x) = k é dado a seguir:



Resolução usando a definição de limite:

$a - d < x < a + d$ e $x \neq a \Rightarrow k - e < f(x) < k + e$.

Se $d > 0$ e $e > 0$, da definição de limite, temos:

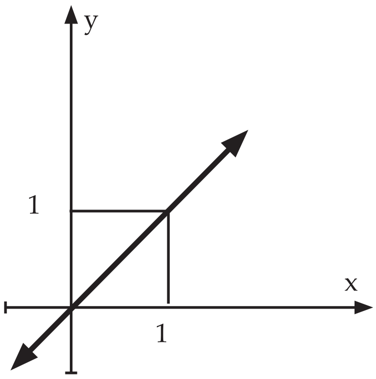
$k - e < k < k + e$, para x no intervalo $a - d < x < a + d$ e $x \neq a$, a sentença é verdadeira para qualquer $d > 0$.

Então, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$

Exemplo 2. Para a função identidade f (x) = x mostre que:

$\lim_{x \to a} f(x) = a$

O gráfico da função f(x) = x é dado a seguir:



Resolução usando a definição de limite:

Se e > 0 e y = x ⇒ d = e ⇒ a – d < x < a + d

e se x ≠ a ⇒ a – e < f (x) < a + e , isto é, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$

Pausa para verificação dos seus conhecimentos

1. Calcule os limites utilizando as propriedades convenientes.

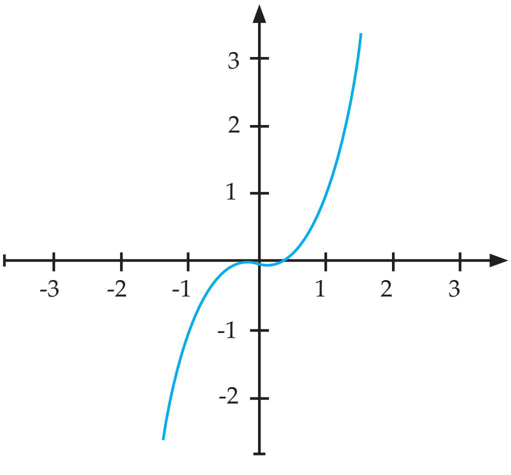
1. $\lim_{x \to 2} x^2 =$
2. $\lim_{x \to 4} 2x + 5 =$
3. $\lim_{x \to 1} 3x^2 + 2x - 5 =$
4. $\lim_{x \to a} -5 =$
5. $\lim_{x \to a} \sqrt{2} =$
6. $\lim_{x \to 4} | x | =$
7. $\lim_{x \to 6} x / 3 =$
8. $\lim_{x \to 0} x =$
9. $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} =$
10. $\lim_{x \to 3} | x - 3 | =$
11. $\lim_{x \to 12} \sqrt{x / 3} =$
12. $\lim_{x \to 5} -3 =$

Capítulo II

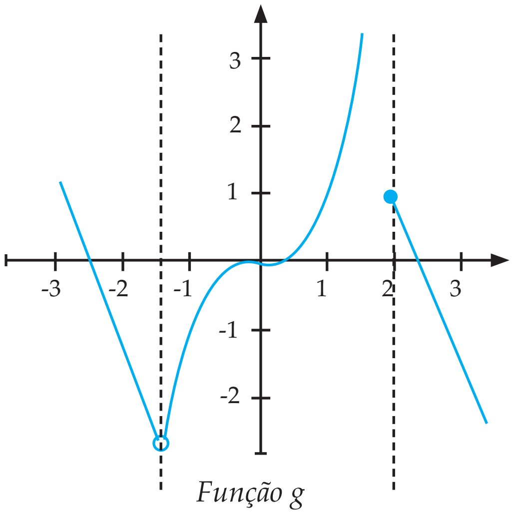
FUNÇÃO CONTÍNUA

Função contínua e descontínua

Observe os gráficos das duas funções a seguir.



Função f



Função g

De um modo intuitivo, somos levados a dizer que a *função f* é contínua se o seu gráfico pode ser desenhado sem levantar o lápis do papel. A *função f* é contínua sempre (sem interrupção). No caso a *função g* é descontínua. Se olharmos a *função f* no intervalo de [-1,1] percebemos que nesse intervalo ela é contínua. O mesmo acontecendo em outros intervalos, como [2,3] e [-2,-3].

Se uma *função f* é contínua em todo ponto de um intervalo aberto (a,b), dizemos que **f é contínua no intervalo** (a,b). Analogamente, diz-se que uma função é **contínua** em um intervalo infinito da forma (a, ∞), (-∞ ,b), ou (-∞, ∞), se é contínua em todo ponto do intervalo.

Propriedades das funções contínuas

Apresentaremos agora algumas propriedades das funções contínuas.

1. Sejam f e g definidas no intervalo [a,b]. Se f e g são contínuas em um ponto x em [a,b], então as funções: f + g, f - g, f • g e f ÷ g com g = g(x) seja não nula, também não contínuas neste mesmo ponto.

2. Se f e g são contínuas no intervalo [a,b] então, o mesmo ocorrerá com as funções: f + g, f - g, f • g e f ÷ g, desde que g = g(x) seja não nula em [a,b].

3. As funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, são contínuas em todos os pontos de seus domínios, os quais podem ser intervalos fechados, semi-abertos, abertos ou infinitos.

4. Seja f contínua em [a,b] e lim(f)=[c,d]. Se f admite inversa g, esta inversa g será contínua em [c,d].

O conceito de continuidade de uma função pode ser dado sem o auxílio de limites. Mas, utilizaremos o conceito de limite para definir, com mais cuidado, a continuidade de uma função.

Definição de uma função contínua

Dizemos que a função **f é contínua em um número a** se, e somente se, as seguintes condições forem válidas:

a) $f(a)$ é definido
b) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Se f não é contínua em *a*, dizemos que é **descontínua** em *a*, ou que tem uma **descontinuidade** em *a*.

Para a função f ser contínua em um ponto *a* é necessário que as três condições ocorram. Isto nos leva a uma caracterização do que significa uma função não ser contínua num intervalo (a,b). Aparentemente as descontinuidades surgem quando o limite da função não existe, ou quando existe mas não coincide com o valor da função naquele ponto.

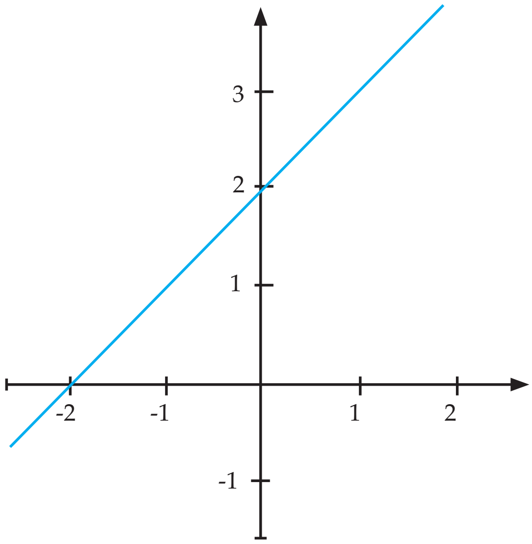
Exemplos.

1. Vamos verificar se a função f é contínua no ponto x=1, sendo f(x) = x+2.

A função f será contínua no ponto x=1, se:

a) Existir o $\lim_{x \to 1} f(x)$;

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$



Encontramos o $\lim_{x \to 1} f(x)$. Isto é, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+2) = 3$

Encontramos o valor de f(1). Sendo f(x) = (x+2), então,
f(1) = (1+2) = 3.

Verificamos se $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$. De fato, $\lim_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$

Logo, a função f(x) dada é contínua no ponto x=1.

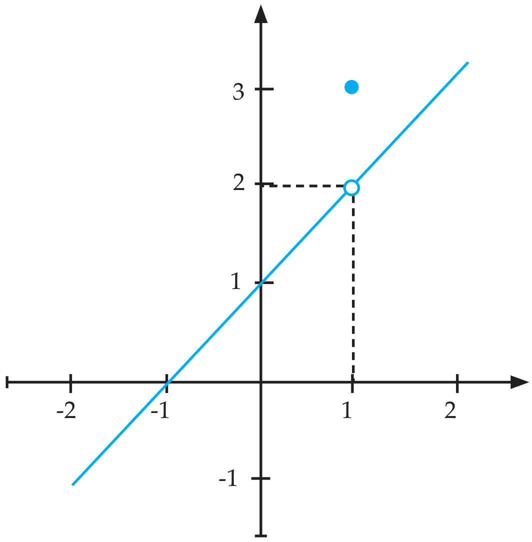
2. Vamos verificar se a função f é contínua no ponto x =1,

sendo $f(x) = \begin{cases} \mathbf{x+1 \text{ se } x \neq 1} \\ \mathbf{3 \text{ se } x = 1} \end{cases}$

A função f será contínua no ponto x =1, se

a) Existir o $\lim_{x \to 1} f(x)$;

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$



Encontramos o $\lim_{x \to 1} f(x)$. Logo, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$

Calculamos a função no ponto x=1. Assim, f(1) =3.

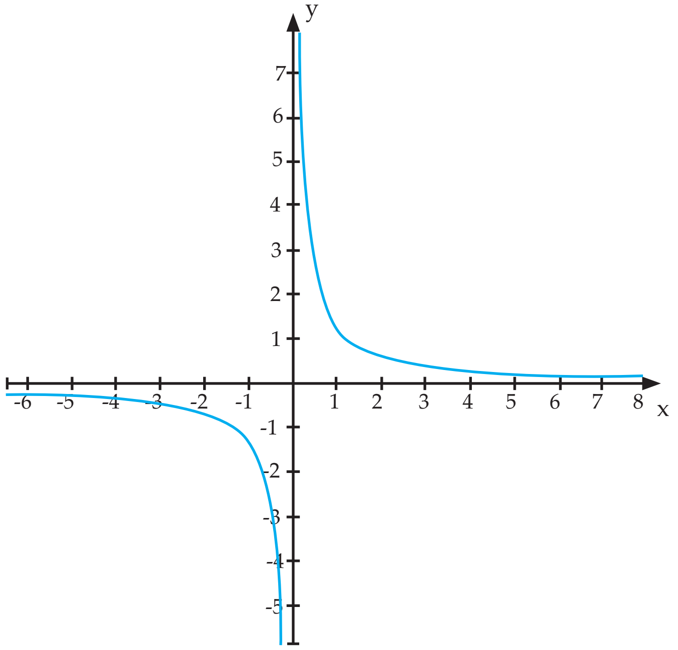
Como $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$, logo a função dada é descontínua no ponto $x = 1$.

3. Vamos verificar se a função f é contínua no ponto x =0, sendo f(x) = 1/x

A função f será contínua no ponto x =0, se:

a) Existir o $\lim_{x \to 0} f(x)$;

b) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$



Encontramos o $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Logo, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 / x) = ???$

Não existe o $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no ponto zero.

Calculamos a função no ponto x=0. Assim, f(0) = ???

A função f(x) = 1 / x não está definida no ponto zero.

Como não existe o $\lim\limits_{x \to 0} 1 / x$ e também não existe o valor da função

no ponto zero , logo a função dada é descontínua no ponto x=0.

Capítulo III

LIMITES LATERAIS

Teorema

O limite $\lim_{x \to a} f(x)$ igual a L se, e somente se , existem e são iguais os limites laterais.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

Ou seja,

• Se x aproxima-se de *a* através de valores maiores que *a*, ou pela sua direita, escrevemos

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L$$

Esse limite é chamado de **limite lateral à direita de a**.

• Se x aproxima-se de *a* através de valores menores que *a*, ou pela sua esquerda, escrevemos

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L$$

Esse limite é chamado de **limite lateral à esquerda de a.**

• O limite de f(x) para $x \to a$ existe se, e somente se, os limites laterais à direita e a esquerda são iguais, ou seja

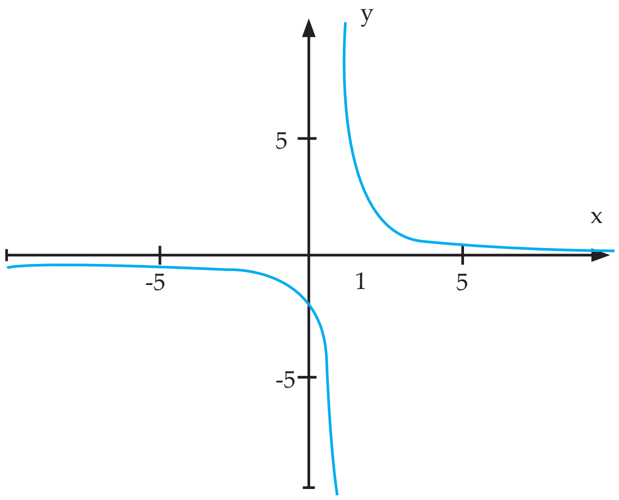
$$\text{se } \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = b\text{, então } \lim_{x \to a} f(x) = b$$

$$\text{se } \lim_{x \to a+} f(x) \neq \lim_{x \to a-} f(x)\text{, então não existe } \lim_{x \to a} f(x)$$

Exemplos.

1. Consideremos a função f(x) = 2/(x-1)

Observemos o gráfico da função f(x) = 2/(x-1) a seguir.



Questionamos:

a) A função está definida no ponto x = 1? Não, para x = 1, y não está definido.

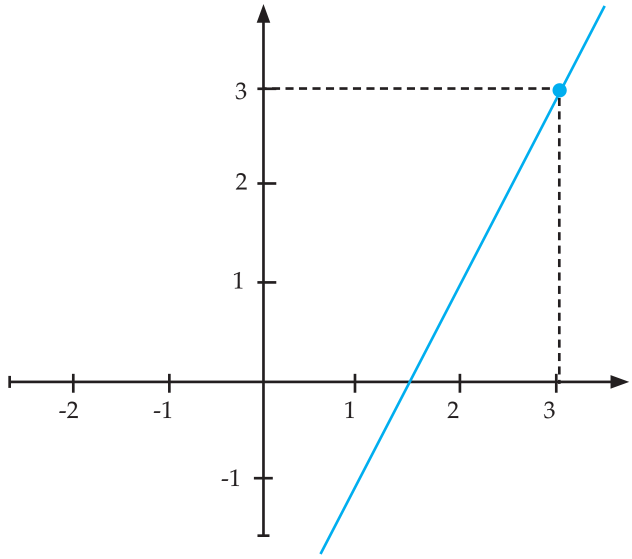
b) Existe o $\lim_{x \to 1} f(x)$? Não, pois $\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$

Os limites laterais assumem valores diferentes.

c) O $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$? Não, pois $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe e f (1) não está

definida. Dizemos que função f(x) = 2/(x -1) é descontínua em x = 1.

Observemos o gráfico da função f(x) = 2x-3 a seguir.



Questionamos:

a) A função está definida no ponto x = 3? Sim, para x = 3, y = 2 . 3 – 3 = 6 – 3 = 3. Isto é, ponto (3,3) pertence a f(x) e f(3) = 3.

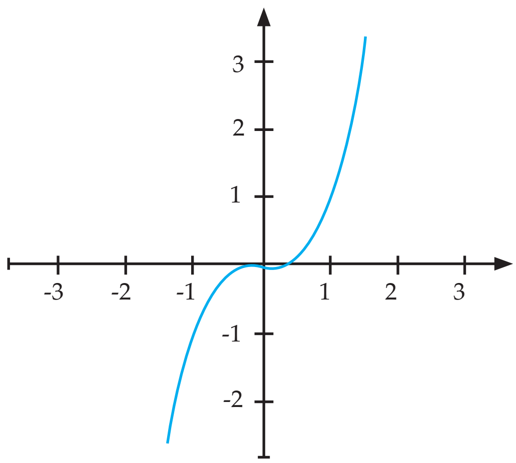
b) Existe o $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$? Sim, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 2x - 3 = 2 . 3 - 3 = 6 - 3 = 3$

c) O $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$? Sim, pois $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3 = f(3)$

Dizemos que função f(x) = 2x -3 é contínua em x = 3.

3. Consideremos a função $f(x) = x^3$

Observemos o gráfico da função $f(x) = x^3$ a seguir.



Questionamos:

a) A função está definida no ponto x = 0? Não, para x = 0, y não está definido.

b) Existe o $\lim_{x \to 0} f(x)$? Não, pois $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$

Os limites laterais assumem valores iguais e $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

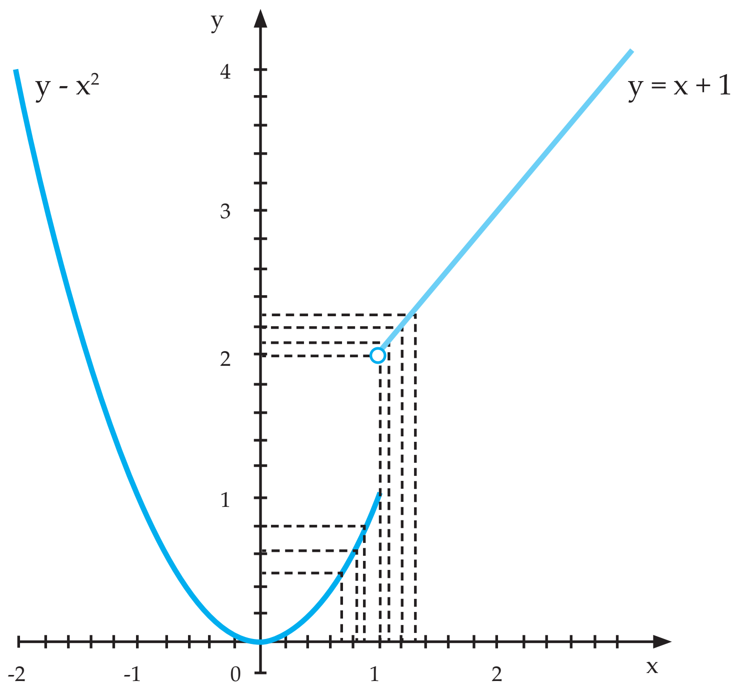
c) O $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$? Sim, pois a $f(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x)$

Dizemos que função $f(x) = x^3$ é contínua em x = 0.

4. Vamos verificar se a função f é contínua no ponto x = 1, sendo

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ se } x \geq 1 \\ x^2 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Observemos o gráfico da função a seguir.



Questionamos:

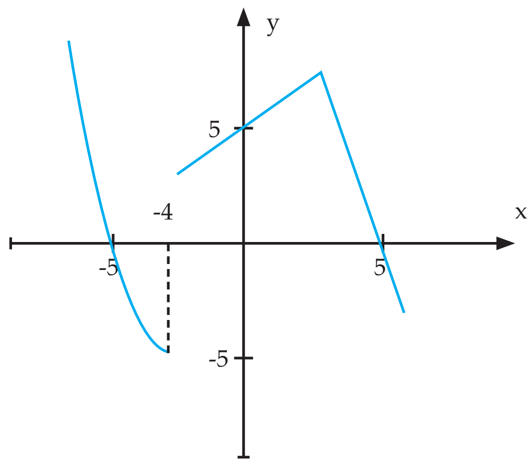
a) A função f será contínua no ponto x=1, se existir o $\lim_{x \to 1} f(x)$ e o $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Encontremos o $\lim_{x \to 1} f(x)$.

A função está definida, à direita e à esquerda de 1 e por expressões diferentes, vamos determinar os limites laterais:

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1-} f(x) = 1$$

Como os limites laterais são diferentes, então não existe o $\lim_{x \to 1} f(x)$. Logo, a função f não é contínua no ponto x = 1.

5. Consideremos a função representada no gráfico a seguir. E responda, qual o valor de cada um dos itens dados.



a) $\lim_{x \to 0+} f(x) = 5$

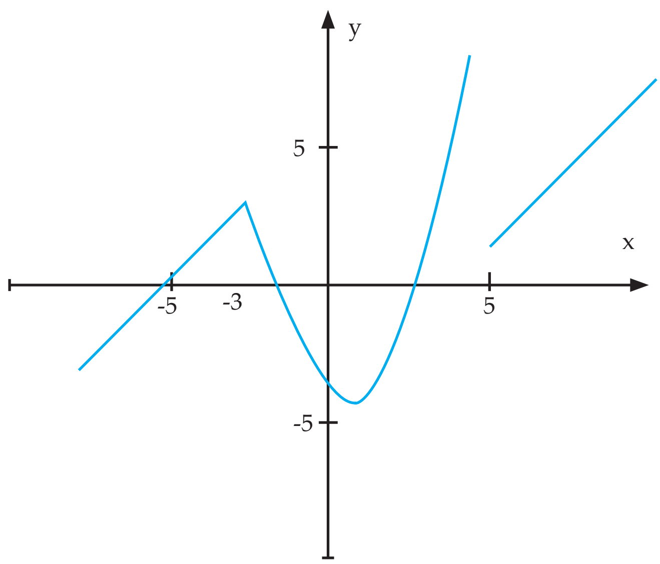
b) $\lim_{x \to 0-} f(x) = 5$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = 5$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

6. Consideremos a função representada pelo gráfico a seguir.



Qual o valor de:

a) $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 3$ b) $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 3$ c) $\lim_{x \to -3} f(x) = 3$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ f) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -4$

g) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -4$ h) $\lim_{x \to 5^+} f(x) = 1$ i) $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 7$

j) $\lim_{x \to 5} f(x) = 1$

7. Dada a função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ ($x \neq 0$), mostrar que não existe o $\lim_{x \to 0} f(x)$

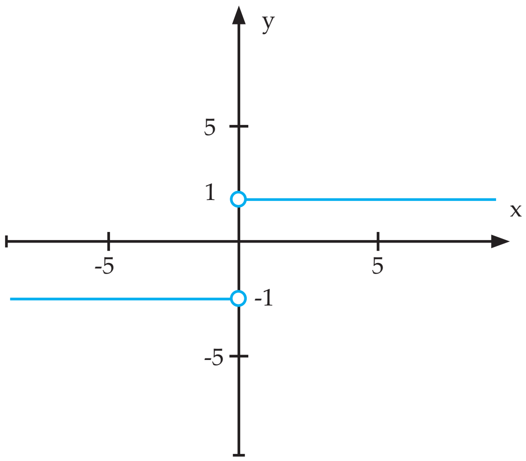
Resolução:

Se $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, então : $f(x) = x / x = 1$
Se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, então: $f(x) = -x / x = -1$

Os limites laterais existem.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$



Como os limites à esquerda e à direita são diferentes, não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Pausa para verificação dos seus conhecimentos

1. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leq 1 \\ 1 \text{ se } x > 1 \end{cases}$

a) f é contínua em 1? Justifique.

b) Faça o gráfico de f(x).

2. Dada $f(x) = \begin{cases} x^9 + 4, \text{ se } x < 1 \\ x^8 - 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

a) f é contínua em 1? Justifique.

b) Faça o gráfico de f(x).

3. Dada $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \leq -2 \\ 3 - x, \text{ se } x > -2 \end{cases}$

a) f é contínua em 1? Justifique.

b) Faça o gráfico de f(x).

4. Dada $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ se } x < 1 \\ 2, \text{ se } x = 1 \\ 7 - 2x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

a) f é contínua em -2? Justifique.

b) Faça o gráfico de f(x).

5. Dada $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 1, \text{ se } x < -\frac{3}{2} \\ 2 - x, \text{ se } x \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$

a) f é contínua em 3 / 2? Justifique.

b) Faça o gráfico de f(x).

6. Dada $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, \text{ se } x < -2 \\ 0, \text{ se } x = -2 \\ 11 - x^2, \text{ se } x > -2 \end{cases}$

a) f é contínua em -2? Justifique.

b) Faça o gráfico de f(x).

7. Dada $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ se } x < 0 \\ 2, \text{ se } x = 0 \\ x + 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

a) f é contínua em 0? Justifique.

b) Faça o gráfico de f(x).

8. Dada $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ 11 + x^2, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

a) f é contínua em 0? Justifique.

b) Faça o gráfico de f(x).

Capítulo IV

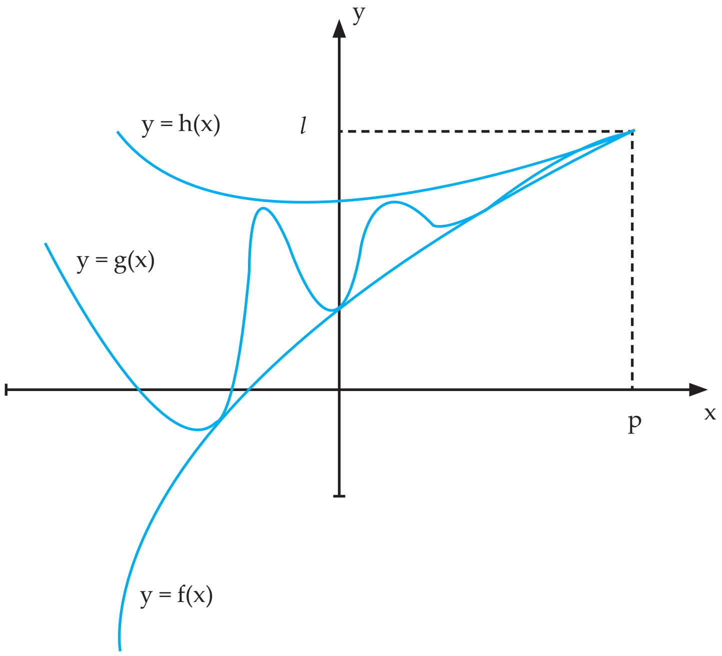
TEOREMAS

Teorema do Confronto

Sejam f, g, h três funções e suponhamos que exista $r > 0$ tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para $0 < |x-p| < r$.

Nestas condições, se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x \to p} h(x) = 1$ então $\lim\limits_{x \to p} g(x) = l$.

Observe o gráfico a seguir.



Observação. Este teorema também é conhecido como o teorema do sanduíche.

Prova. Seja $\varepsilon > 0$ um número qualquer. Como $\lim_{x \to p} f(x) = l$ e $\lim_{x \to p} h(x) = 1$, existem $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ de modo que:

$$x \in A, 0 < | x - a | < \sigma_1 \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$
$$x \in A, 0 < | x - a | < \sigma_2 \Rightarrow l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

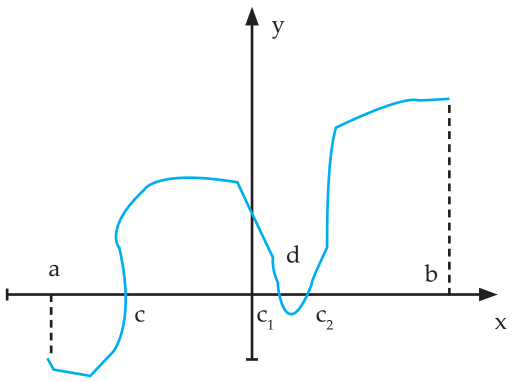
Logo, se $\sigma = mim \{\sigma_1, \sigma_2\} > 0$ e se $x \in A$, a condição $0 < |x - a| < \sigma$ implica:

$$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

donde $| g(x) - l | < \varepsilon$, ou seja, $\lim_{x \to p} g(x) = l$

Teorema do anulamento ou de Bolzano

Se f for contínua no intervalo fechado [a, b] e se f(a) e f(b) tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em [a,b] tal que f(c)=0.



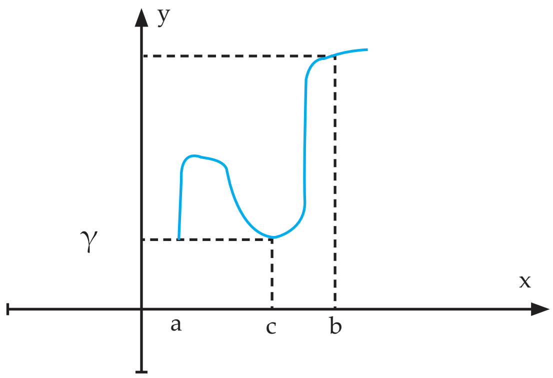
Observe que:

• dentro do intervalo [a, b] existe c em [a,b] tal que f(c) = 0, sendo que f(a) assume valor negativo em x = a e f(b) assume valor positivo em x = b.

• perceba que dentro deste mesmo intervalo temos os pontos c_1 e c_2 que também satisfazem a hipótese e $f(c_1) = 0$ e $f(c_2) = 0$. A tese diz que existirá **pelo menos um** c em [a,b] tal que f(c)=0.

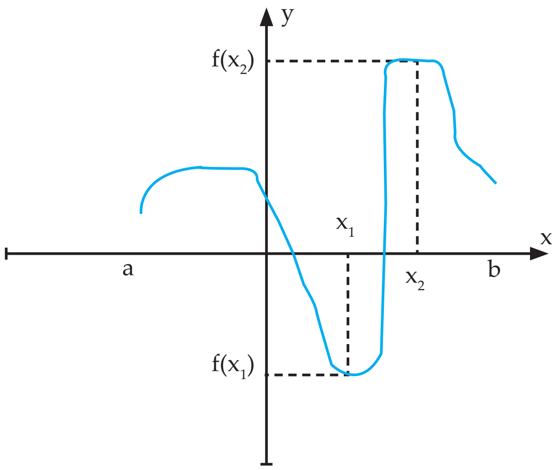
Teorema do valor intermediário

Se f for contínua em [a, b] e se γ for um real compreendido entre f(a) e f(b), então existirá pelo menos um c em [a, b] tal que f(c)= γ.



Teorema de Weierstrass

Se f for contínua em [a, b], então existirão x_1 e x_2 em [a, b] tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em [a, b].



Reescrevendo.

1. Se f for contínua em [a, b], então existirão x_1 e x_2 em [a, b] tais que $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em [a, b] e $f(x_2)$ é o valor máximo de f em [a, b].

2. Se f for contínua em [a, b], então f assumirá em [a, b] valor máximo e valor mínimo.

Observação: O fato de a hipótese de f ser contínua no intervalo fechado [a, b] ser indispensável; por exemplo, $f(x) = 1 / x$, $x \in]0, 1]$, é contínua em]0, 1] mas não assume, neste intervalo, valor máximo.

Pausa para verificação dos seus conhecimentos

a) Seja f uma função e suponha que para todo x, $|f(x)| \leq x^2$. Calcule, caso exista, $\lim_{x \to 0} f(x)$.

b) Sejam f e g duas funções com mesmo domínio A, tais que $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$ para todo x em A, com M > 0 um número real fixo. Prove que $\lim_{x \to p} f(x)\,g(x) = 0$

c) Calcule $\lim_{x \to 0} x^2 g(x)$, com $g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in Q \\ -1, \text{ se } x \notin Q \end{cases}$

d) Mostre que a equação $x^3 - 4x + 8 = 0$ admite pelo menos uma raiz real.

e) Seja $f(x) = x^5 + x + 1$. Justifique a afirmação: f tem pelo menos uma raiz no intervalo [-1,0].

f) Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais distintas.

g) Prove que a equação $x^3 - \dfrac{1}{1+x^4} = 0$ admite ao menos uma raiz real.

h) Prove que cada um dos conjuntos abaixo admite máximo e mínimo.

a) $A = \left\{ \dfrac{x}{1+x^2} / -2 \leq x \leq 2 \right\}$ b) $A = \left\{ \dfrac{x^2+x}{1+x^2} / -1 \leq x \leq 1 \right\}$

c) $A = \left\{ x^2 + \dfrac{1}{x} / \dfrac{1}{2} \leq x \leq 2 \right\}$

i) Seja f: $[-1, 1] \to R$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2+x}{1+x^2} = 0$.

Prove que f(1) é o valor máximo de f e que existe $x_1 \in \,]-1, 0[$ tal que $f(x_1)$ é o valor mínimo de f.

j) Prove que todo polinômio de grau 3 admite pelo menos uma raiz real.

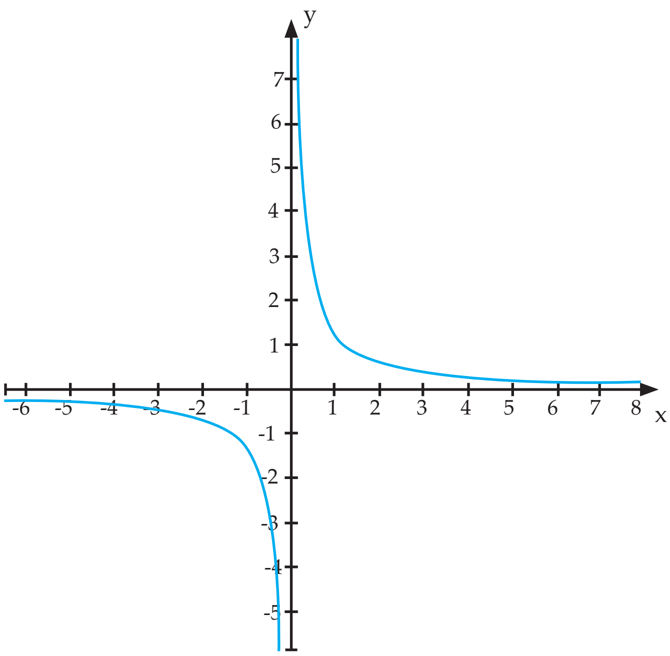
k) Prove que todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

Capítulo V

LIMITES ENVOLVENDO INFINITO

A expressão $x \to \infty$ (x tende para infinito) significa que x assume valores superiores a qualquer número real e $x \to -\infty$ (x tende para menos infinitos), da mesma forma, indica que x assume valores menores que qualquer número real.

Exemplo 1.



Observe o gráfico dado e perceba as considerações a seguir.

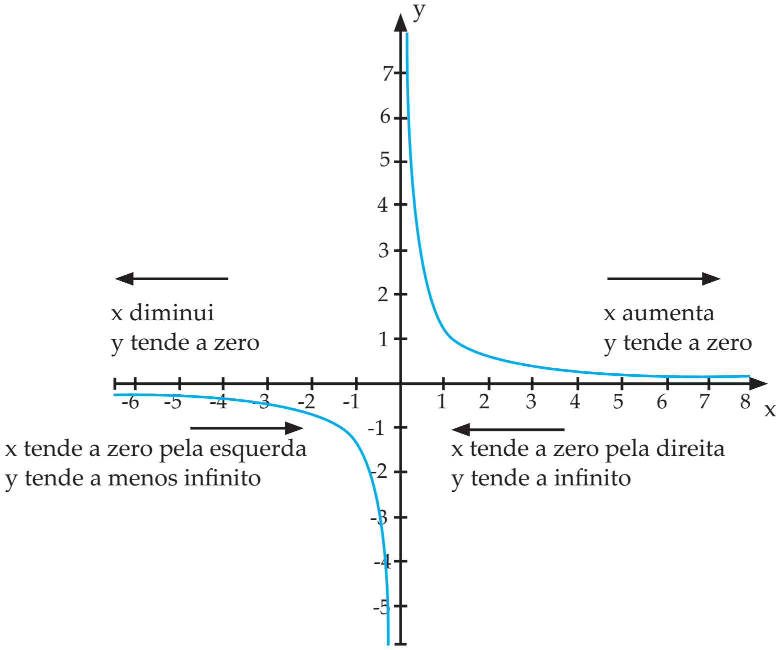
a) $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$, ou seja, à medida que x aumenta, y tende para zero e o limite é zero.

b) $\lim_{x \to -\infty} 1/x = 0$, ou seja, à medida que x diminui, y tende para zero e o limite é zero.

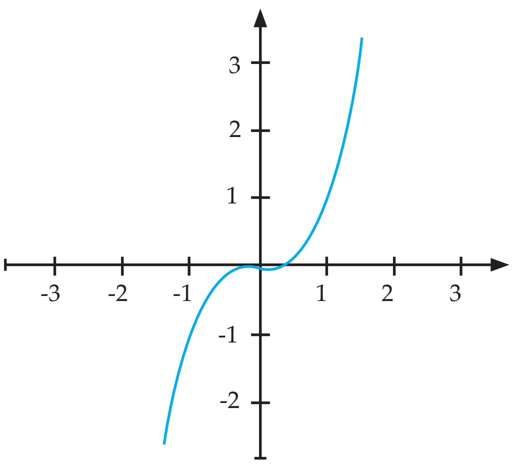
c) $\lim_{x \to 0+} 1/x = \infty$, ou seja, quando x se aproxima de zero pela direita ($x \to 0+$) ou por valores maiores que zero, y tende para o infinito e o limite é infinito.

d) $\lim_{x \to 0-} 1/x = -\infty$, ou seja, quando x tende para zero pela esquerda ($x \to 0-$) ou por valores menores que zero, y tende para menos infinito

Observe as considerações feitas anteriormente no gráfico a seguir.



Exemplo 2.



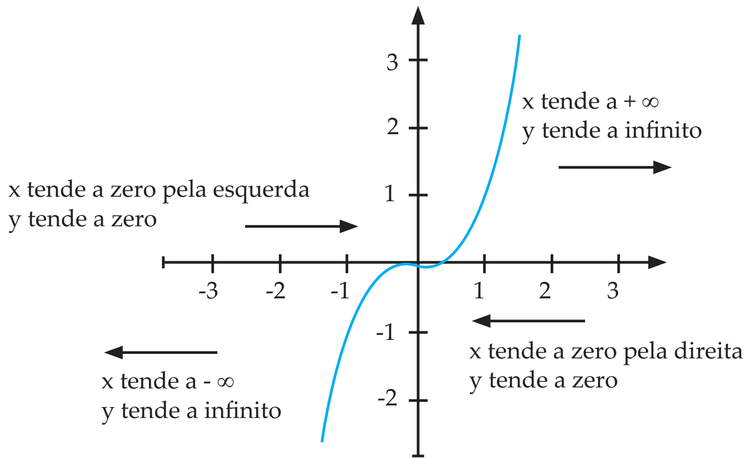
Observe o gráfico dado e perceba as considerações a seguir.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$, ou seja, à medida que x aumenta, y tende para infinito e o limite é infinito.

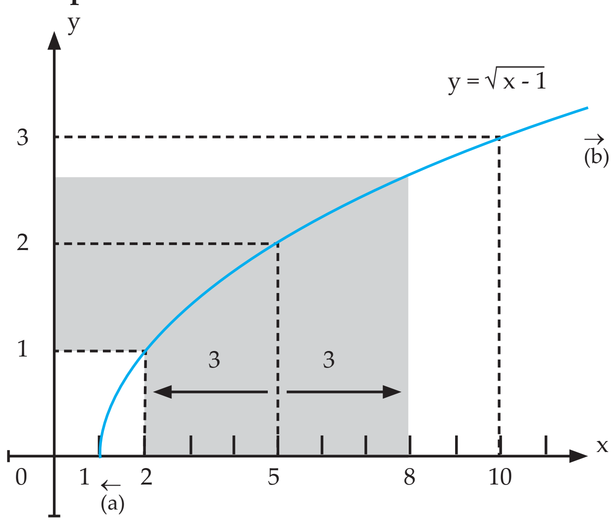
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$, ou seja, à medida que x diminui, y tende para menos infinito e o limite é menos infinito.

c) $\lim\limits_{x \to 0+} x^3$, ou seja, quando x se aproxima de zero pela direita ($x \to 0+$) ou y tende para o zero.

d) $\lim\limits_{x \to 0-} x^3$, ou seja, quando x se aproxima de zero pela esquerda de zero ($x \to 0-$) ou por valores menores que zero, y tende para o zero.



Exemplo 3.



(a) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 0$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Observe o gráfico dado e perceba as considerações a seguir.

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, ou seja, à medida que x aumenta, y tende para infinito e o limite é infinito.

b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$, ou seja, à medida que x se aproxima de 1 pela direita, y tende a zero e o limite é zero.

c) $\lim_{x \to 5^+} f(x)$, ou seja, à medida que x tende a cinco pela direita, y tende para dois e o limite é dois.

d) $\lim_{x \to 5^-} f(x)$, ou seja, à medida que x tende a cinco pela esquerda, y tende para dois e o limite é dois.

e) Podemos dizer que o $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^-} f(x) = 2$

Pausa para verificação dos seus conhecimentos

1) Para a função f (x) = x^3, em R. Calcule os valores dos limites:

a) $\lim_{x \to 1} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 0} f(x) =$

c) $\lim_{x \to -1/2} f(x) =$

d) $\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) =$

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

2) Determine os valores de:

a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4) / (x - 2) =$

b) $\lim_{x \to 1} (1 - x^2) / 1 - x =$

c) $\lim_{x \to -1} (x^4 - 1) / (x^2 - 1) =$

d) $\lim_{x \to 1} (x^3 - 1) / (x - 1) =$

e) $\lim_{x \to 0} (x^3 - x) / (x^2 + x) =$

f) $\lim_{x \to 1} (2x^2 - 3x + 1) / (3x^2 + 2x - 1) =$

Capítulo VI

LIMITE DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL

Teorema 2. Os limites de Funções Polinomiais podem ser obtidos por substituição:

Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$

então

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_2 c^2 + a_1 c^1 + a_0$$

Exemplos.

1. Para f (x) = x + 4, calcule o $\lim_{x \to 0} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 + 4 = 4$$

2. Para f (x) = $x^3 - x^2 - 4x + 4$, calcule o $\lim_{x \to 0} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = (0)^3 - 0^2 - 4 \,.\, 0 + 4 = 4$$

3. Para f (x) = $2x^2 - 3x^2 - 5$, calcule o $\lim_{x \to 1} f(x)$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2(1)^2 - 3(1)^2 - 5 = 2 - 3 - 5 = -6$$

4. Para f (x) = $| 2x^2 - 3x^2 - 5 |$, calcule o $\lim_{x \to 1} |f(x)|$.

$$\lim_{x \to 1} |f(x)| = |2(1)^2 - 3(1)^2 - 5| = |2 - 3 - 5| = |-6| = 6$$

Limite de uma função polinomial para $x \to \infty$

Seja a função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, então: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$.

Demonstração:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x^1} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

Mas

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_{n-1}}{x^1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_{n-2}}{x^2} = \ldots = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0}{x^n} = 0$$

Logo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_o x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \right) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

De forma análoga, para $g(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$, temos

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemplos.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 + x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2) = +\infty$ (usando o resultado acima)

ou

$$\lim_{x \to +\infty} (2x^2 + x - 3) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = \infty$$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^3 + 4x^2 - 3x + 5 \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} \left(3x^3 + 4x^2 - 3x + 5 \right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(3 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) = -\infty$$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^4 + 4x^2 - 3x + 5}{2x^3} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4}{2x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{2} = +\infty$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^4 + 4x^2 - 3x + 5}{2x^3} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{2}x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{5}{x^3} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2}x = +\infty$$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^4 + 6x^2 - 4x + 2}{2x^3} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^4 + 6x^2 - 4x + 2}{2x^3} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^4}{2x^3} + \frac{6x^2}{2x^3} - \frac{4x}{2x^3} + \frac{2}{2x^3} \right) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$$

Casos de indeterminações

Indeterminações na **soma** são indicadas pelo símbolo $\infty - \infty$.
Indeterminações no **produto** são indicados pelo símbolo $0 \,.\, \infty$.
Indeterminações do **quociente** são indicadas pelo símbolo $0/0$, ∞/∞.

Resultados

$\alpha + \infty = +\infty$	$+\infty + \infty = +\infty$
$\alpha - \infty = -\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$
$(+\infty)(+\infty) = +\infty$	$(-\infty)(-\infty) = +\infty$
$(+\infty)(-\infty) = -\infty$	$(-\infty)(+\infty) = -\infty$
$\alpha(+\infty) = +\infty$ se $a > 0$	$\alpha(-\infty) = -\infty$ se $a > 0$
$\alpha(+\infty) = -\infty$ se $a < 0$	$\alpha(+\infty) = +\infty$ se $a < 0$
$(\alpha)/(+\infty) = 0$	$(\alpha)/(-\infty) = 0$
$(+\infty)/b = +\infty$ se $b > 0$	$(-\infty)/b = -\infty$ se $b > 0$
$(-\infty)/b = -\infty$ se $b < 0$	$(+\infty)/b = +\infty$ se $b < 0$
$a/0+ = +\infty$ se $a > 0$	$a/0- = -\infty$ se $a > 0$
$a/0+ = -\infty$ se $a < 0$	$a/0- = +\infty$ se $a < 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ se n for par
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ se n for par	
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ se $a > 1$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ se $0 < a < 1$
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ se $a > 1$	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$
$\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = -\infty$ se $a > 1$	$\lim\limits_{x \to 0-} \log_a x = +\infty$ se $0 < a < 1$

Exemplos envolvendo indeterminações

Indeterminações do tipo x/0

Exemplos.

1. Como calcular o $\lim_{x \to 0} 1/x = 1/0$???

A função está definida para todo $x \neq 0$. Logo, ela tem problema no zero. Vamos calcular o limite à direita e à esquerda do zero.

$$\lim_{x \to 0+} 1/x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0-} 1/x = -\infty$$

Como os limites laterais são diferentes, podemos concluir que não existe o $\lim_{x \to 0} 1/x$.

2. Como calcular o $\lim_{x \to 3} \frac{2}{3-x} = 2/0$???

A função está definida para todo $x \neq 3$. Vamos calcular o limite à direita e à esquerda do três.

$$\lim_{x \to 3+} \frac{2}{3-x} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 3-} \frac{2}{3-x} = +\infty$$

Como os limites laterais são diferentes, podemos concluir que não existe o $\lim_{x \to 3} \frac{2}{3-x}$

3. Como calcular o $\lim_{x \to -3} \left(\frac{2}{-3-x} \right) = 2/0$???

A função está definida para todo $x \neq -3$. Vamos calcular o limite à direita e à esquerda do (-3).

$$\lim_{x \to -3+} \left(\frac{2}{-3-x} \right) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -3-} \left(\frac{2}{-3-x} \right) = -\infty$$

Como os limites laterais são diferentes, podemos concluir que não

existe o $\lim_{x \to -3} \left(\frac{2}{-3-x} \right)$.

Indeterminações do tipo 0/0

Exemplos.

1. Como calcular o $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x}{x} = 0/0$???

A função está definida para todo x ≠ 0. Saímos da indeterminação, reescrevendo a função:

$$f(x) = \frac{x^3+x}{x} \text{, isto é, } f(x) = \frac{x^3+x}{x} = \frac{x(x^2+1)}{x} = (x^2+1)$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x^2+1) = 0+1=1$

2. Como calcular o $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x^2-x} = 0/0$???

A função está definida para todo x ≠ 0. Saímos da indeterminação, reescrevendo a função:

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-x} =\text{, isto é, } f(x) = \frac{2x-2}{x^2-x} = \frac{2(x-1)}{x(x-1)} = \frac{2}{x}$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1} 2/x = 2$

Indeterminações do tipo ∞/∞

1. Como calcular o $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^7-2x^4+1}{2x^7-x^5+9} = \infty/\infty$???

Para sairmos dessa indeterminação, como a maior potência do numerador é x^7, vamos multiplicar e dividir por x^7 o numerador. Como a maior potência do denominador é x^7, vamos multiplicar e dividir por x^7 o numerador.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^7}{x^7} \frac{\left(\dfrac{x^7-2x^4+1}{x^7}\right)}{\left(\dfrac{2x^7-x^5+9}{x^7}\right)} = \lim_{x\to +\infty} 1.\left(\frac{\dfrac{x^7}{x^7} - \dfrac{2x^4}{x^7} + \dfrac{1}{x^7}}{\dfrac{2x^7}{x^7} - \dfrac{x^5}{x^7} + \dfrac{9}{x^7}}\right) =$$

0 0

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1-\dfrac{2}{x3}+\dfrac{1}{x^7}\right)}{\left(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{9}{x^7}\right)} = \frac{1}{2}$$

0 0

2. Como calcular o $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^7 - x^4 + 1}{2x^4 - x^3 + 4} = \infty / \infty$???

Para sairmos dessa indeterminação, como a maior potência do numerador é x^7, vamos multiplicar e dividir por x^7 o numerador. Como a maior potência do denominador é x^4, vamos multiplicar e dividir por x^4 o numerador.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^7}{x^4} \frac{\left(\dfrac{3x^7 - x^4 + 1}{x^7}\right)}{\left(\dfrac{2x^4 - x^3 + 4}{x^4}\right)} = \lim_{x\to +\infty} x^3 \frac{\left(\dfrac{3x^7}{x^7} - \dfrac{x^4}{x^7} + \dfrac{1}{x^7}\right)}{\left(\dfrac{2x^4}{x^4} - \dfrac{x^3}{x^4} + \dfrac{4}{x^4}\right)} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^3 \left(\frac{3 - \overset{\nearrow 0}{\dfrac{1}{x^3}} + \overset{\nearrow 0}{\dfrac{1}{x^7}}}{2 - \underset{\swarrow 0}{\dfrac{1}{x^3}} + \underset{\swarrow 0}{\dfrac{4}{x^4}}}\right) = \infty . \frac{3}{2} = \infty$$

3. Como calcular o $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{9x^8 - 2x^4 + 1}{2x^{10} - 3} = \infty / \infty$???

Para sairmos dessa indeterminação, como a maior potência do numerador é x^8, vamos multiplicar e dividir por x^8 o numerador. Como a maior potência do denominador é x^{10}, vamos multiplicar e dividir por x^{10} o numerador.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^8}{x^{10}} \frac{\left(\dfrac{9x^8 - 2x^4 + 1}{x^8}\right)}{\left(\dfrac{2x^{10} - 3}{x^{10}}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} \frac{\left(9 - \dfrac{2}{x^4} + \dfrac{1}{x^8}\right)}{\left(2 - \dfrac{3}{x^{10}}\right)} = 0 . 9 / 2 = 0$$

Parada para verificação dos seus conhecimentos

1. Calcule, caso existam, os limites abaixo indicados:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt[7]{\dfrac{x^2 - 4}{x + 2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x^{13} + 3x^6 - 2x^3 + 2}{5x^4 - x^2 - 4}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^9 + 2x^4 - 9}{x^{12} + 2}$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{|5-x|}$

e) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^7}{x^7-3}\right)^{12}$

g) $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} 2x^3, \text{ se } x \leq 3 \\ 7, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^9 + x^5 + 1}{x^9 - 4}$

i) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^5 + 8x - 1}{x^7 + 3x + 1}\right)^7$

k) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{2x+5}{x^2-1}$

l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{9x^8 - 2x^4 + 1}{2x^{10} - 3}$

m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+4}{|x+4|}$

n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{\sqrt[6]{x}}$

o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x^5 - 3x + 1}{x^5 - 1}}$

p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^8 - 2x^4 + 1}{2x^8 - x^5 + 9}$

q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{3 + \dfrac{5}{x}}$

r) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2 + x + 6x^4 + x^5)$

s) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+2}{x-3}$

t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+7}$

u) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+2}+x}{2x-3}$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x - \sqrt{x^2+9}$

w) $\lim\limits_{x\to -2+} \dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$

x) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{2+x}{x}$

y) $\lim\limits_{x\to -1-} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

z) $\lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{2}{3-x}$

Capítulo VII

LIMITES TRIGONOMÉTRICOS

Seria interessante você rever os conceitos de trigonometria e de funções trigonométricas, eles estão no Capítulo sobre Trigonometria e Funções trigonométricas do livro de Fundamentos de Matemática Elementar.

Exemplos.

1. Calcular o seguinte limite $\lim\limits_{x\to 0} sen\, x$.

$$\lim_{x\to 0} sen\, x = sen\, 0 = 0$$

2. Calcular o seguinte limite $\lim\limits_{x\to 0} cos\, x$.

$$\lim_{x\to 0} cos\, x = cos\, 0 = 1$$

3. Calcular o seguinte limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} cos\, x} = \frac{1}{1} = 1$$

4. Temos a seguinte igualdade $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx}{x} = 1$, que pode ser verificada usando o teorema do sanduíche.

Para $x \to 0+$, temos $\text{sen } x < x < \text{tg } x$. Dividindo a dupla desigualdade por $\text{sen } x > 0$, temos:

$$1 < \frac{x}{sen\, x} < \frac{tg\, x}{sen\, x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{sen\, x} < \frac{1}{\cos x}$$

Invertendo, temos: $1 > \dfrac{sen\ x}{x} > \cos x$

Mas,

$\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 = \lim\limits_{x \to 0} \cos x$

$g(x) < f(x) < h(x)$ são funções contínuas e se $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$

então $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, logo $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x} = 1$

Considerando o resultado anterior como válido, vamos resolver os próximos limites.

5. Calcular o seguinte limite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen5x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen5x}{x} = 0/0$. Indetermincação.

Fazendo t = 5x $\Rightarrow$ x= t/5, mas quando $x \to 0$, $t \to 0$. Trocando de variável, temos

$$\lim_{t \to 0} \frac{sent}{t/5} = \lim_{t \to 0} \frac{sent}{t} \cdot \frac{5}{1} = \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{sent}{t}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{5}{1}}_{5} = 5$$

Logo, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen5x}{x} = 5$

6. Calcular o seguinte limite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen5x}{sen9x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen5x}{sen9x} = 0/0$. Indeterminação.

Fazendo t = 5x x= t/5 para o numerador e fazendo t = 9x $\Rightarrow$ x= t/9 para o denominador. Para ambos os casos quando $x \to 0$, $t \to 0$. Trocando de variável e fazendo as substituições necessárias, temos

$$\frac{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{sent}{t/5}}{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{sent}{t/9}} = \frac{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{sent}{t} \cdot \dfrac{5}{1}}{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{sent}{t} \cdot \dfrac{9}{1}} = \frac{\overbrace{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{sent}{t}}^{1} \cdot \overbrace{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{5}{1}}^{5}}{\underbrace{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{sent}{t}}_{1} \cdot \underbrace{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{9}{1}}_{9}} = 5/9$$

Logo, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen5x}{sen9x} = 5/9$

Parada para verificação dos seus conhecimentos

Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(x)}{x} =$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{senx} =$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(3x)}{x} =$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{senx} =$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3}{tgx\ senx} =$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,(3x)}{sen\,4x} =$

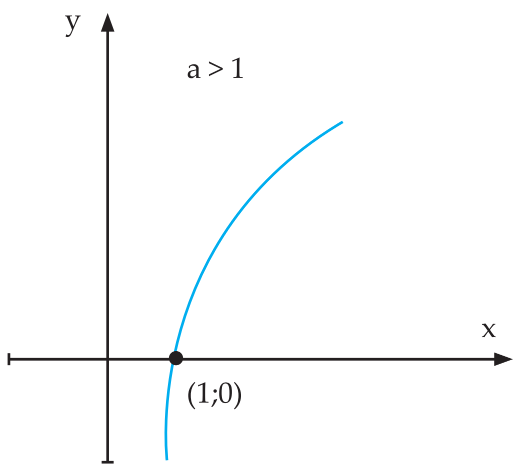
g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos}{x} =$ h) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1 - senx}{2x - \pi} =$

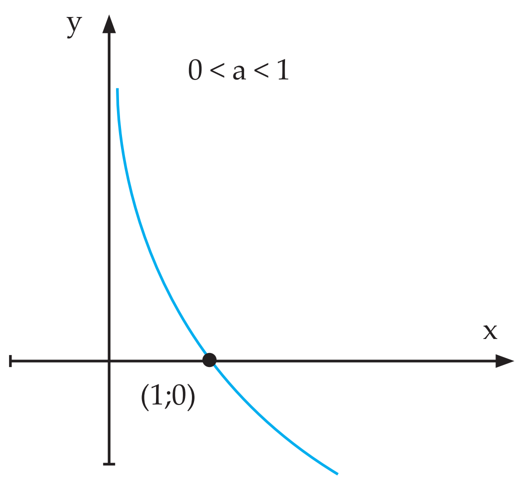
Casos especiais

Seria interessante você rever os conceitos e as propriedades de logaritmo e exponencial, bem como de função exponencial e logarítmica. Este conteúdo está no Capítulo sobre exponencial e logaritmo do livro de Fundamentos de Matemática Elementar.

Exemplos.

1. Analisando o gráfico da função $y = \log_a x$.



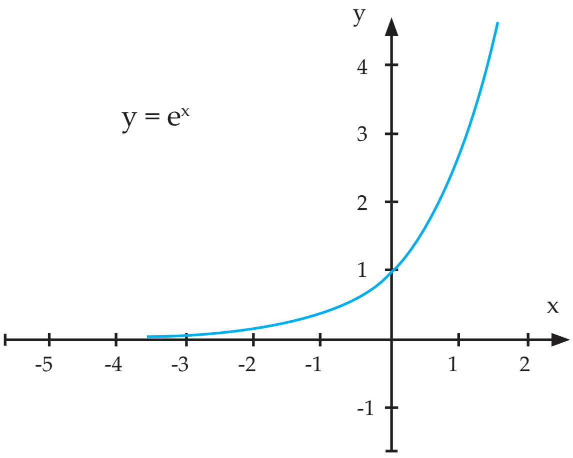


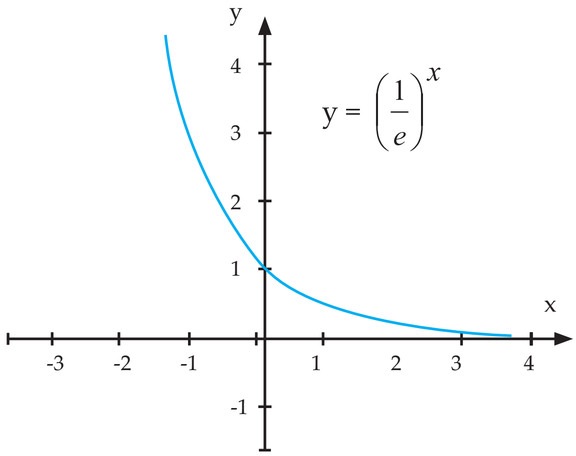
Obtemos:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty\ (a > 1)$ $\lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty\ (a > 1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = -\infty\ (0 < a < 1)$ $\lim\limits_{x \to 0} \log x = +\infty\ (0 < a < 1)$

2.Analisando o gráfico da função y = e^x e da função y = $\left(\frac{1}{e}\right)^x$





Obtemos

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 \quad e \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e}\right)^x = \left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^x = e^\infty = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x = \left(\frac{1}{e}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = e^{-\infty} = \left(\frac{1}{e}\right)^\infty = \frac{1}{e^\infty} = 0 \quad e \quad \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x = \left(\frac{1}{e}\right)^{-\infty} = e^\infty = \infty$$

3. A seguinte igualdade é válida $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Neste caso, e representa a base dos logaritmos naturais ou *neperianos*. Trata-se do número irracional e cujo valor aproximado é 2,7182818.

Vamos atribuir valores para x e obter o valor de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Para x = 1 temos $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

Para x = 3 temos $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2,3703$

Para x= 100 temos $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048$

Para x= 1000 temos $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7169$

Notamos que à medida que $x \to \infty$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \to e$

De forma análoga, efetuando a substituição $\frac{1}{x} = y$ e $x = \frac{1}{y}$, temos

$\lim\limits_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$. Ainda, de forma mais geral, temos $\lim\limits_{y \to 0} (1+k\,y)^{\frac{l}{y}} = e^{k\,l}$

ou $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{k} = e^{k\,l}$

Qualquer uma das duas formas dá a solução imediata a exercícios deste tipo e evitam substituições algébricas.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = \ln a$$

Se fizermos $a^x - 1 = u \Rightarrow a^x = 1 + u$. Aplicando ln de ambos os lados desta equação, temos

$$ax = 1 + u \underbrace{\Rightarrow}_{\text{aplicando ln de ambos os lados}} \ln a^x = \ln(1+u) \Rightarrow x.\ln a = \ln(1+u) \Rightarrow x = \frac{\ln(1+u)}{\ln a}$$

Logo: $$\frac{a^{x}-1}{x} = \frac{u}{\frac{\ln(1+u)}{\ln a}} = \frac{u.\ln a}{\ln(1+u)} = \frac{\ln a}{\frac{1}{u}.\ln(1+u)} = \frac{\ln a}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

Como $x \to 0$, então $u \to 0$. Portanto,

$$\lim_{x \to o} \frac{a^{x}-1}{x} = \lim_{u \to o} \frac{\ln a}{\frac{1}{u}.\ln(1+u)} = \lim_{u \to o} \frac{\ln a}{\ln \underbrace{(1+u)^{\frac{1}{u}}}_{e}} = \lim_{u \to o} \frac{\ln a}{\underbrace{\ln e}_{1}} = \ln a$$

Generalizando, temos $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^{k\,x}-1}{x} = k.\ln a$ e $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

Limites fundamentais

Sabendo-se que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a\ (a>0,\ a\neq 1) \qquad \lim_{n\to+\infty}a^{n}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^{n}=+\infty,\ \text{onde } 0<b<1$$

1. Calcule.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-3}{n+1}=$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+3)=$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n}=$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+2}{2n^3+n-1}=$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{2}{n}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n}\right]=$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1+5^{n}}{2+3^{n}}\right]=$

2. Calcule.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+2}=$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}=$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}=$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x}=$

f) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{x}=$

g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=$

3. Calcule.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{x}=$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}5^{x}=$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x =$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}13)^x =$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} | 2^x + 3^x | =$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - 2^x}{1 - 3^x} =$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} =$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} | 2^x + 2^{-x} | =$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x} =$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} | 2^x + 2^{-x} | =$

4. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x} =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 1}{x} =$

d) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{3^x - 1}{x^2} =$

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Módulo 2

DERIVADA

Henrique Mongelli
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

Capítulo I

INTRODUÇÃO: ORIGEM DO CONCEITO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

O conceito de função, que hoje pode parecer simples, é o resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na Antiguidade.

Só no século XVII, quando Descartes e Pierre Fermat introduziram as coordenadas cartesianas, tornou-se possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudar analiticamente funções. Por outro lado, a introdução de coordenadas, além de facilitar o estudo de curvas já conhecidas, permitiu a "criação" de novas curvas, imagens geométricas de funções definidas por relações entre variáveis.

Foi enquanto dedicava-se ao estudo de algumas destas funções que Fermat percebeu as limitações do conceito clássico de reta tangente a uma curva como sendo aquela que encontrava a curva num único ponto. Tornou-se, assim, importante reformular tal conceito e encontrar um processo de traçar uma tangente a um gráfico num dado ponto - esta dificuldade ficou conhecida na História da Matemática como o "Problema da Tangente".

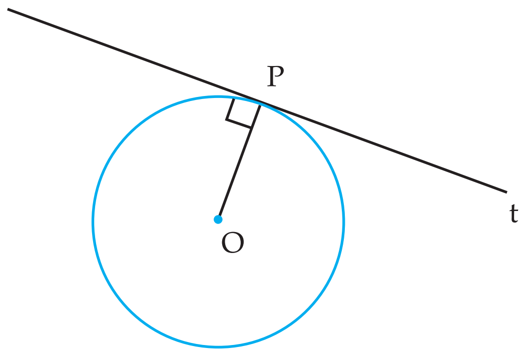
Estas idéias constituíram o embrião do conceito de DERIVADA e levaram Laplace a considerar Fermat "o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial". Contudo, Fermat não dispunha de notação apropriada e o conceito de limite não estava ainda claramente definido.

No século XVII, Leibniz algebriza o Cálculo Infinitesimal, introduzindo os conceitos de variável, constante e parâmetro, bem como a notação dx e dy para designar "a menor possível das diferenças em x e em y”. Desta notação surge o nome do ramo da Matemática conhecido hoje como "Cálculo Diferencial."

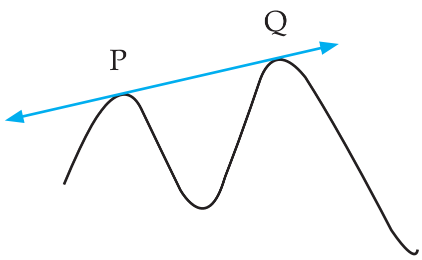
Idéia de derivada

O principal conceito sobre derivadas foi introduzido por Newton e Leibniz, no século XVIII e está relacionado com a noção de reta tangente a uma curva no plano. Precisamos recordar a definição de reta tangente em um ponto P de uma circunferência

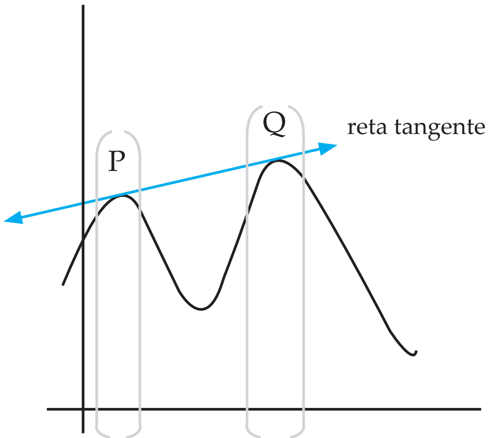
A reta tangente em um ponto P de uma circunferência é uma reta que toca a circunferência em exatamente um ponto P e é perpendicular ao segmento $\overline{OP}$ (raio). Veja a figura a seguir.



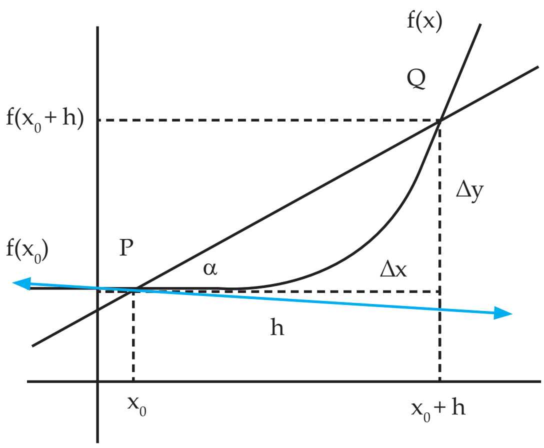
Mas cuidado!!!
É possível passar a reta tangente a uma curva qualquer?
Vamos pensar.



A resposta é sim. Na figura podemos dizer que a reta é tangente à curva no ponto P, mas a mesma reta também é tangente à curva no ponto Q. Nosso problema recai em determinar a reta tangente ao gráfico de uma função passando por um ponto P da função. Observe no gráfico a seguir, a reta tangente à curva no ponto P.



No exemplo anterior, temos a reta tangente à curva passando por dois pontos P e Q. O que nos interessa é a reta tangente que contém o ponto P (ou Q) e que "melhor aproxima" o gráfico da função nas vizinhanças deste ponto. Perceba que a reta tangente pode ser determinada por seu coeficiente angular e pelo ponto de tangência.



Consideremos a reta secante à curva y = f(x) que passa pelos pontos P e Q, em que as coordenadas de P e Q são $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_0+h, f(x_0+h))$ e h é o deslocamento no eixo das abscissas, ocorrido do ponto P ao ponto Q. A inclinação (coeficiente angular) desta reta é por:

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Desejamos passar a reta tangente à curva y = f(x) pelo ponto P. Fazendo o ponto Q tender ao ponto P, "de ambos os lados", ou x tender a x_0 pela esquerda e pela direita, e se o coeficiente angular da secante, tender a um limite L (número real), teremos o coeficiente angular de uma reta pelo ponto P = (x_0, f(x_0)), que chamamos de reta tangente.

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

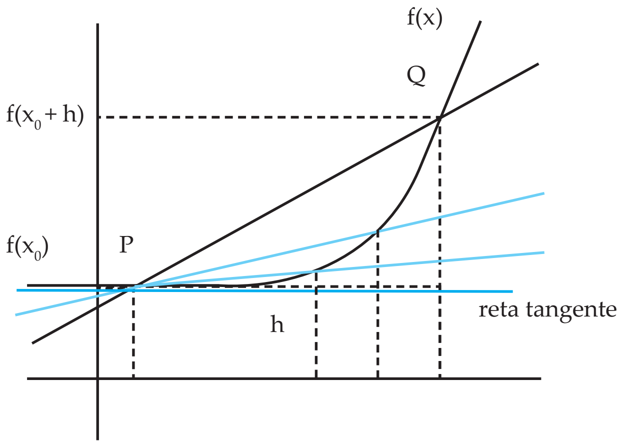
ou

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definições

Reta tangente ao gráfico de uma função num ponto

Definimos então a reta tangente ao gráfico de f no ponto P, como sendo aquela que passa por P e cuja declividade (coeficiente angular da reta) é igual a L.



Denominamos derivada da função f no ponto x_0 e escrevemos

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Observação. Se tal limite não existe, dizemos que não existe a derivada de f em x_0. Se a função tem derivada em um ponto, dizemos que f é derivável (ou diferenciável) neste ponto.

Equação da reta tangente é: $\mathbf{y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)}$.

Notações para a derivada: f'(x), y', $\dfrac{dy}{dx}$

Suponha que a função f seja contínua em x_1. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é

i) A reta que passa por P tendo inclinação $L(x_0)$ dada por

$$L(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se o limite existe.

ii) a reta $x = x_0$ se

$$L(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$$

Se nem i) nem ii) da definição acima estão satisfeitas, então não há reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$.

Definição de derivada de uma função

A derivada de uma função f é aquela função f, denotada por f', tal que seu valor em todo número x do domínio de f seja dado por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Se este limite existe.

Observação: Perceba que a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é precisamente a derivada de f calculada em x_0.

Derivadas Laterais

Como a derivada de uma função f em um ponto x_0 é um caso particular de limite, então tem sentido calcular os limites laterais em x_0. Quando tais limites existem, eles são, respectivamente denominados, derivada lateral de f à esquerda em x_0 e derivada lateral de f à direita no ponto x_0. Se ambos os limites existem e são iguais, dizemos que f possui derivada no ponto x_0.

Uma função f será derivável em um intervalo aberto (finito ou infinito) se tiver uma derivada em cada ponto do intervalo. Será derivável em um intervalo fechado [a, b] se for derivável no interior de (a,b) e se os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{derivada à direita em a,}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{derivada à esquerda em a,}$$

existirem nas extremidades.

Observação: Derivadas laterais podem ser definidas em qualquer ponto do domínio de uma função.

Exemplos.

1. Mostre que y = |x| não é derivável no ponto 0.

$$y = |x| \Rightarrow y = \begin{cases} x, se\ x > 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

Para y = x e x > 0 temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

Para y = -x e x < 0 temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(x+h) + x}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-x - h + x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Como os limites laterais são diferentes, não existe

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}$$

Logo f'(0) não existe e não é diferenciável em 0.

2. Mostre que a reta tangente à curva y = x² em P = (1, 1) é y = 2x-1.

Precisamos calcular o valor de $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

pois precisamos do coeficiente angular da reta tangente à curva $y = x^2$ passando pelo ponto (1,1).

Fazendo os cálculos necessários: $f(x) = x^2$, $f(1) = 1^2 = 1$ e $f(1+h) =$
$= (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$ e substituindo, teremos

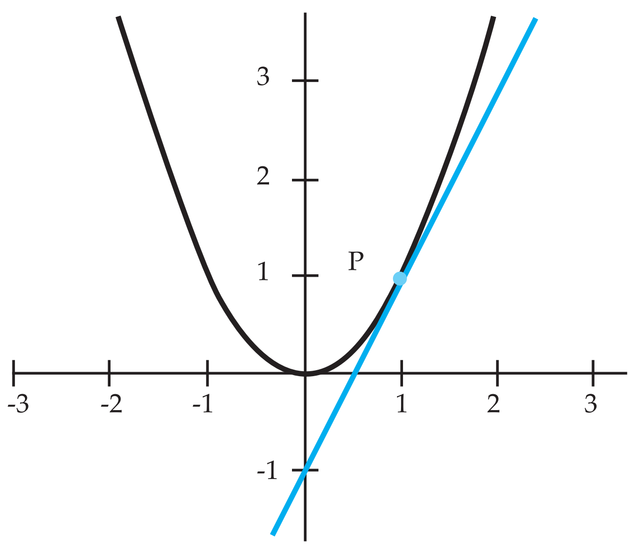
$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

Equação da reta tangente à curva $y = x^2$ em P = (1,1) será dada por

$$y - y_o = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$$

Logo, a reta pedida tem equação: y = 2x-1. Observe o gráfico da reta tangente à curva $y = x^2$ em P = (1,1).



3. Mostre que a reta tangente à curva y = x^3 em P = (0, 0) é y = 0.

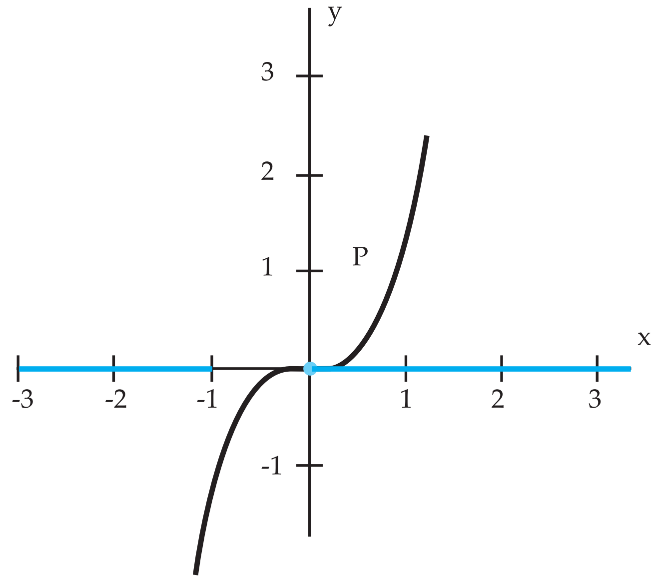
Precisamos calcular o valor de $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$, pois

precisamos do coeficiente angular da reta tangente à curva y= x^3, passando pelo ponto (0,0).

Fazendo os cálculos necessários:
f(x) = x^3 , f(0) = 0^3 = 0 e f (0 + h) = h^3 e substituindo, teremos

$$y - y_o = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 0$$

Logo, a reta pedida tem equação: y = 0.
Observe o gráfico da reta tangente à curva y = x^3 em P = (0,0).



4. Encontre a derivada da função y = x^3 em P = (1,1).

Precisamos calcular o valor de $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$

pois precisamos do coeficiente angular da reta tangente à curva y = x^3, passando pelo ponto (1,1).

Fazendo os cálculos necessários: f(x) = x^3 , f(1) = 1^3=1 e
f(1+ h) = $(1+h)^3$ = h^3+ $3h^2$+ 3h + 1 e substituindo, teremos

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{h}^3 + 3\mathrm{h}^2 + 3\mathrm{h} + 1 - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{h}^3 + 3\mathrm{h}^2 + 3\mathrm{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{h}(\mathrm{h}^2 + 3\mathrm{h} + 3)}{h} = \lim_{h \to 0} \mathrm{h}^2 + 3\mathrm{h} + 3 = 3$$

5. Encontre a derivada da função y = x² no ponto genérico P= (x, x²).

Precisamos calcular o valor de $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$,

pois precisamos do coeficiente angular da reta tangente à curva y = x², passando pelo ponto (x,x²).

Fazendo os cálculos necessários: f(x) = x² e f(x + h) = (x + h)² = = x² + 2xh + h² e substituindo, teremos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

Logo, a derivada de y = x² é y'= 2x.

6. Encontre a derivada da função y = x³ em P = (x, x³).

Precisamos calcular o valor de $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$,

pois precisamos do coeficiente angular da reta tangente à curva y = x³, passando pelo ponto (x,x³).

Fazendo os cálculos necessários: f(x) = x³ e
f(x + h) = (x + h)³ = x³ + 3x²h + 3xh² + h³ e substituindo, teremos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

Logo a derivada de y = x³ é y'= 3x².

7. Encontre a derivada da função y = k, k constante, k ∈ R no ponto genérico P= (x, k) .

Precisamos calcular o valor de $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$,

pois precisamos do coeficiente angular da reta tangente à curva y = k passando pelo ponto (x,k).

Fazendo os cálculos necessários: f(x) = k e f (x+ h) = k e substituindo, teremos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Logo, a derivada de y = k é y′ = 0.

A derivada da função constante é zero em qualquer ponto.

8. Encontre a derivada da função y = ax + b .

Fazendo os cálculos necessários: f(x) = ax + b e f(x + h) = a(x + h) + b = ax + ah + b e substituindo, teremos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{ax} + \text{ah} + b \text{ - } (\text{ax} + \text{b})}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\text{ax} + \text{ah} + b \text{ - ax} - \text{b}}{h} = \lim_{h \to 0} a \frac{h}{h} = a$$

Logo, a derivada de y = ax + b é y′ = a.

A derivada da função linear f(x) = ax + b é f′(x)=a, em qualquer ponto.

9. Encontre a derivada da função y = x^n .

Fazendo os cálculos necessários: f(x) = x^n e f(x + h) = $(x + h)^n$ = $x^n + nx^{n-1}h + ... + h^n$ e substituindo, teremos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{x}^{\text{n}} + \text{nx}^{\text{n-1}}\text{h} + ... + \text{h}^{\text{n}} - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\text{nx}^{\text{n-1}}\text{h} + ... + \text{h}^{\text{n}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{h}(\text{nx}^{\text{n-1}} + ... + \text{h}^{\text{n-1}})}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \text{nx}^{\text{n-1}} + ... + \text{h}^{\text{n-1}} = nx^{n-1}$$

Logo, a derivada de y = x^n é y′= nx^{n-1}.

A derivada da função f(x) = x^n é f′(x) = nx^{n-1}, em qualquer ponto.

10. Encontre a derivada da função y = $\sqrt{x}$

Fazendo os cálculos necessários: f(x) = $\sqrt{x}$ e f(x + h) = $\sqrt{(x+h)}$ e substituindo, teremos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)}{h} \frac{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} 1 \frac{1}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Logo, a derivada de y = $\sqrt{x}$ é y' = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

A derivada da função f(x) = $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ **e** $f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ **em qualquer ponto.**

11. Encontre a derivada da função y = senx .

Fazendo os cálculos necessários: f(x) = sen x e f(x + h) = sen (x + h) = = senx . cosh + cosx . senh e substituindo, teremos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{senx \cosh + \cos x senh - senx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{senx\,(\cosh - 1) + \cos x\, senh}{h} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \left(\underbrace{\frac{\overbrace{senx}^{1}}{h} \frac{\overbrace{(\cosh - 1)}^{0}}{1}}_{0} + \underbrace{\cos x \frac{\overbrace{senh}^{1}}{h}}_{\cos x} \right)}_{\text{estudando o limite}} = \cos x$$

Logo, a derivada de y = senx é y'= cosx.

A derivada da função f(x)= senx é f'(x)= cosx, em qualquer ponto.

12. Encontre a derivada da função y = cosx .

Fazendo os cálculos necessários: f(x) = cosx e f(x + h) = cos(x + h) = cosx . cosh - senx senh e substituindo, teremos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cosh - senx senh - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cosh-1) - senx\, senh}{h} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\left(\overbrace{\underbrace{\frac{\overbrace{\cos x}^{1}}{h}\,\frac{\overbrace{(\cosh-1)}^{0}}{1}}_{0}}^{0} - \underbrace{senx\,\frac{\overbrace{senh}^{1}}{h}}_{senx}\right)}_{\text{estudando o limite}} = -\text{ sen x}$$

Vamos mostrar como sair da indeterminação 0/0 do limite anterior.

$$\lim_{h\to 0}\left(\overbrace{\underbrace{\frac{\overbrace{\cos x}^{1}}{h}\,\frac{\overbrace{(\cosh-1)}^{0}}{1}}_{0}}^{o}\right) = 0/0$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x}{h}\right)\left(\frac{\cosh-1}{1}\right)\left(\frac{\cosh+1}{\cosh+1}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x}{h}\right)\left(\frac{\overbrace{\cos^2 h-1}^{sen^2 h}}{\cosh+1}\right) =$$

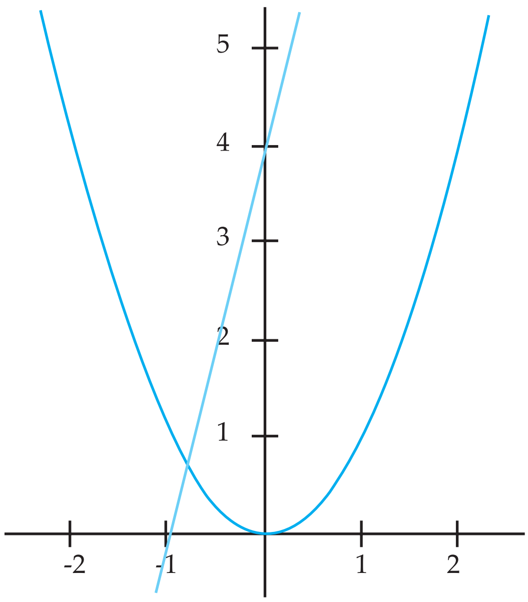
$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\left(\frac{\overbrace{\cos x\; senh}^{0}}{\underbrace{\cosh+1}_{2}}\right)\overbrace{\left(\frac{senh}{h}\right)}^{1}}_{\text{estudando o limite}} = 0.1 = 0$$

Logo, a derivada de y =cosx é y’= - senx.

A derivada da função f(x)= cosx é f’(x)=-senx, em qualquer ponto.

12. Determine a equação da reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e é paralela à reta $y = 4x + 2$.

Queremos encontrar a equação da reta tangente a função $f(x) = x^2$.
Esta reta tem que ser paralela à reta $y = 4x + 2$.
Duas retas serão paralelas se tiverem o mesmo coeficiente angular.



O coeficiente angular de $y = 4x + 2$ é 4.

Vamos encontrar o coeficiente angular da reta tangente à função $y = x^2$.

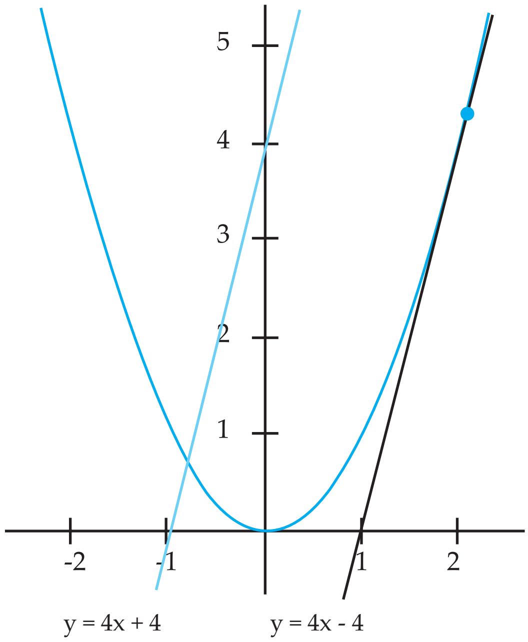
Fazendo os cálculos necessários: $f(x) = x^2$ e $f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$ e substituindo, teremos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\,(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

Logo, o coeficiente angular da reta tangente a função $y = x^2$ é $2x$.

Igualando os coeficientes angulares: $4 = 2x \Rightarrow x = 2$. A abscissa do ponto onde a reta tangente à função $f(x) = x^2$ é paralela a reta $y = 4x + 2$. Para $x = 2$ $y = 4$, ponto (2,4), isto é, o coeficiente angular no ponto 2 é 4.

Equação da reta tangente é $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = 4\,(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \Rightarrow y = 4x - 4$.



13. Dada a função y = $x^{1/3}$. Encontre f'(x) e depois mostre que f'(0) não existe, mesmo sendo f contínua em 0.

Fazendo os cálculos necessários: $f(x) = x^{1/3}$ e $f(x + h) = (x + h)^{1/3}$ e substituindo, teremos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{1/3}-x^{1/3}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^{1/3}-x^{1/3}\right)\left((x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right)}{h\left((x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left((x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right)} =$$

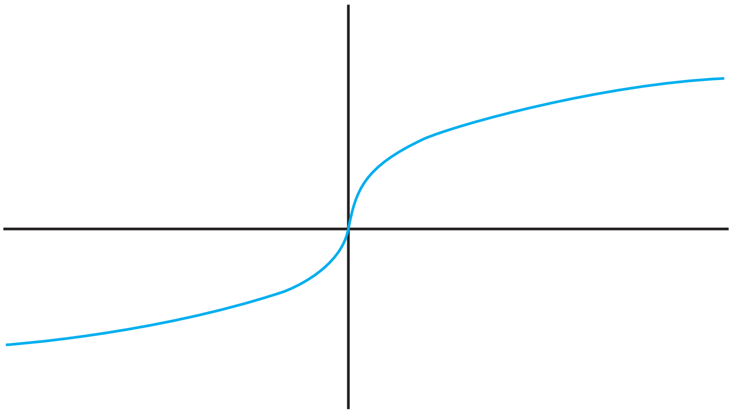
$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left((x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left((x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(x^{2/3}+x^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right)} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

Encontrando , temos f'(0).

$f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{1}{3.0^{2/3}} = \dfrac{1}{0}$? A função $f(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$ não está definida para x = 0, mas a função é contínua em 0, como podemos observar na figura a seguir.



A reta x = 0 é a reta tangente ao gráfico de f na origem.

Observação: Temos um exemplo de uma função que é contínua no ponto zero, mas não é derivável nesse ponto.

Diz-se que a função f é diferencial em x_0 se $f'(x_0)$ existe.

Se uma função f é diferenciável em x_0, então, f é continua em x_0.

Entretanto, se uma função não é diferenciável em um ponto não implica descontinuidade no ponto.

14. A curva $y = x^4 - 2x + 2$ tem alguma tangente horizontal?

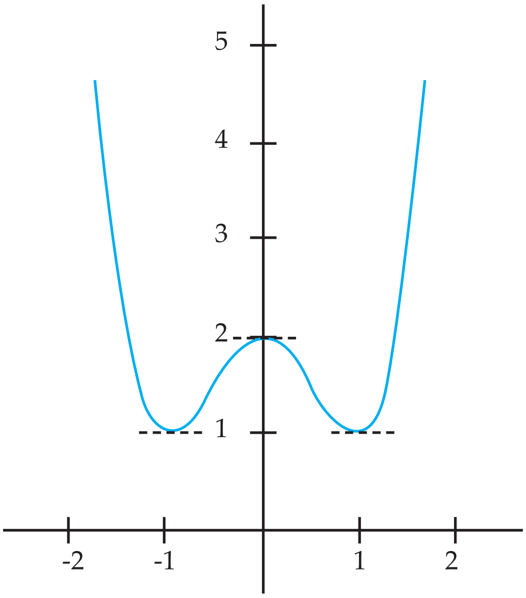
Observação. As tangentes horizontais são encontradas quando a derivada é zero. Encontrando a derivada da função.

$y = x^4 - 2x^2 + 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x$

Encontrando onde a derivada da função é zero.

$y' = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 4$
$\Rightarrow x = \pm 1$

Logo, a curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$, tem tangentes horizontais em x = 0, x = 1 e x = - 1, que corresponde aos pontos: (0,2); (1,1) e (-1,1).



Técnicas de derivação - teoremas

Teorema 1. Se c é uma constante, e se f(x) = c para todo x, então f'(x) = 0 .

Exemplo: $f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$

Teorema 2. Se n é um número qualquer real, e se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemplo: $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

Teorema 3. Se f é uma função e c é uma constante qualquer, e g é a função definida por g(x) = c f(x) , então se f′(x) existe, g'(x) = c f'(x) .

Exemplo: $f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3(2x^1) = 6x$

Teorema 4. Se $f(x) = c\,x^n$ é uma função e c é uma constante, e n é um número real qualquer, então $f'(x) = c\,(nx^{n-1})$.

Exemplo: $F(x) = 3x^4 \Rightarrow f'(x) = 3\,(4x^3) = 12x^3$

Teorema 5. Se f e g são duas funções e h é uma função definida por h(x) = f(x) . g(x), então se f'(x) e g'(x) existem, então h'(x) = f'(x) + g'(x).

Exemplo: $f(x) = \underbrace{3x^4}_{f(x)} + \underbrace{2x}_{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{3(4x^3)}_{f'(x)} + \underbrace{2}_{g'(x)} = \underbrace{12x^3 + 2}_{f'(x)+g'(x)}$

Teorema 6. Se f e g são duas funções e h é uma função definida por h(x) = f(x) . g(x) , então se f'(x) e g'(x) existem, então h'(x) = f'(x) g(x) + g'(x) f(x).

Exemplo: $f(x) = \underbrace{3x^4}_{f(x)} + \underbrace{2x}_{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{(12x^3)}_{f'(x)}\underbrace{(2x)}_{g(x)} + \underbrace{(2)}_{g'(x)}\underbrace{(3x^4)}_{f(x)} = \underbrace{24x^4 + 6x^4}_{f'(x).g'(x)} = 30x^4$

Teorema 7. Se f e g são duas funções e h é uma função definida

por $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e g(x) ≠ 0, então se f'(x) e g'(x) existem, então

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

Exemplo: $f(x) = \dfrac{3x^4}{2x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{24x^4 - 6x^4}{(2x)^2} = \dfrac{18x^4}{4x^2} = \dfrac{9}{2}x^2$

Exemplos resolvidos aplicando as regras

1. $f(x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = \sqrt{5} \Rightarrow f'(x) = 0$
3. $f(x) = 99 \Rightarrow f'(x) = 0$
4. $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$
5. $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$
6. $f(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 3(1x^{1-1}) = 3\,(1x^0) = 3.1 = 3$
7. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}(4x^{4-1}) = \dfrac{1}{2}(4x^3) = \dfrac{4}{2}x^3 = 2x^3$
8. $f(x) = x^4 + 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = (4x^{4-1}) + 3 + 0 = (4x^3) + 3 = 4x^3 + 3$
9. $f(x) = 5x^{12} + 7x^2 + 3x + 5 \Rightarrow f'(x) = 5(12x^{11}) + 14x + 3 + 0 = 60x^{11} + 14x + 3$
10. $f(x) = (x^4)(x^2 + 2) \Rightarrow f'(x) = (4x^{4-1})\,(x^2 + 2) + (2x)(x^4) = (4x^3)\,(x^2 + 2) + 2x^5$
11. $f(x) = (\sqrt{5}x^3 + 7x)\,(5x^2 + 2x + 1)$

    $\Rightarrow f'(x) = (3\sqrt{5}\,x^2 + 7)\,(5x^2 + 2x + 1) + (10x + 2)(\sqrt{5}x^3 + 7x)$
12. $f(x) = \dfrac{2x^4}{(3x^2 - 2x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(8x^{31})(3x^2 - 2x) - (6x + 2)(2x^4)}{(3x^2 - 2x)^2} =$

    $f'(x) = \dfrac{(24x^{33} - 16x^{32}) - (12x^5 + 4x^4)}{(3x^2 - 2x)^2} = \dfrac{24x^{33} - 16x^{32} - 12x^5 - 4x^4}{(3x^2 - 2x)^2}$
13. $f(x) = \dfrac{4x^2 + 5}{5x + 1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{8x.(5x + 1) - 5(4x^2 + 5)}{(5x + 1)^2} = \dfrac{40x^2 + 8x - 20x^2 - 25}{(5x + 1)^2} = \dfrac{20x^2 + 8x - 25}{(5x + 1)^2}$

Derivadas de segunda ordem e de ordem superior

Seja $y = 3x^2 + 2x \Rightarrow y' = 6x + 2$, então y′ é chamada de **primeira derivada** de y em relação a x.

Seja $y' = 6x + 2 \Rightarrow y'' = 6$, então y′′ é chamada de **segunda derivada** de y em relação a x.

Seja $y'' = 6 \Rightarrow y''' = 0$, então y′′ é chamada de **terceira derivada** de y em relação a x.
Observe que a função apresenta derivada de todas as ordens, sendo a quarta e as subseqüentes todas iguais a zero.

Parada para verificação dos seus conhecimentos

1. Calcule a por definição, derivada de $f(x) = 3x^2$ no ponto $x = 5$.

2. Calcule a por definição, derivada de $f(x) = x^3$ no ponto $x = 2$.

3. Calcule a por definição, derivada de $f(x) = x^2 + 3x + 7$ no ponto $x = 0$.

4. Dada a função $f(x) = 3x + 5$ calcule, por definição, $f'(x)$.

5. Dada a função $f(x) = (x)^{1/2}$ calcule $f'(1)$ e $f'(0)$.

6. Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ calcule $f'(x)$, por definição.

7. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto de abscissa 8.

8. Determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x) = x^2 - 2$ no ponto de abscissa 2. Esboce os gráficos de f, da reta tangente e da reta normal.

9. Seja r a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto de abscissa p. Verifique que r intercepta o eixo ox no ponto de abscissa 2p.

10. Se $f(x) = 2x^2 - x$, determine o ponto no gráfico de f em que a tangente é paralela à reta $3x - y - 4 = 0$. Determine a equação da reta tangente nesse ponto. Faça os gráficos.

11. Determine as interseções x e y da tangente a $f(x) = 2\sqrt{x}$ no ponto (1,2).

12. Em que ponto da curva $y = x^2 + 8$ o coeficiente da tangente é 16? Escreva a equação dessa reta tangente.

13. Determine em que ponto na curva $y = 3x^2 + 5x + 6$ a tangente é paralela ao eixo x.

14. A tangente a $f(x) = x - x^2$ é paralela à reta $x + y - 2 = 0$.

15. A tangente a $f(x) = 2x^3 - x^2$ é paralela à reta $4x - y + 3 = 0$.

16. A normal a $f(x) = \sqrt{4x - 3}$ é perpendicular à reta $3x - 2y + 3 = 0$.

Capítulo II

DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA

Regra da cadeia

Se y é uma função de u e $\frac{dy}{du}$ existe, e se u é uma função de x e $\frac{du}{dx}$ existe, então y é uma função de x e $\frac{dy}{du}$ existe e é dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$

Exemplo.

1. $y = (2x + 1)^3$

Fazendo $u = 2x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2$. Temos $y = u^3 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$, com $u = 2x + 1$. Calculando a derivada de $y = (2x + 1)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3(2x + 1)^2 . 2 = 6(2x + 1)^2$$

2. $y = (2x^3 + 3x)^2$

Fazendo $u = 2x^3 + 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2 + 3$. Temos $y = u^2 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 2u$, com $u = 2x^3 + 3x$.

Calculando a derivada de $y = (2x^3 + 3x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(2x^2 + 3x).(6x^2 + 3) = 2(12x^4 + 18x^3 + 6x^2 + 9x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 24x^4 + 36x^3 + 12x^2 + 18x$$

3. y = sen (3x²)

Fazendo $u = 3x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x$. Temos $y = \text{sen } u \Rightarrow \frac{dy}{du} = \cos u$, com $u = 3x^2$.

Calculando a derivada de $y = \text{sen}(3x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(3x^2) \,.\, (6x) = 6x.\cos(3x^2).$$

4. $y = \cos\left(\frac{3x+2}{x+3}\right)$

Fazendo $u = \frac{3x+2}{x+3} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3(x+3) - 1(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{3x + 9 - 1x - 3}{(x+3)^2} = \frac{2x+6}{(x+3)^2}$

Temos $y = \cos u \Rightarrow \frac{dy}{du} = -\text{sen } u$.

Calculando a derivada de $y = \cos\left(\frac{3x+2}{x+3}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -sen\left(\frac{3x+2}{x+3}\right)\left(\frac{2x+6}{(x+3)^2}\right)$$

5. $y = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

Fazendo $u = x + 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1$. Temos $y = \frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-1/2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = -\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}$$

Calculando a derivada de $y = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)^{-\frac{3}{2}}.1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+3)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+3)^{-\frac{1}{2}}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{x+3}$$

6. y = 3x cos(5x)

Calculando a derivada de y = cos(5x).

Fazendo u = 5x $\Rightarrow \dfrac{du}{dx}$ = 5, temos y = cos(u) $\Rightarrow \dfrac{dy}{du}$ = - sen u.

Logo, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ = - 5 sen(5x)

Calculando a derivada de y = 3x cos(5x)

$\dfrac{dy}{dx} =$ 3 cos(5x) . 3x = 3 cos(5x) - 15x sen (5x).

Regra de L'Hospital

Primeira regra: Se f e g são infinitésimos no ponto x = a e se está difícil calcular $\dfrac{f}{g}$, pode-se proceder do seguinte modo.

1º Calcular f'(x) e g'(x).

2º Calcular $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Se este limite existir, ele será o limite

procurado do quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Exemplos.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x}{1} = 4$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x + 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 2}{1} = 3.4 - 2 = 10$

3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x + 9}{-x^2 + 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x + 1}{-2x} = \dfrac{2.3 + 1}{-2.3} = \dfrac{7}{-6} = -\dfrac{7}{6}$

Segunda regra: Se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$ e existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (ou ∞)

então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ (ou ∞).

As regras de L'Hospital só se aplicam nas indeterminações 0 / 0 e ∞ / ∞

Exemplos.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{1} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^5-x+1}{x^2+2x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^4-1}{2x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{20x^3}{2} = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-x-3}{5x^2+2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x-1}{10x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{10} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

A Diferencial

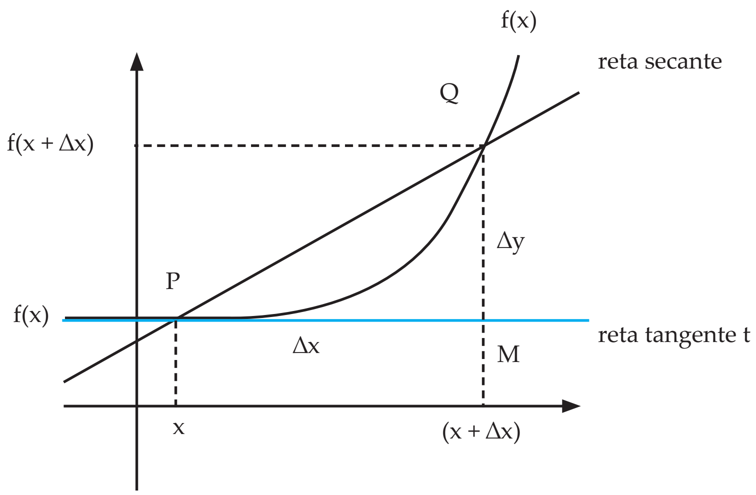
Vamos considerar a figura a seguir.

Nela temos: a função y = f(x); a reta tangente t à curva dada em P(x,y) e Q(x + Δx, y + Δy); a diferença entre y + Δy e y é Δy que é distância de $\overline{QM}$. Para um valor pequeno de |Δx|, a inclinação da reta secante t e a inclinação da reta tangente em P são aproximadamente iguais, isto é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

A expressão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é definido como diferencial de y.



Se a função f é definida por y = f(x), então a diferencial de y, denotada por *dy*, é dada por $dy = f'(x)\,\Delta x$, com x no domínio de f′ e Δx incremento arbitrário de x. (Definição I)

Se a função f é definida por y = f(x), então a diferencial de x, denotada por *dx*, é dada por $dx = \Delta x$, com x um número qualquer no domínio de f′ e Δx incremento arbitrário de x. (Definição II)

Das duas definições anteriores, temos

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ se } dx \neq 0$$

Aplicações.

1. Consideremos a função $y = 4x^2 - 2x + 2$. Encontre o valor de: Δy , dy e $\Delta y - dy$.

Fazendo os cálculos

$y = 4x^2 - 2x + 2$

$dy = (8x - 2)\,dx$

$y + \Delta y = 4(x + \Delta x)^2 - 2(y + \Delta x) + 2$

$y + \Delta y = 4(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) - 2x - 2\,\Delta x + 2$

$y + \Delta y = 4x^2 + 8x\,\Delta x + 4\,\Delta x^2 - 2x - 2\,\Delta x + 2$

$y + \Delta y = 4y^2 + (8x-2)\,\Delta x + 4\,\Delta x^2 - 2x + 2$

$y + \Delta y = (8x - 2)\,\Delta x + 4\,\Delta x^2 + (4y^2 - 2x + 2)$

Substituindo $y = (4y^2 - 2x + 2)$

$(4y^2 - 2x + 2) + \Delta y = (8x-2)\,\Delta x + 4\,\Delta x^2 + (4y^2 - 2x + 2)$

$\Delta y = (8x - 2)\,\Delta x + 4\,\Delta x^2$

$dy = f'(x)\,dx$

$dy = (8x - 2)\,\Delta x$

$\Delta y - dy = (8x - 2)\,\Delta x + 4\,\Delta x^2 - (8x - 2)\,\Delta x = 4\,\Delta x^2$

2. Para a equação anterior, considere que $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}1$.
Temos do exercício 1, que

$dy = (8x - 2)\,\Delta x = (8.2 - 2).0{,}1 = 14 \,.\, 0{,}1 = 1{,}4$

$\Delta y - dy = 4\,\Delta x^2 = 4 \,.\, (0{,}1)^2 = 4 \,.\, 0{,}01 = 0{,}04$

3. Encontrar o valor de $2{,}98^3$, usando a função $f(x) = x^3$.
Consideremos $x_1 = 3$ e $dx = 2{,}98 – 3 = -0{,}02$

Calculando dy

$dy = f'(x)\,dx \Rightarrow dy = 3x^2\,(-0{,}02) = -\,0{,}06\,x^2 = -\,0{,}06 \,.\, 9 = -\,0{,}54$
$f(x_1) = 3^3 = 27$

Logo, $f(x) \cong f(x_1) + dy = 27 - 0{,}54 = 26{,}46$

4. Encontrar o valor de $\sqrt{4{,}01}$, considerando $x = 4$ e $dx = 0{,}01$
Temos que: $x = 4$ e $dx = 0{,}01$. Consideremos $y = f(x) = \sqrt{x}$
Calculando dy

$$dy = f'(x)\,dx \Rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dy = \frac{1}{2.2}(0{,}01) \Rightarrow dy = \frac{1}{4}(0{,}01) = 0{,}0025$$

$f(x) = \sqrt{4} = 2$
Logo, $f(x) \cong f(x_1) + dy \cong 2 + 0{,}0025 \cong 2{,}0025$

5. Encontrar o valor de $\sqrt[3]{8{,}2}$, considerando $x = 8$ e $dx = 0{,}2$.
Temos que: $x = 8$ e $dx = 0{,}2$. Consideremos $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$
Calculando dy

$$dy = f'(x)\,dx \Rightarrow dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx \Rightarrow dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}0{,}2 \Rightarrow dy = \frac{1}{3.4}\,0{,}2 \Rightarrow dy = \frac{0{,}2}{12}$$

$dy = 0{,}016$
$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$
Logo, $f(x) \cong f(x_1) + dy \cong 2 + 0{,}016 \cong 2{,}016$

Capítulo III

APLICAÇÕES

Esboços de curvas

Intervalos de crescimento e decrescimento

Teorema: Seja f contínua em [a, b] e derivável em]a, b[, temos
Se $f'(x) > 0$ em]a, b[, então f é estritamente crescente em]a, b[.
Se $f'(x) < 0$ em]a, b[, então f é estritamente decrescente em]a, b[.

Ponto crítico

Definição. Se c é um número no domínio de f e se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe, então c é chamado ponto crítico da função.

Concavidade do gráfico de uma função

Definição. Seja a função diferenciável no intervalo aberto I.
O gráfico terá concavidade para cima em I, se f' for uma função crescente.
O gráfico terá concavidade para baixo em I, se f' for uma função decrescente.

Teorema: Seja a função f diferenciável duas vezes no intervalo I.
Se $f'(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f possui concavidade para cima em I.
Se $f'(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f possui concavidade para baixo em I.

Ponto de inflexão

Definição. Um ponto onde uma curva muda sua forma, de convexa para cima para convexa para baixo chama-se ponto de inflexão.

Considerando o gráfico de uma função f cuja derivada segunda existe e é contínua, devemos ter $f''(x)$ num ponto de inflexão.

Teste da segunda derivada

Seja f uma função derivada contínua de segunda ordem, num intervalo aberto, suponhamos que c seja um ponto em que
Se $f'(c) = 0$ e $f'(c) > 0$, então c é um ponto de mínimo local.
Se $f'(c) = 0$ e $f'(c) < 0$, então c é um ponto de máximo local.

Assíntotas

Assíntota vertical

Definição. A reta x = a é dita assíntota vertical do gráfico de f se um dos casos a seguir ocorrer.

i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Assíndota horizontal

Definição. A reta y = b é dita assíntota horizontal do gráfico de f se um dos casos a seguir ocorrer.

i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Assíntota oblíqua

Definição. A reta y = ax + b é dita assíntota oblíqua do gráfico de f se um dos casos ocorrer:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

Exemplos.

1. Construir os gráficos das funções dadas a seguir.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

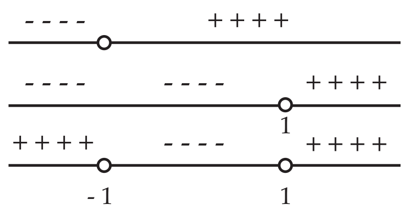
1. Condição de existência: x - 1 ≠ 0 ⇒ x ≠ 1

2. Zero da função: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

x + 1 = 0 ⇒ x = -1
x - 1 = 0 ⇒ x = 1

3. Estudo do sinal.

f(x) > 0, x < -1 ou x > 1
f(x) < 0 , -1 < x < 1
f(x) = 0, x = -1 e x = 1



4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ e $f(-x) = \dfrac{-x+1}{-x-1} = \dfrac{1-x}{-1-x} = \dfrac{-(x-1)}{-(x+1)} = \dfrac{x-1}{x+1}$

Como *f(x) ≠ f(-x)*, logo a função não é par.

5. Altura na origem

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(0) = \dfrac{0+1}{0-1} = -1$. Ponto (0,-1)

6. Tendências no infinito

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}$$. Saindo da indeterminação: $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x}\right)\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$$

Como o resultado dos dois limites é um número, no caso 1, temos assíntota horizontal.

7. Valores infinitos

Calcular os limites à esquerda e à direita, se for o caso.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0}$$. Saindo da indeterminação: $$\underbrace{\lim_{x\to +1^+}\frac{\overbrace{x+1}^{2}}{\underbrace{x-1}_{0^+}}}_{\textit{estudando o limite}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0}$$. Saindo da indeterminação: $$\underbrace{\lim_{x\to +1^-}\frac{\overbrace{x+1}^{2}}{\underbrace{x-1}_{0^-}}}_{\textit{estudando o limite}}=-\infty$$

A reta x = 1 é uma assíntota vertical.

8. Assíntotas oblíquas

Para a = 1 e b = 0, calculamos o valor do limite de $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=?$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}-(x+0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}-\lim_{x\to+\infty}x=1-\infty=-\infty$$

Logo, sem assíntota oblíqua.

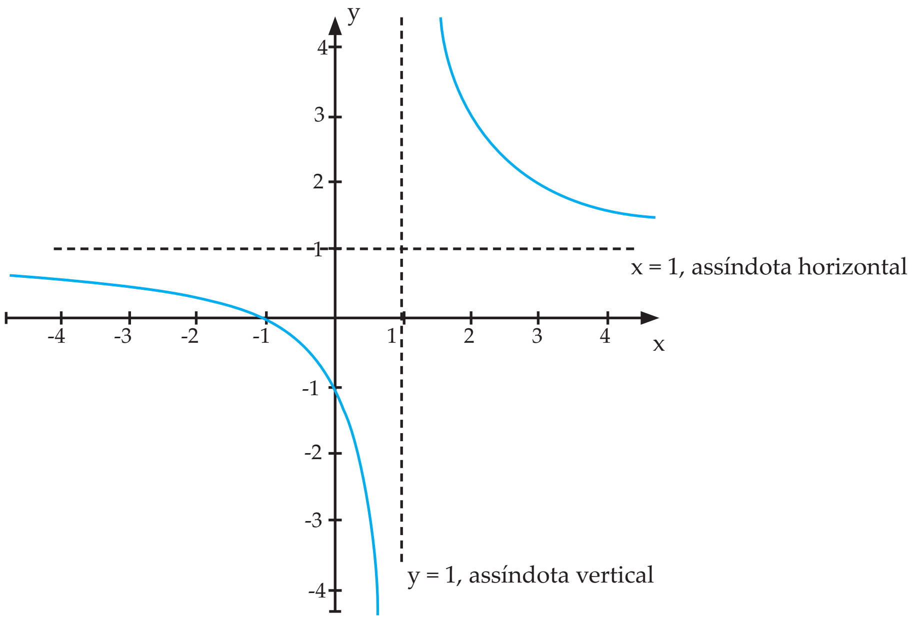
9. Cálculo das derivadas necessárias.
Primeira derivada.

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1(x-1)-1(x+1)}{1}=\frac{1x-1-1x-1}{1}=\frac{-2}{1}=-2$$

Mostra onde f é decrescente.
Segunda derivada.

$$f(x)=-2\Rightarrow f''(x)=0$$

Construindo o gráfico, unindo todas as informações anteriores.



b) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

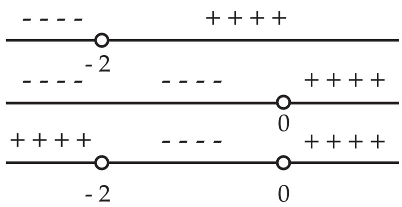
1. Condição de existência: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

2. Zero da função: $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

$x = 0$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

3. Estudo do sinal



f(x) > 0, $x < -2$ ou $x > 0$

f(x) < 0 , $-2 < x < 0$

f(x) = 0, $x = -2$ e $x = 0$.

4. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ e $f(-x) = \dfrac{-x}{-x+2} = \dfrac{x}{x-2}$

Como $f(x) \neq f(-x)$, logo a função não é par.

5. Altura na origem

$$f(x)=\frac{x}{x+2}\Rightarrow f(0)=\frac{0}{0+2}=\frac{0}{2}=0$$. Ponto (0,0).

6. Tendências no infinito

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x+2}=\frac{\infty}{\infty}$$. Saindo da indeterminação: $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}}=1$$

Como o resultado dos dois limite é um número, no caso 1, temos assíntota horizontal.

7. Valores infinitos
Calcular os limites à esquerda e à direita, se for o caso.

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{0}$$. Saindo da indeterminação: $$\underbrace{\lim_{x\to-2^+}\frac{\overbrace{x}^{-2}}{\underbrace{x+2}_{0^+}}}_{estudando\ o\ limite}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{0}$$. Saindo da indeterminação: $$\underbrace{\lim_{x\to-2^-}\frac{\overbrace{x}^{-2}}{\underbrace{x+2}_{0^-}}}_{estudando\ o\ limite}=+\infty$$

A reta x = -2 é uma assíntota vertical.

8. Assíntotas oblíquas
Para a = 1 e b = 0, calculamos o valor do limite de $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=?$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+2}-(x+0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+2}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}}-\lim_{x\to+\infty}x=1-\infty=-\infty$$

Logo, sem assíntota oblíqua.

9. Cálculo das derivadas necessárias.
Primeira derivada.

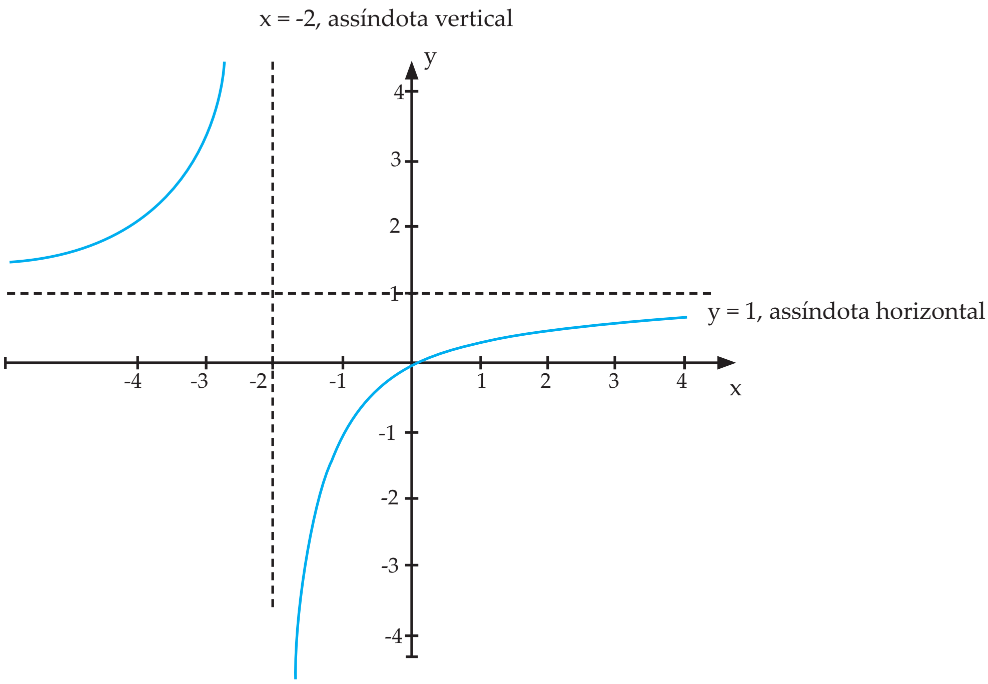
$$f(x)=\frac{x}{x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1(x+2)-1x}{1}=\frac{x+2-1x}{1}=\frac{2}{1}=2$$

Mostra onde f é crescente.

Segunda derivada.

$f(x) = 2 \Rightarrow f''(x) = 0$

Construindo o gráfico, unindo todas as informações anteriores.



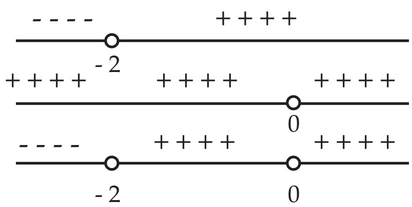
c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

1. Condição de existência: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

2. Zero da função: $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (duas raízes iguais)
$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

3. Estudo do sinal.



$f(x) > 0$, $x > -2$ e $x \neq 0$
$f(x) < 0$, $x < -2$
$f(x) = 0$, $x = -2$ e $x = 0$.

4. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$ e $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{-x+2}=\dfrac{x^2}{-x+2}$

Como $f(x) \neq f(-x)$, logo a função não é par.

5. Altura na origem

$f(x)=\dfrac{x^2}{x+2} \Rightarrow f(0)=\dfrac{0}{0+2}=\dfrac{0}{2}=0$. Ponto (0,0).

6. Tendências no infinito

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x+2}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Saindo da indeterminação:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}\frac{1}{1+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}x\frac{1}{1+\frac{2}{x}}=\pm\infty$$

Como o resultado dos limites é ± ∞, temos assíntota horizontal y= 0

7. Valores infinitos

Calcular os limites à esquerda e à direita, se for o caso.

$\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2}{x+2}=\dfrac{2}{0}$. Saindo da indeterminação: $\underbrace{\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{\overbrace{x^2}^{4}}{\underbrace{x+2}_{0^+}}}_{\textit{estudando o limite}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2}{x+2}=\dfrac{2}{0}$. Saindo da indeterminação: $\underbrace{\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\overbrace{x^2}^{4}}{\underbrace{x+2}_{0^-}}}_{\textit{estudando o limite}}=-\infty$

A reta x = -2 é uma assíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to-0^+}\dfrac{x^2}{x+2}=\dfrac{0}{0}$. Saindo da indeterminação: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{2}{x}\right)}_{1}}=+\infty$

A reta x = 0 é uma assíntota vertical.

8. Assíntotas oblíquas.

Para a = -2 e b = 0, calculamos o valor do limite de

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = ?$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+2} - (-2x + 0) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+2} + 2x = \infty + \infty = \infty$$

Logo, sem assíntota oblíqua.

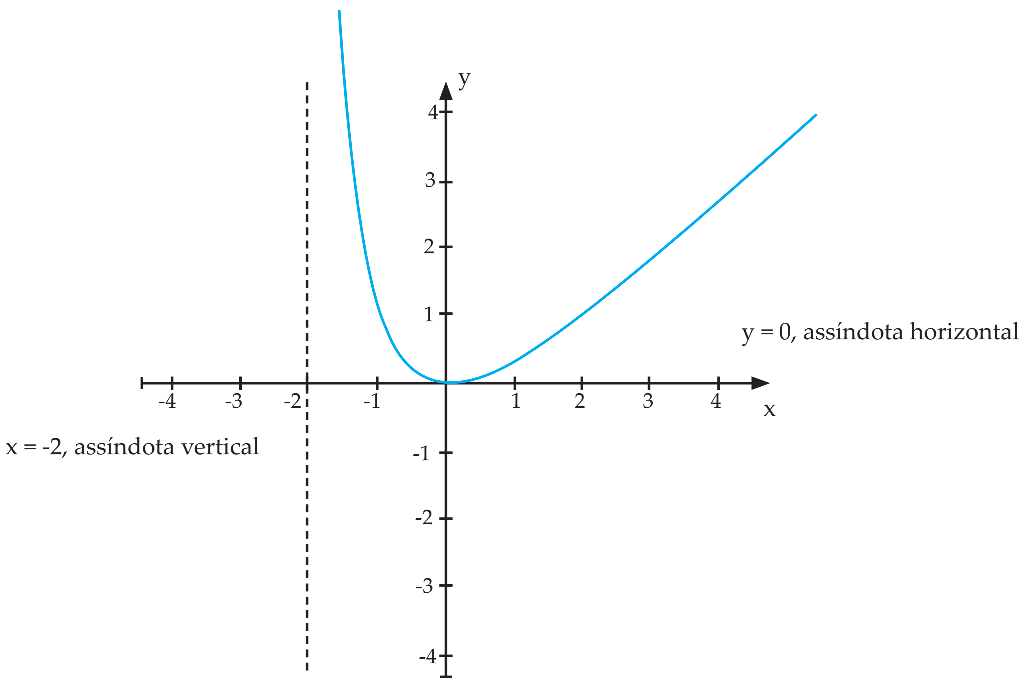
9. Cálculo das derivadas necessárias.
Primeira derivada.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1x^2}{1} = \frac{2x^2 + 4x - x^2}{1} = x^2 + 4x$$

Segunda derivada

$$f(x) = x^2 + 4x \Rightarrow f''(x) = 2x + 4$$

Construindo o gráfico, unindo todas as informações anteriores.



d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

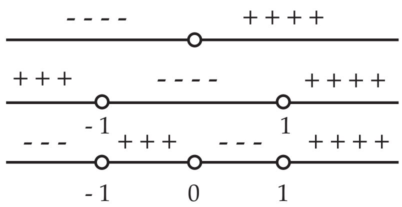
1. Condição de existência: $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

2. Zero da função: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ (três raízes iguais)
$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

3. Estudo do sinal.

$f(x) > 0$, $-1 < x < 0$ ou $x > 1$
$f(x) < 0$, $x < -1$ ou $0 < x < 1$
$f(x) = 0$, $x = -1$, $x = 1$ e $x = 0$.



4. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ e $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1}$

Como $f(x) \neq f(-x)$, logo a função não é par.

5. Altura na origem

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1} \Rightarrow f(0) = \dfrac{0}{0 - 1} = \dfrac{0}{-1} = 0$. Ponto (0,0).

6. Tendências no infinito

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$. Saindo da indeterminação:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} x \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \pm\infty$$

Como o resultado dos limites é $\pm\infty$, não temos assíntota horizontal.

7. Valores infinitos

Calcular os limites à esquerda e à direita, se for o caso.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0}$$. Saindo da indeterminação: $$\underbrace{\lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x^3}^{1}}{\underbrace{x^2-1}_{0^+}}}_{\textit{estudando o limite}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0}$$. Saindo da indeterminação:

$$\underbrace{\lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{x^3}^{-1}}{\underbrace{(x-1)}_{-2}\underbrace{(x+1)}_{0^+}}}_{\textit{estudando o limite}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

A reta x = 1 e x = -1 são assíntotas verticais.

8. Assíntotas oblíquas.

Para a =-1 e b = 0, calculemos o valor do limite de

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - (ax+b) = ?$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^2-1} - (-1x+0) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^2-1} + x = \infty + \infty = \infty$$

Logo, sem assíntota oblíqua.

9. Cálculo das derivadas necessárias.
Primeira derivada.

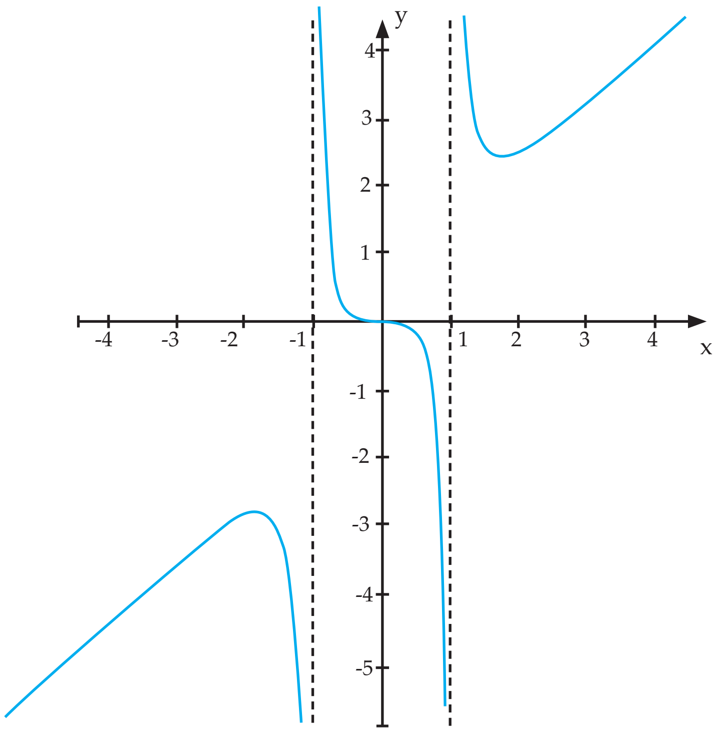
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-(2x)(x^3)}{1} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{1}$$

$$= x^4 - 3x^2$$

Segunda derivada.

$$f(x) = x^4 - 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 4x^3 + 6x$$

Construindo o gráfico, unindo todas as informações anteriores.



Capítulo IV

A DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO

Definições

1. A taxa de variação instantânea de f em relação a x em x_0 é a derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ se o limite existir.}$$

2. A velocidade instantânea é a derivada da posição em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é s = f(t), então a sua velocidade no instante t é

$$v(t) = \frac{ds}{st} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

3. Aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é s = f(t), então a sua aceleração no instante t é

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Aplicações.

1. A fórmula da área do círculo é $A = \pi\, r^2$ ou podemos utilizar

$$A = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \pi\, D^2$$

relacionando a fórmula da área com seu diâmetro. Queremos saber a que taxa de variação a área muda em relação ao diâmetro, quando o diâmetro é igual a 25m?

Resolução:
A fórmula da área em relação ao diâmetro é

$$A = \frac{1}{4}\pi\ D^2 \quad \text{Assim,}$$

$$\frac{dA}{dD} = \frac{1}{4}\pi\ 2D = \frac{1}{2}\pi\ D \quad \text{Mas para D = 25m, temos}$$

$$\frac{dA}{dD} = \frac{1}{2}\pi\ 25 = 12{,}5\pi$$

Logo, quando d = 25m, a área varia a uma taxa de 12,5 π m^2/m.

2. Se a pressão P e o volume V de um certo gás estão relacionados pela fórmula $P = \frac{1}{V}$, determine:

a) a taxa de variação de P em relação a V.
b) a taxa de variação de P em relação a V quando V = 2.

Resolução:

a) Como $P = \frac{1}{V}$, então $\frac{dP}{dV} = \frac{-1}{v^2}$

b) Para V = 2 a taxa de variação de P em relação a V é $\frac{dP}{dV} = \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4}$

3. O volume V(l) de água existente em um tanque é, t segundos, após ter se iniciado o escoamento, V = 2000 - 40t + $0{,}2t^2$. Com que velocidade o volume V decresce quando t = 30?

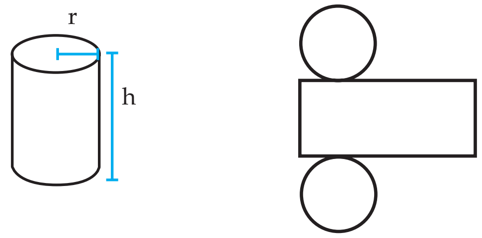
Resolução:

$$V = 2000 - 40t + 0{,}2t^2 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -40 + 0{,}4t$$

Para t = 30, temos $\frac{dV}{dt} = -40 + 0{,}4(30) = -40 + 12 = -28$

4. Que dimensões deve ter uma lata de refrigerante de capacidade de 500 ml de modo a minimizar seu custo?

Resolução:
Queremos minimizar a área total da lata. Chamemos de r o raio da base e de h a altura da lata.



O volume do cilindro é $V = \pi r^2 h \Rightarrow 500 = \pi r^2 h \Rightarrow \dfrac{500}{\pi r^2} = \text{h}$

A área total do cilindro é A_t = área da lateral + 2 vezes a área da circunferência.

$$A_t(r) = 2\pi\, r\, h + 2r^2$$

$$A_t(r) = 2\, r\, \frac{500}{\pi r^2} + 2\pi\, r^2 = \frac{1000}{r} + 2r^2 \text{ para } r > 0.$$

$$A_t(r) = \frac{1000}{r} + 2\, r^2$$

$$A'_t(r) = -\frac{1000}{r^2} + 4\pi\, r \text{ e } A''_t(r) = +\frac{2000}{r^2} + 4\pi > 0$$

$$A'_t(r) = -\frac{1000}{r^2} + 4\pi\, r = 0 \Rightarrow -\frac{1000}{r^2} + 4\pi\, r = 0.$$

Resolvendo: $r = 3\sqrt{250/\pi}$ e $h = 2\sqrt[3]{250/\pi}$

Portanto, o raio com valor $r = 3\sqrt{250/\pi}$ minimiza o custo de produção.

5. Sabemos que a área de um círculo é crescente a uma taxa constante de $4cm^2/s$, a que taxa está crescendo o raio no instante em que o raio é de 4cm?

Resolução:

$A = \pi\, r^2$ (derivando de ambos os lados da equação)

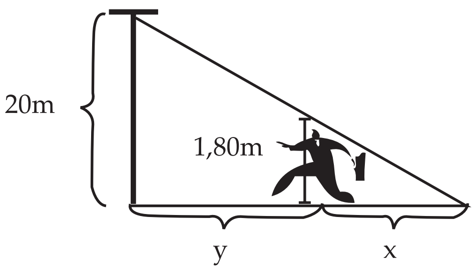
$\frac{dA}{dt} = 2\pi\, r \frac{dr}{dt}$. O problema nos dá: $\frac{dA}{dt} = 4cm^2/s$ e r = 4 cm

$4 = 2\pi\, 4.\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi}$ cm / s = 0,9 cm / s

A taxa está crescendo o raio no instante em que o raio é de 4 cm é 0,9 cm/s.

6. Um homem com 1,80 m de altura está a 12 m da base de um poste de luz com 20 m de altura e caminha em direção ao poste a uma velocidade de 4,0 metros por segundo. Com que taxa o comprimento de sua sombra está variando?



Resolução:

Temos dado: $\frac{dy}{dt} = 4m$

Perceba a semelhança entre os triângulos da figura anterior e tire a relação:

$$\frac{20}{y+x} = \frac{1{,}80}{x} \Rightarrow 20x = 1{,}80(y+x) \Rightarrow 18{,}2x = 1{,}80y$$

$18{,}2x = 1{,}80y$ (derivando de ambos os lados da equação)

$18{,}2\frac{dx}{dt} = 1{,}80\frac{dy}{dt}$, para $\frac{dy}{dt} = 4m$

$$18{,}2\frac{dx}{dt} = 1{,}80.4 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{72}{18{,}2} \cong 4 \text{ m / s}$$

Capítulo V

FUNÇÃO IMPLICITA E DIFERENCIAÇÃO IMPLÍCITA

Dada a equação $y = 3x^2 - 5$, costumamos dizer que y é uma função explícita de x, pois podemos escrever $y = f(x)$ com $f(x) = 3x^2 - 5$, ou seja, y é expresso explicitamente como função de x.

Mas nem sempre é possível isolar y, portanto nestes casos dizemos que y é definido implicitamente como função de x. Mesmo assim, é possível determinar $\frac{dy}{dx}$, utilizando a regra da cadeia, considerando $y = f(x)$.

O método da **diferenciação implícita** consiste em diferenciar cada termo da equação em relação a x.

Exemplos.

1. Vamos consideremos a seguinte equação: $x\,y = 1$.

Da maneira que se apresenta, y é definido implicitamente como função de x. Mas podemos facilmente, nesta função, isolar a variável y.

Fazendo:

$$x\,y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

Podemos dizer para a função $y = \frac{1}{x}$, que y é uma função explícita de x.

Derivando teremos: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{x^2}$

Mas, temos uma outra maneira de obter esta derivada, através da diferencial. Vejamos.

x y = 1 (diferenciando de ambos os lados da equação)

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x) = 0$$

$$x\frac{d}{dx}(y) + y.1 = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

Se agora substituirmos $y = \dfrac{1}{x}$ na última expressão, obtemos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{x^2}$

O que nada mais é que a derivada da função.

Em geral, não é necessário resolver uma equação de y em termos de x, a fim de diferenciar as funções definidas pela equação.

Este método para obter derivadas é chamado de **diferenciação implícita.**

2. Derive implicitamente em função da variável x.

a) $4x^2 - 9y = 1$

$$\frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(-9y) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$8x\frac{dx}{dx} - 9\frac{dy}{dx} = 0$$

$$8x.1 - 9\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x}{-9} = \frac{8x}{9}$$

b) $\dfrac{x}{\sqrt{y}} - 4xy = x$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) + \frac{d}{dx}(-4xy) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{1.\sqrt{y}\,\frac{d}{dx}(x) - \left(\frac{-1}{2}\sqrt{y}\,x\right)}{y} \quad -4y\frac{dy}{dx} - 4x\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{\frac{2}{2}\sqrt{y} + \left(\frac{-1}{2}x\sqrt{y}\right)}{y} \quad -4y\frac{dy}{dx} - 4x = 1$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{y} - x\sqrt{y}}{2}}{y} \quad -4y\frac{dy}{dx} - 4x = 1$$

$$\frac{2y^{\frac{1}{2}} - xy^{\frac{1}{2}}}{2}\,\frac{1}{y} - 4y\frac{dy}{dx} - 4x = 1$$

$$\frac{2y^{\frac{1}{2}}}{2y} - \frac{xy^{\frac{1}{2}}}{2y} - 4y\frac{dy}{dx} - 4x = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y\frac{dy}{dx} - 4x = 1$$

$$-4y\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{x}{\sqrt{y}} + 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-4y} - \frac{\frac{1}{\sqrt{y}}}{-4y} + \frac{\frac{x}{\sqrt{y}}}{-4y} + \frac{4x}{-4y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-4y} + \frac{1}{4}\sqrt{y} - \frac{1}{4}x\sqrt{y} - \frac{-x}{-y}$$

c) $5y^2 + seny = x^2$

$$5y^2 + seny = x^2$$

$$\frac{d}{dx}(5y^2 + seny) = \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$10y\frac{dy}{dx} + \cos y\frac{dy}{dx} = 2x\frac{d}{dx}(x)$$

$$(10y + \cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y + \cos y}$$

Parada para verificação dos seus conhecimentos

Nos exercícios 1 a 3 admita que todas as variáveis sejam funções de t.

1. Se $A = x^2$ e $\frac{dx}{dt} = 3$, determine $\frac{dA}{dt}$ quando x = 5.

2. Se $A = 2y^3 - x^2 + 4x = -10$ e $\frac{dy}{dt} = -3$, quando x = -2 e y = 1, determine $\frac{dx}{dt}$

3. Se $A = 3x^2y + 2x = -32$ e $\frac{dy}{dt} = -4$, quando x = 2 e y = -3, determine $\frac{dx}{dt}$

Parada para verificação dos seus conhecimentos: aplicações

1. Um quadrado se expande de modo que seu lado varia à razão de 5cm/s. Achar a taxa de variação de sua área no instante em que o lado tenha 6cm de comprimento.

2. O raio r de uma esfera está variando, com o tempo, a uma taxa constante de 5m/s. Com que taxa estará variando o volume da esfera no instante em que r =2m ? Sabe-se que o volume da esfera é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

3. Um cilindro é comprimido lateralmente e alonga-se, de modo que o raio da base decresce a uma taxa de 2cm/s e a altura cresce a uma taxa de 5cm/s. Achar a taxa segundo o qual o volume varia. Quando o raio é 6cm e a altura de 8cm. ($V = \pi r^2 h$)

4. Um ponto move-se ao longo do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ de modo que $\dfrac{dx}{dt}$ = -3 unidades por segundo.

Qual será taxa de variação de sua ordenada y, quando x = 2 ?

5. Bombeia-se ar em um balão esférico a uma taxa de 75 cm^3/min. Encontre a taxa de variação do raio quando seu valor é de 5cm.

6. Cascalho está sendo empilhado em uma pilha cônica a uma taxa de 3 metros cúbicos por min. Encontre a taxa de variação da altura da pilha quando a altura é de 3 metros. (Suponha que o tamanho do cascalho é tal que o raio do cone é igual à sua altura).

7. Uma câmara de televisão no nível do solo está filmando a subida de um ônibus espacial que está subindo de acordo com a equação $s = 15t^2$, onde s é medido em metros e t em segundos. A câmara está a 600 metros do local do lançamento. Encontre a taxa de variação entre a câmara e a base do ônibus espacial 10 segundos após o lançamento. (Suponha que a câmara e a base do ônibus espacial estão no mesmo nível quando t = 0).

8. Um avião está voando a uma altitude de 10 quilômetros em uma trajetória que o levará a passar diretamente acima de uma estação de radar. Seja s a distância (em quilômetros) entre a estação de radar e o avião. Se s está decrescendo a uma taxa de 650 Km/h quando s é 16 Km, qual é a velocidade do avião?

9. Suponha que y = f(x) seja uma função derivável e dada implicitamente pela equação: $x y^2 + y + x = 1$

10. Determine uma função y = f(x) que seja dada implicitamente pela equação: $x\,y^2 + y + x = 1$

11. A função y = f(x) é dada implicitamente pela equação $x\ y + 3 = 2x$ Calcule $\frac{dy}{dx}$ para x = 2.

12. A função y= f(x) , y > 0 é dada implicitamente pela equação $x^2 + 4y^2 = 2$ Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa 1.

13. Um tanque tem a forma de um cone invertido, tendo uma altura de 5m e raio da base de 1m. O tanque se enche de água a uma taxa de $2m^3$ /min. Com que velocidade sobe o nível da água, quando a água está a 3m de profundidade?

14. Uma escada com 5m está encostada em uma parede. Se a base da escada é afastada a uma velocidade de 1m/s, qual a velocidade com que o topo da escada escorrega pela parede quando a base está a 4m da parede?

15. Quando um fabricante de móveis produz x cadeiras por semana, o custo total e a receita total semanal são C e R, respectivamente, C = 3000 + 40x e R = 150x - 0,25 x^2. Se a produção semanal atual é 200 cadeiras e ela está aumentando a uma taxa de 10 cadeiras por semana, ache a taxa de variação:

a) do custo total semanal.
b) da receita total semanal.
c) do lucro total semanal.

16. A pressão P e o volume V de uma amostra de gás que sofre uma expansão adiabática estão relacionados pela equação $P\ V^{1,4} = 0$, onde C é uma constante. Num determinado instante, o volume da tal amostra é 4 cm^3, a pressão é 4000 Kg/cm^2 e o volume está crescendo a uma taxa de $2cm^3/s$. A que razão a pressão está variando neste instante?

17. Marcos tem 1000 m de grade com os quais pretende construir um cercado retangular para seu pequeno poodle francês. Quais as dimensões do cercado retangular de área máxima?

18. Quadrados iguais são cortados de cada canto de um pedaço retangular de papelão medindo 8cm de largura por 15 cm de comprimento, e uma caixa sem tampa é construída virando os lados para cima. Determine o comprimento x dos lados dos quadrados que devem ser cortados para a produção de uma caixa de volume máximo.

19. Uma lata cilíndrica de estanho (sem tampa) tem volume de 5 cm^3. Determine suas dimensões se a quantidade, de estanho para a fabricação da lata é mínima.

20. Determine dois números positivos cuja soma seja 4 e tal que a soma do cubo do menor com o quadrado do maior seja mínima.

21. Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de $12100m^2$. A prefeitura exige que exista um espaço livre de 25m de frente, 20m atrás e 12m de cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha área mínima na qual possa ser construído este galpão.

22. Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja 2500 m^3. O material da base vai custar R$ 1200,00 por m^2 e o material dos lados R$ 980,00 por m^2. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.

23. Uma loja vende um acessório para automóveis, a R$ 400,00 por unidade. O custo total para negociar x unidades é de f(x)= 0,02 x + 160 x + 400000. Quantos acessórios devem ser vendidos para que tenha lucro máximo?

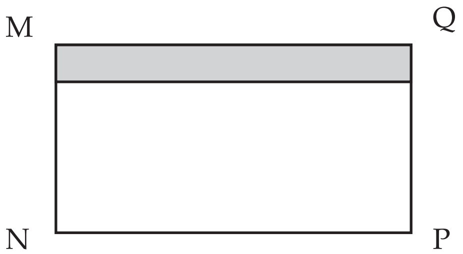
24. Para as funções abaixo, calcular:
a) Os pontos críticos (caso existam),
b) Estudar os intervalos onde a função é crescente ou decrescente.

c) Os pontos de inflexão (caso existam),
d) Estudar os intervalos de concavidade, onde a função é côncava para cima ou côncava para baixo.
e) Pontos de Máximo e de mínimo (caso existam),
f) Os limites necessários,
g) As assíntotas ,
h) o gráfico da função dada.

a) $y = x^3 + 3x - 2$ b) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ c) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

d) $y = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$ e) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x + 3}$ f) $y = x(x-1)(x-2)$

25. Quer-se construir um galinheiro de forma retangular. Para isto se dispõe de 50 metros de tela e de uma parede já existente. Determinar as medidas $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ do galinheiro, para que sua área seja máxima.



26. O raio de uma esfera de aço mede 1,5 cm e sabe-se que o erro cometido na sua medição não excede 0,1cm. O volume da esfera é calculado a partir da medida de seu raio usando-se a fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Estime o erro possível no cálculo do volume.

27. Use diferenciais para achar o volume aproximado de uma camada circular de 6 cm de altura cujo raio interno mede 2cm e cuja espessura é de 0,1 cm.

28. Encontre aproximadamente o volume de uma concha esférica cujo raio é 4 cm e cuja espessura é 1 / 16 cm.

29. Um tanque cilíndrico aberto deve ter um revestimento externo com espessura de 0,5 cm. Se o raio interno é de 1m e a altura é 3m, usando diferenciais encontre a quantidade de revestimento que deve ser usada.

MATEMÁTICA

Disciplina

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Módulo 3

INTEGRAL

Henrique Mongelli
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli

LICENCIATURA

Capítulo I

INTRODUÇÃO: ORIGEM DO CONCEITO DE INTEGRAL

A ideia ou o conceito de integral foi formulado por Newton e Leibniz no século XVII, mas a primeira tentativa de uma conceituação precisa foi feita por volta de 1820, pelo matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Os estudos de Cauchy foram incompletos mas muito importantes por terem dado início à investigação sobre os fundamentos do Cálculo Integral, levando ao desenvolvimento da Análise Matemática e da teoria das funções.

Por volta de 1854, o matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866) realizou um estudo bem mais aprofundado sobre a integral e, em sua homenagem, a integral estudada por ele passou a receber o nome de Integral de Riemann. Tal nome serve para distinguir essa integral de outras que foram introduzidas mais tarde, como por exemplo, a Integral de Lebesgue. A forma usada para introduzir o conceito de Integral de Riemann nos cursos de Cálculo é a versão devida a Cauchy. O que justifica isto é, que ela é simples e bastante acessível aos alunos de um curso inicial de Cálculo, além de atender aos propósitos de um curso desta natureza.

Nos cursos de Análise Matemática, apresenta-se uma versão mais refinada, a Integral de Darboux-Riemann, usando os conceitos de soma inferior, soma superior, integral inferior e integral superior, que correspondem ao método de exaustão usando, respectivamente, polígonos inscritos e polígonos circunscritos.

Mas, para que ninguém alimente idéias equivocadas, observamos que as diversas definições da Integral de Riemann mencionadas são equivalentes e a diferença entre elas situa-se na adequação das definições para a obtenção das propriedades da referida Integral.

Primitiva de uma função

Nosso objetivo agora é encontrar uma fórmula que dê todas as funções que poderiam ter f como derivada. Essas funções são chamadas de **primitivas** de f, e a fórmula que fornece todas elas é chamada **integral definida de f.**

A operação inversa da diferenciação é chamada **antidiferenciação.** A antidiferenciação é o processo segundo o qual determina-se o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função.

Definição de primitiva

Uma função F(x) é chamada primitiva de uma função f, em um intervalo I, se F'(x) = f(x) para todo valor de x em I.

O conjunto de todas as primitivas de f é a **integral definida de f** em relação a x, denotada por $\int f(x)dx$, em que $\int$ é o símbolo de uma integral. A função f é o integrando de uma integral e x é a variável de integração.

A notação $\int f(x)dx$ = F(x) + C, onde C é uma constante arbitrária, significa que a função F(x) é uma primitiva da função, tal que F'(x) = f(x) vale para todos os valores de x no domínio de f.

Exemplos.

1. Encontrar a função cuja primitiva é $F(x) = 4x^2 + 3x + 3$.

$$F(x) = 4x^2 + 3x + 3$$
$$F'(x) = 8x + 3$$

Se função é a f(x) = 8x + 3, dizemos que f(x) é a derivada de F(x) e que F(x) é uma primitiva de f(x).

Observe que

$$H(x) = 4x^2 + 3x + 54$$
$$H'(x) = 8x + 3$$

Se função é a f(x) = 8x + 3, dizemos que f(x) é a derivada de H(x) e que H(x) é uma primitiva de f(x).

Procuramos mostrar que a função $F'(x) = H'(x)$, mas $F(x) \neq H(x)$. Isto é, **toda função cujos valores são dados por $4x^2 + 3x + C$, onde C é uma constante qualquer, é uma primitiva de f(x).**

Teorema

Se F(x) é uma determinada primitiva de f(x) em um intervalo I, então o conjunto de todas as antiderivadas de f(x) em I é dado por F(x) + C, em que C é uma constante qualquer e todas as primitivas de f(x) em I podem se obtidas de F(x) + C, atribuindo-se valores particulares para C.

Verifique que:

1. $\int dx = x + C$

   De fato, $F(x) = x$ e $F'(x) = 1$

   Ou $\int dx = \int 1 \,.\, dx = x + C$, portanto a derivada de x é 1.

2. $\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + C$

   De fato, $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ e $F'(x) = \dfrac{2x}{2} = x$

   Ou $\int dx = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + C$, portanto a derivada de $\dfrac{x^2}{2}$ é x.

3. $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + C$

   De fato, $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ e $F'(x) = \dfrac{3x^2}{3} = x^2$

   Ou $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + C$, portanto a derivada de $\dfrac{x^3}{3}$ é x^2.

Fórmulas de integrais

São imediatas as seguintes propriedades.

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, n ≠ - 1, n racional.

3. $\int a\, dx = a\int dx = ax + C$, a constante

4. $\int e^{kx} \, dx = \dfrac{1}{k} e^{kx} + C$

5. $\int a^x \, dx = \dfrac{1}{\ln a} a^x + C$, $a \neq 1$, $a > 0$.

6. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln x + C$, $x > 0$

7. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

8. $\int senkx\, dx = \dfrac{-\cos kx}{k} + C$

9. $\int \cos kx\, dx = \dfrac{senkx}{k} + C$

10. $\int \sec^2 x\, dx = tg\, x + C$

11. $\int \sec x . tgx\, dx = \sec x + C$

12. $\int \cos ec^2 x\, dx = -\cot g\, x + C$

13. $\int \cos ec\, x . \cot gx\, dx = -\cos ec\, x + C$

14. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\ senx + C$

15. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = arc\ tgx + C$

16. $\left(\int dx\right)' = f(x)$

17. $\int - dx = -x + C$

Exercícios resolvidos

1. $\int x^5\, dx = \dfrac{x^{5+1}}{5+1} + C = \dfrac{x^6}{6} + C$

2. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{-1}{2}}\, dx = \dfrac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

3. $\int x^{-3}\, dx = \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \dfrac{x^{-2}}{-2} + C = -\dfrac{1}{2x^2} + C$

4. $\int e^{2x}\, dx = \dfrac{e^{2x}}{2} + C = \dfrac{1}{2}e^{2x} + C$

5. $\int e^{-3x}\, dx = \dfrac{e^{-3x}}{-3} + C = -\dfrac{1}{3}e^{-3x} + C$

6. $\int 5e^{-3x}\, dx = \left(\dfrac{e^{-3x}}{-3} + C\right) = -\dfrac{5}{3}e^{-3x} + C$

7. $\int 2^x\, dx = \dfrac{1}{\ln 2}2^x + C$

8. $\int \left(x^5 + 2x\right) dx = \int \left(x^5\right) dx + \int (2x)\, dx = \dfrac{x^{5+1}}{5+1} + \dfrac{2x^2}{2} + C = \dfrac{x^6}{6} + x^2 + C$

9. $\int \left(\dfrac{x^2}{3} + 2x^4\right) dx = \int \left(\dfrac{x^2}{3}\right) dx + \int \left(2x^4\right) dx = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x^{2+1}}{2+1}\right) + \dfrac{2x^5}{5} + C = \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{2x^5}{5} + C$

10. $\int \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{x^2+1}\right) dx = \int \left(\dfrac{1}{x}\right) dx - \int \dfrac{5}{x^2+1} dx = \ln x - 5\left(\int \dfrac{1}{x^2+1}\right) dx = \ln x - 5\, arc\, tg x + C$

11. $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\dfrac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C =$

$= \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

12. $\int 5\sec x\, tgx\, dx = 5\int \sec x\, tgx\, dx = 5\sec x + C$

13. $\int \sqrt{x^3}\,2x\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,2x\,dx = 2\int x^{\frac{3}{2}}\,x\,dx = 2\int x^{\frac{3}{2}+1}\,dx =$

$=2\int x^{\frac{5}{2}}\,dx\ 2\left(\dfrac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right) = \dfrac{4}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$

Parada para verificação dos seus conhecimentos

Resolva as integrais.

a) $\int(5x+\sqrt{x}-7)\ dx$

b) $\int\sqrt{7x-2}\ \ dx$

c) $\int(y^3+2)^2\ dy$

d) $\int x^2\ \sqrt{x+1}\ dx$

e) $\int e^{3x}\ \cos 4x\ \ dx$

f) $\int\dfrac{x^2}{\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

g) $\int\dfrac{dx}{x\ \sqrt{x^2+9}}$

h) $\int\dfrac{3x-5\quad dx}{x^2-x-2}$

i) $\int\dfrac{x+1}{x(x-2)}dx$

j) $\int\dfrac{3x^2+4x+2}{x(x+1)^2}$

k) $\int (2x^2 - 1)^3 \, dx$

l) $\int (3x^2 + 2)^3 \, dx$

m) $\int x(2x^2 - 1)^3 \, dx$

n) $\int \frac{3\sqrt{x} - x + 4}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

o) $\int \left(2 + 3\sqrt{z}\right)^2 z dz$

p) $\int \frac{\left(2 + 3\sqrt{z}\right)^4}{\sqrt{z}} dz$

A aplicação imediata das fórmulas na resolução de exercícios de integrais resolve alguns casos, não para todos. Muitas antiderivadas não podem ser encontradas desta maneira, mas, muitas vezes, podemos encontrar a solução de certos exercícios envolvendo integrais, fazendo a troca de variável.

Mudança de variável ou método da substituição

TEOREMA I

Seja h(x) uma função de x diferenciável e seja o intervalo I a imagem de h(x). Suponha que f(x) seja uma função em I e que F(x) seja uma antiderivada de f(x) em

I. Então, se u = h(x),

$$\int f(h(x))\, h'(x)\, dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

TEOREMA II

Se f(x) é uma função diferenciável, então se u = f(x),

$$\int (f(x)^n)\; f'(x)\, dx = \int u^n \; du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

Exemplos.

1. Queremos encontrar a $\int 2x\sqrt{1 + x^2} \; dx$

Se tentássemos obter $\int 2x\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$, diretamente isto não seria possível. Que propriedades dos reais poderiam usar?

Podemos fazer a seguinte troca de variável, vamos trocar a variável x por u, para isso chamamos de $u = 1 + x^2$ e a derivada de u é $du = 2x\,dx$. Na expressão $\int 2x\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$, trocando a variável, obtemos $\int (u)^{\frac{1}{2}}\,du$

Assim, $\int 2x\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}du = \dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

e portanto, $\int 2x\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

2. Queremos encontrar a $\int x\left(x^2+2\right)^{100}\,dx$

Vamos trocar a variável x por u, para isso chamamos de $u = x^2 + 2$ e a derivada de u é $du = 2x\,dx$. Na expressão , $\int x\left(x^2+2\right)^{100}\,dx$ trocando a variável, obtemos $\int \frac{1}{2}(u)^{100}\,du$

Assim, $\int x\left(x^2+2\right)^{100}dx = \int \frac{1}{2}(u)^{100}\,du = \dfrac{1}{2}\dfrac{u^{101}}{101} + C =$
$\dfrac{(x^2+2)^{101}}{202} + C$

e portanto, $\int x\left(x^2+2\right)^{100}\,dx = \dfrac{(x^2+2)^{101}}{202} + C$

3. Queremos encontrar a $\int \cos(7x+3)\,dx$

Vamos trocar a variável x por u, para isso chamamos de $u = 7x + 3$ e a derivada de u é $du = 7\,dx$. Na expressão $\int \cos(7x+3)\,dx$,

trocando a variável, obtemos $\int \frac{1}{7}\cos u\,du$

Assim,

$$\int \cos(7x+3)\,dx = \int \frac{1}{7}\cos u\,du = \frac{1}{7} senu + C = \frac{1}{7} sen\,(7x+3) + C$$

e portanto,

$$\int \cos(7x+3)\,dx = \frac{1}{7} sen\,(7x+3) + C$$

4. Queremos encontrar a $\int x^2 \cos x^3\,dx$

Vamos trocar a variável x por u, para isso chamamos de $u = x^3$ e a derivada de u é $du = 3x^2\,dx$. Na expressão, $\int x^2 \cos x^3\,dx$

trocando a variável, obtemos $\int \frac{1}{3}\cos u\,du$

Assim, $\int x^2 \cos x^3\,dx = \int \frac{1}{3}\cos u\,du = \frac{1}{3} senu + C = \frac{1}{3} sen\,x^3 + C$

e portanto $\int x^2 \cos x^3\,dx = \frac{1}{3} sen\,x^3 + C$

5. Queremos encontrar a $\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x - 1)}\,dx$

Vamos trocar a variável x por u, para isso chamamos de $u = e^x - 1$ e a derivada de u é $du = e^x\,dx$.

Na expressão $\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x - 1)}\,dx$, trocando a variável, obtemos $\int \frac{1}{\cos^2 u}\,du$

Assim, $\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x - 1)}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 u}\,du$, mas sabemos que $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x - 1)}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 u}\,du = \int \sec u\,du = tgu + C$, e portanto

$$\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x - 1)}\,dx = tgu + C$$

6. Queremos encontrar a $\int \frac{t}{\sqrt{t+5}}\, dt$

Vamos trocar a variável t por u, para isso chamamos de u = $\sqrt{t+5}$

e a derivada de u é du = $\frac{1}{2\sqrt{t+5}} dt$. Na expressão $\int \frac{t}{\sqrt{t+5}}\, dt$,

trocando a variável, ainda temos a variável t. Assim, precisamos isolar t da expressão u = $\sqrt{t+5} \Rightarrow u^2 = t + 5 \Rightarrow u^2 - 5 = t$. Agora sim, podemos fazer a mudança de variável.

Assim,

$$\int \frac{t}{\sqrt{t+5}}\, dt = \int (u^2 - 5)\, 2\, du = 2\int (u^2 - 5)\, du = 2\int u^2\, du - 2\int 5du =$$

$$= 2\frac{u^3}{3} - 10u + C = 2\frac{\left(\sqrt{t+5}\right)^3}{3} - 10\sqrt{t+5} + C \text{ e, portanto,}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{t+5}}\, dt = 2\frac{\left(\sqrt{t+5}\right)^3}{3} - 10\sqrt{t+5} + C$$

7. Queremos encontrar a $\int tgx\, dx$

Primeiramente, vamos fazer a seguinte troca $tgx = \frac{senx}{\cos x}$.

Ficamos com $\int tgx\, dx = \int \frac{senx}{\cos x}\, dx$. Vamos trocar a variável x por u,

para isso chamamos de u = cosx e a derivada de u é du = - senx dx.

Na expressão $\int tgx\, dx = \int \frac{senx}{\cos x}\, dx$ trocando a variável, obtemos

$$\int \frac{senx}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln|u| + C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C \underbrace{=}_{\text{Prop. log}} \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C \underbrace{=}_{\frac{1}{\cos x} = \sec x} \ln|\sec x| + C$$

e portanto,

$$\int tgx\, dx = \ln|\sec x| + C$$

8. Queremos encontrar a $\int \cot gx\, dx$

Primeiramente, vamos fazer a seguinte troca $\cot gx = \dfrac{\cos x}{senx}$.

Ficamos com $\int \cot gx\, dx = \int \dfrac{\cos x}{senx}\, dx$. Vamos trocar a variável

x por u, para isso chamamos de u = senx e a derivada de u é du = cosx dx.

Na expressão $\int \cot gx\, dx = \int \dfrac{\cos x}{senx}\, dx$, trocando a variável, obtemos

$$\int \cot gx\, dx = \int \frac{\cos x}{senx}\, dx = \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln|senx| + C = -\ln|\cos ec\, x| + C$$

e portanto,

$$\int \cot gx\, dx = -\ln|\cos ec\, x| + C$$

Parada para verificação dos seus conhecimentos

Calcule utilizando troca de variável (substituição).

1. $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$
2. $\int (senx)^2 \cos x\, dx$
3. $\int x e^{3x}\, dx$
4. $\int \ln 5x\, dx$
5. $\int \dfrac{1}{x+5}\, dx$
6. $\int \dfrac{1}{(x-2)^4}\, dx$
7. $\int \dfrac{2x}{1+x^2}\, dx$
8. $\int x^3 \left(1+x^4\right) dx$
9. $\int \sqrt{3x+5}\, dx$
10. $\int x \cos x\, dx$
11. $\int tgx\, dx$
12. $\int \cos^2 x\, dx$

Equações diferenciais

Definição

Uma equação contendo derivadas é chamada de **equação diferencial.**

O tipo mais simples de equação diferencial tem a forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ ou podemos escrever}$$

$$dy = f(x)\,dx \text{ , onde f(x) é uma dada função.}$$

Exemplos de equações diferenciais simples.

1. $\frac{dy}{dx} = 3x$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^3}{2y}$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x}{2y} + 3$

Nosso objetivo é encontrar a solução para essa equação diferencial.

Como encontrar essa solução.

Para resolvermos a equação dy = f(x) dx precisamos encontrar todas as funções g(x) para os quais y = g(x), tais que a equação seja satisfeita. Evidentemente, y = g(x) é uma solução de dy = f(x) dx se e somente se g(x) é uma antiderivada de f.
Isto é, se d(g(x)) = d(f(x) + C) = f(x) dx, então a **chamada solução completa** de dy = f(x) dx é dada por y = F(x) + C.

Exemplos.

1. Vamos encontrar a equação completa da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$\frac{dy}{dx} = 3x$ é dada por $\int \frac{dy}{dx} = \int 3x\,dx \Rightarrow y = \frac{3x^2}{2} + C$

2. Vamos encontrar a equação completa da equação diferencial

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - \frac{1}{x^2} + 7$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - \frac{1}{x^2} + 7$ é dada por $\int \frac{dy}{dx} = \int 3x^2\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int 7dx$

$$\int \frac{dy}{dx} = \int 3x^2\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int 7dx \Rightarrow y = x^3 - \frac{1}{x} + 7x + C$$

Logo, uma **solução completa é** $y = x^3 - \frac{1}{x} + 7x + C$

3. Encontrar uma solução particular para a equação diferencial

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - \frac{1}{x^2} + 7$, **cuja solução completa é** $y = x^3 - \frac{1}{x} + 7x + C$

sendo y = 10 quando x = 1.

$$\int \frac{dy}{dx} = \int 3x^2\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int 7dx \Rightarrow y = x^3 - \frac{1}{x} + 7x + C \Rightarrow$$

$$10 = 1^3 - \frac{1}{1} + 7.1 + C \Rightarrow 10 = 7 + C \Rightarrow 10 - 7 = C \Rightarrow C = 3$$

Logo, uma **solução particular é** $y = x^3 - \frac{1}{x} + 7x + 3$

4. Vamos encontrar a equação completa da equação diferencial

$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{x^2 + 4}$

$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{x^2 + 4}$, é dada por $\int \frac{dy}{dx} = \int x\sqrt{x^2 + 4}\,dx \Rightarrow y = \int x\sqrt{x^2 + 4}\,dx$

Esta integral é resolvida por troca de variável. Fazendo $u = x^2 + 4 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$y = \int x\sqrt{x^2 + 4}\,dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}} + C$$

Logo, uma **solução completa** é $y=\frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}+C$

5. Encontrar uma solução particular para a equação diferencial

$\frac{dy}{dx}=x\sqrt{x^2+4}$ **, cuja solução completa é** $y=\frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}+C$

sendo y = 8 quando x = 2.

$$y=\frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}+C \Rightarrow 8=\frac{1}{3}(2^2+4)^{\frac{3}{2}}+C \Rightarrow 8=\frac{1}{3}(8)^{\frac{3}{2}}+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8=\frac{1}{3}\sqrt{8^3}+C \Rightarrow 24=\sqrt{8^2.8}+C \Rightarrow 24=8\sqrt{8}+C \Rightarrow 24-8\sqrt{8}=C$$

Logo, uma **solução particular** é $y=\frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}+24-8\sqrt{8}$

6. Vamos encontrar a equação completa da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x^2}{3y^3}$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x^2}{3y^3} \Rightarrow 3y^3dy=2x^2dx$, é dada por

$$\int 3y^3dy=\int 2x^2 \Rightarrow \frac{3}{4}y^4=\frac{2}{3}x^3+C \Rightarrow \frac{9}{12}y^4=\frac{8}{12}x^3+\frac{C}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9y^4=8x^3+C \Rightarrow y^4=\frac{1}{9}\left(8x^3+C\right)$$

Logo, uma **solução completa** é $y^4=\frac{1}{9}\left(8x^3+C\right)$

7. Vamos encontrar a equação completa da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3x+2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3x+2 \Rightarrow \int\frac{d^2y}{dx^2}=\int(-3x+2)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}x^2+2x+C$$

Temos que repetir o processo, pois ainda não encontramos a solução completa.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + C \Rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \int \left(-\frac{3}{2}x^2 + 2x + C \right) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + Cx + C \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + C(x+1)$$

Logo, uma **solução completa** é $y = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + C(x+1)$

Parada para verificação dos seus conhecimentos

Encontre a solução completa da equação diferencial.

1. $\frac{dy}{dx} = 3x - 4$
2. $\frac{dy}{dx} = 6 - 3x^2$
3. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 = 2x - 7$
4. $\frac{dy}{dx} = 3x^5 - 4x$
5. $\frac{dy}{dx} = (3x - 4)^3$
6. $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{2x - 1}$
7. $\frac{dy}{dx} = 3xy^4$
8. $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^3 - 4x^2$

Integração por partes

O método de integração por partes é bastante útil e é uma técnica para simplificar integrais da forma $\int f(x)g(x)dx$, sendo f(x) e g(x) funções diferenciáveis.

Fórmula de integração por partes

Se f(x) e g(x) são funções diferenciáveis, então, pela regra de diferenciação do produto,

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

Integrando ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{d\big(f(x)g(x)\big)}{dx} = \int f'(x)g(x)\,dx + \int g'(x)f(x)\,dx$$

$$f(x)g(x) + C = \int f'(x)g(x)\,dx + \int g'(x)f(x)\,dx$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx + C$$

Obtemos, assim, a fórmula de integração por partes

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

ou

Se considerarmos u = f(x) ⇒ du = f '(x) dx e v = g(x) ⇒ v = g′(x) dx temos a seguinte fórmula de integração por partes

$$\int u\,dv = u\,v - v\,du$$

Exemplos

1. Calcule $\int xe^x\,dx$

Consideremos

u = x ⇒ du = dx

e

$v = e^x \Rightarrow \int d(v) = \int e^x\,dx \Rightarrow v = \int e^e\,dx$

$$\int xe^x\,dx \underbrace{\quad = \quad}_{\text{aplicação da fórmula}} x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C$$

Logo, $\int xe^x\,dx = x\,e^x - e^x + C$

2.Calcule $\int x \ln x\,dx$

Consideremos

$u = \ln x \Rightarrow du = 1 / x\, dx$

e

$d(v) = x dv \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Logo, $\int x \ln x\, dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + C$

3. Calcule $\int x \cos x\, dx$

Consideramos

$u = x \Rightarrow du = dx$

e

$d(v) = \cos x\, dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Logo, $\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

4. Calcule $\int \ln x\, dx$

Consideramos

$u = \ln x \Rightarrow du = 1 / x\, dx$

e

$d(v) = 1\, dx \Rightarrow v = x$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Logo, $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$

5. Calcule $\int x^2 e^x dx$

Consideramos

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\, dx$

e

$d(v) = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2\underbrace{\int x e^x dx}_{\text{integração por partes}} ** \quad (1)$$

Observe como calcular $2\int x e^x dx$? Rdepetindo o processo.

Vamos calcular separadamente o valor da seguinte integral $2\int x e^x dx$

Consideremos

$u = x \Rightarrow du = 1\, dx$

e

$d(v) = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$2\int x e^x dx = 2(x e^e - \int e^x dx) = 2x e^x - 2e^x + C$$

Substituindo o resultado anterior em (1)

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - (2x e^x - 2e^x + C) =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - \overline{C}$$

Logo, $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - C$

6. Calcule $\int e^x \cos x\, dx$

Consideramos

$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

e

$dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = senx$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x senx - \int e^x \underbrace{senx\ dx}_{\text{integração por partes}} ** \qquad (1)$$

Repetindo o processo e vamos calcular separadamente o valor da integral $\int e^x senx\ dx$

Consideremos

$u = e^x \Rightarrow du = e^x\, dx$

e

$dv = \operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow v = -\cos x\ dx$

$$\int e^x senx\ dx = -e^x \cos x - \int e^x (-\cos x)\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\ dx$$

Substituindo o resultado anterior em (1)

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x senx - \int e^x senx\ dx = e^x senx - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right)$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x senx + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

Observe que a integral que queremos resolver aparece agora dos dois lados da equação anterior. Adicionamos a integral em questão aos dois lados da equação. Obtemos

$$\int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx = e^x senx + e^x \cos x$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x senx + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x senx + e^x \cos x}{2} + C$$

Logo, $\int e^x \cos x\, dx = \dfrac{e^x senx + e^x \cos x}{2} + C$

Parada para verificação dos seus conhecimentos

Calcule utilizando integração por partes.

1. $\int x \cos 2x\, dx$ 2. $\int x\, senkx\, dx$ 3. $\int x e^{3x}\ dx$

4. $\int \ln 5x\, dx$

5. $\int x \ln 2x\, dx$

6. $\int x e^{-2x}\, dx$

7. $\int x^2\, sen 3x\, dx$

8. $\int e^{-x} \cos 2x\, dx$

9. $\int sen^{-1} 3x\, dx$

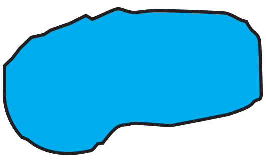
10. $\int \sec^3 x\, dx$

Capítulo II

INTEGRAL DEFINIDA

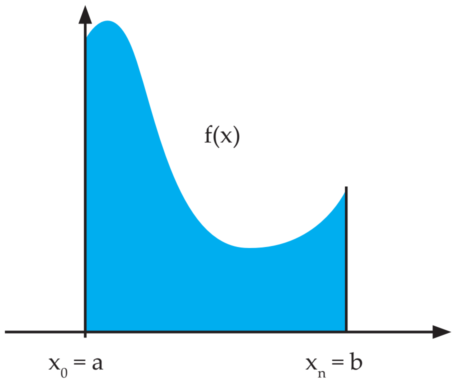
Somas de integrais

Para definirmos a integral definida, precisamos entender a noção de somas de integrais. Sabemos calcular a área das figuras poligonais planas, mas como calcular a área da figura representada a seguir?

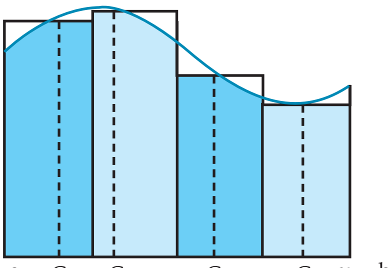


Precisamos então estudar o cálculo de áreas sob curvas de funções e esse é o nosso ponto de partida. Nosso problema é o seguinte:

Suponhamos que é dada uma função f(x), contínua no intervalo [a,b], mostrada no gráfico a seguir. Desejamos calcular a área delimitada por esta curva no intervalo [a,b].



Sabemos calcular a área de retângulos, desta forma, aproximadamente, poderíamos dividir o intervalo [a,b] em **n** pequenos subintervalos com comprimento igual a Δx, como na figura a seguir.



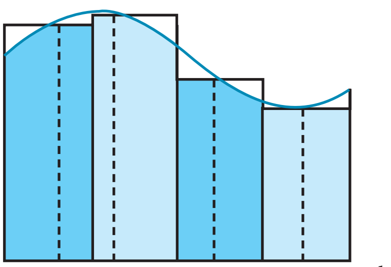
Logo, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e construímos retângulos sob a curva.

Sejam $a = x_0, x_1, x_2,\ldots,x_n = b$ os extremos destes subintervalos com

$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ e $a = x_0$, $x_1 = a + \Delta x$, ... ,$xi = a + (i - 1)\, \Delta x$, $x_{n-1} = a + (n - 1)\, \Delta x$, $xn = b$.

Vamos denominar o i-ésimo intervalo por $[x_{i-1} , x_i]$

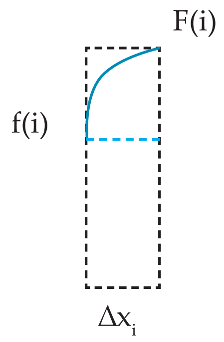
Observe, na figura a seguir, que temos retângulos por falta de área (retângulos inscritos) e retângulos por excesso de áreas (retângulos subscritos).



Subdividimos, novamente, o intervalo [a,b] em **n** pequenos novos subintervalos e construímos os retângulos sob a curva. Observe que a sobra de área nos retângulos por excesso e dos retângulos por falta são bem menores.

Imagine se continuássemos o processo de subdivisões do intervalo [a,b] em subintervalos cada vez menores e construíssemos os retângulos sobre a curva; a soma das áreas dos retângulos aproximariam-se da área da função abaixo da curva.

Sejam, em cada pequeno intervalo [x_i, x_{i+1}], *fi* e *Fi* o menor valor e o maior valor da função no intervalo. Então



em que a área do retângulo menor é $f_i\ \Delta x_i$ e a área do retângulo maior é $F_i\ \Delta x_i$, considerados ambos no mesmo intervalo. Os retângulos permitem fazer uma aproximação para o cálculo da região que fica entre o gráfico da função y= f(x) e o eixo x. Em cada subintervalo, formamos o produto $f(c_i)\ \Delta x_i$. Como temos n retângulos desses, calculamos a somas de todas essas áreas.

Soma das áreas dos retângulos menores (somas integrais inferior):

$$s_n = f(1)\Delta x_1 + f(2)\Delta x_2 + \ldots + f_n \Delta x_n$$

Soma das áreas dos retângulos maiores (somas integrais superior):

$$S_n = F(1)\Delta x_1 + F(2)\Delta x_2 + \ldots + F(n)\Delta x_n$$

Como

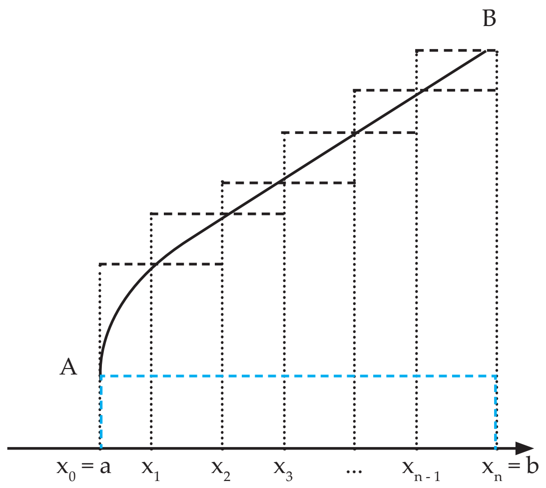
$$s_n < S_n$$

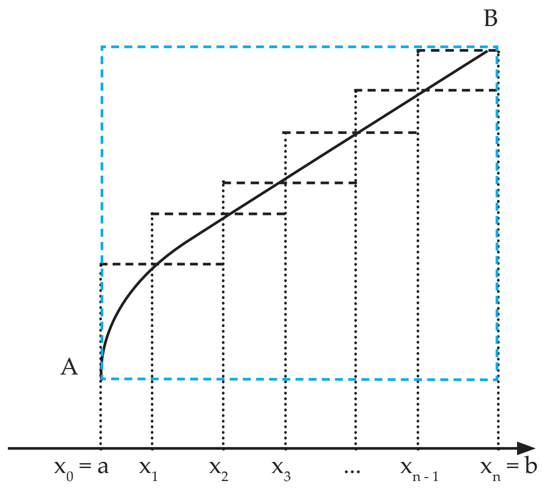
podemos escrever:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Essa soma, que depende da partição de [a,b] em n subintervalos e da escolha dos números c_k, é uma **soma de Riemann** para f no intervalo [a,b].

A área do retângulo construído com o menor valor da função, em todo o intervalo [a,b], é dado por f(b - a) e a área do retângulo construído com o maior valor da função, em todo o intervalo [a,b], é dado por F(b - a).





Assim,

$$s_n \geq m(b-a)$$

$$S_n \leq m(b-a) \text{ e temos,}$$

$$m(b-a) \leq s_n \leq S_n M(b-a)$$

A integral definida como limite de somas de Riemann

Definição

Seja f uma função definida em um intervalo fechado [a,b]. Para qualquer partição p de [a,b], escolha números c_k arbitrariamente nos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Se houver um número I tal que

$$\lim_{|p|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = I$$

com p igual ao tamanho da partição, independentemente de como P e os c_k forem escolhidos, então f será integrável em [a,b] e I será a integral definida de f em [a,b].

Na expressão simbólica da integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

a é o **limite inferior** da integração, b o **limite superior** da integração, o intervalo [a,b] é o intervalo de integração e x é a variável de integração.

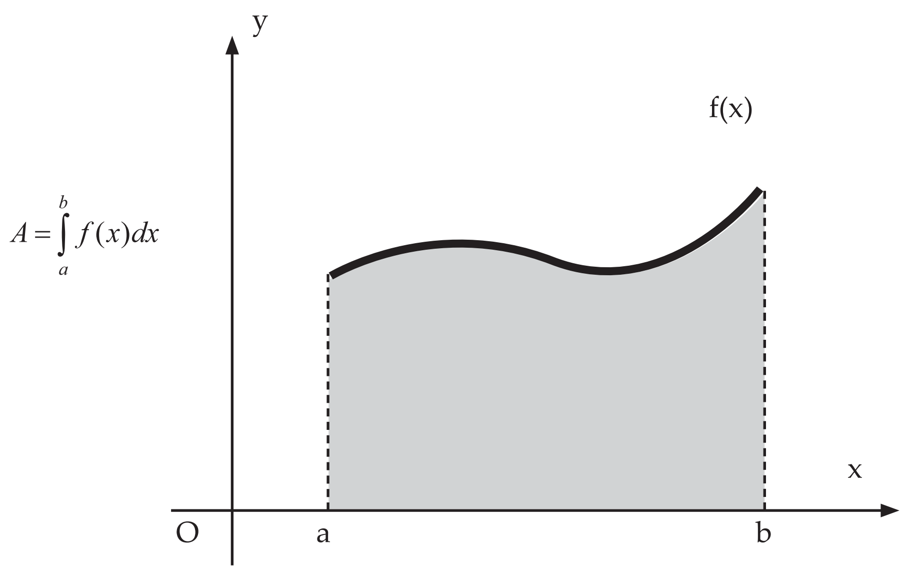
Se f(x) é contínua sobre um intervalo [a,b], ela é integrável neste intervalo.

A integral definida de f(x) depende dos limites de integração, mas não da variável de integração. Podemos, então, escrever indiferentemente

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

Definição

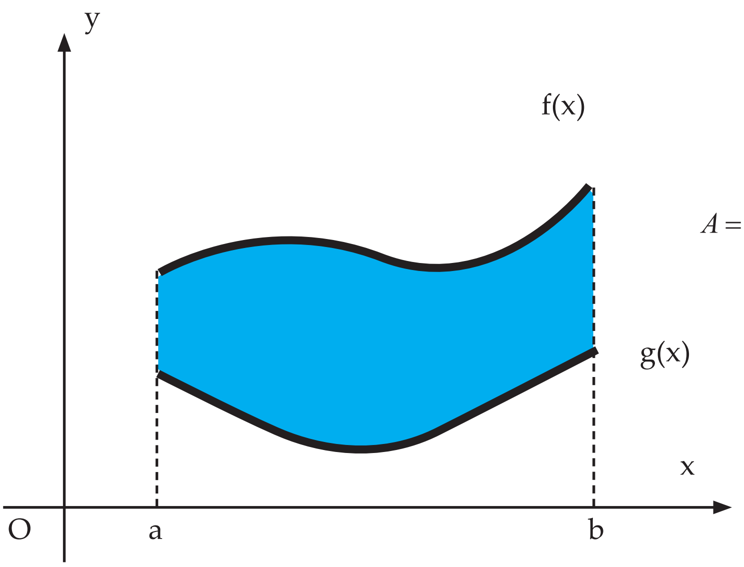
Se y = f(x) for não negativa e integrável em um intervalo fechado [a,b], então a área sob a curva y =f(x), desde a até b, será a integral de f de a até b,



Vamos analisar quatro casos.

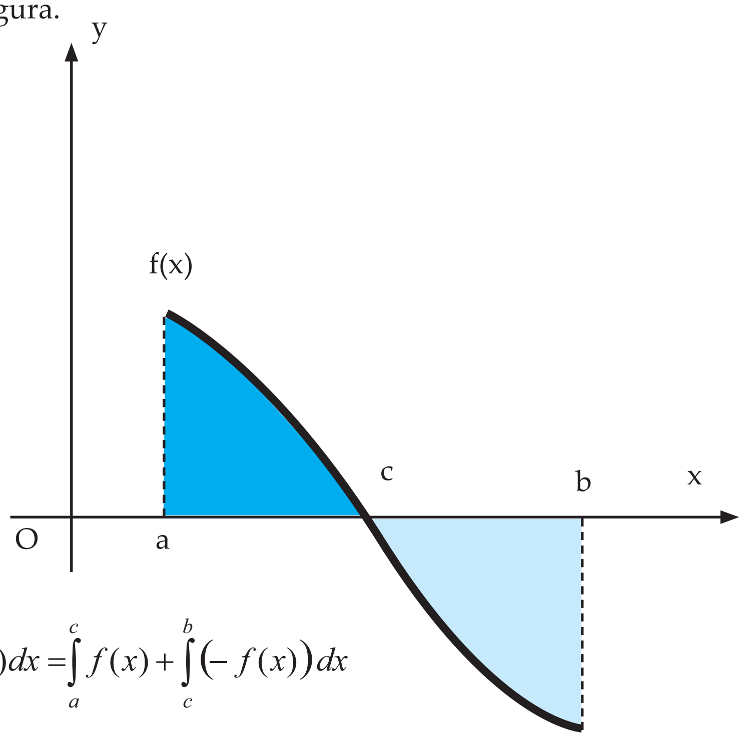
Primeiro Caso. Se $f(x) \geq 0, \int_a^b f(x)dx$ representa a área entre o eixo x e a curva f(x), para $a \leq x \leq b$. Como podemos ver na figura anterior e $A = \int_a^b f(x)dx$

Segundo Caso. Se $f(x) \geq g(x), \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$ representa a área entre o eixo x e a curva f(x), para $a \leq x \leq b$. Como podemos ver na próxima figura, esta área está na cor azul.



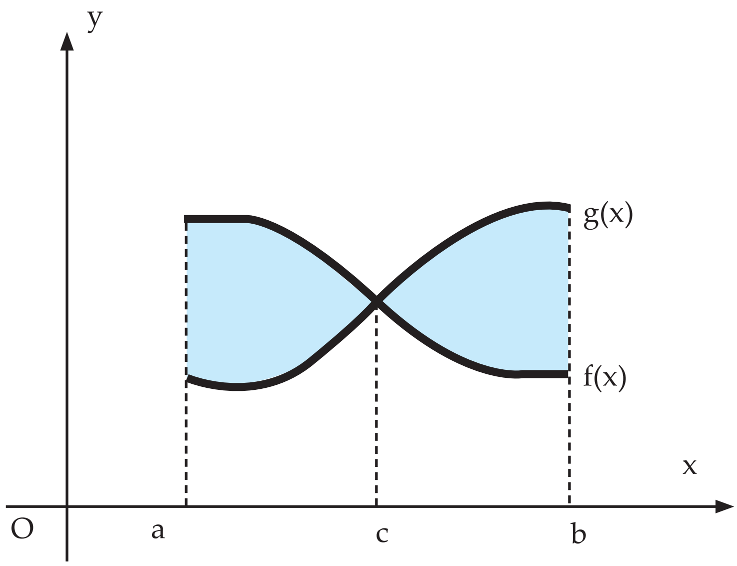
$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

Terceiro Caso. Se f(x) ≥ 0 para $a \leq x \leq c$ e f(x) ≤ 0 para $c \leq x \leq b$ então a área entre o eixo x e a curva f(x), para $a \leq x \leq b$ é dada por $A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b \left(- f(x)\right) dx$. Como podemos ver na próxima figura.



$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b \left(- f(x)\right) dx$$

Quarto Caso. Se f(x) ≥ g(x) para $a \le x \le c$ e f(x) ≤ g(x) para $c \le x \le b$ então a área entre o eixo x e a curva f(x), para $a \le x \le b$ é dada por $A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b \left(-f(x)\right)dx$. Como podemos ver na próxima figura.

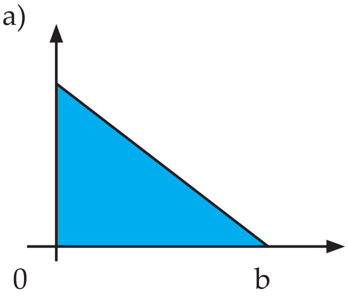


$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx + \int_a^b \left[g(x) - f(x)\right]dx$$

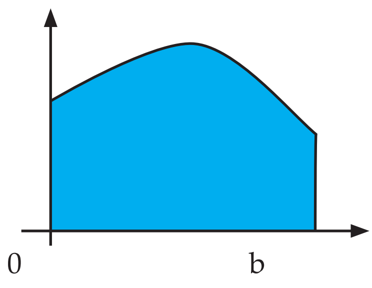
Parada para verificação dos seus conhecimentos

Encontre a área entre o eixo x e a curva f(x), para a ≤ x ≤ b em cada uma das figuras a seguir.

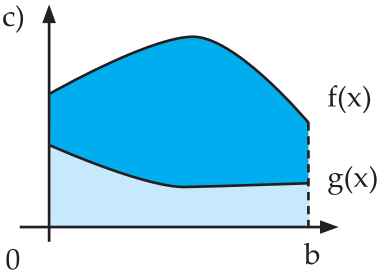
a)



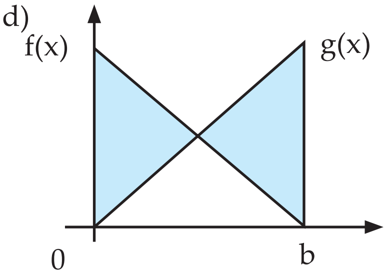
b)



c)



d)



Propriedades da integral definida

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Trocando os limites de integração, a integral muda de sinal.

2. $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, pois

$$\int_a^b k\, f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_1 \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\, f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_1 \to 0} k \sum_{i=1}^{n} f(x)dx =$$

$$= k \lim_{\max \Delta x \to 0_1} \sum_{i=1}^{n} f(x)dx = k\int_a^b k\, f(x)dx$$

3. $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$, pois

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \lim_{\max \Delta x_1 \to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(f(x) \pm g(x)\big)f(x)dx =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_1 \to 0} k \sum_{i=1}^{n} f(x)dx \pm \lim_{\max \Delta x \to 0_1} \sum_{i=1}^{n} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

4. $\int_a^a f(x)dx = 0$

A demonstração desta propriedade é deixada como exercício.

5. $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$

Demonstração:

Se no intervalo [a,b], as funções f(x) e φ(x) satisfazem à condição f(x) ≤ φ (x).

$$\int_a^b (\varphi(x) - f(x)) \;=\; \lim_{\max \Delta x_1 \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - f(x_i)) f(x)\Delta x_i$$

Se $\varphi(x) \geq f(x) \Rightarrow \varphi(x) - f(x) \geq 0$ e $\Delta x_i \geq 0$, temos

$$\int_a^b (\varphi(x) - f(x))\, dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$$

6. Sejam a,b e c sendo três números arbitrários então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^a g(x)dx$$

Vide 4.

7. Sendo m e M, respectivamente, o menor e o maior valor da função no intervalo [a,b], então, tem-se

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$$

Demonstração.
Por hipótese, no intervalo [a , b] , temos m < f(x) < M. Assim,

$$\int_a^b mdx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b Mdx$$

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ pelo TM, temos $\int_a^b f(x)dx = f(\xi_i)(b-a)$

Teorema do valor médio (TVM)

Como função f(x) é continua no intervalo [a,b], existe um ponto ξ tal que temos

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi_i)(b-a)$$

Demonstração.

Considerando que, respectivamente, m e M são o menor valor e o maior valor de f(x) no intervalo, teremos

$$m \le \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \le M$$

Sabemos que o resultado da integral é um número, seja tal número μ. Temos, então,

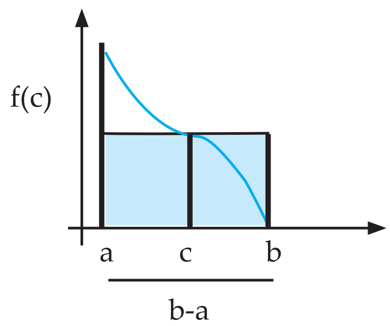
$$m \le \mu \le M \text{ com } \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx = \mu$$

Como a função é contínua no intervalo, haverá um valor de f(x) igual μ, isto é, um ponto ξ, com $a \le \xi \le b$, tal que $f(\xi) = \mu$.

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) = f(\xi_i)(b-a)$$

Definição de valor médio

Se f for integrável no intervalo [a,b], então seu valor médio em [a,b] é $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$



O valor f(c) é, de certa forma, a altura média de f em [a,b] . Quando $f \ge 0$ a área do retângulo representado na figura anterior é a área sob o gráfico de f desde a até b,

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$A = f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \; f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Teorema fundamental do Cálculo

Se f for contínua em [a,b], então a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivável em todo ponto x em [a,b] e

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Este teorema é conhecido como TFC e também pode ser reescrito da seguinte forma.

Se f é contínua em todo ponto de [a,b] e se F é uma primitiva de f em [a,b], então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Notação especial: Se f é contínua em todo ponto de [a,b], então a notação $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Método de substituições em integrais definidas

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

A fórmula anterior é utilizada substituindo u = g(x), du = g'(x) dx e integrando de g(a) até g(b).

Exemplo.

1. Determinar $\int_{-1}^{1} 5x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$

Na $\int_{-1}^{1} 5x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$ fazendo u = x^3 + 2 , temos du = $3x^2$ dx. Quando x → -1, u → 1 e quando x → 1, u → 3

Assim,

$$\int_{-1}^{1} 5x^2\sqrt{x^3+2}\,dx = \int_{1}^{3} 5\sqrt{u}\,du = \int_{1}^{3} 5u^{\frac{1}{2}}\,du = \left(5.\frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}}\right)_1^3 = \frac{10}{3}\sqrt{3^3} - \frac{10}{3}\sqrt{1^3} =$$

$$= \frac{30\sqrt{3}}{3} - \frac{10}{3} = \frac{30\sqrt{3}-10}{3}$$

2. Verificar que $\int_1^3 3x\,dx = 12$

Inicialmente, vamos calcular $\int 3xdx$.

Assim, $\int 3xdx = \dfrac{3x^2}{2} + C$

$\dfrac{3x^2}{2} + C$ é uma primitiva de f em [1,3], então

$$\int_1^3 3x\,dx = \left(\frac{3x^2}{2}\right)_1^3 = \left(\frac{33^2}{2}\right) - \left(\frac{31^2}{2}\right) = \frac{27}{2} - \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

3. Verificar que $\int_1^2 \frac{x^4}{2}\,dx = 3{,}1$

Inicialmente, vamos calcular $\int \dfrac{x^4}{2}dx$

Assim, $\int \dfrac{x^4}{2}dx = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^5}{5} = \dfrac{x^5}{10} + \text{C}$

$\frac{x^5}{10} + C$ é uma primitiva de f em [1,2], então

$$\int_1^2 \frac{x^4}{2}\,dx = \left(\frac{x^5}{10}\right)_1^2 = \left(\frac{2^5}{10}\right) - \left(\frac{1^5}{10}\right) = \frac{32}{10} - \frac{1}{10} = \frac{31}{10} = 3{,}1$$

4. Verificar que $\int_0^1 \left(x^2 + 1\right) dx = \frac{4}{3}$

Inicialmente, vamos calcular $\int_0^1 \left(x^2 + 1\right) dx$

Assim, $\int \left(x^2 + 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C$

$\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C$, é uma primitiva de f em [0,1], então

$$\int_0^1 \left(x^2 + 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0\right) = \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$$

5. Verificar que $\int_1^4 \left(\frac{1 - x}{\sqrt{x}}\right) dx = -\frac{8}{3}$

Inicialmente, vamos calcular $\int_1^4 \left(\frac{1 - x}{\sqrt{x}}\right) dx$

Assim, $\int \left(\frac{1 - x}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{-1}{2}} - x . x^{\frac{-1}{2}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{-1}{2}} - x^{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}\right) dx =$

$$= \int \left(x^{\frac{-1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{-1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2} + 1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3} + C$$

$2\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3} + C$ é uma primitiva de f em [1,4], então

$$\int_1^4 \left(\frac{1 - x}{\sqrt{x}}\right) dx = \left(2\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\right)_1^4 = \left(2\sqrt{4} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\right) - \left(2\sqrt{1} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{1}\right) =$$

$$= 4 - \frac{2}{3}.4.2 - 2 + \frac{2}{3} = 2 - \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = 2 - \frac{14}{3} = \frac{6 - 14}{3} = \frac{-8}{3}$$

6. Verificar que $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x^2}{(x^3+1)^2}\right)dx$

Inicialmente, vamos calcular $\int\left(\frac{x^2}{(x^3+1)^2}\right)dx$

A integral solicitada é resolvida utilizando o **método da substituição.** Fazendo

$u = x^3 + 1$, temos
$du = 3x^2\, dx$

$$\int\left(\frac{x^2}{(x^3+1)^2}\right)dx = \int\left(\frac{1}{3}\frac{1}{(u)^2}\right)du = \int\frac{1}{3}u^{-2}du = \frac{1}{3}\frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3u} + C =$$

$$= -\frac{1}{3(x^3+1)} + C$$

$-\frac{1}{3(x^3+1)} + C$, é uma primitiva de f em [-1/2,1], então

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x^2}{(x^3+1)^2}\right)dx = \left(-\frac{1}{3(x^3+1)}\right)_{-\frac{1}{2}}^{1} = \left(-\frac{1}{3(1^3+1)}\right) - \left(-\frac{1}{3\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^3+1\right)}\right) =$$

$$= \frac{-1}{6} - \frac{1}{\frac{-3}{8}+3} = \frac{-1}{6} - \frac{1}{\frac{-3}{8}+3} = \frac{-1}{6} - \frac{1}{\frac{-3}{8}+\frac{24}{8}} = \frac{-1}{6} - \frac{8}{21} = \frac{-21}{126} - \frac{48}{126}$$

$$= \frac{-69}{126} = -\frac{23}{42}$$

ou pode ser resolvida da seguinte maneira, sem voltar para a variável x. Fazendo, $u = x^3+1$, temos $du = 3x^2\, dx$. Quando $x \to -1/2$, $u \to 7/8$ e quando $x \to 1$, $u \to 2$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x^2}{(x^3+1)^2}\right)dx = \int_{\frac{7}{8}}^{2}\frac{1}{3}\,u^{-2}du = \left(-\frac{1}{3u}\right)_{\frac{7}{8}}^{2} = \left(-\frac{1}{3.2}\right)\left(-\frac{1}{3\frac{7}{8}}\right) = -\frac{1}{6} - \frac{8}{21}$$

$$= \frac{-21-48}{126} = \frac{-69}{126} = -\frac{23}{42}$$

7. Verificar que $\int_0^1 \left(x\sqrt{9-5x^2} \right) dx$

Inicialmente, vamos calcular $\int \left(x\sqrt{9-5x^2} \right) dx$

Esta integral é resolvida utilizando o **método da substituição.**
Fazendo

u = 9 - 5x^2
du = 10x dx

$$\int \left(x\sqrt{9-5x^2} \right) dx = \int \left(\frac{1+C}{10}\sqrt{u} \right) du = \int \left(\frac{1}{10} u^{\frac{1}{2}} \right) du = \frac{1}{10}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{u^3}}{30} + C = -\frac{2\sqrt{\left(9-5x^2\right)^3}}{30} + C$$

$-\dfrac{2\sqrt{\left(9-5x^2\right)^3}}{30} + C$, é uma primitiva de f em [0,1] então

$$\int_0^1 \left(x\sqrt{9-5x^2} \right) dx = \left(-\frac{\sqrt{\left(9-5x^2\right)^3}}{15} \right)\Bigg|_0^1 = \left(-\frac{\sqrt{\left(9-5\,1^2\right)^3}}{15} + \frac{\sqrt{\left(9-5\,0^2\right)^3}}{15} \right) =$$

$$\left(-\frac{\sqrt{(9-5)^3}}{15} + \frac{\sqrt{(9-0)^3}}{15} \right) = \frac{-8}{15} + \frac{27}{15} = \frac{19}{15}$$

ou pode ser resolvida da seguinte maneira, sem voltar para a variável x. Fazendo

u = 9 - 5x^2, quando x $\to$ 0, u $\to$ 9 e quando x $\to$ 1, u $\to$ 4
du = 10x dx

$$\int_0^1 \left(x\sqrt{9-5x^2} \right) dx = \left(-\frac{2\sqrt{u^3}}{30} \right)\Bigg|_9^4 = -\frac{2\sqrt{4^3}}{30} + \frac{2\sqrt{9^3}}{30} = \frac{-16}{30} + \frac{54}{30} = \frac{38}{30} = \frac{19}{15}$$

Parada para verificação dos seus conhecimentos

Calcule as seguintes integrais.

a) $\int_0^1 (3x+2)dx$

b) $\int_0^1 (3x^4+2x)\,dx$

c) $\int_1^2 \left(\frac{3}{2}x-2\sqrt{x}\right)dx$

d) $\int_2^3 (3x+4)dx$

e) $\int_{-3}^{-1} (4-8x+3x^2)\,dx$

f) $\int_1^5 (x^3-3x^2+1)\,dx$

g) $\int_1^3 (x-1)(x^2+x+1)\,dx$

h) $\int_0^1 (x^2+2)^2 dx$

i) $\int_1^5 \frac{x^4-16}{x^2+4}dx$

j) $\int_0^1 \sqrt{4-3x}\,dx$

k) $\int_0^2 \frac{x}{(x+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

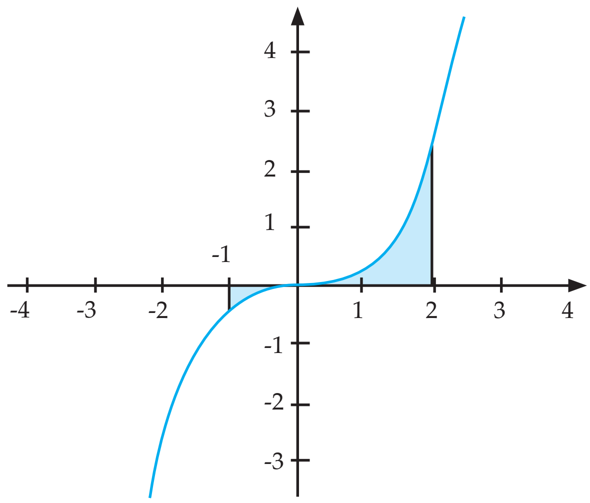
l) $\int_0^2 x^2\sqrt[3]{x^3+1}\,dx$

Capítulo III

ÁREAS DE REGIÕES PLANAS - APLICAÇÕES

1. Calcular a área A sob o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{3x^3}$, entre x = -1 e x = 2.

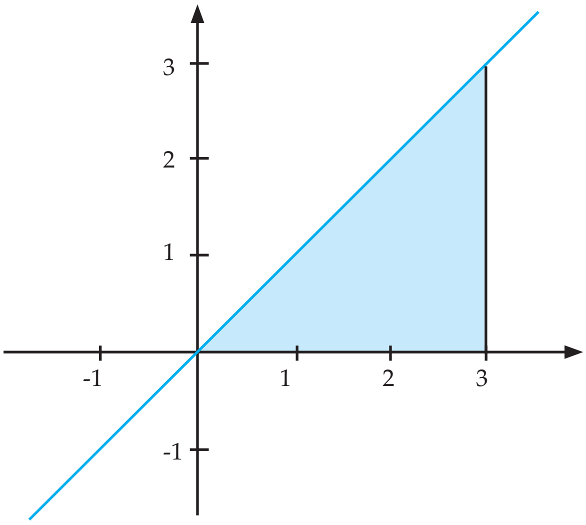
Observando a figura, precisamos calcular:



$$A = -\int_{-1}^{0} \frac{1}{3x^3}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{3x^3}\,dx = -\left(-\frac{1}{6}x^{-2}\right)\Big|_{-1}^{0} - \left(\frac{1}{6}x^{-2}\right)\Big|_{0}^{2} =$$

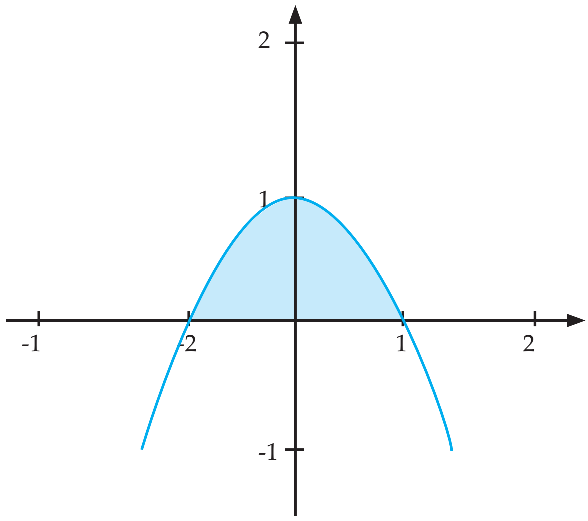
$$= \left(+\frac{1}{6}(-1)^{-2}\right) - \left(\frac{1}{6}2^{-2}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{4-1}{24} = \frac{3}{12}$$

2. Calcular a área A sob o gráfico da função f(x) = x, entre x = 0 e x = 3.



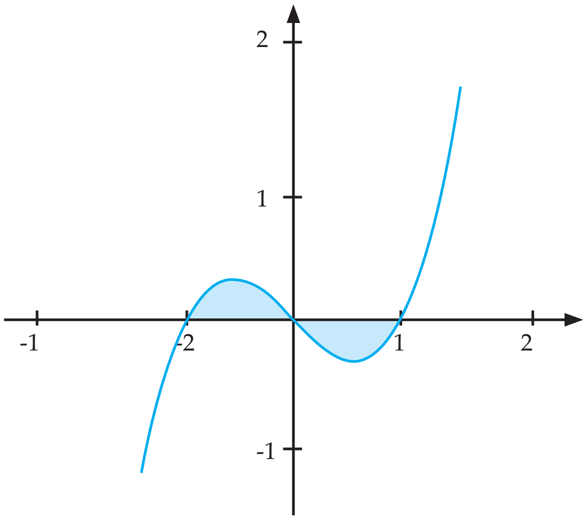
$$A = \int_0^3 x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^3 = \left(\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

3. Calcular a área A sob o gráfico da função $f(x) = 1 - x^2$, entre $x = -1$ e $x = 1$.



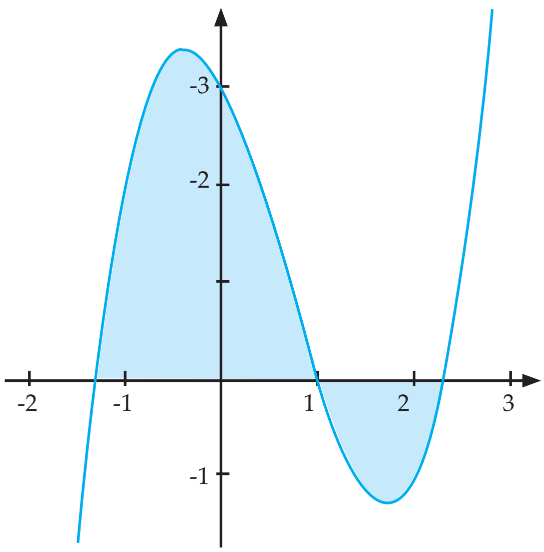
$$A = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1^2}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

4. Calcular a área A sob o gráfico da função f(x) = x^3 - x , entre x = - 1 e x = 1.



$$A = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - x\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4} - 1\right) - \left(\frac{1}{4} + 1\right) = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{8}{4}$$

5. Calcular a área A sob o gráfico da função f(x) = x^3 - $2x^2$ - 2x + 3, entre x = -1 e x = 2 e o eixo x.



$$A = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x^2 - 2x + 3\right) dx - \int_{1}^{2} \left(x^3 - 2x^2 - 2x + 3\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 3x\right)_{-1}^{1}$$

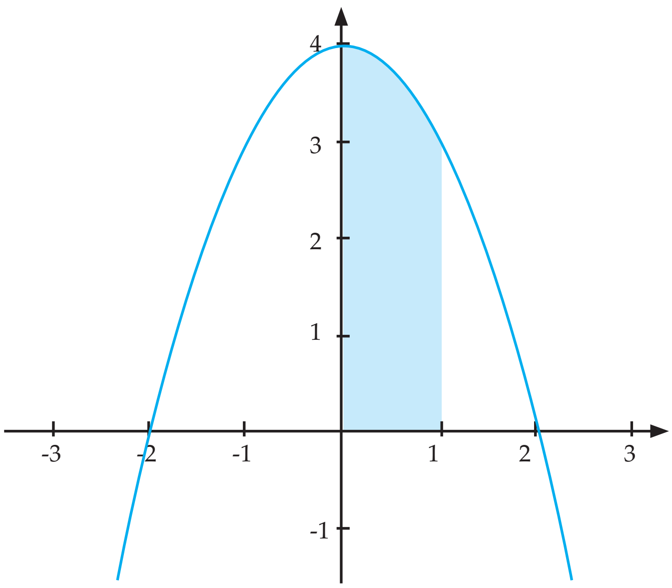
$$-\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 3x\right)_{1}^{2} = \left[\left(\frac{1^4}{4} - \frac{2}{3}1^3 - 1^2 + 3.1\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{2}{3}(-1)^3 - (-1)^2 + 3(-1)\right)\right] -$$

$$\left[\left(\frac{2^4}{4}-\frac{2}{3}2^3-2^2+6\right)-\left(\frac{(1)^4}{4}-\frac{2}{3}(1)^3-(1)^2+3(1)\right)\right]=$$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+2-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+4-\left(6-\frac{16}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-2\right)=-\frac{4}{3}+6-\left(4-\frac{1}{4}-\frac{14}{3}\right)=$$

$$-\frac{4}{3}+6-\left(\frac{48-3-56}{12}\right)=\frac{-16+72}{12}-\left(\frac{48-3-56}{12}\right)=\frac{56}{12}+\frac{11}{12}=\frac{67}{12}=5{,}6$$

6. Calcular a área da região do primeiro quadrante limitada pela curva f(x) = 4 - x², o eixo x, o eixo y e a reta x = 1.

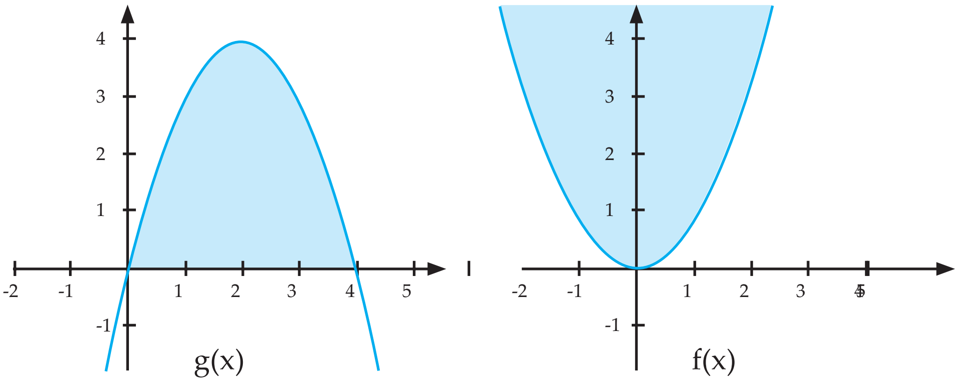


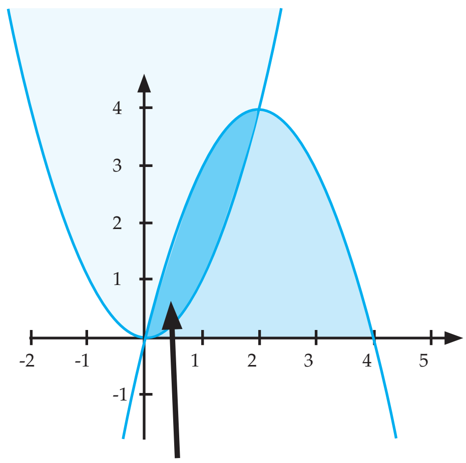
$$A=\int_0^1(4-x^2)dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)_0^1=\left(4-\frac{1^3}{3}\right)-0=\frac{11}{3}$$

$$A=\frac{11}{3}$$

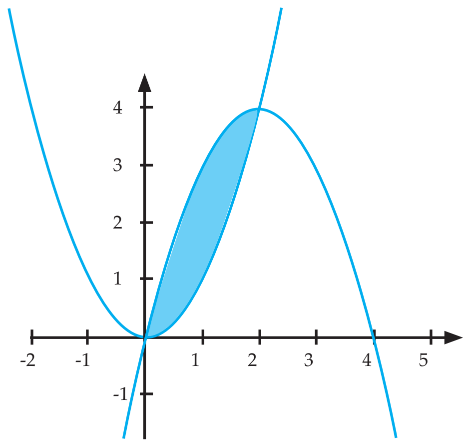
7. Calcular a área da região limitada pelas curvas f(x) = x² e g(x) = - x² + 4x.

A área da região limitada pelas curvas dadas, nada mais é do que a área da função g(x) menos a área da função f(x). Observe o gráfico das funções a seguir.




Interseção da função g(x) com a f(x)

Esboçamos o gráfico da função f(x) e g(x) separadamente. Depois esboçamos num mesmo plano cartesiano as duas funções.



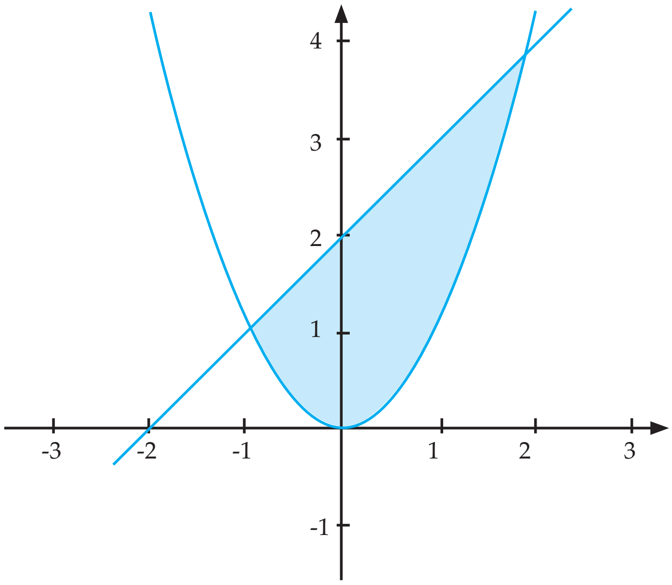
Vamos calcular a área dada por: $A = \int_0^2 g(x)dx - \int_0^2 f(x)dx$

Poderíamos ter escrito esta área da seguinte forma

$$A=\int_0^2 [g(x)-f(x)]dx=\int_0^2 \left(-x^2+4x-x^2\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-\frac{x^3}{3}\right)_0^2=$$

$$\left(-\frac{2^3}{3}+2.2^2-\frac{2^3}{3}\right)-0=\frac{-16}{3}+8=\frac{-16+24}{3}=\frac{8}{3}$$

8. Calcular a área da região limitada pelas curvas y = x + 2 e y = x²



$$A=\int_{-1}^{2}[(x+2)-(x^2)]dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{2^2}{2}+4-\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}-2-\frac{(-1)^3}{3}\right)=\left(\frac{12}{6}+\frac{24}{6}-\frac{16}{6}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{6}-\left(\frac{3}{6}-\frac{12}{6}+\frac{2}{6}\right)=\frac{20}{6}+\frac{7}{6}=\frac{27}{6}=4,5$$

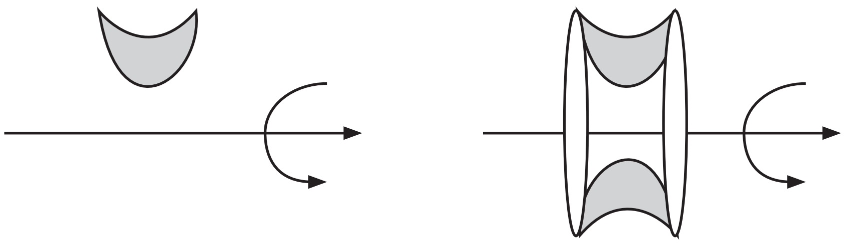
$$A=4,5$$

Capítulo IV

APLICAÇÕES - VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

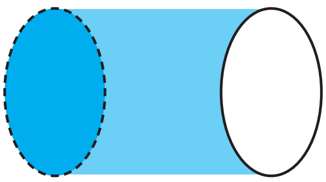
Sólidos de revolução

O sólido S gerado quando R é girado em torno da linha l como um eixo, é chamado sólido de revolução.

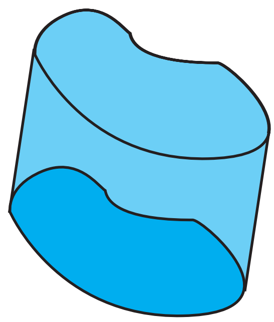


Volumes por fatiamento e rotação em torno de um eixo

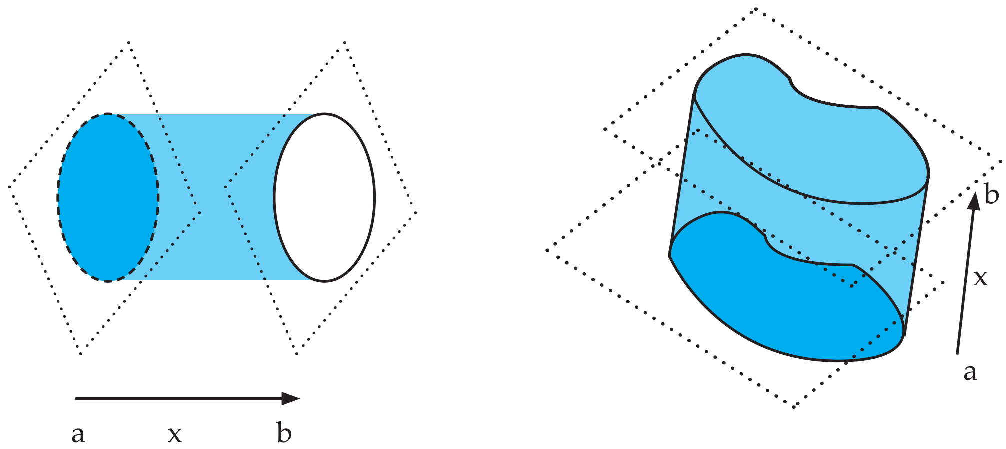
Vamos supor que precisamos determinar o volume de um sólido V(s), como o representado na figura a seguir.



ou, o volume de um sólido como o representado na próxima figura.



Consideremos os planos paralelos passando pelas bases dos sólidos, como na próxima figura.



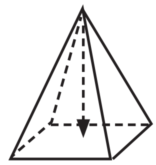
Consideremos as secções transversais dadas nas figuras a seguir.

Definição

O volume de um sólido compreendido entre os planos x = a e x = b e, cuja área da secção transversal a x é uma função integrável A(x), é a integral de a até b de A.

Exercícios

1. Calcular o volume de uma pirâmide reta de base quadrada.

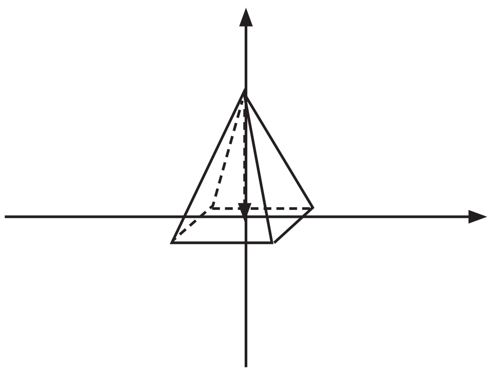


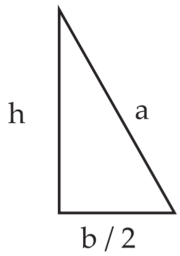
O volume da pirâmide é $V = \frac{1}{3} A_b.h$

A_b é a área da base e h é a altura da pirâmide.

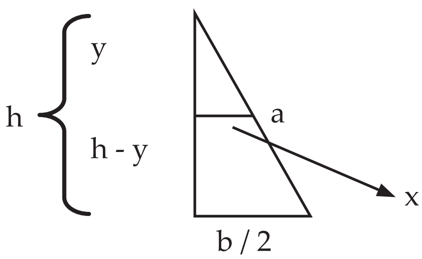
Seja b a medida da aresta da base. Assim, $V = \frac{1}{3} A_b.h = \frac{1}{3} b^2.h$

Coloquemos a pirâmide considerada no sistema de eixos coordenados x e y, com o eixo x passando pelo centro da base e o eixo y perpendicular a este, também passando pelo centro.





Para calcularmos o volume da pirâmide de base quadrada, precisamos fazer um corte transversal na altura h - y paralelo à base. A secção obtida é um quadrado, paralelo à base. A área do quadrado obtido é $A(S) = x^2$.



Ao examinarmos, por semelhança de triângulos de As, o corte longitudinal feito, podemos escrever

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{\frac{b}{2}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2h}{b} \Rightarrow x = \frac{yb}{2h}$$

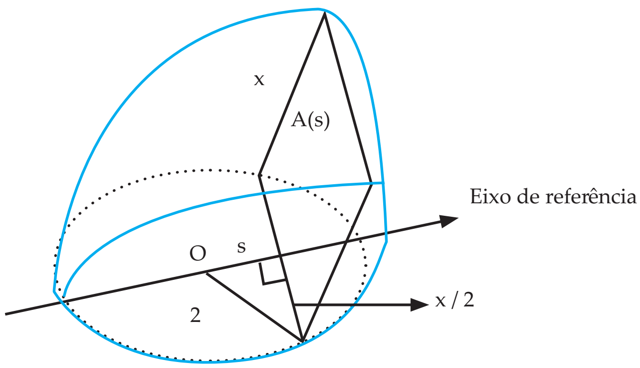
A área de cada secção transversal pode ser escrita

$$A(S) = (2x)^2 = 4\left(\frac{yb}{2h}\right)^2 = 4\frac{y^2b^2}{4h^2} = \frac{b^2}{h^2}.y^2$$

Logo, o volume da pirâmide é dado por

$$V(P) = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}.y^2\,dy = \left(\frac{b^2}{h^2}\frac{y^3}{3}\right)_0^h = \frac{1}{3}\frac{b^2}{h^2}h^3 - 0 = \frac{1}{3}b^2h$$

2. Calcular o volume de um sólido cuja base é um círculo de raio 2, se todas as seções de corte perpendiculares a um diâmetro fixo da base forem quadrados.



Seja x o comprimento do lado do quadrado.
No triângulo retângulo, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

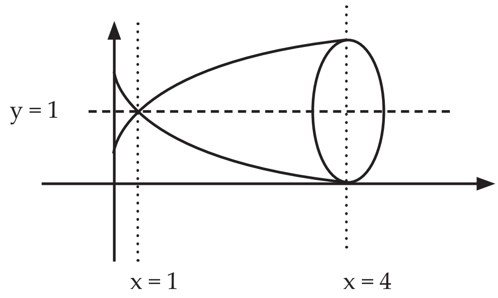
$s^2 + (x / 2)^2 = 2^2$
$4 - s^2 = x^2 /4$

A área do quadrado é $A(s) = x^2$. Logo, $A(s) = 4\,(4 - s^2)$

Pelo método da divisão de fatias

$$V = \int_{-2}^{2} 4(4 - s^2)\,ds = \left(16s - \frac{4s^3}{3}\right)_{-2}^{2} = \frac{128}{3}uc$$

3. Calcular o volume de um sólido obtido com a rotação, em torno da reta y = 1, da região definida por y = $\sqrt{x}$ e pelas retas y = 1 e x = 4.



Área do círculo: A= πr^2

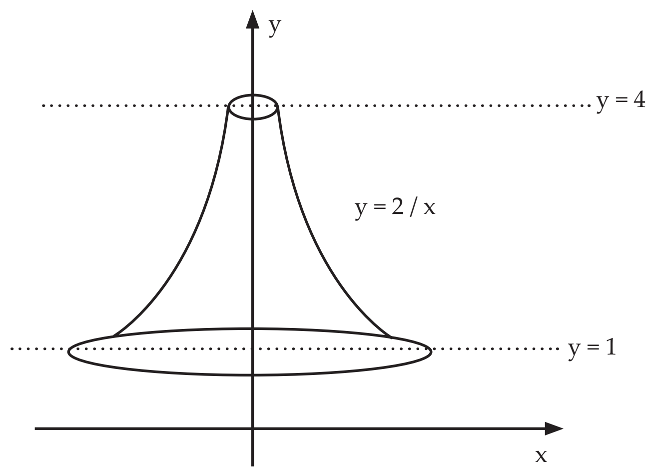
Vamos calcular o ponto de interseção da região $y = \sqrt{x}$ com a reta y = 1.

$$y = \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

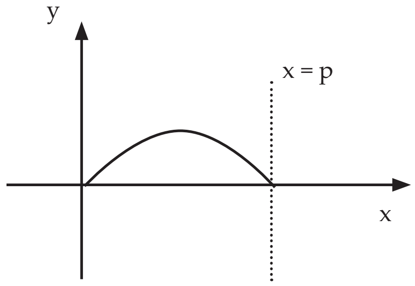
$$V = \int_1^4 \pi\, [R(x)]^2 dx = \int_1^4 \pi \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right)_1^4 = \frac{7\pi}{6} uc$$

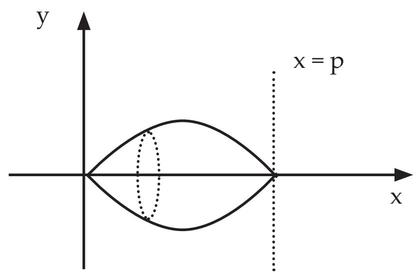
4. Calcular o volume de um sólido obtido com a rotação, em torno do eixo y, da região definida por y = 2 / y e pelo eixo y, $1 \le y \le 4$.

$$V = \int_1^4 \pi\, [R(x)]^2 dx = \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dx = 4\pi \left(-\frac{1}{y} \right)_1^4 = 4\pi\, \frac{3}{4} = 3\pi\ uc$$



5. Seja $f(x) = senx,\ x \in [o, \pi]$. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação do gráfico de f, ou seja pela rotação da região delimitada pelo eixo x, o gráfico de f e as retas x = 0 e x = π .





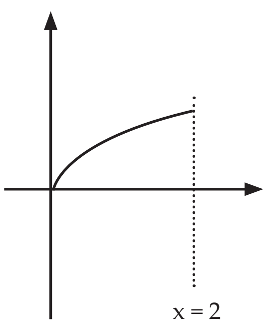
$$V = \pi \int_0^{\pi} sen^2 x\, dx$$

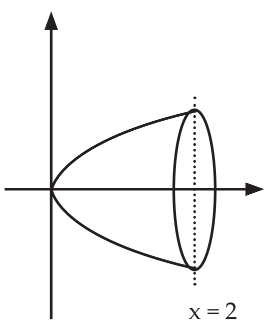
Sabemos que $\int sen^2 x\, dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{cos\ 2x}{4} + C$

Assim, $V = \pi \int_0^{\pi} sen^2 x\, dx = \pi \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\cos 2x}{4} \right)_0^{\pi} = \pi \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \right) = \dfrac{\pi^2}{2} uc.$

6. Seja $f(x) = \sqrt{x}$ para $0 \le x \le 2$. Calcule o volume dos dois sólidos gerados pela região do plano delimitada pelo eixo x, pelo gráfico de , sendo girada primeiro ao redor do eixo x e depois ao redor do eixo y.

a) Ao redor do eixo x.

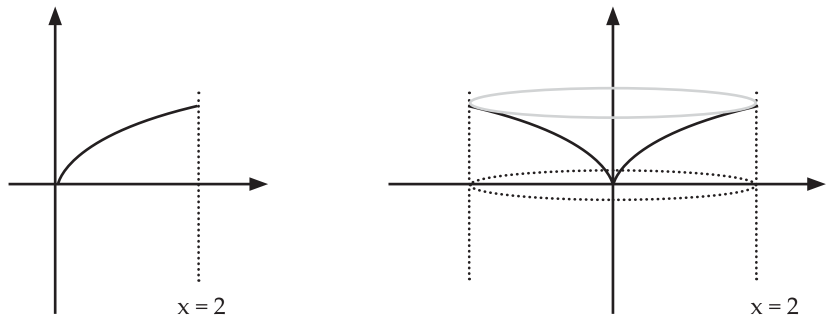




O volume do sólido do sólido gerado é dado por

$$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2\, dx = \pi \int_0^2 x\, dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^2 = \pi \left(\frac{4}{2} - 0 \right) = 2\pi\ uc.$$

b) Ao redor do eixo y.

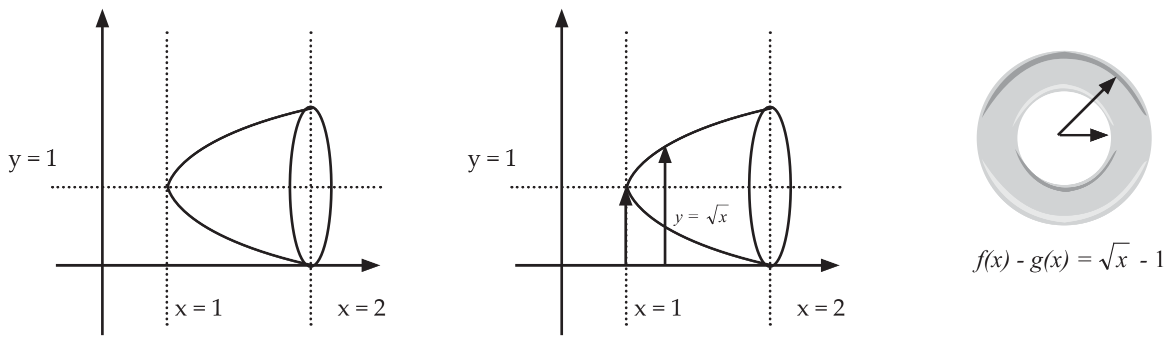


O volume do sólido do sólido gerado é dado por

$y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 2$, então y2 = x, $0 \le y \le \sqrt{2}$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} 4 - (y^2)^2 \, dx = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (4 - y^4)\, dx = \pi \left(4y - \frac{y^5}{5} \right)_0^{\sqrt{2}} = \pi \left(4\sqrt{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{5} \right)^5 \right) uc$$

7. Calcular o volume do sólido obtido com a rotação da reta y = 1 da região definida por $y = \sqrt{x}$ e pelas retas y = 1 e x = 4.



$$R(x) = \sqrt{x} - 1$$

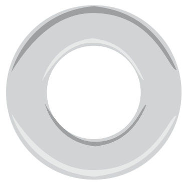
O volume do sólido do sólido gerado é dado por

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 \, dx = \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + x \right)_1^4 = \frac{7}{6} \pi \ uc.$$

Observação: Neste exercício observe que o eixo de integração não é o eixo x, mas a fórmula para calcular o volume é a mesma. Basta integrar π (raio)² entre os limites apropriados.

Método dos anéis circulares

Algumas vezes, quando giramos a região dada em torno de um eixo, obtemos um sólido com um orifício no meio ou arruelas.

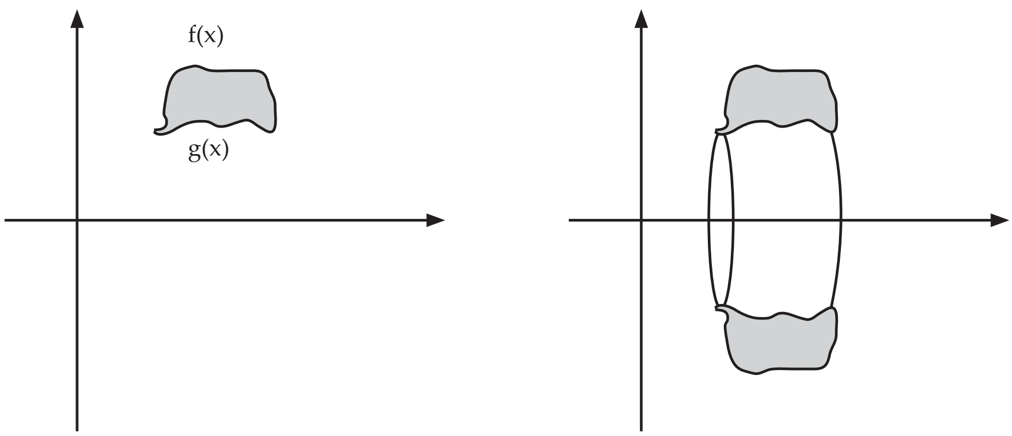


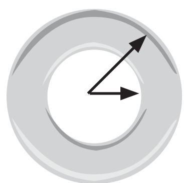
A área da arruela é dada por

$$A(x) = \pi\ R(x)^2 - \pi\ r(x)^2 = \pi\left[R(x)^2 - r(x)^2\right]$$

Normalmente este método é utilizado quando a área de revolução é limitada por duas funções f e g, tais que f(x) ≤ g(x), para todo x em [a,b].

Suponhamos que f e g são funções contínuas não-negativas no intervalo [a,b] tais que f(x) ≤ g(x), para todo x em [a,b], e seja R a região planar limitada pelos gráficos de f e g entre x = a e x = b. Seja S o sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.



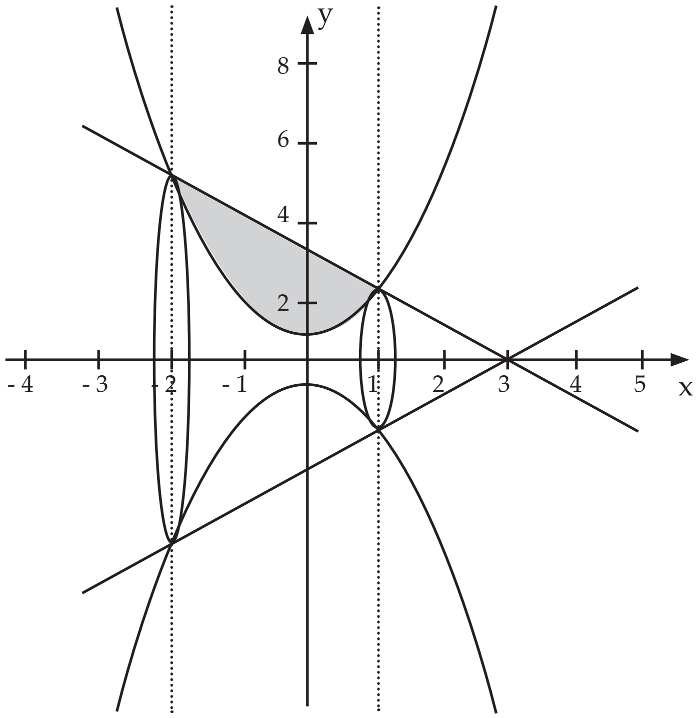


f(x) - g(x)

$$V(x) = \int_a^b \pi\left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx$$

Exercícios

1. Calcular o volume do sólido delimitado pela curva y = x² + 1 e pela reta y = - x + 3 em torno do eixo x.



$$V(x)=\int_a^b \pi\left[f(x)^2-g(x)^2\right]dx=$$

$$V(x)=\int_{-2}^{1}\pi\left[(-x+3)^2-(x^2+1)^2\right]dx=\int_{-2}^{1}\pi\left[(x^2-6x+9)-(x^4+2x^2+1)\right]dx=$$

$$V(x)=\int_{-2}^{1}\pi\left[(-x^4-x^2-6x+8)\right]dx=\left[\pi\;(-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}+8x)\right]_{-2}^{1}=$$

$$V(x)=\left[(-\frac{1^5}{5}-\frac{1^3}{3}-3+8)-(-\frac{(-2)^5}{5}-\frac{(-2)^3}{3}-3(-2)^2+8(-2)\right]\pi=$$

$$V(x)=\left[(-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+5)-(-\frac{(-2)^5}{5}-\frac{(-8)}{3}-12-16\right]\pi=$$

$$V(x)=\left[(-\frac{3}{15}-\frac{5}{15}+\frac{75}{15})-(\frac{32}{5}+\frac{8}{3}-28\right]\pi=$$

$$V(x)=\left[(\frac{67}{15})-(\frac{96}{15}+\frac{40}{15}-\frac{420}{15}\right]\pi=$$

$$V(x)=\left[(\frac{67}{15})-(-\frac{284}{15})\right]\pi=\left[\frac{67}{15}+\frac{284}{15}\right]\pi=\frac{351}{15}=\frac{117}{5}\pi\;uc$$

Capítulo V

COMPRIMENTO DO ARCO

Considerando-se que o comprimento de arco do gráfico da função

y = f(x) no intervalo [a , b] , é dada por: $\int_a^b 1+\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

e também considerando a área de uma superfície de evolução da

função y = f(x) no intervalo [a , b], é dada por

$$\int_a^b 2\pi \; f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

Exercícios.

1. Calcule o comprimento de arco das seguintes funções.

a) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$, entre os pontos (8,3) e (27,8).

b) $8x=y^4+\dfrac{2}{y^2}$, entre os pontos (3/8,1) e (36/16,2).

c) $y=x^{\frac{3}{2}}$, entre os pontos (0,0) e (4,8).

d) $y=\dfrac{1}{4}x^{\frac{2}{3}}$, entre os pontos (0,0) e (1,8).

2. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$ entre x = 1 e x = 4 em torno do eixo x .

3. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva $x = \sqrt{y}$ entre y = 0 e y = 4 em torno do eixo y .

4. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva y = 3x + 2 entre x = 0 e x = 3 em torno do eixo x .

5. Converta as coordenadas cartesianas dadas para coordenadas polares, com r ≥ 0 e $-\pi \le \theta \le \pi$.

a) (2 , 2) b) $(5, \frac{-5}{\sqrt{3}})$ c) (0 , - 7) d) (- 3, 3)

6. Converta as coordenadas polares dadas para as coordenadas cartesianas.

a) (4, 30°) b) $(-2, \frac{5\pi}{6})$

7. Dada a equação polar de um gráfico encontre a equação cartesiana.

a) $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$ b) $r^2 = 2\,\text{sen}\,2\theta$ c) $r^2 \cos 2\theta = 10$

d) $r^2 = \cos\theta$

Capítulo VI

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Objetivo: Calcular a área de regiões ilimitadas.

DEFINIÇÃO

Seja f integrável em [a, t] , para todo t > 0. Definamos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\ dx$$

Desde que o limite exista e seja finito. Tal limite denomina-se integral imprópria de f estendida ao intervalo [a, +∞[.

Observação.

Se $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\ dx$ for +∞ ou -∞ continuaremos a nos referir a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = +\infty \ \text{ ou } \int_a^{+\infty} f(x)\ dx = -\infty$$

Se ocorrer um destes casos ou se o limite não existir, diremos que a **integral imprópria é divergente**. Se o limite for finito, diremos que a integral imprópria é convergente.

ÁREA

Suponhamos f(x) ≥ 0 em [a, +∞] e que f seja integrável em [a, t] para todo t > a. Seja A o conjunto de todos (x, y) tais que 0 ≤ x ≤ f(x) e x ≥ a. Definamos a área de A por

$$A = \int_{a}^{+\infty} f(x)\ dx$$

Definição:

Seja f integrável em [-t, t] para todo t > 0. Definamos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$$

desde que ambas integrais do segundo membro seja convergentes.

Observação.
Se as 2 integrais que ocorrem no segundo membro, forem iguais a +∞ ou -∞, ou se uma delas for convergente e a outra +∞ ou -∞, poremos

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\ dx = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \int_{a}^{+\infty} f(x)\ dx = -\infty$$

Calcular.

a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{dx} =$ b) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{dx} =$ c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\ \mathrm{dx} =$

d) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{dx} =$ e) $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{dx} =$

Referências

ÁVILA, G.;Cálculo das Funções de uma variável – Vol 1 – Ed. L.T.C.

ANTON, Howard. Cálculo, um novo horizonte: Vol 1 e 2; Editora Bookman, 6ª edição, 2000.

BOULOS, PAULO; Cálculo Diferencial e Integral – Vol 1 – Ed.: Makron

FLEMMING, Diva M. e Gonçalves, Mírian B. - Cálculo A – Ed. Makron.

GUIDORIZZI, H.L., Um Curso de Cálculo, vol.2 e vol.3, Editora Ao Livro Técnico S.A., 1986.

KAPLAN, W., Cálculo Avançado, vol. 1, Editora da Universidade de São Paulo, S. P., 1972, a) pg. 24; b) pg. 26;

LARSON, R. ; Cálculo com geometria analítica, Volume I. Livros Técnicos e científicos S.A.

LEITHOLD L., Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1 e 2, Editora Harbra, 3a edição, 1994.

MUNEM, A. M. e Foulis, D. J., Cálculo, vol. 1, Guanabara Dois, R. J., 1982, a) pg. 303; b) pg. 287;

SIMMONS, G. F., Cálculo com Geometria Analítica, vol. 1, Makron Books do Brasil Editora Ltda, S. P., 1987, a) pg. 231, b) pg. 278;

STEWART, J.; Cálculo, Volumes I e II – Pioneira/Thomson Learnig

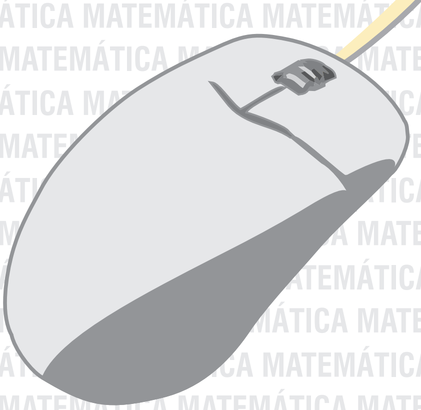
SWOKOWSKI, E.W.; Cálculo com geometria analítica, Volumes I e II. MacGraw Hill .

THOMAS Jr, G. B. e FINNEY, R. L., Cálculo Diferencial e Integral, vol. 1, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., R. J., 1982, a) pg. 193; b) pg. 220;

ead

CÁUCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
Coordenação e registro: Editora UFMS
Projeto gráfico: Lennon Godoi
Editoração eletrônica: Marcos Paulo de Souza
Fotolitos: Cromoarte - Editora e Publicidade Ltda

O presente material aborda o Cálculo Diferencial e Integral I. O cálculo está fundamentado em um conjunto de operações envolvendo quatro operadores: limite, diferencial, derivada, e integral. Através do limite se chega na diferencial e na derivada. A integral é uma operação sobre a diferencial; o resultado mais simples de uma integral é uma diferença, cuja aplicação é fundamental nas Ciências Exatas. Apresenta muitos exercícios resolvidos e outros para serem resolvidos.



UFMS
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância

UAB Universidade Aberta do Brasil

ISBN 978-85-7613-198-4